TOPOLOGIE

CHAP I : ESPACES MÉTRIQUES

__Définition__ : Soient X un ensemble et $d : X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$\boxed{\begin{array}{l} (D_1) : \forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0 \iff x = y \\ (D_2) : \forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x) \\ (D_3) : \forall x, y, z \in X,\ d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z). \end{array}}$$

Alors, d est une métrique sur X et (X, d) est un espace métrique.

__Lemme__ : Si $d : X^2 \to \mathbb{R}$ est une métrique, alors $d(x,y) \geq 0$ $\forall x, y \in X$.

__Démonstration__ : Par D_1, nous avons que $d(x,x) = 0$.
Par D_3, nous avons $d(x,x) = 0 \leq d(x,y) + d(y,x)$
Ainsi, par D_2, on conclut que $0 \leq 2d(x,y)$. $\square$

__Exemples__ :

- __métrique euclidienne__ = métrique usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^{1/2}$

$(\mathbb{R}^n, d)$ est un espace métrique.

- __Métriques ℓ_p sur $\mathbb{R}^n$__

Soit $p \in [1, \infty[$. Alors,

$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, d_p)$ est un espace métrique.

- __Métrique d_∞__.

$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ /.

$\hookrightarrow$ Soit $X = \{ c\ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$

Si $f, g \in X$, $d_\infty(f,g) = \max_{[a,b]} |f - g|$ (max existe par thm des bornes atteintes).

- __Métrique discrète__ (dégénérée).

Soit X un ensemble, $x, y \in X$. Alors soit

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Alors (X, d) est un esp. métrique.

<u>Théorème</u> : (métrique produit)

Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ espaces métriques.

Soit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$

et soit $d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\}$ avec $x, y \in X$.

Alors (X, d) est un espace métrique.

<u>Démonstration</u>

• (D_1) : $\Rightarrow$) Si $d(x,y) = 0$, alors nous avons, pour $i \in \{1, \dots, n\}$

$$0 \leq d_i(x_i, y_i) \leq d(x,y) \leq 0$$

Donc $d_i(x_i, y_i) = 0$ et puisque (X_i, d_i) est un espace métrique, $x_i = y_i$ pour tout i. Donc, $x = y$.

$\Leftarrow$) Si $x = y$, alors $x_i = y_i$ pour tout i. Donc $d_i(x_i, y_i) = 0$ et donc $\max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\} = 0$

$\Rightarrow d(x,y) = 0$.

• (D_2). Puisque d_i sont des métriques, on a que

$$d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(y_i, x_i)\} = d(y,x).$$

• (D_3). Puisque pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $d_i(x_i, y_i) \leq d(x,y)$, il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$d(x,z) = d_k(x_k, z_k) \leq d_k(x_k, y_k) + d_k(y_k, z_k)$$
$$\leq d(x,y) + d(y,z)$$

pour $x, y, z \in X$.

$\square$

Pour $\mathbb{R}^2$, comparons la métrique eucl. et la métrique produit.

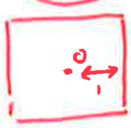
$(\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

$d_{euc}(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$ (avec $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$)

$d_{prod}(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

Comparons les boules :

$B_{euc}(0,1) = \{x : d_{euc}(x, 0) \leq 1\} \rightsquigarrow$ 

$B_{prod}(0,1) = \{x : d_{prod}(x, 0) \leq 1\} \rightsquigarrow$ 

Espaces métriques équivalents

Définition : Deux espaces métriques (A, d_A) et (B, d_B) sont isométriquement équivalents s'il existe des fcts réciproques $f : A \to B$ et $g : B \to A$ telles que pour tout $x, y \in A$, $d_B(f(x), f(y)) = d_A(x, y)$ et pour tout $u, v \in B$, $d_A(g(u), g(v)) = d_B(u, v)$.

Théorème : Deux espaces métriques (A, d_A) et (B, d_B) sont isométriquement équivalents ssi il existe $f : A \to B$ tq : 1) f est bijective
2) $\forall x, y \in A$, $d_B(f(x), f(y)) = d_A(x, y)$.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Supposons que (A, d_A) et (B, d_B) sont isométriquement équivalents. Alors par définition,
- $\exists$ $f : A \to B$ et $g : B \to A$ réciproques $\Rightarrow$ f bijective
- f satisfait (2) par définition.

$\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $f : A \to B$ qui satisfait l'énoncé. Alors f inversible car bijective. Posons $g : B \to A$ la réciproque tq $g(b) = a$ si $f(a) = b$.
Pour $u, v \in B$, soit $x = g(u)$ et $y = g(v)$.
Alors
$$\begin{aligned} d_A(g(u), g(v)) &= d_A(x, y) \\ &= d_B(f(x), f(y)) \\ &= d_B(f(g(u)), f(g(v))) \\ &= d_B(u, v) \end{aligned}$$
$\square$

Fonctions continues sur les espaces métriques

Définition : Soit (X, d) et (Y, ρ) deux espaces métriques. Une fonction $f : X \to Y$ est continue si pour $p \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(p, \varepsilon) > 0$ tel que si $d(p, x) < \delta(p, \varepsilon)$ alors $\rho(f(p), f(x)) < \varepsilon$

Lemme : (Loi de composition)

Si (X,d), (Y,ρ) et (Z,σ) sont des espaces métriques et $g : X \to Y$ et $f : Y \to Z$ des fonctions continues, alors la fonction composée $f \circ g : X \to Z$ est aussi continue.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, pour $y \in Y$, il existe $\delta_1(y,\varepsilon) > 0$ tq si

$\rho(y, g(p)) \leq \delta_1(y,\varepsilon)$, alors $\sigma(f(y), f(g(p)) \leq \varepsilon$.

(Avec $y \in Y$, $g(p) \in Y$)

Puisque g est continue, pour $p \in X$, il existe $\delta_2(p,\varepsilon) > 0$ tq si

$d(x,p) \leq \delta_2(p,\varepsilon)$ alors $\rho(g(x), g(p)) \leq \delta_1(y,\varepsilon)$.

Donc, par le choix de δ_1, ceci implique que

si $d(x,p) \leq \delta_2(p,\varepsilon)$, alors $\sigma(f(g(x)), f(\varphi(p)) \leq \varepsilon$.

(avec y vu comme $g(x)$). $\square$

Ensembles ouverts dans les espaces métriques.

Définition : Soit (X,d) un espace métrique. Un sous-ensemble $E \subseteq X$ est ouvert dans X si pour tout $e \in E$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x,e) < \delta$, alors $x \in E$.

→ Meilleure déf : E est ouvert si pour tout $x \in E$, il existe $B(x,\delta) \subseteq E$ avec $\delta > 0$.

Définition : Soit (X,d) un espace métrique. On définit la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ par

$$B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$$

Proposition : $B(x,r)$ est ouverte.

Démonstration : Pour $y \in B(x,r)$, posons $\delta := r - d(x,y) > 0$.

Pour $z \in \cancel{X}$, on a que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r$ lorsque on pose $\cancel{d(z,y) < \delta}$.

Ceci implique que $z \in B(x,r) \Rightarrow B(x,r)$ ouvert sur X. $\square$

$z \in B(y,\delta)$

Exemple important : Si X est muni de la distance discrète, alors pour tout $E \subseteq X$, E est ouvert.

Démonstration : Soit $x \in E$. Prenons $\delta = 1$. Si $d_{disc}(x,e) < 1$, alors $x = e$ et donc $x = e \in E$. $\square$.

Théorème : (Propriétés des ouverts)

Soit (X,d) un espace métrique. Alors

(1) $\emptyset$ et X sont ouverts

(2) Si $\mathcal{U}_\alpha$ est ouvert pour tout α dans un ensemble A, alors $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ est ouvert

(3) Si $\mathcal{U}_j$ est ouvert pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ alors $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j$ est ouvert.

Démonstration :

(1) Trivial

(2) Si $e \in \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$, il existe $\alpha_0 \in A$ tq $e \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$.
Puisque $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tq si $d(x,e) < \delta$, alors $x \in \mathcal{U}_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$.

(3) Si $e \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j$, alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $e \in \mathcal{U}_j$.
Puisque $\mathcal{U}_j$ est ouvert, il existe $\delta_j > 0$ tel que $d(x,e) < \delta_j$ implique $x \in \mathcal{U}_j$. En prenant $\delta = \min_{j=1,\dots,n} \{\delta_j\} > 0$, si $d(x,e) < \delta$, alors $x \in \mathcal{U}_j$ et donc $x \in \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j$.

$\rightsquigarrow$ une intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte, mais pas nécessairement une intersection infinie.

$\delta = r - d(x,y)$

Définition : Soient (X, d), (Y, ρ) des espaces métriques, $f : X \to Y$ une fonction et $\mathcal{U} \subseteq Y$ un sous-ensemble.
Alors l'image réciproque de $\mathcal{U}$ par f est

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in X \mid f(x) \in \mathcal{U}\}.$$

Théorème : (continuité sur des ouverts).
Soient (X, d) et (Y, ρ) des espaces métriques.
$f : X \to Y$ est continue s.s.i $\forall \mathcal{U} \subseteq Y$ ouvert, $f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert.

Démonstration :

=>) Soit $\mathcal{U} \subseteq Y$ ouvert. Montrons que $f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert.
Soit $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$. Alors, $f(x) \in \mathcal{U}$ et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$.
Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que si $y \in X$ et $d(x, y) < \delta$, alors $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Montrons que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$
↳ Ceci démontre immédiatement que $f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert, car nous avons alors que pour $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$, il existe $\delta > 0$ tq $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$.
On a que $y \in B(x, \delta)$ car $d(x, y) < \delta$. Donc, $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Ainsi, $f(y) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$.
Ainsi, par définition de l'image réciproque, $y \in f^{-1}(\mathcal{U})$. et donc $f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert.
⇝ Pour chaque élément différent de $f^{-1}(\mathcal{U})$, le δ de la déf de continuité marchera.

<=) Supposons que pour tout $\mathcal{U} \subseteq Y$ ouvert, $f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert.
Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. La boule $B(f(x), \varepsilon) \subseteq Y$ est ouverte et donc par hyp. $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est ouverte dans X.
Puisque $f(x) \in B(f(x), \varepsilon)$, alors $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$.
$\exists \delta > 0$ tq $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, puisque ouvert.
Si $d(x, y) < \delta$, alors $y \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Donc $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ et donc $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$. Ceci satisfait la ctnuité de f.
→ Si x et y assez proches dans $B(x, \delta)$, alors $f(x)$ et $f(y)$ assez proches dans $B(f(x), \varepsilon)$. REFAIRE AVEC SCHÉMA.

$\square$

Définition : (convergence)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (X,d).
On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x lorsque pour $\varepsilon>0$,
$\exists\, N\in\mathbb{N}$ tel que si $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant N$, alors on a que
$d(x,x_n)<\varepsilon$.

Définition Pab : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (X,d). Si $x\in X$ et $\varepsilon>0$, on peut trouver $N\in\mathbb{N}$ tq si $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant N$, alors $d(x_n,x)<\varepsilon$.
On dit que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et x_n converge.

→ Voir comme une boule de laquelle x_n ne peut sortir.

Lemme : (Unicité de la limite)
Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un esp. métrique (X,d) a une limite, alors cette limite est unique.

Démonstration : Supposons par l'absurde que $\exists\, x_1,x_2\in X$ tq

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_1 \neq x_2 = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons que pour $n\in\mathbb{N}$,

$$0< d(x_1,x_2)\leq d(x_1,x_n)+d(x_n,x_2)$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente,
$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, N_1\in\mathbb{N}$ tq si $n\geqslant N_1$, $d(x_1,x_n)\leq \varepsilon/2$ et
$\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\, N_2\in\mathbb{N}$ tq si $n\geqslant N_2$, $d(x_1,x_n)\leq\varepsilon/2$.
Prenons $N=\max\{N_1,N_2\}$. Alors, si $n\geqslant N$,

$$d(x_1,x_2)\leq \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

Par ε arbitraire et positivité de d, on a que $d(x_1,x_2)=0$ ce qui contredit que $x_1\neq x_2$. $\square$

Définition : (Fermé)

Soit (X, d) un espace métrique. Un ensemble $F \subseteq X$ est fermé si $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ convergente, on a $\lim_{n \to +\infty} x_n = x \in F$.

Théorème : Soit (X, d) un espace métrique. $F \subseteq X$ est fermé s.s.i F^c est ouvert, avec $F^c = X \setminus F$.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Notons $E = F^c$. Supposons par l'absurde que E n'est pas ouvert. Alors, $\exists e \in E$ tel que pour tout $\delta > 0$ et un $x \in X$, si $d(e, x) < \delta$, on a que $x \notin E$.

Alors, $B(e, \delta) \cap F \neq 0$ car $x \in F$.

En particulier, on trouve $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\forall n$, $y_n \in F$, et $d(y_n, e) < \frac{1}{n}$. Puisque $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n \to \infty} y_n = e$. Or, $y_n \in F$ et $e \notin F$, et f est un ensemble fermé. Il y a donc contradiction.

$\Leftarrow$). Supposons par l'absurde que F n'est pas fermé. Puisque E est ouvert, $\forall e \in E$, $\exists \delta > 0$ tq si $d(x, e) < \delta$, alors $x \in E$.

Prenons $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ une suite convergente tq $\lim_{n \to +\infty} y_n \notin F$ et donc $\lim_{n \to +\infty} y_n = y \in E$ car F pas fermé.

Puisque $y_n \in F$, $\nexists \delta > 0$ tq $d(y, y_n) < \delta$.

$\notin E$

Donc $d(y_n, y) \geq \delta$ pour $\delta > 0$ ce qui contredit la déf de convergence de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Théorème : (Propriété des fermés)

Soit (X,d) un espace métrique. Alors,

(1) L'ensemble X et $\emptyset$ sont fermés.

(2) Si F_α est fermé $\forall \alpha \in A$ arbitraire, alors $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ est fermé (intersection de fermés est fermée)

(3) Si F_j est fermé $\forall\, 1 \le j \le n$, alors $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ est fermée. (union finie de fermés est fermée).

Démonstration :

(1) Puisque X est ouvert, $X^c = \emptyset$ est fermé.
Puisque $\emptyset$ est ouvert, $\emptyset^c = X$ est fermé.

(2) On a que $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} X\setminus F_\alpha\right)$

Puisque F_α est fermé, $X \setminus F_\alpha$ est ouvert. Ainsi, $\bigcup_{\alpha\in A} X\setminus F_\alpha$ est ouvert (par prop des ouverts). Donc, $X\setminus\left(\bigcup_{\alpha\in A} X\setminus F_\alpha\right)$ est fermé.

(3) On a que $\bigcup_{j=1}^{n} F_j = X\setminus\left(\bigcap_{j=1}^{n} X\setminus F_j\right)$.

Puisque F_j est fermé $\forall j \in \{1 \dots n\}$, $\bigcap_{j=1}^{n} X\setminus F_j$ est ouvert.

Donc $X\setminus\left(\bigcap_{j=1}^{n} X\setminus F_j\right)$ est fermé.

Théorème : Soit (X,d), (Y,ρ) deux espaces métriques.
$f : X \to Y$ est continue s.s.i $\forall F \subseteq Y$ fermé, $f^{-1}(F)$ est fermé.

Démonstration : Soit $U = F^c \Rightarrow U$ est ouvert avec $U \subseteq Y$.
On sait que f ctue $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ ouvert
$\Leftrightarrow (f^{-1}(U))^c$ fermé
$\Leftrightarrow f^{-1}(U^c) = f^{-1}(F)$ fermé.

$\square$

CHAP II : ESPACES TOPOLOGIQUES

Définition : Soit X un ensemble et τ une collection de ss-ensembles de X satisfaisant les axiomes suivants :

> (1) L'ensemble vide $\emptyset$ et X appartiennent à τ
> (2) Si $\mathcal{U}_\alpha \in \tau$ $\forall \alpha \in A$, alors $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \in \tau$
> (3) Si $\mathcal{U}_j \in \tau$ $\forall j \in \{1 \dots n\}$, alors $\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j \in \tau$.

Nous disons que $\mathcal{U} \in \tau$ est un ensemble ouvert sur la topologie τ de l'espace topologique (X, τ).

Exemples :

1) Topologie indiscrète / topologie triviale

Posons $(X, \tau = (X, \emptyset))$. C'est un esp. topo :

(1) : $X, \emptyset \in \tau$

(2) : $X \cup \emptyset = X \in \tau$

(3) : $X \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$.

2) Topologie discrète

Posons $(X, \tau = \mathcal{P}(x))$. C'est un esp. topologique.
Ce correspond à l'espace X muni de tous les sous-ensembles possible de X, ce qui correspond aux ouverts induits par la distance discrète.

3) $X = \{0, 1, 2\}$.

$\mathcal{X} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ n'est pas une topologie sur X car $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{X}$.

Théorème : Si (X, d) est un espace métrique, alors la collection de sous-ensembles $\mathcal{U} \subseteq X$ ouverts forment une topologie sur X.

Preuve : Trivial par théorème des propriétés des ouverts dans esp. métrique. $\square$

Lemme : Soit (X, τ) un espace topologique induit par un espace métrique (X, d). Alors, $\forall\, a, b \in X$ tq $a \neq b$, il existe $\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_b \in \tau$ tq $a \in \mathcal{U}_a$, $b \in \mathcal{U}_b$ et $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset$. (Tout espace topo induit par un esp métrique est un esp de Hausdorff.)

Démonstration : Soit $r = d(a,b)$. On peut prendre $\mathcal{U}_a = B(a, r/3)$ et $\mathcal{U}_b = B(b, r/3)$.
On voit bien que $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b = \emptyset$ $\square$

→ Ainsi, une topologie indiscrète (sur X non-vide) ne peut pas provenir de la notion d'esp. métrique.

Exemple : $X = \mathbb{R}^2$, $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{B(0,\delta) \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \delta > 0\}$.

(X, τ) est un espace topologique qui n'est pas induit par une métrique, car si $a, b \neq 0$, $a \neq b$, on a si $B(0, \delta_1) \ni a$ et $b \in B(0, \delta_2)$, puisque soit $\delta_1 \geq \delta_2$, soit $\delta_1 \leq \delta_2$, on a que $B(0,\delta_1) \subseteq B(0,\delta_2)$ ou $B(0,\delta_2) \subseteq B(0,\delta_1)$ et donc $B(0,\delta_2) \cap B(0,\delta_1) \neq \emptyset$.

Définition : (continuité)
Soient (X, τ) et (Y, σ) deux espaces topologiques. Une fonction $f : X \to Y$ est continue si $f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert dans X quand $\mathcal{U} \subseteq Y$ est ouvert.
f ctue $\Leftrightarrow$ si $\mathcal{U} \in \sigma$, alors $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau$.

Exemples :
1) Toute fonction ctue sur des espaces métriques.
2) Si τ discrète, $f : X \to Y$ tjrs ctue :
↳ si $\mathcal{U} \in \sigma$, alors $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau$ tjrs car τ est discrète.
3) Si σ indiscrète, $f : X \to Y$ tjrs ctue :
↳ Soit $\mathcal{U} \in \sigma$. Deux cas :
Si $\mathcal{U} = Y$, $f^{-1}(Y) = X \in \tau$
Si $\mathcal{U} = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$.

4) Si τ est indiscrète et σ discrète, alors si $f : X \to Y$ est continue, alors f est constante.

rien tout

En effet, soit $x \in X \neq \emptyset$. Alors $\{f(x)\} \in \sigma$ car σ discrète.

$f^{-1}(\{f(x)\}) \in \{\emptyset, X\}$ par ctuté de f.

$f^{-1}(\{f(x)\}) = X$. f est donc constante.

5) Si f est constante, alors f est continue. On a

$f(x) \in c \in Y$. Si $\mathcal{U} \in \sigma$, • soit $c \in \mathcal{U}$, $f^{-1}(\mathcal{U}) = X \in \tau$

• soit $c \notin \mathcal{U}$, $f^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset \in \tau$.

⇝ Si tous les singletons d'un ensemble appartiennent à la topologie, alors leur intersection est forcément dans la topo donc c'est la topo indiscrète.

Théorème : (Composition de fcts ctues).

Soit (X, τ), (Y, σ), (Z, μ) des espaces topologiques et $g : X \to Y$ et $f : Y \to Z$ des fonctions ctues.

Alors, $g \circ f : X \to Z$ est continue.

Démonstration : Posons $\mathcal{U} \in \rho$. Puisque g est ctue, $g^{-1}(\mathcal{U}) \in \sigma$.

Puisque f est ctue, $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U})) \in \tau$.

$$f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U})) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau.$$

□

Définition : (Fermé).

Soit (X, τ) un espace topologique. Un ensemble fermé $F \subseteq X$ est fermé si F^c est ouvert.

Théorème : Soit (X, τ) un espace topo. Alors,

(1) L'ensemble $\emptyset$ et X sont fermés

(2) Si F_α est fermé pour $\alpha \in A$ arbitraire, $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé

(3) Si F_j fermé pour $j \in \{1 \dots n\}$, $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ est fermé.

Demonstration : (1) $\emptyset^c = X$ ouvert $\Rightarrow$ $\emptyset$ fermé
$X^c = \emptyset$ ouvert $\Rightarrow$ X fermé.

(2). Montrons que $\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c$ est ouvert :

$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} X \setminus F_\alpha$. Nous savons que $X \setminus F_\alpha = F_\alpha^c$ est ouvert par hyp que F_α fermé. Donc par prop des ouverts, $\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c$ est ouvert donc $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé.

(3) Montrons que $\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right)^c$ est ouvert.

$\left(\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} X \setminus F_j$. On sait que $X \setminus F_j = F_j^c$ ouvert. Par prop. des ouverts, $\bigcap_{j=1}^{n} X \setminus F_j$ est ouvert, donc $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ est fermé. $\square$.

Théorème : Soient (X, τ) et (Y, σ) des esp. top. $f : X \to Y$ est continue ssi $f^{-1}(F) \subseteq X$ fermé si $F \subseteq Y$ fermé.

Intérieur et fermeture :

Définition : Soit (X, τ) esp. top. On a pour $A \subseteq X$

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{ U \in \tau \mid U \subseteq A \}$$
$$\mathrm{Cl}(A) = \bigcap \{ F \text{ fermé} \mid A \subseteq F \}$$

Lemme : 1) $\text{Int}(A) = \{x \in X \mid \exists \mathcal{U} \in \tau \text{ tq } x \in \mathcal{U} \subseteq A\}$

2) $\text{Int}(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
$\text{Int}(A)$ est l'unique $V \in \tau$ tq $V \subseteq A$ et pour tout $W \in \tau$ tel que si $W \subseteq A$, $W \subseteq V$.

Démonstration : 1) Juste une observation.

$$\text{Int}(A) = \bigcup \{\mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \subseteq A\}$$
$$= \{x \in A \mid \exists \mathcal{U} \in \tau \text{ avec } x \in \mathcal{U} \subseteq A\}$$

2) Soit $V = \text{int}(A)$. Alors $V \in \tau$ comme réunion d'ouverts.
Si $W \subseteq A$ et $W \in \tau$, alors $W \subseteq \text{Int}(A) = V$.

Unicité : Si $\text{Int}(A) \subseteq W$, $W = \text{int}(A)$
Supposons $W' \subseteq A$ tq $W' \in \tau$ et tq si
$\mathcal{U} \in \tau$ et $W' \subseteq \mathcal{U} \subseteq A \Rightarrow W' = \mathcal{U}$
Puisque $W' \subseteq A$ ouvert, $\Rightarrow W' \subseteq \text{Int}(A) \subseteq A \Rightarrow W' = \text{Int}(A)$

□ ?

Lemme : Soit (X, τ) un espace topologique, $A \subseteq X$.

- $(\text{Cl}(A^c)) = (\text{Int}(A))^c$
- $\text{Int}(A^c) = (\text{Cl}(A))^c$

Démonstration :

- $\text{Int}(A^c) = \bigcup\{\mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \subseteq A^c\}$
$$= ((\bigcup\{\mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \subseteq A^c\})^c)^c$$
$$= (\bigcap\{\mathcal{U}^c \text{ avec } \mathcal{U} \in \tau \mid \mathcal{U} \in A^c\})^c$$

Posons $\mathcal{U}^c$ = fermé F

$$= (\bigcap\{F \subseteq X \mid F^c \subseteq \tau \text{ et } F^c \in A^c\})^c$$
$$= (\bigcap\{F \subseteq X \mid F \text{ fermé et } A \subseteq F\})^c$$
$$= (\text{Cl}(A))^c$$

- $(\text{Int}(A))^c = (\text{Int}((A^c)^c))^c = ((\text{Cl}(A^c))^c)^c = \text{Cl}(A^c)$

□

<u>Lemme</u> : Soit (X, τ) un espace topologique et $A \subseteq X$.

1. $Cl(A) = \{ x \in X : \forall U \in \tau$ avec $x \in U$, on a $A \cap U \neq \emptyset \}$
2. $Cl(A)$ est le plus petit fermé contenant A, càd $Cl(A)$ est l'unique ensemble fermé G tq $A \subseteq G$ et, si F fermé avec $A \subseteq F \subseteq G$, alors $F = G$.

<u>Lemme</u> : Soit (X, d) un esp. métrique et $A \subseteq X$. Alors $Cl(A)$ consiste à tous les x tq $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ avec $d(x, x_n) \to 0$.

$\Rightarrow$ $Cl(A) = \{ x \in X \mid \exists x_n \in A$ avec $d(x, x_n) \to 0 \}$.

<u>Lemme</u> : Soient A un ss-ensemble d'un esp topo et F fermé contenant A. alors $Cl(A) \subseteq F$.

<u>Définition</u> : Soit (X, τ) un esp. topo et $A \subseteq X$. La frontière de A (ou le bord) est $\partial(A) = Cl\, A \setminus Int\, A$

<u>Définition</u> : Soit (X, τ) un esp. top et $F \subseteq X$ fermé. On dit que $A \subseteq X$ est un ss-ensemble dense de F si $Cl(A) = F$.

Définition : Deux espaces topologiques (X, τ) et (Y, σ) sont homéomorphes lorsqu'il existe $\theta : X \to Y$ bijection tq θ et θ^{-1} sont continues pour les topologies prises.

Exemples syllabus + notes manuscrites.

Théorème : Soit $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ une bijection continue. LCSSE :
(1) $f(U)$ est ouvert dans Y si U ouvert dans X
(2) $f(F)$ est fermé dans Y si F fermé dans X
(3) f est un homéomorphisme.

Démonstration :

(1) => (2) : Soit $F \subseteq X$ fermé. Alors F^c est ouvert dans X. Nous avons donc que

$$f(F^c) = \{f(x) \in Y \mid x \notin F\}$$
$$= \{f(x) \in Y \mid f(x) \notin f(F)\}$$

$x \in F \Leftrightarrow f(x) \in f(F)$ car f être bijective.

Mais aussi que

$$f(F)^c = \{f(x) \in Y \mid f(x) \notin f(F)\}$$

Donc, puisque F^c est ouvert par déf, $f(F^c)$ est ouvert par (1) hypothèse, et $f(F)^c$ est ouvert dans Y par notre développement. Donc $f(F)$ est fermé dans Y.

(2) => (3) : Soient $g = f^{-1}$, $F \subseteq X$ fermé. Alors, $g^{-1}(F) = f(F)$ qui est fermé par (2). Ainsi, $g^{-1}(F)$ est fermé donc g est continue. On obtient que f et f^{-1} sont réciproques et continues donc f est homéomorphisme.

(3) => (1) : Évident par définition de continuité. □

2. Sous - espaces topologiques

Lemme : Soit X un ensemble arbitraire et $\mathcal{H}$ une collection de ss-ensembles de X. Alors il existe une topologie unique $\tau_{\mathcal{H}}$ tq

(1) $\mathcal{H} \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$

(2) Si τ est une topologie avec $\mathcal{H} \subseteq \tau$, $\tau_{\mathcal{H}} \subseteq \tau$.

Nous disons que $\tau_{\mathcal{H}}$ est la plus petite topologie contenant $\mathcal{H}$.

Preuve :

- **Unicité** : Soient $\tau_{\mathcal{H}}$ et $\tau_{\mathcal{H}}'$ qui satisfont (1) et (2).
  Alors, Puisque $\mathcal{H} \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$ (par (1)), on a que $\tau_{\mathcal{H}}' \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$.
  En échangeant les rôles, on obtient $\tau_{\mathcal{H}} \subseteq \tau_{\mathcal{H}}'$.
  Donc $\tau_{\mathcal{H}} = \tau_{\mathcal{H}}'$.

- **Existance** : Soit $T = \{ \tau \subseteq \mathcal{P}(x) \mid \tau \text{ topologie et } \mathcal{H} \subseteq \tau \}$
  Nous avons que $\tau_{disc} \in T$ donc T est non-vide.
  Posons $\tau_{\mathcal{H}} = \bigcap_{\tau \in T} \tau$.
  On a que $\forall \tau \in T$, $\mathcal{H} \subseteq \tau$ donc
  $\mathcal{H} \subseteq \bigcap_{\tau \in T} \tau = \tau_{\mathcal{H}}$.
  $\tau_{\mathcal{H}}$ est une topologie comme $\bigcap$ de topologies (clair).

Lemme : Soit A non-vide, (X_α, τ_α) des espaces topologiques et $f_\alpha : X \to X_\alpha$ des fcts pour $\alpha \in A$.
Alors il existe une plus petite topo τ sur X pour laquelle f_α sont continues.

Démonstration : Soit $\mathcal{H} = \{ f_\alpha^{-1}(\mathcal{U}) \mid \alpha \in A, \mathcal{U} \in \tau_\alpha \}$.
f_α sont continues pour τ topo de X si $f_\alpha^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau$. Posons donc $\tau = \tau_{\mathcal{H}}$.
On a que $\forall f_\alpha$, $\forall \mathcal{U} \in \tau_\alpha$, $f_\alpha^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_{\mathcal{H}}$ car $\mathcal{H} \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$. De plus, tout $f_\alpha^{-1}(\mathcal{U}) \in X$ donc $\tau_{\mathcal{H}}$ est une topo sur X tq $\forall \alpha \in A$, f_α ctue.

Définition : (Application inclusion)

Soit $Y \subseteq X$ et (X, τ) un espace topologique.
On définit l'application inclusion comme :
$j : Y \to X \quad , \quad j(y) = y \quad \forall y \in Y.$

Définition : (Sous-espace topologique)

Si (X, τ) est un esp. top. et $Y \subseteq X$, alors la topo de ss-espace τ_Y sur Y induite par τ est la plus petite topologie sur Y pour laquelle l'app. inclusion est continue.

On dit que (Y, τ_Y) est un ss-esp top. de X.

Lemme (Caractérisation de la top. ss-espace)

Soit (X, τ) un e.t. et $Y \subseteq X$. Alors la topologie de ss-espace τ_Y sur Y est tq

$$\boxed{\tau_Y = \{ Y \cap U \mid U \in \tau \}}.$$

Démonstration : Posons $\Theta = \{ Y \cap U \mid U \in \tau \}$.

Puisque $j : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau)$ est ctue par hypothèse, on a que si $U \in \tau$, $j^{-1}(U) \in \tau_Y$. Or,

$$\begin{aligned} j^{-1}(U) &= \{ y \in Y \mid j(y) \in U \} \\ &= \{ y \in Y \mid y \in U \} \\ &= Y \cap U \in \tau_Y . \end{aligned}$$

Donc τ_Y est la plus petite topologie sur Y contenant Θ.

Montrons que Θ est une topologie :

(1) $\emptyset = Y \cap \emptyset$, $Y = Y \cap X \Rightarrow \emptyset, Y \in \Theta$

(2) $\bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap U_\alpha) = Y \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \in \Theta$

(3) $\bigcap_{i=1}^{n} (Y \cap U_i) = Y \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \in \Theta$.

$\Rightarrow \Theta = \tau_Y$ est une topologie. $\square$

+ exemples dans notes de cours + syllabus.

Définition : Soient (X, τ) et (Y, σ) des esp. top. Alors la topologie produit μ sur $X \times Y$ est la plus petite topo sur $X \times Y$ pour laquelle les applications projectives

$$\pi_X : X \times Y \to X \qquad \text{et} \qquad \pi_Y : X \times Y \to Y$$
$$(x,y) \mapsto x \qquad\qquad\qquad (x,y) \mapsto y$$

sont continues

Lemme : Soient (X, τ) et (Y, σ) e.t et μ la topo. produit sur $X \times Y$. Alors $O \in \mu$ ssi pour $(x,y) \in O$, on trouve $U \in \tau$ et $V \in \sigma$ tq

$$(x,y) \in U \times V \subseteq O.$$

Un ensemble est un ouvert de μ s'il est une union de produits cartésiens d'ouverts.

$$\mu = \{ O \mid \forall (x,y) \in O, \exists U \in \tau, \exists V \in \sigma \text{ tq } (x,y) \in U \times V \subseteq O \}$$

Lemme : Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux e.m, la topo. produit des topos. induites par d_X et d_Y est la même que la topo induite par la distance produit.

Proposition : St (X,τ), (Y,σ), (Z,ρ) e.t. Une fct ctue $f : X \to Y \times Z$ correspond à une paire de fcts ctues $f_Y : X \to Y$ et $f_Z : X \to Z$.

Démonstration :

$(\Leftarrow)$. Posons $O \subseteq Y \times Z$ ouvert $\in \mu$?

$$O = \bigcup \{ V \times W \mid V \in \sigma, W \in \rho \text{ et } V \times W \subseteq O \}$$

$$f^{-1}(O) = \bigcup \{ f^{-1}(V \times W) \mid V \in \sigma, W \in \rho, V \times W \subseteq O \}$$

$$= \bigcup \{ f_Y^{-1}(V) \times f_Z^{-1}(W) \mid V \in \sigma, W \in \rho, V \times W \subseteq O \}$$

$\in \tau$ car $f_Y^{-1}(V) \times f_Z^{-1}(W)$ sont des ouverts ds X car f_Y et f_Z sont ctues et V et W ouverts.

$\Rightarrow$) Si f est ctue et $V \in \sigma$, $W \in \rho$,

$f_Y^{-1}(V) = f^{-1}(V \times Z) \in \tau$ car $V \times Z$ ouvert et f ctue.

$f_Z^{-1}(W) = f^{-1}(Y \times W) \in \tau$ car $Y \times W$ " " " ". $\square$

Lemme : Soient τ_1 et τ_2 deux top. sur X. On a que

$\tau_1 \subseteq \tau_2 \Leftrightarrow$ pour $x \in \mathcal{U} \in \tau_1$, $\exists\, V \in \tau_2$ tq $x \in V \subseteq \mathcal{U}$.

Ex dans sylla + notes !

4. Topologie quotient

↳ intuition : manière de "coller" des espaces.

Définition : Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X nous avons qu'elle donne origine à des classes d'équivalence

$$[x] = \{ y \in X : y \sim x \}.$$

On note $X/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence obtenues par $\sim$.

$$X/\sim \; = \{ [x] \mid x \in X \}.$$

On peut définir $q : X \to X/\sim \; : q(x) = [x]$.

q est une surjection et $q(x) = q(y) \Leftrightarrow x \sim y$.

Lemme : Soit (X, τ) un espace topologique et Y un ensemble. Si $f : X \to Y$ est une application, on pose

$$\sigma = \{ \mathcal{U} \subseteq Y : f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau \}.$$

Alors σ est une topologie sur Y tq

(1) $f : X \to Y$ est continue

(2) si θ topo sur Y avec $f : (X,\tau) \to (Y, \theta)$ ctue, alors $\theta \subseteq \sigma$.

Démonstration : (1) Montrons que σ est une topologie :

(1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau \Rightarrow \emptyset \in \sigma$

$f^{-1}(Y) = X \in \tau \Rightarrow Y \in \sigma$

(2) Si $\forall \alpha \in A$, $\mathcal{U}_\alpha \in \sigma$, $f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \in \tau$ et donc

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \in \sigma.$$

(3) Si pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{U}_j \in \sigma$, on a que $f^{-1}(\mathcal{U}_j) \in \tau$.

Donc,

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j\Big) = \bigcap_{j=1}^{n} f^{-1}(\mathcal{U}_j) \in \tau \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_j \in \sigma.$$

Si $f : (X, \tau) \to (Y, \theta)$ est continue, on a que

$$\mathcal{U} \subset \theta \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau \Rightarrow \mathcal{U} \in \sigma \Rightarrow \theta \subseteq \sigma .$$

↳ par définition de σ.

(1) On a que f est ctue par définition. $\square$.

<u>Définition</u> : Soit (X, τ) un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Considérons $q : X \to X/\sim$ donnée par $q(x) = [x]$.
La topologie quotient σ est la topologie la plus large sur $X/\sim$ pour laquelle q est continue, càd

$$\sigma = \{ \mathcal{U} \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau \}$$

↳ σ est la topologie du lemme précédent pour q.

<u>Lemme</u> : La topologie quotient consiste à des ensembles $\underset{X/\sim}{\mathcal{U} \subseteq}$ tq

$$\bigcup_{[x] \in \mathcal{U}} [x] \in \tau .$$

$$\sigma = \left\{ \mathcal{U} \subseteq X/\sim \;\middle|\; \bigcup_{[x] \in \mathcal{U}} [x] \in \tau \right\}$$

⇝ si l'ensemble des éléments des classes d'équivalence comprises dans $\mathcal{U}$ forment un ouvert dans (X, τ).

Topologie ? oui puisque $X \in \tau$, donc

$\underbrace{\{ [x_1], \dots, [x_n] \}}_{\#\text{ cl d'éq de } X} = X$ et donc $\displaystyle\bigcup_{\{[\dots]\} \in \mathcal{U}} [x] = X \in \tau$

$\mathcal{U}$ est l'ensemble de ttes les classes d'éq de X donc $\mathcal{U} = X/\sim \; \in \sigma$.

<u>Démonstration</u> : $\sigma = \{ \mathcal{U} \in X/\sim \mid q^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau \}$

$$q^{-1}(\mathcal{U}) = \{ x \in X \mid [x] \in \mathcal{U} \} \quad (\text{déf})$$
$$= \bigcup_{[x] \in \mathcal{U}} [x]$$

$$\Rightarrow \sigma = \left\{ \mathcal{U} \in X/\sim \;\middle|\; \bigcup_{[x] \in \mathcal{U}} [x] \in \tau \right\} . \qquad \square$$

Définition : (X,τ) e.t. est dit de Hausdorff si

$\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y \in \tau$ tels que $x \in \mathcal{U}_x$, $y \in \mathcal{U}_y$ et $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$.

Définition : (X,τ) un e.t et $x \in \mathcal{U} \in \tau$. On dit que $\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert de x.

Lemme : (X,τ) e.t. Alors,

(qui Pablo Ps vu avec VS)

$A \subseteq X$ ouvert $\iff \forall y \in A, \exists \mathcal{U} \in \tau \mid y \in \mathcal{U} \subseteq A$.

Démonstration : $\Rightarrow$) Si A ouvert, $A \in \tau$ et $\forall x \in A$, $x \in A \subseteq A$.

$\Leftarrow$) $\forall x \in A$, x a un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x \subseteq A$. Donc, $\bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x \subseteq A$ et, puisque tous les points de A admettent un voisinage ouvers, $A \subseteq \bigcup_{x\in A} \mathcal{U}_x$. Donc

$$A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x.$$ □

Proposition : (X,τ). e.t. de Hausdorff. Alors les singletons $\{x\}$ sont fermés.

Démonstration : Montrons que $A = X \setminus \{x\}$ est ouvert.

Soit $y \in A$, donc $y \neq x$. Par Hausdorff, il existe $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tels que $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Puisque $\mathcal{V}$ ne contient pas x, on sait que $\forall y \in A$, $y \in V \subseteq A$. On conclut par le lemme précédent que A est ouvert, on a donc que $X \setminus A = \{x\}$ est fermé. □

Proposition : Soit (X,τ) e.t. Si (X,τ) est Hausdorff, alors pour $Y \subseteq X$ avec la topologie de ss-espace l'est aussi.

Démonstration : Soit τ_Y la topologie de ss-espace de Y sur X.

Si $x, y \in Y$ tq $x \neq y$, alors $x, y \in X$ tq $x \neq y$. Par Hausdorff, $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tq $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Posons $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cap Y$ et $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cap Y$. Par déf de τ_Y, on sait que $\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}} \in \tau_Y$. Puisque $x, y \in Y$, on a que $x \in \tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ et $y \in \tilde{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{V}$, et

$$\tilde{\mathcal{V}} \cap \tilde{\mathcal{U}} = (Y \cap \mathcal{V}) \cap (Y \cap \mathcal{U}) = \emptyset \Rightarrow (Y, \tau_Y) \text{ Hausdorff}.$$ □

Proposition : Soient (X,τ) et (Y,σ) e.t. Si $f : X \to Y$ ctue et injective et Y Hausdorff, alors X Hausdorff.

Démonstration : Soient $x, y \in X$ avec $x \neq y$. Puisque f est injective, on a $f(x) \neq f(y)$.
Puisque Y Hausdorff, $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \sigma$ tels que $f(x) \in \mathcal{U}$, $f(y) \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Par continuité de f, $f^{-1}(\mathcal{U}), f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau$.
Puisque f est injective, $f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset$ et donc car $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$ et $y \in f^{-1}(\mathcal{V})$, (X,τ) est de Hausdorff.

$\square$

Proposition : Si (X,τ) et (Y,σ) sont Hausdorff, alors $X \times Y$ avec la topologie produit l'est aussi.

Démonstration : Soient $(a,b) \in X$ et $(c,d) \in Y$ tq $(a,b) \neq (c,d)$.

Si $a \neq c$ et $b \neq d$, $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tq $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ et $a \in \mathcal{U}$ et $c \in \mathcal{V}$.

$\exists\, \tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}} \in \sigma$ tq $\tilde{\mathcal{U}} \cap \tilde{\mathcal{V}} = \emptyset$ et $b \in \tilde{\mathcal{U}}$ et $d \in \tilde{\mathcal{V}}$.

Nous avons alors que

$(a,b) \in \mathcal{U} \times \tilde{\mathcal{U}} \in \tau_\pi$ et $(c,d) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}} \in \tau_\pi$

avec

$$(\mathcal{U} \times \tilde{\mathcal{U}}) \cap (\mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{V}}) = (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \times (\tilde{\mathcal{U}} \cap \tilde{\mathcal{V}}) = \emptyset$$

Donc $X \times Y$ est bien séparé par la topologie produit. $\square$.

Définition : Soit X un ensemble. On dit qu'une collection d'ensembles $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement de X si $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$.
Si $B \subseteq A$, on dit que $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in B}$ est un sous-recouvrement de X si $\bigcup_{\alpha \in B} \mathcal{U}_\alpha \supseteq X$.

Définition : (X, τ) est dit compact si $\forall \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ensembles ouverts tels que $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = X$, il existe $\{\mathcal{U}_{\alpha(j)}\}_{\alpha(j) \in A}$ et $1 \leq j \leq n$ tq $\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha(j)} = X$.

$\rightsquigarrow$ pour tout recouvrement de X, il existe au moins un sous-recouvrement fini de X.

Définition : Si (X, τ) est un esp. top alors un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est dit compact si la topologie de sous-espace sur Y est compact.

Lemme : " Bonne déf de ss-ensemble compact "
Un sous-ensemble Y d'un e.t (X, τ) est dit compact si $\forall \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ensembles ouverts tq $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$, on peut trouver un ss-recouvrement fini $\{\mathcal{U}_{\alpha(j)}\}_{\alpha(j) \in A}$ $(1 \leq j \leq n)$ tq $Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha(j)}$.

Démonstration : Si Y est compact, par déf. $\exists \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tels que $V_\alpha \in \tau_Y$ $\forall \alpha \in A$ avec $Y = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$.

Puisque $V_\alpha \in \tau_Y$, $\exists\, \mathcal{U}_\alpha \in \tau$ tel que $V_\alpha = Y \cap \mathcal{U}_\alpha$.

On a que $V_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ et donc $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement de Y dans X, càd

$$Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha .$$

Puisque Y est un compact, $\exists\, \alpha(1) \dots \alpha(n) \in A$ tq $Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha(i)} = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap \mathcal{U}_{\alpha(i)})$.

Étant donné que pour $1 \leq i \leq n$, on a $Y \cap \mathcal{U}_{\alpha(i)} \subseteq \mathcal{U}_{\alpha(i)}$

et donc $Y = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap \mathcal{U}_{\alpha(i)}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha(i)}$

Ainsi, si Y compact, $\forall \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ recouvrement de Y ds X, $\exists \{\mathcal{U}_{\alpha(j)}\}_{1 \leq j \leq n}$ un sous-recouvrement fini de Y ds X.

$\square$.

Proposition : Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. L'intervalle fermé et borné $[a,b]$ est compact.

Démonstration : (Stack Exch. ... not important but interesting).

On utilise la prop. de la borne supérieure :
Tout sous-ensemble non-vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Si $a = b$, le cas est trivial. Posons $a < b$ et prenons un recouvrement ouvert

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

On a en particulier que c'est un recouvrement de $[a,x]$ pour tout $x \in [a,b]$. Posons S l'ensemble de tous les $x \in [a,b]$ tels que $[a,x]$ admet un sous-recouvrement fini de $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. $\exists i_0$ tq $a \in \mathcal{U}_{i_0}$, donc $a \in S$.

$\rightsquigarrow S$ est un ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ borné par b.
Par la prop de la borne supérieure, on peut poser

$$x_0 := \sup S \in [a,b].$$

Montrons par contradiction que $x_0 = b$. Supposons que $x_0 < b$.
Notons que $x_0 > a$. En effet, il existe $i_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$ tq $[a, a+\varepsilon] \subseteq \mathcal{U}_{i_0}$, et donc $x_0 \geq a + \varepsilon$.

Prenons i_0 tq $x_0 \in \mathcal{U}_{i_0}$, et $\varepsilon > 0$ tq $a \leq x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leq b$ et

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq \mathcal{U}_{i_0} \rightsquigarrow \text{admis car } \mathcal{U}_{i_0} \text{ est ouvert.}$$
$\forall y \in \mathcal{U}_{i_0}$, $\exists \delta > 0$ tq $B(y,\delta) \subseteq \mathcal{U}_{i_0}$

Puisque $x_0 - \varepsilon$ n'est pas un suprémum de S, il existe $x_0 - \varepsilon \leq x_1 \leq x_0$ tel que $x_1 \in S$.

De telle manière, l'intervalle $[a, x_1]$ admet un recouvrement fini :

$$[a, x_1] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}$$

Mais alors, puisque $x_0 - \varepsilon \leq x_1 \leq x_0$ et puisque $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq U_{i_0}$, on a que

$$[a, x_0 + \varepsilon] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j} \cup \mathcal{U}_{i_0}$$

il suit que $x_0 + \varepsilon \in S$, ce qui contredit $x_0 = \sup S$.
Ainsi, $\sup S = b$ et un même argument montre que $b \in S$.

($[b - \varepsilon, b] \subseteq \mathcal{U}_{i_0}$ pour un certain i_0 et $\varepsilon > 0$, et donc $\exists\, x_1 \in [b - \varepsilon, b]$ tq $x \in S$, donnant un recouvrement fini pour $[a, b]$.)

$\rightsquigarrow b \in S$, donc $\exists$ un recouvrement fini

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}.$$

$\square$

<u>Théorème</u> : (Heine - Borel)
Un sous-espace T de $\mathbb{R}^n$ (muni de la topo usuelle) est compact s.s.i. il est fermé et borné.

Nous allons déduire la preuve de ce théorème comme conséquences de quelques théorèmes à suivre.

<u>Théorème</u> : Un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.
(Si (X, τ) e.t et $K \subseteq X$ compact. Si F fermé tq $F \subseteq K$, alors F est compact).

<u>Démonstration</u> : Soit $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement de F. Puisque $X/F \in \tau$, on a que $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha \cup (X/F) = X \supseteq K$ qui est un recouvrement de K.
Puisque K est compact, $\exists\, \alpha(j) \in A$ avec $1 \leq j \leq n$ tels que

$$K \subseteq X/F \cup \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha(j)}$$

Puisque $X/F \cap F = \emptyset$ et $F \subseteq K$, $\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha(j)} \supseteq F$

$\Rightarrow F$ est compact. $\square$

HB ~ Conséquence : Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé et borné, alors A est compact :

Démo. Puisque A est borné, $A \subseteq B(0,R) \subseteq [-R,R]^n$

Puisque $[-R,R]^n$ est compact, et puisque A est fermé, puisque $A \subseteq [-R,R]^n$ on a que A compact. □

Proposition : Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact, alors A est borné.

Démonstration : Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact, alors

$$A \subseteq \bigcup_{R>0} B(0,R) = \mathbb{R}^n.$$

Par compacité, $\exists R_1, \dots, R_n$ tq

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(0,R_i) = B(0,\bar{R}) \text{ avec } \bar{R} = \max R_i.$$

Donc, A est borné. □

HB ~ conséquence immédiate.

Théorème : Soit (X,τ) un e.t. Hausdorff. Alors,

$\forall K \subseteq X$ compact, K est fermé.

Démonstration : Soient $c \in K$ et $x \in X \setminus K$, donc $x \neq c$.

Puisque X est Hausdorff, $\exists \mathcal{U}_x, \mathcal{U}_c \in \tau$ tq $x \in \mathcal{U}_x$ et $c \in \mathcal{U}_c$ avec $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_c = \emptyset$.

Puisque $K = \bigcup_{c\in K} \{c\} \subseteq \bigcup_{c \in K} \mathcal{U}_c$, on a que $\bigcup_{c\in K} \mathcal{U}_c$ est un recouvrement ouvert de K. Par compacité de K, $\exists\, c(1) \dots c(n)$ tq $\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{c(j)}$ est un recouvrement de K.

Puisque $\forall x \in X \setminus K$, $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_c = \emptyset$, on a que

$\mathcal{U}_x \cap \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{c(j)} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}_x \cap K = \emptyset$.

Puisque $\forall x \in X/F$, $\exists\, \mathcal{U}_x$ avec $\mathcal{U}_x \cap K = \emptyset$, x possède un voisinage ouvert : $x \in \mathcal{U}_x \subseteq X/K$ □

$\Rightarrow X/K$ est ouvert donc K est fermé.

HB ~ conséquence : Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact, A est fermé.

Démonstration : Puisque $\mathbb{R}^n$ muni de topo usuelle est Hausdorff, étant donné que A est compact, on a par le thm précédent que A est fermé.

Ces 3 conséquences achèvent la preuve du thm Heine-Borel. □

Théorème : Soient (X,τ) et (Y,σ) e.t. et $f : X \to Y$ continue.
Si $K \subseteq X$ compact, alors $f(K) \in Y$ compact.

Démonstration : Soit A un ensemble et soient $U_\alpha \in \sigma$ avec $\alpha \in A$, tels que $f(K) \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Alors $\bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \supseteq K$ (identités en rouge)

Par continuité de f, $f^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \in \tau$.

Par compacité de K, $\exists\, \alpha(1) \dots \alpha(n) \in A$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha(j)} f^{-1}(U_{\alpha(j)}) \in \tau.$$

rouge

Donc $\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha(j)} \supseteq f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha(j)}\right)\right) \supseteq f(K)$

$\rightsquigarrow$ $f(K)$ est compact. $\square$

Corollaire : (compacité comme prop. topologique)
Soit (X,τ) et (Y,σ) e.t homéomorphes. Alors
(X,τ) compact $\iff$ (Y,σ) compact.

Démonstration : il existe $f : X \to Y$ continue et bijective, avec $Y = f(X)$ et $X = f^{-1}(Y)$. Par le théorème précédent, si Y compact, X compact et si X compact, Y compact. $\square$.

Corollaire : Soit (X,τ) un e.t compact et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Alors la topologie quotient sur $X/\sim$ est compacte.

Démonstration : Par déf d'e.t. quotient, $q : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$ est continue donc on conclut par le théorème précédent. $\square$

identités en rouge font réf à

$$\boxed{\begin{array}{c} f(f^{-1}(B)) \subset B \\ A \subseteq f^{-1}(f(A)) \end{array}}$$

(vrai $\forall A, B$, f ctue)

Lemme : Si $K \subseteq \mathbb{R}$ compact et non-vide, alors $\exists\, a, b \in K$ tq $K \subseteq [a,b]$. (penser à un intervalle troué)

Démonstration : Supposons que c'est faux. Nous aurons alors que $\forall x \in K$, $\exists\, y \in K$ avec $y < x$ tq

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} \,]y, \infty[$$

⚠ ouvert ! donc borne inférieure de K pas incluse.

Par compacité de K, $\exists\, y_1 \dots y_n \in K$ tq

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \,]y_j, \infty[\; = \;]\min(y_1 \dots y_n), \infty[\, .$$

Or, $\min(y_1 \dots y_n) \in K$, ceci ne peut donc pas recouvrir entièrement K. ↯ □

Corollaire : Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact et soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(K)$ est compact et $\exists\, \alpha, \beta \in f(K)$ tq $f(K) \in [\alpha, \beta]$, avec $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.
Donc $\forall x \in K$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

⇝ TBA.

Démonstration : facilement déduit des lemme + thm ci-dessous.

Théorème : Soient (X, τ) un espace topologique compact et (Y, σ) un espace topologique de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ est une bijection cont, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration : Par bijectivité de f, on a que, pour $U \in \tau$,

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$$

Puisque X est compact, $X \setminus U$ est compact car fermé
Puisque Y est Hausdorff, $f(X \setminus U)$ est fermé car compact.

Donc $f(U)$ est ouvert $\Rightarrow f^{-1}$ continue donc f est un homéomorphisme. □

Espaces compacts : fermé $\Rightarrow$ compact
Espaces Hausdorff : compact $\Rightarrow$ fermé.

Lemme : Soient τ_1 et τ_2 topologies sur le même ensemble X.
L'application identité :
$$f := Id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$$
donnée par $Id(x) = x$ est continue ssi $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Démonstration : $\Rightarrow$) Soit $U \in \tau_2$. On a que $f^{-1}(U) = U \in \tau_1$ par ctnité de f donc $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

$\Leftarrow$) Supposons que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Puisque $\forall U \in \tau_2$, on a que $U \in \tau_1$, donc
$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in \tau_2} = U \in \tau_1 \text{ donc } f \text{ ctue.} \quad \square$$

Théorème : Soient τ_1 et τ_2 des topologies sur X.
1) Si $\tau_2 \subseteq \tau_1$ et τ_1 compact, alors τ_2 l'est aussi
2) Si $\tau_2 \subseteq \tau_1$ et τ_2 est Hausdorff, alors τ_1 l'est aussi,
3) Si $\tau_2 \subseteq \tau_1$ et τ_1 compact, τ_2 Hausdorff, alors $\tau_1 = \tau_2$.

Démonstration :
1) Puisque $\tau_2 \subseteq \tau_1$, on a que $Id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ est continue. Par le 1e thm de la pg (15), puisque (X, τ_1) est compact, alors $\forall U \in \tau_1$, $Id(\overset{\in \tau_1}{U}) = \overset{\in \tau_2}{U}$ est compact.
Donc $\forall U \in \tau_2$, U est compact donc (X, τ_2) compact.

2) Puisque $\tau_2 \subseteq \tau_1$ et τ_2 est Hausdorff, $\forall x, y \in X$, $\exists U, V \in \tau_2$ tq $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
Puisque Id est ctue,
$$Id^{-1}(\underset{\tau_2}{\underset{\Cap}{U}}) = \underset{\tau_1}{\underset{\Cap}{U}} \quad \text{et} \quad Id^{-1}(\underset{\tau_2}{\underset{\Cap}{V}}) = \underset{\tau_1}{\underset{\Cap}{V}}$$
Donc puisque $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$ avec maintenant $U, V \in \tau_1$, on a que (X, τ_1) est Hausdorff.

3) Puisque $\tau_2 \subseteq \tau_1$, $Id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ est continue. Puisque τ_1 compact et τ_2 Hausdorff, par le thm du verso de pg (15), Id est homéomorphisme donc $Id^{-1} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ est ctue.
Ainsi,
$$\forall U \in \tau_1, \ (Id^{-1})^{-1}(U) = U \in \tau_2 \text{ donc } \tau_1 \subseteq \tau_2.$$
Puisque $\tau_1 \subseteq \tau_2$ et $\tau_2 \subseteq \tau_1$, on a que $\tau_1 = \tau_2$. $\square$

Théorème 5.19 (Tychonoff)

Soit (X,τ) et (Y,σ) deux e.t compacts.
Alors $(X \times Y, \mu)$ où μ est top. produit est compact.

Preuve pas dans le cadre du cours ?? Je vais demander à VS mais implique axiome du choix.

Théorème : Soient (X,τ) et (Y,σ) des e.t compacts et soit μ la topologie produit. Si $K \subseteq X$ et $L \subseteq Y$ sont compacts alors $K \times L$ est compact dans μ.

Démonstration :

- K compact sur $\tau \Leftrightarrow \forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ avec $U_\alpha \in \tau$ et $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

  $\exists\, \alpha(j) \in A,\ 1 \leq j \leq n \mid \bigcup_{\alpha(j) \in A} U_{\alpha(j)} \supseteq K$.

- L compact sur $\sigma \Leftrightarrow \forall \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ avec $V_\beta \in \tau$ et $L \subseteq \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$

  $\exists\, \beta(j) \in B,\ 1 \leq j \leq m \mid L \subseteq \bigcup_{\beta(j) \in B} V_{\beta(j)}$

Par définition d'ouverts, nous avons que

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau, \quad \bigcup_{\alpha(j) \in A} U_\alpha \in \tau, \quad \bigcup_{\beta \in B} V_\beta \in \sigma, \quad \bigcup_{\beta(j) \in B} V_{\beta(j)} \in \sigma.$$

Par définition de topologie produit, on a que

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \bigcup_{\beta \in B} V_\beta \in \mu \quad \text{et} \quad \bigcup_{\alpha(j) \in A} U_{\alpha(j)} \times \bigcup_{\beta(j) \in B} V_{\beta(j)} \in \mu.$$

Nous avons donc que si

$$K \times L \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$$

(qui est enfait un recouvrement quelconque de $K \times L$)

alors

$$K \times L \subseteq \bigcup_{\alpha(j) \in A} U_{\alpha(j)} \times \bigcup_{\beta(j) \in B} V_{\beta(j)}$$

qui est un sous-recouvrement fini.

$\square$

Donc $K \times L$ est bien compact.

$\leadsto$ ça (cette) doit être la démo la plus douteuse de synthèse ... VS a improvisé. C'est la démo de Pablo

3. Compacité dans les espaces métriques.

Nous disons qu'un espace métrique est compact si la topologie induite est compacte.

<u>Définition</u> : Un espace métrique (X, d) est séquentiellement compact si toute suite de X admet une sous-suite convergente.

<u>Exemples</u> :
- $[a, b]$ muni de la topo usuelle est séquentiellement compact.
- $]0, 1]$ n'est pas séquentiellement compact.

  Prenons $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. La limite doit faire partie de l'espace.

<u>Definition</u> : A topological space X is sequentially compact if every sequence of points in X has a convergent subsequence, <u>converging to a point in X</u>.

- $\mathbb{R}$ n'est pas séquentiellement compact : $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.

<u>Théorème</u> : Un espace métrique est compact ssi il est séquentiellement compact.

<u>Démonstration</u> :

$\Rightarrow$) Soit (X, d) un espace métrique. Supposons (X, d) compact et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X.

Supposons par l'absurde que (X, d) n'est pas séquentiellement compact. Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente. (On a donc bien que cette suite elle-même n'est pas convergente).

Alors, $\forall x \in X$, $\exists \delta(x) > 0$ et $N(x) \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N(x)$, on a que

$$x_n \notin B(x, \delta(x))$$

Remarquons que $x \in B(x, \delta(x))$, donc

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, \delta(x)).$$

Ce dernier terme est un recouvrement de X, et puisque X est compact par hypothèse,

$\exists\ x(1), \dots, x(n)$ tq

$$x \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x(i), \delta(x(i)))$$

Si $n \geq \max_{1 \leq i \leq n} N(i)$, alors on a que

$$x_n \notin B(x(i), N(i)) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Donc, puisque $x_n \in X$ et $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} B(x(i), \delta(x(i)))$

nous avons contradiction car

$\bigcup_{i=1}^{n} B(x(i), \delta(x(i)))$ est un recouvrement

de X par construction. $\lightning$.

Pour la réciproque de ce théorème, nous allons passer par un lemme intermédiaire :

<u>Lemme</u> : Soit (X, d) un espace métrique et $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ des ouverts pour la topologie induite tels que $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$.
Si (X, d) est séquentiellement compact,
alors $\exists\ \delta > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\exists\ \alpha \in A$ tq $B(x, \delta) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

<u>Demonstration</u> : Supposons par l'absurde que l'affirmation du lemme est fausse. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ x_n \in X \text{ tq } \forall \alpha \in A,\ B(x_n, 2^{-n}) \not\subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

Ici on prend une suite convergente vers 0 arbitraire. Car $\delta > 0$, donc " une certaine valeur $< \delta$ sera atteinte ".

Par hypothèse, (X, d) est séquentiellement compact donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite convergente.

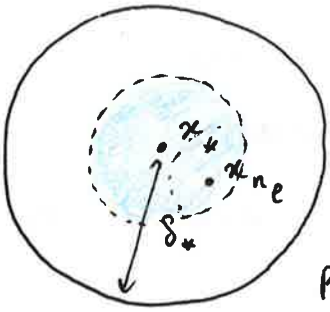
$\Rightarrow \exists\ x_* \in X$ et $(n_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ strictement croissante tq

$$\lim_{\ell \to \infty} d(x_{n_\ell}, x_*) = 0.$$

Comme $x_* \in X$, $\exists\ \alpha_* \in A$ tq $x_* \in \mathcal{U}_{\alpha_*}$ par hypotèse, puisque $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement de X, et donc car $\mathcal{U}_{\alpha_*}$ ouvert, puisqu'on est dans un esp. métrique, $\exists\ \delta_* > 0$ tq $B(x_*, \delta_*) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha_*}$

(car $\mathcal{U}_{\alpha_*}$ ouvert).

Puisque $(x_{n_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ converge vers x_*, nous pouvons prendre $\ell \in \mathbb{N}$ tq $d(x_{n_\ell}, x_*) < \delta_*/2$ et tq
$2^{-n_\ell} \leq \delta_*/2$ ⤳ il suffit de monter dans les ℓ pour satisfaire cette dernière condition puisqu'après un certain seuil, la première est d'office remplie.



where x_{n_ℓ} could be...

Nous avons que $B(x_{n_\ell}, 2^{-n_\ell}) \subseteq B(x_*, \delta_*)$ puisque $\forall x \in B(x_{n_\ell}, 2^{-n_\ell})$,

$$d(x, x_*) \leq d(x, x_{n_\ell}) + d(x_{n_\ell}, x_*)$$
$$\leq 2^{-n_\ell} + \delta_*/2 \leq \delta_*/2 + \delta_*/2$$
$$= \delta_*.$$

On a que $B(x_{n_\ell}, 2^{-n_\ell}) \subseteq B(x_*, \delta_*) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha_*}$
or par hypothèse absurde, on a que $B(x_n, 2^{-n}) \not\subseteq \mathcal{U}_\alpha \ \forall \alpha \in A$. $\square$ ↯

Reprenons la démonstration de notre théorème...

$\Leftarrow$) Soit $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recouvrement quelconque de X. Par le lemme ci-dessus, il existe $\delta > 0$ tq $\forall x \in X$, $\exists \alpha(x) \in A$ tq $B(x, \delta) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha(x)}$, car nous supposons (X, d) séq. compact.

- Montrons qu'il existe un ensemble fini $S \subset X$ tq

$$X = \bigcup_{s\in S} B(s, \delta):$$

Supposons par l'absurde que cela n'est pas vrai:
Soit $x_0 \in X$. Choisissons x_1 tq $x_1 \in X \setminus B(x_0, \delta)$.
De même, $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \delta)$.
Ceci constitue une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et par hypothèse de compacité séquentielle, il existe une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or ceci est une contradiction car $d(x_j, x_k) > \varepsilon$ $\forall j \neq k$. ↯

Ainsi, il existe $S \subset X$ fini tq

$$X = \bigcup_{s \in S} B(s, \delta).$$

Puisque $\forall s \in S$, $\exists\, \alpha(s) \in A$ tq $B(s, \delta) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha(s)}$,
on a que

$$X \subseteq \bigcup_{s \in S} B(s, \delta) \subseteq \bigcup_{s \in S} \mathcal{U}_{\alpha(s)}.$$

et comme S est un ensemble fini, on a bien que $\{\mathcal{U}_{\alpha(s)}\}_{\alpha(s) \in A}$ est un sous-recouvrement fini de $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$. (X, d) est donc bien compact. $\square$.

<u>Proposition</u> : Si (X, d) esp. métrique est compact, alors (X, d) est complet.

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d).
Puisque (X, d) est compact par hypothèse, il est séq. compact donc $\exists\, (n_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ une suite naturelle strictement croissante et $x_* \in X$ tq $(x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}} \to x_*$.
Par l'inég. triangulaire, nous avons que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $d(x_*, x_n) \leq d(x_*, x_{n_\ell}) + d(x_{n_\ell}, x_n)$.
$\leadsto$ Puisque $(x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers x_*, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n_\ell \geq N_1$, on a

$$d(x_{n_\ell}, x_*) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\leadsto$ Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n \in \mathbb{N}$ et $m > n \geq N_2$, on a

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, si on prend $n_\ell > n \geq N$,
on a que $d(x_*, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(Puisque $(n_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a $n_\ell > n$ $\forall \ell$ donc $n_\ell > n \geq N$, vaut $\forall n$. Mais genre la preuve est techniquement finie lol) $\square$.

Motivation : Nous avons trouvé une généralisation du TBA pour les esp. top. par le biais de la compacité.
Nous allons faire de même pour le TVI par le biais de la connexité.

Rappel : Théorème des bornes atteintes :
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fct. Si A est un intervalle et si f est ctue, alors $\forall a, b \in A$ et $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in [a, b]$ tq $f(c) = y$.

Définition : (X, τ) est disconnexe si $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tels que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ et $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \emptyset$.
X est connexe s'il n'est pas disconnexe.

Reformulation : X est connexe si et seulement si pour $X = \mathcal{U} \cup V$ et $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$, on a forcément que soit $\mathcal{U}$, soit V est vide.

Définition : Si E est un sous-ensemble de (X, τ), E est connexe (resp. disconnexe) si E muni de la topologie du sous-espace est connexe (resp. disconnexe).

Lemme : E est disconnexe (resp disconnexe) ssi $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tq $E \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap E = \emptyset$, $\mathcal{U} \cap E \neq \emptyset$ et $V \cap E \neq \emptyset$.

Exemples :

- (X, τ_{ind}) est connexe. En effet, si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_{ind}$ et $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, on a forcément que soit $\mathcal{U}$, soit $\mathcal{V} = \emptyset$.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$ sont disconnexes dans $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ en général, si $E \subseteq \mathbb{R}$ et si $\exists\, c \in \mathbb{R} \setminus E$ tq $(-\infty, c) \cap E \neq \emptyset$ et $(c, \infty) \cap E \neq \emptyset$, alors E est disconnexe.
- Si X est Hausdorff et $x_0, x_1 \in X$, alors $\{x_0, x_1\} \subseteq X$ est disconnexe.

Théorème : Soit (X,τ) un e.t. Si (X,τ) est connexe et $f : X \to Y$ est une fct ctue, alors $f(X)$ est connexe.

Démonstration : Démontrons la contraposée : Si $f : X \to Y$ est ctue, si $f(X)$ est disconnexe alors X est disconnexe.

Par définition de disconnexité, $\exists\ \mathcal{U}, \mathcal{V} \in Y$ tq $f(X) \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap f(X) = \emptyset$, $\mathcal{U} \cap f(X) \neq \emptyset$ et $\mathcal{V} \cap f(X) \neq \emptyset$.

- On a que $f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(\mathcal{V}) = f^{-1}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V}) \supseteq f^{-1}(f(X)) \supseteq X$
  donc $X \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}) \cup f^{-1}(\mathcal{V})$.
- Par continuité de f, on a que $f^{-1}(\mathcal{U}), f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau$.
  Puisque $\mathcal{U} \cap f(X) \neq \emptyset$, $\exists\ x \in X$ tq $f(x) \in \mathcal{U}$.
  Donc $X \cap f^{-1}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$.
  De même, $X \cap f^{-1}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$.
- Si $x \in f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(V) \cap f^{-1}(f(X))$, alors on a pu

$$f(x) \in f(f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{V}) \cap f^{-1}(f(X)))$$
$$\subseteq f(f^{-1}(\mathcal{U})) \cap f(f^{-1}(\mathcal{V})) \cap f(f^{-1}(f(X)))$$
$$\subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap f(X).$$

Or ceci est impossible par hyp. car $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap f(X) = \emptyset$.
Donc $f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(V) \cap X = \emptyset$.

$\Rightarrow X$ est disconnexe. $\square$.

Corollaire : Soit (X,τ) et (Y,σ) deux espaces topologiques homéomorphes. Alors (X,τ) est connexe ssi (Y,σ) est connexe. Démo directe par thm ci-dessus.

La connexité d'un espace est une propriété topologique.

Corollaire : (TVI)
Soit (X,τ) e.t, $a,b \in X$. Si X est connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ ctue, alors pour $c \in [f(a), f(b)]$, $\exists\ x \in X$ tq $f(x) = c$.

<u>Démonstration</u> : Puisque $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ est connexe par le thm précédent, $\exists\, d, e \in X$ tq $\operatorname{int}(f(X)) = (f(d), f(e))$

Alors, si $c \in [f(a), f(b)] \subseteq (f(d), f(e)) \subseteq f(X)$

donc $c \in f(X)$ et alors $\exists\, x \in X$ tq $f(x) = c$.

□

<u>Lemme</u> : Soit (X, τ) e.t, A un ensemble. Soit Δ la topo discrète sur A. Soit $f : X \to A$ une fonction. LASSE :

1) Si $x \in X$, $\exists\, U \in \tau$ avec $x \in U$ tq f cst sur U.
2) Si $x \in A$, $f^{-1}(\{x\}) \in \tau$.
3) $f : (X, \tau) \to (A, \Delta)$ est ctue.

<u>Démonstration</u>

1 => 2) Soit $y \in A$, posons $U = f^{-1}(\{y\})$. Alors par hyp, $\forall x \in U$, $\exists\, U_x \in \tau$ tq $x \in U_x$ et $f|_{U_x}$ est constante. Puisque $\forall x \in U$, $U_x \subseteq U$, on a que $\bigcup_{x \in U} U_x \subseteq U$. De plus, $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} U_x$

Donc $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ et puisque tout $U_x \in \tau$, il suit que $U \in \tau$.

2 => 1) Soit $x \in X$. Posons $U = f^{-1}(\{f(x)\}) \in \tau$ par hyp. Par déf d'ensemble inverse, on a donc que $\forall c \in U$, $f(c) = f(x)$, donc f est cst sur U.

2 => 3) Si $U \in \Delta$, alors $f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{y \in U} \{y\}\right)$

$$= \bigcup_{y \in U} f^{-1}(\{y\}) \in \tau \text{ car } \Delta \text{ est discrète.}$$

3 => 2) $\forall x \in A$, $\{x\} \in \Delta$ donc par ctuité de f, $f^{-1}(\{x\}) \in \tau$.

□

<u>Définition</u> : Si les conditions du lemme ci-dessus sont respectées, nous disons que f est localement constante.

Théorème : Si A contient au moins deux points, alors un espace topologique (X,τ) est connexe ssi toute fct localement constante $f: X \to A$ est constante.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Supposons (X,τ) connexe et $f: X \to A$ ctue. Puisque Δ est indiscrète, pour $t \in X$, $\{f(t)\}$, $A \setminus \{f(t)\} \in \Delta$

Donc, $\mathcal{U} := f^{-1}(\{f(t)\})$ et $\mathcal{V} := f^{-1}(A\setminus\{f(t)\}) \in \tau$ par ctuité de f.

Puisque
$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cap \mathcal{V} &= f^{-1}(\{f(t)\}) \cap f^{-1}(A\setminus\{f(t)\}) \\ &= f^{-1}(\{f(t)\} \cap A\setminus\{f(t)\}) \\ &= f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cup \mathcal{V} &= f^{-1}(\{f(t)\}) \cup f^{-1}(A\setminus\{f(t)\}) \\ &= f^{-1}(\{f(t) \cup A\setminus f(t)\}) \\ &= f^{-1}(A) = X \end{aligned}$$

par connexité de X on a que $\mathcal{V} = \emptyset$ et $\mathcal{U} = X$.

Donc par (1) du lemme passé, $\forall x \in \mathcal{U} = X$, $f(x)$ cst.

$\Leftarrow$) Montrons la contraposée : Si (X,τ) est disconnexe, alors $f: X \to A$ localement cst est non-constante.

Puisque (X,τ) est disconnexe, $\exists\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tq $\mathcal{U} \cap V = \emptyset$, $\mathcal{U} \cup V = X$ et $\mathcal{U}, V \neq \emptyset$. On choisit alors $a, b \in A$, $a \neq b$ et on pose
- $f(x) = a$ si $x \in \mathcal{U}$
- $f(x) = b$ si $x \in V$.

(tout en respectant la condition que f loc. cst.

Ainsi, f n'est pas constante car $a \neq b$ et $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \emptyset$.

$\square$

Corollaire : 1) Un e.t (X,τ) est connexe ssi $\forall$ fct ctue à valeurs entières $f : X \to \mathbb{R}$ est cst

2) Un e.t. (X,τ) est connexe ssi $\forall$ fct ctue $f : X \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ est cst.

$\to$ Ce sont des cas particuliers du dernier théorème.

Théorème : Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Alors les intervalles fermés $[a,b]$ sont connexes.

Démonstration : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ctue avec $f([a,b]) \subseteq \{0,1\}$.
Si f n'est pas constante, il existerait $c, d \in [a,b]$ tq $f(c) = 0$ et $f(d) = 1$. Par le TVI, $\exists\, e \in [c,d]$ tq $f(e) = \frac{1}{2} \notin \{0,1\}$. $\square$

Lemme : Soit (X,τ) e.t. et $E \subseteq X$. Si E est connexe, $\mathrm{Cl}(E)$ est connexe.

Preuve : Supposons $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tq $\mathrm{Cl}(E) \cap V \cap \mathcal{U} = \emptyset$ et $\mathrm{Cl}(E) \subseteq \mathcal{U} \cup V$. Alors, $E \subseteq \mathrm{Cl}(E) \subseteq \mathcal{U} \cup V$ et $E \cap V \cap \mathcal{U} = \emptyset$.
Par connexité de E, soit $E \cap \mathcal{U} = \emptyset$, soit $E \cap V = \emptyset$.
Spdg, on suppose que $E \cap V = \emptyset$. Alors $E \subseteq V^c$ et $V \subseteq E^c$.
Puisque $V \in \tau$, $V \subseteq \mathrm{Int}(E^c) = (\mathrm{Cl}(E))^c$ et donc $\mathrm{Cl}(E) \subseteq V^c$. Ainsi, $\mathrm{Cl}(E) \cap V = \emptyset$ donc $\mathrm{Cl}(E)$ est bien connexe. $\square$

Lemme : Considérons (X, τ) un espace topologique :

1) Soit $x_0 \in X$. Si $x_0 \in E_\alpha$ $\forall \alpha$ et E_α est connexe $\forall \alpha \in A$, alors $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ est connexe.

2) Écrivons $x \sim y$ si $\exists$ un ensemble connexe E tq $x, y \in E$. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence.

3) Les classes d'équivalence $[x]$ sont connexes.

4) Si F est connexe et $[x] \subseteq F$, alors $F = [x]$.

Démonstration :

1) Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tels que $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ et $\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Spdg, supposons que $x_0 \in \mathcal{U}$.

Alors, $\forall \alpha \in A$, $E_\alpha \cap \mathcal{V} = \emptyset$. car E_α est connexe.

Donc $\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha\right) \cap \mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in A} (E_\alpha \cap \mathcal{V}) = \emptyset$

$\bigcup_\alpha E_\alpha$ est bien connexe.

2) • Réflexivité : montrons que le singleton $\{x\}$ est connexe :

Posons $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ tq $\{x\} \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \{x\} = \emptyset$. Alors

- Soit $x \notin \mathcal{U}$, donc $\{x\} \cap \mathcal{U} = \emptyset \Rightarrow \{x\}$ connexe.
- Soit $x \notin \mathcal{V}$, donc $\{x\} \cap \mathcal{V} = \emptyset \Rightarrow \{x\}$ connexe.

Donc $x \sim x$ car $\{x\}$ est connexe.

• Symétrie : Si $x \sim y$, $\exists E$ connexe tq $x, y \in E$.
Donc $\exists E$ connexe tq $y, x \in E \Rightarrow y \sim x$.

• Transitivité : $x \sim y \Rightarrow \exists E$ connexe tq $x, y \in E$.
$y \sim z \Rightarrow \exists E'$ connexe tq $y, z \in E'$.

Par (1), puisque E et E' sont connexes avec $y \in E$ et $y \in E'$, on a que $E \cup E'$ est connexe.
Donc $x \sim z$ car $x, z \in E \cup E'$ qui est connexe.

3) Par définition, nous avons que

$$[x] = \{ y \in X \mid \exists\, E \subseteq X \text{ connexe tq } x, y \in E \}$$

Pour tout $z \in E_y$, $z \sim y \sim x$ donc $E_y \subseteq [x]$.

On a que

$$[x] = \bigcup_{y \in [x]} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in [x]} E_y$$

Puisque $\forall y \in [x]$, $E_y \subseteq [x]$, on a que $\bigcup_{y \in [x]} E_y \subseteq [x]$.

Donc $[x] = \bigcup_{y \in [x]} E_y$

Puisque $x \in E_y$ $\forall y \in [x]$, par (1) nous avons que

$\bigcup_{y \in [x]} E_y = [x]$ est connexe.

4) Si F est connexe et $[x] \subseteq F$, alors $\forall f \in F$, $f \sim x$

Donc $f \in [x]$. Ainsi, $F \subseteq [x]$ et donc $[x] = F$.

$\square$.

⇝ Les ensembles $[x]$ sont nommés composantes connexes de (X, τ).

<u>Proposition</u> : Les composantes connexes d'un espace topologique (X, τ) sont fermées. S'il y a seulement un nombre fini de composantes alors elles sont ouvertes.

<u>Démonstration</u> : Soit $\sim$ comme dans le lemme précédent.
Alors, $[x]$ est connexe, et donc $Cl([x])$ est connexe.
Puisque $[x] \subseteq Cl([x])$, $[x] = Cl([x])$ et donc $[x]$ est fermé.

On sait que $q : X \to X/\sim$ est continue. Puisque $[x] \in X/\sim$ est fermé, $q^{-1}([x])$ est connexe et fermée.
De plus, si $|\{[x] \mid x \in X\}|$ est fini, il y a un nombre fini d'ensembles $q^{-1}([x_\alpha]) \in X$ disjoints (car $[x]$ partitions de X) Donc puisque

$$\bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \alpha \neq i}}^{m} q^{-1}([x_\alpha]) = q^{-1}([x_i])^c \overset{\in X}{} \text{ est fermé comme union}$$

de fermés, $q^{-1}([x_i])$ est ouvert. $\square$.

Connexité par arcs :

Définition : Soit (X,τ) un e.t, $x \in X$ et $y \in X$ sont reliés par un chemin lorsque $\exists\, \gamma : [0,1] \to X$ ctue tq $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Contre-exemple : Si $X = \{0,1\}$ est muni de la topo discrète, 0 et 1 ne sont pas reliés.
$\Rightarrow$ La contrainte est dans la continuité de γ.

Lemme : Si (X,τ) est un espace topologique et si on écrit $\sim$ si x est relié à y par un chemin, alors $\sim$ est une rel. d'équivalence.

Demonstration :

- Reflexivité :

  Si $x \in X$, on pose pour $t \in [0,1]$ $\gamma(t) = x$.
  Ainsi, $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ est continue (comme fct cst).

- Symétrie

  Si $x \sim y$, $\exists\, \gamma : [0,1] \to X$ ctue tq $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
  On pose $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ $\forall\, t \in [0,1]$.
  $\tilde{\gamma}$ est continue car composée de fcts ctues,
  et $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(1) = y$ et $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = x$.

- Transitivité

  Si $x \sim y$ et $y \sim z$ il existe
  $\gamma : [0,1] \to X$ tq $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ et $\delta : [0,1] \to X$ tq $\delta(0) = y$, $\delta(1) = z$

  Alors on pose

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

  qui est continue car $\gamma(1) = \delta(0)$,
  et $\eta(1) = z$ et $\eta(0) = x$. $\Rightarrow x \sim z$. $\square$

Définition : (X,τ) est connexe par arcs si deux points quelconques peuvent toujours être reliés par un chemin.

Théorème : Si un espace topologique est connexe par arcs, alors il est connexe. (X,τ)

Démonstration : Soient $U, V \in \tau$ tq $U \cup V = X$, $U \neq \emptyset$ et $V \neq \emptyset$.

Donc $\exists\, x \in U,\ y \in V$.

Puisque X est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0,1] \to X$ chemin tq $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

$\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ sont ouverts par continuité de γ et nous avons aussi que

$$[0,1] = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(U \cup V) = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$$

Puisque $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, $0 \in \gamma^{-1}(U)$ et $1 \in \gamma^{-1}(V)$.

Puisque $[0,1]$ est connexe, $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) \neq \emptyset$

donc $\gamma^{-1}(U \cap V) \neq \emptyset$ ce qui implique que $U \cap V \neq \emptyset$. Donc X est connexe. $\square$

Contre-exemple : The deleted comb-space in $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(0,1)\} \cup (K \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$$

with $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\rightsquigarrow$ clearly the problem point is $(0,1)$. (more info wikipedia)

Théorème : Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle. Alors tout ensemble ouvert Ω qui est connexe est aussi connexe par arcs.

also counter-ex at the end of the syllabus