LMAT1321 — Analyse fonctionnelle

Questions sur le cours

Jean Van Schaftingen

2022–2023

Version provisoire du 15 décembre 2022.

Le texte en italique indique les parties discutées en deuxième partie de cours.

Cours 1 : Espaces métriques et normés abstraits

Questions

1. Définissez les notions d'espace métrique, espace normé et d'espace euclidien ; établissez les relations entre ces notions.
2. Identifiez les ingrédients et les étapes-clefs dans la caractérisation des normes dérivant d'un produit scalaire.
   Il s'agit de la proposition 1.26 du cours.

Cours 2 : Espaces métriques et normés concrets

Contenu du cours

Questions

3. Présentez les exemples d'espaces métriques et d'espaces normés du cours.
4. Identifiez les étapes et les ingrédients clefs dans la démonstration du fait que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,\mu)}$ est une norme.
   Il s'agit de la proposition 1.54 du cours.

Cours 3 : Convergence et topologie

Questions

5. Définissez et caractérisez les notions d'ouverts, fermés, adhérence et suite convergente en termes de distance et de topologie.

6. Identifiez les étapes et les ingrédients clefs dans la démonstration que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermés.
   Il s'agit des proposition 3.16 et 3.17 et du lemme 3.18 du cours.

Cours 4 : Fonctions continues et opérateurs linéaires bornés

Questions

7. Établissez le lien entre opérateur linéaire borné, continu et uniformément continu entre espaces normés.
8. Dans les caractérisations d'opérateurs linéaires continus de et vers des espaces de dimension finie, identifiez les étapes où on utilise la dimension finie.
   Cette partie correspond à la §4.2.2 du syllabus.

Cours 5 : Opérateurs linéaires bornés concrets

Questions

9. Donnez des exemples d'applications linéaires continues et non continues sur les espaces de polynômes sur un intervalle.
10. Identifiez les étapes et les ingrédients clefs dans l'inégalité de Hölder pour les sommes et intégrales et appliquez-la à la construction d'applications linéaires continues sur les espaces ℓ^p et L^p.
    Il s'agit des propositions 4.22, 4.23, 4.25 et 4.26.

Cours 6 : Complétude : définitions et exemples

Questions

11. Définissez la notion d'espace complet, caractérisez la complétude des espaces normés par des séries.
12. Donnez des exemples et contre-exemples d'espaces complets.
13. Identifiez les étapes clefs dans la démonstration de complétude de $\ell^\infty(\Gamma)$ et de $C(\Gamma) \cap \ell^\infty(\Gamma)$.
    Il s'agit des propositions 5.11 et 5.17.

Cours 7 : Applications contractantes

Questions

14. Énoncez et démontrez de théorème des applications contractantes. Expliquez comment il permet d'estimer la distance d'une itération au point fixe. Identifiez où la complétude joue un rôle crucial dans la démonstration.

15. Montrez comment le théorème des applications contractantes peut être utilisé pour démontrer l'existence d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire.
    Il s'agit de la proposition 6.3.

Cours 8 : Densité et complétion d'espaces

Questions

16. Définissez un ensemble dense, reliez ce concept au problème de prolongement continu de fonctions entre espaces métriques et d'applications linéaires entre espaces normés.
17. Donnez des exemples de sous-espaces vectoriels denses.
18. Définissez la notion d'espace séparable, illustrez-la par des exemples et contre-exemples et donnez une condition de séparabilité d'un sous-espace vectoriel engendré.
19. Présentez le théorème de complétion d'un espace métrique. Expliquez comment on peut considérer l'espace initial comme un sous-ensemble de l'espace complété.
20. Identifiez les étapes clefs dans la propriété de séparabilité d'un sous-espace.
    Il s'agit de la proposition 7.15.

Cours 9 : Ensembles maigres et théorème de Baire

Questions

21. Définissez les notion d'ensemble rares et maigre et illustrez-la à l'aide d'un dessin.
22. Expliquez à partir de la définition les propriétés élémentaires des ensembles rares et maigres.
23. Illustrez par des exemples les notions de sous-espace vectoriel rare et maigre.
24. Montrez que l'ensemble des réels n'est pas dénombrables et que l'espace des polynômes ne peut pas être muni d'une norme qui en fasse un espace complet.
25. Identifiez les étapes-clefs de la démonstration du théorème de Baire.
    Il s'agit du théorème 8.5.

Cours 10 : Convergence d'applications linéaires et principe de la borne uniforme

Questions

26. Présentez les différents résultats qui relient convergence ponctuelle d'opérateurs et caractère borné de la norme.
27. Expliquez les différences entre les deux énoncés et démonstrations du principe de borne uniforme.
    Il s'agit du théorème 9.5.

Cours 11 : Bases de Hilbert

Questions

28. Présentez les notions de famille orthonormée et de base orthonormée, les projections associées, leur caractérisation et leur existence, en distinguant les propriétés qui dépendent de la complétude.
29. Démontrez les caractérisations d'une base orthonormée.
    Il s'agit des propositions 10.5 et 10.12.

Cours 12 : Approximation dans L^p

Questions

30. Présentez les résultats d'approximation par moyenne et par convolution et de continuité des translation.
31. Démontrez les propositions de continuité des translations et d'approximation par convolution en mettant en évidence les outils de théorie de la mesure et d'analyse fonctionnelle utilisés.
    Il s'agit des propositions 11.5 et 11.6.

Cours 13 : Compacité

Questions

32. Définissez les notions d'ensemble (séquentiellement) compact, précompact et totalement borné et présentez les liens entre ces notions.
33. Présentez les critères de compacité dans les espaces normés, dans les espaces munis d'un produit scalaire et dans ℓ^p, c_0 et L^p.
34. Démontrez la caractérisation des ensembles totalement bornés dans les espaces normés et la caractérisation des espaces dans lesquels la boule unité est totalement bornée en illustrant géométriquement la démonstration et en mettant en évidence lestc résultats utilisés.
    Il s'agit des propositions 12.10, 12.13 et 12.14 et du lemme 12.15.

Cours 14 : Théorie spectrale

Questions

35. Définissez les notions de valeur propre, spectre et valeur propre approximative, et présentez les liens entre ces notions.
36. Présentez les résultats sur les valeurs propres (approximatives) des opérateurs compacts et auto-adjoints et expliquez le lien avec le théorème spectral.

37. Démontrez que pour un opérateur compact, toute valeur propre approximative non nulle est une valeur propre.
    Il s'agit de la proposition 13.13.

Cours 15 : Espace dual et représentation du dual

Questions

38. Définissez les notions d'espace dual et de produit de dualité et expliquez comment on peut représenter les espace duaux des espaces de suites, des espaces L^p et des espaces munis d'un produit scalaire.
39. Présentez la démonstration de la représentation du dual des espaces munis d'un produit scalaire en identifiant les étapes principales et en identifiant les étapes où la structure du produit scalaire est utulisée.
    Il s'agit du théorème de représentation de Riesz (théorème 14.17).

Cours 16 : Théorème de Hahn-Banach, espace bidual et réflexivité

Questions

40. Présentez le théorème d'extension des fonctionnelles linéaires (Hahn–Banach) et ses conséquences pour la dimension et la séparabilité d'espaces.
41. Présentez les notions d'espace bidual et d'espace réflexif. Donnez des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'un espace soit réflexif.
42. Présentez la démonstration du théorème de Hahn–Banach dans un espace normé séparable.
    Il s'agit du théorème 14.21.

Cours 17 : Topologies faibles

Questions

43. Présentez les notions de topologie et convergence faible et faible*, et les différents liens entre celles-ci et la topologie et la convergence en norme.
44. Énoncez et démontrez le résultat décrivant la topologie faible à partir de la topologie faible* du bidual.
    Il s'agit de la proposition 15.16.

Cours 18 : Convergence faible dans des espaces concrets et compacité faible

Questions

45. Présentez les critères de convergence faible dans des espaces concrets : espaces munis d'un produit scalaire, espace de suites, espaces L^p.

46. Expliquez les résultats de compacité séquentielle faible* et faible, en mettant en évidence le rôle de la séparabilité des espaces.

    Il s'agit des proposition 16.1 et 16.2.