LMAT1321 — Analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles

Questions précédentes d'examens écrits

Jean Van Schaftingen

Année académique 2022–2023

Ce document reprend dans un souci de transparence les examens d'exercices des années précédentes. Il ne remplace pas, ne précise pas et ne complète pas les consignes données dans le contrat pédagogique et expliqées lors des cours et séances d'exercices.

Aout 2022

1. Le sous-espace vectoriel
$$V := \left\{ f \in \ell^1(\mathbb{N}) : \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = 0 \right\}$$
forme-t-il un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^1(\mathbb{N})$?
2. Décrivez toutes les valeurs propres de l'application linéaire $L \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ définie pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ par
$$L(f)(x) := \mathrm{e}^{-x^2} f(x).$$

Janvier 2022

1. Déterminez tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que l'application linéaire
$$u \in L^3(]0,1[) \mapsto \int_0^1 u(x)\, x^\alpha \,\mathrm{d}x$$
soit un élément de $(L^3(]0,1[))^*$.
2. Dans l'espace $C^0_b(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme, on considère l'ensemble
$$V := \{ f \in C^0_b(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \}.$$
Cet ensemble est-il rare dans $C^0_b(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ?

Aout 2021

1. Soient X un espace normé uniformément convexe et $u \in X$ tel que $\|u\| = 1$. Prouver que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est telle que
   (i) pour chaque n, $\|u_n\|_X = 1$,
   (ii) $\|u_n + u\|_X \to 2$,

   alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans X.
2. L'opérateur symétrique
$$A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : u \mapsto \frac{u}{1+x^2}$$
   est-il compact ?

Janvier 2021

1. Soit $1 \le p < \infty$. Prouver que l'espace vectoriel
$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} \left|u(n)\right|^p < +\infty \right\}$$
   muni de la norme
$$\|u\|_{\ell^p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|u(n)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
   est complet.
2. Soient μ une mesure positive sur un ensemble Ω, $1 < p < \infty$ et $(u_n) \subset L^1(\Omega,\mu) \cap L^p(\Omega,\mu)$ telle que
   (i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^1(\Omega,\mu)} < +\infty$,
   (ii) $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega,\mu)$,
   (iii) $u_n \to u$ presque partout sur Ω.

   Prouver que, pour tout $1 < q < p$, $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^q(\Omega,\mu)$.

Aout 2020

1. Démontrer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ est une partie dense de $L^3(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que l'application
$$A : \mathscr{BC}(\mathbb{R}) \to \mathscr{BC}(\mathbb{R}) : u \mapsto A(u)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{u(y)}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$
   est continue et calculer sa norme.

Janvier 2020

1. Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$.
   a Prouver que, pour chaque $u \in L^2(\Omega)$,
   $$v(x) := \frac{u(x)}{|x|^{\frac{N-1}{2}}} \in L^1(\Omega).$$
   b Prouver que la fonctionnelle
   $$f : L^2(\Omega) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega \frac{u(x)}{|x|^{\frac{N-1}{2}}} \, \mathrm{d}x$$
   est continue et calculer sa norme.
2. Soient X un espace normé séparable et $u \in X$. Prouver que l'ensemble
   $$F(u) := \left\{ f \in X^* \;\middle|\; \|f\| = \|u\|,\ \langle f, u \rangle = \|u\|^2 \right\}$$
   est non vide et fermé.
   Indication : Utiliser le théorème de Hahn–Banach.
3. Prouver que la fonction définie sur $B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ par
   $$u(x) := 1 - |x|$$
   appartient à $W^{1,1}(B(0,1))$.