EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 4
CONTINUITÉ II/II

Exercice 1. *Sur un espace mesuré (X, μ), considérons une partition d'ensembles mesurables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$\mu(A_n) > 0, \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{et} \quad A_i \cap A_j = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j \\ A_i = A_j & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{1}$$

À une suite $(f(n)) \in \ell^p(\mathbb{N})$ où $p \in [1, \infty)$, associons la fonction

$$f : x \in X \mapsto f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(n)}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{A_n}(x).$$

Expliquer pourquoi cette association définit un opérateur linéaire borné $A : \ell^p(\mathbb{N}) \to L^p(X, \mu)$ et pourquoi sa norme d'opérateur vaut 1.

Idée de solution de l'exercice 1. Faire un dessin de l'exercice. Attention à ne pas inverser somme et intégrale trop cavalièrement. On observe que pour tout $x \in X$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(n)}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{A_n}(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{f(n)}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{A_n}(x),$$

cela suit de la définition C.9 mais il ne faut pas trop insister dessus. Fixons k. On a que

$$\int_X \left| \sum_{n=0}^{k} \frac{f(n)}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{A_n}(x) \right|^p \mathrm{d}\mu(x) \leq \sum_{n=0}^{k} |f(n)|^p \int_X \left| \mu(A_n)^{-1} \chi_{A_n}(x) \right| \mathrm{d}\mu(x)$$

Donc,

$$\int_X \left| \sum_{n=0}^{k} \frac{f(n)}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{A_n}(x) \right|^p \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|^p_{\ell^p(\mathbb{Z})}$$

Par le lemme de Fatou, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(n)}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{A_n}(x) \in L^p(X, \mu)$ et

$$\int_X \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(n)}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \chi_{A_n}(x) \right|^p \mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|^p_{\ell^p(\mathbb{Z})}.$$

On a donc bien un opérateur $\ell^p(\mathbb{N}) \to L^p(X, \mu)$; la linéarité suit de la linéarité de la somme. De l'inégalité précédente on note que $\|A\|_{\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}), L^p(X,\mu))} \leq 1$.

Date: Automne 2022.

Pour l'autre inégalité, on construit

$$f_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $\|Af_0\|_{L^p(X,\mu)} = 1 = \|f_0\|_{\ell^p(\mathbb{N})}$.

□

Exercice 2. *Fixons la fonction m définie par $m(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer si l'application $u \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto mu$ est linéaire et bornée.*

Ce genre d'opérateur apparait en analyse harmonique comme des *multipliers*.

Idée pour l'exercice 2. Elle n'est pas bornée : la fonction $u : x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{[1,\infty)}(x)\frac{1}{x^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ mais $m(x)u(x)$ n'est pas intégrable puisque le théorème de convergence monotone donnerait :

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{n\to\infty} \log(n) = +\infty.$$

□

Exercice 3. *Sur un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ on considère un sous-espace vectoriel V qu'on pense comme un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|$. L'appication qui à $x \in V$ l'envoie vers $x \in X$ est-elle toujours linéaire bornée. Si oui, donner sa norme en fonction de V. Si non donner un exemple de tels espaces.*

Exercice 4. *Posons*

$$\ell^{1,p}(\mathbb{N}) \doteq \{x = (x_n)_n \in \ell^p(\mathbb{N}) : (1+n)x_n \in \ell^p(\mathbb{N})\}.$$

Expliquer pourquoi

$$x = (x_n)_n \in \ell^{1,p}(\mathbb{N}) \mapsto \big(\frac{n^2}{1+n}x_n\big)_n$$

définit un élément de $\mathcal{L}(\ell^{1,p}(\mathbb{N}), \ell^p(\mathbb{N}))$.

Exercice 5. *Définissons*

$$C(\mathbb{T}) = \{u \in C_b(\mathbb{R}) : u(t) = u(t+n) \text{ pour chaque } n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}\},$$

l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues de période unité et de façon similaire on définit $L^1(\mathbb{T})$.

Fixons $f \in C(\mathbb{T})$ et définissons pour chaque $u \in L^1(\mathbb{T})$, la convolution

$$f \star u(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Expliquer pourquoi cette application définit une application linéaire bornée

(a) $A : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$
(b) $A : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T})})$
(c) $A : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T})}) \to (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$
(d) $A : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T})}) \to (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{T})})$

Exercice 6. *Rappelons que $C_0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C_b(\mathbb{R})$ dont les éléments tendent vers zéro à l'infini. Expliquer pourquoi la fonctionnelle linéaire*

$$A : (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est continue. Donner sa norme dans $\mathcal{L}(C_0(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Exercice 7. *Fixons $K \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Définissons*

$$A : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N) : u \mapsto Au(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Montrez que $A : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ est une application linéaire continue.

Idée de solution de l'exercice 7. Commençons par voir si la définition fait sens. L'intégrale du produit de deux fonctions de carré intégrable est en effet bien intégrable. La linéarité est claire et suit de l'intégrale. La continuité suit de la bornitude de l'opérateur laquelle suit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Par Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}(x,y) \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^2\,\mathrm{d}y$$

montrant ainsi le caractère borné. □

Exercice 8. *On appelle projecteur sur X une application $P : X \to X$ une application linéaire continue d'un espace vectoriel normé vers lui-même telle que $P \circ P = P$.*

(a) Montrez que $u \in L^1[0,1] \mapsto u - \int_{[0,1]} u\,\mathrm{d}x$ définit un projecteur $P : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$.
(b) Montrez que tout projecteur non nul satisfait $\|P\|_{\mathcal{L}(X,X)} \ge 1$.

Exercice 9. *(a) Fixons $u \in L^p[0,+\infty)$. Définissons*

$$Au : x \in [0,1) \mapsto \frac{u\left(\frac{x}{1-x}\right)}{(1-x)^{2/p}}.$$

Montrez que A définit un opérateur linéaire borné $A : L^p[0,+\infty) \to L^p[0,1)$ qui est une isométrie.

(b) Fixons $v \in L^p[0,1)$. Définissons

$$Bv : x \in [0,+\infty) \mapsto \frac{v\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{2/p}}.$$

Montrez que B définit un opérateur linéaire borné $B : L^p[0,1) \to L^p[0,+\infty)$ qui est une isométrie.

(c) Montrez que A et B sont inverses l'un de l'autre.

Par isométrie on entend qu'il est de norme 1.

Idée de solution de l'exercice 9. On commence par montrer que

$$\frac{u\left(\frac{x}{1-x}\right)}{(1-x)^{2/p}} \in L^p(0,1),$$

cela suit du théorème de changement de variable appliqué à $y(x) = x/(1-x)$. On a d'ailleurs que

$$\int_0^1 \left| \frac{u\left(\frac{x}{1-x}\right)}{(1-x)^{2/p}} \right|^p \mathrm{d}x = \int_0^\infty |u(y)|^p \,\mathrm{d}y.$$

La linéarité suit de la linéarité de la composition. Du calcul précédent on trouve que $A \in \mathcal{L}(L^p(0,\infty), L^p(0,1))$ et $\|A\|_{\mathcal{L}(L^p(0,\infty),L^p(0,1))} = 1$. (b) est du même acabit. Pour (c), il faut vérifier $A \circ B$ et $B \circ A$ car en dimension infinie on a plus l'équivalence des endomorphismes de dimension finie qui sont inversibles d'un côté si et seulement s'il le sont de l'autre côté. □

Exercice 10. *X est de mesure finie et $1 < p \leq q < \infty$.*

(a) Expliquer pourquoi $L^\infty(X) \subset L^q(X) \subset L^p(X) \subset L^1(X)$ et que les inclusions sont en général strictes.

(b) Les injections $L^\infty(X) \subset L^q(X) \subset L^p(X) \subset L^1(X)$ sont elles continues? Par injection, nous entendons l'application qui un élément $u \in L^s(X)$ associe $u \in L^r(X)$.

Exercice 11. *Fixons $p \in (1,\infty)$. Les inégalités de Hardy stipulent que pour tout fonction $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mesurable*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |u(t)| \,\mathrm{d}t \right)^p \mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |u(x)|^p \,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty |u(t)| \,\mathrm{d}t \right)^p \mathrm{d}x \leq p^p \int_0^\infty |xu(x)|^p \,\mathrm{d}x.$$

Interpréter ces inégalités comme un résultat de continuité d'un application linéaire $A : L^p(X,\mu) \to L^p(Y,\nu)$.

Exemple I de solution de l'exercice 11. Considérons l'opérateur

$$A : u \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{d}x) \longmapsto \left[x \in (0,+\infty) \mapsto Au(x) = \frac{1}{x} \int_0^x u(t) \,\mathrm{d}t \right]$$

La linéarité suit de cella de l'intégrale. Par l'inégalité, $A : L^p(\mathbb{R}, \mathrm{d}x) \mapsto L^p((0,+\infty), \mathrm{d}x)$. De plus,

$$\int_0^\infty (Au(x))^p \; dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |u(x)|^p \,\mathrm{d}x,$$

montrant ainsi la bornitude. Observons aussi que cela signifie que

$$\|Au\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R},\mathrm{d}x),L^p(\mathbb{R},\mathrm{d}x))} \leq \frac{p}{p-1}.$$

□

Exemple II de solution de l'exercice 11. Considérons l'opérateur

$$B : u \in L^p(\mathbb{R}, \mathrm{d}x) \longmapsto \left[x \in (0, +\infty) \mapsto Au(x) = \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

La linéarité suit de cella de l'intégrale. Par l'inégalité, $A : L^p(\mathbb{R}, \mathrm{d}x) \mapsto L^p((0, +\infty), \mathrm{d}x/x^p)$. De plus,

$$\int_0^\infty |Au(x)|^p \ \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |u(x)|^p \ \mathrm{d}x,$$

montrant ainsi la bornitude. Observons aussi que cela signifie que

$$\|Au\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}, \mathrm{d}x), L^p(\mathbb{R}, \mathrm{d}x/x^p))} \leq \frac{p}{p-1}.$$

□

Exercice 12. *Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on pose*

$$\Lambda[u](x) = \int_{B(x,1)} u$$

Expliquer pourquoi $u \in L^1(\mathbb{R}^d) \mapsto \Lambda[u]$ est un élément de $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^d), C_b(\mathbb{R}^d))$.