LMAT1323 Topologie

Examen de préparation - Nouveau format 2021

- *Le test comporte* ***4 questions****.*
- *Le test est à* ***livre fermé****. Les téléphones portables ainsi que tous les autres moyens de communication ou de stockage de données sont interdits.*
- *La durée du test est de* ***2h00****.*

---

1. (5 points) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? *Répondez par vrai ou faux à la fin de la ligne. Donnez une justification courte ou un contre-exemple.*

   (a) Tout sous-espace (Y,τ_Y) d'un espace topologique connexe (X,τ) est connexe.

   Réponse. Faux. Par example, le sous-espace $]0,1[\cup]2,3[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas connexe, tandis que $\mathbb{R}$ l'est.

   (b) Tout sous-ensemble compact d'un espace métrique est fermé.

   Réponse. Vrai. Car la propriété est vraie pour les espaces de Hausdorff et un space métrique est Hausdorff.

   (c) Si (X,τ) est compact alors X est un ensemble fini.

   Réponse. Faux. Le cercle S^1 est compact (quotient de $[0,1]$ qui est compact) et n'est pas un ensemble fini.

   (d) $\mathbb{Z}$ muni de la topologie indiscrète n'est pas compact.

   Réponse. Faux. Dans la topologie indiscrète il n'y a que deux ouverts : $\emptyset$ et $\mathbb{Z}$. Donc, un recouvrement arbitraire de $\mathbb{Z}$ contient au plus deux elements. Ceci implique que $\mathbb{Z}$ muni de la topologie indiscrète est compact.

   (e) L'application $f\colon [0,1] \to [0,1[$, définie par $f(1) = 0$ et $f(x) = x$ pour $x \neq 1$, n'est pas continue.

   Réponse. Vrai. L'application f est surjective et $[0,1]$ est compact tandis que $[0,1[$ ne l'est pas (théorème de Heine–Borel). Continuité de f entraînerait $f([0,1])$ compact.

2. (5 points) Soient X_1, X_2 et X_3 trois espaces connexes tels que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$ et $X_2 \cap X_3 \neq \varnothing$. Montrer que $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ est connexe.

3. (5 points) Soit (X,d) un espace métrique, $u \in X$ et $S \subset X$ un sous-ensemble fini avec $u \notin S$. Montrer qu'il existe $U, V \in \tau_d$ telles que $u \in U$, $S \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$ (ici τ_d est la topologie sur X induite par la métrique d).

4. (5 points) Soit (X,τ) un espace totalement disconnexe : pour chaque paire de points u, $v \in X$, $u \neq v$, il existe des ouverts non-vides U et V, tels que $U \cup V = X$, $U \cap V = \varnothing$ et $u \in U$, $v \in V$. Montrer que les composantes connexes de (X,τ) sont l'ensemble vide et les singletons de X.