EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 6
APPLICATIONS CONTRACTANTES

Dans cet exercice on montre que le théorème de point fixe vu au cours permet de résoudre des problèmes à donnée au bord non linéaire. Ici, le problème suivant modélise la hauteur u d'une corde soumise à une force f et attachée aux bords. On peut penser à une corde à linge tendue entre deux fils et f comme la somme de la gravité et du linge qui pend dessus.

Exercice 1. *Dans cet exercice, on étudie une condition sur $f \in C_b([a,b] \times \mathbb{R})$ de sorte que le problème de Dirichlet,*

$$(\star) \qquad \begin{cases} u''(t) = -f(t, u(t)) & t \in [a,b] \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases}$$

ait une solution $u \in C_b^2(a,b) \cap C_b[a,b]$. Le fait que la solution soit continue fait que la donnée au bord à du sens. Le fait que u soit C^2 permet de s'assurer que la première équation à du sens.

(a) Expliquer pourquoi le problème

$$\begin{cases} u''(t) = -f(t) & t \in [a,b] \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases}$$

a une solution $u \in C_b^2(a,b) \cap C_b[a,b]$ qui s'écrit

$$u(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) \, \mathrm{d}s$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a} & s \le t \\ \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a} & s > t. \end{cases}$$

La seconde équation du problème $\star$ s'appelle la donnée au bord et dans ce cas il s'agit de conditions de type «Dirichlet». G s'appelle la fonction de Green du problème, il s'agit d'un outil qu'il ont déjà rencontré dans le contexte des EDO. Préciser ici qu'il ne s'agit pas d'une EDO *cfr conditions au bord.* Insister que cette partie consiste à montrer deux choses

(I) $u \in C_b^2(a,b) \cap C_b[a,b]$
(II) la dérivée seconde de u vaut l'intégrale de $G(t,s)f(s)$

Date: Automne 2022.

Pour (I), on commence par noter que u s'écrit pour tout $t \in [a,b]$,

$$u(t) = \frac{b-t}{b-a}\int_a^t (s-a)f(s)\,\mathrm{d}s + \frac{t-a}{b-a}\int_t^b (b-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

Par la régle du produit de fonctions dérivables, de somme de fonctions dérivables et le théorème fondamental de l'analyse (qui affirme que pour tout

$$F \in C[a,b], t \in [a,b] \mapsto \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}s$$

est une fonction C^1 sur $[a,b]$ et que sa dérivée vaut F), $u \in C^1_b[a,b]$ et

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\frac{1}{b-a}\int_a^t (s-a)f(s)\,\mathrm{d}s + \frac{b-t}{b-a}(t-a)f(t) \\ &\quad + \frac{1}{b-a}\int_t^b (b-s)f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{t-a}{b-a}(b-t)f(t) \\ &= -\frac{1}{b-a}\int_a^t (s-a)f(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{b-a}\int_t^b (b-s)f(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Par la régle du produit de fonctions dérivables, de somme de fonctions dérivables et le théorème fondamental de l'analyse, $u' \in C^1_b[a,b]$ (donc $u \in C^2_b[a,b]$- et en dérivant encore nous trouvons que

$$-(b-a)u''(t) = (t-a)f(t) + (b-t)f(t) = (b-a)f(t),$$

ce qui montre (II).

Cette solution est-elle unique ? Oui, il y a unicité car s'il y avait deux solutions leur différence serait nulle en a et en b et de dérivée second nulle sur $[a,b]$, ce qui implique nulle sur tout $[a,b]$. Leur différence étant nulle on peut conclure que les deux solutions étaient en fait égales.

(b) Considérons l'opérateur

$$R : u \in C_b[a,b] \to C_b[a,b] : u \mapsto Ru(t) = \int_a^b G(t,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s.$$

L'image de l'opérateur, est-elle bien contenue dans $C_b[a,b]$. Oui, du fait que

$$s \in [a,b] \mapsto f(t,u(t))$$

est continue, on peut appliquer le point (a) qui nous apprend que Ru est même dans $C^2[a,b] \subset C_b[a,b]$. *Établir un lien entre les points fixes de R et les solutions de $(\star)$.*

Orienter les étudiants dans les deux directions suivantes :

(I) Tout point fixe est-il $C^2(a,b) \cap C_b[a,b]$ et solution du problème $(\star)$?

(II) Toute solution du problème $(\star)$ est-elle un point fixe de R?

Pour (I), la réponse est oui par le point (a). Pour le point (II), on sait par l'unicité du point (a) que la solution u doit s'écrire sous la forme $u(t) = Ru(t)$.

(c) Supposons qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t_1, t_2 \in [a,b]$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

Donnez une borne supérieure sur $L > 0$ de sorte que le problème $(\star)$ admette une unique solution continue. Suggerer aux étudiants d'utiliser le théorème de point fixe. Il suffit de montrer qu'on peut choisir $L > 0$ de sorte qu'il existe un $\lambda \in (0,1)$ de sorte que pour tout $u, v \in C_b(a,b)$

$$\|Ru - Rv\|_\infty \leq \lambda \|u - v\|_\infty$$

On a que

$$|Ru(t) - Rv(t)| \leq \int_a^b |G(s,t)||f(s,u(s)) - f(s,v(s))| \leq L\|u-v\|_\infty \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |G(t,s)| \,\mathrm{d}s$$

et

$$\begin{aligned}\int_a^b |G(t,s)| \,\mathrm{d}s &= (b-t)\int_a^t (s-a)\,\mathrm{d}t + (t-a)\int_t^b (b-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{(b-t)(t-a)^2}{2} + \frac{(t-a)(b-t)^2}{2} \\ &= (b-t)(t-a)\frac{b-a}{2}\end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |G(t,s)| \,\mathrm{d}s = \frac{(b-a)^3}{8}$$

Donc si on choisit $L(a,b) < 8/(b-a)^3$, on a que R est contractante et donc admet un point fixe. Ce point fixe par le point b est l'unique solution $C^2(a,b) \cap C[a,b]$ du problème $(\star)$. On peut soi calculer le sup ou alors donner un argument sur pourquoi il est fini.

Ici on démontre le théorème de Lax-Milgram qui est un grand classique d'analyse fonctionnelle et qui permet de montrer l'existence de solutions à l'équation $Ax = b$ ou à d'autres EDPs telles que $-\Delta u = f$ (en intégrant par parties). Nous insistons que la méthode est bien plus important que le résultat annoncé dans l'énoncé.

Exercice 2. *On se donne une espace vectoriel complet (un espace de Hilbert) H muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ dont découle une norme $\|\cdot\|$ ainsi qu'une application bilinéaire $B : H \times H \to \mathbb{R}$ qui vérifie :*

(1) il existe $M > 0$ telle que pour tout $u, v \in H$ $|B(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$, on parle de contuinuité d'application bilinéaire
(2) il existe $m > 0$ telle que pour tout $u \in H$ $B(u,u) \geq m(u|u)$. On parle de coercivité de B

Si $L \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$, alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$

$$B(u,v) = L(v).$$

Il s'agit d'un théorème d'existence et d'unicité pour une certaine équation.

(i) *Si $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est une matrice et qu'on pose $B(u,v) = (Au|v)$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, expliquer qu'on a toujours (1) et que (2) tient si et seulement si A est injective (donc bijective).* On utilise dans l'ordre Cauchy-Scwharz, le fait que toute matrice (toute application linéaire en espaces vectoriels de dimension finie) est continue (ou bornée i.e. $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} < \infty$, c'est montré en analyse II et en analyse numérique, c'est aussi prouvé dans le cours dans la section *concrete linear mappings*) on a donc

$$|B(u,v)| = |(Au|v)| \leq \|Au\|\|v\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}\|u\|\|v\|$$

et on peut donc prendre $M = \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}$. Concernant l'injectivité : si (2) tient, on a que $B(u,u) = 0$ implique que $(u|u) = 0$ et par positivité du produit scalaire $u = 0$. Donc, on a injectivité. Inversément, si l'application est injective, elle ne s'annule pas sur $\mathbb{S}^d = \{u \in \mathbb{R}^d : \|u\|_{\mathbb{R}^d} = 1\}$ et par compacité il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{S}^d$ $|B(u,u)| \geq \delta$. On termine en obsevant que $u/\|u\|_{R^d} \in \mathbb{S}^d$ et en utilisant la bilinéarité. On prend $m = \delta$.

(ii) *Si $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ est une matrice injective, expliquer pourquoi l'existence d'une unique $u \in H$ implique l'existence d'une unique solution $x \in \mathbb{R}^d$ au système*

$$Ax = b$$

où $b \in \mathbb{R}^d$ est donné.

On pose $B(u,v) = (Au|v)$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$ et $L_b(v) = (b|v)$. On voit qu'ils vérifient les hypothèses par le point (i) et par le fait que $L_b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ par Cauchy-Schwarz. On observe que $H = \mathbb{R}^d$ est un espace de Hilbert (dire quel produit scalaire et quelle norme) on peut donc déduire l'existence d'un unique $x \in \mathbb{R}^d$ (c'est le v de l'affirmation) tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$

$$B(x,v) = L_b(v)$$

c'est-à-dire

$$(Ax|v) = (b|v)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ donc $Ax = b$ (en prenant $u = e_i$) vecteurs de la base ou en disant que $(\mathbb{R}^d)^\perp = \{0\}$.

(iii) *On va montrer le théorème dans le cas où $B(u,v) = (A(u)|v)$ où $A : H \to H$ est linéaire et $L(u) = (f|u)$ pour un $f \in H$. Expliquer pourquoi sous (1) et (2) A est continue et $\|A\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq M$.* Par (1), on note en prenant $v = Au$ que

$$\|Au\|^2 = (Au|Au) \leq M\|u\|\|Au\|$$

et donc pour tout $u \in H$ $\|Au\| \leq M\|u\|$ ce qui implique que A est bornée donc continue de plus en passant au supremum $\|A\|_{\mathcal{L}(H,R)} \leq M$. On utilise donc pas (2).

(iv) *Expliquer pourquoi l'application*

$$v \in H \mapsto g(v) \doteq v - \frac{m}{M^2}(Av - f)$$

admet un unique point fixe. On va utilise le théorème de contraction. On a que H est un espace complet quand vu comme espace métrique dont la métrique découle de la norme de H. On va montrer que g est contractante vue comme une application $H \to H$. Pour tout $v, w \in H$, on a en utilisant la linéarité de A que

$$g(v) - g(w) = (v - w) - \frac{m}{M^2}A(v - w).$$

Si l'on pose $u \doteq v - w$ on a que

$$\|g(v) - g(w)\|^2 = \|v - \frac{m}{M^2}Av\|^2 = \|v\|^2 - 2\frac{m}{M^2}(Av, v) + \big(\frac{m}{M^2}\big)^2\|Av\|^2$$

et par (ii) on trouve que

$$\|g(v) - g(w)\| \leq \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}\|v - w\|.$$

Vu que $m > 0$ et que $M > m$ on a que la racine carrée est strictment plus petite que 1. L'application est dès lors contractante. Par le théorème de point fixe. Il existe un unique $u \in H$ tel que $g(u) = u$ càd $Au = f$ en contractant avec $(\cdot|v)$ on obtient l'affirmation.

(v) *En déduire l'affirmation de l'énoncé.*

Exercice 3. *Fixons un opérateur continu $A : X \to X$ d'un espace vectoriel complet vers lui-même. Supposons que $\|T\|_{L(X)} < 1$.*

Montrez que la série

$$S = \sum_{n \geq 0} T^n$$

converge pour la norme d'opérateur et que

$$(1 - T)^{-1} = S \quad \textit{et} \quad 1 + TS = S = 1 + ST.$$

Exercice 4. *Nous allons construire une fonction f uniformément continue, périodique mais nulle part dérivable.*

Considérons les fonctions continues à valeurs réelle de période 1 sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Munie de la norme uniforme

$$\|u\|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{x \in \mathbb{T}} |u(x)|$$

où $\mathbb{T} = [0, 1]$, notons cet espace vectoriel normé $C(\mathbb{T})$.

(a) *Expliquez pourquoi $C(\mathbb{T})$ est complet.*

(b) *Montrez qu'il existe une fonction f continue et périodique telle que pour tout $x \in \mathbb{T}$,*

$$\left|\frac{1}{2} - x\right| + \frac{1}{2}f(2x) = f(x).$$

Si l'on étend par périodicité la fonction

$$x \in \mathbb{T} \mapsto s(x) = \left|\frac{1}{2} - x\right|,$$

montrez que, pour tout $x \in \mathbb{T}$, la fonction f satisfait

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{s(2^n x)}{2^n}.$$

(c) *Montrons maintenant la non–dérivabilité en $x_0 \in \mathbb{T}$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, appelons a^m le premier point de la forme $k/2^m$ (où $k \in \mathbb{N}$) qui satisfait $a^m \geq x_0$. Posons ensuite*

$$b^m = a^m + \frac{1}{3 \cdot 2^m} \qquad \textit{et} \qquad c^m = a^m + \frac{1}{2^m}.$$

Sachant que

$$\frac{f(b^m) - f(a^m)}{b^m - a^m} - \frac{f(c^m) - f(a^m)}{c^m - a^m} = 2,$$

déduisez la non dérivabilité de f en x_0.

Exercice 5. *Décrivez toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont pour tout $x, y \in \mathbb{R}$*

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$