EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 11
COMPACITÉ

Exercice 1. *Fixons $v > 0$. Sur $L^2(\mathbb{R})$ considérons l'opérateur de translation $\tau_v u(\cdot) = u(\cdot - v)$. Le nombre $\lambda = 1$ est-il une valeur propre (approchée) de τ_v ?*

Idée de solution de l'exercice 1. Valeur propre. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est telle qu'il existe $v \in L^2(\mathbb{R})$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u(x - v) = u(x),$$

alors u est v-périodique. Or les seules fonctions périodiques de carré intégrable sont les fonctions presque partout nulles.

Valeur propre approchée. Fixons $u \in L^2]0,1[$ de norme 1 et étudions

$$\|\tau_v u - u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(x) - u(x - v)|^2 \, \mathrm{d}x$$

On prend $u_n = \chi_{(-n,n)}/2n$ ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(x) - u_n(x - v)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2v}{(2n)^2}.$$

On peut aussi

$$\|\tau_v u - u\|_2^2 = 2 - 2(\tau_v u|u).$$

□

Exercice 2. *L'opérateur de Shift $S(x_n)_n = (0, x_1, x_2, \dots)$ est un opérateur $\ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$. Observez qu'il ne possède pas de valeur propre non-triviale.*

Idée de solution de l'exercice 2. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est telle qu'il existe $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ de sorte que

$$\lambda(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

on déduit par récurennce que $x_n = 0$ pour tout n. □

Exercice 3. *Fixons V et W deux espaces vectoriels complets. Montrez que l'ensemble des opérateurs compacts $V \to W$ est un espace vectoriel fermé pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V,W)}$.*

Idée de solution de l'exercice 3. Le caractère vectoriel suit du fait que la somme vectorielle de deux précompacts est précompacte.

Pour le caractère fermé, donnons nous K un opérateur et une suite K_n d'opérateurs compacts qui convergent vers K pour la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V,W)}$. Fixons $\epsilon > 0$. Par convergence, il existe n tel que

$$\|K - K_n\|_{\mathcal{L}(V,W)} \leq \epsilon/2$$

Date: Automne 2022.

et K_n étant compact il existe un nombre fini de w_i de sorte que

$$K_n(B(0,1)) \subset \bigcup_i B(w_i, \epsilon/2).$$

On conclut que

$$K(B(0,1)) \subset \bigcup_i B(w_i, \epsilon).$$

□

Exercice 4. *Prouver que l'opérateur symétrique*

$$A : L^2]0,1[\to L^2]0,1[: u \mapsto xu$$

ne possède pas de valeur propre. Déduire que A n'est pas compact.

Idée de solution de l'exercice 4. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est telle qu'il existe $u \in L^2]0,1[$ qui vérifie $\lambda u(x) = xu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si u n'est pas presque partout nulle pour toute paire de points x_1,x_2 sur le support de u on a

$$x_1 = \lambda = x_2.$$

Montrant ainsi que u est nulle expeté en au moins un point. Elle est donc presque partout nulle. □

Exercice 5. *Supposons que $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ soit un opérateur compact et auto-adjoint sur un espace de Hilbert. Fixons $n \geq 1$ un entier impair. Expliquez pourquoi il existe un opérateur compact et auto-adjoint tel que*

$$A^n = T.$$

Montrez alors qu'un tel opérateur est unique.

Idée de solution de l'exercice 5 quand $n = 3$. Par la proposition 13.17(iv),

$$T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (e_n|x) e_n$$

On pose

$$A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{1/3} (e_n|x_n) e_n$$

Par proposition 13.17(iii), $\#\{\lambda_n \geq 1\}$ est fini. On voit alors que

$$\begin{aligned}\|A(x)\|^2 &= \Big|\sum_{n\in\mathbb{N},\lambda_n\geq 1} \lambda_n^{1/3}(e_n|x_n)e_n\Big|^2 + \Big|\sum_{n\in\mathbb{N},\lambda_n<1} \lambda_n^{1/3}(e_n|x_n)e_n\Big|^2 \\ &\leq (\#\{\lambda_n \geq 1\} + 1)\|x\|^2\end{aligned}$$

donc A est bien défini comme limite d'opérateur continus uniformément bornés.

Par orthogonalité,

$$A(A(A(x))) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{1/3} (e_n|x_n) e_n$$

□

Exercice 6. *(a) Montrez que l'opérateur d'intégration,*

$$V(u)(t) = \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s,$$

est $L^2[0,1] \to L^2[0,1]$.

(b) Montrez que l'opérateur n'a pas de vecteur propre non nul et déterminer spectre.

(c) Montrez que l'opérateur est compact en étudiant l'équicontinuité de l'image de V.

(d) Calculez son adjoint V^*.

(e) Montrez que $P = V + V^*$ est une projection au sens où $P \circ P = P = P*$. Pouvez-vous déterminer l'image de P ?

(f) Calculez VV^*. Comme composition d'opérateurs compacts V^*V est compact.

(g) Calculez la norme de V. Indication : pour ce faire, observez que

$$\|V\|^2 = \|V^*V\|$$

et utilisez les valeurs propres de V^*V pour déduire la valeur de la quantité $\|V^*V\|$.

(h) Déduisez l'inégalité de Poincaré : pour chaque $f \in C^1[0,1]$

$$\int_{[0,1]} |f(t) - f(0)|^2\,\mathrm{d}t \le \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{[0,1]} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7. *Considérons une base $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Considérons les opérateurs linéaires bornés $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tels que*

$$\|A\|_T = \left(\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2_{\mathcal{H}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est finie. Appelons de tels opérateurs les opérateurs de trace finie.

(a) Montrez que l'adjointe de A, noté A^*, satisfait $\|A^*\|_T = \|A\|_T$ et déduisez que la définition d'opérateur trace ne dépend pas de la base.

(b) Montrez que l'espace des opérateurs trace $\mathcal{H}_T$ est en fait un espace de Hilbert. Décrivez son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_T}$.

(c) Si $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$, décrivez $\mathcal{H}_T$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_T}$.

(d) Tout opérateur $A \in \mathcal{H}_T$ est compact. Indication : les opérateurs de rang fini sont compacts et les opérateurs compacts forment un sous-espace vectoriel fermé des opérateurs linéaires bornés.