LMAT1323 Topologie

Examen - 8 janvier 2019

— *Le test comporte **5 questions**.*
— *Le test est à **livre fermé**. Les téléphones portables ainsi que tous les autres moyens de communication ou de stockage de données sont interdits.*
— *La durée du test est de **2h30**.*

---

1. (4 points) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? *Répondez par vrai ou faux à la fin de la ligne, sans justifier. Chaque mauvaise réponse entraînera l'annulation d'une bonne réponse. Vous pouvez vous abstenir sans être pénalisé.*
   (a) Il n'existe pas de fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   (b) Toute espace normal ayant une base dénombrable est métrisable.
   (c) Le compactifié d'Alexandroff d'un espace de Hausdorff compact est un espace de Hausdorff.
   (d) Soit (X,τ) un espace de Hausdorff compact. Alors un sous-ensemble $V \subseteq X$ est compact si et seulement si il est fermé.
   (e) Si la fonction $f\colon (X,\tau) \to (Y,\Delta)$, où Δ est la topologie discrète sur Y, est continue, alors les singletons $\{x\}$ dans X sont ouverts.
   (f) Si (X,τ) est un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X, alors l'espace quotient $(X/\!\sim,\sigma)$ (σ est la topologie quotient) est Hausdorff.
   (g) Le produit $(X \times Y,\mu)$ des espaces topologiques non vides (X,τ) et (Y,σ) (μ est la topologie produit) est connexe si et seulement si (X,τ) et (Y,σ) le sont.
   (h) Si A et B sont des sous-ensembles, non vides, connexes de l'espace connexe (X,τ) et $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A \cap B$ est connexe.

2. (4 points) Montrer que si (X,τ) est un espace topologique connexe et (Y,Δ) est un espace topologique discret, alors toute fonction continue $f\colon X \to Y$ est constante.

3. (4 points) Soit $(X, ||-||)$ un espace vectoriel normé et M, N deux sous-ensembles de X tels que :
   - M est un compact de $(X, ||-||)$
   - N est un fermé de $(X, ||-||)$.

   Montrer que le sous-ensemble $M + N = \{m + n \mid\ m \in M \text{ et } n \in N\}$ est fermé.

4. (4 points) Montrer que les produits $(X \times Y,\ \mu_{\tau,\sigma})$ et $(Y \times X,\ \mu_{\sigma,\tau})$ des espaces topologiques (X,τ) et (Y,σ) sont homéomorphes (ici $\mu_{\tau,\sigma}$ et $\mu_{\sigma,\tau}$ sont les topologies produit).

5. (4 points) Soit $\Sigma = \big\{1/n \big| n \in \mathbb{N}_*\big\} \subset \mathbb{R}$, et soit $\mathcal{O}$ la famille de sous-ensembles $U \subseteq \mathbb{R}$ définis comme suit : pour chaque $x \in U$ il existe des réels a et b tels que une des deux conditions suivantes est satisfaite :

$$\text{Soit} \quad x \in\ ]a,b[\ \subseteq U, \qquad \text{soit} \quad x \in\ ]a,b[\ \backslash(]a,b[\ \cap\Sigma) \subseteq U.$$

   Montrer que
   (a) $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
   (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ est Hausdorff.
   (Vous pouvez répondre à b) sans avoir répondu à a).)