TEMA 3

Conexión y compacidad

1. Conexión en un espacio topológico. Propiedades. Componentes conexas.

Es este tema vamos a estudiar otras dos propiedades topológicas de gran importancia en la topología: la conexión y la compacidad. Comenzaremos con la más sencilla, la conexión. Se trata de ver de cuántos "trozos" consta el espacio topológico. Los espacios conexos son los análogos a los intervalos de la recta real. Así por ejemplo veremos que una función continua sobre un espacio topológico conexo verifica el teorema del valor medio. Pasemos ahora a dar la definición formal de conexión.

1.1. Definición de conexión. Propiedades.

DEFINICIÓN 3.1: Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *conexo* si no existen abiertos disjuntos y no vacíos A y B de X tales que $X = A \cup B$, equivalentemente si la única partición por abiertos que admite es la trivial es decir $X = X \cup \emptyset$.

Asimismo llamaremos espacio topológico *disconexo* a un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ no conexo, es decir a aquel que se puede escribir como $X = A \cup B$ para A y B abiertos disjuntos y no vacíos.

DEFINICIÓN 3.2: Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ diremos que $Y \subseteq X$ es un *subconjunto conexo* si $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es conexo.

EJEMPLOS 3.3:
1. $(X, \mathcal{T}_{\text{triv}})$ es conexo porque los únicos abiertos son $\emptyset$ y X. En particular si $X = \{x_0\}$, entonces X es conexo.
2. $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ es disconexo a menos que $X = \{x_0\}$ ya que siempre podemos escribir $X = (X \backslash \{x_0\}) \cup \{x_0\}$.
3. $X = \{0, 1\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ es conexo.
4. $(X, \mathcal{T}_{CF})$ es conexo si y sólo si X es infinito o $X = \{x_0\}$. Efectivamente, si $X = A \cup B$ con A y B abiertos disjuntos tenemos que $B = X \backslash A$ y $A = X \backslash B$ son finitos y así X sería finito.
5. La hipérbola $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ es disconexo ya que $H = H^+ \cup H^-$ con $H^+ = H \cap \{x > 0\}$ y $H^- = H \cap \{x < 0\}$.
6. $(\mathbb{R} \backslash \{a\}, \mathcal{T}_u)$ y $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$ son disconexos ya que $\mathbb{R} \backslash \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, \infty[$ y $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[) \cup (\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, \infty[)$.

Intuitivamente parece claro que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es conexo pero no es sencillo comprobarlo. Lo demostraremos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.4: *Un subconjunto $Y \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si Y es un intervalo o $Y = \{y_0\}$.*

Demostración: Supogamos que Y no es un intervalo ni un punto. Entonces existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x < y < z$, $x, z \in Y$ e $y \notin Y$. Luego podemos escribir

$$Y = A \cup B\ , \quad \text{con} \quad A = (]-\infty, y[\, \cap Y) \quad \text{y} \quad B = (]y, \infty[\, \cap Y)\ .$$

Es claro que A y B son abiertos disjuntos y además como $x \in A$ y $z \in B$ son no vacíos. Por lo que Y sería disconexo.

Es evidente que si Y es un punto entonces es conexo. Veamos que todo intervalo es un conjunto conexo. Supongamos que existiese un intervalo Y no conexo. Entonces $Y = A \cup B$ con A, B abiertos disjuntos y no vacíos de Y. De aquí se tiene que existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a \neq b$. Podemos suponer que $a < b$, en otro caso intercambiaríamos los papeles de a y b en lo que sigue.

Por ser A un abierto de Y existe O abierto de $\mathbb{R}$ tal que $A = O \cap Y$ y como $a \in A$ debe existir un $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq O$. Por otra parte como Y es un intervalo tenemos que $[a, b] \subseteq Y$. Luego podemos considerar ε suficientemente pequeño para que $[a, a + \epsilon[\subseteq [a, b]$ y así $[a, a + \epsilon[\subseteq O \cap [a, b] = A \cap [a, b]$.

Análogamente, es posible encontrar $\varepsilon' > 0$ para que $]b - \varepsilon', b] \subseteq B \cap [a, b]$.

Observemos que $\{A \cap [a, b]\}$ es un subconjunto acotado superiormente y no vacío por lo que podemos considerar $\alpha = \sup\{A \cap [a, b]\}$. Como $\alpha \in [a, b] \subseteq Y = A \cup B$, tenemos que $\alpha \in A$ o bien $\alpha \in B$. Si $\alpha \in A$ podemos razonar como antes y llegar a que existe $\delta > 0$ tal que $[\alpha, \alpha + \delta[\subseteq A \cap [a, b]$ lo cual contradice que α sea el supremo ya que α no sería cota superior del conjunto $A \cap [a, b]$. Análogamente, si $\alpha \in B$ llegaríamos a que existe $\delta' > 0$ tal que $]\alpha - \delta', \alpha] \subseteq B \cap [a, b]$ lo cual también supondría una contradicción con la definición de supremo ya que α no sería la menor de las cotas superiores del conjunto $A \cap [a, b]$. $\square$

TEOREMA 3.5: *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Entonces equivalen:*

i) *$(X, \mathcal{T})$ es conexo.*
ii) *Los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de $(X, \mathcal{T})$ son X y $\varnothing$.*
iii) *Ninguna aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{dis})$ puede ser sobreyectiva, es decir debe ser constante.*

Demostración: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Si A es un abierto y cerrado de X entonces A y $X \backslash A$ son abiertos disjuntos de X tal que $X = A \cup (X \backslash A)$. Por ser X conexa tenemos entonces que $A = \varnothing$ o $A = X$.

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ una aplicación continua. Por la continuidad tenemos que $A = f^{-1}(\{0\})$ es un subconjunto abierto y cerrado de X. Por la afirmación

ii) tenemos que $A = \emptyset$ o $A = X$. Es decir $f(X) = \{1\}$ o $f(X) = \{0\}$. En cualquiera de los casos f no es sobreyectiva.
$\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}$ Sean A y B subconjuntos abiertos y disjuntos de X tal que $X = A \cup B$. Consideremos la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ dada por $f \equiv 0$ sobre A y $f \equiv 1$ sobre B. Claramente esta es una aplicación continua por el Lema del pegado. Por iii) sabemos que no puede ser sobreyectiva por tanto $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$, es decir X es conexo. □

Corolario 3.6: *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo entonces $(f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)})$ es conexo. En particular la conexión es una propiedad topológica.*

Demostración: Si $f(X)$ no fuese conexo existiría por el teorema anterior una aplicación continua y sobreyectiva $g : (f(X), \mathcal{T}'|_{f(X)}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{\text{dis}})$. De aquí $g \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ sería una aplicación continua y sobreyectiva contradiciendo el hecho de que X es conexo. □

Como consecuencia de la proposición 3.4 y el corolario anterior tenemos:

Corolario 3.7: i) $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$ *es conexo.*
ii) $[a,b]$, $[a,b[$ *y* $]a,b[$ *no son homeomorfos.*
iii) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *no es homeomorfo a* $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$.

Demostración: Recordemos que en el tema anterior habíamos definido la aplicación continua y sobreyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$ y por tanto $f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$ es conexo.

En cuanto a la segunda, sugongamos por reducción al absurdo que existiría $f : [a,b] \to]a,b[$ un homeomorfismo. Entonces $[a,b] \backslash \{a\}$ sería homeomorfo a $]a,b[\backslash \{f(a)\}$. Pero $[a,b] \backslash \{a\} =]a,b]$ es conexo mientras que $]a,b[\backslash \{f(a)\} =]a,f(a)[\cup]f(a),b[$ no lo es. Razonamientos análogos demostrarían el resto del apartado ii).

Supongamos que existe $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo. Entonces $\mathbb{S}^1 \backslash \{(1,0)\}$ sería homeomorfo a $\mathbb{R} \backslash \{g(1,0)\}$ que ya hemos visto que era disconexo. Pero por otra parte $\mathbb{S}^1 \backslash \{(1,0)\} = f(]0,1[)$ que es conexo y llegaríamos por tanto a una contradicción. □

Problema 3.8: Los mismos argumentos pueden emplearse para probar que no existe ningún subconjunto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u|_{\mathbb{S}^1})$ (Problema 1).

Vamos a estudiar ahora algunas propiedades interesantes de las aplicaciones continuas definidas sobre conjuntos conexos. La primera de ellas es una generalización de un resultado bien conocido para funciones de variable real.

Proposición 3.9: ***(Teorema del valor medio)*** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico conexo y $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una aplicación continua. Si f toma dos valores distintos, entonces toma todos los valores intermedios.*

Demostración: Por ser f continua y X conexo tenemos que $f(X)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ y por tanto un intervalo o un punto. Observemos que no puede ser un punto porque por hipótesis f toma dos valores distintos. Luego $f(X)$ debe ser un intervalo. Si además existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = a$ y $f(x_1) = b$ con $a < b$ entonces $[a, b] \subseteq f(X)$. □

Proposición 3.10: ***(Teorema del punto fijo)*** *Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una aplicación continua entonces existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demostración: Consideremos la aplicación $h : [0, 1] \to [-1, 1]$ definida como $h(x) = f(x) - x$ que es continua en $[0, 1]$ que es un conexo. Además verifica $h(0) = f(0) \geqslant 0$ y $h(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Si $h(0) = 0$ o $h(1) = 0$ tendríamos $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$ por lo que ya tendríamos demostrada la proposición. Por tanto podemos suponer que $h(0) < 0$ y $h(1) > 0$. Aplicando el teorema anterior tendríamos que existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $h(x_0) = 0$ de donde $f(x_0) = x_0$. □

Proposición 3.11: ***(Teorema de la invarianza del dominio)*** *Sea A un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $f : A \to \mathbb{R}$ un embebimiento, esto es $f : A \to f(A)$ es un homeomorfismo. Entonces $f(A)$ es un abierto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.*

Demostración: Como $A \in \mathcal{T}_u$ se tiene que $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ con I_λ intervalo abierto. Entonces $f(I_\lambda)$ es conexo en $\mathbb{R}$, por ser la imagen continua de un conexo, y por tanto es un intervalo homeomorfo a I_λ, esto es, es un intervalo abierto. De aquí tenemos que $f(A) = f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(I_\lambda)$ que es un abierto de $\mathcal{T}_u$. □

Nos planteamos ahora qué pasa con la unión de conexos. Es claro que la unión de conexos no es conexo. Por ejemplo en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ la unión de dos intervalos disjuntos no es conexo. Veamos algunas condiciones que podemos imponer sobre los abiertos para que su unión sea conexa.

Propiedad 3.12: *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de subconjuntos conexos.*

i) *Si $\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es un conexo.*
ii) *Si existe $\beta \in \Lambda$ que verifica $A_\beta \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es un conexo.*
iii) *Si $\Lambda = \mathbb{N}$ y $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un conexo.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Sea $h : \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{dis})$ una aplicación continua. Entonces $h|_{A_\alpha} : A_\alpha \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{dis})$ es también una aplicación continua. Como A_α es conexo tenemos que $h|_{A_\alpha} = c_\alpha$ con $c_\alpha = 0$ o $c_\alpha = 1$. Pero podemos considerar $x_0 \in \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y calcular $h(x_0) = h|_\alpha(x_0) = c_\alpha$. Por tanto todas las constantes c_α son iguales y h no puede ser sobreyectiva.

La demostración de los apartados ii) y iii) es análoga. □

Ejemplos 3.13: 1. Un conjunto de rectas de $\mathbb{R}^n$ que se cortan dos a dos es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.

2. Un conjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ es un conexo. Recordemos que decimos que un subconjunto A de un espacio afín es estrellado con centro x_0 si todos los segmentos que unen x_0 con los puntos de A están contenidos en A. Para comprobar la anterior afirmación basta observar que los segmentos de $\mathbb{R}^n$ son conexos, por ser homeomorfos a intervalos de $\mathbb{R}$, y que un subconjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ con centro x_0 se puede escribir como unión de segmentos con intersección al menos x_0. En particular todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo, entre ellos $\mathbb{R}^n$.
3. Las esferas $\mathbb{S}^n$, para $n \geqslant 1$ son conexas. Efectivamente, observemos que $\mathbb{S}^n$ se puede escribir como $\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n\backslash\{N\}) \cup (\mathbb{S}^n\backslash\{S\})$, donde N y S son el polo norte y el polo sur, respectivamente. Es claro que $\mathbb{S}^n\backslash\{N\}$ y $\mathbb{S}^n\backslash\{P\}$ son abiertos conexos porque son homeomorfos, vía la proyección esteriográfica, a $\mathbb{R}^n$. Como estos abiertos tienen intersección no vacía, de la propiedad 3.12 obtenemos que $\mathbb{S}^n$ es conexo.
4. $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ es conexo para $n \geqslant 2$. Para $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ definimos $A_x = \mathbb{S}^{n-1} \cup [x, \frac{x}{\|x\|}]$, donde $[p,q]$ representa el segmento de $\mathbb{R}^n$ uniendo los puntos p y q. Observemos que todos estos conjuntos son conexos y que además $\mathbb{S}^{n-1}$ está en la intersección de todos ellos. Como consecuencia obtenemos que $\mathbb{R}^n\backslash\{p\}$ es conexo para $n \geqslant 2$ y $p \in \mathbb{R}^n$.

De lo anterior se deduce fácilmente el siguiente corolario:

Corolario 3.14: *1. $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, para $n \geqslant 2$.*
2. $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$, para $n \geqslant 2$.

Demostración: Basta observar que $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ es disconexo mientras que $\mathbb{R}^n\backslash\{x_0\}$ es conexo. Análogamente $\mathbb{S}^1\backslash\{N\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^n\backslash\{q\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Utilizando lo anterior tenemos que $\mathbb{S}^1\backslash\{N\}$ no puede ser homeomorfo a $\mathbb{S}^n\backslash\{q\}$. □

También es cierto que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos para $n \neq m$ pero en este curso no veremos las herramientas necesarias para probarlo.

Corolario 3.15: ***(El Teorema de Borsuk-Ulam)*** *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ una función continua para $n \geqslant 1$, entonces existe $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p) = f(-p)$.*

Demostración: Consideremos $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $h(x) = f(x) - f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$, que es una aplicación continua porque puede escribirse como $h = f - f \circ (-Id_{\mathbb{S}^n})$. Además $h(-x) = f(-x) - f(x) = -h(x)$, es decir h cambia de signo, y por tanto existe $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $h(p) = 0$ o equivalentemente $f(p) = f(-p)$. □

Como consecuencia del anterior resultado se deduce que para cualquier función continua sobre la tierra (por ejemplo, la temperatura, la presión, la altura, etc.) existen un par de puntos antipodales donde dicha función alcanza los mismos valores.

Proposición 3.16: *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto conexo de X. Si $B \subseteq X$ verifica $A \subseteq B \subseteq \mathrm{cl}(A)$ entonces B es conexo. En particular la clausura de un conexo es un conexo.*

Demostración: Sea $f : (B, \mathcal{T}|_B) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_{dis})$ una aplicación continua. Recordemos que $\mathrm{cl}_B(A) = \mathrm{cl}(A) \cap B = B$. Además por ser f continua tenemos que $f(B) = f(\mathrm{cl}_B(A)) \subseteq \mathrm{cl}(f(A))$. Pero como A es conexo, $f|_A$ es una aplicación constante y por tanto $\mathrm{cl}(f(A)) = \{0\}$ o bien $\mathrm{cl}(f(A)) = \{1\}$, es decir $f|_B$ es constante. □

Ejemplo 3.17: Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el siguiente subconjunto

$$X = \left\{ \left(x, \mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \mid x \in]0,1] \right\}$$

y observemos que X es conexo por ser la imagen por la aplicación continua $f(x) =$

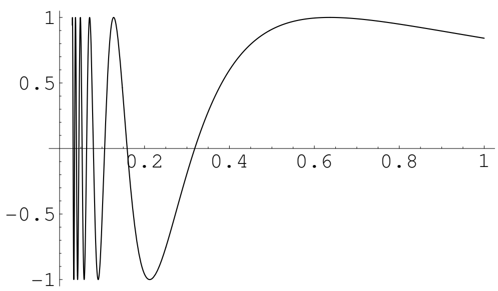

Figura 1. El conjunto X.

$\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ de un intervalo. No es difícil comprobar que la clausura de X es

$$Y = \overline{X} = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\} \cup \left\{ \left(x, \mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \mid x \in]0,1] \right\} .$$

Efectivamente, para todo $y \in [-1,1]$ existe $t \in [0, 2\pi[$ tal que $y = \mathrm{sen}(t) = \mathrm{sen}(t + 2\pi n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que entonces $f(\frac{1}{t+2\pi n}) = (\frac{1}{t+2\pi n}, y)$ que es una sucesión de puntos que converge a $(0,y)$ cuando n tiende a infinito y por tanto $(0,y) \in \overline{X}$.

Por la proposición anterior tenemos que Y es un conexo aunque intuitivamente no lo parezca. Es más si $B \subseteq [-1,1]$ el subconjunto $X \cup (\{0\} \times B)$ es conexo.

Problema 3.18: Como veremos en el problema 12 no es cierto que en general el interior y la frontera de un subconjunto conexo sean conexos.

Veamos ahora cómo se comporta la conexión con el producto de espacios topológicos.

Proposición 3.19: *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *e* $(Y, \mathcal{T}')$ *espacios topológicos. Entonces* $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ *es conexo si y sólo si* $(X, \mathcal{T})$ *e* $(Y, \mathcal{T}')$ *son conexos.*

Demostración: $\boxed{\Longrightarrow}$ Como las proyecciones $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$ son aplicaciones continuas y sobreyectivas tenemos que si $X \times Y$ es conexo, entonces $\pi_X(X \times Y) = X$ y $\pi_Y(X \times Y) = Y$ son también conexos.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Observemos que si X e Y son conexos y $(x, y) \in X \times Y$ entonces $X \times \{y\}$ y $\{x\} \times Y$ son subconjuntos de $X \times Y$ homeomorfos a X e Y, respectivamente, y por tanto conexos. Además para todo par de puntos $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in X \times Y$ podemos considerar $A_{p_1p_2} = (X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y)$ que es un subconjunto conexo de $X \times Y$ por ser unión de subconjuntos conexos con intersección no vacía ya que $(x_2, y_1) \in (X \times \{y_1\}) \cap (\{x_2\} \times Y)$. Finalmente $X \times Y = \bigcup_{p\in(X\times Y)} A_{p_1p}$ para $p_1 \in X \times Y$ fijo. Como $p_1 \in \bigcap_{p\in(X\times Y)} A_{p_1p}$ se sigue que $X \times Y$ es conexo. □

Ejemplos 3.20: 1. La proposición anterior nos proporciona otra forma de probar que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es conexo.
2. El cilindro $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^1} \times \mathcal{T}_u)$ es conexo.
3. El toro $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^1} \times (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^1})$ es conexo.

En cuanto a la intersección de conjuntos conexos en general no es conexo como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplos 3.21: 1. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos $\mathbb{S}^1$ y $L = \{(x, y) \mid y = 0\}$ que son conexos y observemos que $\mathbb{S}^1 \cap L = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ es disconexo.
2. Sabemos que $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ y $L = \{(x, y) \mid y = 0\}$ son conexos mientras que $(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \cap L = \{(x, y) \mid y = 0, x < 0\} \cup \{(x, y) \mid y = 0, x > 0\}$ es disconexo.

1.2. Componentes conexas. Ya comentamos que los espacios topológicos conexos eran aquellos que tenían una única "pieza" o "trozo". Nos interesa ahora estudiar los "trozos" de los espacios topológicos disconexos. Veremos que el número de estos trozos también es un invariante topológico.

Definición 3.22: Dado $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico se denomina *componente conexa* de un punto $x \in X$ a la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. Se denotará $C(x)$ o C_x a la componente conexa del punto x.

Propiedad 3.23: i) *$C(x)$ es el mayor conexo de X que contiene a x.*

ii) *Las componentes conexas determinan una partición de X, esto es, $X = \bigcup_{x\in X} C(x)$ y si $x, y \in X$ entonces $C(x) = C(y)$ o $C(x) \cap C(y) = \varnothing$.*

iii) *X es conexo si y sólo si tiene una única componente conexa, es decir $C(x) = X$, para todo $x \in X$.*

iv) *Las componentes conexas son cerradas en $(X, \mathcal{T})$.*

v) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición por subconjuntos conexos y abiertos de $(X, \mathcal{T})$. Entonces $\{A_i\}_{i\in I}$ es la familia de componentes conexas de X.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Evidente por ser unión de conexos con intersección no vacía, ya que todos ellos contienen a x.

$\boxed{\text{ii)}}$ En general $X = \bigcup_{x\in X} C(x)$. Supongamos que $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$ para $x, y \in X$. Entonces $C(x) \cup C(y)$ sería conexo y contendría a $\{x, y\}$. Por tanto $C(x) = C(y) = C(x) \cup C(y)$ y de aquí $C(x) = C(y)$.

$\boxed{\text{iii)}}$ Supongamos que X es conexo, entonces es claro que $C(x) = X$ para todo $x \in X$, ya que éste es el mayor conexo que contiene a x.

Recíprocamente supongamos que X tiene una única componente conexa, es decir $C(x) = C(x_0)$, para todo $x \in X$ y $x_0 \in X$ fijo. Entonces $X = \bigcup_{x\in X} C(x) = C(x_0)$ y por tanto X es conexo.

$\boxed{\text{iv)}}$ Observemos que $x \in C(x) = \overline{C(x)}$ que también es conexo por ser la clausura de un conexo. Utilizando el apartado i) tenemos entonces que $C(x) = \overline{C(x)}$ que es cerrado.

$\boxed{\text{iv)}}$ La demostración se deja como ejercicio (Problema 15 de la relación). □

Observación 3.24: 1. Podemos definir una relación de equivalencia diciendo que dos puntos están relacionados si existe un conexo que los contiene. Las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas.

2. Si el número de componentes conexas distintas es finito entonces además de ser cerradas son abiertas por ser el complementario de una unión finita de cerrados. En general las componentes conexas no son abiertas como veremos en algunos de los ejemplos siguientes.

Ejemplos 3.25: 1. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tiene dos componentes conexas: $C(x) =]-\infty, 0[$ para $x < 0$ y $C(x) =]0, \infty[$ para $x > 0$. En general $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ tiene una cantidad numerable de componentes conexas que son $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$. Observemos que en este ejemplo las componentes conexas son abiertos y cerrados en $\mathcal{T}_{u|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}}$.

2. Sea $X = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Observemos que $C(x) =]-\infty, 0]$ para $x \leqslant 0$, $C(x) =]1, \infty[$ para $x > 1$ y $C(x) =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ si $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$. En este caso hay componentes conexas que son abiertas y otras como $]-\infty, 0]$ que no lo es.

3. Las componentes conexas de $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{u|\mathbb{Q}})$ son los puntos, es decir $C(q) = \{q\}$. Observemos que en este caso ninguna componente conexa es abierta. Por otra parte

las componentes conexas de $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{dis})$ también son los puntos que en este caso son abiertos. Tenemos pues dos espacios topológicos distintos que presentan las mismas componentes conexas (recordemos que $\mathcal{T}_{u|\mathbb{Q}} \neq \mathcal{T}_{dis}$).

4. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el conjunto

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [(0,0),(1,\tfrac{1}{n})] \ .$$

No es difícil comprobar que $\overline{X} = X \cup [(0,0),(1,0)]$ y por tanto el conjunto

$$Y = X \cup \,](\tfrac{1}{2},0),(1,0)]$$

es conexo. Sin embargo $Y\backslash\{(0,0)\}$ sería disconexo y la componente conexa que contiene a un punto es el segmento al que pertenece ese punto.

Proposición 3.26: *Sea $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ una aplicación continua y $C(x)$ la componente conexa de x en X. Entonces $f(C(x))$ está contenida en $C'(f(x))$, donde $C'(f(x))$ denota la componente conexa de $f(x)$ en Y. Además si f es un homeomorfismo, entonces f define una biyección entre las componentes conexas de X y las de Y y la restricción de f a cada una de estas componentes conexas es un homeomorfismo.*

Demostración: Por ser f continua y $C(x)$ conexo tenemos que $f(C(x))$ es un conexo que contiene a $f(x)$. Como $C'(f(x))$ es el mayor conexo que contiene a $f(x)$ se tiene que $f(C(x)) \subseteq C'(f(x))$.

Si f es un homeomorfismo tenemos que f^{-1} es continua y aplicando de nuevo el resultado anterior tendríamos que

$$f^{-1}(C'(f(x))) \subseteq C(f^{-1}(f(x))) = C(x) \ .$$

Componiendo en ambas partes de la igualdad anterior con f obtenemos

$$C'(f(x)) = f(f^{-1}(C'(f(x)))) \subseteq f(C(x)) \subseteq C'(f(x))$$

y por tanto se da la igualdad. Finalmente es claro que $f_{|C(x)} : C(x) \to C'(f(x))$ es un homeomorfismo. □

Corolario 3.27: *El número de componentes conexas es un invariante topológico.*

Ejemplos 3.28: 1. $[0,1] \cup \{2\}$ no es homeomorfo a $[0,1] \cup \{2,3\}$ ni a $[0,1] \cup]2,3[$.

2. Consideremos $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ e $Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}^+)$. Observemos que X e Y no son homeomorfos ya que $X\backslash\{(0,0)\}$ tiene cuatro componentes conexas mientras que $Y\backslash\{p\}$ tiene dos o tres. Se define el *orden de un punto $p \in X$* como el número de componentes conexas de $X\backslash\{p\}$. Con esta definición el orden del punto $(0,0)$ en X es 4 mientras que el orden de los puntos de Y es 2 o 3.

Problema 3.29: Prueba que el espacio topológico X descrito anteriormente no es homeomorfo a $X' = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Por último vamos a ver como son las componentes conexas del producto.

PROPOSICIÓN 3.30: *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *e* $(Y, \mathcal{T}')$ *espacios topológicos, entonces* $C((x, y)) = C(x) \times C'(y)$ *para todo* $(x, y) \in X \times Y$.

Demostración: De la Proposición 3.26 tenemos que $p_1(C(x, y)) \subseteq C(x)$ y $p_2(C(x, y)) \subseteq C'(y)$. Por tanto, deducimos que $C((x, y)) \subseteq C(x) \times C'(y)$. Pero por la Proposición 3.19 sabemos que $C(x) \times C'(y)$ es un conexo que contiene a (x, y) y por tanto $C(x) \times C'(y) \subseteq C((x, y))$. De la doble inclusión se obtiene finalmente la igualdad. □

1.3. Conexión por arcos. La primera idea que históricamente se tuvo del concepto de "conexión" es la que hoy se denomina *conexión por arcos*. Dado un punto en un espacio topológico, nos preguntamos si podemos llegar a cualquier otro punto del espacio topológico mediante una curva continua. O dicho de otra forma si este punto puede viajar de forma continua a cualquier otro punto del espacio.

Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, diremos que el espacio topológico es conexo por arcos. Posteriormente, se comprobó que este concepto no era adecuado para diferenciar ciertos espacios topológicos de otros. En el lenguaje actual de la topología se diría que hay espacios topológicos que no son conexos por arcos pero sí conexos.

DEFINICIÓN 3.31: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se denomina *arco* en $(X, \mathcal{T})$ a una aplicación continua $\alpha : ([0, 1], \mathcal{T}_{u|[0,1]}) \to (X, \mathcal{T})$. A los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ se llaman *extremos del arco* y se dice que α une $\alpha(0)$ con $\alpha(1)$.

DEFINICIÓN 3.32: Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es *conexo por arcos* o *arco-conexo* si $\forall\, x, y \in X$ existe un arco de X que une x con y.

Se puede probar el siguiente resultado que nos relaciona la conexión por arcos y la conexión.

PROPOSICIÓN 3.33: *Todo espacio topológico conexo por arcos es conexo.*

Sin embargo, el recíproco del resultado anterior no es cierto como muestra el siguiente conocido ejemplo.

EJEMPLO 3.34: Recordemos que habíamos probado que el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$Y = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \mid x \in]0, 1]\right\} .$$

era conexo. Sin embargo, Y no es conexo por arcos.

Para ampliar la información sobre la conexión por arcos se pueden consultar los apuntes específicos sobre este tema.

2. Compacidad de un espacio topológico. Propiedades. Compacidad en $\mathbb{R}^n$ y en espacios métricos.

En este tema pretendemos generalizar el siguiente resultado:

Teorema de Weierstrass: *Toda aplicación continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alcanza sus extremos absolutos, es decir, existen $c, d \in [a,b]$ tales que $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$, para todo $x \in [a,b]$.*

Queremos ver qué condiciones debemos imponer a un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ para que toda función continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ alcance sus extremos absolutos. Con objeto de intuir cual es esa propiedad que hace falta imponer a $(X, \mathcal{T})$ observamos los siguientes hechos:

1. Si existe una familia finita de conjuntos tal que $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ tales que f es acotada en cada U_i, entonces f es acotada sobre todo X.
2. Siempre podemos descomponer $X = \cup_{i \in I} U_i$, donde cada $U_i \in \mathcal{T}$ y f es acotada en U_i. Efectivamente, utilizando que f es continua sabemos que $U_i = f^{-1}(B(f(x), 1))$ es un abierto de X tal que f es acotada en U_i y $X = \cup_{i \in I} U_i$.

Por lo anterior si pudiésemos quedarnos con una cantidad finita de estos abiertos tal que $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ tendríamos que f es acotada en X.

2.1. Definiciones.

Definición 3.35: Sea X un conjunto y $S \subseteq X$ un subconjunto. Llamaremos *recubrimiento de* S a una familia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que $S \subseteq \cup_{i \in I} U_i$. Un *subrecubrimiento* es una subfamilia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, que también es un recubrimiento de X. Si $S = X$ tenemos $X = \cup_{i \in I} U_i$.

Motivados por el razonamiento hecho en la introducción hacemos la siguiente definición.

Definición 3.36: Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *compacto* si de todo recubrimiento por abiertos de X podemos extraer un subrecubrimiento finito. Es decir para todo $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento por abiertos de X podemos elegir una cantidad finita $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$ tal que $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$.

Ejemplos 3.37: 1. $(X, \mathcal{T}_{triv})$ es compacto pues el único recubrimiento por abiertos de X es $\mathcal{A} = \{X\}$.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico con $\mathcal{T}$ una topología finita, entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto.
3. $(X, \mathcal{T}_{dis})$ es compacto si y sólo si X es finito. Efectivamente, si X es finito por el ejemplo anterior se tiene que $(X, \mathcal{T}_{dis})$ es compacto. Sin embargo si X es infinito

$\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ es un recubrimiento por abiertos del que no podemos extraer ningún subrecubrimiento finito.

4. $(X, \mathcal{T}_{CF})$ es compacto. En efecto, sea $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Elegimos un abierto $U_{i_0} \neq \emptyset$. Entonces, $X \backslash U_{i_0}$ es un conjunto finito, es decir $X \backslash U_{i_0} = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Sea $U_{i_j} \in \mathcal{A}$ tal que $x_j \in U_{i_j}$. Podemos afirmar entonces que
$$X = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} .$$
5. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ no es compacto. Para comprobar esto consideramos el recubrimiento $\mathcal{A} = \{]-n, n[\}_{n\in\mathbb{N}}$ y comprobamos que no admite ningún subrecubrimiento finito. Veamos que una subfamilia finita de $\mathcal{A}$ no puede recubrir $\mathbb{R}$. Efectivamente, dada $\{]-n_1, n_1[,]-n_2, n_2[, \ldots,]-n_k, n_k[\}$ subfamilia finita de $\mathcal{A}$ tenemos que $]-n_1, n_1[\cup \ldots \cup]-n_k, n_k[=]-n_{i_0}, n_{i_0}[$ para $n_0 = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_k\}$ y por tanto distinto de $\mathbb{R}$.

2.2. Subespacios compactos. Caracterización de los compactos de $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 3.38: Dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, diremos que un subespacio $S \subseteq X$ es *compacto* si $(S, \mathcal{T}|_S)$ es compacto.

OBSERVACIÓN 3.39: Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. De las propiedades de la topología inducida en un subconjunto se deduce que si tenemos $S \subseteq Y \subseteq X$ entonces S es compacto de X si y sólo si es compacto de Y. En otras palabras el concepto de compacto es, a diferencia de otros conceptos topológicos como los de abierto o cerrado, intrínseco es decir no depende del espacio total que consideremos.

PROPIEDAD 3.40: *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y $S \subseteq X$. Entonces S es* compacto *si y sólo si todo recubrimiento de S por abiertos de $(X, \mathcal{T})$ admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración: $\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que S es compacto y $S \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ para $U_i \in \mathcal{T}$. Entonces $\{U_i \cap S\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de S por abiertos de $\mathcal{T}|_S$. Por tanto existen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ tales que
$$S = (U_{i_1} \cap S) \cup \ldots (U_{i_k} \cap S) .$$
De aquí $S \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Consideremos ahora $\{U'_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de $\mathcal{T}|_S$ tal que $S = \cup_{i\in I} U'_i$. Sabemos entonces que cada abierto $U'_i = U_i \cap S$ para $U_i \in \mathcal{T}$. Observemos que entonces $S \subseteq \cup_{i\in I} U_i$. Por hipótesis existen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ tales que $S \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$. De aquí
$$S = (U_{i_1} \cap S) \cup \ldots \cup (U_{i_k} \cap S) = U'_{i_1} \cup \ldots \cup U'_{i_k}$$
y por tanto S es compacto. □

Ejemplos 3.41: 1. Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a x entonces $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ es un compacto. Supongamos que $S \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ para $U_i \in \mathcal{T}$ y sea U_{i_0} un abierto que contenga a x. Por la convergencia existe n_0 tal que para $n \geqslant n_0$, $x_n \in U_{i_0}$. Basta considerar ahora U_{i_n} para que $x_n \in U_{i_n}$, $n = 1, \ldots, n_0 - 1$. Es claro entonces que

$$S \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \ldots U_{i_{n_0-1}} .$$

2. El intervalo $(0,1)$ no es compacto pues $(0,1) = \cup_{n\geqslant 2}(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ y no es posible encontrar un subrecubrimiento finito.
3. $\mathbb{Q}$ no es compacto ya que $\mathbb{Q} \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[$ y no se puede extraer un subrecubrimiento finito pues en ese caso $\mathbb{Q}$ estaría acotado.

Veamos ahora algunas propiedades de los subespacios compactos.

Propiedad 3.42: i) *Un subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.*
ii) *Todo subespacio compacto de un espacio topológico Hausdorff es cerrado.*

Demostración: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $S \subseteq X$. Supongamos en primer lugar que S es cerrado y $(X,\mathcal{T})$ es compacto y consideremos $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de S por abiertos de $\mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{A} \cup \{X\backslash S\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como $(X,\mathcal{T})$ es compacto existe un subrecubrimiento finito, es decir existen $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}\}$ tal que $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k} \cup (X\backslash S)$. Observemos que entonces $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}\}$ es un subrecubrimiento finito de S.

Supongamos ahora que S es un subconjunto compacto y que $(X,\mathcal{T})$ es Hausdoff. Si $S = \varnothing$ o $S = X$ ya tenemos que S es cerrado. Podemos suponer por tanto que $\varnothing \neq S \neq X$. Para ver que S es cerrado probaremos que $X\backslash S \in \mathcal{T}$. Para ello consideramos $x \in X\backslash S$. Observemos que para todo $y \in S$ se tiene $x \neq y$ y por ser $(X,\mathcal{T})$ Hausdorff, existen U_y y U'_y abiertos disjuntos de $\mathcal{T}$ tales que $x \in U'_y$ e $y \in U_y$. Claramente $\{U_y\}_{y\in S}$ es un recubrimiento por abiertos de S del cual podemos extraer un subrecubrimiento finito $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_k}\}$. Definimos $U' = U'_{y_1} \cap \cdots \cap U'_{y_k}$ que es trivialmente un abierto que contiene a x. Además $U' \subseteq X\backslash S$. Efectivamente si $z \in U'$ tenemos que $z \in U'_{y_j}$ para todo $j = 1, \ldots, k$ y por tanto $z \notin U_{y_j}$ para todo $j = 1, \ldots, k$, es decir $z \notin S$. De aquí deducimos que $x \in U' \subseteq X\backslash S$. □

Corolario 3.43: *Un subespacio compacto de un espacio topológico metrizable es cerrado y acotado.*

Demostración: Sea S un compacto de un espacio topológico metrizable $(X,\mathcal{T})$, donde $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ para d distancia en S. Veamos en primer lugar que S ha de estar acotado, es decir contenido en una bola. Observemos que podemos considerar el recubrimiento de X dado por $\{B^d(p,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $p \in X$ es un punto fijo. Como S es compacto podemos afirmar que $S \subseteq B^d(p,n_1) \cup \ldots \cup B^d(p,n_k)$. Si definimos $r = \max\{n_1,\ldots,n_k\}$ tenemos que $S \subseteq B^d(p,r)$. Por otra parte como S es un subespacio compacto de $(X,\mathcal{T})$ que es Hausdorff, del apartado ii) de la propiedad 3.42 tenemos que S es cerrado. ▫

A continuación vamos a caracterizar los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

TEOREMA 3.44: ***(Teorema de Heine-Borel)*** *Todo intervalo cerrado y acotado en* $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ *es compacto.*

Demostración: Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a,b]$ por abiertos de $\mathbb{R}$. Definimos el siguiente conjunto

$$G = \{x \in [a,b] \mid \exists n \in \mathbb{N}, [a,x] \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}\} \ .$$

Observemos en primer lugar que $G \neq \varnothing$ ya que $a \in G$. De la definición es evidente que si $x \in G$ entonces para todo $y \in [a,b]$ con $y \leqslant x$ se tiene $y \in G$. Por lo tanto si $x \in G$ tenemos que $[a,x] \subseteq G$. Para probar que $[a,b]$ es compacto es suficiente comprobar que $b \in G$. Para ello vamos a demostrar que G es un subconjunto cerrado y abierto de $[a,b]$. Como $[a,b]$ es conexo y G es no vacío tendremos que $G = [a,b]$.

Veamos que G es un cerrado de $[a,b]$. Sea $x \in \mathrm{cl}_{[a,b]}(G)$. Sabemos entonces que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ que converge a x. Consideremos el abierto $U_{i_0} \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U_{i_0}$. Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Además podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$, $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. De lo anterior tenemos

$$[a,x] \subseteq [a, x+\varepsilon[\subseteq [a, x_{n_0}] \cup (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq [a, x_{n_0}] \cup U_{i_0}$$

y por tanto $x \in G$.

Comprobemos ahora que G es abierto en $[a,b]$. Sea $x \in G$. Entonces existe $U_{i_0} \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U_{i_0}$. De aquí existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Para $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [a,b]$ tenemos

$$[a,y] \subseteq [a,x] \cup (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq [a,x] \cup U_{i_0} \ .$$

Por tanto se tiene $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [a,b] \subseteq G$ y así G es abierto. ▫

COROLARIO 3.45: *Un subespacio de* $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ *es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración: $\boxed{\Longrightarrow}$ Se sigue directamente del Corolario 3.43.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Por ser S acotado tenemos que existen $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $S \subseteq [a,b]$. Como además S es cerrado y por el Teorema de Heine-Borel $[a,b]$ es un compacto de $(X,\mathcal{T})$, de la afirmación i) en la propiedad 3.42 obtenemos que S es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$. ▫

2.3. Propiedades de los compactos. Comenzaremos dando otras caracterizaciones de la compacidad en función de los conjuntos cerrados y de bases de la topología.

Propiedad 3.46: *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces equivalen:*

i) *$(X, \mathcal{T})$ es compacto.*
ii) *Para cualquier familia de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ tal que $\cap_{i\in I} C_i = \emptyset$ existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $\cap_{i\in J} C_i = \emptyset$.*
iii) *Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología, todo recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{B}$ tiene un subrecubrimiento finito.*

Demostración: La equivalencia i) $\Leftrightarrow$ ii) y la implicación i) $\Rightarrow$ iii) son evidentes. Comprobemos iii) $\Rightarrow$ i). Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X. Definimos entonces $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists i \in I, B \subseteq U_i\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de X por abiertos de la base $\mathcal{B}$. Por hipótesis tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X = B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_k}$. Es claro entonces que $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}$. □

También se tiene el siguiente resultado que nos da una condición suficiente para la compacidad en función de recubrimientos del espacio topológico por abiertos subbásicos.

Proposición 3.47: ***(Lema de la sub-base de Alexander)*** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una sub-base de $(X, \mathcal{T})$. Si todo recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{S}$ tiene un subrecubrimiento finito, entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto.*

Estudiaremos ahora cómo es el comportamiento de los compactos respecto de las aplicaciones continuas.

Propiedad 3.48: *Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación continua y $(X, \mathcal{T})$ es compacto entonces $f(X)$ también es compacto. En particular la compacidad es una propiedad topológica.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} = \{U_i'\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de Y. Entonces, por ser f continua $\{f^{-1}(U_i')\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto existe $\{f^{-1}(U_{i_1}'), \ldots, f^{-1}(U_{i_k}')\}$ subrecubrimiento finito de X. De aquí $\{U_{i_1}', \ldots, U_{i_k}'\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ para $f(X)$. □

Ejemplo 3.49: $(S^1, \mathcal{T}_u)$ es compacto. Basta observar que la aplicación $f : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ es continua y $[0, 1]$ es compacto.

Sin embargo la compacidad no es hereditaria como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.50: $(0, 1) \subseteq [0, 1]$ y $[0, 1]$ es compacto, mientras que ya vimos que $(0, 1)$ no lo es.

Teorema 3.51: ***(Teorema de Tychonoff)*** *Sean* $(X,\mathcal{T})$ *e* $(Y,\mathcal{T}')$ *dos espacios topológicos. Entonces* $(X\times Y,\mathcal{T}\times\mathcal{T}')$ *es compacto si y sólo si* $(X,\mathcal{T})$ *e* $(Y,\mathcal{T}')$ *son compactos.*

Para la demostración de este teorema utilizaremos el siguiente resultado previo:

Lema 3.52: ***(Lema del Tubo)*** *Sean* $(X,\mathcal{T})$ *e* $(Y,\mathcal{T}')$ *dos espacios topológicos con* $(Y,\mathcal{T}')$ *compacto y* $W\in\mathcal{T}\times\mathcal{T}'$ *tal que* $\{x\}\times Y\subseteq W$ *para* $x\in X$. *Entonces existe* $U\in\mathcal{T}$ *tal que* $x\in U$ *y* $U\times Y\subseteq W$.

Demostración: Dado $y\in Y$ tenemos que $(x,y)\in\{x\}\times Y\subseteq W$. Como $W\in\mathcal{T}\times\mathcal{T}'$ existen $U_y\in\mathcal{T}$ y $U'_y\in\mathcal{T}'$ tales que

$$(x,y)\in U_y\times U'_y\subseteq W\ .$$

Por tanto $\{U'_y\}_{y\in Y}$ es un recubrimiento de Y por abiertos de $\mathcal{T}'$. Como $(Y,\mathcal{T}')$ es compacto sabemos que existen $\{U'_{y_1},\dots,U'_{y_k}\}$ tal que $Y=U'_{y_1}\cup\cdots\cup U'_{y_k}$. Definimos ahora $U=U_{y_1}\cap\cdots\cap U_{y_k}$. Tenemos entonces que $x\in U$ y $U\in\mathcal{T}$ por ser intersección finita de abiertos de $\mathcal{T}$. Además

$$\begin{aligned} U\times Y &\subseteq U\times(U'_{y_1}\cup\cdots\cup U'_{y_k})=(U\times U'_{y_1})\cup\cdots\cup(U\times U'_{y_k})\\ &\subseteq (U_{y_1}\times U'_{y_1})\cup\cdots\cup(U_{y_k}\times U'_{y_k})\subseteq W\ . \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema de Tychonoff:
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $(X\times Y,\mathcal{T}\times\mathcal{T}')$ es compacto. Entonces tenemos que $X=\pi_X(X\times Y)$ e $Y=\pi_Y(X\times Y)$, π_X y π_Y son compactos por ser la imagen mediante dos aplicaciones continuas de un compacto.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $(X,\mathcal{T})$ e $(Y,\mathcal{T}')$ son dos espacios topológicos compactos. Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $X\times Y$ por abiertos de $\mathcal{T}\times\mathcal{T}'$. Para cada $x\in X$ consideramos $\{x\}\times Y$ la placa paralela a Y que pasa por x. Observemos que

$$\{x\}\times Y\subseteq X\times Y\subseteq\bigcup_{i\in I}W_i\ .$$

Notemos que $\{x\}\times Y$ es compacto por ser homeomorfo a Y que es compacto. Por tanto existe un subconjunto finito $I_x\subset I$ tal que

$$\{x\}\times Y\subseteq\bigcup_{i\in I_x}W_i=O_x\in\mathcal{T}\times\mathcal{T}'\ .$$

Aplicando entonces el Lema del tubo obtenemos que existe $U_x\in\mathcal{T}$ tal que $x\in U_x$ y $U_x\times Y\subseteq O_x$. Observemos que entonces $\{U_x\}_{x\in X}$ es un recubrimiento de X por abiertos de $\mathcal{T}$. Como $(X,\mathcal{T})$ es compacto tenemos que existen $\{U_{x_1},\dots,U_{x_k}\}$ tal que

$X \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. De aquí tenemos

$$\begin{aligned} X \times Y &\subseteq (U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}) \times Y \subseteq (U_{x_1} \times Y) \cup \cdots \cup (U_{x_k} \times Y) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \Big(\bigcup_{i \in I_{x_i}} W_i \Big) . \end{aligned}$$

□

Observación 3.53: El teorema anterior se puede generalizar fácilmente por inducción al producto de una cantidad finita de espacios topológicos $(X_1 \times \cdots \times X_r, \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_r)$. Utilizando el Lema de la sub-base de Alexander se puede probar también que el Teorema de Tychonoff es cierto para un producto infinito de espacios topológicos.

Una aplicación inmediata de la observación anterior es el siguiente resultado.

Teorema 3.54: ***(Teorema Heine-Borel generalizado)*** *Un subespacio S del espacio topológico $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es compacto si y sólo si S es cerrado y acotado.*

Demostración: Del corolario 3.43 ya sabemos que si S es un subespacio compacto de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ entonces S es cerrado y acotado. Recíprocamente, supongamos que S sea un subconjunto cerrado y acotado de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$. Por estar acotado tenemos $S \subseteq B = [-r, r] \times \cdots \times [-r, r]$ para algún $r > 0$. Pero B es compacto por ser producto de intervalos que son compactos. Como S es un subconjunto cerrado de un compacto, de la afirmación i) en la propiedad 3.42 tenemos que S es compacto. □

Ejemplos 3.55: 1. $\mathbb{S}^n$ es compacto.
2. $\mathbb{R}^n$ no es compacto.
3. El toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es compacto.
4. De todas las cuádricas la única que es compacta es el elipsoide.

Observación 3.56: El teorema de Heine-Borel generalizado no es cierto en cualquier espacio métrico. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la métrica

$$\widetilde{d}(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\} ,$$

donde d es la distancia usual. En el Ejercicio 2 del Tema 1 vimos que $\mathcal{T}_{\widetilde{d}} = \mathcal{T}_d$. Pero el concepto de acotado no es el mismo en las dos métricas. $\mathbb{R}^n$ es acotado respecto de la métrica $\widetilde{d}$ y sin embargo ya sabemos que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ no es compacto.

En cambio el teorema si es cierto si consideramos en lugar de la métrica usual, las métricas

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad , \quad d_\infty(x, y) = \text{máx}\{|x_i - y_i|, i \in \{1, \ldots, n\}\} ,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Basta observar que estas métricas son equivalentes a la métrica usual y además el concepto de acotado coincide para todas ellas.

COROLARIO 3.57: *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto, entonces toda función continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es acotada y alcanza el máximo y el mínimo en X.*

Demostración: De la propiedad 3.48 tenemos que $f(X)$ es un compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Pero hemos visto que los compactos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ deben ser acotados, con lo cual f es acotada. Sean $a = \inf f(X)$ y $b = \sup f(X)$. Como además sabemos que $f(X)$ es cerrado tenemos que $a, b \in f(X)$. De aquí existen $x, y \in X$ tales que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. □

COROLARIO 3.58: *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.*

2.4. Compacidad y axiomas de separación.

PROPIEDAD 3.59: **(Lema de la aplicación cerrada)** *Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ es una aplicación continua, $(X, \mathcal{T})$ es compacto e $(Y, \mathcal{T}')$ es Hausdorff, entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración: Consideramos C un cerrado de X. Del apartado i) de la Propiedad 3.42 tenemos que C es un compacto de X y de la Propiedad 3.48 que $f(C)$ también es un compacto de Y. Utilizando ahora el apartado ii) de la Propiedad 3.42 tenemos que $f(C)$ es un cerrado de Y. □

COROLARIO 3.60: *Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto, $(Y, \mathcal{T}')$ un espacio topológico Hausdorff y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación continua e inyectiva. Entonces f es un homeomorfismo sobre su imagen.*

EJEMPLO 3.61: Como consecuencia de este corolario tenemos que toda función continua y monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene inversa continua que es una función $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$. Para comprobar esta afirmación sólo hemos de verificar las hipótesis del corolario anterior. Sabemos que $[a, b]$ es compacto, $\mathbb{R}$ es Hausdorff y la función f es inyectiva por ser monótona. Además por el Corolario 3.58 también sabemos que $f([a, b]) = [c, d]$.

2.5. Compacidad en espacios métricos. El objetivo de esta sección es introducir otros conceptos de compacidad que son frecuentemente utilizados y comprobar que en los espacios métricos estos conceptos son equivalentes al concepto de compacidad que nosotros hemos definido.

Definición 3.62: Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ diremos que es *compacto por punto límite* si cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación. Asimismo, diremos que $(X, \mathcal{T})$ es *secuencialmente compacto* o *compacto por sucesiones* si toda succesión en X tiene una parcial convergente.

Recordemos que en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ decíamos que $a \in X$ era un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si para cualquier entorno V de a se tiene $(V \backslash \{a\}) \cap A \neq \varnothing$.

Proposición 3.63: ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto, entonces es compacto por punto límite.*

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que exista $A \subseteq X$ un conjunto infinito sin puntos de acumulación. Entonces $\forall\, x \in X$ existe un abierto O_x tal que $O_x \backslash \{x\}$ no contiene a puntos de A. Se considera el recubrimiento dado por $\{O_x\}_{x \in X}$. Como el espacio es compacto se tendrá $X = O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_k}$. Observemos que O_x contiene a lo sumo un punto de A, y por tanto A debe ser finito, en contra de nuestra hipótesis. □

Corolario 3.64: *Si (X, d) es un espacio métrico compacto por punto límite, entonces es secuencialmente compacto.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de un espacio métrico (X, d) y sea $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si la sucesión es finita, ha de existir un x que se repita infinitas veces. Todos estos términos que se repiten forman una parcial constante y por tanto convergente.

Si S es infinito sabemos, por ser (X, d) compacto por punto límite, que S tiene un punto de acumulación $x \in X$. Observemos que entonces para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $B(x, \varepsilon) \backslash \{x\} \cap S$ es infinito. Efectivamente, si $B(x, \varepsilon) \backslash \{x\} \cap S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ para algún ε podríamos considerar $\varepsilon' < \text{mín}\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_k)\}$. Es claro que entonces $B(x, \varepsilon') \backslash \{x\} \cap S = \varnothing$ contradiciendo el hecho de que x es un punto de acumulación de S.

Vamos ahora a describir una parcial de la sucesión que converge a x mediante un proceso de inducción.

Consideramos en primer lugar $x_{n_1} \in (B(x, 1) \backslash \{x\}) \cap S$. Supongamos definidos $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_i}\}$ primeros i-términos de la parcial tal que $x_{n_j} \in B(x, \frac{1}{j}) \backslash \{x\} \cap S$ para $j = 1, \ldots, i$ y $n_{j+1} > n_j$, para $j = 1, \ldots, i-1$. Observemos que por ser $B(x, \varepsilon) \backslash \{x\} \cap S$ infinito para todo ε podemos considerar $x_{n_{i+1}} \in B(x, \frac{1}{i+1}) \backslash \{x\} \cap S$ tal que $n_{i+1} > n_i$. Por la forma de construcción es claro que $\{x_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una parcial convergente a x. □

Corolario 3.65: *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una parcial convergente.*

DEFINICIÓN 3.66: Dado $\mathcal{A}$ un recubrimiento por abiertos de un espacio métrico (X,d) se denomina *número de Lebesgue de* $\mathcal{A}$ a todo $\varepsilon > 0$ con la propiedad siguiente: para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{A}$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq U$.

LEMA 3.67: ***(Lema de Lebesgue)*** *Si (X,d) es un espacio métrico secuencialmente compacto entonces todo recubrimiento abierto de X admite un número de Lebesgue.*

Demostración: Supongamos por reducción al absurdo que existe $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de X que no admite número de Lebesgue. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n \in X$ tal que $B(x_n, \frac{1}{n}) \nsubseteq U$, para todo $U \in \mathcal{A}$.

Por hipótesis sabemos que existe una parcial $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$. Además como $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de X podemos encontrar U_0 tal que $x \in U_0$. Por ser U_0 abierto debe existir un $m \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{2}{m}) \subseteq U_0$.

Por otra parte existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{m})$ para todo $k \geqslant k_0$. Sea $k \geqslant k_0$ tal que $s = n_k \geqslant m$. Entonces $B(x_s, \frac{1}{s}) \subseteq B(x, \frac{2}{m})$, ya que si $d(x_s, y) < \frac{1}{s}$ entonces

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_s) + d(x_s,y) < \frac{1}{m} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{2}{m}\,.$$

Es decir $B(x_s, \frac{1}{s}) \subseteq U_0$ en contra de la elección de x_s. □

COROLARIO 3.68: *Si (X,d) es un espacio métrico compacto todo recubrimiento abierto admite un número de Lebesgue.*

Demostración: Se deduce directamente del corolario 3.64 y el lema de Lebesgue. □

OBSERVACIÓN 3.69: El Lema de Lebesgue también se puede enunciar diciendo que para todo espacio métrico secuencialmente compacto y todo recubrimiento abierto del mismo existe $\varepsilon > 0$ tal que todo conjunto de diámetro menor que ε está contenido en algún abierto del recubrimiento.

TEOREMA 3.70: *Sea (X,d) un espacio métrico. Si (X,d) es secuencialmente compacto, entonces X es compacto.*

Demostración: $\boxed{\text{Paso 1.}}$ En primer lugar vamos a probar que si toda sucesión admite una parcial convergente entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq X$ tal que $X = B(x_1,\varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_r,\varepsilon)$. Observemos que si X es finito esta afirmación es obvia. Por tanto asumamos que X es infinito.

Supongamos que no sea cierto, es decir existe $\varepsilon > 0$ tal que $X \neq \cup_{x\in F} B(x,\varepsilon)$, para todo F subconjunto finito de X. Vamos a construir una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $d(x_i,x_j) > \varepsilon$ para $i \neq j$ utilizando un proceso de inducción. Para empezar consideramos $x_1 \in X$ cualquiera. Supongamos que tenemos construidos $\{x_1, \ldots, x_r\}$

los r primeros términos de manera que $d(x_i, x_j) > \varepsilon$, $i, j \leqslant r$, $i \neq j$. Como $X \neq \cup_{i=1}^{r} B(x_i, \varepsilon)$ podemos encontrar $x_{r+1} \in X \setminus \cup_{i=1}^{r} B(x_i, \varepsilon)$, es decir $d(x_{r+1}, x_i) > \varepsilon$. Por hipótesis sabemos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ admite una parcial $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$. Pero esto implica que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \geqslant k_0$. De aquí se tiene para todo $k \geqslant k_0$

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leqslant d(x_{n_k}, x) + d(x_{n_{k+1}}, x) < \varepsilon$$

en contra de la elección de los términos de la sucesión.
$\boxed{\text{Paso 2.}}$ Consideremos ahora $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Del lema de Lebesgue podemos considerar $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue del recubrimiento. Por el paso 1 se tiene

$$X = B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_r, \varepsilon) \ .$$

Pero como $B(x_i, \varepsilon) \subseteq U_i$ para algún $i \in I$. De aquí obtenemos

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_r \ .$$

□

Definición 3.71: Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Se dice que una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad d(x, y) < \delta \quad \text{entonces} \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \ , \forall x, y \in X$$

Veamos ahora que si el dominio de una aplicación continua entre espacios métricos es un compacto, los conceptos de continuidad y continuidad uniforme coinciden.

Propiedad 3.72: *Toda aplicación continua $f : (X, d) \to (Y, d')$ entre espacios métricos con $(X, \mathcal{T}_d)$ compacto, es uniformemente continua.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Dado $x \in X$, como f es continua en x, existe δ_x tal que para todo $y \in X$ con $d(x, y) < \delta_x$ se cumple que $d'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta'_x = \frac{\delta_x}{2}$ y consideremos el recubrimiento abierto de X dado por $\{B(x, \delta'_x)\}_{x\in X}$ del cual, por ser X compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito

$$\{B(x_1, \delta'_{x_1}), \ldots, B(x_k, \delta'_{x_k})\} \ .$$

Definimos entonces $\delta = \min\{\delta'_{x_1}, \ldots, \delta'_{x_k}\}$. Veamos que este δ es el necesario para que f sea uniformemente continua.

Sean $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$. Entonces existe algún $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $d(x, x_i) < \delta'_{x_i}$. De aquí tenemos

$$d(y, x_i) \leqslant d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \delta'_{x_i} \leqslant 2\delta'_{x_i} = \delta_{x_i} \ .$$

Por tanto $d'(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d'(f(y), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalmente tenemos

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), f(y)) < \varepsilon \ .$$

□