LMAT 1323

Topologie

Pedro Vaz

Université catholique de Louvain
École de Mathématique

2021–2022

3 décembre 2021 - 17:42

Table des matières

CHAPITRE 1

Espaces métriques

Matières

1.1 Espaces métriques

Qu'est-ce qu'une métrique ?

Définition 1.1. *Soient X un ensemble et $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*

(D_1) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(D_2) $d(x,y) = d(y,x)$ pour tous $x,y \in X$.

(D_3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ pour tous $x,y,z \in X$.

Alors on dit que d est une métrique *sur X et que (X,d) est un* espace métrique*.*

On appelle *points* les élements de X. Pour simplifier on va toujours supposer que X est non vide.

La métrique euclidienne sur $\mathbb{R}$

La fonction $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $d(x,y) = |x - y|$ est une métrique sur $\mathbb{R}$.

Lemme 1.2. *Si $d : X^2 \to \mathbb{R}$ est une métrique, alors $d(x,y) \geq 0$ pour tous $x,y \in X$.*

La métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

La métrique euclidienne sur $\mathbb{R}$ se généralise facilement à $\mathbb{R}^n$:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}.$$

La métrique ℓ_p sur $\mathbb{R}^n$

La métrique ℓ_1 est définie comme

$$d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Cette formule s'étend à toutes les valeurs de $p \in \mathbb{N}$ en posant

$$d_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}.$$

La métrique uniforme (ou sup) sur $\mathbb{R}^n$

Quand $p \to \infty$ nous avons la métrique ℓ_∞ qui est donnée par

$$d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Suites infinies

Ces définitions s'étendent aux *suites infinies* (convergentes) en remplaçant la somme finie par une suite infinie. Il faut juste remplacer la métrique d_∞ par

$$d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_j \{|x_j - y_j|\}.$$

Espaces normés

En général, une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel définit une métrique comme

$$d(u,v) = \|u - v\|.$$

Espaces des fonctions Les mêmes idées s'appliquent aux espaces de fonctions. Supposons $a < b$ et soit $C([a,b])$ l'espace vectoriel des toutes les fonctions réelles qui sont continues sur l'intervalle $[a,b]$. Alors nous pouvons définir des métriques ℓ_p sur $C([a,b])$ par

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |(f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

pour $0 < p < \infty$, et

$$d_\infty(f,g) = \max\big\{|f(x) - g(x)|, a \leq x \leq b\big\}.$$

Il y a d'autres types de métriques.

La métrique discrète Si X est un ensemble nous définissons $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$ par

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Alors d est appelée la *métrique discrète* sur X.

La métrique de comptage Si E est un ensemble fini et $\mathcal{E}$ est la collection de sous-ensembles de E, la fonction $d\colon \mathcal{E}^2 \to \mathbb{R}$

$$d(A,B) = \operatorname{card}\big((A \cup B) \backslash (A \cap B)\big)$$

est une métrique sur $\mathcal{E}$.

Une métrique d'un tirage au sort Soit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de zéros en un. Pour (x), $(y) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définissons

1. $d\big((x),(y)\big) = 2^{-n}$ si $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $x_n \neq y_n$,
2. $d\big((x),(x)\big) = 0$.

Alors d est une métrique sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

La métrique p-adique Supposons que $p \in \mathbb{Z}$ est premier. Soit $d_p\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $d_p(m,n) = 0$ si $n = m$, et sinon $d_p(m,n) = \dfrac{1}{r+1}$ où p^r divise $m - n$ mais p^{r+1} ne le divise pas. Alors d_p est une métrique sur $\mathbb{Z}$.

Le métrique de l'arbre Désignons par $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de suites de nombres naturels. Une métrique utile sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est la métrique de l'arbre :

$$d\big((x),(y)\big) = \frac{1}{\min\{n\colon x_n \neq y_n\}}.$$

La métrique produit

Théorème 1.3. *Soient* (X_1,d_1), ..., (X_n,d_n) *des espaces métriques et posons*

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Pour chaque paire de points $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ *soit* $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction*

$$d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} \{d_i(x_i,y_i)\}.$$

Alors (X,d) *est un espace métrique.*

La métrique uniforme sur $\mathbb{R}^n$ est la métrique produit où chaque $\mathbb{R}$ est muni de la métrique ℓ_1.

Une comparaison entre $\mathbb{R}^2$ avec la métrique uniforme et la métrique euclidienne

Il est intéressant de comparer $(\mathbb{R}^2,d)$ qu'on obtient de cette façon avec $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne d_{euc}. Pour $a \in \mathbb{R}^2$ fixe, quels sont les ensembles

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \colon d(x,a) \le 1\},$$

et

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \colon d_{\text{euc}}(x,a) \le 1\}?$$

Espaces métriques équivalents

Définition 1.4. *Deux espaces métriques* (A,d_A) *et* (B,d_B) *sont* isométriquement équivalents *ou* isométriques *s'il exist des fonctions réciproques* $f\colon A \to B$ *et* $g\colon B \to A$ *telles que pour chaque* $x,y \in A$,

$$d_B(f(x),f(y)) = d_A(x,y),$$

et pour chaque $u,v \in B$,

$$d_A(g(u),g(v)) = d_B(u,v).$$

Théorème 1.5. *Deux espaces métriques* (A,d_A) *et* (B,d_B) *sont* isométriquement équivalents *ssi il existe* $f\colon A \to B$ *tel que*

1. *f est bijective,*
2. *pour chaque $x,y \in A$, $d_B(f(x),f(y)) = d_A(x,y)$.*

1.2 Fonctions continues sur les espaces métriques

Il exist des définitions et résultats qui se transfèrent inchangés de l'analyse en $\mathbb{R}$ aux espaces métriques. Rappelons la définition classique de fonction continue.

Fonction continue

Définition 1.6 (Ancienne définition)**.** *Une fonction* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* continue *si, donnés* $y \in \mathbb{R}$ *et* $\epsilon > 0$*, nous pouvons trouver un* $\delta(y,\epsilon) > 0$ *tel que*

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon \ \ \textit{quand} \ \ |y - x| < \delta(y,\epsilon).$$

Il n'est pas difficile d'étendre cette définition au contexte des espaces métriques.

Définition 1.7 (Nouvelle définition)**.** *Soient* (X,d) *et* (Y,ρ) *espaces métriques. Une fonction* $f\colon X \to Y$ *est* continue *si, donnés* $p \in X$ *et* $\epsilon > 0$*, nous pouvons trouver un* $\delta(p,\epsilon) > 0$ *tel que*

$$\rho(f(p), f(x)) < \epsilon \ \ \textit{quand} \ \ d(p,x) < \delta(p,\epsilon).$$

Il y a plusieurs exemples de fonctions continues entre des espaces métriques. Les plus immédiats sont des fonctions constantes et la fonction identité.

Fonction constante

Si (X,d) et (Y,d') sont des espaces métriques, les fonctions constantes $f\colon X \to Y$ sont continues.

Fonction identité
$i\colon (X,d) \to (X,d)$

Si (X,d) est un espace métrique, la fonction identité $i\colon X \to X$ est continue.

On peut aussi considérer la fonction identité $i\colon (X,d) \to (X,d')$ dans le cas où d et d' sont des métriques différentes.

Fonction identité
$i\colon (X,d) \to (X,d')$

Soit $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la fonction identité et d_∞ et d_{euc} la métrique uniforme et la métrique euclidienne, respectivement. Les fonctions

$$i\colon (\mathbb{R}^n,d_\infty) \to (\mathbb{R}^n,d_{\text{euc}}),$$

et

$$i\colon (\mathbb{R}^n,d_{\text{euc}}) \to (\mathbb{R}^n,d_\infty),$$

sont continues (voir Exemple 1.13 pour un exemple d'espaces métriques où $i\colon (X,d) \to (X,d')$ n'est pas continue.)

La loi de composition

Lemme 1.8 (La loi de composition)**.** *Si* (X,d)*,* (Y,ρ) *et* (Z,σ) *sont des espaces métriques et* $g\colon X \to Y$*,* $f\colon Y \to Z$ *sont des fonctions continues, alors la fonction composée* $f \circ g\colon X \to Z$ *est continue.*

1.3 Ensembles ouverts dans les espaces métriques

Définition 1.9. *Soit (X,d) un espace métrique. Nous disons qu'un sous-ensemble E est* ouvert *dans X si, pour tout $e \in E$, nous pouvons trouver un $\delta > 0$ (qui dépend de e) tel que*

$$x \in E \quad \textit{quand} \quad d(x,e) < \delta.$$

Les intervalles $]a,b[$ dans l'espace métrique euclidien

Les ouverts de $\mathbb{R}$ muni de la métrique euclidienne sont des intervalles ouverts.

La boule ouverte de centre x et rayon r

Soit (X,d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$. On définit la *boule de centre x et rayon r* par

$$B(x,r) = \{y \in X : \ d(x,y) < r\}.$$

Vérifions que $B(x,r)$ est ouvert. En fait, si $y \in B(x,r)$, alors $\delta = r - d(x,y) > 0$ et quand $d(z,y) < \delta$ nous avons

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r,$$

ce qu'implique $z \in B(x,r)$ et donc $B(x,r)$ est ouvert.

$\mathbb{R}^n$ avec la métrique euclidienne

Pour $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne, l'ensemble $\{x\}$ contenant juste un point n'est pas ouvert. Soit e avec $d(e,0) = 1$ (par exemple $e = (1,0,\ldots,0)$). Si $\delta > 0$ nous pouvons choisir $y = x - (\delta/2)e$ et avoir $d(x,y) < \delta$ avec $y \notin \{x\}$. Alors $\{x\}$ n'est pas ouvert.

Ouverts dans la métrique discrète

Si (X,d) est un espace avec la métrique discrète alors

$$\{x\} = B(x,1/2),$$

et tous les sous-ensembles de X sont ouverts. Notons que $d(x,x) = 0 < 1/2$ et $d(x,y) = 1 > 1/2$ pour $x \neq y$. Si $x \in E \subset X$ alors $d(x,y) < 1/2$ implique $y = x \in E$ et donc que E est ouvert.

Théorème 1.10. *Soit (X,d) un espace métrique.*

1. *L'ensemble vide $\varnothing$ et l'espace X sont ouverts.*
2. *Si U_α est ouvert pour tout α appartenant à un ensemble A, alors $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ est ouvert.*
3. *Si U_j est ouvert pour tout $1 \leq j \leq n$, alors $\bigcap_{j=1}^{n} U_j$ est ouvert.*

Notons qu'il n'y a pas de condition sur la taille de A.

L'intersection d'ouverts dans le Théorème 1.10 est finie

Considérons $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle. Une intersection infinie d'ouverts dans $\mathbb{R}$ n'est pas forcément un ouvert. Soit

$$S_1 =]-1,1[, \ \ S_2 =]-1,\tfrac{1}{2}[, \ \ S_3 =]-1,\tfrac{1}{3}[, \ \ \ldots, \ \ S_k =]-1,\tfrac{1}{k}[, \ \ \ldots$$

et soit I son intersection $I = S_1 \cap S_2 \cap \cdots$. Alors I est l'intervalle $]-1,0]$ qui n'est pas ouvert.

$\mathbb{R}^n$ avec la métrique euclidienne

Pour $\mathbb{R}^n$ muni la métrique euclidienne nous avons que $B(x,1/j)$ est ouvert mais $\bigcap_{j=1}^{\infty} B(x,1/j) = \{x\}$ ne l'est pas.

Théorème 1.11. *Soient (X,d) et (Y,ρ) espaces métriques. Une fonction $f\colon X \to Y$ est* continue *ssi $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X quand U est ouvert dans Y.*

$f^{-1}(U)$ est un ensemble

Attention que $f^{-1}(U)$ ne fait pas référence à la fonction réciproque. C'est plutôt l'ensemble de points $x \in X$ tel que $f(x) \in U$ et on l'appelle *l'image réciproque de U (par f)*.

Avec ce théorème on démontre la loi de composition très facilement : si U est ouvert dans Z, alors, pas continuité de f, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans Y, est par continuité de g, $(fg)^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(U))$ est ouvert dans X. Alors fg est continue.

Utiliser le Théorème 1.11 pour démontrer continuité

Exemple 1.12. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = 2x + 3$. Montrons que f est continue en utilisant le Théorème 1.11 : pour $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert arbitraire il faut montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert. Prenons $x \in f^{-1}(U)$, x arbitraire. Alors $2x + 3 = f(x) \in U$ et, comme U est ouvert, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$]2x + 3 - \varepsilon, 2x + 3 + \varepsilon[\in U,$$

ce qui s'écrit comme

$$]2(x - \tfrac{\varepsilon}{2}) + 3, 2(x + \tfrac{\varepsilon}{2}) + 3[\in U.$$

Si $x' \in]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}[$ alors $f(x') \in]2x + 3 - \varepsilon, 2x + 3 + \varepsilon[\subset U$. C'est-à-dire que l'intervalle $]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}[$ est contenu dans $f^{-1}(U)$. Alors $f^{-1}(U)$ est ouvert et f est continue.

Le Théorème 1.11 ne fonctionne pas dans la « direction contraire »

Exemple 1.13. Soit $X = \mathbb{R}$ et d la métrique discrète. Soit $Y = \mathbb{R}$ et ρ la métrique euclidienne.

1. Si nous définissons $f\colon X \to Y$ par $f(x) = x$, alors f est continue mais il exist des ouverts U dans X tels que $f(U)$ n'est pas ouvert.
2. Si nous définissons $g\colon Y \to X$ par $g(y) = y$, alors g n'est pas continue $g(V)$ est ouvert dans X quand V est ouvert dans Y.

En effet, comme tout l'ensemble est ouvert dans X, nous avons $f^{-1}(V) = g(V)$ ouvert pour tout $V \in Y$ et en particulier pour tout l'ensemble ouvert. Alors f est continue. En plus $\{x\}$ est ouvert dans X et $g^{-1}(\{x\}) = f(\{x\}) = \{x\}$ n'est pas ouvert dans Y.

1.4 Ensembles fermés dans les espaces métriques

Définition 1.14. *Soit x_n une suite dans un espace métrique (X,d). Si $x \in X$ et pour $\epsilon > 0$ donné nous pouvons trouver un entier $N \geq 1$ (qui dépend de ϵ) tel que*

$$d(x_n,x) < \epsilon \text{ pout tout } \quad n \geq N,$$

nous disons que $x_n \to x$ quand $n \to \infty$ et que x est la limite de la suite x_n.

Lemme 1.15. *Si une suite x_n dans un espace métrique (X,d) a une limite, alors cette limite est unique.*

Définition 1.16. *Soit (X,d) un espace métrique. Un ensemble F dans X est* fermé *si, quand $x_n \in F$ a une limite x nous avons que $x \in F$.*

Théorème 1.17. *Soit (X,d) un espace métrique. Un ensemble F dans X est* fermé *si et seulement si son complémentaire est ouvert.*

Fermés dans $(\mathbb{R},d_{euc})$

Les fermés dans $(\mathbb{R},d_{disc})$ sont des intervalles fermés.

Fermés dans la métrique discrète

Si (X,d_{disc}) est une espace métrique discret, alors tout le sous-ensemble $F \subseteq X$ est fermé car F est le complémentaire d'un autre sous-ensemble $X \backslash F$ qui est ouvert. Un sous-ensemble d'un espace métrique discret est simultanément ouvert et fermé.

Théorème 1.18. *Soit (X,d) un espace métrique.*

1. *L'ensemble vide $\varnothing$ et l'espace X sont fermés.*
2. *Si F_α est fermé pour tout α appartenant à un ensemble A, alors $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ est fermé.*
3. *Si F_j est fermé pour tout $1 \leq j \leq n$, alors $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ est fermé.*

Théorème 1.19. *Soient (X,d) et (Y,ρ) espaces métriques. Une fonction $f\colon X \to Y$ est continue ssi $f^{-1}(F)$ est fermé dans X quand F est fermé dans Y.*

1.5 Exercices

Espaces métriques

Exercice 1.1. Soit X un ensemble et $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant :

1. $\rho(x,y) \geq 0$ pour tout $x,y \in \mathbb{R}$.
2. $\rho(x,y) = 0$ ssi $x = y$.
3. $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$ pour tout $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Montrer que en définissant

$$d(x,y) = \rho(x,y) + \rho(y,x),$$

alors d est une métrique sur X.

Exercice 1.2 (La métrique discrète)**.** Vérifier que (X,d), où X est un ensemble arbitraire et pour $x,y \in X$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases},$$

est un espace métrique.

Exercice 1.3. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que $\left(X, \frac{d}{1+d}\right)$, (X, d^α) et (X, kd), où $0 < \alpha \leq 1$ et k est un réel positif, sont des espaces métriques.

Exercice 1.4. Vérifier que les paires (X,d) suivantes sont des espaces métriques (voir Section 1.1) :

1. $(\mathbb{R}^n, d_n)$.
2. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.
3. $(C([a,b]), d_p)$.
4. $(C([a,b]), d_\infty)$.

Exercice 1.5. Vérifier que sont des espaces métriques (voir Section 1.1) :

1. La collection $\mathcal{E}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini, avec la métrique de comptage.
2. $\mathbb{Z}$ avec la métrique p-adique.
3. $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ avec la métrique de l'arbre.

Exercice 1.6. Montrer que pour un espace vectoriel normé $(V,\|\cdot\|)$, la formule $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ défini une métrique sur V.

Exercice 1.7. Soit $\{0,1\}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites de zéros en un. Pour (x), $(y) \in \{0,1\}^\mathbb{N}$ définissons :

1. $d\big((x),(y)\big) = 2^{-n}$,
   si $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $x_n \neq y_n$,
2. $d\big((x),(x)\big) = 0$.

Montrer que d est une métrique sur $\{0,1\}^\mathbb{N}$.

Exercice 1.8. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ avec la norme euclidienne $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Montrer que les fonctions $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes définissent des métriques sur $\mathbb{R}^2$:

1. $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2, & \mathbf{u} \neq \mathbf{v}, \\ 0, & \mathbf{u} = \mathbf{v}. \end{cases}$

2. $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{cases} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2, & \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \text{ linéairement dépendants}, \\ \|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{v}\|_2, & \text{sinon}. \end{cases}$

Exercice 1.9. Soit $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère unité. On pose

$$d(x,y) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \;\; x,y \in S^n,$$

où $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ est le produit interne cartésien entre les vecteurs unitaires définis par x et y. Montrer que d est une métrique.

Exercice 1.10. Soient d_∞ la métrique uniforme sur R^n, d_{euc} la métrique euclidienne et d_{ℓ_1} la métrique ℓ_1. Montrer que pour toute paire de points $x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$d_\infty(x,y) \leq d_{\text{euc}}(x,y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x,y),$$

$$d_\infty(x,y) \leq d_{\ell_1}(x,y) \leq n d_\infty(x,y).$$

Fonctions continues sur les espaces métriques

Exercice 1.11. Montrer que l'intervalle semi-ouvert $]0,1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$ (avec la métrique euclidienne).

Exercice 1.12. Considérons $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ avec la métrique euclidienne.

1. Supposons que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues. Montrer que l'application $(f,g)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue.
2. Montrer que l'application $M\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $M(x,y) = xy$, est continue.
3. Utiliser la loi de composition pour montrer que $m\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donné par $m(x,y) = f(x)f(y)$ est continue.

Exercice 1.13. Soit (X,d_1) l'ensemble de fonctions continues $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et d_1 la métrique sur X définie par $d_1(f,g) = \int_b^b |f(t) - g(t)| dt$, pour $f,g \in X$.

Pour tout $f \in X$ posons :

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Montrer que la fonction $I\colon (X,d_1) \to (\mathbb{R},d_{\text{euc}})$ est continue.

Exercice 1.14. Soient (X_i,d_i), (Y_i,d_i'), $i = 1,\ldots,n$, des espaces métriques et $f_i\colon X_i \to Y_i$, $i = 1,\ldots,n$, des fonctions continues. Définissons

$$f\colon \Big(\prod_{i=1}^n X_i, d_\pi\Big) \to \Big(\prod_{i=1}^n Y_i, d_\pi'\Big)$$

par $f(x_1,\ldots,x_n) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)\big)$. Montrer que f est continue.

Exercice 1.15. Supposons qu'il existe une isométrie entre espaces métriques (A,d_A) et B,d_B donnée par les fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$. Alors f et g sont continues.

Ensembles ouverts et ensembles fermés pour les espaces métriques

Exercice 1.16. Considérons $\mathbb{R}^2$. Pour les deux métriques de l'Exercice 1.8.

1. Décrire les boules ouvertes (considérer des petits et des grands rayons).
2. Décrire les ensembles ouverts.

Exercice 1.17. Deux métriques sur X sont *équivalentes* si elles induisent les mêmes sous-ensembles ouverts.

1. Montrer que deux métriques d, d' sur X sont équivalentes ssi les suites convergentes sur (X,d) sont les mêmes que les suites convergentes sur (X,d').
2. Définissons $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ par
$$\rho(x,y) = \min\{1,d(x,y)\}, \qquad x,y \in X.$$
Montrer que ρ est une métrique qui est équivalente à d (toute la métrique est équivalente à une métrique bornée).

Exercice 1.18. *(i)* Si (X,d) est un espace métrique quelconque, alors X et $\varnothing$ sont aussi bien ouverts et fermés.
(ii) Si nous considérons $\mathbb{R}$ avec la métrique usuelle et prenons $b > a$ alors $[a,b]$ est fermé mais pas ouvert, $]a,b[$ est ouvert mais pas fermé et $[a,b[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 1.19. *(i)* Si (X,d) est un espace métrique avec la métrique discrète, alors tous les sous-ensembles de X sont aussi bien ouverts et fermés.
(ii) Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et d' est une métrique dérivée d'une norme, montrer que les singletons $\{x\}$ ne sont pas ouverts.
(iii) Déduire que la métrique discrète sur l'espace vectoriel V ne peut pas être dérivée d'une norme sur V.

Exercice 1.20. Considérons deux espaces métriques (X,d) et (Y,d'). Montrer qu'une fonction $f\colon X \to Y$ est continue ssi, pour $x_n \in X$ et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$, nous avons $f(x_n) \to f(x)$.

Exercice 1.21. Soit X,d un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que la *boule fermée de centre* a *et rayon* r,
$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X\colon d(x,a) \leq r\},$$
est fermée.

CHAPITRE 2

Espaces topologiques

Matières

2.1 Espaces topologiques

Espace topologique

Définition 2.1. *Soit X un ensemble et τ une collection de sous-ensembles de X satisfaisant les proprietés suivantes :*

(O_1) L'ensemble vide $\varnothing$ et l'espace X appartiennent à τ.

(O_2) Si $U_\alpha \in \tau$ pour tout $\alpha \in A$ (A ensemble), alors $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

(O_3) Si $U_j \in \tau$ tout $1 \leq j \leq n$, alors $\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in \tau$.

Nous disons que τ est une topologie *sur X et que (X,τ) est un* espace topologique.

Si (X,τ) est un espace topologique nous appelons *ensembles ouverts* les membres de τ.

Nous pouvons munir l'ensemble à deux eléments $B = \{0,1\}$ de plusieurs structures d'espace topologique.

La topologie indiscrète

Nous pouvons définir les ouverts de B comme l'ensemble vide $\varnothing$ et tout l'ensemble $\{0,1\}$ tout entier. Ceci saisfait l'axiome O_1 dans la définition. L'axiome O_2 est aussi satisfait parce que l'unique union d'ouverts possible est $\varnothing \cup \{0,1\}$ ce qui donne $\{0,1\}$ qui est ouvert. Finalement, l'axiome O_3 est aussi vrai parce que la seule intersection possible est $\varnothing \cap \{0,1\}$ ce qui donne $\varnothing$ qui est ouvert. Cette topologie s'appelle la *topologie indiscrète sur B*).

La topologie discrète

Nous pouvons aussi introduire une topologie sur B en déclarant que les ouverts sont $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$. Les axiomes sont satisfaits, parce que le vide et tout l'espace sont inclus dans la liste d'ouverts, et toute l'intersection ou union sont ouverts parce que tous les sous-ensembles sont ouverts. Cette topologie s'appelle la *topologie discrète* sur B).

La ligne droite digitale

Un exemple intéressant ayant des applications en modélisation d'affichage d'images se trouve en *topologie numérique*. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ définissons

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & n \bmod 2 = 1 \\ \{n-1, n, n+1\} & n \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

Déclarons qu'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ est ouvert s'il est soit vide soit une union de $B(n)$s. L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de cette collection d'ouverts est un espace topologique appellé *la ligne droite digitale* (voir Exercice 2.10).

On a déjà trouvé plusieurs espaces topologiques.

Les espaces métriques sont des espaces topologiques

Théorème 2.2. *Si (X,d) est un espace métrique alors la collection de sous-ensembles ouverts forme une topologie.*

Si (X,d) est un espace métrique nous appelons la topologie *induite* par la métrique la collection des ouverts.

Lemme 2.3. *Soit (X,τ) un espace topologique. Si τ est induite par une métrique d alors, pour chaque paire de points distincts a, b dans X, il existe des ouverts disjoints U_a et U_b tels que $a \in U_a$, $b \in U_b$.*

Une topologie qui n'est pas induite par une métrique

Soit $\mathbb{Z}_+$ l'ensemble des entiers positifs. Pour chaque entier positif n, posons $U_n = \{n,n+1,n+2,\dots\}$. Soit $\tau = \{\varnothing, U_1,U_2,\dots,U_n,\dots,\}$.

Vérifions que $(\mathbb{Z}_+,\tau)$ est un espace topologique. (O_1) Les ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{Z}_+ = U_1$ appartiennent à τ ; (O_2) On a $\varnothing \cup U_j = U_j$ pour tout j, et $U_j \cup U_k = U_{\min\{i,j\}}$, d'où il suit que, pour $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ on a $\cup_{i\in A} U_i = U_{\min\{j\colon j\in A\}} \in \tau$; (O_3) On a $\varnothing \cap U_j = \varnothing$ pour tout j, et $U_j \cap U_k = U_{\max\{i,j\}}$, d'où il suit que, pour $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ finie, on a $\cap_{i\in A} U_i = U_{\max\{j\colon j\in A\}} \in \tau$.
Montrons que τ n'est pas induite par une métrique. Supposons le contraire et prenons $a,b \in \mathbb{Z}_+$ tel que $a < b$. Il est clair que si $a \in U_j$ pour un certain j arbitraire alors il est clair aussi que $b \in U_j$, ce qui contredit le Lemme 2.3.

Fonction continue

Définition 2.4. *Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques. Une fonction $f\colon X \to Y$ est* continue *si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X quand U est ouvert dans Y.*

Exemple 2.5. Soit $\{0,1\}$ avec la topologie discrète et définissons $f\colon \{0,1\} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ ($\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle). Pour vérifier la continuité de f, soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert. Alors l'image réciproque de U est donnée par :

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } -1 \in U \text{ et } 1 \notin U, \\ \{1\} & \text{si } -1 \notin U \text{ et } 1 \in U, \\ \{0,1\} & \text{si } -1 \in U \text{ et } 1 \in U, \\ \varnothing & \text{si } -1 \notin U \text{ et } 1 \notin U. \end{cases}$$

Dans tous les cas, l'image réciproque de U est ouverte, car tout le sous-ensemble de $\{0,1\}$ est ouvert dans la topologie discrète. Alors f est continue.

Exemple 2.6. Soit $B = \{0,1\}$ muni de la topologie discrète et soit $T = \{0,1\}$ muni de la topologie indiscrète. Définissons $g\colon B \to T$ par $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Il est facile à vérifier que g est continue, car les seuls ouverts dans T sont $\varnothing$ et T, et $g^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $g^{-1}(T) = B$ qui sont ouverts.
Néanmoins, si $h\colon T \to B$ est la fonction $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$, alors h n'est pas continue. Puisque $\{0\}$ est ouvert dans B, mais $h^{-1}(0) = \{0\}$ n'est pas ouvert dans T.

Théorème 2.7. *Si (X,τ), (Y,σ) et (Z,μ) sont des espaces topologiques et $g\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z$ sont des fonctions continues, alors la fonction composée $g \circ f\colon X \to Z$ est continue.*

Le fait qu'on appelle ouverts aux membres de τ pris conjointement avec le Théorème 1.17 suggère la définition suivante :

Ensembles fermés

Définition 2.8. *Soit (X,τ) un espace topologique. Un ensemble A dans X est dit* fermé *si son complément est ouvert.*

Fermés dans la topologie indiscrète

Sur l'ensemble $\{0,1\}$ avec la topologie indiscrète, où seulement $\varnothing$ et $\{0,1\}$ sont ouverts, les seuls fermés sont $\{0,1\}$ et $\varnothing$. Les autres sous-ensembles, $\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas fermés, car ses compléments ne sont pas ouverts.

Fermés dans la topologie discrète

Dans $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète, tout le sous-ensemble est ouvert, et donc tout le sous-ensemble est aussi fermé.

Les preuves des Théorèmes 2.9 et 2.10 ci-dessous suivent facilement du cas analogue pour les espaces métriques (voir Théorèmes 1.18 et 1.19).

Théorème 2.9. *Si (X,τ) est un espace topologique, alors les affirmations suivantes sont vraies.*

(F_1) L'ensemble vide $\varnothing$ et l'espace X sont fermés.

(F_2) Si F_α est fermé pour tout α appartenant à un ensemble A, alors $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ est fermé.

(F_3) Si F_j est fermé pour tout $1 \leq j \leq n$, alors $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ est fermé.

Théorème 2.10. *Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques. Une fonction $f\colon X \to Y$ est continue ssi $f^{-1}(F)$ est fermé dans X quand F est fermé dans Y.*

2.2 Intérieur et fermeture

Définition 2.11. *Soit* (X,τ) *un espace topologique et* A *un sous-ensemble de* X*. Nous écrivons*

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup\{U \in \tau : U \subseteq A\} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Cl}(A) = \bigcap\{F \textit{ fermé} : F \supseteq A\},$$

*et nous l'appellons respectivement l'*intérieur de A *et la* fermeture de A.

Lemme 2.12. *Nous avons* $(\mathrm{Cl}(A^c))^c = \mathrm{Int}(A)$ *et* $(\mathrm{Int}(A^c))^c = \mathrm{Cl}(A)$.

Lemme 2.13. *Soit* (X,τ) *un espace topologique et* $A \subseteq X$.

1. $\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : \exists U \in \tau \textit{ avec } x \in U \subseteq A\}$.
2. $\mathrm{Int}(A)$ *est le plus large ouvert contenu dans* A*, c.-à-d.* $\mathrm{Int}(A)$ *est l'unique* $V \in \tau$ *tel que* $V \subseteq A$ *et, si* $W \in \tau$ *et* $V \subseteq W \subseteq A$*, alors* $V = W$.

En prenant des compléments nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.14. *Soit* (X,τ) *un espace topologique et* $A \subseteq X$.

1. $\mathrm{Cl}(A) = \{x \in X : \forall U \in \tau \textit{ avec } x \in U, \textit{ nous avons } A \cap U \neq \varnothing\}$.
2. $\mathrm{Cl}(A)$ *est le plus petit fermé contenant* A*, c.-à-d.* $\mathrm{Cl}(A)$ *est l'unique ensemble fermé* G *tel que* $G \supseteq A$ *et, si* F *est fermé avec* $G \supseteq F \supseteq A$*, alors* $F = G$.

Lemme 2.15. *Soit* (X,d) *un espace métrique et* $A \subseteq X$*. Alors* $\mathrm{Cl}(A)$ *consiste à tous les* x *tels qu'on peut trouver une suite* $x_n \in A$ *avec* $d(x,x_n) \to 0$.

Lemme 2.16. *Soient* A *un sous-ensemble d'un espace topologique et* F *un fermé contenant* A*. Alors* $\mathrm{Cl}(A) \subseteq F$.

Définition 2.17. *Soit* (X,τ) *un espace topologique et* $A \subseteq X$*. La* frontière de A *(ou le* bord de A*) est* $\partial(A) = \mathrm{Cl}\, A \setminus \mathrm{Int}\, A$.

Définition 2.18. *Soit* (X,τ) *un espace topologique et* $F \subseteq X$ *fermé. Nous disons que* $A \subseteq X$ *est un sous-ensemble* dense *de* F *si* $\mathrm{Cl}(A) = F$.

2.3 Exercices

Espaces topologiques

Exercice 2.1. Si (X,d) est un espace métrique avec la métrique discrète, montrer que la topologie induite consiste à tous les sous-ensembles de X (cela s'appelle la *topologie discrète sur* X).

Exercice 2.2. Montrer que si X est un ensemble et $\tau = \{\varnothing, X\}$, alors τ est une topologie (appellée la *topologie indiscrète* sur X).

Exercice 2.3. *(i)* Si F est un ensemble fini et (F,d) est un espace métrique, montrer que la topologie induite est la topologie discrète. *(ii)* Si F est un ensemble fini contenant plus d'un point alors la topologie indiscrète n'est pas celle induite par une métrique.

Exercice 2.4. Soit $\mathcal{P}(Y)$ la collection de sous-ensembles de Y. Si X a trois éléments, combien d'élément a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$? Combien de topologies existent sur X ?

Exercice 2.5. *(i)* Si S est muni de la topologie discrète et T est un espace topologique quelconque, alors toute la fonction $f\colon S \to T$ est continue. *(ii)* Si T est muni de la topologie indiscrète et S est un espace topologique quelconque, alors toute la fonction $f\colon S \to T$ est continue.

Exercice 2.6. Soit τ la collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définie en déclarant que un sous-ensemble est dans τ si il est vide ou si son complément est fini.

1. Montrer que tau est une topologie sur $\mathbb{R}$ (la *topologie du complément fini*).
2. Montrer que si x_n est une suite dans $\mathbb{R}$ avec image infinie, alors x_n converge vers chaque point de $\mathbb{R}$ dans la topologie du complément fini.

Exercice 2.7. Soit $\mathbb{Z}_+$ l'ensemble des entiers positifs. Pour chaque entier positif n, soit $U_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Soit $\tau = \{\varnothing, U_1, U_2, \dots, U_n, \dots,\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}_+, \tau)$ est un espace topologique.

Exercice 2.8. Montrer que l'intersection d'une famille de topologies sur X est une topologie sur X.

Exercice 2.9. Soit X un ensemble et τ la famille de sous-ensembles $U \subseteq X$ telle que $X \backslash U$ est finie, pris ensemble avec $\varnothing$. Montrer que τ est une topologie sur X (appelée la *topologie cofinie sur* X). Montrer que l'intersection d'une famille de topologies sur X est une topologie sur X.

Exercice 2.10. La ligne droite digitale et le plan digital.

1. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ définissons

$$B(n) = \begin{cases} \{n\} & n \bmod 2 = 1, \\ \{n-1, n, n+1\} & n \bmod 2 = 0. \end{cases}$$

   Déclarons qu'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ est ouvert s'il est soit vide soit une union de $B(n)$s. Montrer que $\mathbb{Z}$ muni de cette collection d'ouverts est un espace topologique.

2. Pour chaque $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définissons

$$B(m,n) = \begin{cases} \{(m,n)\} & m \bmod 2 = 1 \text{ et } n \bmod 2 = 1, \\ \{(m+a,n) | a = \pm 1,0\} & m \bmod 2 = 0 \text{ et } n \bmod 2 = 1, \\ \{(m,n+b) | b = \pm 1,0\} & m \bmod 2 = 1 \text{ et } n \bmod 2 = 0, \\ \{(m+a,n+b) | a,b = \pm 1,0\} & m \bmod 2 = 1 \text{ et } n \bmod 2 = 1. \end{cases}$$

Déclarons qu'un sous-ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est ouvert s'il est soit vide soit une union de $B(m,n)$s. Montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni de cette collection d'ouverts est un espace topologique. Quel est le fermé le plus petit contenant (m,n) ?

Exercice 2.11. Montrer que si f et g sont des fonctions continues d'un espace topologique (X,τ) vers $\mathbb{R}$, alors $f+g$ et fg sont aussi continues. En plus, si $g \neq 0$ sur X, alors f/g est aussi continue.

Intérieur et fermeture

Exercice 2.12. Démontrer le Lemme 2.12 :

$$(\mathrm{Cl}(A^c))^c = \mathrm{Int}(A), \quad (\mathrm{Int}(A^c))^c = \mathrm{Cl}(A).$$

Exercice 2.13. Soit (X,τ) un espace topologique et $A,B \subseteq X$. Montrer :

1. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$,
2. Si $U_1, U_2 \in \tau$ et $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, alors $\mathrm{Cl}(U_1) \cap U_2 = \varnothing$.

Exercice 2.14. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique. Montrer que A est fermé ssi $\mathrm{Cl}(A) = A$, et que A est ouvert ssi $\mathrm{Int}(A) = A$.

Exercice 2.15. Soit $S \subseteq X$ un sous-ensemble. Décrire la fermeture de S quand :

1. X est muni de la topologie discrète,
2. X est muni de la topologie indiscrète,
3. X est muni de la topologie cofinie.

Exercice 2.16. Considérons $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle (celle dérivée de la norme euclidienne). Soit $I =]0,1[$ l'intervalle unitaire ouvert. Montrer que si $F \subseteq I$ est fermé alors il existe $G \neq F$ fermé tel que $F \subseteq G \subseteq I$ (il n'existe pas de sous-ensemble de I le plus large contenant F).

Exercice 2.17. *(i)* Soit (X,τ) un espace topologique et (Y,d) un espace métrique. Si $f,g\colon X \to Y$ sont continues, montrer que l'ensemble

$$\{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

est fermé.
(ii) Soit (X,τ) un espace topologique et (Y,d) un espace métrique. Si $f,g\colon X \to Y$ sont continues et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, où A est dense en X, montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$.

Exercice 2.18. Montrer que pour un ensemble A donné d'un espace topologique et un point $x \notin \mathrm{Cl}(A)$ nous avons que $x \notin F$ pour un certain fermé F contenant A.

Exercice 2.19. Démontrer que une fonction $f\colon (X,\tau) \to (Y,\tau')$ est continue ssi pour chaque sous-ensemble $A \subseteq X$, nous avons $f(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Cl}(f(A))$.

Exercice 2.20. Montrer que pour $A \subseteq X$, $\partial(A) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A)$.

Exercice 2.21. Montrer que $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \partial(A)$.

Exercice 2.22. Montrer que pour $A \subseteq X$, $x \in \partial(A)$ ssi pour tout ouvert U contenant x, nous avons $U \cap A \neq \varnothing$ et $U \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$.

CHAPITRE 3

Davantage sur les structures topologiques

Matières

3.1 Homéomorphismes

Définition 3.1. *Nous disons que deux espaces topologiques* (X,τ) *et* (Y,σ) *sont* homéomorphes *s'il existe une bijection* $\theta\colon X \to Y$ *telle que* θ *et* θ^{-1} *sont continues. Dans ce cas nous appellons* θ *un* homéomorphisme.

Homéomorphisme implique équivalence en ce qui concerne la topologie.

Lemme 3.2. *Homéomorphisme est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques.*

$]-1,1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$

L'intervalle ouvert $]-1,1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$. En fait, nous pouvons définir une fonction continue $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

qui est une bijection et a une réciproque continue $g\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$ donnée par

$$g(y) = \frac{2}{\pi}\arctan(x).$$

Métriques topologiquement équivalentes

Il y a des espaces métriques non-isométriques qu'induisent des espaces topologiques homéomorphes (ceux-ci sont des *métriques topologiquement* équivalentes) : les espaces topologiques $(\mathbb{R}^2,\tau_{\text{euc}})$ et $(\mathbb{R}^2,\tau_\infty)$, où τ_{euc} et τ_∞ sont les topologies induites par la métrique euclidienne et la métrique uniforme respectivement, sont homéomorphes.

Il y a plusieurs paires d'espaces qui ne sont pas homéomorphes

Soit $S = \{0,1\}$ muni de la topologie discrète et $T = \{0,1\}$ muni de la topologie indiscrète. Si $g\colon T \to S$ est une bijection, alors $g^{-1}(\{0\})$ sera un sous-ensemble contenant exactement un point. Mais un tel sous-ensemble de T n'est pas ouvert, tandis que $\{0\} \subset S$ est ouvert. Par conséquent g n'est pas continue et on ne peut pas avoir un homéomorphisme entre S et T.

Une *propriété topologique* est une proprieté qui est préservée par des homéomorphismes.

La structure de limite dans un espace métrique est une propriété topologique

La preuve du lemme suivant est laissée comme exercice.

Lemme 3.3. *Supposons que* (X,d) *et* (Y,ρ) *soient des espaces métriques et que* $f\colon X \to Y$ *soit un homéomorphisme. Alors*

$$d(x_n,x) \to 0 \Leftrightarrow \rho(f(x_n),f(x)) \to 0.$$

La notion suivante est fondamentale en analyse sur les espaces métriques.

Définition 3.4. i) *Si* (X,d) *est un espace métrique nous disons qu'une suite en* X *est* Cauchy *si, donné* $\epsilon > 0$ *, nous pouvons trouver un* $N_0(\epsilon) > 0$ *avec*

$$d(x_n,x_m) < \epsilon \quad \textit{quand} \quad n,m \geq N_0(\epsilon).$$

ii) *Nous disons qu'un espace métrique* (X,d) *est* complet *si toute la suite de Cauchy est convergente.*

La complètude n'est pas une propriété topologique

Soit $X = \mathbb{R}$ et d la métrique usuelle sur $\mathbb{R}$. Soit $Y =]0,1[$ (l'intervalle ouvert entre 0 et 1) et ρ la métrique usuelle sur $]0,1[$. Alors (X,d) et (Y,ρ) sont homéomorphes (comme espaces topologiques) mais (X,d) est complet et (Y,ρ) ne l'est pas.

Une caractérisation des homéomorphismes

Parfois il est utile de caractériser les homéomorphismes comme suit.

Théorème 3.5. *Soit $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ une bijection continue. On a une équivalence entre :*

1. *$f(U)$ est ouvert dans Y si U est ouvert dans X,*
2. *$f(F)$ est fermé dans Y si F est fermé dans X,*
3. *f est un homéomorphisme.*

3.2 Sous-espaces topologiques

On souhaite être capables de construire de nouveaux espaces topologiques à partir d'autres. Pour y parvenir on commence par un lemme simple, mais utile.

Lemme 3.6. *Soit X un espace et soit $\mathcal{H}$ une collection de sous-ensembles de X. Alors il existe une topologie unique $\tau_{\mathcal{H}}$ telle que*

1. *$\tau_{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$,*
2. *si τ est une topologie avec $\tau \supseteq \mathcal{H}$, alors $\tau \supseteq \tau_{\mathcal{H}}$.*

Nous disons que $\tau_{\mathcal{H}}$ est la *plus petite topologie contenant $\mathcal{H}$.*

Lemme 3.7. *Supposons que A est non vide, que les espaces (X_α,τ_α) sont des espaces topologiques et que nous avons des applications $f_\alpha\colon X \to X_\alpha$ pour $\alpha \in A$. Alors il existe une plus petite topologie τ sur X pour laquelle les applications f_α sont continues.*

Si $Y \subseteq X$ alors l'application inclusion $j\colon Y \to X$ est définie par $j(y) = y$ pour tout le $y \in Y$.

Sous-espace topologique

Définition 3.8. *Si (X,τ) est un espace topologique et $Y \subseteq X$, alors la* topologie de sous-espace τ_Y sur Y induite par τ *est la plus petite topologie sur Y pour laquelle l'application inclusion est continue.*

On dit alors que Y est un *sous-espace topologique* de X.

Lemme 3.9. *Si (X,τ) est un espace topologique et $Y \subseteq X$, alors la topologie de sous-espace τ_Y sur Y est la collection d'ensembles $Y \cap U$ avec $U \in \tau$.*

3.2.1 Exemples

3.2.1.1 L'ensemble des entiers comme sous-espace topologique de $\mathbb{R}$

L'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et donc nous pouvons le munir de la topologie de sous-espace. On obtient bien que tout le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ est ouvert. En fait, si $n \in \mathbb{Z}$ alors $\{n\} = \mathbb{Z} \cap]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$, l'intersection de $\mathbb{Z}$ avec un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors $\{n\}$ est ouvert dans $\mathbb{Z}$ et, puisque l'union d'ouverts est ouverte, tout le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ est ouvert. Nous concluons que la topologie de sous-espace sur $\mathbb{Z}$ est la topologie discrète. Nous disons alors que $\mathbb{Z}$ est un *espace discret*. Par l'exercice 2.5 nous avons que toute la fonction dont le domaine est $\mathbb{Z}$ est continue.

3.2.1.2 L'ensemble des rationnels comme sous-espace topologique de $\mathbb{R}$

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Quand muni de la topologie de sous-espace $\mathbb{Q}$ devient un espace intéressant. Il nous semble qu'il doit-être discret, car entre deux rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. Mais il n'est pas discret, car un ensemble contenant juste un rationnel n'est pas ouvert. Par exemple, si $s \in \mathbb{Q}$ alors tout le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ contenant s est de la forme $\mathbb{Q} \cap S$, où $S \subset \mathbb{R}$ est un ouvert contenant s. Puisque S est ouvert, il contient un intervalle $]s-\delta,s+\delta[$ autour de s (où $\delta > 0$). Tout l'intervalle de ce type contient d'autres rationnels que s et alors, nous ne pouvons pas exprimer $\{s\}$ comme $\mathbb{Q} \cap S$ pour aucun $S \subset \mathbb{R}$ ouvert.

3.2.1.3 Le cercle

Soit S^1 le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ consistant à tous les points sur le cercle de rayon 1 autour de l'origine,

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

muni de la topologie de sous-espace. Quels sont les ouverts ?

3.2.1.4 La sphère

La 2-sphère S^2 est le sous-ensemble qui est l'analogue à S^1 pour R^3,

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

avec la topologie de sous-espace.

La sphère perforée est homéomorphe au plan

Si on enlève un point du cercle S^1, l'espace qu'on obtient est homéomorphe à $\mathbb{R}$. D'une manière similaire, si on enlève un point de la sphère S^2 on obtient un espace qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Par contre, si on ajoute un point, nommé ∞, on peut étendre l'homéomorphisme $S^1 \backslash \{(0,1)\} \leftrightarrow \mathbb{R}$ à une bijection $S^1 \leftrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Nous pouvons donc introduire une topologie sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de façon à ce que l'application $S^1 \leftrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ soit un homéomorphisme. Par exemple, les ouverts contenant ∞ seraient de la forme $]-\infty,-a[\cup]a,\infty[\cup\{\infty\}$, ou une union d'un tel ensemble avec un ouvert de $\mathbb{R}$. De façon similaire, on peut construire un homéomorphisme entre S^2 et $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (ou $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) avec une topologie convenable. Ce modèle pour S^2 est connu comme la *sphère de Riemann*.

3.2.1.5 La sphère S^n

De façon similaire, nous pouvons considérer le sous-ensemble consistant à tous les points de longueur 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, muni de la topologie de sous-espace. Nous appelons cet espace la *n-sphère S^n*.

3.2.1.6 L'espace $\mathbb{R}^n$ perforé

Un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est l'ensemble de points non-nuls, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Nous pouvons penser à $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ comme un espace topologique en utilisant la topologie de sous-espace. De la même façon, nous pouvons prendre $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ pour un n arbitraire et le munir de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ est lui-même un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, tout l'ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ dans la topologie de sous-espace est une intersection $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \cap S$ de deux ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors, chaque ouvert de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, tout l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui est contenu dans $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

3.2.1.7 L'intervalle $[0,1]$

Soit $[0,1] \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie de sous-espace. Alors tout l'intervalle $]a,b[$ avec $0 \leq a < b \leq 1$ est ouvert, mais un intervalle $[0,b[$ avec $b \leq 1$ est aussi ouvert comme sous-ensemble de $[0,1]$, car $[0,b[$ est l'intersection de $[0,1]$ avec l'intervalle $]-1,b[\subset \mathbb{R}$. De façon similaire, tout l'intervalle $]a,1] = [0,1] \cap]a,2[$ est ouvert. Bien entendu, $[0,1]$ est aussi ouvert.

3.2.1.8 Le groupe général linéaire

L'ensemble de toutes les matrices inversibles 3×3 à coeficients réels forme un ensemble appelé $GL(3,\mathbb{R})$, le *groupe général linéaire*. En utilisant les 9 entrées d'une telle matrice comme coordonnées, nous pouvons penser à $GL(3,\mathbb{R})$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^9$ et utiliser la topologie de sous-espace pour en faire un espace topologique. De façon similaire, l'ensemble $GL(n,\mathbb{R})$ de matrices inversibles $n \times n$ à coeficients réels devient un espace topologique comme sous-espace de $\mathbb{R}^{n^2}$.

3.3 Produits d'espaces topologiques

Si X et Y sont des ensembles, les applications de projection $\pi_X\colon X \times Y \to X$ et $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ sont données par

$$\pi_X(x,y) = x, \qquad \pi_Y(x,y) = y.$$

La topologie produit

Définition 3.10. *Si (X,τ) et (Y,σ) sont des espaces topologiques, alors la* topologie produit *μ sur $X \times Y$ est la plus petite topologie sur $X \times Y$ pour laquelle les applications de projection π_X et π_Y sont continues.*

Lemme 3.11. *Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques et μ la topologie produit sur $X \times Y$. Alors $O \in \mu$ si et seulement si, pour $(x,y) \in O$ donné, nous pouvons trouver $U \in \tau$ et $V \in \sigma$ tels que*

$$(x,y) \in U \times V \subseteq O.$$

Pour reconnaître des espaces comme homéomorphes à des produits d'autres espaces, il sera utile d'avoir une description simple pour les applications vers les espaces produit.

Proposition 3.12. *Soient (X,τ), (Y,σ) et (Z,ρ) des espaces topologiques. Une application continue $f\colon X \to Y \times Z$ correspond à une paire de fonctions continues $f_Y\colon X \to Y$ et $f_Z\colon X \to Z$.*

Un résultat utile

Le lemme suivant est utile pour démontrer des résultats comme ceux dans l'exercice 3.16.

Lemme 3.13. *Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur le même espace X. Nous avons $\tau_1 \subseteq \tau_2$ si et seulement si, pour $x \in U \in \tau_1$ donné, nous pouvons trouver $V \in \tau_2$ tel que $x \in V \subseteq U$.*

Nous avons $\tau_1 = \tau_2$ si et seulement si, $\tau_1 \subseteq \tau_2$ et $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

3.3.1 Exemples

3.3.1.1 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$

L'application $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ définit par

$$\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_m)\big) \mapsto (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$$

est un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{n+m}$.

3.3.1.2 Le cylindre comme un produit

Nous pouvons créer un cylindre en prenant tous les $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad 0 \le z \le 1.$$

Dénotons C le cylindre muni de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Le cylindre C est homéomorphe au produit $S^1 \times [0,1]$. Pour construire des applications entre C et $S^1 \times [0,1]$, nous utilisons le fait que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ par l'application $((x,y),z) \mapsto (x,y,z)$. Des restrictions à $C \subseteq \mathbb{R}^3$ et à $S^1 \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ donne des bijections $C \leftrightarrow S^1 \times [0,1]$, comme demandé.

3.3.1.3 Le tore comme un produit

Le tore peut-être décrit comme l'ensemble de points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} = -3.$$

Dénotons T^2 le tore muni de la topologie de sous-espace. Le tore T^2 est homéomorphe au produit $S^1 \times S^1$. Définisson l'application $f\colon S^1 \times S^1 \to T^2$ par

$$f\big((x,y),(x',y')\big) = \big((x'+2)x,(x'+2)y,y'\big).$$

Il s'agit d'une fonction continue (donnée par des multiplications et additions), et sa réciproque $g\colon T^2 \to S^1 \times S^1$ est

$$g(x,y,z) = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), (\sqrt{x^2+y^2} - 2, z)\right).$$

Il est facile de vérifier que g est aussi continue.

3.3.1.4 Le plan perforé comme un produit

L'espace $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ est homéomorphe au produit $S^1\times\,]0,+\infty[$ car nous pouvons définir des applications $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to S^1\times\,]0,+\infty[$ et $g\colon S^1\times\,]0,+\infty[\to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ par

$$f(x,y) = \left(\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \text{et} \quad g((x,y),t) = (tx,ty).$$

Nous laissons comme exercice de vérifier que f est un homéomorphisme avec réciproque g.

3.3.1.5 La couronne

La couronne

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\}$$

(munie de la topologie de sous-espace) est homéomorphe au produit $S^1 \times [0,1]$ par les applications f et g de l'exemple précédent. Nous laissons les détails comme un exercice.

Exercice 3.1. Montrer que le cylindre C et la couronne A sont homéomorphes.

3.4 Topologie quotient

Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X nous savons qu'elle donne origine à des classes d'équivalence

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Il existe une application naturelle q de X vers l'ensemble $X/\sim$ des classes d'équivalence qui est donnée par $q(x) = [x]$.

Lemme 3.14. *Soient (X,τ) un espace topologique et Y un ensemble. Si $f\colon X \to Y$ est une application et nous écrivons*

$$\sigma = \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \in \tau\},$$

alors σ est une topologie sur Y tel que

1. *$f\colon X \to Y$ est continue,*
2. *Si θ est une topologie sur Y avec $f\colon (X,\tau) \to (Y,\theta)$ continue, alors $\theta \subseteq \sigma$.*

La topologie quotient

Définition 3.15. *Soient (X,τ) un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Écrivons q pour l'application de X vers l'espace quotient $X/\sim$ donnée par $q(x) = [x]$. La* topologie quotient *σ est la topologie la plus large sur $X/\sim$ pour laquelle q est continue, c'est-à-dire,*

$$\sigma = \{U \subseteq X/\sim : q^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Lemme 3.16. *Avec les suppositions et les notations dans la Définition 3.15 la topologie quotient consiste à des ensembles U tels que*

$$\bigcup_{[x]\in U} [x] \in \tau.$$

Le cercle comme un quotient de $[0,1]$

Soit $I = [0,1]$ avec la relation d'équivalence

$$0 \sim 1.$$

Les ouverts de $I/\sim$ sont des unions d'intervalles $]a,b[$ pour $0 \le a < b \le 1$, et $[0,a[\cup]b,1]$ pour $0 < a < b < 1$.

Le quotient $I/\sim$ est en bijection avec le cercle par l'application

$$f\colon [0,1]/\sim \to S^1, \quad t \mapsto \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\big).$$

Nous laissons comme exercice de montrer que f est un homéomorphisme.

3.4.1 Exemples

Pour les exemples suivants nous laissons les détails comme exercice.

Le cercle comme autre quotient de $\mathbb{R}$

Exemple 3.17. Nous pouvons aussi obtenir un espace homéomorphe au cercle S^1 à partir de $\mathbb{R}$ en utilisant la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Le bouquet

Exemple 3.18. Par contre, $\mathbb{R}$ quotienté par la relation

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Z},$$

resulte en un espace homéomorphe à un bouquet.

Le cylindre comme un quotient

Exemple 3.19. Soit $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ avec la relation d'équivalence

$$(0,t) \sim (1,t) \;\; \text{pour} \;\; t \in I.$$

Dans ce cas, $I^2/\!\sim$ est homéomorphe à un cylindre.

Le tore comme un quotient

Exemple 3.20. Soit $S^1 \times I$ avec la relation d'équivalence

$$(z,0) \sim (z,1) \quad \text{pour} \;\; z \in S^1.$$

alors $S^1 \times I/\!\sim$ est homéomorphe au produit $S^1 \times S^1$ et donc homéomorphe au tore T^2.

Le tore comme un autre quotient

Exemple 3.21. Soit I^2 avec la relation d'équivalence

$$(0,t) \sim (1,t), \;\; (t,0) \sim (t,1),$$

alors $I^2/\!\sim$ est aussi homéomorphe au produit $S^1 \times S^1$ et donc homéomorphe au tore T^2.

Le ruban de Möbius et la bouteille de Klein

Exemple 3.22. Le *ruban de Möbius* est définit comme

$$I^2/[(0,t) \sim (1,1-t)]$$

et la *bouteille de Klein* est

$$I^2/[(t,0) \sim (t,1), \quad (0,t) \sim (1,1-t)].$$

3.5 Exercices

Homéomorphismes

Exercice 3.2. Démontrer que tous les intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$ (finis, semi-infinis ou infinis) sont homéomorphes.

Exercice 3.3. Démontrer que tous les intervalles semi-ouverts dans $\mathbb{R}$ (finis ou semi-infinis) sont homéomorphes.

Exercice 3.4. Montrer que la boule ouverte unitaire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$ en $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe au carré ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Exercice 3.5. Montrer que le plan perforé $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ est homéomorphe à l'extérieur de la boule unitaire fermée $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 3.6. Montrer que $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \colon x,y \in \mathbb{Z}\}$ est homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^2 \backslash \big\{(x,y) \colon$ il existe des entiers n, m tels que $(x-n)^2 + (y-m)^2 < 1/10\big\}$.

Exercice 3.7. Montrer que le demi-plan ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\}$ est homéomorphe à la boule unitaire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

Exercice 3.8. Déveloper des analogues des Exercices 3.4 à 3.7 pour $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Exercice 3.9. Démontrer que la métrisabilité est une propriété topologique.

Exercice 3.10. Démontrer que si deux espaces métriques sont isométriques alors ils sont homéomorphes.

Sous-espaces topologiques

Exercice 3.11. *(i)* Si (X,τ) est un espace topologique et $Y \subseteq X$ est ouvert, montrer que la topologie de sous-espace τ_Y sur Y est la collection d'ensembles $U \in \tau$ avec $U \subseteq Y$.
(ii) Considérons $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle τ. Si $Y = [0,1]$, montrer que $[0,1/2[\in \tau_Y$ mais $[0,1/2[\notin \tau$.

Exercice 3.12. Soit (X,d) un espace métrique, $Y \subset X$ un sous-ensemble et d_Y la métrique d restreinte à Y ($d_Y \colon Y^2 \to \mathbb{R}$ est donnée par $d_Y(x,y) = d(x,y)$ pour $x,y \in Y$). Alors si nous définissons sur X la topologie induite par d, la topologie de sous-espace sur Y est la topologie induite par d_Y.

Exercice 3.13. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble de points (x,y) avec $y \neq 0$, muni de la topologie de sous-espace. La division définit une fonction $d \colon T \to \mathbb{R}$. Montrer que d est continue.

Exercice 3.14. Considérons $GL(n,\mathbb{R})$ muni de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que

1. La fonction *déterminant* $\det \colon GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.
2. La foction *inversion* $\mathrm{inv} \colon GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ est continue.
3. La fonction *produit* $\mu \colon GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ est continue (ici on regarde $GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R})$ comme un sous-espace de $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$).

Produits d'espaces topologiques

Exercice 3.15. Supposons que (X,τ) et (Y,σ) soient des espaces topologiques et $X \times Y$ soit muni de la topologie produit μ. Fixons $x \in X$ et considérons $E = \{x\} \times Y$ muni de la topologie de sous-espace μ_E. Montrer que l'application $k\colon (Y,\sigma) \to (E,\mu_E)$, donnée par $k(y) = (x,y)$ est un homéomorphisme.

Exercice 3.16. Soient (X_1,d_1) et (X_2,d_2) des espaces métriques. Soit τ la topologie produit sur $X_1 \times X_2$, où X_i est muni de la topologie induite par d_i $(i = 1,2)$.

Définissons les applications $\rho_k(X_1 \times X_2)^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
\rho_1\big((x,y),(u,v)\big) &= d_1(x,u),\\
\rho_2\big((x,y),(u,v)\big) &= d_1(x,u) + d_2(y,v),\\
\rho_3\big((x,y),(u,v)\big) &= \max\big\{d_1(x,u),d_2(y,v)\big\},\\
\rho_4\big((x,y),(u,v)\big) &= \big(d_1(x,u)^2 + d_2(y,v)^2\big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Vérifier que ρ_1 n'est pas une métrique et que ρ_2, ρ_3 et ρ_4 le sont. Montrer que chacune des métriques ρ_2, ρ_3 et ρ_4 induisent la topologie produit τ sur $X_1 \times X_2$.

Exercice 3.17. Montrer que le cylindre C et la couronne A, introduites dans §3.3 sont homéomorphes.

Exercice 3.18. Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ des sous-ensembles des espaces topologiques (X,τ) et (Y,σ). Montrer que

1. $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$,
2. Si A est fermé dans X et B est fermé dans Y, alors $A \times B$ est fermé dans $X \times Y$,
3. $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}(A) \times \mathrm{Cl}(B)$.

Topologie quotient

Exercice 3.19. Montrer que le quotient $S^1 \times [0,1]/{\sim}$ est homéomorphe à la sphère S^2, où

$$((x,y),t) \sim ((x',y'),t') \;\Leftrightarrow\; t = t' = 1 \;\text{ ou }\; t = t' = 0.$$

Exercice 3.20. Soit D le disque fermé unitaire dans R^2 :

$$D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}.$$

1. Montrer que $\partial(D^2) \cong S^1$.
2. Montrer que le quotient $D^2/{\sim}$ est homéomorphe à la sphère S^2, où

$$(x,y) \sim (x',y') \;\Leftrightarrow\; (x,y),(x',y') \in \partial(D^2).$$

Exercice 3.21. Pour des exemples 3.17 à 3.21 dans §3.4.1, décrire les ouverts dans les quotients et ésquisser les homéomorphismes réclamés.

Exercice 3.22. Montrer que : (i) La ligne droite digitale (cf. Exercice 2.10) peut-être obtenue comme un quotient de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. (ii) Le plan digital (cf. Exercice 2.10) peut-être obtenue comme un quotient de $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle.

CHAPITRE 4

Espaces de Hausdorff

Matières

4.1 Espaces de Hausdorff

Quand nous avons travaillé sur les espaces métriques, on a souvent utilisé le fait que, si $d(x,y) = 0$, alors $x = y$. La métrique est « suffisament puissante pour séparer des points ». La topologie indiscrète, par contre, ne sépare pas les points.

Quand Hausdorff a envisagé l'idée moderne d'un espace topologique, il a inclu une condition supplémentaire pour assurer la « séparation des points ». On a trouvé plus tard que des topologies sans cette condition peuvent être aussi utiles, et donc elle est maintenant considéré séparément.

Définition 4.1. *Un espace topologique (X,τ) est dit* espace de Hausdorff *si, pour $x,y \in X$ avec $x \neq y$ nous pouvons trouver U_x, $U_y \in \tau$ tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \varnothing$.*

Espaces métriques sont Hausdorff

Si (X,d) est un espace métrique alors la topologie induite par cette métrique est Hausdorff.

Définition 4.2. *Si (X,τ) est un espace topologique et $x \in U \in \tau$ nous appelons U un* voisinage ouvert *de x.*

Lemme 4.3. *Si (X,τ) est un espace topologique, alors un sous-ensemble $A \subseteq X$ est ouvert ssi tout le point de A a un voisinage ouvert $U \subseteq A$.*

Proposition 4.4. *Si (X,τ) est un espace de Hausdorff alors les singletons $\{x\}$ sont fermés.*

La réciproque de la Proposition 4.4 est fausse (voir Exercice 4.5).

Un sous-espace d'un espace de Hausdorff est Hausdorff

Proposition 4.5. *Soit (X,τ) un espace topologique. Si (X,τ) est Hausdorff alors $Y \subseteq X$ avec la topologie de sous-espace l'est aussi.*

Un produit d'espaces de Hausdorff est Hausdorff

Proposition 4.6. *Si (X,τ) et (Y,σ) sont des espaces de Hausdorff alors $X \times Y$ avec la topologie produit l'est aussi.*

La plus grande partie des espaces que nous trouvons sont Hausdorff.

Proposition 4.7. *Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques. Si $f\colon X \to Y$ est continue et injective et Y est Hausdorff, alors X l'est aussi.*

Nous voyons que tout le sous-espace d'un espace de Hausdorff l'est aussi. En particulier, tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ sont Hausdorff ! Néanmoins, il existe des espaces topologiques qui ne sont pas Hausdorff. La topologie indiscrète est un exemple simple, mais il y en a d'autres.

Les espaces quotient des espaces de Hausdorff ne sont pas forcément Hausdorff

Considérons $\mathbb{R}$ avec la topologie euclidienne usuelle. Définissons la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{R}/\sim$ est indénombrable mais la topologie quotient sur $\mathbb{R}/\sim$ est la topologie indiscrète (voir exercice 4.6).

4.2 Exercices

Espaces de Hausdorff

Exercice 4.1. Soit T l'ensemble $\{a,b,c\}$. Pour chacune des topologies sur T suivantes déterminer si T est Hausdorff :

1. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$.
2. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$.
3. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{c\}$, $\{a,b,c\}$.

Exercice 4.2. Vérifier si la ligne droite digitale et le plan digital (cf. Exercice 2.10) sont Hausdorff.

Exercice 4.3. Si (X,d) est un espace métrique alors la topologie induite par cette métrique est Hausdorff.

Exercice 4.4. Montrer que $\mathbb{Z}$ est Hausdorff sans utiliser la Proposition 4.7.

Exercice 4.5. Soit X un ensemble infini (on peut prendre $X = \mathbb{Z}$ ou $X = \mathbb{R}$). Nous disons que un sous-ensemble E de X est dans τ si $E = \varnothing$ ou si $X \backslash E$ est fini. Alors τ est une topologie sur X tel que tout le singleton $\{x\}$ est fermé mais (X,τ) n'est pas un espace de Hausdorff. Qu'est-ce qui changera si on permet X fini ?

Exercice 4.6. Les quotients des espaces de Hausdorff ne sont pas nécessairement des espaces de Hausdorff : considérons $\mathbb{R}$ avec la topologie euclidienne usuelle. Définissons la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{R}/\sim$ est indénombrable mais la topologie quotient sur $R/\sim$ est la topologie indiscrète.

Exercice 4.7. Refaire l'Exercice 2.17 *(i)* et *(ii)* avec « (Y,d) un espace métrique » remplacé par « (Y,d) un espace topologique Hausdorff ».

Exercice 4.8. Montrer que l'espace-produit $(X \times Y, \mu)$ est Hausdorff ssi X et Y le sont aussi.

Exercice 4.9. Montrer que si X est un espace de Hausdorff et $f\colon X \to X$ est une application continue, alors l'*ensemble de points fixes de f*

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in X : f(x) = x\}$$

est un sous-ensemble fermé de X.

Exercice 4.10. Soit X muni de la topologie cofinie. Quand X est-il Hausdorff ?

CHAPITRE 5

Compacité

Matières

5.1 Espaces compacts

Définition 5.1. *Un espace topologique (X,τ) est dit* compact *si, pour chaque collection $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'ensembles ouverts avec $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$, nous pouvons trouver une sous-collection finie $U_{\alpha(1)}, U_{\alpha(2)}, \ldots, U_{\alpha(n)}$ avec $\alpha(j) \in A$ et $1 \leq j \leq n$, tel que $\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha(j)} = X$.*

Nous disons que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tel que $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$ est un *recouvrement* de X (par des ouverts).

$\mathbb{R}$ n'est pas compact

La droite réelle $\mathbb{R}$ n'est pas compacte, car le recouvrement de $\mathbb{R}$ par des ouverts

$$\{\ ]n, n+2[\ : n \in \mathbb{Z}\ \},$$

ne contient pas une sous-collection finie recouvrant $\mathbb{R}$.

Espaces finis sont compacts

Tout l'espace X contenant un nombre fini de points est forcément compact, car dans ce cas tout le recouvrement de X est fini.

Définition 5.2. *Si (X,τ) est un espace topologique, alors un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est dit* compact *si la topologie de sous-espace sur Y est compacte.*

Lemme 5.3. *Un sous-ensemble Y d'un espace topologique (X,τ) est dit* compact *si, pour chaque collection $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'ensembles ouverts avec $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \supseteq Y$, nous pouvons trouver une sous-collection finie $U_{\alpha(1)},U_{\alpha(2)},\ldots,U_{\alpha(n)}$ avec $\alpha(j) \in A$ et $1 \leq j \leq n$, tel que $\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha(j)} \supseteq Y$.*

L'idée à retenir est qu'un ensemble est compact si chaque fois qu'il est recouvert par des ouverts, il est recouvert par un nombre fini d'entre eux.

Nous disons qu'un sous-ensemble d'un espace métrique est *borné* s'il est contenu dans une boule ouverte avec un rayon fini.

$[a,b]$ est compact

Proposition 5.4. *Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. L'intervalle fermé et borné $[a,b]$ est compact.*

Le théorème de Heine-Borel

Théorème 5.5 (Le théorème de Heine-Borel)**.** *Un sous-espace T de $\mathbb{R}^n$ (muni de la topologie usuelle) est compact ssi il est fermé (comme sous-ensemble) et borné.*

Pout tout $n \in \mathbb{N}$, la sphère S^n est compacte. Le tore T^2 est aussi compact.

Nous avons aussi quelques résultats très utiles.

Théorème 5.6. *Un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact (plus précisément, si E est compact et F est fermé dans une topologie donnée alors, si $F \subseteq E$ nous avons que F est aussi compact.*

Théorème 5.7. *Si (X,τ) est un espace de Hausdorff, alors tout l'ensemble compact est fermé.*

Pouquoi ce théorème implique immédiatement que les singletons $\{x\}$ dans un espace de Hausdorff sont fermés ?

Si un espace topologique n'est pas Hausdorff le théorème est faux, comme illustré par l'exemple suivant.

Un espace topologique où les ensembles compacts ne sont pas fermés

Exemple 5.8. Si (X,τ) est muni de la topologie indiscrète, alors, $Y \subseteq X$ tel que $Y \neq X,\varnothing$ est compact mais il n'est pas fermé. Par exemple on peut prendre $X = \{a,b\}$ avec $a \neq b$ et $Y = \{a\}$.

Nous savons que l'image d'un ouvert par une fonction continue n'est pas nécessairement ouverte, comme nous l'avons trouvé dans l'Exemple 1.13. Il n'est pas difficile à voir que l'image d'un fermé par une fonction continue n'est pas nécessairement fermée : pour $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle la fonction $\arctan\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et injective et $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2,\pi/2)$ n'est pas fermé.

Par contre, l'image d'un compact par une fonction continue est toujours compacte.

Théorème 5.9. *Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques et $f\colon X \to Y$ une fonction continue. Si K est un sous-ensemble compact de X alors $f(K)$ est un sous-ensemble compact de Y.*

Le théorème 5.9 a plusieurs conséquences.

Compacité est une proprieté topologique

Corollaire 5.10. *Si (X,τ) et (Y,σ) sont homéomorphes, alors (X,τ) est compact ssi (Y,σ) l'est aussi.*

Comme $]0,1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ nous avons le résultat suivant, qui est un peu surprenant.

Corollaire 5.11. *Il n'existe pas d'application continue surjective $[0,1] \to]0,1[$.*

Une autre conséquence est liée aux espaces quotient. Rappelons-nous que la topologie quotient est définie de façon que l'application quotient $q\colon X \to X/\sim$ soit continue. Comme $q(X) = X/\sim$ alors le Théorème 5.9 nous donne une propriété agréable pour la topologie quotient.

Corollaire 5.12. *Soit (X,τ) un espace topologie compact et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. Alors la topologie quotient sur $X/\sim$ est compacte.*

Le prochain résultat est une conséquence immédiate de notre caractérisation des ensembles compacts dans la droite réele muni de la topologie usuelle.

Théorème 5.13. *Soit $\mathbb{R}$ avec la topologie usuelle. Si $K \subseteq \mathbb{R}$ est un sous-ensemble borné et fermé et $f\colon K \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(K)$ est fermé et borné.*

Ce théorème donne une extension d'un résultat bien connu du premier cours d'analyse.

Théorème 5.14. *Soit* $\mathbb{R}$ *avec la topologie usuelle. Si* $K \subseteq \mathbb{R}$ *est un sous-ensemble borné et fermé et* $f\colon K \to \mathbb{R}$ *est continue, alors* f *est bornée et atteint ses bornes.*

Le Théorème 5.14 est complèté par l'Exercice 5.6.

Théorème 5.15. *Si* K *est un espace compact et* $f\colon K \to \mathbb{R}$ *est continue alors* f *est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème 5.16. *Soient* (X,τ) *un espace topologique compact et* (Y,σ) *un espace topologique de Hausdorff. Si* $f\colon X \to Y$ *est une bijection continue, alors* f *est un homéomorphisme.*

Lemme 5.17. *Soient* τ_1 *et* τ_2 *des topologies sur le même ensemble* X*. L'application identité*

$$\mathrm{Id}\colon (X,\tau_1) \to (X,\tau_2),$$

donnée par $\mathrm{Id}(x) = x$*, est continue ssi* $\tau_1 \supseteq \tau_2$*.*

Théorème 5.18. *Soient* τ_1 *et* τ_2 *des topologies sur le même ensemble* X*.*

1. *Si* $\tau_1 \supseteq \tau_2$ *et* τ_1 *est compact, alors* τ_2 *l'est aussi.*
2. *Si* $\tau_1 \supseteq \tau_2$ *et* τ_2 *est Hausdorff, alors* τ_1 *l'est aussi.*
3. *Si* $\tau_1 \supseteq \tau_2$ *et* τ_1 *est compact et* τ_2 *est Hausdorff, alors* $\tau_1 = \tau_2$*.*

5.2 Produits d'espaces compacts

Nous avons un autre résultat important pour les espaces compacts.

Le théorème de Tychonoff

Théorème 5.19 (Le théorème de Tychonoff)**.** *Le produit d'espaces compacts est compact.*

Plus formellement, le théorème signifie que si (X,τ) et (Y,σ) sont des espaces topologiques compacts et μ est la topologie produit, alors $(X \times Y,\mu)$ est compact.

Est la réciproque de théorème de Tychonoff vrai ?

La même preuve (ou la remarque que la topologie de sous-espace d'un produit est la topologie produit des topologies des sous-espaces) donne le résultat suivant.

Théorème 5.20. *Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques compacts et soit μ la topologie produit. Si $K \subseteq X$ et $L \subseteq Y$ sont compacts alors $K \times L$ est compact dans μ.*

Nous le savons que la topologie sur $\mathbb{R}^2$ induite par la métrique euclidienne coincide avec la topologie produit quand on donne à $\mathbb{R}$ la topologie induite par la métrique euclidienne (voir Exercice 3.16).

Les arguments trouvés dans la section précédente peuvent être utilisés pour montrer des résultats comme le suivant.

Théorème 5.21. *Soit $\mathbb{R}^2$ avec la topologie usuelle. Si $K \subseteq \mathbb{R}^2$ est fermé et borné et $f\colon K \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

5.3 Compacité dans les espaces métriques

Nous disons qu'un espace métrique est compact si la topologie induite est compacte.

Espace métrique séquenciellement compact

Définition 5.22. *Un espace métrique* (X,d) *est dit* séquentiellement compact *si toute la suite sur* X *possède au moins une sous-suite convergente.*

Le résultat principal dans cette section est le suivant.

Théorème 5.23. *Un espace métrique est séquenciellement compact ssi il est compact.*

Démonstration. Nous démontrons séparément les parties *si* et *seulement si*.

Proposition 5.24. *Si l'espace métrique* (X,d) *et compact, alors il est séquentiellement compact.*

Maintenant nous démontrons la partie *seulement si*.

Lemme 5.25. *Supposons que* (X,d) *est un espace métrique séquentiellement compact et que la collection* U_α*, avec* $\alpha \in A$*, est un recouvrement de* X *par des ouverts. Alors il existe un* $\delta > 0$ *tel que, pour chaque* $x \in X$ *donné, il existe* $\alpha(x) \in A$ *tel que* $B(x,\delta) \subseteq U_{\alpha(x)}$.

Proposition 5.26. *Si l'espace métrique* (X,d) *est séquentiellement compact, alors il est compact.*

Ceci termine la preuve du Théorème 5.23. □

La Proposition 5.24 a une conséquence importante (les espaces métriques complets ont été introduits dans la Section 3.1).

Corollaire 5.27. *Si l'espace métrique* (X,d) *est compact, alors il est complet.*

On observe que $\mathbb{R}$ avec la métrique usuelle est complet mais il n'est pas compact.

5.4 Exercices

Espaces compactes

Exercice 5.1. Montrer que le sous-espace de $\mathbb{R}$ suivant est compact :

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Exercice 5.2. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ n'est pas compact.

Exercice 5.3.
1. Montrer que toute la topologie sur un ensemble X fini est compacte.
2. Montrer que la topologie discrète sur un ensemble X est compacte ssi X est fini.
3. Montrer que la topologie indiscrète est toujours compacte.

Exercice 5.4. Montrer que la topologie définie dans l'exercice 4.5 est compacte.

Exercice 5.5. Soit X infini non-dénombrable (on peut prendre $X = \mathbb{R}$). Nous disons qu'un sous-ensemble $A \subseteq X$ se trouve dans τ si, soit $A = \varnothing$ ou $X \backslash A$ est dénombrable. Montrer que τ est une topologie mais (X,τ) n'est pas compact.

Exercice 5.6. Considérons $\mathbb{R}$ avec la métrique usuelle.

1. Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue alors f est bornée, montrer que K est fermé et borné.
2. Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint ses bornes, montrer que K est fermé et borné.

Exercice 5.7. En utilisant le théorème 5.9, montrer que $GL(n,\mathbb{R})$ n'est pas compact.

Exercice 5.8. Montrer que si $f : X \to Y$ est continue et X est compact et Y est Hausdorff, alors f envoie des fermées vers des fermés.

Exercice 5.9. Montrer que si Y est compact, alors $\pi_X : X \times Y \to X$ envoie des fermées vers des fermés.

Exercice 5.10. Soit S un sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff X. Montrer que pour chaque $x \in X \backslash S$ il existe des voisinages ouverts disjoints U de x et V de S.

Exercice 5.11. Montrer que si X est un espace de Hausdorff compact, alors X et *normal* c-à-d. pour chaque pair E et F de sous-ensembles disjoints et fermés de X il existe des ouverts disjoints U et V tels que $E \subseteq U$ et $F \subseteq V$.

Exercice 5.12. Soit $I = [0,1]$. Définissons des fermées de I de la façon suivante : un sous-ensemble F de I est fermé si soit il est fini, soit il est égal à I.

1. Montrer que cette définition de sous-ensemble fermé définit une topologie sur I.

2. Montrer que pour cette topologie, I est compact mais il n'est pas Hausdorff.
3. Montrer que chaque sous-ensemble de I est compact et donc il existe des sous-ensembles compacts de I qui ne sont pas fermés.

Exercice 5.13. Montrer qu'un espace topologique X est compact ssi il a la propriété suivante : si $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est une famille arbitraire de sous-ensembles fermés de X tel que toute l'intersection finie des E_α est non vide, alors $\cap_{\alpha\in A}E_\alpha$ est non vide.

Exercice 5.14. Montrer les propiétés suivantes pour un espace topologique X :

1. Si $C_j \subseteq X$ est compact pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, alors $C_1 \cup \cdots \cup U_n \subseteq X$ est aussi compact.
2. Si X est Hausdorff et $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est une collection de sous-ensembles compacts de X, alors $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ est compact dans X.

Produits d'espaces compacts

Exercice 5.15. Considérons $\mathbb{R}^2$ avec la métrique usuelle.

1. Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel que si $f\colon K \to \mathbb{R}$ est continue alors f est bornée, montrer que K est fermé et borné.
2. Si K est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel que si $f\colon K \to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint ses bornes, montrer que K est fermé et borné.

Exercice 5.16. Soit E un espace vectoriel normé et A et B deux sous-ensembles non-vides.

1. Montrer que A, B compacts entraînent $A+B$ compact.
2. Montrer que A compact, B fermé entraînent $A+B$ fermé.

Compacité dans les espaces métriques

Exercice 5.17. Soit $\mathbb{R}^n$ avec la métrique usuelle. Montrer que toute la suite de Cauchy se trouve dans un sous-ensemble borné et fermé de $\mathbb{R}^n$. Utiliser ce fait pour montrer que R^n est complet.

Exercice 5.18. Soient X compact et $C(X)$ l'ensemble de fonctions continues $f\colon X \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\colon x \in X\},$$

définit une métrique sur $C(X)$ tel que $C(X)$ est un espace métrique complet.

Exercice 5.19. Soit (X,d) un espace métrique. Si $A \subset X$ et $\epsilon > 0$ soit

$$U(A,\epsilon) = \cup_{a\in A}B(a,\epsilon).$$

Soit H la collection de tous les sous-ensembles de X qui sont non-vides, fermés et bornés. Si A, $B \in H$ définissons

$$D(A,B) = \inf\{\epsilon \colon A \subseteq U(B,\epsilon) \text{ et } B \subseteq U(A,\epsilon)\}.$$

Montrer que

1. D est une métrique sur H (appelée la *métrique de Hausdorff*),
2. si (X,d) est complet, alors (H,D) l'est aussi,
3. si X est compact dans la métrique d, alors H est compact dans la métrique de Hausdorff.

CHAPITRE 6

Connexité

Matières

6.1 Espaces connexes

Cette section est motivée par un problème qu'on a trouvé en analyse : supposons que U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et qu'on a une fonction dérivable $f\colon U \to \mathbb{R}$ pour laquelle $f'(u) = 0$ pour tout $u \in U$. Nous voudrions conclure que f est constante, mais comme montré par l'exemple $U =]-2,-1[\cup]1{,}2[$ et

$$f(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0, \\ -1 & \text{si } u > 0, \end{cases}$$

le résultat général est faux.

Quelle condition est-il nécessaire d'imposer sur U pour le tourner vrai ? Pour résoudre cette question, nous proposons l'idée suivante.

Espaces connexes

Définition 6.1. *Un espace topologique (Y,σ) est dit* disconnexe *si nous pouvons trouver des ensembles ouverts non-vides U et V tels que $U \cup V = Y$ et $U \cap V = \varnothing$. Un espace qui n'est pas disconnexe est dit* connexe*.*

Définition 6.2. *Si E est un sous-ensemble d'un espace topologique (X,τ), alors E est dit* connexe *(resp. disconnexe) si la topologie de sous-espace sur E est connexe (resp. disconnexe).*

Lemme 6.3. *Si E est un sous-ensemble d'un espace topologique (X,τ), alors E est disconnexe ssi nous pouvons trouver des ensembles ouverts U et V tels que $U \cup V \supseteq E$, $U \cap V \cap E = \varnothing$, $U \cap E \neq \varnothing$ et $V \cap E \neq \varnothing$.*

Voici quelques exemples.

Exemple 6.4. Soit X un espace à deux points muni de la topologie indiscrète. Il est clair que X est connexe.

Exemple 6.5. Soit $Y = [-1{,}0[\cup]0{,}1] \subseteq \mathbb{R}$ muni de la topologie de sous-espace. Chacun des ensembles $[-1{,}0[$ et $]0{,}1]$ est non-vide et ouvert dans Y (mais pas dans $\mathbb{R}$) et Y est disconnexe.

Exemple 6.6. Les rationnels $\mathbb{Q}$ ne sont pas connexes. En fait, les seuls sous-espaces connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons : si Y est un sous-espaces de $\mathbb{Q}$ contenant deux points p et q, nous pouvons choisir un irrationnel a entre p et q, et écrire Y comme l'union des ouverts

$$Y \cap]-\infty, a[\quad \text{et} \quad Y \cap]a, +\infty[\,.$$

Théorème 6.7. *L'image d'un espace connexe par une fonction continue est connexe.*

Maintenant nous allons regarder une autre caractérisation de la connexité qui est utile mais demande du travail préliminaire.

Lemme 6.8. *Soit (X,τ) un espace topologique et A un ensemble. Soit Δ la topologie discrète sur A. Soit aussi $f\colon X \to A$ une fonction. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *Si $x \in X$ alors nous pouvons trouver un $U \in \tau$ avec $x \in U$ tel que f est constante sur U.*
2. *Si $x \in A$, $f^{-1}(x) \in \tau$.*
3. *L'application $f\colon (X,\tau) \to (A,\Delta)$ est continue.*

Si les conditions du Lemme 6.8 sont respectées, nous disons que f est *localement constante*.

Théorème 6.9. *Si A contient au moins deux points, alors un espace topologique (X,τ) est connexe ssi toute fonction localement constante $f\colon X \to A$ est constante.*

Nous avons répondu à la question qui a démarré cette section. Comme $\mathbb{Z}$ et $\{0,1\}$, regardés comme sous-espaces de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, ont la topologie discrète, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 6.10. *i) Un espace topologique (X,τ) est connexe ssi toute fonction continue à valeurs entières $f\colon X \to \mathbb{R}$ est constante. ii) Un espace topologique (X,τ) est connexe ssi toute fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ est constante.*

Théorème 6.11. *Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Alors les intervalles fermés $[a,b]$ sont connexes.*

Lemme 6.12. *Soit E un sous-ensemble de l'espace topologique (X,τ). Si E est connexe alors $\mathrm{Cl}(E)$ l'est aussi.*

Le lemme suivant donne un aperçu d'un développement naturel.

Composantes connexes

Lemme 6.13. *Considérons un espace topologique (X,τ).*

1. *Soit $x_0 \in X$. Si $x_0 \in E_\alpha$ et E_α est connexe pour toute $\alpha \in A$, alors $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ est connexe.*
2. *Écrivons $x \sim y$ s'il existe un ensemble connexe E tel que $x,y \in E$. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence.*
3. *Les classes d'équivalence $[x]$ sont connexes.*
4. *Si F est connexe et $F \supseteq [x]$, alors $F = [x]$.*

Les ensembles $[x]$ sont connus comme les *composantes connexes* de (X,τ). Appliquant le Lemme 6.12 en posant $E = [x]$ nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 6.14. *Les composantes connexes d'un espace topologique (X,τ) sont fermées. S'il y a seulement un nombre fini de composantes alors elles sont ouvertes.*

6.2 Espaces connexes par arcs

La notion de connexité est reliée à une autre, plus ancienne.

Définition 6.15. *Soit (X,τ) un espace topologique. Nous disons que $x,y \in X$ sont* reliés par un chemin *si il existe une fonction continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Dans la définition, l'intervalle $[0,1]$ est muni de la topologie usuelle. Bien sûr, γ est appelée *chemin de x à y*.

Lemme 6.16. *Si (X,τ) est un espace topologique et si nous écrivons $\sim$ si x est relié à y par un chemin, alors $\sim$ est une relation d'équivalence.*

Définition 6.17. *Nous disons qu'un espace topologique (X,τ) est* connexe par arcs *si deux points quelconques de X peuvent toujours être reliés par un chemin.*

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs

Exemple 6.18. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. En fait, pour $x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$\gamma(t) = x(1-t) + ty,$$

est un chemin de x à y.

Théorème 6.19. *Si un espace topologique est connexe par arcs alors il est connexe.*

Comme conséquence du théorème, nous avons que $\mathbb{R}^n$ est connexe. En combinant avec l'exercice 6.5 nous avons que l'intervalle ouvert $]a,b[$ l'est aussi.

Théorème 6.20. *Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle. Alors tout l'ensemble ouvert Ω qui est connexe est aussi connexe par arcs.*

La condition Ω ouvert est indispensable. La réciproque du Théorème 6.19 est fausse (cf. Exemple 6.21).

Connexité n'implique pas connexité par arcs

Exemple 6.21. Nous travaillons sur $\mathbb{R}^2$ munit de la topologie usuelle. Soit

$$E_1 = \big\{(0,y)\colon |y| \leq 1\big\} \quad \text{et} \quad E_2 = \big\{(x,\sin(1/x))\colon 0 < x \leq 1\big\},$$

et prenons $E = E_1 \cup E_2$.

1. E_1, E_2 sont connexes par arcs.
   En fait, si $y_1,y_2 \in [-1,1]$, la fonction $f\colon [0,1] \to E_1$ donnée par
   $$f(t) = \big(0, (1-t)y_1 + ty_2\big)$$
   est continue et $f(0) = (0,y_1)$ et $f(1) = (0,y_2)$, ce qui'implique que E_1 est connexe par arcs.
   Si $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in E_2$, alors $y_j = \sin(1/x_j)$ ($j = 1,2$) et en définissant
   $$g(t) = \left((1-t)x_1 + tx_2, \sin\left(\frac{1}{(1-t)x_1 + tx_2}\right)\right)$$
   nous voyons que g est continue et $g(0) = (x_1,y_1)$ et $g(1) = (x_2,y_2)$ et alors E_2 est connexe par arcs.

2. E est connexe et fermé. On montre d'abord que E est fermé. Supposons que $(x_r,y_r) \in E$ et que $(x_r,y_r) \to (x,y)$. Si $x = 0$ on note que, comme $|y_r| \leq 1$ pour tout r et $y_r \to y$, on a $|y| \leq 1$ et $(x,y) \in E_1 \subseteq E$. Si $x \neq 0$, alors $1 \geq x > 0$ (parce que $x_r > 0$ pour tout r). On peux trouver un N tel que, pour $n \geq N$, on a $|x - x_r| < x/2$ et donc $x_r > x/2$. Alors, par continuité[1],

$$(x_r,y_r) = (x_r, \sin(1/x_r)) \to (x, \sin(1/x)) \in E_2 \subseteq E,$$

et ainsi E est fermé.

Supposons maintenant que E est disconnexe. Alors on peut trouver ouverts U et V tels que

$$U \cap E \neq \varnothing, \quad V \cap E \neq \varnothing, \quad V \cup U \supseteq E, \quad \text{et} \quad U \cap V \cap E = \varnothing.$$

Alors,

$$U \cup V \supseteq E_j \ \text{ et } \ U \cap V \cap E_j = \varnothing,$$

et donc, parce que E_j est connexe par arcs et alors connexe, on a $U \cap E_j = \varnothing$ ou $V \cap E_j = \varnothing$ ($j = 1,2$). On peut supposer, sans perte de généralité, que $V \cap E_1 = \varnothing$ et donc $U \supseteq E_1$.

Comme $(0,0) \in E_1$, on a $(0,0) \in U$. Comme U est ouvert, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $(x,y) \in U$ si $\|(x,y)\|_2 < \delta$. Si n est grand,

$$\big((n\pi)^{-1},0)\big) \in U \cap E_2 = U \cap V \cap E,$$

ce qui contredit la supposition initiale. Par *reductio ad absurdum*, E est connexe.

3. Supposons qu'il existe une fonction continue $h\colon [0,1] \to E$ tel que

$$h(0) = (1, \sin(1)), \quad h(1) = (0,0).$$

Écrivons $h(t) = \big(x(t),y(t)\big)$. Comme h est continue, la fonction x l'est aussi. Comme $x(0) = 1$ et $x(1) = 0$, le théorème de la valeur intermédiaire nous indique qu'il existe $0 < t_1 < 1$ tel que $x(t_1) = \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{-1}$. Par récurrence on obtient $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$ tels que $h(t_j) = \left((j+\frac{1}{2})\pi\right)^{-1}$. Commes les t_j forment une suite décroissante bornée inférieurement par 0, nous avons $t_j \to T$ avec $T \in [0,1]$. Comme y est continue,

$$(-1)^j = \sin\big(1/x(t_j)\big) = y(t_j) \to y(T),$$

ce qui est impossible.

4. Par 3 nous savons qu'il n'existe pas un chemin dans E joignant $(0,0)$ et $(1,0)$ et donc, E n'est pas connexe par arcs.

1. Nous laissons comme exercice de montrer que si $f\colon (X,d) \to (X,d')$ est continue, alors pour chaque suite x_n, convergente vers x, on a convergence de la suite $f(x_n)$ vers $f(x)$.

6.3 Exercices

Espaces connexes

Exercice 6.1. Montrer qu'un espace topologique X est connexe ssi les seuls sous-ensembles qui sont simultanément ouverts et fermés sont $\varnothing$ et X.

Exercice 6.2. Montrer que $\mathbb{R}$ est connexe.

Exercice 6.3. Montrer les résultats suivants.

1. Si (X,τ) et (Y,σ) sont des espaces topologiques, E un sous-ensemble connexe de X, et $g\colon E \to Y$ est une fonction continue, alors $g(E)$ est connexe.
2. Si (X,τ) est un espace topologique connexe et $\sim$ est une relation d'équivalence sur X, alors $X/\sim$ avec la topologie quotient est connexe.
3. Si (X,τ) et (Y,σ) sont des espaces topologiques connexes, alors $X \times Y$ muni de la topologie produit est connexe.
4. Si (X,τ) est un espace topologique connexe et E un sous-ensemble de X, alors cela n'implique pas que E avec la topologie de sous-espace est connexe.

Exercice 6.4. Montrer que l'implication dans l'Exercice 6.3-3 est une équivalence : le produit $(X \times Y, \mu)$ est connexe ssi (X,τ) et (Y,σ) le sont aussi.

Exercice 6.5. Soient X et Y deux espaces topologiques homéomorphes. Montrer que si X est connexe, alors Y l'est aussi.

Exercice 6.6. Montrer le théorème du point fixe pour $]0,1[$: si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ est continue, alors f a un point fixe, c.-à-d., il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. Suggestion : considérer la fonction $g\colon [0,1] \to \{-1,1\}$ définie par

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}.$$

Exercice 6.7. Soit X un espace connexe et Y un espace disconnexe. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $X \to Y$.

Exercice 6.8. Montrer que $GL(n,\mathbb{R})$ est disconnexe.

Exercice 6.9. Montrer que $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ est connexe et l'utiliser pour montrer que S^n, $n > 0$), l'est aussi.

Exercice 6.10. Soient τ et τ' deux topologies sur X. Si $\tau' \subseteq \tau$ qu'est-ce que la connectivité de X dans une des topologies implique pour la connectivité de X dans l'autre ?

Exercice 6.11. Montrer que si X est un ensemble infini, alors il est connexe dans la topologie cofinie.

Exercice 6.12. Soit $A \subset X$. Montrer que si C est un sous-espaces connexe de X qu'intersecte A et $X\backslash A$, alors C intersecte ∂A.

Exercice 6.13. (Suite de l'exercice 1.7) Soit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de zéros en un. Pour (x), $(y) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définissons :

1. $d\big((x),(y)\big) = 2^{-n}$,
   si $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $x_n \neq y_n$,
2. $d\big((x),(x)\big) = 0$.

Montrer que

1. (X,d) est compact (et donc complet).
2. (X,d) n'a pas de points isolés (c.-à-d. aucun singleton est ouvert).
3. Les composantes connexes de (X,d) sont les singletons.
4. $X \times X$ muni de la topologie produit est homéomorphe à X.

Espaces connexes par arcs

Exercice 6.14. Montre que la ligne droite digitale et le plan digital (cf. Exercice 2.10) sont connexes par arcs.

Exercice 6.15. Montrer que les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) qui sont bornés et connexes sont des intervalles (par intervalles on veux dire ensembles de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, etc... avec $a \leq b$. Notez que $[a,a] = \{a\}$ et $]a,a[= \varnothing$). Décrire, sans preuve, tous les sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$.

Exercice 6.16. Montrer que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes si $n > 1$.

Exercice 6.17.
1. Est-ce que le produit d'espaces connexes par arcs est nécessairement un espace connexe par arcs ?
2. Si $A \subseteq X$ et si A est connexe par arcs, est-ce que $\mathrm{Cl}(A)$ est nécessairement connexe par arcs ?
3. Si $f\colon X \to Y$ est continue et X est connexe par arcs, est-ce que $f(X)$ est nécessairement connexe para arcs ?

Exercice 6.18. Montrer que si A est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 \backslash A$ est connexe par arcs.

Exercice 6.19. Montrer que si U est un sous-ensemble ouvert $\mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 \backslash U$ est connexe par arcs.

CHAPITRE 7

Voisinages et base d'une topologie

Matières

7.1 Voisinages et base d'une topologie

Définition 7.1. *Soit (X,τ) un espace topologique. Si $x \in X$, nous disons que N est un* voisinage *de x si nous pouvons trouver $U \in \tau$ tel que $x \in U \subseteq N$.*

Lemme 7.2. *Soit (X,τ) un espace topologique. Alors $U \in \tau$ ssi, pour $x \in U$, nous pouvons trouver un voisinage N de x tel que $N \subseteq U$.*

Lemme 7.3. *Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques. Alors $f\colon X \to Y$ est continue ssi, pour $x \in X$ et M un voisinage de $f(x)$ dans Y, nous pouvons trouver un voisinage N de x tel que $f(N) \subseteq M$.*

Base

Définition 7.4. *Soit X un ensemble. Une collection $\mathcal{B}$ de sous-ensembles est appelée une* base *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.
2. *Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$ nous pouvons trouver $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Lemme 7.5. *Soit X un ensemble et $\mathcal{B}$ une collection de sous-ensembles de X. Soit $\tau_{\mathcal{B}}$ la collection d'ensembles U tels que, pour chaque $x \in U$ il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$. Alors $\tau_{\mathcal{B}}$ est une topologie ssi $\mathcal{B}$ est une base.*

Définition 7.6. *Si $\mathcal{B}$ est une base et $\tau_{\mathcal{B}}$ est comme dans le lemma précedent nous disons que $\mathcal{B}$ est une* base *pour $\tau_{\mathcal{B}}$.*

Comme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ nous l'appelons parfois « base de voisinages ouverts ».

Lemme 7.7. *Si (X,d) est un espace métrique, alors $x_n \to x$, ssi pour N un voisinage de x, nous pouvons trouver n_0 (qui dépend de N) tel que $x_n \in N$ pour tout $n \geq n_0$.*

Les choses ne sont pas aussi simples pour des espaces topologiques en général.

Les limites de suites dans les espaces topologiques en général ne se comportent pas bien !

Supposons qu'on prenne le Lemme 7.7 comme définition de limite pour un espace topologique arbitraire (il faut juste remplacer « métrique » par « topologique » dans le lemme). Dans les espaces topologiques en général la limite n'est pas nécessairement unique :

Exemple 7.8. Soit $X = \{a,b\}$ avec $a \neq b$. Si X est muni de la topologie indiscrète, alors si nous posons $x_n = a$ pour tout n, nous obtenons $x_n \to a$ et $x_n \to b$.

7.2 Suites dans un espace de Hausdorff

Le résultat suivant montre une propriété convenable des espaces de Hausdorff.

Théorème 7.9. *Si X est un espace de Hausdorff, alors toute la suite convergente de points de X converge vers un point de X qui est unique.*

7.3 Exercices

Exercice 7.1. Montrer que $\mathcal{B} = \{[a,b[\, : a < b\}$ est une base pour une topologie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une base pour une topologie sur X, alors la topologie engendrée par $\mathcal{A}$ est égale à l'intersection de toutes les topologies sur X contenant $\mathcal{A}$.

Exercice 7.3. Montrer que la collection $\{]-\infty,q[\subset \mathbb{R} : q \in \mathbb{Q}\}$ est une base pour une topologie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.4. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que N est un voisinage de $x \in X$ ssi nous pouvons trouver un $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \subseteq N$.

Exercice 7.5. Considérons $\mathbb{R}^2$ avec la norme euclidienne. Montrer que les disques ouverts

$$B(q,1/n) = \{x \colon \|x-q\| < 1/n\},$$

avec $q \in \mathbb{Q}^2$ et $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$, forment une base dénombrable $\mathcal{B}$ pour la topologie euclidienne. Est-il vrai que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ se trouve dans $\mathcal{B}$?

Exercice 7.6. Soient (X,τ) et (Y,σ) des espaces topologiques. Montrer que

$$\mathcal{B} = \big\{U \times V \colon U \in \tau, V \in \sigma\big\},$$

est une base et vérifier, en utilisant le Lemme 3.11, qu'elle engendre la topologie produit.

Exercice 7.7. Montrer que la collection de progressions arithmétiques

$$A_{a,b} = \{\ldots, a-2b, a-b, a, a+b, a+2b, \ldots\},$$

pour $a,b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$ est une base pour une topologie sur $\mathbb{Z}$ (cette topologie s'appelle la *topologie de progression arithmétique sur* $\mathbb{Z}$).

Bibliographie

[1] M. Crossley, *Essential topology*, Springer 2005.

[2] T. Gamelin and R. Green, *Introduction to topology*, Dover 1999.

[3] B. Mendelsohn, *Introduction to topology*, Dover 1990.

[4] J. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall 2000.