TEMA 3. Conexión y compacidad.

1. Conexión

1.3. Conexión por arcos o arco-conexión. La primera idea que históricamente se tuvo del concepto de "conexión" es la que hoy se denomina *conexión por arcos.* Dado un punto en un espacio topológico, nos preguntamos si podemos llegar a cualquier otro punto del espacio topológico mediante una curva continua. O dicho de otra forma si este punto puede viajar de forma continua a cualquier otro punto del espacio.

Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, diremos que el espacio topológico es conexo por arcos. Posteriormente, se comprobó que este concepto no era adecuado para diferenciar ciertos espacios topológicos de otros. En el lenguaje actual de la topología se diría que hay espacios topológicos que no son conexos por arcos pero sí conexos.

DEFINICIÓN 0.1: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se denomina *arco* en $(X, \mathcal{T})$ a una aplicación continua $\alpha : ([0,1], \mathcal{T}_{u|[0,1]}) \to (X, \mathcal{T})$. A los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ se llaman *extremos del arco* y se dice que α une $\alpha(0)$ con $\alpha(1)$.

DEFINICIÓN 0.2: Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es *conexo por arcos* o *arco-conexo* si $\forall\, x, y \in X$ existe un arco de X que une x con y.

EJEMPLOS 0.3:
1. $(X, \mathcal{T}_{dis})$ es conexo por arcos si y sólo si X tiene un único punto ya que $\alpha : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (X, \mathcal{T}_{dis})$ es continua si y sólo si es constante.
2. $(X, \mathcal{T}_{triv})$ es conexo por arcos ya que $\alpha : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (X, \mathcal{T}_{triv})$ es siempre continua.

PROPOSICIÓN 0.4: *Un espacio topológico X es conexo por arcos si y sólo si existe un punto $x_0 \in X$ tal que todo punto $y \in X$ puede unirse a x_0 mediante un arco en X.*

Demostración: Sólo hay que probar la implicación de derecha a izquierda. Sean $x, y \in X$ y $\alpha, \beta : I \to X$ arcos uniendo x con x_0 e y con x_0, respectivamente. Entonces

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2-2t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

es un arco uniendo x e y y así X es conexo por arcos. □

EJEMPLOS 0.5: 1. Los subconjuntos estrellados de $\mathbb{R}^n$ son arco-conexos. Efectivamente, si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto estrellado con centro en x_0 entonces para cualquier punto $x \in X$ sabemos que el segmento que une x con x_0 está contenido en X. Por tanto podemos definir el arco

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & [0,1] & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & tx_0 + (1-t)x \ , \end{array}$$

que es un arco que une x e x_0. Por la Proposición anterior, X es conexo por arcos.

En particular, todos los convexos de $\mathbb{R}^n$ con la topología inducida son conexos por arcos. De aquí $\mathbb{R}^n$, las bolas (abiertas y cerradas) y los intervalos son conexos por arcos.

2. $\mathbb{S}^n$ es conexo por arcos ya que todo punto $x \in \mathbb{S}^n$ puede unirse al polo norte mediante un trozo de meridiano.

Estudiemos ahora algunas propiedades más de la conexión por arcos.

PROPIEDAD 0.6: i) *La propiedad de conexión por arcos se conserva por aplicaciones continuas y por tanto es una propiedad topológica.*

ii) *La unión de subespacios conexos por arcos cuya intersección es no vacía es conexo por arcos.*

Demostración: Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Supongamos que X es conexo por arcos y tomemos $y_0, y_1 \in f(X)$. Si x_0, x_1 son puntos en X verificando que $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$ entonces, por ser X conexo por arcos, podemos considerar $\alpha : I \to X$ arco uniendo x_0 y x_1. Para concluir la propiedad i) basta advertir que $f \circ \alpha : I \to f(X)$ es un arco uniendo y_0 con y_1.

Para probar ii) consideramos X e Y conexos por arcos y $x_0 \in X \cap Y \neq \varnothing$. Si $x \in X$ existe un arco uniendo x con x_0 por ser X conexo por arcos. Análogamente si $y \in Y$ existe un arco uniendo y con x_0 por ser Y conexo por arcos. La afirmación ii) se sigue entonces de forma directa de la Proposición 0.4. □

EJEMPLOS 0.7: 1. Una recta de $\mathbb{R}^n$, una parábola o una rama de hipérbola en $\mathbb{R}^2$ son subconjuntos conexos por arcos por ser homeomorfos a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

2. Otra forma de ver que $\mathbb{S}^n$ para $n \geqslant 1$ es conexa por arcos es escribir $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n \backslash \{N\} \cup \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$. Observemos que tanto $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ como $\mathbb{S}^n \backslash \{S\}$ son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ que es conexo por arcos. Por tanto tenemos $\mathbb{S}^n$ expresada como unión de subconjuntos conexos por arcos con intersección no vacía.

3. Una corona circular $X = A((0,0), r_1, r_2)$ es un conjunto conexo por arcos ya que dados $x, y \in X$ podemos considerar $B_{xy} = \{p \in X \mid \|p\| = \|x\|\} \cup \left[y, \|x\| \frac{y}{\|y\|}\right]$ que es un subconjunto conexo por arcos de X. Notemos que entonces $X = \cup_{y \in X} B_{x_0 y}$ para $x_0 \in X$ fijo, es decir, X es unión de conexos por arcos con intersección no vacía y así X es conexo por arcos.
4. Un razonamiento análogo al anterior prueba que $\mathbb{R}^n \backslash \{p\}$ es conexo por arcos, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Observemos que todos los ejemplos que hemos visto de espacios topológicos conexos por arcos son también conexos. Esto no es casual, en general se tiene.

PROPOSICIÓN 0.8: *Todo espacio topológico conexo por arcos es conexo.*

Demostración: Sea X un espacio topológico conexo por arcos. Por la Proposición 0.4 sabemos que existe $x_0 \in X$ tal que todo punto $y \in X$ puede unirse a x_0 mediante un arco α_y en X. Observemos que $X = \bigcup_{y \in X} \alpha_y(I)$. Los conjuntos $\alpha_y(I)$ son subconjuntos conexos de X por ser I conexo y α_y continua. Además $x_0 \in \bigcap_{y \in X} \alpha_y(I)$ y por tanto $\bigcap_{y \in X} \alpha_y(I) \neq \emptyset$. De aquí X es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía. □

EJEMPLOS 0.9: 1. $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{u|\mathbb{Q}})$ no es conexo por arcos porque no es conexo.
2. Los únicos subconjuntos conexos por arcos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ son los intervalos y los puntos.

Sin embargo, el recíproco del resultado anterior no es cierto como muestra el siguiente conocido ejemplo.

EJEMPLO 0.10: Recordemos que habíamos probado que el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$

$$Y = X \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\} .$$

era conexo donde $X = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in]0, 1]\right\}$.

Sin embargo, Y no es conexo por arcos. Supongamos que existiese un arco $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = (0,0)$ y $\alpha(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Podemos considerar entonces para $i = 1, 2$ las funciones continuas $p_i \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ donde p_i son las proyecciones canónicas. Aplicando el Teorema de los valores intermedios a estas funciones deducimos que $[0, \frac{1}{\pi}] \subseteq (p_1 \circ \alpha)(I)$. En particular tenemos que $p_1 \circ \alpha$ toma todos los valores de la forma $\{\frac{2}{\pi + 2k\pi}, k > 0\}$, es decir $\exists t_k \in [0, 1]$ tal que $(p_1 \circ \alpha)(t_k) = \frac{2}{\pi + 2k\pi}$. Pero para estos puntos $(p_2 \circ \alpha)(t_k) = (-1)^k$. Veamos que entonces $p_2 \circ \alpha$ no puede

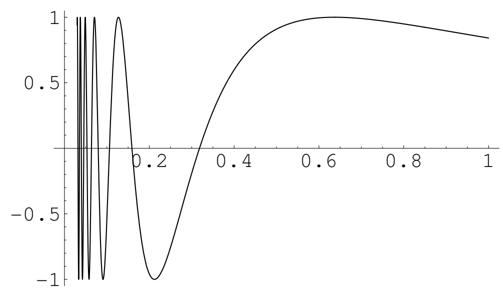

Figura 1. El conjunto X.

ser continua en 0. Para ello basta con observar que $(p_2\circ\alpha)(0) = 0$ pero $V =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ es un entorno de 0 en $[-1, 1]$ para el que no existe ningún entorno U de 0 en $[0, 1]$ cumpliendo $(p_2 \circ \alpha)(U) \subset V$.

Este espacio topológico también nos proporciona un ejemplo de que la clausura de un conexo por arcos no es en general conexo por arcos.

Otro concepto muy útil es el siguiente.

DEFINICIÓN 0.11: Sea $x \in X$. Se define *la componente conexa por arcos* o *arco-componente de* x como la unión de los subconjuntos conexos por arcos de X que contienen a x. Denotaremos $C_a(x)$ a la componente conexa por arcos de x.

De la definición se obtienen de forma sencilla las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 0.12: i) *$C_a(x)$ es el mayor conexo por arcos de X que contiene a x.*

ii) *Las componentes conexas por arcos de X determinan una partición de X, esto es, $X = \bigcup_{x\in X} C_a(x)$ y si $x, y \in X$ entonces $C_a(x) = C_a(y)$ o $C_a(x) \cap C_a(y) = \emptyset$.*

iii) *X es conexo por arcos si y sólo si tiene una única componente conexa por arcos, es decir $C_a(x) = X$, para todo $x \in X$.*

iv) *$C_a(x) \subset C(x)$, para todo $x \in X$.*

Demostración: $\boxed{\text{i)}}$ Es claro que $C_a(x)$ es conexo por arcos por ser unión de conexos por arcos que contienen al punto $\{x\}$. Además es el mayor pues cualquier otro conexo por arcos que contenga a x está incluido en él.

Las demostraciones de las afirmaciones ii) e iii) son análogas a las demostraciones para las componentes conexas. Además como $C_a(x)$ es un conexo que contiene a x tenemos $C_a(x) \subset C(x)$. $\square$

EJEMPLOS 0.13: 1. Estudiemos por ejemplo las componentes conexas por arcos de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}^1$. Veamos que $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}^1$ tiene dos componentes conexas por arcos $C_1 = B((0,0),1)$ y $C_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{B}((0,0),1)$. En primer lugar es claro que $B((0,0),1)$ es conexo por arcos por ser convexo. Comprobemos ahora que C_2 es conexo por arcos. Observemos que si $x, y \in C_2$ podemos considerar $B_{xy} = \{p \in X \mid \|p\| = \|x\|\} \cup \left[y, \|x\| \frac{y}{\|y\|}\right]$ que es un subconjunto conexo por arcos de X. Notemos que entonces $C_2 = \cup_{y \in C_2} B_{x_0 y}$ para $x_0 \in C_2$ fijo, es decir C_2 es unión de conexos por arcos con intersección no vacía y por tanto C_2 es conexo por arcos.

Además no existe un arco en $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}^1$ que una un punto de C_1 con un punto de C_2. Ya que si existiese $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}^1$ un arco con $\alpha(0) \in C_1$ y $\alpha(1) \in C_2$ tendríamos $\|\alpha(0)\| < 1$ y $\|\alpha(1)\| > 1$. El teorema del valor medio nos aseguraría entonces la existencia de $t_0 \in [0,1]$ tal que $\|\alpha(t_0)\| = 1$, es decir $\alpha(t_0) \in \mathbb{S}^1$, en contra de nuestra asunción. Por tanto C_1 y C_2 son las componentes conexas por arcos de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{S}^1$.

2. Recordemos de nuevo el ejemplo 0.10. Habíamos considerado

$$Y = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\} \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \mid x \in]0,1]\right\} .$$

y habíamos visto que Y es conexo pero no conexo por arcos. Queremos encontrar ahora las componentes conexas de Y. Observemos que $C_1 = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$ y $C_2 = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \mid x \in]0,1]\right\}$ son subconjuntos conexos por arcos. El primero de ellos por ser homeomorfo a un intervalo de $\mathbb{R}$ y el segundo por ser la imagen mediante una aplicación continua del intervalo $]0,1]$.

OBSERVACIÓN 0.14: La partición de X que nos proporcionan las componentes conexas por arcos es más fina que la que nos proporcionan las componentes conexas. Notemos además que las componentes conexas por arcos no son cerradas en general como pone de manifiesto la componente C_2 del ejemplo 2 que acabamos de estudiar.

DEFINICIÓN 0.15: Al conjunto de las componentes conexas por arcos de X lo denotaremos $\pi_0(X)$.

Teniendo en cuenta el apartado ii) de la propiedad 0.6 podemos afirmar:

PROPIEDAD 0.16: *Un homeomorfismo entre espacios topológicos induce una biyección entre sus respectivos conjuntos de componentes conexas por arcos, por tanto el cardinal de* $\pi_0(X)$ *es un invariante topológico.*

Estamos interesados ahora en caracterizar los espacios conexos que son conexos por arcos.

LEMA 0.17: *Las componentes conexas por arcos de un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *son abiertas si y sólo si cada punto tiene un entorno conexo por arcos.*

Demostración: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $x \in X$. Entonces como $C_a(x)$ es abierto, es un entorno conexo por arcos de x.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea C una componente conexa por arcos y $x \in C$. De las propiedades de las componentes arco conexas tenemos $C = C_a(x)$. De nuestra asunción sabemos además que existe V un entorno de x conexo por arcos. Como C es el mayor conexo por arcos que contiene a x tenemos que $x \in V \subset C$ y por tanto C es abierto. $\square$

PROPOSICIÓN 0.18: *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Entonces* $(X, \mathcal{T})$ *es conexo por arcos si y sólo* $(X, \mathcal{T})$ *es conexo y cada punto de* X *tiene un entorno conexo por arcos.*

Demostración: $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo por arcos, entonces X es un entorno conexo por arcos para cada punto. Además de la Proposición 0.8 tenemos que $(X, \mathcal{T})$ es conexo.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Por el lema 0.17 sabemos que las componentes conexas por arcos son abiertas. Además como las componentes conexas por arcos originan una partición de X tenemos además que son cerradas (por que su complementario es abierto). Pero como X es conexo se tiene que todas las componentes conexas por arcos deben de coincidir con X, es decir X es conexo por arcos. $\square$

COROLARIO 0.19: *Si cada punto de un espacio topológico tiene un entorno conexo por arcos, entonces las componentes conexas por arcos coinciden con las componentes conexas.*

Demostración: En general tenemos que para cada $x \in X$, $C_a(x) \subset C(x)$. Si $y \in C(x)$ sabemos que existe un entorno V de y conexo por arcos. Pero entonces $V \subset C_a(y) \subset C(y) = C(x)$ por las propiedades de las componentes conexas por arcos. Es decir, que todo punto de $C(x)$ tiene un entorno en $C(x)$ conexo por arcos. Como además $C(x)$ es conexo tenemos de la proposición anterior que $C(x)$ es conexo por arcos y por tanto $C_a(x) = C(x)$.

OBSERVACIÓN 0.20: Notemos que el recíproco del corolario anterior no es cierto ya que las componentes conexas y las componentes conexas por arcos del espacio topológico $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{u|\mathbb{Q}})$ coinciden y sin embargo este espacio no es conexo. $\square$

COROLARIO 0.21: *Todo subconjunto abierto y conexo de* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $n \geqslant 1$ *es conexo por arcos.*

Demostración: Sea U un subconjunto abierto y conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, entonces para cada $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Como las bolas son conexos por arcos tenemos que todo punto de U tiene un entorno conexo por arcos. El resultado se sigue entonces de la proposición anterior. $\square$

OBSERVACIÓN 0.22: El resultado anterior no es cierto para cerrados como muestra el ejemplo 0.10.

PROBLEMA 0.23: Dados $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, prueba que $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ es conexo por arcos si y sólo si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son conexos por arcos.

EJEMPLOS 0.24: Como consecuencia del resultado anterior tenemos que el cilindro y el toro son espacios topológicos conexos por arcos.