DEVOIR 03 D'ANALYSE FONCTIONNELLE
IDÉE DE SOLUTION

Devoir à rendre pour le jeudi 17 novembre à 9h00.

Exercice 1. *Considérons une suite de fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui converge ponctuellement vers une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Nous allons que étudier la taille de l'ensemble des points de $[0,1]$ où la fonction f n'est pas continue au regard de la théorie des ensembles rares et maigres.*

(i) *Rappeler que si la suite de fonctions continues converge de plus uniformément alors la fonction limite f est continue et expliquer pourquoi.*

(ii) *Expliquer qu'en général, quand on sait seulement que la suite (f_n) de fonctions continues ne converge que ponctuellement, la limite f peut être discontinue.*

(iii) *En fait, l'ensemble des points de $[0,1]$ où la fonction f n'est pas continue est un ensemble maigre. Expliquer pourquoi en vous basant sur ce qui suit. Votre rédaction articulera les différentes étapes de la démonstration.*

Fixons $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{N}$ ainsi que les ensembles

$$A(k,p,q) \doteq \{x \in [0,1] : |f_p(x) - f_q(x)| \leq 1/k\},$$
$$B(k,p) \doteq \bigcap_{q' \geq p} A(k,p,q'),$$
$$A \doteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p))$$

Ici, $\operatorname{int}(B(k,p))$ désigne l'inérieur de l'ensemble $B(k,p)$, le plus grand ouvert contenu dans $B(k,p)$. En tout point de A, la fonction f y est continue.

Le complémentaire de A dans $[0,1]$ est maigre. Pour cela, on peut observer que $[0,1] = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} B(k,p)$.

Date: Automne 2022.

Idée de solution du (iii). On veut montrer que

$$D \doteq \{x \in [0,1] : f \text{ n'est pas continue en } x\}$$

est maigre. Nous allons montrer qu'il est contenu dans une union dénombrable de maigres. On commence par montrer qu'il est inclu dans un ensemble plus grand qu'on écrira ensuite comme une union.

Affirmation 1. *Avec A comme dans l'énoncé $D \subset [0,1] \setminus A$.*

Preuve de l'affirmation 1. Il suffit de montrer que f est continue en tout point de $a \in A$. On procède en utilisant la définition en $\epsilon - \delta$. Pour tout $x \in [0,1]$ et $a \in A$; l'inégalité triangulaire livre

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(a)| + |f_p(a) - f_p(a)| \tag{1}$$

Pour le terme central on va utiliser la continuité de f_p en a ; pour les termes aux extrémités on va utiliser que $a \in A$.

Termes aux extrémités. Fixons un $\epsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}_*$ de sorte que $1/k \leq \epsilon$. Si $a \in A$, il existe par l'intersection et l'union qui définissent A, un $p = p(k) \in \mathbb{N}_*$ tel que $a \in \operatorname{int}(B(k,p))$. Observons que $\operatorname{int}(B(k,p))$ est un voisinage ouvert de a. Notons qu'éventuellement il est vide mais en supposant que $A \neq \emptyset$ on suppose en fait qu'on peut trouver un tel $\operatorname{int}(B(k,p))$ qui n'est pas vide. Si $x \in \operatorname{int}(B(k,p)) \subset B(k,p)$, on a que

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k} \leq \epsilon \tag{2}$$

pour tout $q \geq p$. Par convergence ponctuelle de la suite, en faisant $q \to \infty$ dans l'inégalité précédente, pour tout $x \in \operatorname{int}(B(k,p))$

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \leq \epsilon \tag{3}$$

Terme central. De la continuité de f_p ou point a, il existe $\delta > 0$ tel que la boule $\mathbb{B}(a;\delta) \subset \operatorname{int}(B(k,p))$ et

$$|f_p(a) - f_p(a)| \leq \epsilon \tag{4}$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ et $a \in A$, il existe un $\delta > 0$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{B}(a;\delta)$, par (1),(3) et (4),

$$\begin{aligned} (5) \quad & |f(x) - f(a)| \\ & \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(a)| + |f_p(a) - f_p(a)| \\ & \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon, \end{aligned}$$

démontrant ainsi la continuité de f en a. △

Ensuite, on observe par opérations sur les unions et intersections que

$$[0,1] \setminus A = [0,1] \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Big([0,1] \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p))\Big).$$

Par union dénombrable, il suffit donc de montrer que

$$[0,1] \setminus \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(B(k,p))$$

est maigre pour chaque $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour que $[0,1] \setminus A$ le soit.

Affirmation 2. $[0,1] = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} B(k,p)$ *si* $k \in \mathbb{N}_*$.

Preuve de l'affirmation 2. Vu que, par définition, $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B(k,p) \subset [0,1]$, on se concentre sur l'inclusion inverse.

Fixons $x \in [0,1]$. On veut montrer que $x \in B(k,p)$ pour un $p \in \mathbb{N}$. La suite réelle $(f_n(x))_n$ converge dans $\mathbb{R}$. Par le critère de Cauchy, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy. Donc, en prenant $p = p(k) \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et pour tout $q \geq p$,

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq 1/k.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}_*$ on a montré l'existence d'un p tel que $x \in B(k,p) = \bigcap_{q\geq p} A(k,p,q)$. △

De l'affirmation 2, on tire que

$$[0,1] \setminus \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(B(k,p)) \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \big(B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))\big)$$

Pour conclure, il suffit de montrer par union dénombrable que

Affirmation 3. $B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))$ *est rare pour* $p,k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$.

Preuve de l'affirmation 3. Il faut calculer

$$\overline{[0,1] \setminus \overline{B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))}}$$

Comme intersection de fermés $B(k,p)$ est fermé et par conséquent $B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))$ est fermé. Si bien que nous sommes réduits à calculer

$$\overline{[0,1] \setminus \big(B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))\big)} = \overline{\mathrm{int}(B(k,p)) \cup [0,1] \setminus B(k,p)}.$$

On observe que l'union est disjointe si bien que

$$\overline{[0,1] \setminus \big(B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))\big)} = \overline{\mathrm{int}(B(k,p))} \cup \overline{[0,1] \setminus B(k,p)} = [0,1],$$

l'ensemble $B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))$ épouse ainsi la définition d'ensemble rare. △

L'ensemble D est donc bien maigre car il s'écrit union dénombrable d'unions dénombrables de rares;cela termine la preuve. □

Quelques indications sur le point (iii). Appelons

$$D \doteq \{x \in [0,1] : f \text{ n'est pas continue en } x\}$$

En décortiquant la définition de continuité,

$$D \subset [0,1] \setminus A.$$

(Ici, «$\subset$» signifie égal ou inclu.) Il suffit de montrer que $[0,1] \setminus A$ est maigre. On a que

$$[0,1] \setminus A = [0,1] \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \Big([0,1] \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p))\Big).$$

Par union dénombrable, il suffit donc de montrer que

$$[0,1] \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p))$$

est maigre pour chaque $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Si

$$[0,1] = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} B(k,p) \tag{6}$$

alors

$$[0,1] \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p)) \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \big(B(k,p) \setminus \operatorname{int}(B(k,p)).\big)$$

Pour tout k, p, je note que $B(k,p) \setminus \operatorname{int}(B(k,p)$ est rare comme $B(k,p)$ est fermé.

Une intuition de ce dernier fait pouvait venir du fait que l'ensemble $B(k,p) \setminus \operatorname{int}(B(k,p)$ correspond à la frontière topologique de l'ensemble $B(k,p)$. Si on se représente une frontière d'un honnête ensemble dans le plan, on peut deviner qu'il est d'intérieur vide, c'est le cas pour tout fermé. Une autre intuition de la rareté de $B(k,p) \setminus \operatorname{int}(B(k,p))$ est d'arguer que l'intérieur d'un ensemble fermé auquel on a retranché son intérieur est probablement «petit» ou vide.

Pour (6), on peut utiliser le critère de Cauchy pour la convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_n$.