EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 3
CONTINUITÉ I/II

Exercice 1. *Fixons $\tau \in \mathbb{R}$. Sur $C_b(\mathbb{R})$ l'espaces des fonctions numériques continues et bornées muni de la norme supremum, on considère l'opérateur de translation U_τ défini par $U_\tau f(t) = f(t-\tau)$ pour tout $t \in \mathbb{R}, f \in C_b(\mathbb{R})$. Expliquer pourquoi $U_\tau \in \mathcal{L}(C_b(\mathbb{R}), C_b(\mathbb{R}))$ et donner sa norme i.e. $\|U_\tau\|_{\mathcal{L}(C_b(\mathbb{R}),C_b(\mathbb{R}))}$.*

Exercice 2. *L'opérateur de décalage à droite $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ est défini pour tout $(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ par $(Sx)_0 = 0$ et $(Sx)_n = x_{n-1}$ si $n \geq 1$. De façon analogue, l'opérateur de décalage à gauche $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ est défini pour tout $(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ par $(Tx)_n = x_{n+1}$ si $n \geq 0$.*

(a) Expliquer pourquoi S est borné et donnez sa norme.
(b) Expliquer pourquoi T est borné et donnez sa norme.
(c) Pour $(x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ calculez $(ST(x)_n)_n$ et $(TS(x)_n)_n$.
(d) Expliquer pourquoi pour tout $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$(S(x_n)_n|(y_n)_n)_{\ell^2(\mathbb{N})} = ((x_n)_n|T(y_n)_n)_{\ell^2(\mathbb{N})}.$$

Exercice 3. *Determiner les $p \in [1,\infty]$ pour lesquels l'application*

$$x = (x_n)_n \in \ell^p(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{p-1}}}$$

définit un élément de $\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}), \mathbb{R})$.

Exercice 4. *Fixons $a = (a_n)_n \subset \ell^1(\mathbb{Z})$ et $b = (b_n)_n \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Pour tout $x \in [0,1]$, posons*

$$Ta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n x^n$$

et

$$Sb(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n x^n$$

(a) Expliquer pourquoi $T : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C_b[0,1]$ définit un opérateur linéaire borné. Calculer sa norme.
(b) Expliquer pourquoi $S : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \to C_b[0,1]$ définit un opérateur linéaire borné. Calculer sa norme.

Idée de solution de l'exercice 4. On a pour tout n $|a_n b_n x^n| \leq |a_n| \|b_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$. Dès lors,

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n x^n\right| \leq \|a_n\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \|b_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}.$$

Date: Automne 2022.

Par un théorème sur les séries absolument convergentes on a que $Ta(x), Sb(x)$ sont définnissent des éléments de $C[0,1]$. Vu que Ta et Sb sont des applications linéaires par les propriétés des sommes inconditionnelles voir annexe sur les sommes. Par la borne plus elles sont bornés donc continues. De plus $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^1(\mathbb{Z}),C_b[0,1])} \leq \|b_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ et $\|S\|_{\mathcal{L}(\ell^1(\mathbb{Z}),C_b[0,1])} \leq \|a_n\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$. On montre maintenant qu'il s'agit en fait d'égalités. Etant donné $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n > 0 \\ 0 & \text{si } a_n = 0 \\ -1 & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

On voit qu'en $x = 1$

$$\|a_n\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \leq \|S\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty(\mathbb{Z}),C_b[0,1])}.$$

Pour T, si $|b_M| = \|b_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$, on prend $a_n = 0$ pour tout n sauf M pour lequel on prend $a_M = \operatorname{sgn}(b_M)$. Si pas on prend un suite $(n_k)_k$ telle que $\lim_{k\to\infty} |b_{n_k}| = \|b_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$. On définit

$$a_n^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n_k \\ \operatorname{sgn}(b_n) & \text{si } n = n_k. \end{cases}$$

Cela donne

$$|b_n^{n_k}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^k b_n \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^1(\mathbb{Z}),C_b[0,1])}.$$

□

Exercice 5. *Construire une application linéaire $C_b]a,b[\to \mathbb{R}$ non bornée quand $C_b]a,b[$ est muni de $\|\cdot\|_{L^1(]a,b[)}$.*

Exercice 6. *Sur une espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, on définit pour tout sous-ensemble non vide $A \subset X$ et $x \in X$,*

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{v\in A} \|x - v\|.$$

Expliquer pourquoi pour tout $\phi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$,

$$|\phi(x)| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker}(\phi))\|\phi\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})}$$

pour tout $x \in X$.

Idée de solution pour l'exercice 6. C'est le lemme 3.17 dans le cours. □

Exercice 7. *Posons*

$$C_0([0,\infty)) = \{u \in C_b([0,\infty)) : \limsup_{t\to\infty} |u(t)| = 0\}.$$

qu'on pense comme un espace vectoriel normé avec la norme sup. Expliquer pourquoi il s'agit d'un espace vectoriel. (Pour ce faire, il faut éventuellement donner une condition sous laquelle l'inégalité

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n$$

est vraie.) Pour tout $f \in C_0([0,\infty))$, expliquer pourquoi

$$L(f) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} f(s) \,\mathrm{d}s$$

définit un élément de $\mathcal{L}(C_0([0,\infty)),\mathbb{R})$. Donner sa norme.

Idée de solution pour l'exercice 7. L'exercice se base sur la transformée de Laplace qui est utile en théorie du signal pour obtenir des formules explicites dans certains cas comme il se fait avec la transformée de Fourier, pour lisser des signaux ou pour ramener à de l'analyse complexe des questions sur les signaux.

Si $(x_n)_n, (y_n)_n$ sont bornée et positives,

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n.$$

En effet, on utilise la définition de la limite supérieure en terme d'infimum d'un supremum (alternativement on peut montrer que la limite supérieure est une vraie limite en montrant que la limite inférieure est plus grande que zéro ce qui force l'égalité entr la limite supérieure et la limite inférieure). Le fait que $C_0[0,\infty)$ soit un espace vectoriel suit de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité sur les limites supérieures ci-dessus. On note que tout élément de $C_0[0,\infty)$ est borné (proche de zéro par continuité sur un compact, proche de l'infini car elle décroit vers zéro) si bien que la norme sup fait sens. On note alors que

$$|L(f)| \leq \int_0^{\infty} \exp(-s) \,\mathrm{d}s \|f\|_\infty.$$

Donc $\|L\|_{\mathcal{L}(C_0([0,\infty))} \leq \mathrm{e}$. On montre l'autre inégalité. On voudrait utiliser $f \equiv 1$ mais on ne peut pas. Donc on l'approche par

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,n) \\ 1-(x-n) & \text{sur } (n,n+1) \\ 0 & \text{sur } [n+1,\infty). \end{cases}$$

On voit que $f_n \in C_0[0,\infty)$ et que $\exp(-\cdot) f_n \leq \exp(-\cdot)$ donc par convergence dominée on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s = \mathrm{e}$$

montrant ainsi que $\mathrm{e} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(C_0([0,\infty))}$. □

Exercice 8. *Expliquer pourquoi l'application*

$$\partial : C_b^1(a,b) \to C_b^0(a,b) : u \mapsto u'$$

est bornée. Donner sa norme.

Exercice 9. *Via*

$$Au(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{d}y \int_0^t u(x,y) \,\mathrm{d}x \quad t \in \mathbb{R}$$

définissez une application linéaire et bornée

$$A : L^1(\mathbb{R}^N) \to C_b(\mathbb{R}) : u \mapsto Au.$$

Donner sa norme.

Exemple de solution de l'exercice 9. On commence par montrer que l'opérateur est bien défini puis l'on étudie sa linéarité et sa bornitude. On conclut par le calcul de la norme. **L'opérateur A est bien défini.** Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le théorème de Fubini assure que l'expression $Au(t)$ est finie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et vaut

$$Au(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Fixons $\epsilon > 0$ en vue de montrer que Au définit une fonction continue. Si $t, s \in \mathbb{R}$, on observe, toujours par le théorème de Fubini que

$$(1)\quad |Au(t) - Au(s)| = \left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{[s,t]} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

la correspondance

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}y$$

définit une fonction positive et intégrable. Par absolue continuité de l'intégrale (Proposition D.30), nous déduisons l'existence d'un $\delta > 0$ tel que si $|[t,s]| = |t-s| \leq \delta$ alors

$$\int_{[s,t]} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \epsilon,$$

ce qui par notre estimation (1) montre la continuité de $Au(t)$. Aussi, pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$(2)\qquad |Au(t)| \leq \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|.$$

Nous avons donc montré que $Au(t)$ définit une fonction continue et bornée. Ainsi, nous pouvons définir

$$A : L^1(\mathbb{R}^N) \to C_b(\mathbb{R}) : u \mapsto Au.$$

Linéarité. L'opérateur ainsi définit est linéaire : en effet, l'intégrale est linéaire.

L'opérateur est borné. En effet, il s'agit du contenu de l'inégalité (2) qui montre que la norme uniforme est contrôlée par la norme $L^1(\mathbb{R}^N)$.

La norme de A. De (2), nous tirons que la norme de A, $\|A\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N), C_b(\mathbb{R}))}$ n'excède pas 1. Pour voir qu'elle vaut en fait 1, on pose $Q = [0,1]^d$ et $u = \chi_Q$. On observe alors que $\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Au(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t \in [0,1] \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

Ainsi $\|Au\|_\infty = 1$. $\square$

Exercice 10. *Sur $L^1(X,\mu)$, considérons l'application*

$$A : L^1(X,\mu) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int_X \max(0,u)\,\mathrm{d}\mu.$$

(a) L'application est-elle linéaire ?
(b) L'application est-elle continue ?

Idée de solution de l'exercice 10. Dans cet exercice on se convint qu'il existe des applications continues qui ne sont pas linéaires. Elle n'est pas linéaire car si $(X,\mu) = ([0,1], \mathscr{L}^1)$ (ici, $\mathscr{L}^1$ = la mesure de Lebesgue) le choix $\lambda = 1$ et $u \equiv 1 \in L^1(X,\mu)$ montre que

$$1 = A(\lambda u) \neq \lambda A(u) = 1 \cdot 0.$$

Pour la continuité, on observe que (attention que si on utilise la continuité séquentielle il faut dire pourquoi c'est équivalent (métrisablité)) pour tout $u, v \in L^1(X,\mu)$,

$$\left| \int_X \max(0,u)\,\mathrm{d}\mu - \int_X \max(0,v)\,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |\max(0,u) - \max(0,v)|\,\mathrm{d}\mu$$

On a pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ (étude de sous-cas)

$$\max(0,a) - \max(0,b) \leq |a-b|$$

et donc

$$\left| \int_X \max(0,u)\,\mathrm{d}\mu - \int_X \max(0,v)\,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |u-v|\,\mathrm{d}\mu = \|u-v\|_{L^1(X,\mu)}$$

montrant ainsi la continuité de A. En fait on a même montré qu'elle est Lipschitz de constante égale à l'unité. □

Exercice 11. *On définit*

$$\Lambda : C[-1,1] \to \mathbb{R}$$

par

$$\Lambda(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $f \in C[-1,1]$. Expliquer que $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(C[-1,1],\mathbb{R})} = 2$ mais qu'il n'existe pas de fonction $f \in C[-1,1]$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\Lambda(f)| = 2$.

Idée de solution de l'exercice 11. L'exercice montre que le supremum dans la définition de norme d'opérateur $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(C[-1,1],\mathbb{R})}$ n'est pas toujours atteint. Si $f \in C[-1,1]$ on a

$$|\Lambda(f)| \leq 2\|f\|_\infty$$

montrant ainsi que $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(C[-1,1],\mathbb{R})} \leq 2$. On observe que la fonction f qui vaut 1 sur $[0,1]$ et -1 sur $[-1,0)$ satisfait

$$2 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or f n'est pas continue on l'approxime donc en la rendant contine (par exemple en interpolant avec un segment) : pour tout $\epsilon \in (0,1)$ on pose

$$f_\epsilon = \begin{cases} -1 & \text{sur } [-1,-\epsilon) \\ \frac{x}{\epsilon} & \text{sur } [-\epsilon,\epsilon] \\ 1 & \text{sur } (\epsilon,1]. \end{cases}$$

Vu que $|f_\epsilon| \leq 1$ par convergence dominée on trouve que

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \Lambda(f_\epsilon) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 2.$$

Donc $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(C[-1,1],\mathbb{R})} = 2$. Supposons que $f \in C[-1,1]$ vérifie $|\Lambda(f)| = 2$ et $\|f\|_\infty = 1$. On suppose que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 2$$

On peut supposer f impaire (parce que $f(-t)$ est aussi admissible). Donc

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Là, si f ne vaut pas 1 partout on peut montrer que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t < 1$ en utilisant la continuité. Donc f doit être impaire et égale à 1 sur l'intervalle $(0,1)$. $\square$