EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 5
ESPACES COMPLETS

Exercice 1. *Expliquer pourquoi les fonctions* $[0,1] \to \mathbb{R}$ *uniformément continues munie de la norme uniforme,* $(\mathrm{Unif}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$*, est un espace vectoriel complet.*

Exercice 2. *Fixons* $p \in [1,\infty)$*. L'ensemble* $L^p([0,1]) \setminus \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : u(x) = 0 \text{ p.p.}\}$*, muni de la métrique héritée de* $L^p([0,1])$ *est-il complet ?*

Exercice 3. *Etudions les fonctions* C^1 *sur un intervalle fermé.*

(a) Expliquer pourquoi l'espace $C^1([0,1])$ *muni de la norme* $\|u\|_{C^1[a,b]} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ *est normé.*
(b) Est-il complet ?
(c) Expliquer pourquoi $[u]_{C^1} = |u(0)| + \|u'\|_\infty$ *est une norme sur* $C^1([0,1])$*. Est-elle équivalente à* $\|\cdot\|_{C^1}$ *?*
(d) Expliquer pourquoi l'espace $C^1([0,1])$ *muni de la norme* $[u]_{C^1}$ *est complet.*

Exemple de solution de l'exercice 3. (a) L'espace $C^1[0,1]$ est normé car $\|u\|_{C^1[0,1]}$ est finie pour tout $u \in C^1[0,1]$ et les axiomes (additivité,homogénité, définie positive) qui définissent une norme sont satisfaits car hérités de la norme uniforme.

(b) L'espace $C^1[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{C^1[0,1]}$ est complet. En effet, une suite de Cauchy pour cette norme est une suite de Cauchy pour la norme uniforme et la dérivée de la suite sera également une suite de Cauchy pour la norme uniforme. Pour fixer les idées appelons la suite $(u_n)_n$. Par complétude de $C[0,1]$ nous obtenons la convergence uniforme

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in C[0,1]$$
$$u_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} v \in C[0,1]$$

Pour conclure, nous voudrions montrer que $u \in C^1[0,1]$ et que $u' = v$. Or, pour chaque terme de la suite, l'identité

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,\mathrm{d}t$$

est satisfaite pour tout $x \in [0,1]$. Nous voudrions passer à la limite dans cette identité. Tout d'abord, la convergence uniforme entraînant la convergence ponctuelle, nous obtenons pour tout $x \in [0,1]$, $u_n(x) \to u(x)$. Notons qu'en particulier, $u_n(0) \to u(0)$. Aussi, $|u_n'| \le \sup_n \|u_n'\|_\infty$ qui est fini par convergence uniforme. La majoration fournit un chapeau de Lebesgue qui nous permet d'utiliser le théorème de convergence dominée

Date: Automne 2022.

de Lebesgue et, ainsi, passer à la limite dans l'identité, donnant donc pour tout $x \in [0,1]$,

$$u(x) = u(0) + \int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, le théorème fondamental livre que $u \in C^1[0,1]$ et que $u' = v$, concluant ainsi la preuve de la complétude puisque nous avons montré que toute suite de Cauchy, par le caractère arbitraire de la suite (u_n), converge.

(c) La quantité $[\cdot]_{C^1}$ définit une norme. En effet, les axiomes d'additivité et d'homogénéité qui définissent une norme sont satisfaits car hérités de la norme uniforme et de la valeur absolue respectivement (qui une norme sur $\mathbb{R}$). Le caractère définit positif suit de l'observation qui si $u \in C^1[0,1]$ satisfait $[u]_{C^1} = 0$ alors $u(0) = 0$ et $u' = 0$. La seconde condition nous apprend que la fonction u est constante et la première que la constante est nulle (du fait de la connexité de l'intervalle $[0,1]$).

Les deux normes sont équivalentes. D'une part, $[u]_{C^1} \leq \|u\|_{C^1}$ pour tout $u \in C^1[0,1]$ car $|u(0)| \leq \|u\|_\infty$. D'autre part, pour tout $u \in C^1[0,1]$, par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, pour chaque $x \in [0,1]$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$|u(x)| \leq |u(0)| + x \sup_{t \in [0,1]} |u'(t)| \leq |u(0)| + \|u'\|_\infty = [u]_{C^1},$$

ce qui donne $\|u\|_\infty \leq [u]_{C^1}$ et par conséquent $\|u\|_{C^1} \leq 2[u]_{C^1}$, montrant ainsi la seconde inégalité.

(d) L'espace $C^1([0,1])$ muni de la norme $[u]_{C^1}$ est complet : en effet, une suite de Cauchy pour $[\cdot]_{C^1}$ sera une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{C^1}$ par l'équivalence des normes et par complétude pour cette dernière norme la suite converge pour cette norme. Or, l'équivalence nous permet de dire que si une suite converge pour $\|\cdot\|_{C^1}$ elle converge pour $[\cdot]_{C^1}$. Cela montre toute suite de Cauchy pour $[\cdot]_{C^1}$ converge montrant ainsi la complétude. $\square$

Exercice 4. *Sur un espace métrique complet (M, d_M), on définit l'espace des configurations de $k \in \mathbb{N}_*$ points par*

$$\mathrm{Conf}_k(M) = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in M^k : x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j,\ i,j \in \{1, \ldots, k\}\}$$

Muni de la métrique, définie pour $x, y \in \mathrm{Conf}_k(M)$, par

$$d_{\mathrm{Conf}_k(M)}(x,y) = \sum_{i=1}^k d_M(x_i, y_i)$$

l'espace $\mathrm{Conf}_k(M)$ *est-il complet*

(a) quand $M = \mathbb{R}^d$ *?*
(b) quand $M = \mathbb{S}^{d-1}$ *?*
(c) quand M *consiste en un nombre fini de points ?*

Exercice 5. *L'espace* $L^2]0,1[$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_{L^1]0,1[}$ *est-il complet ?*

Exemple de solution. Non. Prendre une suite de fonctions de $L^2(0,1)$ qui converge vers une fonction $L^1(0,1)$ mais pas $L^2(0,1)$. Par exemple, $1/\sqrt{x}$ est dans $L^1(0,1)$ mais pas $L^2(0,1)$ et puis on définit (dessiner la suite)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } 1/\sqrt{x} \leq n \\ n & \text{si } 1/\sqrt{x} \geq n \end{cases}$$

qui par le théorème de convergence dominée de Lebesgue fait le nécessaire. □

Exercice 6. *Sur l'espace des polynomes* $\mathbb{R}[x]$ *considérons la norme*

$$\|P\|_{\mathbb{R}[x]} = \sup_{k\geq 0} |P^{(k)}(0)| \quad \forall P \in \mathbb{R}[x].$$

Expliquez pourquoi, pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$*, la quantité* $\|P\|_{\mathbb{R}[x]}$ *est finie. Est-ce une norme sur* $\mathbb{R}[x]$*.*

L'espace $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|_{\mathbb{R}[x]})$ *est-il complet ?*

Idée de solution de l'exercice 5. La norme est finie car pour tout polynôme il existe un rang $N > 0$ (très lié au degré) tel que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P(x) = 0.$$

pour tout $k > N$ et donc le sup ne porte que sur un nombre fini d'éléments non nuls.

(Intuitivement l'espace complet parce qu'il est isomorphe aux séquences finies de nombres suivient de zéros (élément typique $(a_1, a_2, \dots, a_k, 0, 0, 0, \dots)$) dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui forment un sous-espace non fermé de ce dernier.)

On considère $\sum_{i=1}^\infty \frac{x^i}{i!}$ qui converge grâce à l'exponentielle et

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!i}$$

On a que

$$\|P_n - P_m\|_{\mathbb{R}[x]} = \frac{1}{\max(m,n)}$$

montrant que la suite est de Cauchy mais si cela convergait cela convergeait vers la série qui n'est pas un polynôme. □

Exercice 7. *Construire une suite de Cauchy qui ne converge pas.*

Hint : prendre un espace non complet

Idées pour l'exercice 7.

- (Trouer un espace) Sur $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\cdot|)$ la suite $1/n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est de Cauchy car elle converge dans $\mathbb{R}$. Toutefois elle ne converge pas (car si elle convergait cet élément serait plus petit que tout $\epsilon > 0$ or les réels interdisent un élément non nul d'avoir cette propriété).
- (Se tromper de norme) Sur $C_b(0,1)$ muni de la norme de $L^1(0,1)$ prendre une suite de fonctions continues qui converge vers une fonction L^1 non continue (comme une fonction saut par exemple) comme cela converge dans L^1 c'est de Cauchy toutefois cela ne converge pas dans l'espace des fonctions continues avec la norme L^1.

□

Exercice 8. *Les fonctions intégrables d'intégrale nulle munie de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ forment-elles un espace vectoriel complet ?*

Exercice 9. *Considérons une application $f : X \to Y$ uniformément continue entre deux espaces métriques X, Y. Expliquer pourquoi si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans Y.*