Analyse fonctionnelle

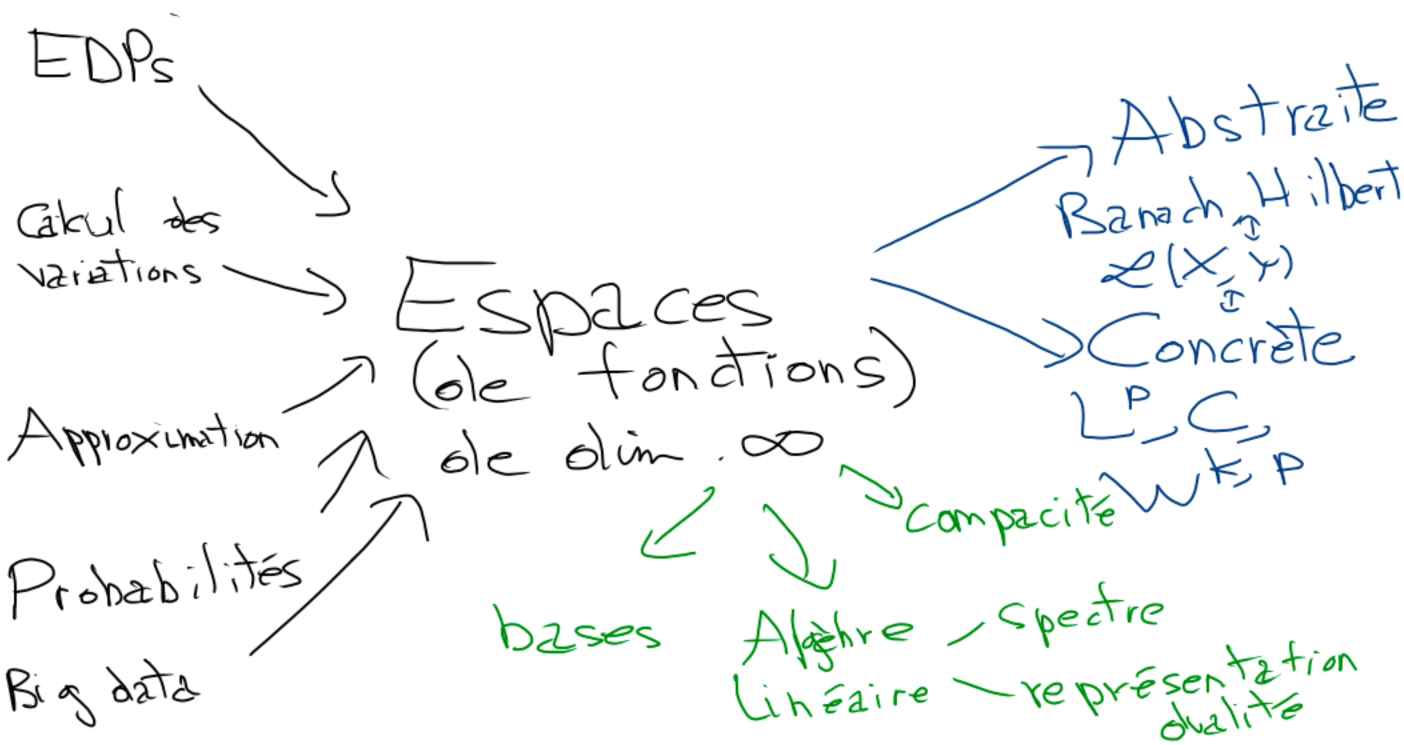
26 janvier 2021

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

- Les fonctions $\in \mathcal{BC}(\Omega)$ sont d'office dans les focntions Lebesgue intégrables de L1 ? ?
- Pourquoi $u_n = min(\frac{1}{\sqrt(x)}, n)$ est continu ?
- Les naturels sont-ils denses ? Dans eux même oui mdr, ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.



Chapitre 2

Récapitulatif des Normes

Oui le récapitulatif est avant le chapitre hahahah

Pour chaque espace, on peut avoir beaucoup de définitions de normes différentes.
Definition 3.1.1. Une norme sur un espace vectoriel réel X est une application $X \longrightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \|u\|$ telle que

- for every $u \in X \backslash \{0\}, \|u\| > 0$
- for every $u \in X$ and for $\alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
- (Minkowski's inequality) for every $u, v \in X$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Un espace normé ou métrique est un espace vectoriel ayant une norme définie sur cet espace.
Si la norme d'un espace change, cela peut lui faire perdre des propriétés comme la complétude.
De plus, si une norme satisfait l'identité du parallèlogramme,

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$$

Alors, cette norme dérive d'un produit scalaire et est donc sur un espace pré-hilbertien.
Le tableau ci-dessous reprend les espaces vu et les normes définies sur chaqun d'eux par défault. (On peut essayer de mettre n'importe quelle norme sur n'importe quel espace du moment que cela fait sens).

——————————↠ ESPACE↞——————-	$\|\|NORME\|\|$	INDUITE PAR PROD. SCALAIRE ? BANACH ?
Si $(X_1, \|\cdot\|_1), (X_2, \|\cdot\|_2)$ sont des espaces normés, alors $X_1 \times X_2$ peut être normé.	La norme est donnée par, $$\|(u_1, u_2)\| = \max(\|u_1\|_1, \|u_2\|_2)$$	
$\mathbb{R}^N$	$$\|x\|_1 = \|x_1\| + \cdots + \|x_N\|$$ $$\|x\|_p = \sqrt[p]{\|x_1\|)^p + \cdots + (\|x_N\|)^p}$$ $$\|x\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_N\|\}$$	
$\mathbb{R}$, l'espace des réels	La norme est donnée par la valeure absolue : $$u \mapsto \|u\|$$	C'est un espace de Banach et la valeure absolue est induite pas un produit scalaire.
The space of bounded continuous functions on the metric space X, $$\mathcal{B}C(X) = \left\{u \in C(X) : \sup_{x \in X} \|u(x)\| < \infty\right\}$$ En particulier, l'espace des fonctions continues est noté : $C(X)$.	Avec la norme infinie $$\|u\|_\infty = \sup_{x \in X} \|u(x)\|$$	C'est un espace de Banach

$\mathcal{K}(\Omega)$, espace des fonctions continues à support compact $$\mathcal{K}(\Omega)=\left\{u\in C\left(\mathbb{R}^N\right):\operatorname{spt}u\ \ \textit{is a compact subset of}\ \Omega\right\}$$	On utilisera en général la norme infinie $$\|u\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|$$ Mais il n'y a pas de norme par défaut sur cet espace.	Il n'est pas complet donc ce n'est pas un espace de Banach avec cette norme.
$\mathcal{D}(\Omega)$, espace des fonctions infiniement dérivables à support compact. $C^\infty\cap\mathcal{K}$ $$\mathcal{D}(\Omega)=\left\{u\in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right):\operatorname{spt}u\ \ \textit{is a compact subset of}\ \Omega\right\}$$	On peut utliser les normes L^p sur cet espace.	
Let Ω be an open set of $\mathbb{R}^N$. Si $\omega\subset\subset\Omega$ we define, for $1\leq p<\infty$, $$L^p_{loc}(\Omega)=\{u:\Omega\to\mathbb{R}:\ \text{for all}\ \omega\subset\subset\Omega,\ u\|_\omega\in L^p(\omega)\}$$ L'espace des fonctions localement intégrables.		
$\mathcal{M}(\Omega,\mu)$ espace des fonctions mesurables.	On peut utliser les normes L^p sur cet espace.	
$$\mathcal{L}(X,Y)=\{A:X\to Y:A\ \text{is linear and continuous}\}$$, espace des fonctions linéaires continues allant de X vers Y.	La norme est donnée par, $$\begin{aligned}\|A\|&=\sup_{\substack{u\in X\\u\neq 0}}\frac{\|Au\|}{\|u\|}\\&=\sup_{\substack{u\in X\\\|u\|=1}}\|Au\|\end{aligned}$$	
$\mathcal{L}(\Omega,\mu)$, l'espace des fonctions élémentaires. C'est un espace qui varie en fonction de la mesure mise sur notre espace, celle de Lebesgue demande comme espace de fonctions élémentaires $\mathcal{K}(\Omega)$.	On peut utliser les normes L^p sur cet espace.	
L'espace des fonctions intégrables par rapport à μ, $$\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)=\left\{u\in\mathcal{M}(\Omega,\mu):\int_\Omega\|u\|d\mu<\infty\right\}$$	We define the norm $$\|u\|_1=\int_\Omega\|u\|d\mu$$ Convergence with respect to $\|\cdot\|_1$ is convergence in mean.	
$L^1(\Omega,\mu)$ est le quotient de $\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ avec la relation d'équivalence presque partout.	We define the norm $$\|u\|_1=\int_\Omega\|u\|d\mu$$ Convergence with respect to $\|\cdot\|_1$ is convergence in mean.	C'est un espace de Banach.
We denote by $L^2(\Omega,\mu)$ the quotient of $$\mathcal{L}^2(\Omega,\mu)=\left\{u\in\mathcal{M}(\Omega,\mu):\int_\Omega\|u\|^2d\mu<\infty\right\}$$ by the equivalence relation "equality almost everywhere."	Let μ be a positive measure on Ω. $$\|u\|_2=\left(\int_\Omega\|u\|^2d\mu\right)^{1/2}$$ Convergence respect to $\|.\|_2$ is convergence in quadratic mean. On a aussi la norme 1 : $$\|u\|_1=\int_\Omega\|u\|d\mu\leq\mu(\Omega)^{1/2}\|u\|_2.$$	Est un espace avec une norme induite par le produit scalaire, $$(u\mid v)=(\int_\Omega\|u\|^2d\mu)^{\frac{1}{2}}$$ sur l'espace $L^2(\Omega,\mu)$. De plus, $L^2(\Omega,\mu)\subset L^1(\Omega,\mu)$, (que si la mesure est finie).

$\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ espace des fonction de puissance p intégrable. $$\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)=\left\{u\in\mathcal{M}(\Omega,\mu):\int_\Omega |u|^p d\mu<\infty\right\}$$	La norme par défaut est donnée par $$\|u\|_p=\left(\int_\Omega |u|^p d\mu\right)^{1/p}$$	
We denote by $L^p(\Omega,\mu)$ the quotient of $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ by the equivalence relation "equality almost everywhere."	La norme par défaut est donnée par $$\|u\|_p=\left(\int_\Omega |u|^p d\mu\right)^{1/p}$$	
On définit l'espace des fonctions bornées mesurables : $$\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)=\{u\in\mathcal{M}(\Omega,\mu):sup_{x\in\Omega}\|u\|<\infty\}$$		
On définit l'espace des fonctions bornées presque partout comme le quotient de $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mu)$ avec la relation presque partout égales : $$L^\infty(\Omega)=\{u\in\mathcal{M}(\Omega):\exists C>0tq\|u\|\le C\text{p.p sur }\Omega\}$$	On peut utiliser : $$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=$$ $$inf\{C>0:\|u\|\le C\text{ p.p. dans }\Omega\}$$	
On définit l'espace l^1 comme l'espace des suites absolment sommables (on a une valeure absolue dans la somme).		
On définit l'espace l^2 comme l'espace des suites de carrés sommables.		
On définit l'espace l^p comme l'espace des suites de puissances p sommables (on a une valeure absolue dans la somme). Notons que $l^p=L^p(\mathbb{N},\mu)$, où μ est la mesure de comptage. (c'est la mesure qui compte le nombre déléments il y a dans un espace)		
On définit l'espace l^∞ comme l'espace des suites de $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ayant un suprémum fini, $$l^\infty=\{u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}:sup_n\|u(n)\|<\infty\}$$	On a par défaut, $$\|\|u\|\|_\infty=sup_n\|u(n)\|$$	On a montré dans le premier devoir que c'était un espace de Banach.

ATTENTION, par défaut, toutes les fonctions appartenant a des espace vont par défaut de Ω vers $\mathbb{R}$.

$$u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$$

Elles ont toutes leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

On observe que les normes définies sur L^p et $\mathcal{L}^p$ sont les mêmes et marchent pour les deux si la norme définie n'est pas modifiée lorsque l'on change les ensembles négligeables. Cela est dû au fait que la relation d'équivalence sur L^p dit que si deux fonctions sont égales presque partout, alors ce seront les mêmes ! (on ajoute de la miopie stv hahaha).
Autre remarque, dans L^2, il peut vraiment y avoir des fonctions bizzares qui ne sont pas continues mais dont le carré est intégrable. Comme des fonctions en escalier ect,...

Chapitre 3

Normes

3.1 Espaces de Banach

3.1.1 Normes et distances :

On peut utiliser la complétude pour montrer qu'une suite converge, sans utiliser de limites !

Definition 3.1.1. Une norme sur un espace vectoriel réel X est une application $X \longrightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \|u\|$ telle que

- for every $u \in X \backslash \{0\}, \|u\| > 0$
- for every $u \in X$ and for $\alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
- (Minkowski's inequality) for every $u, v \in X$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Un espace normé ou métrique est un espace vectoriel ayant une norme définie sur cet espace. Every normed space is a metric space.

Examples :

- Let $(X, \|.\|)$ be a normed space and let Y be a subspace of X. The space Y together with $\|.\|$ (restricted to Y) is a normed space.
- Let $(X_1, \| \cdot \|_1), (X_2, \| \cdot \|_2)$ be normed spaces. The space $X_1 \times X_2$ together with

$$\|(u_1, u_2)\| = \max(\|u_1\|_1, \|u_2\|_2)$$

  is a normed space.
- We define the norm on the space $\mathbb{R}^N$ to be

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|\}$$

Si nous avons une notion de norme, celle de distance peut facilement être définie.

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

On a aussi que

$$d(u, v) \geqslant 0$$

$$d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v)$$

Proposition 3.1.2. Let X be a normed space. The function

$$X \times X \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \|u - v\|,$$

is a distance on X. The following mappings are continuous :

$$\begin{aligned} &X \to \mathbb{R} : u \mapsto \|u\| \\ &X \times X \to X : (u, v) \mapsto u + v \\ &\mathbb{R} \times X \to X : (\alpha, u) \mapsto \alpha u \end{aligned}$$

Démonstration. 1) Normes : Par les propriétés de normes, on sait que,

$$d(u,v) = 0 \Longleftrightarrow u = v, \quad d(u,v) = \| -(u-v)\| = \|v-u\| = d(v,u)$$

Finally, by Minkowski's inequality,

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$$

since by Minkowski's inequality,

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|$$

the norm is continuous on X.
On a $||u|| \leqslant ||u-v+v|| \leqslant ||u-v|| + ||v||$, on obtient alors la propriété demandée en faisant la même chose pour v et en mettant la valeure absolue.

2) Somme : It is easy to verify the continuity of the sum and of the product by a scalar. Pour ce faire, on va utiliser la norme

$$\|(u_1,u_2)\| = \max(\|u_1\|_1, \|u_2\|_2)$$

pour un espace du type $X_1 \times X_2$. Pour montrer que la focntion

$$f : X \times X \to X : (u,v) \mapsto u+v$$

est continue, on observe en premier lieu que pour $(u,v),(a,b) \in X \times X$, on a

$$||f(u,v) - f(a,b)|| = ||u+v-(a+b)|| \leqslant ||u-a|| + ||v-b||$$

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, Si $||(u-a, v-b)|| = max(||u-a||, ||v-b||) < \delta$, on a automatiquement que $||u-a|| < \delta$ et $||v-b|| < \delta$.
Dès lors, nous pouvons affirmer que

$$||f(u,v) - f(a,b)|| \leqslant ||u-a|| + ||v-b|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3) Produit : Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \times X \to X : (\alpha, u) \mapsto \alpha u$ est continue. Soit $(\alpha, x), (\beta, y) \in \mathbb{R} \times X$, on a

$$||f(u,v) - f(a,b)|| = ||\alpha.x - \beta.y|| \leqslant ||(\alpha-\beta).u - \beta.(x-y)|| \leqslant |\alpha-\beta|||u|| + |\beta|||x-y||$$

Dès lors, pour $\varepsilon > 0$, en posant $\delta = \frac{\varepsilon}{2.(||u||+|\beta|)}$,
Si $||(\alpha-\beta, x-y)|| = max(||u-a||, ||v-b||) < \delta$, on a automatiquement que $||\alpha-\beta|| < \delta$ et $||x,y|| < \delta$, on obtient alors que,

$$||f(u,v) - f(a,b)|| =\leqslant |\alpha-\beta|||u|| + |\beta|||x-y|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2.(||u||+|\beta|)}.||u|| + \frac{\varepsilon}{2.(||u||+|\beta|)}.|\beta| = \varepsilon$$

□

3.1.2 Rappel sur la convergence et les suites de Cauchy :

Definition 3.1.3. : Let X be a normed space and $(u_n) \subset X$. The series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converges, and its sum is $u \in X$ if the sequence $\sum_{n=0}^{k} u_n$ converges to u. We then write $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$

Définition : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^m$ est une suite de Cauchy, lorsque pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k, l \in \mathbb{N}$ avec $k \geq l \geq N$

$$\|u_l - u_k\| \leq \epsilon$$

Proposition : Si (u_n) est une suite de Cauchy, alors il existe un m tel que pout tout $n \geq m$,

$$||u_n|| \leq 2||u_m||$$

Proposition : Une suite converge dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si elle est une suite de Cauchy (entre autre car $\mathbb{R}^m$ est un espace complet pour la nrme euclidienne).

Proposition : Every convergent sequence is a Cauchy sequence. Every Cauchy sequence is a bounded sequence.

Démonstration. If (u_n) converges to u, then by the triangle inequality, it follows that

$$0 \le d\left(u_j, u_k\right) \le d\left(u_j, u\right) + d\left(u, u_k\right)$$

and $\lim_{j,k\to\infty} d\left(u_j, u_k\right) = 0$ If (u_n) is a Cauchy sequence, then there exists m such that for $j, k \ge m, d\left(u_j, u_k\right) \le 1$. We obtain for every n that

$$d\left(u_0, u_n\right) \le \max\left\{d\left(u_0, u_1\right), \ldots, d\left(u_0, u_{m-1}\right), d\left(u_0, u_m\right) + 1\right\}$$

□

Définition : Soit $E \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour une fonction $f : E \to \mathbb{C}$, on note

$$\|f\| = \sup_{z\in E} |f(z)|$$

et soit $f_n : E \to \mathbb{C}, n = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions.

1) la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge ponctuellement sur E ssi la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge $\forall z \in E$
2) la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ sur E ssi $\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$, où $s_n(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$
3) la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge normalement sur E ssi $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$

De plus, on a que la convergence normale implique la convergence absolue ponctuelle et la convergence unifome.

The series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converges normally if $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$

3.1.3 Espaces complets et Banach :

MONTRER QU'UN ESPACE EST DE BANACH :

- Suppose et définis notre suite de Cauchy, $||u_n||$.
- Identifie une limite, u candidat qui nous est souvent donné par la convergence ponctuelle.
- On montre que notre limite appartient bien à notre espace. On montre aussi qu'on a bien $||u_n - u|| \to 0$
- Souvent on devra utiliser la complétude d'autres espaces ! On peut montrer que $\mathbb{R}^n$ est complet à partir de la complétude de $\mathbb{R}$. Car si chaqune des composantes convergent, alors, le tout convergera.

Definition : (X, d) est un espace complet si $(u_n) \subset X$ est une suite de Cauchy,

$$\lim_{k,l\to\infty} ||u_k - u_l|| = 0$$

et alors il existe $u \in X$ tq

$$\lim_{k\to\infty} ||u_k - u|| = 0$$

Un espace est complet si toute suite de Cauchy converge dedans.

Definition 3.1.4. A Banach space is a complete normed space (vectoriel). C'est un espace métrique complet. ↠ Donc, les suites de Cauchy ne convergent pas forcément si l'espace n'est pas complet (les suites de Cauchy ne convergent d'office que dans $\mathbb{R}^n$).

Proposition 3.1.5. In a Banach space X, the following statements are equivalent :

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converges ;
(ii) $\lim_{j\to\infty} \sum_{j<k}^{k} u_n = 0$

Démonstration. Define $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$. since X is complete, we have
$(a) \Leftrightarrow \lim_{\substack{j\to\infty \\ j<k}} \left\|S_k - S_j\right\| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\substack{j\to\infty \\ j<k}} \left\|\sum_{n=j+1}^{k} u_n\right\| = 0 \Longleftrightarrow (b)$ □

Proposition 3.1.6 : In a Banach space, every normally convergent series converges.

3.1.4 Examples d'espaces de Banach :

1) The space of bounded continuous functions on the metric space X,

$$\mathcal{B}C(X) = \left\{ u \in C(X) : \sup_{x \in X} |u(x)| < \infty \right\}$$

together with the norm

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in X} |u(x)|$$

is a Banach space.
Convergence with respect to $\| \cdot \|_\infty$ is uniform convergence.
On a aussi que $||u_k(x) - u_l(x)|| \leqslant ||u_k - u_l||$, puisque $\lim_{k,l \to \infty} u_k, l(x) = u(x)$, alors pour tout $k, l \geqslant \mathbb{N}$, si $||u_k - u_l|| \leqslant \varepsilon$,
nous avons une suite de Cauchy en chaque points car $||u_k(x) - u_l(x)|| = \lim_{l \to \infty} ||u_k(x) - u_l(x)|| \leqslant \varepsilon$.

2) Let μ be a positive measure on Ω. On a $L^1(\Omega, \mu)$ the quotient of $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ by the equivalence relation "égalité presque partout". We define the norm

$$\|u\|_1 = \int_\Omega |u| d\mu$$

Convergence with respect to $\| \cdot \|_1$ is convergence in mean.

3) Let dx be the Lebesgue measure on the open subset Ω of $\mathbb{R}^N$. We denote by $L^1(\Omega)$ the space $L^1(\Omega, dx)$. Convergence in mean is not implied by simple convergence, and almost everywhere convergence is not implied by convergence in mean. If $m(\Omega) < \infty$, the comparison theorem implies that for every $u \in \mathcal{B}C(\Omega)$,

$$\|u\|_1 = \int_\Omega |u| dx \leq m(\Omega) \|u\|_\infty$$

Hence $\mathcal{B}C(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, and the canonical injection is continuous, since

$$\|u - v\|_1 \leq m(\Omega) \|u - v\|_\infty$$

Donc, si $||u - v|| \leq \varepsilon$, alors, c'est bon, on a montré la convergence.
Toute fonction bornée et continue $\in \mathcal{B}C(\Omega)$ s'injecte dans $L^1(\Omega)$(=fonction Lebesque intégrable), à toute fonction $\in \mathcal{B}C(\Omega)$, on l'envoie vers les fonctions intégrables . Cette application est linéaire et continue de Bc dans L1 et sa norme est la mesure.

4) Contre-exemple.
On va montrer que l'espace des fonctions continues et bornées n'est pas un espace de Banach pour la norme L1. On sait que $L^1(\Omega, \mu)$ est Banach. On sait aussi que $C \subset L^1(\Omega, \mu)$. Montrons qu'une suite de fonctions de C peut converger vers un élément de $L^1(\Omega, \mu)$ n'appartenant pas à C. Définissons $(u_n) \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $u_n = min(\frac{1}{\sqrt(x)}, n)$ si $x \neq 0$ et n si x=0. Cette suite tend vers $u(x) = \frac{1}{\sqrt(x)}$ si $x \neq 0$, 0 sinon, qui est intégrable sur l'intervalle [0,1]. Or, cette fonction n'est pas continue.
Ca explose en zéro mais donc, tt façon c'est pas continu.

3.1.5 Rappels d'analyse (théorèmes de convergence) et quelques notions sur la mesure

Notions sur la mesure

Une fonction mesurable est une fonction CONTINUE que l'on peut obtenir comme limite ponctuelle. C.à.d, si on a une suite de fonctions, sa limite ponctuelle est $\lim_{n \to \infty} u_n(x)$, c'est une limite en chaque point.
On a suite fonction, on l'évalue en chaque point et on regrde si la suite converge. Une suite de fct continues peut avoir une limites ponctuelles non continues

Definition : Une mesure est une application $\mu : \Sigma \in P(\Omega) \to [0, \infty]$ tel que :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$, où les A_n sont des espaces disjoints contenu dansΣ.

Réecrire la définition et le but enft c'est de mettre des rectangles en dessous des intégrales.
On a alors que ,

- $\int_\Omega \chi_A d\mu = \mu(A)$. $(A \in \Sigma)$

•• $\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{k} c_i.\chi_{Ai}d\mu = \sum_{j=1}^{k} c_i\mu(A_i)$.

••• $\int_{\Omega} gd\mu = sup\{\int_A gd\mu, 0 \leqslant g \leqslant f, g = \Sigma.c_i.\chi_{Ai}\}$

On peut voir la mesure comme une notion d'aire. En analyse 3, nous avons vu la mesure au sens de Lebesque. Tout les théorèmes qui ont été vus dans ce cours avec cette mesure, sont applicables pour les autres mesures.

Ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^n$.

Définition : Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit mesurable (dans le sens de Lebesgue) si χ_A est intégrable. Alors le nombre

$$v_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A dx$$

est appelé le volume ou mesure (de Lebesgue) de A.

Remarque : On vient de démontrer que $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ est mesurable avec $v_2(B(0,1)) = \pi$

Proposition :

(i) Si A est borné et ouvert alors A est mesurable.

(ii) Si A est compact alors A est mesurable.

Définition : Un ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable si N est mesurable avec $v_n(N) = 0$

Définition :(presque partout). Soit E une propriété qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors on dit que E est vraie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ (ou E est vrai presque partout sur $\mathbb{R}^n$) s'il existe un ensemble négligeable N tel que E est est vraie sur $\mathbb{R}^n \backslash N$.

Théorème : Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que f est intégrable et $f = g$ presque partout. Alors g est intégrable avec

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} g^{dx}$$

.

Théorèmes importants d'intégration

Beppo Levi / de la convergence monotone :

Soit $(f_k)_{k\in N}$ une suite croissante de fonctions $\mathbb{R}^n \to$ R U $\{\pm\infty\}$ intégrables, et $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x < \infty$$

et dans ce cas on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx$$

Lemme de Fatou :

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur E à valeurs dans $[0, +\infty]$, la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a :

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n-\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

L'égalité n'est en général pas vérifiee.

Convergence sur des ensembles :

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $A_k \subset \mathbb{R}^n$ pour $k \in \mathbb{N}$ tels que $A_k \subset A_{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $A = \cup_{k\in N} A_k$. De plus, soit $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telle que f est intégrable sur A_k pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Alors f est intégrable sur A si et seulement si

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{A_k} |f|\mathrm{d}x < \infty$$

Dans ce cas, on a

$$\int_A f\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f\mathrm{d}x$$

.

Théorème de convergence dominée :
Soient $(f_k)_k \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions intégrables, f une fonction, et F une fonction intégrable tels que $|f_k| \leq F$ pour tout $k \in \mathbb{N}, \lim_{k\to\infty} f_k = f$ presque partout. Alors f est intégrable avec

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \mathrm{d}x$$

3.1.6 Converger dans L1 et presque partout

On peut montrer que converger presque partout est une notion de convergence non métrisable, aucune notion de distance assure la convergence presque partout. Dans le sens où, dans un espace métrique, si une sous-suite converge, la suite convergera aussi. Mais si on a une suite qui converge pas presque partout, c'est possible de trouver une sous-suite qui converge presque partout. Il n'y a pas de notions qui assurent la convergence presque partout.
Si une sous-suite converge, la suite converge ne converge pas forcément mais si c'est une suite de Cauchy, c'est vrais.
On peut donc se poser la question, si j'ai une suite qui converge presque partout, est-ce qu'elle converge aussi dans L1 ?

Proposition 3.1.7. : Let $u \in L^1(\Omega, \mu)$. Then for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for every measurable subset A of Ω satisfying $\mu(A) \leq \delta$ (fonctions avec une petite mesure),

$$\int_A |u| d\mu \leq \varepsilon$$

On nous dit ici que les fonctions avec une petite mesure, auront une petite intégrale.

Démonstration. Let $\varepsilon > 0$. On a pout tout $t > 0$ et pour tout ensemble mesurable A de Ω,

$$\int_A |u| d\mu \leq \int_{|u|\leq t} |u| d\mu + \int_{|u|>t} |u| d\mu \leq t\mu(A) + \int_{|u|>r} |u| d\mu$$

Il existe t tel que,

$$\int_\Omega \chi_{|u|>t} . |u| d\mu = \int_{|u|>t} |u| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Si on prend un t assez grand, on a convergence p.p. car, à partir d'un moment, c'sest zéro, et en appliquant le thm de convergence dominée de Lebesgue, le tout tend vers zéro.
En posant $\delta = \varepsilon/(2t)$. On obtient que lorsque $\mu(A) \leq \delta$, alors, $\int_A |u| d\mu \leq \varepsilon$ □

Definition 3.1.8. : A subset S of $L^1(\Omega, \mu)$ is uniformly integrable if for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that for every measurable subset A of Ω satisfying $\mu(A) \leq \delta$ $\sup_{u\in S} \int_A |u| d\mu \leq \varepsilon$.
Cette définition est équivalente à dire que pour tout $u \in S$, $\int_A |u| d\mu \leq \varepsilon$. Le suprémum n'est pas indispensable.

Theorem 3.1.9 (Vitali) : Let $\mu(\Omega) < \infty$ and let $(u_n) \subset L^1(\Omega, \mu)$ be a sequence almost everywhere converging to u. Then the following properties are equivalent :

a) $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ is uniformly integrable
b) $\|u_n - u\|_1 \to 0, n \to \infty$ in $L^1(\Omega, \mu)$

Démonstration. Assume that (a) is satisfied and let $\varepsilon > 0$. For every n, we have

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n - u| \, d\mu &= \int_{|u_n-u|\leq\varepsilon} |u_n - u| \, d\mu + \int_{|u_n-u|>\varepsilon} |u_n - u| \, d\mu \\ &\leq \varepsilon\mu(\Omega) + \int_{|u_n-u|>\varepsilon} |u_n| \, d\mu + \int_{|u_n-u|>\varepsilon} |u| d\mu\end{aligned}$$

On peut séparer Ω en les ensembles $|u_n - u| \leq \varepsilon$ et $|u_n - u| < \varepsilon$ car ils sont disjoints.

Puisque (u_n) est uniformément intégrable et que par hypothèse,il existe a $\delta > 0$ measurable subset A of Ω satisfying $\mu(A) \le \delta$,

$$\sup_n \int_A |u_n|\, d\mu \le \varepsilon$$

Par le lemme de Fatou,

$$\int_A |u| d\mu = \int_A \liminf |u_n| d\mu \le \liminf \int_A |u_n| d\mu$$

Première égalité car u_n converge presque partout vers u. Et le tout plus petit que ε parce que u_n est uniformément intégrable et que la lim inf est plus petite que la lim sup évidemment.
Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque $\mu(\Omega) < \infty$, avec le fait que u_n converge presque partout vers u, il existe m such that for every $n \ge m$

$$\int_\Omega \chi_{|u_n - u| > \varepsilon} d\mu = \mu\{|u_n - u| > \varepsilon\} \le \delta$$

Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers zéro. Pour dominer, on a besoin du fait que la mesure de Ω est finie. Donc, la limite des intégrales est zéro mais la limite de la mesure est zéro et la limite de l'ensemble est un ensemble négligeable.
On a alors que pour tout $n \ge m$

$$\int_\Omega |u_n - u|\, d\mu \le (\mu(\Omega) + 2)\varepsilon$$

Puisque $\varepsilon > 0$ is arbitrary, $\|u_n - u\|_1 \to 0, n \to \infty$
Assume that (b) is satisfied.
For every measurable subset A of Ω, we have

$$\int_A |u_n|\, d\mu \le \int_A |u| d\mu + \|u_n - u\|_1$$

Let $\varepsilon > 0$.
There exists m such that for every $n \ge m, \|u_n - u\|_1 \le \varepsilon/2$ and there exists $\delta > 0$ such that for every measurable subset A of $\Omega, \mu(A) \le \delta$ implies that

$$\int_A |u| d\mu \le \varepsilon/2, \int_A |u_1| d\mu \le \varepsilon, \ldots \int_A |u_{m-1}| d\mu \le \varepsilon$$

cela est vrais pour des familles finies de fonctions L1 (voir cours) Then for every $n, \int_A |u_n|\, d\mu \le \varepsilon$ and $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ is uniformly integrable. □

3.2 Continuous Linear Mappings

On a le droit de faire la théorie générale des operations sans définir l'opération que l'on considène, de même qu'on fait la théorie de l'addition sans définir la nature des termes à additionner.
Henri Poincare

In general, linear mappings between normed spaces are not continuous.
La norme sur les applications linéaires est donnée par :

$$\|A\| = \sup_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \|Au\|$$

Proposition 3.2.1. : Let X and Y be normed spaces and $A : X \to Y$ a linear mapping. The following properties are equivalent :
(a) A is continuous ;
(b) $c = \sup_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} < \infty$

Démonstration. $b) \Rightarrow a)$ If $c < \infty$, we obtain

$$\|Au - Av\| = \|A(u - v)\| \le c\|u - v\|$$

Hence A is continuous.

$a) \Rightarrow b)$ If A is continuous, there exists $\delta > 0$ such that for every $u \in X$, (pose $\varepsilon = 1$)

$$\|u\| = \|u - 0\| \leq \delta \Rightarrow \|Au\| = \|Au - A0\| \leq 1$$

Notre fonction est donc bornée sur la boule de rayon δ. Hence for every $u \in X \backslash \{0\}$, et par linéarité de A et le fait que la norme est homogène. (propriété qui dit qu'on peut sortir les constantes)

$$\|Au\| = \frac{\|u\|}{\delta}\left\|A\left(\frac{\delta}{\|u\|}u\right)\right\| \leq \frac{\|u\|}{\delta}$$

□

Je ne vois pas en quoi borner qqchose par 1/delta borne vraiment car delta est arbitraire et donc arbitrairement petit aussi NON DELTA EST FIXE.

Proposition 3.2.2 : The function

$$\|A\| = \sup_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \|Au\|$$

defines a norm on the space $\mathcal{L}(X,Y) = \{A : X \to Y : A \text{ is linear and continuous } \}$.

Démonstration. By the preceding proposition, if $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, then $0 \leq \|A\| < \infty$. If $A \neq 0$, it is clear that $\|A\| > 0$. It follows from axiom $\mathcal{N}_2$ that

$$\|\alpha A\| = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \|\alpha Au\| = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} |\alpha|\|Au\| = |\alpha|\|A\|$$
$$\|u\| = 1\|u\| = 1$$

It follows from Minkowski's inequality that

$$\|A + B\| = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} \|Au + Bu\| \leq \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} (\|Au\| + \|Bu\|) \leq \|A\| + \|B\|$$
$$\|u\| = 1\|u\| = 1$$

□

Définition : Soit $Z \subset X$(partie de X) est dense lorsque $\overline{Z} = X$, c'est à dire que pour $x \in X$, il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Z qui converge vers X. Une partie dense Z est telle que pour tout élément de X, y'a un z qui est aussi proche de x que je veux.

Proposition 3.2.3 (Extension by density). Let Z be a dense subspace of a normed space X,Y a Banach space, and $A \in \mathcal{L}(Z,Y)$. Then there exists a unique mapping $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ such that $B|_Z =$ A. Moreover, $\|B\| = \|A\|$.

Démonstration. Let $u \in X$. There exists a sequence $(u_n) \subset Z$ such that $u_n \to u$ dans X. The sequence (Au_n) is a Cauchy sequence, car

$$\left\|Au_j - Au_k\right\| \leq \|A\| \left\|u_j - u_k\right\| \leq \|A\|(\left\|u_j - u\right\| + \left\|u - u_k\right\|) \to 0, \quad j,k \to \infty$$

(aussi par une proposition des rappels).
We denote by f its limit. Or, cette limite pourrait dépendre de u ? Donc, nous allons montrer que cela n'est pas le cas.
Let $(v_n) \subset Z$ be such that $v_n \to u$ We have

$$\|Av_n - Au_n\| \leq \|A\| \|v_n - u_n\| \leq \|A\| (\|v_n - u\| + \|u - u_n\|) \to 0, \quad n \to \infty$$

Hence $Av_n \to f$, and we define $Bu = f$.
By Proposition 3.1.2, B is linear. Montrons maintenant que $\|A\| = \|B\|$. Since for every n

$$\|Au_n\| \leq \|A\| \|u_n\|$$

et par linéarité de la limite,

$$\|Bu\| \leq \|A\|\|u\|$$

Hence B is continuous car elle est bornée et linéaire and $\|B\| \leq \|A\|$.

It is clear that $\|A\| \leq \|B\|$ car Z est dense dans X et

$$\|A\| = \sup_{\substack{u\in Z\\ \|u\|=1}} \|Au\| \leq \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|=1}} \|Au\| = \|B\|$$

Hence $\|A\| = \|B\|$.
Montrons maintenant l'unicité de cette fonction. If $C \in \mathcal{L}(X,Y)$ is such that $C_Z = A$, we obtain

$$Cu = \lim_{n\to\infty} Cu_n = \lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} Bu_n = Bu$$

□

Proposition 3.2.4 : Let X and Y be normed spaces, and let $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ and $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ be such that $\|A_n - A\| \to 0$ (convergence en norme). Then (A_n) converges simply to A

Démonstration. For every $u \in X$, we have

$$\|A_n u - Au\| = \|(A_n - A)\,u\| \leq \|A_n - A\|\,\|u\|$$

□

Cette prposition nous dit donc qu'une convergence implique une autre.

Proposition 3.2.5 : Let Z be a dense subset of a normed space X, let Y be a Banach space, and let $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ be such that
(a) $c = \sup_n \|A_n\| < \infty$
(b) for every $v \in Z, (A_n v)$ converges.
Then A_n converges simply to $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, and

$$\|A\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\| = sup_{k\in\mathbb{N}} inf_{n\geqslant k}\|A_n\|$$

Démonstration. Let $u \in X$ and $\varepsilon > 0$.
By density, there exists $v \in B(u,\varepsilon) \cap Z$. Since $(A_n v)$ converges, puisque toute suite qui converge est une suite de Cauchy, cela implique the existence of n such that

$$j,k \geq n \Rightarrow \left\|A_j v - A_k v\right\| \leq \varepsilon$$

Hence for $j,k \geq n$, we have

$$\begin{aligned}\left\|A_j u - A_k u\right\| &\leq \left\|A_j u - A_j v\right\| + \left\|A_j v - A_k v\right\| + \|A_k v - A_k u\| \\ &\leq 2c\|u - v\| + \varepsilon \\ &= (2c+1)\varepsilon\end{aligned}$$

The sequence $(A_n u)$ is a Cauchy sequence, since $\varepsilon > 0$ is arbitrary. Hence $(A_n u)$ converges to a limit Au in the complete space Y. It follows from Proposition 3.1 .2 that A is linear (parce que tu peux alors distribuer les limites et montrer toutes les propriétés de linéarité) and that

$$\|Au\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n u\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|u\|$$

But then A is continuous par le téorème 3.2.1 and $\|A\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|A_n\|$

□

Theorem 3.2.6 (Banach-Steinhaus theorem). Let X be a Banach space. Y a normed space, and let $(A_n) \in \mathcal{L}(X,Y)$ be such that for every $u \in X$.

$$\sup \|A_n u\| < \infty$$

Then

$$\sup_n \|A_n\| < \infty$$

Si la suite $(A_n.u)$ est bornée, alors, la suite $(\|A_n\|)$ est bornée. C'est à dire, on transforme une borne qui dépend de u, $\|A_n u\| \leqslant c(u) < \infty$ en borne qui ne dépend pas de cette variable : $\|A_n u\| \leqslant c\|u\| < \infty$

La contraposée dit que si tu n'est pas borné, tu peux trouver un endroit où ça se passe mal.

Démonstration version 1. Theorem 1.3 .13 applied to the sequence $F_n : u \mapsto \|A_n u\|$ implies the existence of a ball $B(v,r)$ such that

$$c = \sup_n \sup_{u \in B(v,r)} \|A_n u\| < \infty$$

It is clear that for every $y, z \in Y$

$$\|y\| \leq \max(\|z+y\| \cdot \|z-y\|) \ (*)$$

Hence for every n and for every $w \in B(0,r), \|A_n w\| \leq c$, so that

$$\sup_n \|A_n\| \leq c/r$$

□

Démonstration version 2. Assume to obtain a contradiction that sup, $\|A_n\| = +\infty$. By considering a subsequence, we assume that $n3^n \leq \|A_n\|$. Let us define inductively a sequence (u_n) .
We choose $u_0 = 0$. There exists v_n such that $\|v_n\| = 3^{-n}$ and

$$\frac{3}{4}3^{-n} \|A_n\| \leq \|A_n v_n\|$$

By $(*)$, replacing if necessary v_n by $-v_n$, we obtain

$$\frac{3}{4}3^{-n} \|A_n\| \leq \|A_n v_n\| \leq \|A_n (u_{n-1} + v_n)\|$$

We define $u_n = u_{n-1} + v_n$, so that $\|u_n - u_{n-1}\| = 3^{-n}$. It follows that for every $k \geq n$

$$\|u_k - u_n\| \leq \sum_{j \geqslant n}^{\infty} 3^{-n-1} = \frac{1}{3^{n+1}} . \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^{-n}}{2}$$

Hence (u_n) is a Cauchy sequence that converges to u in the complete space X. Moreover,

$$\|u - u_n\| \leq 3^{-n}/2$$

We conclude that

$$\begin{aligned}
\|A_n u\| &\geq \|A_n u_n\| - \|A_n (u_n - u)\| \\
&\geq \|A_n\| \left[\frac{3}{4}3^{-n} - \|u_n - u\|\right] \\
&\geq n3^n \left[\frac{3}{4}3^{-n} - \frac{1}{2}3^{-n}\right] = n/4
\end{aligned}$$

Donc, la suite des $\|A_n u\|$ diverge si la suite $\|A_n\|$ diverge. □

Remarques sur la preuve :

- On prend 3/4 pas parce que ca doit être ce chiffe là mais parce que on veut qqchose proche de 1. On aurait pu avoir $(\varepsilon - 1)$ qui tend vers 1.
- Si on avait choisis 2^{-n}, on ne serait pas arrivés à une contradiction car on aurait eu $\|A_n u\| \geqslant -\frac{n}{2}$ qui tend vers $-\infty$

Corollary 3.2.7 : Let X be a Banach space, Y a normed space, and $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ a sequence conversing simply to A. Then (A_n) is bounded, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, and

$$\|A\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|A_n\|$$

Démonstration. For every $u \in X$, the sequence $(A_n u)$ is convergent, hence bounded, by Proposition 1.2.3. The Banach-Steinhaus theorem implies that suplitall $< \infty$. it follows from Proposition 3.1 .2 that A is linear and

$$\|Au\| = \lim_{n \to \infty} \|A_n u\| \leq \lim_{n \to \infty} \|A_n\| \, \|u\|$$

so that A is continuous and $\|A\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|A_n\|$ The preceding corollary explains why every natural linear mapping defined on a Banach space is continuous. □

Example (Comergence of functionals) : We define the linear continuous functionals f_n on $L^1(]0,1[)$ to be

$$\langle f_n, u\rangle = \int_0^1 u(x)x^n dx$$

since for every $u \in L^1(]0,1[)$ such that $\|u\|_1 = 1$, we have

$$|\langle f_n, u\rangle| < \int_0^1 |u(x)|dx = 1$$

it is clear that

$$\|f_n\| = \sup_{u\in L^1} |\langle f_n, u\rangle| \leq 1$$

Choosing $v_k(x) = (k+1)x^k$, we obtain

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_n, v_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+n+1} = 1$$

It follows that $\|f_n\| = 1$, and for every $u \in L^1\,(0,1D$ such that $\|u\|_1 = 1$,

$$|\langle f_n, u\rangle| < \|f_n\|$$

Lebesgue's dominated convergence theorem implies that (f_n) converges simply to $f = 0$. Observe that

$$\|f_n\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} ||f_n||$$

On a donc montré q'une suite de fonctions linéaire pouvait converger vers une limite linéaire telle que la limite de la norme est différente de la norme de la limite.

3.3 Hilbert Spaces

Hilbert spaces are Banach spaces with a norm derived from a sealar product.
Definition 3.3.1 : A scalar product on the (real) vector space X is a function

$$X \times X \to \mathbb{R} : (u, v) \mapsto (u \mid v)$$

such that
- (S_1) for every $u \in X\backslash(0], (u \mid u) > 0$
- (S_2) for every $u, v, w \in X$ and for every $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha u + \beta v \mid w) = \alpha(u \mid w) + \beta(v \mid w)\}$
- (S_3) for every $u, v \in X, (u \mid v) = (v \mid u)$

We define $||u|| = \sqrt{(u \mid \mu)}$. A (real) pre-Hilbert space is a (real) vector space together with a scalar product on that space.

Proposition 3.3.2 : Let $u, v, w \in X$ and let $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Then
- (a) $(u \mid \alpha v + \beta w) = \alpha(u \mid v) + \beta(u \mid w)$
- (b) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$

Proposition 3.3.3 : Let X be a pre-Hilbert space and let $u, v \in X$. Then
- (a) (parallelogram identity) $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$;
- (b) (polarization identity) (ulv) $= \frac{1}{4}\left[u+v\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|u-v\right\|^2$,
  cette identité nous montre qu'on peut calculer un angle avec une latte :-)
- (c) (Pythagorean identity) $(u|v) = 0 \iff ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Proposition 3.3.4 : Let X be a pre-Hilbert space and let $u, v \in X$. Then
- (a) (Cauchy–Schwarz inequality) $|(u|v)| \leqslant ||u||.||v||$;
- (b) (Minkowski 's inequality) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Démonstration. It follows from $||u+v||^2 = ||u||^2 + 2(u|v) + ||v||^2$ and, $||u-v||^2 = ||u||^2 - 2(u|v) + ||v||^2$. That for $||u|| = ||v|| = 1$,

$$|(u \mid v)| \leq \frac{1}{2}\left(||u||^2 + \|v\|^2\right) = 1$$

(on montre que ça marche pour les vecteurs de longeur 1, puis, on généralise)

Hence for $u \neq 0 \neq v$, we obtain

$$\frac{|(u \mid v)|}{\|u\|\|v\|} = \left|\left(\frac{u}{\|u\|} \mid \frac{v}{\|v\|}\right)\right| \leq 1$$

Ce qui montre l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par $||u+v||^2 = ||u||^2 + 2(u|v) + ||v||^2$, and the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|\mu\|\|M\| + \|M\|^2 = \Big([u\| + \|v\|)^2$$

□

Corollary 3.3.5 : (The function $\|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$ defines a norm on the pre-Hilbert space X and he fonction

$$X \times X \longrightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto (u \mid v)$$

is continuous.

Definition 3.3.6 : A family $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans un espace pré-Hilbertien est une famille orthonormée si

$$\begin{aligned}(e_j|e_k) &= 1, \quad j = k \\ &= 0, \quad j \neq k\end{aligned}$$

C'est vraiment une définition différente que les bases algébriques. Ici, on veut pouvoir prendre des limites tout en continuant à savoir facilement prendre les ièmes coordonées des fonctionelles.

Proposition 3.3.7 (Bessel's inequality). Let (e_n) be an orthonormal sequence in a pre- Hibert space X and let u e X. Then

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(u \mid e_n)|^2 \leq \|u^2\|$$

Démonstration. It follows from the Pythagorean identity that

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \left\|u - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n + \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n\right\|^2 \\ &= \left\|u - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n\right\|^2 + \left\|\sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n\right\|^2 + 2.((u - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n)| \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n)\end{aligned}$$

On remarque que,

$$2.((u - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n)| \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n) = 2. \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n)(u \mid e_n)) - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n)(e_m \mid e_n)(u \mid e_m)) = 0$$

En faisant rentrer la norme au carré dans la somme, on obtient,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \left\|u - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n\right\|^2 + \sum_{n=0}^{k} |(u \mid e_n)|^2 \\ &\geq \sum_{n=0}^{k} |(u \mid e_n)|^2\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.8 : Let $(e_0, \ldots, e_k)$ be a finite orthonomal sequence in a pre-Hilbert space $X, u \in X$, and $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Then

$$\left\|u - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n\right\| \leq \left\|u - \sum_{n=0}^{k} x_n e_n\right\|$$

Cette proposition nous explique que notre $\sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n) e_n$ est une projection sur mes $x_0, \ldots, x_n$. C'est la valeur qui minimise la distance.

Démonstration. La preuve se démontre en dévloppant la carré de l'expression de droite qui est plus grande. □

Definition : Un espace séparable est un espace qui admet une partie dense dénombrable (fait parti des axiomes de dénombrabilité).
↪ Y admet un sous-espace X dense lorsque tout élément de mon espace Y est la limite d'une suite d'éléments de X.

Exemple : L'espace réel est un espace séparable. On a que $\mathbb{R}$ est indénombrable mais, l'ensemble des rationnels est dense car chaque réel peut se faire approcher par une suite de rationnels et c'est aussi un sous-espace dénombrable dans $\mathbb{R}$.

Definition 3.3.13 : A Hilbert space is a complete pre-Hilbert space.
Un espace de Hilbert est un espace pré-Hilbertien qui est complet.

Definition 3.3.9 : A Hilbert basis of a pre-Hilbert space X is an orthonormal sequence generating a dense subspace of X.
↪ Une base de Hilbert est une base othonormée engendrant un espace dense. La suite de vecteurs étant la base de Hilbert est une suite indexée par les naturels. Puisque ceux-ci sont dénombrables et denses, on a que les bases de Hilbert engendrent des espaces denses.

Proposition 3.3.10. Let $(e_n)_{n\in\mathbb{R}}$ be a Hilbert basis of a pre-Hilbert space X and let u $\in X$. Then

(a) $u = \sum_{n=0}^{\infty} (u \mid e_n)\, e_n$ dans X

(b) (Parscral's identity) $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(u \mid e_n)|^2$

Démonstration. a) Let $\varepsilon > 0$. By definition, there exists a sequence $x_0, \ldots, x_j, \in \mathbb{R}$ such that (il existe une approximation)

$$\left\| u - \sum_{n=0}^{,} x_n e_n \right\| < \varepsilon$$

It follows from the preceding proposition that for $k \geq j.$, (celle-ci est une meilleure approximation)

$$\left\| u - \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n)\, e_n \right\| < \varepsilon$$

Hence $u = \sum_{n=0}^{\infty} (u \mid e_n)\, e_n$.

a) Parce que la norme est une fonction continue, on a

$$\begin{aligned} u &\leq \lim_{k\to\infty} \| \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n)\, e_n \|^2 \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \| (u \mid e_n)\, e_n \|^2 \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n)^2 . |e_n|^2 \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (u \mid e_n)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (u \mid e_n)^2 \end{aligned}$$

We characterize pre-Hilbert spaces having a Hilbert basis.

□

Proposition 3.3.11 : Assume the existence of a sequence (f_j) generating a dense subset of the normed space X. Then X is separable.

Démonstration. By assumption, the space of (finite) linear combinations of (f_j) is dense in X. Hence the space of (finite) linear combinations with rational coefficients of (f_j) is dense in X. Since this space is countable, X is separable.

□

Proposition 3.3.12 : Let X be an infinite-dimensional pre-Hilbert space. The following properties are equivalent :

(a) X is separable ;

(b) X has a Hilbert basis.

$\hookrightarrow$ Si X est in espace de Hilbet, Alors, X est séparable (dense et dénombrable) $\Longleftrightarrow$ X a une base de Hilbert.

Démonstration. By the preceding proposition, (b) implies (a). Car si X a une base de Hilbert, alors, l'espace est dénombrble. De plus, $\{\sum_{n=0}^{k} x_n e_n\}$ est dense car c'est une base d'un espace de Hilbert qui par définition engendre un espace dense. Dès lors, notre espace est dénombrable et dense, il est alors séparable. Inversément, si X is separable il contient une partie dense et dénombrable, donc, it contains a sequence $(f,)$ generating this dense subspace. We may assume that $(f,)$ is free. On va partir de l'espace dense pour créer une famille libre de vecteurs grâce au procédé de Gram-shmidt. Since the dimension of X is infinite, the sequence (f_j) is infinite. We define by induction (procédé de Gram-Schmidt) the sequences (g_n) and (e_n). The sequence (e_n) generated from (f_a) by the Gram-Schmidt orthonormalization process is a Hilbert basis of X. Cette orthogonalisation se fait-elle à l'infini. □

A noter que en aucun cas, une suite formée des vecteurs de base va converger. Ils sont tous orthogonaux et donc, sont à une distance $\sqrt(2)$ les uns des autres. C'est $||u - \sum_{n=0}^{\infty} (u \mid e_n) e_n||$ qui va converger.

Theorem 3.3.14 (Ries -Fischer) Let (e_n) be an orthonormal sequence in the Hibert space X. The sequence $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ converges if and only if $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$ (converge). Then

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

Ce théorème nous dit qu'a chaque fois qu'on a une suite de termes dont la somme de chaque composante au carré est finie, on peut lui associer un vecteur et inversément.

Démonstration. Define $S_k = \sum_{n=0}^{k} c_n e_n$. The Pythagorean identity implies that for $j < k$,

$$\|S_k - S_j\| = \| \sum_{n=j+1}^{k} c_n e_n\|^2 = \sum_{n=j+1}^{k} c_n^2$$

Hence,

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ (j<k)}} \|S_k - S_j\| = 0 \Longleftrightarrow lim_{j\to\infty(j<k)} \sum_{n=j+1}^{k} c_n^2 = 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = 0$$

Since X is complete, (S_k) comerges if and only if $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$, Then $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n = \lim_{t\to\infty} S_t$, and by continuité de la norme,

$$\| \lim_{k\to\infty} S_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|S_k\|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

□

Et de plus, il est bon de savoir que tout les espaces de Hilbert DE DIMENSION INFINIE ET SEPARABLES sont isomorphes les uns aux autres. On peut le montrer en prenant une base de chaque espaces et en envoyant par une application linéaire continue les composantes d'une base à l'autre. Par ce théorème de Reis-Fischer, ça va marcher

3.3.1 Example Espaces Hilbert

Examples. 1. Let μ be a positive measure on Ω. We denote by $L^2(\Omega, \mu)$ the quotient of

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mu) = \left\{u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu) : \int_D |\mu|^2 d\mu < \infty\right\}$$

by the equivalence relation "equality almost everywhere." If $u, v \in L^2(\Omega, \mu)$, then $u + v \in L^2(\Omega, \mu)$. Indeed, almost every where on Ω, we have

$$|u(x) + v(x)|^2 \leq 2\left(|u(x)|^2 + |v(x)|^2\right)$$

We define the scalar product

$$(u \mid v) = (\int_{\Omega} |u|^2 d\mu)^{\frac{1}{2}}$$

on the space $L^2(\Omega, \mu)$.
The scalar product is well defined, since almost everywhere on Ω.

$$|u(x)v(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|u(x)|^2 + |v(x)|^2\right)$$

By definition,

$$\|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |u|^2 d\mu\right)^{1/2}$$

Convergence respect to $||.||_2$ is convergence in quadratic mean. We will prove in Sect. 4.2, on Lebesgue spaces, that $L^2(\Omega, \mu)$ is a Hilbert space. If $\mu(\Omega) < \infty$, it follows from the Cauchy-Schwarz inequality that for every $u \in L^2(\Omega, \mu)$.

$$\|u\|_1 = \int_{\Omega} |u| d\mu \leq \mu(\Omega)^{1/2} \|u\|_2.$$

Hence $L^2(\Omega, \mu) \subset L^1(\Omega, \mu)$, and the canonical injection is continuous.

Example 2. Let dx be the Lebesgue measure on the open subset Ω of R^N. We denote by $L^2(\Omega)$ the space $L^2(\Omega, dx)$. Observe that

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{L}^2(]1, \infty[) \mathbb{L}^1(]1, \infty[) \text{ and } \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{L}^2(]0, 1[) \mathbb{L}^1(]0, 1[)$$

If $m(\Omega) < \infty$, the comparison theorem implies that for every $u \in BC(D)$.

$$\|u\|_2^2 = \int_{\Omega} u^2 dx \leq m(\Omega) \|u\|_{\infty}^2.$$

3.4 Spectral Theory

Spectral theory allows one to diagonalize symmetric compact operators.

Definition 3.4.1. Let X be a real vector space and let $A : X \to X$ be a linear mapping. The eigenvectors corresponding to the eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R}$ are the nonzero solutions of $(u \neq 0)$

$$\text{Au} = \lambda u$$

The multiplicity of λ is the dimension of the space of solutions. The eigenvalue λ is simple if its multiplicity is equal to 1. The rank of A is the dimension of the range of A.

Definition 3.4.2. Let X be a pre-Hilbert space. A symmetric operator is a linear mapping $A : X \to X$ such that for every $u, v \in X, (Au \mid v) = (u \mid Av)$

Exemple :
Soit $X = L^2(]0, 1[)$ et $(Au)(x) = x.u(x)$

$$\|A\|^2 = \int_0^1 |Au|^2 = \int_0^1 |xu(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u(x)|^2 = \|u\|^2$$

Car $x \in [0, 1]$ et si $Au = \lambda u$, $\lambda u(x) = x.u(x)$ presque partout,

$$(\lambda - x).(u(x)) = 0 \text{ persque partout, donc } u(x) = 0 \text{ presque partout.}$$

Proposition 3.4.3 : Let X be a pre-Hilbert space and $A : X \to X$ a symmeric continuous operator. Then

$$\|A\| = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} |(Au \mid u)|$$

Démonstration. It is clear that

$$a = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} |(Au \mid u)| \leq b = \sup_{\substack{u,v \in X \\ \|u\|=\|v\|=1}} |(Au \mid v)| = \|A\|$$

If $\|u\| = \|v\| = 1$, and $\|A\| > a$ it follows from the parallelogram identity that puisque $(A\frac{w}{||w||}|\frac{w}{||w||}) \leqslant a.||w||^2$

$$\begin{aligned}
|(Au|v)\ | &= \frac{1}{4}|(A(u+v) \mid u+v) - (A(u-v) \mid u-v)) \\
&\leq \frac{a}{4}\left[\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\right] \\
&= \frac{a}{4}\left[2\|u\|^2 + 2\|\ v\|^2\right] = a
\end{aligned}$$

Hence, par définition de suprémum, $b = a$. □

Corollary 3.4.4. Under the assumptions of the preceding proposition, then exist a sequence $(u_n) \subset X$ such that

$$\|u_n\| = 1, \|Au_n - \lambda_1 u_n\| \longrightarrow 0, |\lambda_1| = ||A||$$

Démonstration. Consider a maximizing sequence (u_n) :

$$\|u_n\| = 1, |(Au_n \mid u_n)| \longrightarrow \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\|=1}} |(Au \mid u)| = \|A\|$$

On a alors que,

$$\|A\| \geqslant |(A.u_n|u_n)| \geqslant \|A\| - \frac{1}{n}$$

Il existe un λ_1 et une sous-suite (toujours notée u_n) tel que en passant à celle-ci, si besoin, we can assume that $(Au_n \mid u_n) \longrightarrow \lambda_1$, $|\lambda_1| = \|A\|$. Hence

$$\begin{aligned}
0 \leq \|Au_n - \lambda_1 u_n\|^2 &= \|Au_n\|^2 - 2\lambda_1 (Au_n \mid u_n) + \lambda_1^2 \|u_n\|^2 \\
&\leq 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 (Au_n \mid u_n) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, je satisfait de mieux en mieux à mon équation de vecteurs propres. □

Remarque : c'est ce qu'il a fait au tutora mais ca m'as l'air très douteux On peut definir la notion de spectre réel d'un opérateur comme l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : (A - \lambda id) \text{ n'a pas d'inverse linéaire continu}\}.$$

Que sait-on sur le spectre des opérateurs linéaires symétriques ? La compacité joue-t-elle un rôle ?
On a $||u_n||$ un point et $||Au_n - \lambda_1 u_n||$ les images qui tendent vers 0. Puisqu'on resrein de manière non-bornée la distance, on aura une réciproque qui va grandir de manière non bornée.
Pour $\lambda \in \rho$, et en supposant qu'on avait une réciproque continue,

$$\begin{aligned}
v_n &= (A - \lambda_1 Id)u_n \\
v_n(A - \lambda_1 Id)^{-1} &= u_n
\end{aligned}$$

dès lors,

$$||(A - \lambda_1 Id)^{-1}|| \geqslant \frac{||(A - \lambda_1 Id)^{-1} v_n||}{||v_n||} = \frac{||u_n||}{||(A - \lambda_1 Id)u_n||} \longrightarrow \infty$$

Que la fonction A soit compacte on a que la fonction n'est pas inversible.

Definition 3.4.5. Let X and Y be normed spaces. A mapping $A : X \to Y$, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ is compact if the set $\{Au : u \in X, \|u\| \leq 1\}$ is precompact in Y. (envoie la boule unité sur un précomparct dans Y)
↪ Un ensemble $C \in Y$ est précompact lorsque toute suite de C admet une sous-suite de Cauchy.
Aussi, si Y est complet, alors, $C \subseteq Y$ sera précompact ssi la fermeture de C est compacte, $\overline{C}$.
↪ A est compact ssi il existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$ tel que (A_n) est de rang fini et $||A_n - A|| \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition : Toute fonction linéaire compacte est continue.

Démonstration. Si A est précompacte, alors, $\{Au : u \in X, \|u\| \leq 1\}$ is précompact dans Y. Puisque tout précompact est borné, on a que

$$\sup_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|\leq 0}} \|Au\| < \infty$$

Dès lors, A is continuous. (reste à montrer que tout précompact est borné....) □

Theorem 3.4.6 : Let X be a Hilbert space and let $A : X \to X$ be a symmetric compact opérator. Then there exists an eigenvalue λ_1 of A such that $|u_1| = ||A||$.

Démonstration. We can assume that $A \neq 0$. The preceding corollary implies the existence of a sequence $(u_n) \subset X$ such that

$$\|u_n\| = 1, ||Au_n - \lambda_1 u_n \| \to 0, |u_1 | = \| A\|$$

Passing if necessary to a subsequence, we can assume that $Au_n \to v$. Parce que l'espace d'arrivée est pré-compact.
On a alors, $\lambda_1.u_n = Au_n - (Au_n - \lambda_1 u_n) \longrightarrow v$.
Hence $u_n \to u = \lambda_1^{-1} v$, and $Au = \lambda_1 u$ et donc, $||A|| = |\lambda_1|$ car $||u|| = 1$. □

Theorem 3.4.7 (Poincare's principle). Let X be a Hilbert space and $A : X \to X$ a symmetric compact operator with finite rank. Let there be given the eigenvectors $(e_1, \ldots, e_n)$ and the corresponding eigenvalue $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$. Then there exists an eigenvalue λ_n of A such that

$$|\lambda_n| = max\{|(Au|u)| : u \in X, ||u|| = 1, (u|e_1) = ... = (u|e_{n-1}) = 0\}$$

and $\lambda_n \to 0, n \to \infty$
On cherche un premier vecteur propre, et après, on recherche des valeurs propres dans l'espace othogonal aux vecteurs propres déjà trouvé et ainsi de suite... Cela a pour but de montrer que si A est symmétrique et compacte, les valeurs propres vont tendre vers 0.

Démonstration. The closed subspace of X

$$X_n = \{u \in X : (u \mid e_i) = 0, i \in \{1, ..., n-1\}\}$$

is invariant by $A, A(X_n) \subseteq X_n$, notons que X_n devient de plus en plus petit à force que n est grand car u doit être orthogonal à de plus en plus de directions, de plus c'est est un espace de Hilbert. Indeed, if $u \in X_n$ and $1 \leq j \leq n-1$, then

$$\left(Au \mid e_j\right) = \left(u|Ae_j\right) = \lambda_j \left(u \mid e_j\right) = 0$$

Hence $A_n = A|_{x_n}$ is a nonzero symmetric compact operator, and there exist an eigenvalue λ_n of A_n such that $|\lambda_1| = \|A_n\|$ and a corresponding eigenvector $e_n \in X_n$ such that $\|e_n\| = 1$. By construction, the sequence (e_n) is orthonormal, and the sequence $(|\lambda_n|)$ is decreasing parce que l'espace est de plus en plus petit, et donc son maximum aussi.
Hence, $|\lambda_n| \to d, n \to \infty$, and for $j, \neq k$,

$$||Ae_j - Ae_k||^2 = \lambda_j^2 - \lambda_k^2 \to 2d^2 \text{ pour } j, k \to \infty$$

Since A is compact et que donc, j'ai une sous-suite de Cauchy qui converge et que si d n'est pas 0, cela impliquerait que mes valeurs seraient à une distance de plus en plus grande, or, il existe cette sous-suite de Cauchy qui converge, donc $d = 0$ □

Theorem 3.4.8 : Under the assumptions of the preceding theorem, for every $u \in X$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} (u \mid e_n) e_n$ converges and $u - \sum_{n=1}^{\infty} (u \mid e_n) e_n$ belongs to thekernel of A :

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u \mid e_n) e_n \quad (*)$$

$$A(u - \sum_{n=1}^{\infty} (u \mid e_n) e_n) = 0$$

Démonstration. For every $k \geq 1, (u - \sum_{n=1}^{1} (u \mid e_n) e_n) \in X_{k+1}$. It follows from Proposition 3.3 .8 that

$$\left\| u - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n (u \mid e_n) e_n \right\| \leq \|A_{k+1}\| \left\| u - \sum_{n=1}^{k} (u \mid e_n) e_n \right\| \leq \|A_{k+1}\| \|u\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Bessel's inequality implies that $\sum_{n=1}^{\infty} |(u \mid e_n)|^2 \leq \| u \|^2$. We deduce from the Riesz-Fischer theorem that $\sum_{n=1}^{\infty} (u \mid e_n) e_n$ converges to $v \in X$. since A is continuous,

$$Av = lim_{k\to\infty} A(\sum_{n=1}^{k} (u|e_n) e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u|e_n) e_n = Au$$

and $A(u - v) = 0$ Formula $(*)$ is the diagonalization of symmetric compact operators. □

3.5 Remarques sur le chapitre 3 : NORMES

- En dimension finie, on peut montrer que toutes les normes sont équivalentes à une constante près.
- Un ensemble peut être mesurable sans être intégrable.
- Le lemme de fatou ne demandes quasi rien comme condition si ce n'est la positivité et l'integrabilité.
- We denote by $L^1(\Omega, \mu)$ the quotient of $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ by the equivalence relation "equality almost everywhere." $L^1(\Omega, \mu)$ est l'espace des fonctions intégrables par rapport à mu, sur Oméga, c'est une classe d'équivalence contrairement au $\mathcal{L}$, mais si on le considère comme des fonctions c'est bien.
- L'espace C (fonctions continues) d'un compact est la même chose que l'espace BC car si t'es continu sur un compact, t'es borné.
- On peut faire perdre la propriété de Banach à un espace en changeant sa norme.
- Si on a une limite, celle-ci est inférieure et supérieure. Si on ne sait pas si on a une limite ou pas,on peut toujours écrire lim inf ou lim sup.

$$\lim_{n\to\infty} inf a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup_k \inf_{n\geqslant k} a_k$$
$$\lim_{n\to\infty} sup a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf_k \sup_{n\geqslant k} a_k$$

  Attention, ne pas oublier que la somme des limites n'est pas forcément la limite des sommes ! ! (exemple (-1)-(1)).
- Si une propriété est bidimensionelle, on a qu'a regarder ce qui se passe dans $\mathbb{R}^2$ pour l'appliquer aux autres espaces.
- Il existe dans tout espace (Algébrique ou pas), des bases infinies. Dans les espaces algébriques, on fait des sommes finies (combili) pour engendrer tout des éléments de mes espaces. En ajoutant une dimension analytique de convergence sur ces bases, on peut obtenir des sommes infinies pour engendrer mon espace de dimension infinie. Dès lors, les bases algébriques ne seront jamais aussi efficaces que des bases de Hilbert pour créer des éléments de mon espace de dimension infinie car elles ne savent que faire des sommes finies.
  Les bases de Hilbert, ont la convergence $\left\| u - \sum_{n=1}^{k} (u \mid e_n) e_n \right\|$ pour tout u et sont dénombrables.
- La boule unité n'est pas compacte dans les espaces de Hilbert. Si on prend une suite orthonormée, on a que la distance entre chaque points vaut $\sqrt{2}$. On a donc que toute suite orthonormée ne sera jamais de Cauchy (on prend $\varepsilon = 1$ et y'a déjà un soucis). Donc, La boule unité ne sera jamais pré-compacte et donc, jamais compacte....
- Toute suite convergente est une suite d'éléments infinis car les suites finies ne convergent pas.

Chapitre 4

Lebesgue Spaces

4.1 Convexité

The notion of convexity plays a basic role in functional analysis and in the theory of inequalities.
Definition 4.1.1. : A subset C of a vector space X is convex if for every $u, v \in C$ and every $0 < \lambda < 1$, we have $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$
Remarques :

- Si on l'étend avec ∞ elle reste convexe. Parce que c'est juste comme si on avait plus de conditions.
- A point x of the convex set C is internal if for every $y \in X$, there exists $\varepsilon > 0$ such that $x + \varepsilon y \in C$ (y'a une petite boule autour). The set of internal points of C is denoted by int$C$.
- A subset C of X is a cone if for every $x \in C$ and every $\lambda > 0$, we have $\lambda x \in C$.
- Let C be a convex set. A function $F : C \to]-\infty, +\infty]$ is convex if for every $x, y \in C$ and every $0 < \lambda < 1$, we have
$$F((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)$$
- A function $F : C \to [-\infty, +\infty[$ is concave if $-F$ is convex.
- Let C be a cone. A function $F : C \to]-\infty, +\infty]$ is positively homogeneous if for every $x \in C$ and every $\lambda > 0$, we have
$$F(\lambda x) = \lambda F(x)$$
Cette fonction satisfait l'inégalité triangulaire, l'homogénéité, enfait, on a une semi-norme.
- Un ensemble convexe et homogène est stable par combinaisons linéaires. De plus, si on prend le sup ou l'inf d'une famille convexe ou homogène, on a denouveau une famille convexe ou homogène.

Examples.

- Every linear function is convex, concave, and positively homogeneous.
- Every norm is convex and positively homogeneous.
- Open balls and closed balls in a normed space are convex.

RAPPEL : Un hyperplan $H \in X$ est un sous-espace de codimension 1. On peut alors écrire un hyperplan comme une somme directe $H = X \oplus \lambda\mathbb{R}$, c'est pas forcément obligé que ce soit $\mathbb{R}$ mais on ajoute juste une dimension quoi (ça peut être $\mathbb{Z}$ si on est dns des entiers)c'est l'espace engendré par les multiples de lambdas appartenant à $\mathbb{R}$. On a par exemple que les plans sont les hypetplans de $\mathbb{R}^3$.

Lemma 4.1.3. : Let Y be a hyperplane of a real vector space $X, f : Y \to \mathbb{R}$ linear and $F : X \to]-\infty, +\infty]$ convex and positively homogeneous such that $f \leq F$ on Y and
$$Y \cap \text{int}\{x \in X : F(x) < \infty\} \neq \phi$$
Then there exists $g : X \to \mathbb{R}$ linear such that $g \leq F$ on X and $g|_Y = f$

Démonstration. There exists $z \in X$ such that $X = Y \oplus \mathbb{R}z$. We must prove the existence of $c \in \mathbb{R}$ such that for every $y \in Y$ and every $t \in \mathbb{R}$
$$\langle f, y\rangle + ct \leq F(y + tz) \Leftrightarrow \frac{\langle f, x\rangle}{t} + c \leq F(\frac{x}{t} + z)$$
En faisant la même chose pour l'inéquation de gauche, since F is positively homogeneous, it suffices to verify that for every $u, v \in Y$,
$$\langle f, u\rangle - F(u - z) \leq c \leq F(v + z) - \langle f, v\rangle$$

For every $u, v \in Y$, we have by assumption that

$$\langle f, u\rangle + \langle f, v\rangle \leq F(u+v) \leq F(u-z) + F(v+z)$$

We have,

$$\langle f, u\rangle - F(u-z) \leq F(u+v) \leq F(v+z) - \langle f, v\rangle$$

We define

$$a = \sup_{u\in Y}\langle f, u\rangle - F(u-z) \leq b = \inf_{v\in Y} F(v+z) - \langle f, v\rangle$$

Nous voulons maintenant montrer que a et b sont finis. Let $u \in Y \cap$ int $\{x \in X : F(x) < \infty\}$. For t large enough ,$F(tu-z) = tF(u-z/t) < +\infty$. On a que u est dans l'intérieur de F donc malgré les perturbations, F sera finie. Hence $-\infty < a < c$. Similarly, $c < b < +\infty$. We can choose any $c \in [a, b]$ car l'intervalle est fini et non vide. Pour touver $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ on met $t = 0$ dans la première équation ce qui fera disparaître les z. □

Theorem 4.1.4. (Hahn-Banach theorem) : Let Y be a subspace of a separable normed space X and let $f \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$. Then there exists $g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ such that $\|g\| = \|f\|$ and $g|_Y = f$
↪ Ce théorème nous dit qu'on peut étendre une fonction en préservant sa norme.

Démonstration. L'idée de la preuve est d'augmenter la dimension de nos espaces par récurrance car grâce au lemme 4.1.3, on sait qu'on peut fabriquer une extension sur un espace avec une dimension en plus.
Attention, ajouter une dimansion à un espace de dimension infinie, c'est avoir une somme directe avec une dimension en plus.
En ajoutant des dim ensions à chaque fois, on pourrait croire qu'on va tomber sur l'espace tout entier mais enfait, on va tomber sur un sous-espace dense.
Let (z_n) be a sequence dense in X. We define $f_0 = f, Y_0 = Y$, and $Y_n = Y_{n-1} + \mathbb{R}z_n, n \geq 1$. Let there be $f_n \in \mathcal{L}(Y_n, \mathbb{R})$ such that $\|f_n\| = \|f\|$ and $f_n|_{Y_{n-1}} = f_{n-1}$
If $Y_{n+1} = Y_n$, we define $f_{n+1} = f_n$ (si la dimension que j'ajoute était déjà dans mon espace alors je passe, étant la fonction par elle-même). If this is not the case (sinon, j'utilise le lemme précédent), the preceding lemma implies the existence of $f_{n+1} : Y_{n+1} \to \mathbb{R}$ linear such that $f_{n+1}|_{Y_n} = f_n$ and for every $x \in Y_{n+1}$

$$\langle f_{n+1}, x\rangle \leq \|f\|\|x\|$$

A force d'étendre notre dimension, et de fabriquer des extensions, on a une fonction qui est définie sur la réunion dénombrable de tout mes espaces (qui est toujours un sous-espace verctoriel car chaqun de mes Y_n est un sous-espace de $Y_n + 1$.
On $Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ we define h by $h|_{Y_n} = f_n, n \geq 0$. The space Z is dense in X $h \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{R})$ car tout les z_n sont dans Y_n par définition et donc, puisque $z_n \in Y_n$, $z_n \in Z$. Puisque les z_n forment un ensemble dense, si un espace plus grand contient un ensemble dense, alors il est de nouveau dense.
Moreover,$\|h\| = \|f\|$, and $h|_Y = f$. Finally, by Proposition 3.2.3, there exists $g \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ such that $\|g\| = \|h\|$ and $g|_Z = h$. □

Corollary 4.1.5 (norme sur un espace normé et séparable) : Let X be a separable normed space. Then for every $u \in X$,

$$\|u\| = \max_{\substack{f\in X' \\ \|f\|=1}}\langle f, u\rangle = \max_{\substack{f\in X' \\ f\neq 0}} \frac{\langle f, u\rangle}{\|f\|}.$$

Je peux connaître la norme d'un élément en l'évaluant avec toutes les fonctionnelles de norme 1. En fait, je peux calculer la norme de u sans la calculer. A partir de la notion de norme sur le dual, on arrive à calculer la norme de u.
Le maximum est toujours atteint donc sup=max.

The next theorem is due to P. Roselli and the author. Let us define

$$C_+ = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}$$

Theorem 4.1.6. (Convexity inequality) : Let $F : C_+ \to \mathbb{R}$ be a positively homogeneous function (se comporte comme une norme mais prend des points en l'infini) and let $u_j \in L^1(\Omega, \mu)$ be such that $u_j \geq 0$,

$$\int_\Omega u_j d\mu > 0, j = 1, 2.$$

If F is convex, then

$$F\left(\int_\Omega u_1 d\mu, \int_\Omega u_2 d\mu\right) \leq \int_\Omega F(u_1, u_2)\, d\mu$$

If F is concave, the reverse inequality holds.

Démonstration. We define $F(x) = +\infty, x \in \mathbb{R}^2 \backslash C_+$, and $y_j = \int_\Omega u_j d\mu, j = 1,2$. Lemma 4.1 .3 implies the existence of $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that,

$$F\left(y_1, y_2\right) = \alpha y_1 + \beta y_2 \text{ and, for all } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \alpha x_1 + \beta x_2 \leq F\left(x_1, x_2\right)$$
$$(*)\text{les x sont dans le complémentaire de } C_+$$

La condition ci-dessus est plausible car notre fonction est convexe et donc, il est toujours possible de faire passer une droite en-dessous ou égal à ma fonction. For every $0 \leq \lambda \leq 1$, we have par homogénéité,

$$\alpha(1-\lambda) + \beta\lambda \leq F(1-\lambda, \lambda) \leq (1-\lambda)F(1,0) + \lambda F(0,1)$$

so that $c = \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |F(1-\lambda, \lambda)| < \infty$ (on sait qu'il est fini par convexité) since

$$|F\left(u_1, u_2\right)| \leq |u_1||u_2| F\left(\frac{u_1}{u_1+u_2}, \frac{u_2}{u_1+u_2}\right) \leq c\left(u_1 + u_2\right)$$

the comparison theorem implies that $F\left(u_1, u_2\right) \in L^1(\Omega, \mu)$ (elle est intégrable). We conclude from $(*)$ that

$$\begin{aligned} F\left(\int_\Omega u_1 d\mu, \int_\Omega u_2 d\mu\right) &= \alpha \int_\Omega u_1 d\mu + \beta \int_\Omega u_2 d\mu \\ &= \int_\Omega \alpha u_1 + \beta u_2 d\mu \\ &\leq \int_\Omega F\left(u_1, u_2\right) d\mu \end{aligned}$$

□

Lemma 4.1.7. Let $F : C_+ \to \mathbb{R}$ be a continuous and positively homogeneous function. If $F(.,1)$ is convex (respectively concave), then F is convex (respectively concave).

En gros, si ma fonction est continue et positivement homogène, alors, on peut vérifier la convexité sur une droite horizontale de mon domaine.

Démonstration. Assume that $F(.,1)$ is convex. It suffices to prove that for every $x, y \in C_+$ $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$. The preceding inequality is equivalent to

$$F\left(\frac{x_1+y_1}{x_2+y_2}, 1\right) \leq \frac{x_2}{x_2+y_2} F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) + \frac{y_2}{x_2+y_2} F\left(\frac{y_1}{y_2}, 1\right)$$

□

Remarque :
Define F on $\mathbb{R}^2$ by

$$\begin{aligned} F(y,z) &= -\sqrt{yz}, \\ &= +\infty, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2 \backslash C_+ \end{aligned}$$

The function F is positively homogeneous and, by the preceding lemma, is convex on C_+, hence on $\mathbb{R}^2$. It is clcar that $0 = F$ on $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$. There is no lincar function $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ such that $g \leq F$ on $\mathbb{R}^2$ and $g = 0$ on Y The convexity inequality implies a version of the Cauchy-Schwarz inequality : if $v, w \in L^1(\Omega, \mu)$, then,

$$\boxed{\int_\Omega |vw|^{1/2} d\mu \leq \left(\int_\Omega |v| d\mu\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w| d\mu\right)^{1/2}}$$

Definition 4.1.8. : Let $1 < p < \infty$. The exponent p' conjugate to p is defined by $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On the Lebesgue space

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{u \in \mathcal{M}(\Omega, \mu) : \int_\Omega |u|^p d\mu < \infty\right\}$$

we define the norm

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Theorem 4.1.9. Let $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

(a) (Hölder's inequality.) Let $v \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ and $w \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega, \mu)$. Then

$$\int_\Omega |vw| d\mu \leq \|v\|_p \|w\|_{p'}$$

On a donc que $|wv| \in L^1$.

(b) (Minkowski's inequality.) Let $v, w \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. Then

$$\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$$

(c) (Hanner's inequalities.) Let $v, w \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. If $2 \leq p < \infty$, then

$$\|v + w\|_p^p + \|v - w\|_p^p \leq \left(\|v\|_p + \|w\|_p\right)^p + \left|\|v\|_p - \|w\|_p\right|^p$$

If $1 < p \leq 2$, the reverse inequality holds.

Démonstration. On C_+, we define the continuous positively homogeneous functions

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= x_1^{1/p} x_2^{1/p'} \\
G(x_1, x_2) &= \left(x_1^{1/p} + x_2^{1/p}\right)^p \\
H(x_1, x_2) &= \left(x_1^{1/p} + x_2^{1/p}\right)^p + \left|x_1^{1/p} - x_2^{1/p}\right|^p
\end{aligned}$$

- Inequality (a) follows from the convexity inequality applied to F and $u = \left(|v|^p, |w|^{p'}\right)$.
- Inequality (b) follows from the convexity inequality applied to G and $u = (|v|^p, |w|^p)$.
- Finally, inequalities (c) follow from the convexity inequality applied to H and $u = (|v|^p, |w|^p)$.
- When $v = 0$ or $w = 0$, the inequalities are obvious.

Vérifions maintenant que nos fonctions sont bien convexes. Pour ce faire, nous allons utiliser le lemme 4.1.7, si nos fonctions sont positivement homogènes et continues, alors, si $F(., 1)$ est convexe ou concave, alors, F sera convexe ou concave. Montrons ceci : Elles sont positivement homogène et continues.
On $[0, +\infty[$, we define $f = F(., 1), g = G(., 1), h = H(., 1)$. It is easy to verify that

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1-p}{p^2} x^{\frac{1}{p}-2} \\
g''(x) &= \frac{1-p}{p} x^{-\frac{1}{p}-1} \left(x^{-\frac{1}{p}} + 1\right)^{p-2} \\
h''(x) &= \frac{1-p}{p} x^{-\frac{1}{p}-1} \left[\left(x^{-\frac{1}{p}} + 1\right)^{p-2} - \left|x^{-\frac{1}{p}} - 1\right|^{p-2}\right]
\end{aligned}$$

Hence f and g are concave. If $2 \leq p < \infty$, then h is concave, and if $1 < p \leq 2$, then h is convex (on le remarque en utilisant l'inégalité triangulaire). It suffices then to use the preceding lemma. □

Effectivement, avoir une dérivée secondes positives donne une dérivée croissante et donc, une fonction convexe.

$$\begin{aligned}
f((1-\lambda)x + \lambda y) &= f(x) + \int f'(z)dz \\
&\leq f(x) + \lambda(y-x) f'((1-\lambda)x + \lambda y) \\
f((1-\lambda)x + \lambda y) &= f(y) - \int_{(1-\lambda)x+\lambda y}^{y} f'(z)dz \\
&\leq f(y) - (1-\lambda)(y-x) f'((1-\lambda)x + \lambda y) \\
f((1-\lambda)x + \lambda y) &\leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)
\end{aligned}$$

Mais attention, on est pas obligés d'avoir une dérivée seconde pour avoir une fonction convexe. Par exemple, $f(x) = |x|$ est une fonction convexe.
Si $p \in]0, 1[$, alors, les deux premières inégalités s'inversent. De plus, p' sera négatif ! ! On va avoir l'inégalité triangulaire à l'envers mais cela n'implique pas que nous n'avons plus une norme, on pourrait avoir l'éalité partout. Mais en réalité, on peut montrer que enfait ca ne sera pas une norme.

4.2 Lebesgue Spaces

Let $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ be a positive measure on the set Ω.

Definition 4.2.1 : Let $1 \leq p < \infty$. The space $L^P(\Omega, \mu)$ is the quotient of $\mathcal{L}^P(\Omega, \mu)$ by the equivalence relation "equality almost every where." By definition,

$$\|u\|_{L^P(\Omega,\mu)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

When dx is the Lebesgue measure on the open subset Ω of $\mathbb{R}^N$, the space $L^p(\Omega, dx)$ is denoted by $L^p(\Omega)$.
In practice, we identify the elements of $L^p(\Omega, \mu)$ and the functions of $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$.
De plus, notons qu'on quotiente l'espace pour ne pas avoir plusieurs fonction ayant une norme nulle alors qu'elles sont nulles presque partout et pas partout. Parce que dans $\mathcal{L}^P(\Omega, \mu)$ il n'y a pas que les fonctions nulles qui ont une norme nulle.

Remarque : On peut retrouver la norme p sur $\mathbb{R}^n$. Si on prend $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$, avec $\mu(A) = \#A$, la mesure de comptage. Alors,

$$\int_\Omega |u|^p \, d\mu = \sum_{i=1}^m |u(i)|^p$$

Proposition 4.2.2 : Let $1 \leq p < \infty$. Then the space $L^p(\Omega, \mu)$ with the norm $\|.\|_p$ is *a* normed space.

Démonstration. Minkowski's inequality implies that if $u, v \in L^p(\Omega, \mu)$, then $u + v \in L^P(\Omega, \mu)$ and

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

It is clear that if $u \in L^p(\Omega, \mu)$ and $\lambda \in \mathbb{R}$, then $\lambda u \in L^p(\Omega, \mu)$ and $\|\lambda u\|_p = |\lambda| \|u\|_{p^*}$
Finally, if $\|u\|_p = 0$, then $u = 0$ almost everywhere and $u = 0$ in $L^p(\Omega, \mu)$ □

Proposition 4.2.3 (Generalized Hölder's inequality) : Let $1 < p_j < \infty, u_j \in L^{p_i}(\Omega, \mu), 1 \leq j \leq k$, and $1/p_1 + \ldots + 1/p_k = 1$. Then $\prod_{j=1}^k u_j \in L^1(\Omega, \mu)$ and

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^k |u_j| \, d\mu \leq \prod_{j=1}^k \|uj\|_{p_j}$$

Démonstration. Montrons cette inégalité par induction. On sait par l'inégalité de Hölder que pour $k = 2$, l'inégalité est vraie. Supposons maintenant qu'elle est vraie pour $k \geq 2$ et montrons pour $k + 1$.
Posons, (on met les $1/p$ au même dénominateur)

$$q = \frac{\prod_{j=1}^k |p_j|}{\sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i}^k |p_j|}$$

et

$$p'_j = p_j/q$$

On observe que $u_j^{\frac{p_j}{p'_j}} \in L^{p'_j}$. Comme $\frac{1}{p_1{}'} + \cdots + \frac{1}{p'_k} = 1$, par l'hypothèse de récurrance posée pour les k premiers termes, $\prod_{j=1}^k |u_j|^q \in L^1(\Omega, \mu)$ et donc, $\prod_{j=1}^k u_j \in L^q(\Omega, \mu)$ et

$$\left\| \prod_{j=1}^k u_j \right\|_q \leq \prod_{j=1}^k ||u_j||_{p_j}$$

Nous déduisons de l'inégalité de Hölder que $\prod_{j=1}^{k+1} u_j \in L^1(\Omega, \mu)$ et,

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^{k+1} u_j d\mu \leq \left\| \prod_{j=1}^k u_j \right\|_q ||u_{k+1}||_{p_{k+1}} \leq \prod_{j=1}^{k+1} ||u_j||_{p_j}$$

□

Proposition 4.2.4 (Interpolation inequality) : Let $1 \leq p < q < r < \infty$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{p} + \frac{\lambda}{r}$$

and $u \in L^p(\Omega, \mu) \cap L^r(\Omega, \mu)$. Then $u \in L^q(\Omega, \mu)$ and

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^{1-\lambda} \|u\|_r^{\lambda}$$

Démonstration. Comme presque partout,

$$|u|^q = |u|^{(1-\lambda)q} . |u|^{\lambda q}$$

On observe que $|u|^{(1-\lambda)q} \in L^{\frac{p}{(1-\lambda)q}}$ et , $|u|^{\lambda q} \in L^{\frac{p}{\lambda q}}$. Nous déduisons de l'inégalité de Hölder que $|u|^q \in L^1(\Omega, \mu)$ et donc, $u \in L^q(\Omega, \mu)$ et

$$\int_\Omega |u|^q d\mu = \int_\Omega |u|^{(1-\lambda)q} |u|^{\lambda q} d\mu \leq (\int_\Omega |u|^{\frac{(1-\lambda)q.p}{(1-\lambda)q}} d\mu)^{\frac{(1-\lambda)q}{p}} (\int_\Omega |u|^{\frac{\lambda q.r}{\lambda q}} d\mu)^{\frac{\lambda q}{r}} = ||u||_p^{(1-\lambda)q} . ||u||_r^{\lambda q}$$

□

Proposition 4.2.5 : Let $1 \leq p < q < \infty, \mu(\Omega) < \infty$, and $u \in L^q(\Omega, \mu)$. Then $u \in L^p(\Omega, \mu)$ car on a que $L^q(\Omega, \mu) \subset L^p(\Omega, \mu)$ and

$$\|u\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} \|u\|_q$$

On a ici que l'application u va être une injection, ce n'est pas l'identité. C'est l'injection canonique dans un espace plus grand. Cette application est continue.
Si $\|u\|^q$ est intégrable, alors, $\|u\|^p$ aussi.
Si notre focntion tend vers 0, au plus l'exposant est grand, au plus ça aura des chances d'être intégrable car ça tendra de plus en plus vite vers 0. Sur des domaines non-bornés faut que ca tende vraiment rapidement vers 0. Si le domaine est borné, alors on regarde principalement ce qui se passe à l'infini.

Démonstration. On a $r = \frac{p}{q}$ et $\frac{1}{r} = \frac{p-q}{p}$. On calcule alors, par l'inégalité de Eulder que,

$$\int_\Omega |u|^p .1 d\mu \leq (\int_\Omega |u|^q d\mu)^{\frac{p}{q}} (\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}} d\mu)^{1-\frac{p}{q}} .$$

En prenant la racine, on obtient l'inégalité souhaitée.

□

Proposition 4.2.6 : Let $1 \leq p < \infty$ and $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mu)$ be such that,

(a) $\|u_n\|_p \to \|u\|_p, n \to \infty_i$

(b) u_n converges to u almost everywhere.

Then $\|u_n - u\|_p \to 0, n \to \infty$.

Démonstration. On calcule facilement que,

$$|u_n - u|^p \leq (|u_n| + |u|)^p \leq 2^p .(\frac{|u_n|}{2} + \frac{|u|}{2})^p \leq 2^p .(\frac{1}{2}.(|u_n|)^p + \frac{1}{2}.(|u|)^p) \leq 2^{p-1}((|u_n|)^p + (|u|)^p)$$

Since almost everywhere

$$0 \leq 2^{p-1} (|u_n|^p + |u|^p) - |u_n - u|^p$$

Fatou's lemma ensures that

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \underline{\lim}(2^{p-1} (|u_n|^p + |u|^p) - |u_n - u|^p) d\mu = 2^p \int_\Omega |u|^p d\mu \\
&\leq \underline{\lim} \int_\Omega \left[2^{p-1} (|u_n|^p + |u|^p) - |u_n - u|^p\right] d\mu \\
&\leq 2^p \int |u|^p d\mu + \underline{\lim} - \int_\Omega |u_n - u|^p \, d\mu \\
&= 2^p \int |u|^p d\mu - \overline{\lim} \int_\Omega |u_n - u|^p \, d\mu
\end{aligned}$$

(on obtient le passage de la limite inf à la limite sup car on a un moins qui passe dans la limite)
Hence $\overline{\lim} \|u_n - u\|_p^p \leq 0$. Car on montre que notre limite sup vaut zéro. La limite inf devient sup car elle existe et qu'elles sont égales mais comme on ne sait pas qu'elle existe, on doit mettre lim sup. □

The next result is more precise :

Theorem 4.2.7 (Brezis-Lieb lemma) : Let $1 \leq p < \infty$ and let $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mu)$ be such that,

(a) $c = \sup_n \|u_n\|_p < \infty_i$

(b) u_n converges to u almost everywhere.

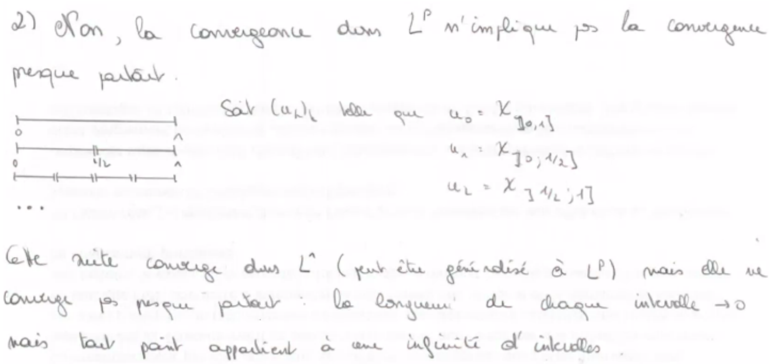
Then $u \in L^P(\Omega, \mu)$ and

$$\lim_{n\to\infty} \left(||u_n||_\rho^p - ||u_n - u||_p^p\right) = \|u\|_P^p$$

Ca nous dit quel est le terme qu'on perd lorsqu'on utilise le lemme de Fatou. ($||u_n - u||_p^p$)

Nous avons toujours ce problème du fait que la convergence dans L^p n'implique pas la converge p.p.. Donc, si nous prenons une suite de Cauchy dans L^p, elle ne convergera pas forcément presque partout.

Exemple :


2) Non, la convergence dans L^p n'implique pas la convergence presque partout.

Soit $(u_k)_k$ telle que $u_0 = \chi_{]0,1]}$

$u_1 = \chi_{]0;1/2]}$

$u_2 = \chi_{]1/2;1]}$

...

Cette suite converge dans L^1 (peut être généralisé à L^p) mais elle ne converge pas presque partout : la longueur de chaque intervalle $\to 0$ mais tout point appartient à une infinité d'intervalles.

Si nous prenons des intervalles de plus en plus petits, le premier est l'intervalle $[0, 1]$, le second est $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$, et ainsi de suite en utilisant la règle 2-adique. Les intervalles coulissent. En prenant la fonction caractéristque de chaque intervalle, on peut voir que notre suite de fonctions caractéristiques converge dans L^p car la longeur des intervalles tend vers 0, mais elle ne converge pas presque partout car il y a une infinité de points qui appartiennent à une infinité d'intervalles. Car converger p.p. est une notion dans $\mathbb{R}$, c'est la convergence ponctuelle en presque tout point. Ces points où les suites ne convergent pas, forment un ensemble négligeable. Ici, la suite de fonction converge dans L^p mais pour tout x, la suite $\chi_n(x)$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$. Car nous avons des 1 qui aparaissent de moins en moins souvent mais qui aparaissent quand même. Cela se passe pour tout les points de notre ensemble qui n'est pas négligeable.
Il y a un piège car si on passe à une sous-suite ça marche mais si on regarde sur la suite tout entière ça ne marche pas.

Theorem 4.2.9 (F. Riesz, 1910) : Let $1 \leq p < \infty$, Then the space $L^P(\Omega, \mu)$ is complete.
$\hookrightarrow$ Un espace est complet si toute suite de Cauchy converge dedans.

Démonstration. Let (u_n) be a Cauchy sequence in $L^p(\Omega, \mu)$. There exists a subsequence $v_j = u_{n_j}$, such that for every j, tout les termes sont à une distance de $1/2^j$, (on prend celle-ci et pas celle du TP qui est en $1/j$ car on veut que la somme soit finie or, en $1/j$ elle diverge),

$$||v_{j+1} - v_j||_p \leq 1/2^j$$

We define the sequence, (croissante)

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} \left|v_{j+1} - v_j\right|$$

Minkowski's inequality ensures that (on utlise Minkowski pour dire que la norme de $\|f_k\| < \sum_{j=1}^{k} \left\|v_{j+1} - v_j\right\|$)

$$||f_k||_p^p = \int_\Omega f_k^p \, d\mu \leq \left(\sum_{j=1}^{k} 1/2^j\right)^p < 1$$

Puisque ma série converge absolument, alors ma suite va converger. Si ma somme à l'infini convegre presque partout, c'es dire que j'ai une suite de Cauchy en presque tout points.

Levi's theorem implies the almost everywhere convergence of f_k to $f \in L^p(\Omega,\mu)$, $f = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Notre suite de fonctions f_k converge ponctuellement vers f donc elle converge presque partout. Car on a une intégrale finie mais rien ne nous dit qu'il n'existe pas un ensemble négligeable sur lequel ma fonction vaut ∞. En retirant cet ensemble négligeable sur lequel notre fonction vaut l'infini, on a toujours la convergence. Hence notre sous-suite v_k converges almost everywhere to a function u. For $m \geq k+1$, it follows from Minkowski's inequality et le lemme de Fatou that,

$$\int_\Omega |u - v_k|^p \, d\mu \leq \int_\Omega \liminf_{m\to\infty} |v_m - v_k|^p \, d\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega |v_m - v_k|^p \, d\mu \leq \left(\sum_{j=k}^{m-1} 1/2^j\right)^p \leq \left(2/2^k\right)^p$$

In particular, $u = u - v_1 + v_1 \in L^p(\Omega,\mu)$. We conclude by invoking the Cauchy condition :

$$\|u - u_k\|_p \leq \|u - v_k\|_p + \|v_k - u_k\|_p \leq 2/2^k + \left\|u_{n_i} - u_k\right\|_p \to 0, \quad k \to \infty$$

Nous avons alors montré que si nous avons une suite de Cauchy, alors elle converge. Dès lors, $L^P(\Omega,\mu)$ est un espace de Banach.

□

Notons que dans cette preuve, le passage de la convergence dans L^p à la convergence presque partout peut se faire car ici, notre suite converge très rapidement. C'est à dire, que notre suite de cauchy converge plus rapidement qu'une suite sommable car lécart entre deux termes consécutifs est plus petit que $(1/2^j)$ qui est un terme d'une suite sommable.
On montre donc une convergence plus faible en faisant ça.

Proposition 4.2.10 : Let $1 \leq p < \infty$ and let $u_n \to u$ in $L^p(\Omega,\mu)$. Then there exist a subsequence $v_j = u_n$, and $g \in L^p(\Omega,\mu)$ such that almost everywhere.

$$\left|v_j\right| \leq g \text{ and } v_j \to u, \quad j \to \infty$$

Démonstration. If the sequence (u_n) converges in $L^p(\Omega,\mu)$, it satisfies the Cauchy condition by Proposition 1.2.3. The subsequence (v_j) in the proof of the preceding theorem converges almost everywhere to u, and for every j

$$\left|v_j\right| \leq |v_1| + \sum_{j=1}^{\infty} \left|v_{j+1} - v_j\right| = |v_1| + f \in L'(\Omega,\mu)$$

□

Est-ce qu'on ne pourrait pas se dire que puisqu'on a pour chaque suite, une sous-suite qui converge presque partout, notre suite convergerait aussi presque partout ? NON, la convergence presque partout n'est pas une notion métrisable (ne provient pas d'une distance) et donc, la convergence dans L^p n'implique pas la convergence presque partout.

Theorem 4.2.11 (Density theorem) : Let $1 \leq p < \infty$ and $\mathcal{L} \subset L^p(\Omega,\mu)$. Then $\mathcal{L}$ is dense in $L^p(\Omega,\mu)$
$\hookrightarrow$Soit $Z \subset X$(partie de X) est dense lorsque $\overline{Z} = X$, c'est à dire que pour $x \in X$, il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Z qui converge vers X.

Démonstration. Let $u \in L^p(\Omega,\mu)$, since u is measurable with respect to μ on Ω, there exists a sequence $(u_n) \subset \mathcal{L}$ such that $u_n \to u$ almost everywhere. We define

$$v_n = \max\left(\min\left(|u_n|, u\right), -|u_n|\right)$$

By definition, $|v_n| \leq |u_n|$, and almost everywhere.

$$|v_n - u|^p \leq |u|^p \in L^p, |v_n - u|^p \to 0, \quad n \to \infty$$

It follows from Lebesgue's dominated convergence theorem that $\|v_n - u\|_p \to 0$ $n \to \infty$, Hence,

$$Y = \{u \in L^P(\Omega,\mu) : \text{there exists } f \in \mathcal{L} \text{ such that } |u| \leq f \text{ almost everywhere }\}$$

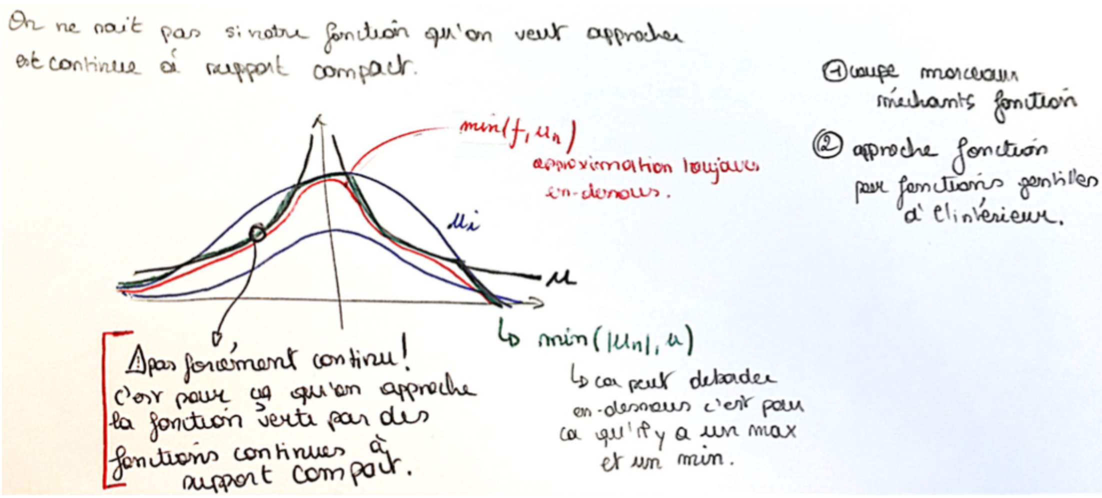
is dense in $L^p(\Omega,\mu)$. It suffices to prove that $\mathcal{L}$ is dense in Y. Let $u \in Y, f \in \mathcal{L}$ be such that $|u| \leq f$ almost everywhere and $(u_n) \subset \mathcal{L}$ such that $u_n \to u$ almost every where. We define

$$w_n = \max\left(\min\left(f, u_n\right), -f\right)$$

By definition, $w_n \in \mathcal{L}$ and, almost every where,

$$|w_n - u|^p \leq 2^p f^p \in L^p, |w_n - u|^p \to 0, \quad n \to \infty$$

It follows from Lebesgue's dominated convergence theorem that $\|w_n - u\|_p \to 0$ $n \to \infty$,
Hence $\mathcal{L}$ is dense in Y □



Théorème : $K(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \subseteq \Omega, compact\}$, ensemble des fonctions continues à support (là où elle est différente de zéro) compact. est un ensemble dense dans $L^p(\Omega)$. (on met la mesure de Lebesgue)

Démonstration. Par la même preuve que le théorème du dessus, on y arrive. De plus, puisque $K(\Omega)$ est un sous-ensemble de $L^p(\Omega)$, on peut appliquer le théorème 4.2.11. □

RAPPELS :
Definition 2.3.1 : Define on $\mathbb{R}$, $f(t) = (1 - |t|)^+$. The family $f_{j,k}(x) = \prod_{n=1}^{N} f\left(2^j x_n - k_n\right)$ $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^N$, is such that $f_{j,k} \in \mathcal{K}\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$\operatorname{spt} f_{jk} = B_\infty\left[k/2^j, 1/2^j\right], \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} f_{j,k} = 1, f_{j,k} \geq 0$$

Proposition 2.3.2. Let Ω be an open set in $\mathbb{R}^N$ and let $u \in \mathcal{K}(\Omega)$. Then the sequence

$$u_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} u\left(k/2^j\right) f_{jk}$$

converges uniformly to u on Ω.

En fait, mes $f(t) = (1 - |t|)^+$ sont des fonctions châpeaux. En prenant une combinaison linéaire de ces fonctions, on peut en approcher d'autres par approximation affine (#B-splines). Puisque les coefficients $u\left(k/2^j\right)$ sont des réels, on peut les approximer par les nombres rattionnels. De plus, la proposition 2.3.2 dit que les combinaisons rationnelles permettent d'approximer n'importe quelle fonction.

Theorem 4.2.12 : Let Ω be open in $\mathbb{R}^N$ and $1 \leq p < \infty$. Then the space $L^p(\Omega)$ is separable.
↪Un espace séparable est un espace qui admet une partie dense dénombrable

Démonstration. By the preceding theorem, $\mathcal{K}(\Omega)$ is dense in $L^p(\Omega)$. Proposition 2.3 .2 implies that for every $u \in \mathcal{K}(\Omega)$

$$u_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} u\left(k/2^j\right) f_{i,k}$$

converges to u in $L^p(\Omega)$.
En posant $t = (2^j x - k)$, on a que

$$f(t) = (1 - |t|)^+ = (1 - (2^j x - k^+)) = (1 - |\frac{x - k/2^j}{2^j}|)^+$$

On sait que $\lim_{j\to\infty} ||u_j - u||_\infty = 0$. De plus,

$$\{x \in \mathbb{R} | u_j(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} | u(x) \neq 0\} + [-1/2^j, 1/2^j]$$

Donc, la fonction $f_{i,k}$ génère un espace dense dans L^p. Car pour tout $u \in L^p$, il existe une suite $u_j \in K(\Omega)$, tel que $\lim_{j\to\infty} ||u_j - u||_\infty = 0$. We conclude the proof using Proposition 3.3.11. que L^p est séparable. □

4.3 Regularization

Regularization by convolution allows one to approximate locally integrable functions by infinitely differentiable functions.
Notation : Être un sous-espace A ouvert d'un espace B tel que l'adhérence de A est un sous-espace compact de B est noté $A \subset\subset B$
Definition 4.3.1. Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$. The space of test functions on Ω is defined by

$$\mathcal{D}(\Omega) = \left\{u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) : \operatorname{spt} u. \textit{ is a compact subset of } \Omega\right\}$$

Let $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ be a multi-index. By definition,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N, \quad D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_N^{\alpha}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Par exemple, une fonction constante sur la boule unité. Le support sera la boule unité et si elle est dans notre ensemble, son support sera la boule unité fermée.
Using a function defined by Cauchy in 1821, we shall verify that 0 is not the only element in $\mathcal{D}(\Omega)$.
Effectivement, on pourrait croire que en un zéro non isolé, par continuité, les dérivées seraient aussi nulles, et le dévloppement de taylor donnerait une fonction identiquement nulle. Une fonction dans $\mathcal{D}$ est C^∞ mais pas analytique, sauf si c'est la fonction nulle.

Proposition 4.3.2 : The function defined on $\mathbb{R}$ by

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(1/x), \quad && x < 0 \\ &= 0, && x \geq 0 \end{aligned}$$

is infinitely differentiable.
On peut aussi observer que cette fonction converge plus vite vers 0 que n'importe quel autre polynôme.

Démonstration. Let us prove by induction that for every n and every $x < 0$

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n(1/x) \exp(1/x)$$

where P_n is a polynomial. The statement is true for $n = 0$. Assume that it is true for n. We obtain

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(n)}(x) - f^n(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{P_n(1/x) \exp(1/x)}{x} = 0$$

Hence $f^{(n+1)}(0) = 0$. Finally, we have for $x < 0$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-1/x^2\right)\left(P_n(1/x) + P_n'(1/x)\right) \exp(1/x) = P_{n+1}(1/x) \exp(1/x)$$

□

Definition 4.3.3 : We define on $\mathbb{R}^N$ the function (c'est comme si on la divisait par la valeur de son intégale)

$$\begin{aligned} \rho(x) &= c^{-1} \exp\left(1/\left(|x|^2 - 1\right)\right), |x| < 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

where

$$c = \int_{B(0,1)} \exp\left(1/\left(|x|^2 - 1\right)\right) dx$$

The regularizing sequence $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$ is such that

$$\rho_n \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right), \quad \operatorname{spt} \rho_n = B[0, 1/n], \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = 1, \quad \rho_n \geq 0$$

Si on a $x > 1/n$, alors notre séquence vaut zéro. C'est un bel exemple du fait qu'on ne peux pas toujours échanger les limites avec les intégrales car ici, l'intégrale vaut 1, mais la limite, 0.
Pourquoi ce choix de fonction ? Le but est d'avoir des fonctions dont l'intégrale vaut 1 et qui sont C^∞ à support compact.

Definition 4.3.4 : Let Ω be an open set of $\mathbb{R}^N$. By definition, $\omega \subset\subset \Omega$ if ω is open and $\bar{\omega}$ is a compact subset of Ω. We define, for $1 \leq p < \infty$,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{ for all } \omega \subset\subset \Omega, u|_\omega \in L^p(\omega)\}$$

A sequence (u_n) converges to u in $L^p_{loc}(\Omega)$ if for every $\omega \subset\subset \Omega$

$$\int_\omega |u_n - u|^p \, dx \to 0, \quad n \to \infty$$

Si je converge dans $L^p_{loc}(\Omega)$ alors, je vais converger dans $L^p(\omega)$ pour tout ω.
Ce concept était celui d'être localement intégrable dans L^p. La restriction sur n'importe quel espace pas trop grand, ouvert borné, fait que la fonction u est dans L^p. Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors, on peut enlever pas enlever le loc de notre ensemble car c'est le principe de l'intégration locale. Mais si Ω est compact, on peut l'enlever car $\omega = \Omega$ est une possibilité.
Demander qu'une fonction soit $L^p_{loc}(\Omega)$, alors, c'est demandé qu'elle soit p intégrable sur tout les ensembles finis.

Exemple 1 : N'importe quelle fonction continue de $\mathbb{R}^n$ est dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ car sur tout sous-espace à adhérence compacte, mes restrictions de fonctions à ce sous-espace sont intégrables. Effectivement, par le thm des bornes atteintes, tout fonction continue sur un ouvert borné est bornée.

Exemple 2 : N'importe quelle fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ est intégrable. Car toutes nos fonctions seront toutes bornées pour tout $\omega \subset\subset [0, 1]$.

Definition 4.3.5 : Let $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ and $v \in \mathcal{K}\left(\mathbb{R}^N\right)$ be such that spt $v \subset B[0, 1/n]$.
For $n \geq 1$, the convolution $v * u$ is defined on

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 1/n\}$$

avec $d(x, \partial\Omega)$ la distance à la frontière de Ω by

$$\boxed{v * u(x) = \int_\Omega v(x - y)u(y)dy = \int_{B(0,1/n)} v(y)u(x - y)dy}$$

(on obtient la deuxième intégrale en faisant un changement de variables)

- Ce qui est interessant est qu'on peut écrire notre deuxième intégrale uniquement sur le support de la focntion v !
- On demande que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pour que notre définition aie du sens et que nous intégrons une fonction bien intégrable.
- If $|y| < 1/n$, the translation of u by y is defined on Ω_n by $\tau_y u(x) = u(x - y)$. En supposant que l'intégrale de v vaut 1, on peut simplement voir que la convolution est comme une moyenne de translation. C'est comme intégrer des combinaisons linéaires de translations. La convolution est comme une moyenne pondérée des valeurs de ma fonction u, donc une moyenne de translations. La convolution est vraiment une formule approximante. (liens avec les probas).
- Comme on regarde juste ce qui se passe sur une boule de rayon $1/n$, si ma fonction u est à support compact, alors, la convolution de u avec la sequence de regularisation, $\rho_n * u(x)$ donnera une fonction à suppot compact ! De même, la proposition 4.3.6 nous dit que si je prend une convolution d'une fonction lisse, j'obtiens denouveau une fonction lisse. (c.f.r démo 4.3.11)
- On doit prendre ces ensembles ω car on est pas surs, quand on est dans Ω, que la translation reste dans notre ensemble. Or, dans $\mathbb{R}^N$, on a pas ce problème car les translations sont bien définies partout dans $\mathbb{R}^N$. Tout les démonstrations peuvent se refaire facilement avec $\Omega = \mathbb{R}^N$. C'est pour cela qu'on a aussi des notations différentes.

- On remarque que nos Ω_n sur lesquels sont définies nos convolutions, sont des sous-ensembles de Ω, sauf, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, là, on aura $\Omega_n = \Omega$.
- Enfait, on prend des $\Omega_n \subset \Omega$ pour avoir un ouvert sur lequel notre convolution est définie, qui contient le suport de v et tel que si on fait des translations, on ne sors pas de notre ensemble. On peut vérifier que notre fonction est intégrable car on fait le produit entre une fonction L^1_{loc} et une fonction à support compact, comme ça, on a bien une fonction L^1 (à condition que le support de notre fonction à support compact soit dans le domaine de la fonction L^1_{loc}.
- La convolution avec ma suite régularisante avec u rend ma fonction plus lisse (C^∞. On sait alors à partir de ce moment là que, puisque $D(\Omega)$ est dense dans L^p, (car $\rho_n * u(x)$ converge toujours vers u), c'est plus facile pour montrer des propriétés.
- Observons aussi que Ω_n est un ouvert en utilisant le fait que si $x \in \Omega$, on sait que $d(x, \partial\Omega) > 1/n$.

Proposition 4.3.6 : Let $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ and $v \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ be such that spt $v \subset B[0, 1/n]$.
Then $v * u \in C^\infty(\Omega_n)$, and for every $\alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$D^\alpha(v * u) = (D^\alpha v) * u$$

Démonstration. Let $|\alpha| = 1$ and $x \in \Omega_n$. There exists $r > 0$ such that $B[x, r] \subset \Omega_n$ (on prends un tout petit r et on sait qu'il existe car Ω_n est un ensemble ouvert). Hence

$$\omega = B(x, r + 1/n) \subset\subset \Omega$$

and for $0 < |\varepsilon| < r$, par définition de convolution,

$$\frac{v * u(x + \varepsilon\alpha) - v * u(x)}{\varepsilon} = \int_\omega \frac{v(x + \varepsilon\alpha - y) - v(x - y)}{\varepsilon} u(y) dy$$

But, par définition de différentielle,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \neq 0}} \frac{v(x + \varepsilon\alpha - y) - v(x - y)}{\varepsilon} = D^\alpha v(x - y)$$

and, par le théorème des accroissements finis,

$$v(x + \varepsilon\alpha - y) - v(x - y) = \int_0^1 Dv(x + t\varepsilon\alpha y - y[varepsilon\alpha]dt\ leq|Dv(x + t\varepsilon\alpha y - y|dt.|\varepsilon\alpha| \leq sup|Dv|.|\varepsilon|$$

Puisque v est C^1, alors on sait que cette dérivée totale est bornée. Dès lors,

$$\sup_{\substack{y \in \omega \\ 0 < |\varepsilon| < r}} \left| \frac{v(x + \varepsilon\alpha - y) - v(x - y)}{\varepsilon} \right| < \infty$$

Lebesgue's dominated convergence theorem implies that

$$D^\alpha(v * u)(x) = \int_\omega D^\alpha v(x - y) u(y) dy = (D^\alpha v) * u(x)$$

It is easy to conclude the proof by induction.
On fait ici plus haut l'intégrale sur ω car celui-ci est le support de la fonction qu'on intègre. Si $y \in \omega^c$, alors $\frac{v(x+\varepsilon\alpha-y)-v(x-y)}{\varepsilon} = 0$. C'est pour ca qu'on suppose que le support de v est dans $B(0, 1/n)$. □

Remarque : Si v n'est plus lisse mais est continue à support compact, $v \in \mathcal{K}(\Omega)$, alors, peut-on en déduire que $v * u \in C(\Omega_n)$?
Oui, on peut le montrer, ça sera très similaire à la proposition ci-dessus mais sans évidemment les dérivées.
Soit $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, avec spt $v \subset B[0, 1/n]$ et $u \in L^1_{\text{Loc}}(\Omega)$ on va montrer que $v * u \in C(\Omega_n)$.
Démonstration. Soit $x \in \Omega_n$, on a que $\exists r > 0$ t.q. $B[x, r] \subset \Omega_n$ sur laquelle la convolution est donc bien définie.
On pose $\omega = B(x, r + 1/n) \subset\subset \Omega$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer $(x_n) \subset B[x, r]$. Dès lors,

$$v * u(x_n) - v * u(x) = \int_\omega (v(x_n - y) - v(x - y)) u(y) dy$$

car v est nulle en dehors de ω.

Puisque v est continue sur un compact, il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|v| < C$ dès lors la fonction à intégrer est bornée par $|2C.u|$ qui est intégrable et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a :

$$\lim_{n\to\infty} v * u(x_n) - v * u(x) = \int_\omega \lim_{n\to\infty} (v(x_n - y) - v(x-y))\, u(y)dy$$

Et par continuité de $\tau_y v$, notre deuxième intégrale vaut zéro lorsqu'on prend la limite. On a alors que $v * u \in C(\Omega_n)$, (continuité séquentielle).

Lemma 4.3.7 : Let $\omega \subset\subset \Omega$,

(i) Let $u \in C(\Omega)$. Then for every n large enough

$$\sup_{x\in\omega} |\rho_n * u(x) - u(x)| \leq \sup_{|y|<1/n} \sup_{x\in\omega} \left|\tau_y u(x) - u(x)\right|$$

(ii) Let $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Then for every n large enough

$$\|\rho_n * u - u\|_{L^p(\omega)} \leq \sup_{|y|<1/n} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)}$$

- Remarquons que la continuité de u ne joue aucun rôle ici. Mais enfait, cette propriété qu'on démontre, ne sera interessante que pour des fonctions continues. En effet, le numéro (b) est interessant pour les fonctions continues car on pourra prendre la limite qui fera tendre $\sup_{|y|<1/n} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)}$ vers 0.
- ATTENTION, ici, on note la norme $||u||_{L'(\omega)}$ et pas la norme $||u||_p$ car on est dans l'ensemble ω et pas Ω tout entier, ni même dans $\mathbb{R}^N$. Puisque mtnt on travaille avec des fonctions dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ intégrable localement sur des ω, alors, on note $||u||_{L^p(\omega)}$. Quand on a des ensembles spécifiques, alors on prend la dernière notation.
- De plus, on sait que la convolution est une moyenne pondérée des translation. Ici, ce théorème nous apprends que l'écart entre ma fonction et une moyenne pondérée des translations est plus petite que l'écart entre ma fonction et la plus grande des translations possibles.
- Ce lemme s'étend à $p = \infty$, voir tutora 4 :
  Idée : On définit $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} :$ il existe $C > 0$ tel que $|u| \leq C$ presque partout sur $\Omega\}$ et $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0 : |u| \leq C$ presque partout dans $\Omega\}$.
  Soit $u \in L^\infty_{Loc}(\Omega), \omega \subset\subset \Omega$ alors pour n assez grand (qui assure que la translation reste bornée p.p.) ;

  $$\|\rho_n * u - u\|_{L^\infty(\omega)} \leq \sup_{|y|<1/n} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^\infty(\omega)}?$$

  Il suffit de prouver que le terme de droite est un majorant presque partout pour prouver notre assertion. Or, $\left|\tau_y u(x) - u(x)\right| \leq \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^\infty(\omega)}$ presque partout. D'où,

  $$\begin{aligned} |\rho_n * u - u| &\leq \int_{B[0,1/n]} \rho_n(y) \cdot \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^\infty(\omega)} dy \\ &\leq 1. \sup_{|y|<1/n} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^\infty(\omega)} \quad \text{ car } \int_{B[0,1/n]} \rho_n(y) = 1 \end{aligned}$$

  Ce résultat est similaire au point (a) où on a remplacé $C(\Omega)$ par $L^\infty_{Loc}(\Omega)$ et les suprémums sur x par des suprémums essentiels.

Démonstration. For every n large enough, $\omega \subset\subset \Omega_n$, $\Omega_n = \{x \in \Omega : B[x, \frac{1}{x}] \subseteq \Omega\}$. Ce qu'on dit est que si j'ai un sous-ensemble compact d'un ensemble ouvert, tout les points que j'ai dans mon adhérence restent à une certaine distance positive du bord. Let $u \in C(\Omega)$. since

$$\int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)dy = 1$$

(i) We obtain for every $x \in \omega$, (l'intégrale de ρ_n est égale à 1 donc on peut la multiplier gratuitement à $u(x)$,

$$\begin{aligned} |\rho_n * u(x) - u(x)| &= \left|\int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)(u(x-y) - u(x))dy\right| \\ &\leq \sup_{|y|<1/n} \sup |u(x-y) - u(x)| \\ &\leq \sup_{\substack{|y|<1/n \\ x\in\omega}} |\tau_y u(x) - u(x)| \end{aligned}$$

Le dernier terme est la translation maximale.
(ii) Let $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega), 1 \le p < \infty$. By Hölder's inequality, for every $x \in \omega$, we have

$$\begin{aligned}
|\rho_n * u(x) - u(x)| &= \left|\int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)(u(x-y)-u(x))dy\right| \\
&= \left|\int_{B(0,1/n)} (u(x-y)-u(x))(\rho_n(y))^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}dy\right| \\
&\le \left|\int_{B(0,1/n)} |(u(x-y)-u(x))|^p(\rho_n(y))^{p/p}dy\right|^{1/p} . \left|\int_{B(0,1/n)} (\rho_n(y))^{\frac{p'}{p'}}dy\right|^{1/p'} \\
&\le \left(\int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)|u(x-y)-u(x)|^p dy\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Fubini's theorem implies that

$$\begin{aligned}
\int_\omega |\rho_n * u(x) - u(x)|^p\, dx &\le \int_\omega dx \int_{B(0,1/n)} \rho_n(y)|u(x-y)-u(x)|^p dy \\
&= \int_{B(0,1/n)} dy \int_\omega \rho_n(y)|u(x-y)-u(x)|^p dx \\
&\le \sup_{|y|<1/n} \int_\omega |u(x-y)-u(x)|^p dx \\
&\le \sup_{\substack{|y|<1/n \\ x\in\omega}} \int_\omega |\tau_y u(x) - u(x)|^p dx
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.3.8 (Continuity of translations) : Let $\omega \subset\subset \Omega$.

(a) Let $u \in C(\Omega)$. Then
$$\lim_{y\to 0}\sup_{x\in\omega}\left|\tau_y u(x) - u(x)\right| = 0$$

(b) Let $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega), 1 \le p < \infty$. Then
$$\lim_{y\to 0}\left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} = 0$$

Le fait d'avoir toujours Ω et ω est là pour ne pas changer mon domaine lorsque je fais des translation. Ce théorème nous dit que nos translations sont continues. Nous allons faire une preuve par densité.
On peut aussi remarquer que ce lemme ne s'étend pas à $p = \infty$ en construisant un contre exemple :
Soit $u \in L^\infty_{Loc}(\Omega), \omega \subset\subset \Omega$, que devient $\lim_{|y|\to 0}\left\|\tau_y u - u\right\|_{L^\infty(\omega)}$? On remarque que contrairement au résultat qui précède, le point (a) de ce lemme utilise le fait que u doit être continue, construisons un contre exemple :

$$\begin{aligned}
&\text{Soit } u : [0,1] \to \mathbb{R} = \chi_{[0,1/2]};\, u \in L^\infty_{Loc}([0,1]) \text{ car } \|u\|_{L^\infty} = 1 \text{ mais} \\
&\forall y \neq 0 \in B(0,1) \quad \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^\infty(\omega)} = 1
\end{aligned}$$

Et donc la limite est égale à 1. Le résultat (b) est donc faux si $p = \infty$.

Démonstration. (a) If $u \in C(\Omega)$, then property (a) follows from the uniform continuity of u on U.
Puisque l'adhérence de ω est compacte, on va utiliser la propriété que si nous avons une fonction continue sur un compact, alors, elle sera automatiquement uniformément continue. Dire qu'elle est uniformément continue, c'est dire le point (a). En prenant y suffisament petit,

$$\lim_{y\to 0}\sup_{x\in\omega}\left|\tau_y u(x) - u(x)\right| = \lim_{y\to 0}\sup_{x\in\omega}|u(x-y) - u(x)| = 0$$

(b) Let $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, and $\varepsilon > 0$. We choose an open subset U such that $\omega \subset\subset U \subset\subset \Omega$. On crée U car puisque celui-ci est u voisinage autour de ω, si on fait une translation dans ω, on reste dans U. C'est une possibilité qu'on a dans $\mathbb{R}^n$ de toujours pouvoir intercaler entre un sous-ensemble compact et mon ensemble ouvert, un ensemble intermédiaire, construit grâce à une réunion de boules centrées en chaque points de ω (puisque ω est un compact, l'adhérence de notre ensemble U sera compacte aussi) .
De plus,
$$\left\|\tau_y u - \tau_y v\right\|_{L^p(\omega)} \le \|u - v\|_{L^p(U)}$$

The density theorem implies the existence of $v \in \mathcal{K}(U)$ (on prend v dans $\mathcal{K}(U)$ car on sait que celui-ci est dense dans L^p) such that $\|u - v\|_{L^p(U)} \leq \varepsilon$, on peut choisir v ayant ces propriétés car $\mathcal{K}(U)$ est un ensemble dense. By (a), there exists $0 < \delta < d(\omega, \partial U)$ such that for every $|y| < \delta$, $\sup_{x \in \omega} \left|\tau_y v(x) - v(x)\right| \leq \varepsilon$.
Par définition de la norme $L^p(\omega)$, on a alors que, (avec $m(\omega)$ la mesure de ω),

$$\left\|\tau_y v - v\right\|_{L^p(\omega)} \leq m(\omega)^{1/p} \sup_{x \in \omega}\left|\tau_y v(x) - v(x)\right| \leq \varepsilon$$

We obtain for every $|y| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} &\leq \left\|\tau_y u - \tau_y v\right\|_{L^p(\omega)} + \left\|\tau_y v - v\right\|_{L^p(\omega)} + \|v - u\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq 2\|u - v\|_{L^p(U)} + m(\omega)^{1/p} \sup_{x \in \omega}\left|\tau_y v(x) - v(x)\right| \\ &\leq \left(2 + m(\omega)^{1/p}\right)\varepsilon \end{aligned}$$

since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, the proof is complete. We deduce from the preceding lemmas the following regularization theorem. □

Remarque : Par le lemme 4.3.7,

$$\|\rho_n * u - u\|_{L^p(\omega)} \leq \sup_{|y|<1/n} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)}$$

Et par le lemme 4.3.8,

$$\lim_{y \to 0} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} = 0$$

Dès lors, on a que,

$$\lim_{y \to 0} \|\rho_n * u - u\|_{L^p(\omega)} = 0$$

On peut faire le même raisonnement dans $\mathbb{R}$.
Ces deux dévloppement nous mènent aux propriétés d'approximations suiventes :

Theorem 4.3.9 :
(a) Let $u \in C(\Omega)$. Then $\rho_n * u$ converges uniformly to u on every compact subset of Ω.
(b) Let $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Then $\rho_n * u$ converges to u in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

On appelles ce théorème, le théorème de régularisation car en convolant notre u avec notre suite régularisante, on observe que nous rendons notre fonction plus régulière, la convolution sera C^∞. On sera arbitrairement proche de notre fonction de base mais on sera aussi beaucoup plus lisse.

The following consequences are fundamental.

Theorem 4.3.10 (Annulation theorem) : Let $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ be such that for every $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega v(x)u(x)dx = 0$$

Then $u = 0$ almost everywhere on Ω. Lorsque j'ai une fonction localement intégrable, et je suppose que son produit avec tout v vaut zéro, alors, ma fonction vaut zéro presque partout.

Démonstration. Si on a que ,

$$\int_\Omega v(x)u(x)dx = 0$$

Alors, on peut écrire le produit de notre convolution sous la forme d'une intégrale d'une certaine fonction $v(x - y)$ multipliée avec $u(x)$.
Donc, pour tout n, $\rho_n * u = 0$ sur Ω_n. Parce que par la proposition précédente, $\rho_n * u$ converge uniformément vers u dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Cette limite est forcément nulle, donc, u est nul, presque partout. □

C'est un théorème qui nous permet de détecter qu'une fonction est nulle simplement en vérifiant son intégrale par rapport à une fonction continue à support compacte. Grâce à la régularization qu'on a faite, si je prend une fonction à support compact, mon produit de convolution, sera nul là où ma fonction s'annulle. Donc, pour que mon produit de convolution soit différent de zéro, il faut que l'intersecion entre le support de la fonction u avec la boule $B(0,1/n)$ soit non vide.

Theorem 4.3.11 : Let $1 \leq p < \infty$. Then $\mathcal{D}(\Omega)$ is dense in $L^p(\Omega)$.

Démonstration. By the density theorem, $\mathcal{K}(\Omega)$ is dense in $L^p(\Omega)$. Let $u \in \mathcal{K}(\Omega)$, u a un support compact. There exists an open set ω such that spt $u \subset \omega \subset\subset \Omega$. For j large enough, the support of $u_j = \rho_j * u$ is contained in ω. since $u_j \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ by Proposition 4.3.6, $u_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. The regularization theorem ensures that $u_j \to u$ in $L^p(\Omega)$.
On a donc montré que toutes les fonctions à support compact sont des limites de fonctions C^∞ à support compact. On sait aussi que toute fonction de L^p est elle-même une limite de fonctions C^∞ à support compact. Donc, on a montré le résultat. □

Definition 4.3.12 : A partition of unity subordinate to the covering of the compact subset Γ of $\mathbb{R}^N$ by the open sets $U_1, \ldots, U_k$ is a sequence $\psi_1, \ldots, \psi_k$ such that

(a) $\psi_j \in \mathcal{D}\left(U_j\right), \psi_j \geq 0, j = 1, \ldots, k$

(b) $\sum_{j=1}^k \psi_j = 1$ on $\Gamma, \sum_{j=1}^k \psi_j \leq 1$ on $\mathbb{R}^N$

Theorem 4.3.13 (Partition of unity) : There exists a partition of unity subordinate to the covering of the compact subset Γ of $\mathbb{R}^N$ by the open sets $U_1, \ldots, U_k$.

Now we consider Euclidean space. Si je travaille dans $\mathbb{R}^N$ tout entier, on a pas de problèmes de translations, et donc, ma convolution est définie en tout mes points. Cela est du au fait qu'on sait que dans ma définition de convolution, tout les x qu'on choisira seront des "bons points x", tels que l'intégrale existe.
Ici, on peut denouveau noter la norme $||u||_p$ car, on est dans $\mathbb{R}^N$.

Proposition 4.3.14 : Let $1 \leq p < \infty$ and $u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$. Then $\|\rho_n * u\|_p \leq \|u\|_p$ and $\rho_n * u \to u$ in $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Cette propriété nous dit que la convolution diminue la norme dans L^p mais aussi, qu'elle converge dans cet espace.

Démonstration. It follows from Hölder's inequality that

$$\begin{aligned}
|\rho_n * u(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(y)\rho_n(x-y)dy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(y)(\rho_n(x-y))^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}dy\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p(\rho_n(x-y))^{p/p}dy\right|^{1/p} \cdot \left|\int_{\mathbb{R}^N} (\rho_n(x-y))^{\frac{p'}{p'}}dy\right|^{1/p'} \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p\rho_n(x-y)dy\right|^{1/p}
\end{aligned}$$

Fubini's theorem implies that

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n * u(x)|^p\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p\rho_n(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p\rho_n(x-y)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p dy
\end{aligned}$$

Hence $\|\rho_n * u\|_p \leq \|u\|_p$ Let $u \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ and $\varepsilon > 0$. The density theorem implies the existence of $v \in \mathcal{K}\left(\mathbb{R}^N\right)$ such that $\|u - v\|_p \leq \varepsilon$. By the regularization theorem, $\rho_n * v \to v$ in $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$ Hence there exists m such that for every $n \geq m, \|\rho_n * v - v\|_p \leq \varepsilon$. We obtain for every $n \geq m$ that

$$\|\rho_n * u - u\|_p \leq \|\rho_n * (u-v)\|_p + \|\rho_n * v - v\|_p + \|v - u\|_p \leq 3\varepsilon$$

since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, the proof is complete. □

Proposition 4.3.15 : Let $1 \leq p < \infty, f \in L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$, and $g \in \mathcal{K}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Then

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\rho_n * f)\, g dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\,(\rho_n * g)\, dx$$

Démonstration. Fubini's theorem and the parity of ρ imply that

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (\rho_n * f)(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)f(y)g(x)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)f(y)g(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\rho_n * g)(y)f(y)dy\end{aligned}$$

□

4.4 Compacité

Quelques définitions :
Definition1.2.5 : Let X be a metric space.
(i) The space X is complete if every Cauchy sequence in X converges.
(ii) The space X is precompact if every sequence in X contains a Cauchy subsequence.
(iii) The space X is compact if every sequence in X contains a convergent subsequence.
On se souviens tous de la compacité, une chouette propriété qui nous dit que, si une fonction est continue sur un compact, alors par le théorème des bornes atteintes, elle atteint son maximum et son minimum. (c'est donc une fonction bornée)
Dans $\mathbb{R}^n$ et ses sous-ensembles, les compacts sont les fermés bornés.
Mais quels sont les ensembles compacts de L^p ? Les choses sont-elles aussi simples dans cet espace ?

Si on a un ensemble compact, ca veut dire que si je prend une suite, elle admet une sous-suite qui converge (de Cauchy). Donc, si j'ai une sous-site qui est une suite de Cauchy, alors, si mon espace est complet, alors, tout ces sous-suites convergent vers un point de mon espace, un élément de l'hadérence de mon ensemble. On a donc, que si $S \in X$, X un ensemble compact, alors, si S est précompact, $\overline{S}$ est compacte. Montrons quelque chose de plus faible.

Théorème : Soit $S \in X$, X un ensemble compact et S un sous-ensemble fermé, alors, si S est précompact, $\overline{S}$ est compacte et inversément.

Démonstration. $\Rightarrow$ Si mon ensemble S est précompact, si je prend une suite dans S, elle admet une sous-suite convergente. Cette sous-suite va converger vers un élément de S car celui-ci est fermé. On a donc que S est compacte.

$\Leftarrow$ Si $\overline{S}$ est compacte, alors tout sous-suite va converger et être une sous-suite de Cauchy. □

Exemple : Si on prend $B[0,1]$ come sous-ensemble des fonctions bornées continues $BC(\mathbb{R})$, elle ne sera pas compacte. Pour montrer ça, on doit prendre une suite qui n'as pas de sous-suite qui converge. La norme sur cet espace est le suprémum. Prenons comme fonction une fonction chapeau, elle décolle en $(n-1)$, arrive à 1 en n et retombe jusqu'a zéro en $(n+1)$,

$$u_n(x) = (1 - |x-n|) + ||u_n - u(n)||_\infty \geqslant |u_n(x) - u(n)| = 1$$

Il est donc impossible que cette suite soit une suite de Cauchy.

Exemple : Nous, on veut travailler dans L^p, prenons $B[0,1] \subset L^p(0,\infty)$. Considérons la suite $u_2 n$, on remarque que $||u_2 n|| = ||u_0||$ mais, l'écart entre deux termes est,

$$||u_2 n - u_2 n||_p^p = 2||u_0||_p^p > 0$$

Puisque l'écart est toujours stictement positif, on aura jamais une sous-suite convergente.

Ici, on a des suites qui n'ont aucune sous-suite convergente dans les espaces L^p, cela implique que en général, la boule unité n'est pas compacte.

Theorem 1.2.16 (Fréchet's criterion, 1910) : Let X be a metric space and let $S \subset X$. The following properties are equivalent :

(a) S is precompact ;

(b) for every $\varepsilon > 0$, there is a **finite** covering of S by balls of radius ε. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\bigcup_{i=1}^{n} B[x_i, \varepsilon]$. Une union finie de boules.

On voit ce critère car ce qui est interessant est que la boule unité se casse la geule dessus. Car, dès que notre ε est inférieur à 1, on ne peut plus recouvrir notre boule unité avec une union finie de petites boules. On en aura toujours besoin d'une infinité. Même avec des boules de rayon $0,999999999$.

Démonstration. $\Rightarrow$:
Assume that S satisfies (b).
We must prove that every sequence $(u_n) \subset S$ contains a Cauchy subsequence. Cantor's diagonal argument will be used. There is a ball B_1 of radius 1 containing a subsequence $(u_{1,n})$ from (u_n). There is a ball B_2 of radius 2 containing a subsequence $(u_{2,n})$ from (u_n). There is a ball B_n of radius 1 containing a subsequence $(u_{n,n})$ from (u_n).
By induction, for every k, there is a ball B_k of radius $1/k$ containing a subsequence $(u_{k,n})$ from $(u_{k-1,n})$ The sequence $v_n = u_{n,n}$ is a Cauchy sequence. Indeed, for $m, n \geq k, v_m, v_n \in B_k$ and $d(v_m, v_n) \leq 2/k$.
$\Leftarrow$:
Assume that (b) is not satisfied.
There then exists $\varepsilon > 0$ such that S has no finite covering by balls of radius ε. Let $u_0 \in S$. There is $u_1 \in S \backslash B[u_0, \varepsilon]$. By induction, for every k, there is

$$u_k \in S \backslash \bigcup_{j=0}^{k-1} B\left[u_j, \varepsilon\right]$$

Hence for $j < k, d\left(u_j, u_k\right) \geq \varepsilon$, and the sequence (u_n) contains no Cauchy subsequence. □

Avant toute chose, le fait d'avoir un ensemble borné est très important pour avoir la compacité.
We prove a variant of Ascoli's theorem.
Theorem 4.4.1 : Let X be a precompact metric space and let S be a set of uniformly continuous functions on X such that,

(a) $c = \sup_{u \in S} \sup_{x \in X} |u(x)| < \infty$

(b) for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that si $d(x, y) \leqslant \delta$ et $u \in S$,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \varepsilon$$

Then S is precompact in $\mathcal{BC}(X)$

On remarque donc que toutes nos fonctions doivent être bornées et sont toutes continues uniformément de la même manière en chaque point. On a de la compacité si on prend des fonctions qui ont des comportaments semblables.

Démonstration. Let $\varepsilon > 0$ and δ correspond to ε by (b).
There exists a finite covering of the precompact space X by balls $B[x_1, \delta], \ldots, B[x_k, \delta]$.

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta)$$

There exists also a finite covering of $[-c, c]$ by intervals $[y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon], \ldots, [y_n - \varepsilon, y_n + \varepsilon]$.

$$[-c, c] \subseteq \bigcup_{j \in J}^{n} [y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon]$$

On a que $[-c, c]$ est précompact. Let us denote by J the (finite) set of mappings from $\{1, \ldots, k\}$ to $\{1, \ldots, n\}$ (on passe de i à j). For every $j \in J$, we define

$$S_j = \left\{u \in S : \left|u(x_1) - y_{j(1)}\right| \leq \varepsilon, \ldots, \left|u(x_k) - y_{j(k)}\right| \leq \varepsilon\right\}$$

By definition, $\left(S_j\right)_{j \in J}$ is a covering of S. On a que toutes mes fonctions font parti de S_j car toutes les valeures de mes fonctions aux points x_i sont comprises entre $[-c, c]$ et donc, sont proche d'un y_j par définition. On a que,

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$$

Let $u, v \in S_j$ and $x \in X$. On sait que,

$$|u(x)-v(x)| \leqslant |u(x)-u(x_m)| + |v(x)-v(x_m)| + \left|u(x_m)-y_{j(m)}\right| + \left|v(x_m)-y_{j(m)}\right|$$

There exists m such that $|x-x_m| \leq \delta$ (x est dans la boule). We have (puisque x est dans S_j),

$$\left|u(x_m)-y_{j(m)}\right| \leq \varepsilon, \quad \left|v(x_m)-y_{j(m)}\right| \leq \varepsilon$$

and, by (b),

$$|u(x)-u(x_m)| \leq \varepsilon, \quad |v(x)-v(x_m)| \leq \varepsilon$$

Hence $|u(x)-v(x)| \leq 4\varepsilon$, and since $x \in X$ is arbitrary, $\|u-v\|_\infty \leq 4\varepsilon$. If S_j is nonempty, then $S_j \subset B[u, 4\varepsilon]$. since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, S is precompact in $\mathcal{BC}(X)$ by Fréchet's criterion. $\square$

Remarque construction de la preuve : Enfait, si j'ai deux fonctions (jaune et bleue) qui passent par le même intervalle, alors je sais que par ma propriété d'équicontinuité uniforme, non seulement elles seront à une distance plus petit que ε en chaque point $x_1, \ldots, x_n$, mais en plus, elles seront à une distance plus petite que ε partout.

Passons au cas L^p.

Theorem 4.4.2. (Théorème de M. Riesz) : Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p < \infty$, and let $S \subset L^p(\Omega)$ be such that

(i) $c = \sup_{u \in S} \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$

(ii) for every $\varepsilon > 0$, there exists $\omega \subset\subset \Omega$ such that $\sup_{u \in S} \|u\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon$
Je peux trouver un ensemble ω suffisamment grand pour que en dehors de cet ensemble, ma norme soit "nulle", ma fonction n'as pas de norme.

(iii) for every $\omega \subset\subset \Omega$, $\lim_{y \to 0} \sup_{u \in S} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} = 0$
Ca c'est exactement l'équicontinuité. On demande que nos translations convergent toutes exactement à la même vitesse.

Then S is precompact in $L^p(\Omega)$

Si on ne demandais pas le suprémum dans le point (iii), alors, ca reviens à remontrer quelques chose vu plus haut. Lorsque que je pends des translations vers 0, la limite de mes translations (qui sont continues) vaut 0. Ici, on ne demande pas la même chose, on demande plutôt que la convergence de toutes mes translations se fasse, à la même vitesse.
Le fait que la limite des translations d'une fonction tende vers ma fonction reviens à dire que celle-ci sont continues (4.3.8) et là on demande en plus qu'elle soient uniformément continues (suprémum en plus, toutes les translations convergent à la même vitesse).
Puisque pour $p = \infty$, on perd la propriété (b) du lemme 4.3.8, alors, ici, notre théorème n'est plus valable pour $p = \infty$ car le cirtère (c) demandé ici est inutilisable.

Démonstration. Let $\varepsilon > 0$ and ω correspond to ε by (ii). Assumption (iii) implies the existence of $0 < \delta < d(\omega, \partial\Omega)$ such that for every $|y| \leq \delta$

$$\sup_{u \in S} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon$$

We choose $n > 1/\delta$. We deduce from Lemma 4.3 .7 that, (l'écart de la convolution avec la fonction convolée est plus petit que le suprémum de mes translations)

$$\sup_{u \in S} \|\rho_n * u - u\|_{L^p(\omega)} \leq \sup_{u \in S} \sup_{|y|<1/n} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon \qquad (*)$$

We define

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \omega) < 1/n\right\} \subset\subset \Omega$$

On fixe un n.

Let us prove that the family $R = \left\{\rho_n * u|_\omega : u \in S\right\}$ satisfies the assumptions of Ascoli's theorem in $\mathcal{BC}(\omega)$. On définit R de telle manière à avoir des convolutions de fonctions u, qui ne sont pas très éloignées des fonctions u par $(*)$.

1. By (a), for every $u \in S$ and for every $x \in \omega$, we have

$$|\rho_n * u(x)| \leq \int_U \rho_n(x-z)|u(z)|dz \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |\rho_n| \, \|u\|_{L^1(U)} \leq c_1$$

C'est fini car puisque U est borné, mesure finie, l'inégalité de Holder me dit que la norme $||u||_{L^1}$ va être plus petit que la norme $||u||_{L^p}$ (qui est finie, donc c'est oke pcq on a cette propriété sur tout ensemble de mesure finie, 4.2.5).

2. By (a), for every $u \in S$ and for every $x, y \in \omega$, we have

$$\begin{aligned}
|\rho_n * u(x) - \rho_n * u(y)| &\leq \int_U |\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z)| \,.|u(z)|dz \\
&\leq \sup_z |\rho_n(x-z) - \rho_n(y-z)|.\|u\|_{L^1(U)} \\
&\leq c_2|x-y| \,.\|u\|_{L^1(U)} \\
&\leq c_2|x-y|
\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième ligne à la troisième ligne se fait car la dérivée est bornée, par l'inégalité des accroissements finis.
On a vérifié les hypothèses d'Ascoli donc, on peut l'utiliser pour dire que R is precompact in $\mathcal{BC}(\omega)$. Je peux donc contenir R dans une réunion des boules dans BC,

$$R = \bigcup_{j \in J}^{n} B[v_j, \varepsilon]$$

De plus,

$$(||v_j - v||_{L^p(\omega)})^p \leqslant m(\omega)||v_j - v||_\infty^p$$

La norme L^p est alors controlée par la norme infinie. Grâce à celà, on peut essayer de recouvrir R par des boules dans la norme L^p.
Since

$$\|v\|_{L^p(\omega)} \leq m(\omega)^{1/p} \sup_\omega |v|$$

R is precompact in $L^p(\omega)$. On peut donc trouver un recouvrement dans $L^p(\omega)$,

$$R = \bigcup_{j=1}^{l} B[v_j, \eta]$$

Avec $\eta = \frac{2\varepsilon}{m(\omega)^{1/p}}$. ALors, $(*)$ implies the existence of a finite covering of $S|_\omega$ in $L^p(\omega)$ by balls of radius $\varepsilon + \eta$. Assumption (b) ensures the existence of a finite covering of S in $L^p(\Omega)$ by balls of radius $2\varepsilon + \eta$. since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, S is precompact in $L^p(\Omega)$ by Fréchet's criterion. □

Remarque : Dans le Willem, on prend les boules après avoir controlé les normes. Donc, on a pas besoin du η. Si R est précompact dans BC, alors, en borant la norme L^p d'un élément dans R à l'aide de la norme infinie de l'espace BC, on en déduit qu'il sera encore précompact dans L^p. (on dilate juste les boules et c'est bann)

Ce théorème a une réciproque :
Soit S une partie précompacte de $L^p(\Omega)$. Alors,

(a) $c = \sup_{u \in S} \|u\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$
(b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{u \in S} \|u\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon$;
(c) pour tout $\omega \subset\subset \Omega, \lim_{y \to 0} \sup_{u \in S} \left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, le Critère de Fréchet assure l'existance d'un recouverment fini de S par des boules $B[u_1, \varepsilon], \ldots, [u_k, \varepsilon]$. Dès lors, pour chaque $u \in S$, il existe $j(u)$ tel que,

$$||u - u_j(u)||_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Avec $u_j(u)$ le centre de la boule contenant u.
(a) Pour chaque $u \in S$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|u - u_{j(u)}\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|u_{j(u)}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon + \max_{1\leq j\leq k} \left\|u_j\right\|_{L^p(\Omega)} < \infty$$

On a que $\max_{1\leq j\leq k} \left\|u_j\right\|_{L^p(\Omega)}$ est borné car $u_j \in L^p$ et qu'on prend le maximum sur un ensemble fini d'éléments car il y a un nombre fini de boules.

(b) Pour chaque $1 \leq j \leq k$, il existe $\omega_j \subset\subset \Omega$ tel que $\left\|u_j\right\|_{L^p\left(\Omega\setminus\omega_j\right)} \leq \varepsilon$.
En effet, nous pouvons écrire

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{\Omega_n}$$

où $\widetilde{\Omega_n} = \Omega_n \cap B(0,n)$ et $\Omega_n = \{x \in \Omega : d(x,\partial\Omega) > 1/n\}$, si x est dans Ω_n, alors, x est à une distance $1/n$ du bord de Ω.
On observe facilement que la fonction caractéristique de $\widetilde{\Omega_n}$ tend vers celle de Ω. Nous avons alors,

$$\int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega_n}} \left|u_j\right|^p \mathrm{d}x = \int_{\Omega} \left(1 - \chi_{\widetilde{\Omega_n}}\right) \left|u_j\right|^p \mathrm{d}x$$

Comme $\chi_{\widetilde{\Omega_n}} \to 1$ sur Ω et $\left(1 - \chi_{\widetilde{\Omega_n}}\right)\left|u_j\right|^p \leq |u|^p \in L^1(\Omega)$,(borné) le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraine que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega_n}} \left|u_j\right|^p \mathrm{d}x = 0$$

Il suffit alors de prendre $\omega_j = \widetilde{\Omega_n}$ avec n tel que

$$\left\|u_j\right\|_{L^p\left(\Omega\setminus\widetilde{\Omega_n}\right)} \leq \varepsilon$$

Posons

$$\omega = \bigcup_{j=1}^{k} \omega_j$$

Dès lors

$$\|u\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon + \left\|u_{j(u)}\right\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \leq 2\varepsilon$$

En passant au suprémum, on obtient l'inégalité cherchée.

(c) Soient $\omega \in \Omega$ et $u \in S$. Pour tout $|y| < d(\omega,\partial\Omega)$

$$\begin{aligned}\left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} &\leq \left\|\tau_y u - \tau_y u_{j(u)}\right\|_{L^p(\omega)} + \left\|\tau_y u_{j(u)} - u_{j(u)}\right\|_{L^p(\omega)} + \left\|u - u_{j(u)}\right\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq 2\varepsilon + \left\|\tau_y u_{j(u)} - u_{j(u)}\right\|_{L^p(\omega)}\end{aligned}$$

Cette première norme $\left\|\tau_y u - \tau_y u_{j(u)}\right\|_{L^p(\omega)}$ est plus petite que ε car, par un changement de variable,

$$\int_{\omega} \left|\tau_y u - \tau_y u_{j(u)}\right|^p \mathrm{d}x = \int_{\omega} \left|u(x-y) - u_{j(u)}(x-y)\right|^p \mathrm{d}x = \int_{\omega-y} \left|u(x) - u_{j(u)}(x)\right|^p \mathrm{d}x$$

Comme $\omega - y \subset \Omega$ c'est une translation contenue dans Ω,

$$\int_{\omega-y} \left|u(x) - u_{j(u)}(x)\right|^p \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} \left|u(x) - u_{j(u)}(x)\right|^p \mathrm{d}x = \|u(x) - u_{j(u)}(x)\|_{L^p(\Omega)}^p < \varepsilon$$

La continuité des translations assure l'existence de $0 < \delta_j < d(\omega,\partial\Omega)$ tel que, pour tout $|y| \leq \delta_j$

$$\left\|\tau_y u_j - u_j\right\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon$$

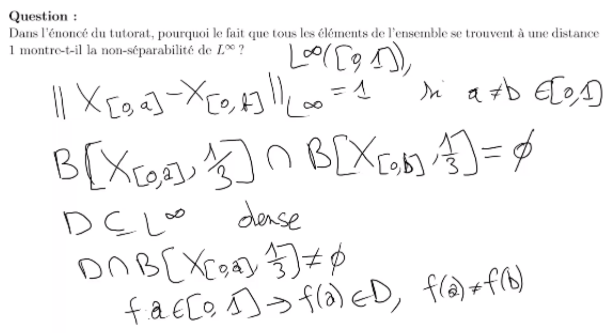
Posons $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_k\}$. Pour tout $|y| \leq \delta$ et pour tout $u \in S$

$$\left\|\tau_y u - u\right\|_{L^p(\omega)} \leq 3\varepsilon$$

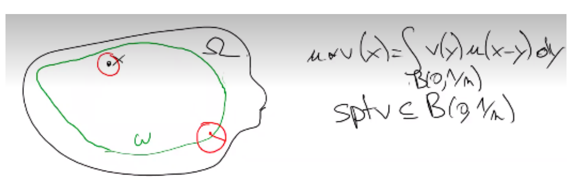
□

4.5 Remarques sur le chapitre 4 : Lebesgue Spaces

- Attention, $sup(A+B) \neq sup(A) + sup(B)$
- Si une fonction u est dans L^p alors, u^p est dans L^1.
- Si une fonction est intégrable, alors, elle sera finie presque partout.
- $p' = \frac{p}{p-1}$
- La convergence presque partout est une convergence ponctuelle où on se permet de retirer un ensemble négligeable. On converge dans $\mathbb{R}^n$.
- Si $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, les fonctions continues à support compact, alors, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée.
- Il y'a un théorème qui dit que si on a que la boule unité fermée est compacte dans un ensemble, alors, cet espace sera de dimension finie.
- Un point c'est un compact.
- Si une fonction est dans L^p c'est que sa norme dans cet esapce est finie par définition des normes et espaces L^p
- Attention, $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p \neq \|u\|_\infty$ n'est pas vrais si on a pas un ensemble de mesure finie. Il faut faire très attention si on le manipule.
  Contre-exemple : Si on prend une fonction u telle que $\|u\| = 1$ et que u est la constante 1 partout, alors, sa norme dans L^∞ vaut 1 mais dans L^p, les normes valent l'infini. Et donc, la limite est fausse.
- (tutora 4)
  On crée ici une famille non-dénombrable de fonctions ($[0,1]$ est non-dénombrable), qui sont tous à une distance 1 les uns des autres. Cela n'est pas possible dans L^∞, car si on avais une partie dense dénombrable, alors, on aurais pu pour chacun des $\chi_[0,a]$ trouver une fonction dans cette famille à une distance strictement plus petite que $1/2$. Puisqu'on peut pas utiliser le même élément pour deux $\chi_[0,a]$ différents. Donc on aurait besoin d'une quantité non dénombrable d'éléments, donc on a notre contradiction.



- Pourquoi c'est si important que $\omega \subset\subset \Omega$, que $\bar{\omega}$ soit compact dans Ω ?
  Si je convole deux fonctions entre elles, on veut que notre ensemble ω soit à une assez grande distance du bord de Ω de telle manière à ce que si on translate de x, je reste toujours dans mon ensemble Ω.



- Nous devons considérer ici $\mathcal{L} = \mathcal{K}(\Omega)$, c'est cet ensemble là qu'on utilise comme ensemble élémentaire dans notre théorie de l'intégrale.
- Avec la mesure de Lebesque,

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f(x)|^p dx \leq \sup_\Omega |f|^p . \int 1 dx \leq \sup_\Omega |f|^p . \mu(\Omega)$$

  Après, on met tout à la racine p^{eme} et le tour est joué !
- Pour montrer la convergence uniforme, montre que la norme infinie tends vers 0, on essaye de prendre un suprémum et de montrer que tout tend vers 0.

Chapitre 5

Dualité

5.1 Convergence faible

A fruitful process in functional analysis is to associate to every normed space X the dual space X^* of linear continuous functionals on X.
Definition 5.1.1 : Let X be a normed space. The dual X^* of X is the space of linear continuous functionals on X.
Quelle est la norme sur X^* ?
On a définis la norme :

$$\|f\|_* = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\| \leq 1}} < f, u >$$

Qu'est-ce que c'est, converger dans X^* ?
En général, c'est difficile d'extraire une sous-suite qui converge avec cette norme donc on va définir la convergence FAIBLE. (attention, elle n'est pas métrisable, pas de notion de distance associée à cette convergence faible)
$\hookrightarrow$A sequence $(f_n) \subset X^*$ converges weakly to $f \in X^*$ if (f_n) converges simply to f. We then write $f_n \rightharpoonup f$.
C'est à dire, si pour tout $u \in X$, alors, $< f_n, u > \longrightarrow < f, u >$ dans $\mathbb{R}$. (ceci est la convergence ponctuelle)
On peut aussi définir la convergence FORTE, $f_n \longrightarrow f$ lorsque $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$, pour $n \longrightarrow \infty$. (convergence "usuelle", celle de la norme que j'ai mise sur mon espace, c'est la convergence en norme)

L'idée de la dualité est de regarder l'espace des fonctions linéaires continues $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.
Exemple : Si $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nx1}$, alors, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{1xn}$. Donc, si $f \in X*$ et $u \in X$, alors,
$< f, u >= f(u) = f.u$ (avec le produit matriciel).

Proposition : La convergence forte implique la convergence faible.

Démonstration. Si $u \in X$, alors par linéarité, on a,

$$0 \leq | < f_n, u > - < f, u > | = | < f_n - f, u > | \leq \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\| \leq 1}} | < f_n - f, u > | \leq \|f_n - f\|.\|u\|$$

Puisque u est fixé et que $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$, par la propriété de l'étau, nous avons que $| < f_n, u > - < f, u > |$ va tendre vers 0. □

Let us translate Proposition 3.2.5. and Corollary 3.2.7. On traduit convergence simple par convergence faible. La différence entre mes théorèmes est que $A_n v =< f_n, v >$ et ici, $Y = \mathbb{R}$, un espace complet. Mais au final, ils sont équivalents car $f = A$ et convergence faibles est définie comme la convergence complète.

Proposition 5.1.2 : Let Z be a dense subset of a normed space X and $(f_n) \subset X^*$ such that
(a) $\sup_n \|f_n\| < \infty$
(b) for every $v \in Z, \langle f_n, v \rangle$ converges.
Then (f_n) converges weakly to $f \in X^*$ and

$$\|f\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|f_n\|$$

Cet énoncé nous permet de dire que si on a convergence faible sur un petit sous-ensemble, alors,on l'aura sur un ensemble plus grand. Lorsque j'ai convergence sur un ensemble dense, alors j'ai convergence faible.

Theorem 5.1.3 (Banach-Steinhaus) : Let X be a Banach space and $(f_n) \subset X^*$ simply (or weakly) convergent to f. Then (f_n) is bounded, $f \in X^*$, and

$$\|f\| \leq \varliminf_{n \to \infty} \|f_n\|$$

↪Cet énoncé nous dit que si une suite converge simplement/faiblement , elle est bornée.

Theorem 5.1.4 (Banach) : Let X be a separable normed space. Then every sequence bounded in X^* contains a weakly convergent subsequence.

En général, si un espace X est normé et de dimension infinie (par exemple, Hilbert), alors, il existe une suite u_n dans X qui n'as pas de sous suite de Cauchy. C'est pareil si le dual est de dimension infinie, on peut trouver une suite qui n'admet pas de sous-suite de Cauchy.
On a ici au-dessus, une variante pour les espaces normé de dimension FINIE du théorème de Wierstrass qui lui se fait dans $\mathbb{R}^n$ (dim$< \infty$).
On peut remarquer que nous n'avons aucune hypothèses sur X appart qu'il était séparable. Ce qui était important était que l'espace d'arrivée soit Banach pour appliquer le théorème 5.1.2. On utilise aussi le fait que notre suite est bornée à deux endroits, le premier pour construire nos sous-suites et aussi, à la fin, pour dire que $g_{n,n}$ converge et appliquer le le théorème 5.1.2.
C'est interessant d'avoir ce théorème pour pouvoir montrer un théorème des bornes atteintes dans des situations comme celle-ci et pouvoir minimiser des problèmes. De plus, on remarque qu'en dimension infinie, en général les suites bornées n'ont pas de sous-suites convergentes fortement et donc le fait de savoir que si on affaiblit notre notion de convergence, on a une sous-suite qui converge faiblement, c'est interessant.

Démonstration. A Cantor diagonal argument will be used.
Let (f_n) be bounded in X^* and let (v_k) be dense in X. (X est séparable donc il existe un ensemble $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ dense dans X) since $(\langle f_n, v_1\rangle)$ is bounded (parce que notre suite est coincée entre deux suites bornées : $0 \leq \|f_n, v_1\| \leq \|f_n\|.\|v_1\| = \|f_n\|.c < \infty$, donc elle est bornée) , there exists a subsequence $\left(f_{1,n}\right)$ of (f_n) such that $\left\langle f_{1,n}, v_1\right\rangle$ converges as $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$.
Puisque $(\langle f_n, v_2\rangle)$ is bounded in $\mathbb{R}$ (même argument) , there exists a subsequence $\left(f_{2,n}\right)$ of $\left(f_{1,n}\right)$ such that $\left\langle f_{2,n}, v_2\right\rangle$ converges as $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$.
By induction, for every k there exists a subsequence $\left(f_{k,n}\right)$ of $\left(f_{k-1,n}\right)$ such that $\left\langle f_{k,n}, v_k\right\rangle$ converges as $n \to \infty$.
On a construit des suites $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

- $(\left\langle f_{k,n}, v_k\right\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converges as $n \to \infty$ dans $\mathbb{R}$.
- $(f_{k+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de notre suite $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$.
- On en déduis que $(f_{l,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ si $k \leq l$.

On pose $g_n = f_{n,n}$, on a que $(\langle g_n, v_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car $(g_n)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\leq n}}$ est une sous-suite de $f_{n,k}$ et qui est convergente. Puisque $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ est dense et que the sequence $g_n = f_{n,n}$ is bounded, and for every $k, \langle g_n, v_k\rangle$ converges as $n \to \infty$. By Proposition 5.1.2, (g_n) converges weakly in X^* □

Et donc dans cette preuve, on utilise l'argument de cantor parce que on veut trouver une sous-suite qui converge faiblement pour tout $v_k, k \in \mathbb{N}$. Il faut à la fois faire une sous-suite et à la fois vérifier la convergence sur un ensemble dénombrable, donc les deux ensembles ca nous fais notre suite de sous-suite.On utilise au début deux propriétés des suites réeles, toute suite bornée admet une sous-suite et toute sous-suite d'une suite convergente converge.

Example (Weak convergence) : Let us prove that $\mathcal{BC}(]0,1[)$ is not separable. We define on this space the functionals $\langle f_n, u\rangle = u(1/n)$. It is clear that $\|f_n\| = 1$. For every increasing sequence (n_k), there exists $u \in \mathcal{BC}(]0,1[)$ such that $u\left(1/n_k\right) = (-1)^k$ Hence

$$\varliminf_{k\to\infty}\left\langle f_{n_k}, u\right\rangle = -1, \varlimsup_{k\to\infty}\left\langle f_{n_k}, u\right\rangle = 1$$

and the sequence $\left(f_{n_k}\right)$ is not weakly convergent. Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$. We define

$$\mathcal{K}_+(\Omega) = \{u \in \mathcal{K}(\Omega) : \text{ for all } x \in \Omega, u(x) \geq 0\}$$

Theorem 5.1.5 : Let $\mu : \mathcal{K}(\Omega) \to \mathbb{R}$ be *a* linear functional such that for every $u \in \mathcal{K}_+(\Omega), \langle\mu, u\rangle \geq 0$. Then μ is a positive measure.

Definition 5.1.6 : Let $M \geq 1$. A measure is a linear functional $\mu : \mathcal{K}\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right) \to \mathbb{R}$ such that for every $u \in \mathcal{K}_+(\Omega)$

$$\langle|\mu\;|, u\rangle = \sup\left\{\langle\mu, f\rangle : f \in \mathcal{K}\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right), |f| \leq u\right\} < +\infty$$

The measure is scalar when $M = 1$ and vectorial when $M \geq 2$.

Theorem 5.1.7 : Let $\mu : \mathcal{K}\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right) \to \mathbb{R}$ be a measure. Then the functional defined on $\mathcal{K}(\Omega)$ by

$$\left\langle \langle \mu \mid, u \rangle = \left\langle |\mu|, u^+ \right\rangle - \langle |\mu|, u^- \right\rangle$$

is a positive measure.

Corollary 5.1.8 (Jordan decomposition theorem) : Let $\mu : \mathcal{K}(\Omega) \to \mathbb{R}$ be a scalar measure. Then $\mu = \mu_+ - \mu_-$, where

$$\mu_+ = \frac{|\mu| + \mu}{2}, \quad \mu_- = \frac{|\mu| - \mu}{2}$$

are positive measures.

We need a new function space.

Definition 5.1.9 : We define
$C_0(\Omega) = \{u \in \mathcal{BC}(\Omega)$: for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact subset K of Ω such that $\sup_{\Omega \setminus K} |u| < \varepsilon\big\}$

Example : The space $C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ is the set of continuous functions on $\mathbb{R}^N$ tending to 0 at infinity.

Proposition 5.1.10 : The space $C_0(\Omega)$ is the closure of $\mathcal{K}(\Omega)$ in $\mathcal{BC}(\Omega)$. In particular, $C_0(\Omega)$ is separable.

Definition 5.1.11 : The total variation of the measure $\mu : \mathcal{K}\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right) \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\|\mu\|_\Omega = \sup\left\{\langle \mu, f\rangle : f \in \mathcal{K}\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right), \|f\|_\infty \leq 1\right\}$$

The measure μ is finite if $\|\mu\|_\Omega < \infty$. By the preceding proposition, every finite measure μ has a continuous extension to $C_0\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$. A sequence (μ_n) of finite measures converges weakly to μ if for every $f \in C_0\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$

$$\langle \mu_n, f\rangle \to \langle \mu, f\rangle$$

Theorem 5.1 .12 (de la Vallée Poussin, 1932). Every sequence (μ_n) of measures on Ω such that sup $\|\mu_n\|_\Omega < \infty$ contains a weakly convergent subsequence.

5.2 James Representation Theorem

Let us define two useful classes of normed spaces. On a vu qu'en général, les normes ne sont pas des fonctions différentiables. On va alors affaiblir la notion de différentiabilité et demander de la dérivabilité directionnelle (ailleurs qu'en zéro). Dans quelle direction ma fonction varie ?

Definition 5.2.1 : A normed space is smooth if its norm $F(u) = \|u\|$ has a linear directional derivative $F'(u)$ for every $u \neq 0$

$$\langle F'(u), v\rangle = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(u + \varepsilon v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon}$$

On définit une norme comme étant lisse si elle a une dérivée directionnelle en tout point différente de zéro. La dérivée $F'(u) \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. La norme aurait des propriétés de différentiabilité.

Definition 5.2.2 : A normed space is uniformly convex if for every $0 < \varepsilon \leq 1$

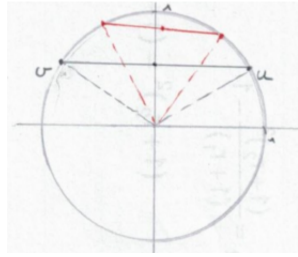
$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\| : \|u\| = \|v\| = 1, \|u - v\| \geq 2\varepsilon\right\} > 0$$

The function $\delta_X(\varepsilon)$ is the modulus of convexity of the space. (que ca soit $\leq$, c'est facile à avoir si X est normé, mais que ca soit strictement plus grand que zéro, c'est dur)
On pourrait remplacer $\frac{u+v}{2}$ par une autre combinaison convexe dépendant de lambda mais alors, notre module dépend de lambda et c'est plus embêtant et plus de travail.

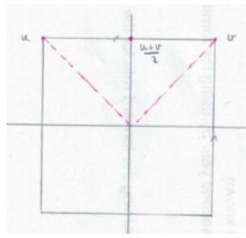
Interprétation géométrique de la condition de stricte convexité :
Cette propriété s'illustre sur les boules unités des espaces normés. Etre uniformément convexe c'est dire que si on a deux vecteurs de norme unitaire, sur le bord de notre boule unité, $\|u\|$ et $\|v\|$, alors,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq \frac{\|u\| + \|v\|}{2} \leq 1$$

Si le milieu de notre segment liant ces deux vecteurs est proche du bord, alors, les deux vecteurs ne sont pas trop loin les uns des autres et ce uniformément par rapport à la longeur du segement /distance des points.
Si cette propriété est vérifiée pour un espace, alors, mon espace est uniformément convexe.
Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme Euclidienne, on a

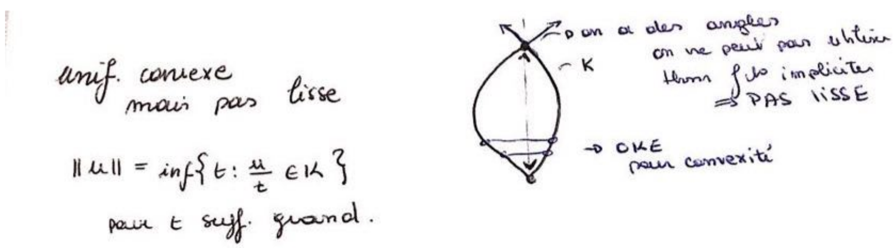


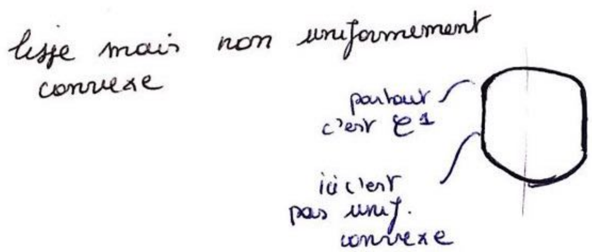
Sur L^2 muni de la norme l^∞, $\|u\| = max(u_1, u_2)\|$. On a



Cet espace n'est donc pas uniformément convexe. On a deux vecteurs éloignés qui ont leur segement très proche du bord ce qui voudrait dire qu'ils sont poches.
De plus, définissons la convexité stricte. Un espace est strictement convexe lorsque le milieu du segrement entre deux points (extrémités de deux vecteurs), n'est pas sur le bord de la boule.
En dimension finie, la convexité stricte est équivalente à convexité uniforme.

Est-ce que convexité uniforme implique espace lisse et réciproquement ? Quel est le lien entre ces deux notions ? Oui, cela peut arriver, observons différents cas avec différentes boules unité.





Proposition 5.2.3 : Let X be a smooth normed space and $u \in X\backslash\{0\}$. Then $\|F'(u)\| = 1$ and

$$\langle F'(u), u\rangle = \|u\| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} \langle f, u\rangle$$

Cette proposition nous dit que $F'(u)$ atteint toujours son maximum dans la direction u.

Démonstration. On a que $F(t.u) = |t|.F(u)$ si F est la norme, donc, par définition de norme,

$$\langle F'(u), u\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u+\varepsilon u) - F(u)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(|1+\varepsilon| - 1)||u||}{\varepsilon} = \|u\| \qquad \forall \varepsilon > -1$$

De plus, si $\|f\|_{X^*} = 1$, alors,

$$< f, u > \leq \|f\|_{X^*}.\|u\|_X \leq \|u\|_X \qquad (*)$$

On déduis de plus que,

$$\frac{\langle F'(u), u\rangle}{\|u\|} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\langle F'(u), u\rangle}{\|u\|} \leq \frac{||F'(u)||.||u||}{\|u\|} = \|F'(u)\|$$

Mais aussi que, pour tout v,

$$\langle F'(u), v\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(u+\varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon} \leq \frac{\|u\| + |\varepsilon|.\|v\| - \|u\|}{\varepsilon} = \|v\|$$

Par $(*)$, nous avons que $\|F'(u)\| = 1$. $\square$

Choose $f \neq 0$ in the dual of the normed space X and consider the dual problem (on cherche le u qui atteint le suprémum) :

$$\begin{cases} \text{maximize :} \quad \langle f, u\rangle & \Rightarrow < f, u >= \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=1}} \langle f, v\rangle = \|f\|_{X^*} \\ u \in X, \|u\| = 1 \end{cases}$$

Est-ce que ce problème $(\mathcal{P})$ a une solution ? On cherche à résoudre ce problème car comme ça, on aura une solution aussi pour le théorème de représentation de james car on pourra écrire $f = \|F'(u)\|$, c.à.d décrire un élément du dual sur base d'un élément de notre espace.

Lemma 5.2.4. Let X be a smooth normed space, $f \in X^*\backslash\{0\}$, and u a solution of $(\mathcal{P})$. Then $f = \|f\|F'(u)$.

Ce théorème est une variante du théorème de Fermat. Si une fonction atteint son maximum, sa dérivée d'annule.

Démonstration. By assumption,

$$\langle f, u\rangle = \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=1}} \langle f, v\rangle = \|f\|_{X^*}$$

Let $v \in X$. The function ci-dessous est dérivable car par hypothèse, notre espace est lisse et donc, $\|F(u+\varepsilon v)\|$ est dérivable et aussi car on sait que $\langle f, u+\varepsilon v\rangle = \langle f, u\rangle + \varepsilon\langle f, v\rangle$ est dérivable.

$$g(\varepsilon) = \|f\|_{X^*}\|u+\varepsilon v\| - \langle f, u+\varepsilon v\rangle \qquad (*)$$

est positive et par $(*)$ reaches its minimum at $\varepsilon = 0$. Hence $g'(0) = 0$ and

$$0 = g'(0) = (\|f\|_{X^*}.F(u+\varepsilon v) - \langle f, u\rangle + \varepsilon\langle f, v\rangle)' = \|f\|_{X^*} \langle F'(u), v\rangle - \langle f, v\rangle = 0$$

since $v \in X$ is arbitrary, the proof is complete. $\square$

Lemma 5.2.5. Let X be a uniformly convex Banach space and $f \in X^*\backslash\{0\}$. Then $(\mathcal{P})$ has a unique solution.

$\hookrightarrow$ On a ici, une version du théorème des bornes atteintes pour notre situation. Il y a un point où j'atteint mon maximum. Il existe une solution à notre problème.

Démonstration. Let $(u_n) \subset X$ be a maximizing sequence for the problem $(\mathcal{P})$

$$\|u_n\| = 1, \quad \langle f, u_n\rangle \to \sup_{\substack{u\in X\\ \|u\|=1}} \langle f, u\rangle = \|f\|, \quad n \to \infty$$

Une telle suite existe. Posons $A = \{\langle f, u\rangle : u \in X, \|u\| = 1\}$. On a $\|f\| = \sup(A)$. Mais si $n \in \mathbb{N}$, on sait que $\|f\| - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de A. Dès lors, il existe $u_n \in X$ tel que $\|u_n\|_X = 1$ et $\langle f, u_n\rangle > \|f\| - \frac{1}{n}$. Dès lors, par l'étau, nous avons que $\lim_{n\to\infty}\langle f, u_n\rangle = \|f\|$. Car

$$\|f\| \geq \langle f, u_n\rangle > \|f\| - \frac{1}{n}$$

En général, on ne sait jamais que le max ou le min existe mais on sait toujours qu'il existe une suite minimisante ou maximisante dans un problème de maximisation.
Let us prove that (u_n) is a Cauchy sequence. Let $0 < \varepsilon < 1$ and let $\delta_X(\varepsilon)$ be the modulus of convexity of X at ε. There exists m such that for $j, k \geq m$

$$\langle f, u_j\rangle \geq \|f\| - \delta_X(\varepsilon)\|f\|, \qquad \delta_X(\varepsilon)\|f\| > 0$$

Si celq est vrais pour j, c'est aussi vrais pour k, dès lors,

$$\|f\|(1-\delta_X(\varepsilon)) < (\langle f, u_j\rangle + \langle f, u_k\rangle)/2 = \left\langle f, \frac{u_j+u_k}{2}\right\rangle \leq \|f\|\frac{\|u_j+u_k\|}{2}$$

Puisqu'on a un infimum dans la définition de $\delta_X(\varepsilon)$ et que $1 - \left\|\frac{u_j+u_k}{2}\right\|_X > \delta_X(\varepsilon)$ alors,
$j,k \geq m \Rightarrow \left\|u_j - u_k\right\| < 2\varepsilon$.
Puisque X is complete, (u_n) converges to $u \in X$.
By continuity, $\|u\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 1$ and $|\langle f,u\rangle - \|f\|_{X^*}| \leq |< f,u-u_n >| + |< f,u_n > - \|f\|_{X^*}|$, les deux termes de cette égalité tendent vers zéro, le premier car $(u_n) \longrightarrow u$ et le deuxième car par hypothèse, $\langle f,u_n\rangle \to \sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|=1}} \langle f,u\rangle = \|f\|$. Donc, $\langle f,u\rangle \longrightarrow \|f\|_{X^*}$.
Hence u is a solution of $(\mathcal{P})$ mais est-elle unique ?
Assume that u and v are solutions of $(\mathcal{P})$. The sequence $(u,v,u,v,\ldots)$ is maximizing. Hence it is a Cauchy sequence, so that $u = v$,

$$\|f\|_{X^*} = \frac{< f,u > + < f,v >}{2} = \frac{< f,u+v >}{2} \leq \|f\|_{X^*}\frac{\|u+v\|}{2}$$

Donc, si $u \neq v$, on a $\|u - v\| \geq 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. On obtient alors,

$$1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_X < 0$$

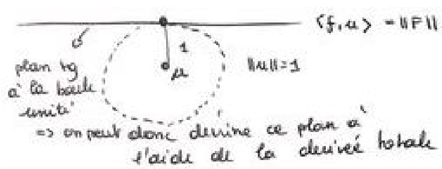
Or, cela ne peut pas arriver car $\delta_X(\varepsilon) > 0$. □

From the two preceding lemmas, we infer the **James representation theorem**.

Theorem 5.2.6. Let X be a smooth uniformly convex Banach space and $f \in X^*\backslash\{0\}$. Then there exists one and only one $u \in X$ such that

$$\|u\| = 1, \quad \langle f,u\rangle = \|f\|, \quad f = \|f\|F'(u)$$

Géométriquement, on peut voir ca comme : si on regarde tout les vecteurs u tels que $\langle f,u\rangle = \|f\|$, $\|u\| = 1$, il y en a un qui est le plus proche.



On peut alors décrire $\|f\|$ à l'aide de la dérivée totale, le plan tengant. Il existe un point de tengance tel qu'on peut décrire l'espace tangent à la sphère qui est bien définit parce que j'ai une norme qui a la propriété d'être lisse.
"Toute fonctionnelle linéaire continue est un multiple de la dérivée de la norme".
On décrit le dual X^* a partir de X.
En soi, on avais montré au début que $\|F'(u)\|_{X^*} = 1$, ils appartiennent à la sphère unité du dual.
From the James representation theorem, we deduce a variant of the Hahn Banach theorem.

Theorem 5.2.7. Let Y be a subspace of a smooth uniformly convex Banach space X and $f \in Y^*$. Then there exists one and only one $g \in X^*$ such that $\|g\| = \|f\|$ and $g|_Y = f$

$\hookrightarrow$ On peut voir qu'il n'existe que une unique extension. On a aussi que si X est uniformément convexe, alors Y le sera aussi, les propriétés sont automatiquement héritées par le sous-espace.

Démonstration. Existence. If $f = 0$, then $g = 0$. Let $f \neq 0$.
Si on a une fonctionnelle linéaire, on peut toujours l'étendre à un espace fermé, c'est vrai parce que on sait que $Y \subset \bar{Y} \subset X$, qui est Banach. En appliquant la proposition 3.2.3, à Y, sous-espace de $\bar{Y} \subset X$ (parce que tout sous-espace vectoriel normé d'un espace normé est normé avec la même norme), on sait qu'il existe $f' \in \mathcal{L}(\bar{Y},\mathbb{R})$ telle que $f'|_Y = f$. Donc after extending f to $\bar{Y}$, by Proposition 3.2.3, we can assume that Y is closed. The James representation theorem implies the existence of one and only one $u \in Y$ such that

$$\|u\| = 1, \quad \langle f,u\rangle = \|f\|, \quad f = \|f\|\,(F|_Y)'\,(u)$$

Define $g = \|f\|F'(u)$. It is clear that $\|g\| = \|f\|$ and

$$g|_Y = \|f\|\,(F|_Y)'\,(u) = f$$

Uniqueness. If $h \in X^*$ is such that $\|h\| = \|f\|$ and $h|_Y = f$, then

$$\langle h,u\rangle = \langle f,u\rangle = \|f\| = \|h\|$$

Lemma 5.2 .4 implies that $h = \|h\|F'(u) = \|f\|F'(u)$ □

5.3 Dualité des espaces de Hilbert

By the Cauchy-Schwarz inequality, for every g fixed in the Hilbert space X, the linear functional

$$X \to \mathbb{R} : v \mapsto (g \mid v)$$

is continuous. The Fréchet-Riesz theorem asserts that every continuous linear functional on X has this representation.

Lemme1 : Si X est un espace de Hilbert, alors X est un espace lisse.

Démonstration. On montre cela grâce la définition 5.1.2. Nous devons vérifier qu'il existe $F'(u)$ et que cette fonction est linéaire. Dans ce cas, notre espace sera lisse.
Posons $F(u) = \|u\| = \sqrt{(u|u)}$, on profite du fait qu'on a un produit scalaire. Si $u \in X\backslash\{0\}$, on calcule alors,

$$F(u+\varepsilon v) = \sqrt{(u|u) + 2\varepsilon(u|v) + \varepsilon^2(v|v)}$$

Lorsqu'on prend la dérivée, on obtient,

$$\langle F'(u), v\rangle = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{F(u+v\varepsilon) - F(u)}{\varepsilon} = \frac{2(u|v) + 2\varepsilon(v|v)}{2\sqrt{(u|u) + 2\varepsilon(u|v) + \varepsilon^2(v|v)}}|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{u}{\|u\|}|v\right)$$

Nous avons bien un expression linéaire en v car c'est un produit scalaire. □

Lemme2 : Si X est un espace de Hilbert, alors X est uniformément convexe.

Démonstration. On veut utiliser la définition 5.2.2. Soit $0 < \varepsilon \leq 1$.
On connait l'identité du parallèlogramme,

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$$

Si $\|u\| = \|v\| = 1$ et $\|u-v\| \geq 2\varepsilon$, alors

$$||u+v||^2 \leq 4 - 4\varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow 1 - \frac{\|u+v\|}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{4-4\varepsilon^2}}{2} = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2} > 0$$

Nous sommes donc bien dans la situation où notre infimum (oui ici on a l'infimum car on prends $\|u-v\| = 2\varepsilon$) est bien strictement plus grand que zéro. Notre espace est donc uniformément convexe. □

Theorem 5.3.1 (théorème de Fréchet-Riesz) : Let X be a Hilbert space and $f \in X^*$. Then there exists one and only one $g \in X$ such that for every $v \in X$

$$\langle f, v\rangle = (g \mid v)$$

Moreover, $\|g\| = \|f\|$.

Une fonctionnelle linéaire continue peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit scalaire dans un espace de Hilbert. On a $f(v) = (g|v)$. Donc, dans un espace de Hilbert, les fonctionnelles linéaires continues, c'est un peut comme des vecteurs. On est entrain de dire qu'il y'a un isomorphisme entre les matrices lignes et les matrices colonnes (car les fonctionnelles linéaires/éléments du dual sont comme des matrices).

Il existe une réciproque : "*L'inégalité de Cauchy-shwartz*" :
Si $g \in X$ et f définit par $f(v) = (g|v)$ alors, $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{R}) = X^*$ et

$$|(g|v)| \leq \|g\|_{X^*}.\|v\|$$

Démonstration. On veut pouvoir appliquer le théorème de représentation de James. Pour cela, il faut montrer que X est un espace lisse et que X soit uniformément convexe. Par le lemme1 et le lemme2, c'est le cas.
Existence. If $f = 0$, then $g = 0$. Assume that $f \neq 0$. The James representation theorem (5.2.6) implies the existence of $u \in X$ such that

$$\|u\| = 1, \quad \langle f, u\rangle = \|f\|, \quad f = \|f\|F'(u)$$

But then, for every $v \in X$

$$\langle f, v\rangle = \|f\|(F'(u) \mid v) = \|f\|(u \mid v) = (\|f\|u \mid v) =< g|v >$$

On définit alors $g := \|f\|.u$.
Uniqueness. Puisque on a un unique u, on pourrait se dire que g est unique, mais enfait, ca ne veut pas dire qu'il n'existerais pas un autre u ne venant pas du théorème qui nous donnerait notre g. Prenons un autre $h \in X$ satisfaisant aux propriétés. If for every $v \in X$

$$(g \mid v) = \langle f, v\rangle = (h \mid v) \quad \Leftrightarrow (g - h|v) = 0$$

En prenant $v = g - h$, then $\|g - h\|^2 = 0$ and $g = h$. □

Definition 5.3.2 : The vector space X is the direct sum of the subspaces Y and Z if $Y \cap Z = \{0\}$ and $X = \{y + z : y \in Y, z \in Z\}$. We then write $X = Y \oplus Z$, and every $u \in X$ has a unique decomposition $u = y + z, y \in Y, z \in Z$.

Definition 5.3.3 : The orthogonal space to a subset Y of a pre-Hilbert space X is defined by

$$Y^{\perp} = \{z \in X : \text{ for every } y \in Y, (z \mid y) = 0\}$$

It is easy to verify that $Y^{\perp}$ is a closed subspace of X.
On a aussi comme propriété de l'orthogonal que $\bar{Y}^{\perp} = Y^{\perp}$.

Corollary 5.3.4 : Let Y be a closed subspace of a Hilbert space X. Then X is the direct sum of Y and $Y^{\perp}$

Démonstration. If $u \in Y \cap Y^{\perp}$, then $(u \mid u) = 0$ and $u = 0$.
Let $u \in X$. Si X est un espace de Hilbert, alors, Y le sera aussi car premièrement, Y hérite du produit scalaire de X et deuxièmement, les sous-espaces fermés d'espaces complets sont des espaces complets. The Fréchet-Riesz theorem implies the existence of $y \in Y$ such that for every $v \in Y, (u \mid v) = (y \mid v) \Leftrightarrow (u - y|v) = 0$.
En effet, définissons une fonctionnelle linéaire $f \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R}) = Y^*$, telle que $< f, v >= (u|v)$, avec $u \in X$.
Puisque Y est Hilbert, on peut appliquer le théorème de Fréchet Riesz et dire qu'il existe $v \in Y$ tq $< f, v >= (y|v)$. Dès lors, $(u|v) = (y|v)$.
But then $z = u - y \in Y^{\perp}$.
On peut donc toujours écrire les éléments $u \in X$ comme $u = y + (u - y)$, $y \in Y$, $u - y \in Y^{\perp}$. □

Corollary 5.3.5 : A subspace Y of a Hilbert space X is dense if and only if $Y^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. Let Y be a subspace of X. Then $\bar{Y}$ is a closed subspace of X.
By continuity of the scalar product, $Y^{\perp} = \bar{Y}^{\perp}$. Car si $z \in \bar{Y}, w \in \bar{Y}^{\perp}$, alors si $z_n \in Y, z_n \longrightarrow z$ alors, $(z_n|w) = 0 \Rightarrow (z|w) = 0$ par continuité.
On sait que $X = \bar{Y} \oplus \bar{Y}^{\perp}$. It follows from the preceding corollary that

$$X = \bar{Y} \oplus \bar{Y}^{\perp} = \bar{Y} \oplus Y^{\perp}$$

Car si $\bar{Y} = X$, alors, $X = X \oplus \bar{Y}^{\perp} \longleftrightarrow \bar{Y}^{\perp} = 0$. Et si $\bar{Y}^{\perp} = 0$, on a $X = \bar{Y} \oplus \bar{Y}^{\perp} \longleftrightarrow \bar{Y} = X$. Puisque si un sous-espace est dense, alors, son adhérence est égale à l'espace, nous avons démontré le théorème. □

Definition 5.3.6 : A sequence (u_n) converges weakly to u in the Hilbert space X if for every $v \in X, (u_n \mid v) \to (u \mid v)$. We then write $u_n \to u$.

$\hookrightarrow$ Cette définition vient du fait qu'on peut réécrire $< f, v >$ comme un produit scalaire $(u|v)$. La convergence faible était que $< f_n, v > \to < f, v >$, ici, on a $(u_n \mid v) \to (u \mid v)$.
On va maintenant refaire tout le travail fait en général, mais pour un espace de Hilbert.

Dans les prochains théorème on utilise le théorème de Fréchet-Riesz car on veut dire dans chaqun des cas qu'il existe $f \in X^*$ ***de telle manière à ce que pour tout*** $v \in Y$, $(u_n, v) \to < f, v >$ ***et on veut pouvoir réécrire*** $< f, v >$ ***sous la forme*** $(u|v)$.

Proposition 5.3.7 Let Z be a dense subset of a Hilbert space X and $(u_n) \subset X$ be such that
(a) $\sup \|u_n\| < \infty$
(b) for every $v \in Z, (u_n \mid v)$ converges.
Then (u_n) converges weakly in X.

Démonstration. It suffices to use Proposition 5.1.2 and theFréchet-Riesz theorem. On refait la même chose que ce qu'on avait fais en général, mais on l'applique aux espaces de Hilbert. □

Theorem 5.3.8 : Let (u_n) be a sequence weakly convergent to u in the Hilbert space X. Then (u_n) is bounded and

$$\|u\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

Démonstration. It suffices to use Theorem 5.1.3 and the Fréchet-Riesz theorem. ◻

Remarquons que nous n'avons pris que la limite inférieure et non la limite tout court car la limite n'existe pas forcément, on ne sait pas qu'elle existe.

Theorem 5.3.9 : Every bounded sequence in a Hilbert space contains a weakly convergent subsequence.

↪ On remarque ici que ça n'est pas totalement la même chose que le théorème 5.1.4 car dans celui-là, il faut que X soit séparable.

Démonstration. La preuve est directe si X est Hilbert et séparable.
Si X n'est pas séparable. Let (u_n) be a bounded sequence in the Hilbert space X and let Y be the closure of the space generated by (u_n),

$$Y = \overline{\{\sum_{n=1}^{k} a_n.u_n : k \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}}$$

The sequence (u_n) is bounded in the separable Hilbert space Y. (On a trouvé un espace séparable donc mtnt, on peut appliquer tout ce qui concerne la séparabilité).By the Banach theorem and the Fréchet-Riesz theorem, there exists a subsequence $v_k = u_{n_k}$ weakly converging to u in Y, c.à.d, $(v_k|y) \longrightarrow (v|y)$, pour tout $y \in Y$.
For every $v \in X, v = y + z$, pour tout $y \in Y$, and $z \in Y^{\perp}$ by Corollary 5.3.4.
Par définition, $(v_k \mid z) = 0 = (u \mid z)$. Hence $(v_k \mid v) \to (u \mid v)$ and $v_k \to u$ in X, on a montré que ca convergeais faiblement pour tout $v \in X$. ◻

Definition 5.3.10 : Let $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ and $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ by positive measures on Ω .
By definition, $\mu \leq$ v if for every $u \in \mathcal{L}, u \geq 0$,

$$\int_\Omega u d\mu \leq \int_\Omega u d\mathrm{v}$$

Lemma 5.3.11 : Let $\mu \leq$ v. Then $L^1(\Omega, \mathrm{v}) \subset L^1(\Omega, \mu)$, and for every $u \in L^1(\Omega, \mathrm{v})$

$$\|u\|_{L^1(\Omega,\mu)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega,v)}$$

Lemma 5.3.12 (von Neumann) : Let $\mu \leq$ v and $v(\Omega) < +\infty$. Then there exists one and only one function $g : \Omega \to [0,1]$ measurable with respect to v and such that for every $u \in L^1(\Omega, v)$

$$\int_\Omega u d\mu = \int_\Omega u g dv$$

Theorem 5.3.13 : Let $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ and $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ be positive measures on Ω such that $\mu(\Omega) < \infty, v(\Omega) < \infty$.
Then there exist $h \in L^1(\Omega, \mathrm{v})$ and $\Sigma \subset \Omega$, measurable with respect to μ and v, such that

(i) $v(\Sigma) = 0, h \geq 0$

(ii) for every $u \in L^1(\Omega, \mu) \cap L^1(\Omega, v), uh \in L^1(\Omega, v)$ and

$$\int_{\underline{Q}} u d\mu = \int_{\underline{Q}} u h dv + \int_\Sigma u d\mu$$

Theorem 5.3.14. Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$ and let $\mu : \mathcal{K}\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right) \to \mathbb{R}$ be *a* measure such that $\|\mu\|_Q < +\infty$. Then there exists a function $g : \Omega \to \mathbb{R}^M$ such that

(i) g is $|\mu|$ -measurable ;

(ii) $|g(x)| = 1, |\mu|$ -almost everywhere on Ω ;

(iii) for all $f \in \mathcal{K}\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right), \langle \mu, f \rangle = \int_\Omega f \cdot g d|\mu|$

5.4 Dualité des espaces de Lebesgue

Un des liens qu'on peut faire entre les deux parties du cours (4.3 et 4.4) est que $L^2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert.

Let $1 < p < \infty$ and let p' be the exponent conjugate to p defined by $1/p + 1/p' = 1$. By Hölder's inequality, for every g fixed in $L^{p'}(\Omega, \mu)$, the linear functional

$$L^p(\Omega, \mu) \to \mathbb{R} : v \mapsto \int_\Omega g v d\mu$$

is continuous. Riesz's representation theorem asserts that every continuous linear functional on $L^P(\Omega, \mu)$ has this representation. We denote by $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a positive measure on Ω.

Une des premières choses à regarder est "est ce que l'espace L^p est lisse ?"

Theorem 5.4.1 : Let $1 < p < \infty$. Then the space $L^p(\Omega, \mu)$ is smooth, and the directional derivative of the norm $F(u) = \|u\|_p$ is given, for $u \neq 0$, by

$$\langle F'(u), v\rangle = \|u\|_p^{1-p} \int_\Omega |u|^{p-2} uv d\mu$$

Démonstration. We define $G(u) = F(u)^= \int_\Omega |u|^p d\mu$, and we choose $u, v \in L^p$. On a un petit problème car on a pas vrailent des fonctions lisse, $u \in \Omega$ et v ne sont pas très régulières. Donc on va traviller en un point précis x. By the fundamental theorem of calculus, for $0 < |\varepsilon| < 1$ and almost all $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |u(x) + \varepsilon v(x)|^p - |u(x)|^p \mid &= p\left|\int_0^\varepsilon |u(x) + tv(x)|^{p-2}|u(x) + tv(x)||v(x)|dt\right| \\ &\leq p\left|\int_0^\varepsilon |u(x) + tv(x)|^{p-1} |v(x)|dt\right| \\ &\leq p|\varepsilon|(|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}|v(x)| \end{aligned}$$

La deuxième inégalité s'obtient grâce au fait que, $t \leq \varepsilon \leq 1$ et $|u(x) + tv(x)| \leq |u(x)| + |t||v(x)| \leq |u(x)| + |v(x)|$. On observe aussi que, $p' = \frac{p}{p-1}$,

$$\int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}|v(x)|d\mu \leq \left(\int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|)^{p'.(p-1)}|v(x)|d\mu\right)^{(1-1/p)} . \left(\int_\Omega |v|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Puisque $p'(p-1) = p$, on a que l'intégrale ci-dessus est finie. It follows from Hölder's inequality that

$$(|u(x)| + |v(x)|)^{p-1}|v(x)| \in L^1$$

Lebesgue's dominated convergence theorem (on peut échanger limite et intégrale) ensures that

$$\langle G'(u), v\rangle = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} G(u + \varepsilon v) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(u + \varepsilon v) - G(u)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \frac{|u + \varepsilon v|^p - |u|^p}{\varepsilon} = p\int_\Omega |u|^{p-2}uvd\mu$$

La dernière égalité est donnée grâce que fait que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(u + \varepsilon v)^p - (u)^p}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} pu^{p-1} & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -p(-u)^{p-1} & \text{si } u < 0 \end{pmatrix}$$

On peut unifier tout ca et on obtient alors $p|u|^{p-1}sgn(u) = p|u|^{p-2}u$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \frac{(u + \varepsilon v)^p - (u)^p}{\varepsilon} = p\int_\Omega |u|^{p-2}uvd\mu$$

Hence for $u \neq 0$

$$\langle F'(u), v\rangle = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(u+\varepsilon v) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \sqrt[p]{G(u + \varepsilon v)} = \frac{\langle G'(u), v\rangle}{p.G^{1-1/p}} = G(u)^{\frac{1-p}{P}} \int_\Omega |u|^{p-2}uvd\mu = \frac{1}{\|u\|^{p-1}} \int_\Omega |u|^{p-2}uvd\mu$$

$\square$

Theorem 5.4.2 (Clarkson, 1936) : Let $1 < p < \infty$. Then the space $L^p(\Omega, \mu)$ is uniformly convex.

Démonstration. If L^p is not uniformly convex, then there exist $0 < \varepsilon \leq 1$ and $(u_n), (v_n)$ such that

$$\|u_n\|_p = \|v_n\|_p = 1, \quad \|u_n - v_n\|_p \to 2\varepsilon \quad \text{and} \quad \|u_n + v_n\|_p \to 2$$

If $2 \leq p < \infty$, we deduce from Hanner's inequality that

$$\|u_n + v_n\|_p^p + \|u_n - v_n\|_p^p \leq (\|u_n\|_p + \|v_n\|_p)^p + (\|u_n\|_p - \|v_n\|_p)^p \leq 2^p$$

Taking the limit $n \to \infty$, we obtain $2^p + 2^p\varepsilon^p \le 2^p$. This is a contradiction.
If $1 < p \le 2$, we deduce from Hanner's inequality that

$$\|u_n\|_p + \|v_n\|_p \le \left(\left\|\frac{u_n+v_n}{2}\right\|_p + \left\|\frac{u_n-v_n}{2}\right\|_p\right)^p + \left|\left\|\frac{u_n+v_n}{2}\right\|_p - \left\|\frac{u_n-v_n}{2}\right\|_p\right|^p \le 2$$

Taking the limit, we find by strict convexity that

$$2 < (1+\varepsilon)^p + (1-\varepsilon)^p \le 2$$

This is also a contradiction. □

Que se passe-il lorsque p=1 pour la convexité uniforme et la lisse attitude?
On peut remarquer en prenant par exemple l'espace $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ que $\|(u)\|_1 = |u_1| + |u_2|$ n'est pas lisse. Elle n'est même pas dérivable.
Pour la convexité uniforme, on peut remarquer que la boule unité de notre espace est un losange centré en zéro.Dès lors, si nous prenons deux vecteurs par exemple $(0,1)$ et $(1,0)$, ils seront considérés comme proches or, ce n'est pas vrais.
On peut retrouver ce même problème avec d'autres esapces comme $L^1([0,2],\mathbb{R})$. En regardant l'espace engendré par les fonctions caractéristiques : $V = \langle \chi_{[0,1]}, \chi_{[0,2]}\rangle$, en prenant un vecteur engendré par ces deux fonctions, on a

$$\|x_1.\chi_{[0,1]} + x_2.\chi_{[0,2]}\|_1 = \int_0^1 |x_1|dt + \int_0^2 |x_2|dt = |x_1| + |x_2|$$

Nous arrivons donc à dire que V est isométrique avec $\mathbb{R}^2$ muni de la norme 1. Cela nous montre que L^1 n'est pas strictement convexe car il est isométrique à $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas uniformement convexe. On prends en général des fonctions du type $u = \frac{\chi_A}{\mu(A)}$ et $v = \frac{\chi_B}{\mu(B)}$ avec $\mu(A) > 0$ et $\mu(B) > 0$ et $A \cap B = \emptyset$. On aura alors toujours notre contradiction.
On peut aussi voir que dans le théorème 5.4.1, on aurait

$$\langle F'(u), v\rangle = 1. \int_\Omega |u|^{-1} uv d\mu$$

Dès lors, si u est nul presque partout ou si juste il s'annule sur un ensemble non négligeable, on aurait un soucis. La formule ne fonctionne pas.
Pourquoi cela ne fonctionne pas pour L^1 ? On pourrait s'attendre à ce que $L^1 = \lim_{p\to 1} L^p$ et on observe aussi que la convexité uniforme est une condition strictement plus grande que zéro, ce qui passe très mal vaec un passage à la limite . De plus, "être lisse" est une limite (dérivée), en prenant la limite de p tendant vers 1, on aimerait pouvoir échanger les deux limite, ce qui est aussi dangereux comme manip. C'est pour ca qu'a priori ca passe mal pour L^1, on a des trucs pas stables lors de passages à la limite.

Theorem 5.4.3 (Riesz's representation theorem) Let $1 < p < \infty$ and $f \in (L^p(\Omega,\mu))^*$. Then there exists one and only one $g \in L^{p'}(\Omega,\mu)$ such that for every $v \in L^P(\Omega,\mu)$

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega gv d\mu$$

Moreover $\|g\|_{p'} = \|f\|$.

Démonstration. Existence. If $f = 0$, then $g = 0$. Assume $f \neq 0$. since L^p is smooth and uniformly convex by the preceding theorems, the James representation theorem implies the existence of $u \in L^p$ such that

$$\|u\|_p = 1, \quad \langle f, u\rangle = \|f\|_{(L^p(\Omega,\mu)^*)}, \quad f = \|f\|F'(u)$$

La notation de la norme de f ne sera pas notée ici, on notera simplement $\|f\|$ au lieu de $\langle f, u\rangle = \|f\|_{(L^p(\Omega,\mu)^*)}$. But then for every $v \in L'$

$$\langle f, v\rangle = \|f\|.\langle F'(u), v\rangle = \|f\| \int_\Omega |u|^{p-2} uv d\mu$$

Define $g = \|f\||u|^{p-2}u$.
It is easy to verify that, $g \in L^{p'}$, en effet,

$$\|g\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_\Omega |g|^{\frac{p}{p-1}} d\mu = \|f\|^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega (|u|^{p-2}|u|)^{\frac{p}{p-1}} d\mu = \|f\|^{\frac{p}{p-1}}$$

De plus, on voit que $\|g\|_{p'} = \|f\|$.
Uniqueness. It suffices to prove that if $g \in L^{p'}$ is such that for every $v \in L^p$, $\int_\Omega gvd\mu = 0$, then $g = 0$. since $|g|^{p'-2}g \in L^p$, we obtain

$$\|g\|_{p'}^{p'} = \int_\Omega |g|^{p'}d\mu = 0.$$

Sinon, on peut aussi monter ça de cette manière. Supposons qu'il existe $h \in L^{p'}$ qui satisfasse les mêmes hypothèses que g. On a alors,

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega h.v.d\mu \qquad \forall v \in L^p$$

Alors,

$$\langle f, u\rangle - \langle f, u\rangle = \int_\Omega (h-g).v.d\mu = 0$$

On veut donc trouver un $v \in L^p$ tel que ceci est différent de zéro. Si on pose $v = |h-g|^{p'-2}.(h-g)$, on a bien que $v \in L^p$ car $|v|^p = |g|^{\frac{p}{p-1}}$, on obtient alors,

$$\int_\Omega |h-g|^p d\mu = \int_\Omega (h-g).v.d\mu = 0$$

□

Remarque thm 5.4.3 : Tout élément du dual de L^p peut se représenter sous la forme d'une fonction $g \in L^{p'}$. On peut donc en déduire que le dual de L^p est isomorphe à $L^{p'}$. Le théorème 5.4.3 est là pour nous faire remarquer que $(L^p)^* \simeq L^{p'}$ et $(L^{p'})^* \simeq L^p$. Les fonctionnelles linéaires continues sur L^p sont les éléments de $L^{p'}$. L'ensemble des fonctionnelles linéaires peut être décrit explicitement. L'intérêt de ceci est que une fonction de L^p n'as pas beaucoup de structure, est bizzare et difficile à intégrer, mais par contre, une fonctionnelle linéaire est linéaire donc on gagne déjà cette structure là en plus car un peut voir ces fonctions de L^p comme des fonctions du dual de $L^{p'}$!
On peut donc commencer à avoir de la convergence dans L^p car si on prend une suite dans L^p elle converge pas vers qqchose, or, si je vois cette suite comme une suite d'éléments du dual, alors, comme fonctionnelle linéaire sur $L^{p'}$, notre suite va converger faiblement vers qqchose qui sera dans le dual de $L^{p'}$ qui peut être associé a un élément de L^p. On gagne une bonne structure et plus de propriétés, grâce à la convergence faible. On peut jouer soit dans L^p, soit dans les fonctionnelles linéaires continues sur $L^{p'}$.
Attention si $u \in L^p(\Omega, \mu)$, lorsqu'on parle de convergence simple, c'est soit dire que j'ai de la convergence comme fonction, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ soit, dire que j'ai de la convergence faible pour $u \in \mathcal{L}(L^{p'}(\Omega, \mu), \mathbb{R})$. On a deux types de convergence qui coexistent.
On peut aussi remarquer grâce à ce théorème que l'inégalité de Hölder nous donne une fonctionnelle linéaire. Effectivement, si $w \in L^{p'}$, $u \in L^p$, alors, nous pouvons trouver f, une fonctionnelle linéaire appartenant à $(L^p)^*$, telle que évaluée en u, on ait,

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega w.ud\mu \leq \|w\|_{L^{p'}}.\|u\|_{L^p}$$

Definition 5.4.4 : Let $1 < p < \infty$. We identify the spaces $\left(L^{P'}(\Omega, \mu)\right)^*$ and $L^P(\Omega, \mu)$. A sequence (u_n) converges weakly to u in $L^p(\Omega, \mu)$ if for every $v \in L^{P'}(\Omega, \mu)$

$$\int_\Omega u_n v d\mu \to \int_\Omega uvd\mu$$

We then write $u_n \to u$.

Proposition 5.4.5 : Let $1 < p < \infty$, let Z be a dense subset of $L''(\Omega, \mu)$, and let $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mu)$ be such that
(a) $\sup_n ||u_n||_p < \infty$
(b) for every $v \in Z, \int_\Omega u_n v d\mu$ converges. Then (u_n) converges weakly to $u \in L^p(\Omega, \mu)$

Démonstration. It suffices to use Proposition 5.1 .2 □

Theorem 5.4.6 (Banach-Steinhaus version L^p) : Let $1 < p < \infty$ and let (u_n) be a sequence weakly convergent to u in $L^p(\Omega, \mu)$. Then (u_n) is bounded and

$$\|u\|_p \leq \varliminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p$$

Démonstration. It suffices to use Theorem 5.1 .3 □

Proposition 5.4.7 : Let $1 < p < \infty$ and let $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mu)$ be such that

(a) $c = \sup \|u_n\|_p < \infty$

(b) (u_n) converges almost everywhere to u on Ω.

Then $u_n \to u$ in $L^p(\Omega, \mu)$

↪ Etre borné et converger presque partout implique la convergence dans L^p.

Démonstration. By Fatou's lemma,

$$\|u\|_p = \int_\Omega |u|^p d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^p d\mu \leq c \leq \infty$$

We choose v in $L^{p'}(\Omega, \mu)$, and we define (on veut appliquer le thm de conv. dominée mais on peut pas le faire partout... alors on définis un ensemble),

$$A_n = \left\{ x \in \Omega : |u_n(x) - u(x)| \leq |v(x)|^{p'-1} \right\}, \quad B_n = \Omega \backslash A_n$$

We deduce from Hölder's and Minkowski's inequalities that

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n - u|\,|v| d\mu &\leq \int_{A_n} |u_n - u|\,|v| d\mu + \int_{B_n} |u_n - u| . |v| d\mu \\
&\leq \int_{A_n} |u_n - u|\,|v| d\mu + \|u_n - u\|_p \left(\int_{B_n} |v|^{p'} d\mu \right)^{1/p'} \\
&\leq \int_{A_n} |u_n - u|\,|v| d\mu + 2c \left(\int_{B_n} |v|^{p'} d\mu \right)^{1/p'}
\end{aligned}$$

Pour presque tout x, par hypothèse (b), $|u_n(x) - u(x)| \to 0$. On a alors que $\mathbb{1}_{A_n}(x)|u_n(x) - u(x)||v(x)| \leq |v(x)|^{p'}$ pour tout $x \in A_n$ (en dehors c'est zéro donc osef).
Lebesgue's dominated convergence theorem (on peut échanger limite et intégrale) ensures that

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |u_n - u|\,|v| d\mu = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |v|^{p'} d\mu$$

On a la deuxième égalité car puisque u_n tend vers u, presque tout les points appartiendront à A_n lorsque $n \to \infty$. Donc, A_n tends vers Ω, en tant qu'espace. Dès lors, nous avons montré une propriété plus forte que la convergence faible,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u|\,|v| d\mu = 0$$

□

Theorem 5.4.8 : Let $1 < p < \infty$ and let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$. Then every bounded sequence in $L^p(\Omega)$ contains a weakly convergent subsequence.

Démonstration. By Theorem 4.2.11, $L^{p'}(\Omega)$ is separable. It suffices then to use Banach's theorem. □

Examples (Weak convergence in L^P)
What are the obstructions to the (strong) convergence of weakly convergent sequences ? We consider three processes by which in $L^p(\Omega)$

$$u_n \rightharpoonup 0, \quad u_n \nrightarrow 0$$

Cela nous dit que la convergence faible permet à plus de suites de converger.

Oscillation. The sequence $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin nx$ is orthonormal in $L^2(]0, \pi[)$. It follows from Bessel's inequality that $u_n \to 0$. But $\|u_n\|_2 = 1$

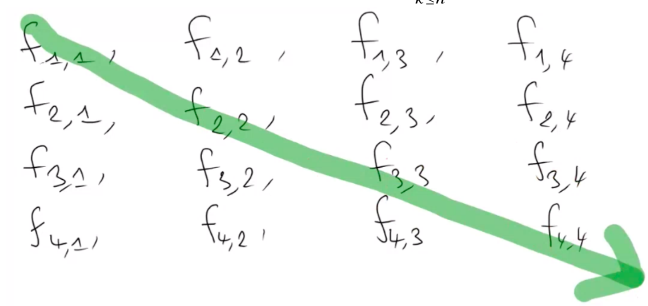
Concentration. Let $1 < p < \infty, u \in \mathcal{K}\left(\mathbb{R}^N\right) \backslash \{0\}$, and $u_n(x) = n^{N/P} u(nx)$. For every $n, \|u_n\|_p = \|u\|_p > 0$, and for all $x \neq 0, u_n(x) \to 0, n \to \infty$. By Proposition 5.4 .6 $u_n \to 0$ in $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$

Translation. Let $1 < p < \infty, u \in \mathcal{K}\left(\mathbb{R}^N\right) \backslash \{0\}$, and $u_n(x) = u\left(x_1 - n, x_2, \ldots, x_N\right)$. For every $n, \|u_n\|_p = \|u\|_p > 0$, and for all $x, u_n(x) \to 0, n \to \infty$. By Proposition 5.4 .7 $u_n \to 0$ in $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$.

5.5 Remarques sur le chapitre 5 : Dualité

- **Argument diagonal de Cantor :**
  On a besoin d'une suite f_n dont le but est de créer une sous-suite qui ait les propriétés d'une infinité de sous-suites. On ne sait pas créer une sous-suite de f_n mais on peut créer une sous-suite de $f_{n,k}$ où on applique une propriété à f_n, par exemple, f appliquée en v_k est bornée dans $\mathbb{R}$ et donc admet une sous-suite par Wierstrass. Une condition est que ma suite de base satisfasse déjà mes propriétés, à une sous-suite près ça doit converger.
  On va créer des sous-suites par récurrence $(f_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
  - $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converges si $n \to \infty$, ou en tout cas a certaines propriétés de convergence. Attention, une propriété dénombrable, EX : conv des élément indicés dans $\mathbb{N}$, mais par contre, indicés dans $\mathbb{R}$, ca marche pas.
  - $(f_{k+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de notre suite $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$.
  - On en déduis que $(f_{l,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ si $k \leq l$.

  On pose $g_n = f_{n,n}$, on a que $(\langle g_n, v_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car $(g_n)_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\leq n}}$ est une sous-suite de $f_{n,k}$.

  On va toujours un petit peut plus loin en extrayant des suites et en passant en plus d'une sous-suite à l'autre. On prend certains indices dans différentes sous-suites.
  A partir de $f_{k,n}$, on vérifie les k^e prioprétés. (EX : on converge pour tout les $v_1, ..., v_k$).
  On a bien construit une sous-suite de $f_{1,n}$ qui elle-même est une sous-suite de f_n, car si on enlève la propriété, là on retrouve notre f_n de base, indicé avec les indices de notre sous-suite $f_{n,n}$ a qui on a appliqué notre propriété.
  Si on commence notre diagonale en $f_{1,2}$, ca ne sera pas une sous-suite de $f_{1,1}$. Mais bien une sous-suite de f_n, et c'est ça qui est impotant de voir.
  Le début nous importe peut car on veut une propriété infinie, on peut prendre n'importe quelle diagonale (en allant vers le bas), aussi loin soit-elle.
- $< f, u > \leq \|f\|_{X^*}.\|u\|_X$
- Nous avons démontré le théorème de Banach-Steinhaus pour $\mathcal{L}(X,Y)$, X^*, $X \quad Hilbert$, $L^p(\Omega, d\mu)$. Si on regarde attentivement, on voir bien que ce sont tous des cas particulier de ca cas là : $\mathcal{L}(X,Y)$.

Chapitre 6

Les espaces de Sobolev

6.1 Dérivées Faibles

Nous allons ici entrer dans un chapitre qui a pas mal de conséquences dans le domaine des équations aux dérivée partielles mais aussi en calcul des variations. On se demande s'il esxiste des espaces fonctionnels de fonctions dérivables ? Par exemple, prenons l'esapce $C^1([0,1])$. Nous pouvons définir une norme, $\|u\|_{C^1([0,1])} = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$. On peut montrer que $C^1([0,1])$ muni de cette norme est un espace de banach. Mais ce n'est pas un bon espace. Les seuls bons espaces qu'on a étudié sont les espaces de Hilbert et les espaces L^p car on connait leurs règles dans les duals. Le fait de pouvoir être un dual donne accès à la topologie faible. On a donc une convergence faible qui nous donnais accès au fait que toute suite bornée admet une sous suite convergente.
L'idée de base à avoir est de prendre un espace $X = \{u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} |\ u\ derivable\ et\ \int_\Omega |u|^p + |u'|^p < \infty\}$ on autait aussi comme norme, $\|u\| = \|u\|_p + \|u'\|_p$ or, X ne sera pas complet.
Quel est le souci alors ? En fait, on a été trop strictes avec la notion de dérivabilité, on va la remette en question. Nous allons donc étendre la notion de dérivée pour avoir qqchose de plus stable.
Throughout this chapter, we denote by Ω an open subset of $\mathbb{R}^N$.
We begin with an elementary computation, et un petit rappel, l'intégration par parties :

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Lemma 6.1.1. (on a ici ce lemme pour les fonction LISSES) : Let $1 \le |\alpha| \le m$ and let $f \in C^m(\Omega)$. Then for every $u \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f D^\alpha u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha f)\, u dx$$

Effectivement, cette formule vient d'une intégration par parties car on peut observer que le terme en $f.u$ est évalué au bord. Or, oméga est un ouvert et u est à surpport compact dans oméga, donc il arivera à zéro avant le bord.
Notations : $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^N$. Donc si on prend la dérivée α^{ieme} de u, on a, $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha^1} \partial_2^{\alpha^2} \dots \partial_N^{\alpha^N}(u)$. Puisque notre fonction est C^∞, l'odre n'est pas important.
On a aussi que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Exemple : Si $\alpha = (2,1)$, et donc , $N = 2$ car $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Soit $f \in W^{3,p}_{loc}$, alors, on calcule pour f que ,

$$D^\alpha f = \partial_1^{\alpha^1} \partial_2^{\alpha^2}(f) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}(f) = \frac{\partial^3}{\partial^2 x_1 \partial x_2}(f)$$

(ici, rien de nous restreint pour p, cet exemple marche pour tout p mais f doit être 3 fois dérivable)

Démonstration. We assume that $\alpha = (0, \dots, 0, 1)$, on suppose que $D^\alpha = \partial_N$. Let $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ and define

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)u(x), \qquad && x \in \Omega \\ &= 0, && x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{aligned}$$

On sait que $D^N(u.f) = (\partial_N u).f + u.\partial_N f$. Enfait, il existe un $R \in \mathbb{R}$ tel que $g = 0$ dans $\mathbb{R}^N/[-R,R]^N$ car u est à support compact. (notre fonction vaut zéro aux extrémités). On observe alors que

$$0 = \int_{[-R,R]} \partial_N g = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_N g = \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_N u).f + \int_{\mathbb{R}^N} u.\partial_N f$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\partial_N u).f = -\int_{\mathbb{R}^N} u.\partial_N f$$

On peut aussi voir la fin de la preuve comme ceci :
The fundamental theorem of calculus implies that for every $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$\int_{\mathbb{R}} D^\alpha g\,(x', x_N)\,dx_N = \int_{-R}^{R} D^\alpha g\,(x', x_N)\,dx_N = g\,(x', L) - g\,(x', -L) = 0$$

Fubini's theorem ensures that

$$\int_\Omega (f D^\alpha u + (D^\alpha f)\,u)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha g dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_{\mathbb{R}} D^\alpha g dx_N = 0$$

When $|\alpha| = 1$, the proof is similar. It is easy to conclude the proof by induction. □

Weak derivatives were defined by S.L. Sobolev in 1938 .On va prendre le lemme plus haut, pour une définition.

Definition 6.1.2 : Let $\alpha \in \mathbb{N}^N$ and $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. By definition, the weak derivative of order α of f exists if there is $g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ such that for every $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega f D^\alpha u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g u dx$$

The function g, if it exists, will be denoted by $\partial^\alpha f$.

Puisque g et f sont dans L^1_{loc}, cela fait sens de parler d'intégration, nos hypothèses nous permettent de parler d'intégration par partie. Si ω est le support de u, alors, ω contient le support de notre dérivée (ce n'est pas égal car si un moment notre fonction est constante, ses dérivés seront nulles) , car en dehors de son support, notre fonction est nulle et donc ses dérivées aussi. On aura aussi, $f \in L^1(\omega)$ et $g \in L^1(\omega)$.
Montrons que $\partial^\alpha f$ est bien définie : Si g , $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, sont toutes les deux des dérivée faibles, alors, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f D^\alpha u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega h u dx \quad \Longrightarrow \quad (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (g - h) u dx = 0$$

By the annulation theorem $g - h = 0$ persque partout, the weak derivatives are well defined (à un ensemble de mesure nulle près mais puisqu'on quotiente c'est bonnn).

Remarque : On voit que si on a une fonction dérivable m fois, alors, $D^\alpha f$ est une dérivée faible d'ordre α de f pour tout $|\alpha| \leq m$. Donc enfait, on est parti d'une propriété que toutes les dérivées ont pour définir la nouvelle dérivabilité. Les fonctions ayant une dérivée faible sont les fonctions pour lesquelles l'intégration par partie fonctionnne avec les fonctions C^∞ à support compact.
Donc, il y a des fonctions qui ne sont pas dérivables mais pour lesquelles l'intégration par partie fonctionne. (EX : $|x|$).
On donc que si D^α (dérivée classique) existe, alors elles coïncide avec ∂^α (dérivée faible). (! !c'est que presque partout)

Proposition 6.1.3 : Assume that $\partial^\alpha f$ exists. *On*

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 1/n\}$$

we have that

$$D^\alpha\,(\rho_n * f) = \rho_n * \partial^\alpha f$$

Ici, on prend Ω_n pour pouvoir définir la convolution dessus, ne pas sortir quand on fera la translation.

Démonstration. We deduce from Proposition 4.3 .6 and from the preceding definition that for every $x \in \Omega_n$

$$\begin{aligned} D^\alpha(\rho_n * f)(x) &= \int_\Omega D_x^\alpha \rho_n(x-y) f(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \rho_n(x-y) f(y) dy \\ &= (-1)^{2|\alpha|} \int_\Omega \rho_n(x-y) \partial^\alpha f(y) dy \\ &= \rho_n * \partial^\alpha f(x) \end{aligned}$$

Nous avons que $D_y^\alpha \rho_n(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha \rho_n(x-y)$ car en dérivant en y, à chaque fois qu'on fait une intégration par partie, il y a des moins qui sortent. Aussi, $f \in L^1_{loc}$ et ρ_n est dans $D(\Omega)$. □

(Theorem 6.1.4. (du Bois-Reymond lemma) :) Let $|\alpha| = 1$ and let $f \in C(\Omega)$ be such that $\partial^\alpha f \in C(\Omega)$. Then $D^\alpha f$ exists and $D^\alpha f = \partial^\alpha f$.

↪ Ce théorème est une sorte de réciproque au fait que si la dérivée classique existe, alors la dérivée faible existe. C'est à dire, si la dérivée faible est assez régulière, alors c'est en fait la dérivée classique.

Démonstration. By the preceding proposition, we have

$$D^\alpha(\rho_n * f) = \rho_n * \partial^\alpha f$$

The fundamental theorem of calculus implies then that

$$\rho_n * f(x+\varepsilon\alpha) = \rho_n * f(x) + \rho_n * f(x+\varepsilon\alpha) - \rho_n * f(x) = \rho_n * f(x) + \int_0^\varepsilon \rho_n * \partial^\alpha f(x+t\alpha) dt$$

By the regularization theorem,

$$\rho_n * f \to f, \quad \rho_n * \partial^\alpha f \to \partial^\alpha f$$

uniformly on every compact subset of Ω. Hence we obtain

$$f(x+\varepsilon\alpha) = f(x) + \int_0^\varepsilon \partial^\alpha f(x+t\alpha) dt$$

so that $\partial^\alpha f = D^\alpha f$ by the fundamental theorem of calculus. On dérives par rapport à epsilon, et puis, on évalues en 0. À gauche, on a $D^\alpha f(x)$ par définition et à droite, $\partial^\alpha f(x)$ par le théorème fondamental de l'analyse.

□

Notation. From now on, the derivative of a continuously differentiable function will also be denoted by ∂^α.

Let us prove the closing lemma. The graph = $\{(f, \partial^\alpha(f)\}$, of the weak derivative is closed in $L^1_{\mathrm{loc}} \times L^1_{\mathrm{loc}}$. On dit que $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a un graphe fermé si $x_n \longrightarrow x$, alors $F(x_n) \longrightarrow y$ ce qui implique que $y = F(x)$.

Lemma 6.1.5. (closing lemma) : Let $(f_n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and let $\alpha \in \mathbb{N}^N$ be such that in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

$$f_n \to f, \quad \partial^\alpha f_n \to g$$

Then $g = \partial^\alpha f$.

Si j'ai une suite de fonctions qui convergent localement et les dérivées faibles convergent localement, alors, la limite g est dérivable faiblement et la limite des dérivées faibles c'est la dérivée faible de la limite. Notre définition de dérivée faible fonctionne très bien pour un passage à la limite.

Démonstration. Vérifions la définition de dérivabilité faible. For every $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, we have by definition that

$$\int_\Omega f_n \partial^\alpha u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\partial^\alpha f_n) u dx$$

Et on sait que par définition de dérivée faible,

$$\int_\Omega f D^\alpha u dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n D^\alpha u dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\partial^\alpha f_n) u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g u dx$$

Cette dernière égalité est due à la convergence de f_n.Donc, par définition de dérivée faible, $g = \partial^\alpha f$.
Nous pouvons aussi montrer le lemme de la manière suivante. Par hypothèse, on a

$$\left|\int_\Omega (f_n - f)\,\partial^\alpha u dx\right| \leq \|\partial^\alpha u\|_\infty \int_{\text{supp } u} |f_n - f|\, dx \to 0$$

and

$$\left|\int_\Omega (\partial^\alpha f_n - g)\, u dx\right| \leq \|u\|_\infty \int_{\text{supp}\, u} |\partial^\alpha f_n - g|\, dx \to 0$$

we obtain

$$\int_\Omega f \partial^\alpha u dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g u dx$$

□

Example (Weak derivative) : If $-N < \lambda \leq 1$, the function $f(x) = |x|^\lambda$ is locally integrable on $\mathbb{R}^N$. We approximate f by

$$f_\varepsilon(x) = \left(|x|^2 + \varepsilon\right)^{\lambda/2}, \quad \varepsilon > 0$$

Then $f_\varepsilon \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ and

$$\partial_k f_\varepsilon(x) = \lambda x_k \left(|x|^2 + \varepsilon\right)^{\frac{\lambda-2}{2}}$$

$$|\partial_k f_\varepsilon(x)| \leq \lambda |x|^{\lambda-1}$$

If $\lambda > 1 - N$, we obtain in $L^1_{\log}\left(\mathbb{R}^N\right)$ that

$$f_\varepsilon(x) \to f(x) = |x|^\lambda$$

$$\partial_k f_\varepsilon(x) \to g(x) = \lambda x_k |x|^{\lambda-2}$$

Hence $\partial_k f(x) = \lambda |x|^{\lambda-2} x_k$.

Definition 6.1.8 : Let $k \geq 1$ and $1 \leq p < \infty$. On the Sobolev space

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \text{ for every } |\alpha| \leq k, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

Les fonctions dans L^p avec des dérivées faibles jusqu'à l'ordre k^{ieme}, (ca fait bcp de dérivée pcq y'a les croisées), dont les dérivées faibles sont dans L^p.
We define the norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p\, dx\right)^{1/p}$$

Est-ce vraiment une norme ? Oui, elle ressemble fort à une norme L^p et en plus, l'application de dérivée faible est linéaire.

$$\partial^\alpha(\lambda u) = \lambda \partial^\alpha u \qquad \partial^\alpha(v + u) = \partial^\alpha u + \partial^\alpha v$$

De plus, en définissant $N_k = \{\alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq k\}$ on peut voir que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p\, dx = \int_{\Omega x N_k} |\partial^\alpha u|^p\, d(x, \alpha)$$

On aurait une mesure telle que $\mu(A) = \mu_k(Ax\{\alpha\})$. On the space $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$,(en particulier avec $k = 2$, le cas Hilbertien, on pourra utiliser leurs propriétés), we define the scalar product

$$(u \mid v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u \mid \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

The Sobolev space $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ is defined by

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) : \text{ for all } \omega \subset\subset \Omega, u|_\omega \in W^{k,p}(\omega)\right\}$$

A sequence (u_n) converges to u in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ if for every $\omega \subset\subset \Omega$

$$\|u_n - u\|_{W^{k,p}(\omega)} \to 0, \quad n \to \infty$$

On a que $W_0^{k,p}(\Omega)$ est l'adhérance des fonctions lisses à support compact dans Ω. The space $W_0^{k,p}(\Omega)$ is the closure of $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$. La fermetur est l'adhérence dans l'espace. On a en particulier que

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) | supp(u) \subseteq \Omega\} \qquad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{D}(\Omega)} = W_0^{k,p}(\Omega)$$

We denote by $H_0^k(\Omega)$ the space $W_0^{k,2}(\Omega)$.

Theorem 6.1.9 : Let $k \geq 1$ and $1 \leq p < \infty$. Then the spaces $W^{k,p}(\Omega)$ and $W_0^{k,p}(\Omega)$ are complete and separable. (les espaces de Sobolev sont complets et séparables)

Démonstration. Let $M = \sum_{|\alpha|\leq k} 1 = \{ \text{ nombre de } \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq k \}$. The space $L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$ with the norm

$$\|(v_\alpha)\|_p = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |v_\alpha|^p \, dx \right)^{1/p}$$

is complete and separable (voir théorie espaces Lebesques). The map

$$\Phi : W^{k,p}(\Omega) \to L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right) : u \mapsto (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}$$

cette application est par définition bien définie et appartient bien à notre espace L^p, et est une isometrie linéaire telle que $\|\Phi(u)\|_p = \|u\|_{k,p}$.
Pour montrer que notre espace est complet, on peut montrer que $\Phi(W^{k,p}(\Omega))$, est fermée. Si $\Phi(u_k) \longrightarrow v$ dans $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$, alors, $\partial^\alpha u_j \longrightarrow v_\alpha$ dans $L^p(\Omega)$.
Par le lemme (6.1.5) la convergence dans L^p implique la convergence dans L^1_{loc}, donc, $v_\alpha = \partial^\alpha v_0$, mais puisque $v_0 = u$, $v = \Phi(u)$. Ma limite fait donc parti de mon espace et donc, nous avons un espace femé et donc, il est complet. By the closing lemma $\Phi\left(W^{k,p}(\Omega)\right)$ is a closed subspace of $L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$.
Mais puisque Φ est une isométrie linéaire, une suite convergera dans $W^{k,p}$ si Φ de cette suite converge dans $L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$, donc mon espace $W^{k,p}$ est complet.
Notre espace est aussi séparable car tout sous-espace d'un espace séparable est séparable. On sait que $W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$. Puisque $L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$ est séparable, on a que $W^{k,p}(\Omega)$ is complete and separable.
Puisque $W_0^{k,p}(\Omega)$ is a closed subspace of $W^{k,p}(\Omega)$, it is also complete and separable.

(Construisons un ensemble X dense et dénombrable dans L^p. Puisque $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$, est séparable, $\exists \{v_j : j \in \mathbb{N}\} \subset L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$ tel que l'adhérence $\overline{\{v_j : j \in \mathbb{N}\}} = L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right)$ cet ensemble est une partie dense de L^p.
Soit $m \in \mathbb{N}$, $L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^M\right) \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B(y, 1/m)$.
On est face à deux cas, soir une boule intersecte notre ensemble X, soit pas. Si on a que si $B(v_j, 1/m) \cap X \neq \emptyset$ on prend alors $v_j^m \in B(v_j, 1/m) \cap X$. Donc,

$$x \subseteq \bigcup_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ B(v_j, 1/m)\cap X \neq \emptyset}} B(v_j^m, 2/m)$$

L'union des v_j^m est donc un sous-espace dense et dénombrable de L^p.) $\square$

Theorem 6.1.10 : Let $1 \leq p < \infty$. Then $W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) = W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
On a que $W_0^{k,p}(\Omega)$ qui est l'adhérance des fonctions lisses à support compact dans Ω est égale à $W^{k,p}(\Omega)$, les fonctions dans L^p avec des dérivées faibles jusqu'à l'ordre k.

Démonstration. It suffices to prove that $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ is dense in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. We use regularization and truncation.
Regularization, les rendre C^∞ :
Let $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ and define $u_n = \rho_n * u$. By Proposition 4.3.6 , $u_n \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. Proposition 4.3.14 implies that in $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$u_n \to u, \quad \partial_k u_n = \rho_n * \partial_k u \to \partial_k u \qquad \text{dans } L^p \text{ !}$$

Donc, $u \longrightarrow u_n$ dans $W^{1,p}$ car $\|v\|^p_{W^{1,p}} = \|v\|_{L^p} + \sum_{k=1}^N \|\partial_k v\|_{L^p}$.
We conclude that $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ is dense in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Donc, dans un premier temps, on a créé des fonctions dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ qui approchent ma fonction dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$.
On va mtnt construire des suites de fonctions C^∞ à support compact qui vont converger vers chacun des éléments de la suite. On fait donc une suite de suites.

Truncation, les rendre à support compact : Let $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ be such that $0 \le \theta \le 1$ and

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 1, \quad t \le 1 \\ &= 0, \quad t \ge 2 \end{aligned}$$

We define a sequence

$$\theta_n(x) = \theta(|x|/n)$$

Let $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \cap C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$. It is clear that $u_n = \theta_n u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$. It follows easily from Lebesgue's dominated convergence theorem that $u_n \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p = -\int_{\mathbb{R}} (1 - \theta(\frac{|x|}{n})^p.|u|^p \le |u|_p \longrightarrow 0, \quad \text{p.p. car on a qqchose} < 0 \text{ et qqchose dans } L^1.$$

On montre alors que par la dérivée du produit que

$$-\partial_k((1-\theta_n)u_n) = \partial_k(u_n - u) = \partial_k(\theta_n)u + (1-\theta_n)\partial_k(u)$$

Dans , L^p, on conclut que

$$\|\partial_k(u_n - u)\|_p = \|\partial_k(\theta_n)u\|_p + \|(1-\theta_n)\partial_k(u)\|_{L^p}$$

Les deux termes tendent vers zéro. □

We extend some rules of differential calculus to weak derivatives.

Proposition 6.1.11.(Change of variables) : Let ω and Ω be open subsets of $\mathbb{R}^N$, $G : \omega \to \Omega$ a diffeomorphism, and $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Then $u \circ G \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\omega)$ and

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(u \circ G) = \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ G \frac{\partial G_j}{\partial y_k}$$

Proposition 6.1.12.(Derivative of a product) : Let $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ and $f \in C^1(\Omega)$ Then $fu \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ and

$$\partial_k(fu) = f\partial_k u + (\partial_k f)\, u$$

Si nous avions deux fonctions dans $W^{1,1}_{loc}$, rien ne grarantit que leur produit est encore intégrable. C'est pour ca qu'on demande $f \in C^1$, parce que comme ca on a une fonction bornée.

Démonstration. Let $u_n = \rho_n * u$, so that by the classical rule of derivative of a product,

$$\partial_k\,(fu_n) = (\partial_k f)\, u_n + f\partial_k u_n$$

It follows from the regularization theorem that

$$fu_n \to fu, \quad \partial_k\,(fu_n) \to (\partial_k f)\, u + f\partial_k u$$

in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Le lemme de fermeture me dit que sous ces conditions, on peut déduire que notre fonction est faiblement dérivable. Ca montre alors que $fu \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ car celui-ci me dit que $(\partial_k f)\, u + f\partial_k u$ est bien ma dérivée faible et que donc, puisqu'elle converge dans L^1_{loc}, elle y sont et ainsi, on a bien montré que ma fonction fu est dans L^1 et que la dérivée fai ble est dans L^1_{loc}. □

Proposition 6.1.13 (Derivative of the composition of functions) : Let $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ and let $f \in C^1(\mathbb{R})$ be such that $c = \sup_{\mathbb{R}} |f'| < \infty$. Then $f \circ u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ and

$$\partial_k(f \circ u) = (f' \circ u)\partial_k u$$

Démonstration. We define $u_n = \rho_n * u$, so that by the classical rule,

$$\partial_k\,(f \circ u_n) = f' \circ u_n \partial_k u_n$$

We choose $\omega \subset\subset \Omega$ (on réduit le domaine pour dire que u converge vers u_n dans L^1. By the regularization theorem, we have in $L^1(\omega)$

$$u_n \to u, \quad \partial_k u_n \to \partial_k u$$

By Proposition 4.2.10, (si une suite converge dans L^p, alors, elle a une sous-suite qui converge presque partout) taking if necessary a subsequence, we can assume that $u_n \to u$ almost everywhere on ω. We obtain, par le théorème des accroissements finis,

$$\int_\omega |f \circ u_n - f \circ u| \, dx \leq \sup_{\mathbb{R}} |f| \int_\omega |u_n - u| \, dx \leq c \int_\omega |u_n - u| \, dx \to 0$$

Et donc, en introduisant un terme $f' \circ u_n \partial_k u$,

$$\begin{aligned}\int_\omega |f' \circ u_n \partial_k u_n - f' \circ u \partial_k u| \, dx &= \int_\omega |f' \circ u_n(\partial_k u_n - \partial_k u) + (f' \circ u_n - f' \circ u)\partial_k u| \, dx \\ &\leq c \int_\omega |\partial_k u_n - \partial_k u| \, dx + \int_\omega |f' \circ u_n - f' \circ u| \, |\partial_k u| \, dx \to 0\end{aligned}$$

Hence in $L^1(\omega)$

$$f \circ u_n \to f \circ u, \quad f' \circ u_n \partial_k u_n \to f' \circ u \partial_k u$$

since $\omega \subset\subset \Omega$ is arbitrary, we conclude the proof by invoking the closing lemma.

□

Definition 6.1.6 : The gradient of the (weakly) differentiable function u is defined by

$$\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_N u)$$

The divergence of the (weakly) differentiable vector field $v = (v_1, \ldots, v_N)$ is defined by

$$\operatorname{div} v = \partial_1 v_1 + \ldots + \partial_{NN}$$

Let $1 \leq p < \infty$ and $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ be such that $\partial_j u \in L^p(\Omega), j = 1, \ldots, N$. We define

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega \left|\sum_{j=1}^N (\partial_j u)^2\right|^{p/2} dx\right)^{1/p}$$

Notation :
On $\mathbb{R}$, we define

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(t) &= t/|t|, \quad t \neq 0 \\ &= 0, \qquad t = 0\end{aligned}$$

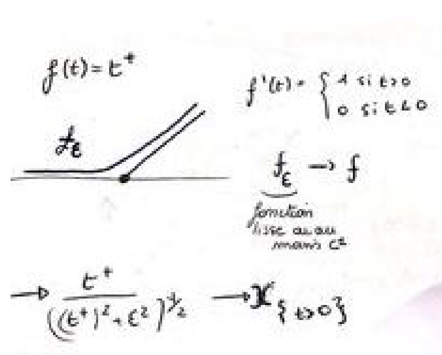
Corollary 6.1.14 : Let $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Then

$$u^+ = \begin{pmatrix} u \ si \ t \geq 0, \\ 0 \ si \ t < 0, \end{pmatrix} \qquad et \quad u^- = \begin{pmatrix} u \ si \ t \leq 0, \\ 0 \ si \ t > 0, \end{pmatrix} \quad |u| \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega),$$

and

$$\nabla u^+ = \chi_{(u>0)} \nabla u, \quad \nabla u^- = -\chi_{(u<0)} \nabla u, \quad \nabla |u| = (\operatorname{sgn} u) \nabla u$$

L'idée est de se dire qu'on fait des compositions pas valeures absolues. On va enlever les points mauvais lorsqu'il y en a pas beaucoup. Pourquoi est-ce que on suppose toujours que dérivée de la fonction est zéro en en zéro ? Cela n'a pas d'importance enfait on peut les remplacer pas des plus petit ou égal.



Grâce au lemme de fermeture, on a moins de mal à passer à la limite pour les dérivées faibles. En calculant la dérivée de la composée, on oasse à la limite dans la composée et on peut conclure.

Démonstration. We define for $\varepsilon > 0, f_\varepsilon(t) = \left([\max(0,t)]^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2}$ and $v = \chi_{(w>0)}\partial_k u$. On observe que,

$$f'_\varepsilon(t) = \frac{t^+}{((t^+)^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}$$

The preceding proposition implies that

$$\partial_k\left(f_\varepsilon \circ u\right) = \frac{u^+}{\left([u^+]^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2}}\partial_k u$$

Hence in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

$$f_\varepsilon \circ u \to u^+, \quad \partial_k\left(f_\varepsilon \circ u\right) \to v$$

The closing lemma ensures that $\partial_k u^+ = v$. (si une suite de fonctions tend vers h, et que la dérivée faible de la suite de fonctions tend vers w, alors, w est la dérivée faible de h)

$$\int_\omega |\partial_k(f_\varepsilon \circ u) - \partial_k u^+| \longrightarrow 0$$

Since $u^- = (-u)^+$, it is easy to finish the proof. □

6.2 Embeddings

On sait très bien que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable alors, elle est continue. (au sens classique)
On a l'équivalent dans $\mathbb{R}^m$, mais avec la différentiabilité.
Que se passe-il avec les dérivées faibles ? Si f est faiblement dérivable ?
Remarque : Si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors, le théorème fondamental de l'analyse implique que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(x)dx$$

Il n'y a aucun soucis car u est lisse à support compact, donc on intègre une fonction continue sur un intervalle fini.
On a alors que

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u'| = \|u'\|_{L^1} \leq \|u\|_{W^{1,1}}$$

Si on suppose que u_n converge vers u dans $W^{1,1}$, alors, $|u_n(x) - u_m(x)| \leq \|u_n - u_m\|_{W^{1,1}} \longrightarrow 0$. Donc, u_n converge uniformément vers $u \in C(\mathbb{R})$. Effectivement, l'écart entre u_n et u_m est indépendant de x et converge vers 0.
On a montré que si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, alors, il existe $\tilde{u}$ telle que $\tilde{u} = u$ presque partout et $\tilde{u} \in C(\mathbb{R})$. Dans notre classe d'équivalence, on prend la fonction qui est continue. On arrive alors à dire que $W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$.. Un développent analogue nous dit que cela fonctionne aussi dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. *Donc, en dimension 1, les fonctions faiblement dérivables sont les fonctions continues.*
Mais que se passe-t-il est dimension supérieure ? Pour $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$? En général, on pourra avoir que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \not\subseteq C(\mathbb{R}^N)$.
Exemple : Soit $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$. On a que $\nabla(u(x)) = \frac{-\alpha.x}{|x|^{\alpha+1}}$. Comment montrer qu'elle est faiblement dérivable ? On calcule,

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{|x|^2 + \varepsilon^2}\right)^{\alpha/2}$$

On montre aussi que cela converge et que la dérivée converge.
Soit $x \in B[0,1] \subset \mathbb{R}^N$. En passant aux coordonnées polaires,

$$\int_{B[0,1]} |\nabla(u(x))|^p = \int_{B[0,1]} \frac{\alpha^p}{|x|^{(\alpha+1).p}} = c.\int_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{(\alpha+1).p}}dr$$

Cette quantité est intégrable si et seulement si elle est finie. C'est à dire, si mon exposant $N-1$ domine mon exposant $(\alpha+1).p$. Ssi $\alpha+1 \leq N/p \Longrightarrow \alpha \leq N/p-1$.
Si $N<p$ alors les fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ne sont pas de éléments de $C(\mathbb{R}^N)$.
Si $N=p$, on a aussi un problème. Prenons $u(x)=(log(\frac{1}{|x|}+1))^\gamma$ pour $x \in B[0,1]$. Par un calcul analogue, on montre que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ssi, $\gamma < 1-\frac{1}{N}$.
Si $N>p$, prenons $u(x)=|x|^\alpha$ (on a changé le signe de α), alors, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si $\alpha > 1-N/p$.
Remarqons que le fait d'avoir pris la boule unité n'est pas une restriction car on peut très bien prendre une fonction qui envoie les valeurs de la boule unité et l'étendre.

Let $1 \leq p,q < \infty$, If there exists $c>0$ such that for every $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ then necessarily

$$q=p^*=Np/(N-p)$$

Indeed, replacing $u(x)$ by $u_\lambda(x)=u(\lambda x), \lambda>0$, we find that so that $q=p^*$ We define for $1 \leq j \leq N$ and $x \in \mathbb{R}^N$

$$\widehat{x_j}=\left(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_N\right)$$

Lemma 6.4.1 (Gagliardo's inequality) : Let $N \geq 2$ and $f_1,\ldots,f_N \in L^{N-1}\left(\mathbb{R}^{N-1}\right)$ Then $f(x)=\prod_{j=1}^N f_j\left(\widehat{x}_j\right) \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ and

$$\|f\|_{L^1(\mathrm{R}^N)} \leq \prod_{j=1}^N \left\|f_j\right\|_{L^{N-1}(\mathrm{R}^{\mathrm{N}-1})}$$

$\hookrightarrow$ Si on a une fonction qui est un produit de N fonctions qui dépendent de $N-1$ variables, alors, on as une sorte d'inégalité de Hölder avec des dimensions variables. On a un produit de N fonctions qui dépendent de $N-1$ variables, cela nous mène à une égalité qui est exactement celle dont on a besoin pour montrer le thm 6.4.4.

Lemma 6.4.2 (Sobolev's inequalities) : Let $1 \leqslant p < N$. Then there exists a constant $c=c(p,N)$ such that for every $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration. **Le cas** $N=2$ **et** $p=1$ **:**
Nous voulons appliquer le théorème fondamental. Soit $u \in D(\mathbb{R}^N)$, on a

$$u(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t,x_2)dt \Rightarrow |u(x_1,x_2)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t,x_2)|dt$$

Nous pouvons échanger nos variables,

$$|u(x_1,x_2)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(t,x_2)|dt$$

Dès lors, en utilisant le fait que $a.b \leq \frac{^2+b^2}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u(x_1,x_2)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(t,x_2)|dt.\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t,x_2)|dt\ d(x_1,x_2) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\right) |\partial_2 u(t,x_2)|dt\ dx_2.\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\right) |\partial_1 u(t,x_2)|dt\ dx_2 \\
&\leq 1/2.\left(\int_{\mathbb{R}^{\not{}}} |\partial_2 u|\right)^2 + 1/2.\left(\int_{\mathbb{R}^{\not{}}} |\partial_1 u|\right)^2 \\
&\leq 1/2.\left(\int_{\mathbb{R}^{\not{}}} |\partial_2 u| + |\partial_1 u|\right)^2
\end{aligned}$$

Ce qui démontre notre inégalité dans le cas où $N=1$. On peut observer que notre démonstration pars du cas où $p=1$ qui est plus facile. Mais comment passer à $p>1$?

Le cas $p>1$ **et** $N=2$ **:**
Soit $u \in D(\mathbb{R}^2)$, $|u|^q \in D(\mathbb{R}^2)$, avec $q>0$ et $q=\frac{p^*}{2}$. On a par l'inégalité ci-dessus que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p^*} = \int_{\mathbb{R}^2} (|u|^{\frac{p^*}{2}})^2 \leq c.\left(\int_{\mathbb{R}^{\not{}}} |\partial_2 u|^{\frac{p^*}{2}} + |\partial_1 u|^{\frac{p^*}{2}}\right)^2$$

Si on dérive et puis qu'on applique l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p^*} \leq c.\frac{p^*}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{\frac{p^*}{2}-1}(|\partial_2 u| + |\partial_1 u|)\right)^2 \leq c.\frac{p^*}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{(\frac{p^*}{2}-1).p'}\right)^{2/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\partial_2 u| + |\partial_1 u|)^p dx\right)^{2/p}$$

On peut observer que $(\frac{p^*}{2}-1).p' = p^*.(\frac{1}{2}-\frac{1}{p^*}).p' = p^*.(\frac{1}{2}-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})).p' = p^*.(1-\frac{1}{p}).p' = p^*.\frac{1}{p'}.p' = p^*$.
Dès lors,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p^*} \leq c'.\left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{p^*}\right)^{2-\frac{2}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|)^p dx\right)^{2/p}$$

En simplifiant encore les exposants, on arrive à l'inégalité qu'on voulait.

Le cas $p > 1$ et $N = 3$:
Si on veut passer à $N = 3$, on aura que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(x_1, x_2, x_3)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2, x_3)|.\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t, x_3)|.\int_{\mathbb{R}} |\partial_3 u(x_1, x_2, t)|$$

Si on intègre le membre de droite à une certaine puissance, on arrive à devoir intégrer à gauche des fonctions de deux variables. On devra alors utiliser Cauchy-Shwartz et l'intégalité de Gagliardo. Il est aisé de passer au cas général avec cette inégalité.

Le cas général : Let $u \in C^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ be such that spt u is compact. It follows from the fundamental theorem of calculus that for $1 \leq j \leq N$ and $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|\partial_j u(x)\right| dx_j$$

By the preceding lemma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)} dx \leq \prod_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial \mu(x)| dx\right]^{1/(N-1)}$$

Hence we obtain

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leq \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{N} \|\partial_j u\|_1^{1/N} \leq c_N \|\nabla u\|_1$$

For $p > 1$, we define $q = (N-1)p^*/N > 1$. Let $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$. The preceding inequality applied to $|u|^q$ and Hölder's inequality imply that

$$\begin{aligned}\left(\int |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq q c_N \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-1} |\nabla u| dx \\ &\leq q c_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(q-1)p'} dx\right)^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

It is easy to conclude the proof. □

Lemma 6.4.3(Morrey's inequalities) : Let $N < p < \infty$ and $\lambda = 1 - N/p$. Then there exists a constant $c = c(p, N)$ such that for every $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ and every $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}&|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\lambda \|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^N\right)} \\ &\|u\|_\infty \leq c\|u\|_{W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)}\end{aligned}$$

Ce théorème nous dit que l'écart entre $u(x)$ et $u(y)$ est déterminé par la dérivée dans L^p, la continuité de ma fonction dépend de ma dérivée dans L^p. On nous dit aussi que notre fonction est bornée.

Démonstration. Let $u \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ and $Q = B_\infty(0, r/2)$ on a ici des boules cubiques, créées avec la norme infinie, donc, $|x|_\infty \leq \frac{r}{2} \leq r$. It follows from the fundamental theorem of calculus that for $x \in Q$,

$$|u(x) - u(0)| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} u(xt) dt\right| = \left|\int_0^1 x \nabla u(tx) dt\right| \leq \int_0^1 |x|_\infty |\nabla u(tx)|_1 dt \leq r \int_0^1 |\nabla u(tx)|_1 dt$$

Integrating on Q, (!! $m(Q)=r^N$), we obtain (on calcule la moyenne des écarts)

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{m(Q)}\int_Q u(x)dx - u(0)| &= |\frac{1}{m(Q)}\int_Q u(x)-u(0)dx| \\
&\leq \frac{r}{m(Q)}\int_Q dx \int_0^1 |\nabla u(tx)|_1 dt \\
&= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_Q |\nabla u(tx)|_1 dx \\
&= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 dt \int_{tQ} |\nabla u(y)|_1 \frac{dy}{t^N}
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable à la dernière égalité, $y = xt$, dès lors, $dy = t^N.dx$ car la matrice de changement de variable est une diagonale avec des t, donc le déterminant est t^N.
On a bien que nos fonctions sont dans L^p et $L^{p'}$ car elles sont continues à support compact. Hölder's inequality implies that

$$|\frac{1}{m(Q)}\int_Q u(x)dx - u(0)| \leq \frac{\sqrt{N}}{r^{N-1}}\|\nabla u\|_{L^p(Q)}.r^{N/p'}\int_0^1 \frac{t^{N/p'}}{t^N}dt = \frac{\sqrt{N}}{\lambda}r^\lambda\|\nabla u\|_{L^p(Q)}$$

After a translation (ma translation ne va rien changer dans la norme L^p du gradiant), for $x \in \mathbb{R}^N$ we have

$$|\frac{1}{m(Q)}\int_Q u(x)dx - u(x)| \leq \frac{\sqrt{N}}{\lambda}r^\lambda\|\nabla u\|_{L^p(Q)}$$

Choosing $r = 1$, we find that (on applique aussi Hölder à u et la fonction constante 1 à la (3))

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq |\frac{1}{m(Q)}\int_Q u(x)dx| + |\frac{1}{m(Q)}\int_Q u(x)dx - u(x)| \\
&\leq |\frac{1}{m(Q)}\int_Q u(x)dx| + \frac{\sqrt{N}}{\lambda}r^\lambda\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \\
&\leq \frac{\sqrt{N}}{\lambda}r^\lambda\|\nabla u\|_{L^p(Q)} + \frac{1}{m(Q)}.\|u\|_{L^p}.m(Q)^{1-1/p} \\
&\leq \frac{\sqrt{N}}{\lambda}r^\lambda\|\nabla u\|_{L^p(Q)} + \frac{c.\|u\|_{L^p}}{r^{N/p}} \\
&\leq c_1(\|\nabla u\|_{L^p(Q)} + \|u\|_{L^p}) \\
&\leq c_1\|u\|_{W^{1-p}(Q)} \\
&\leq c_1\|u\|_{W^{1-p}(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Let $x, y \in \mathbb{R}^N$. Choosing $r = 2|x-y|$, we find that

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq |u(x) - \frac{1}{m(Q)}\int_Q u| + |u(y) - \frac{1}{m(Q)}\int_Q u| \\
&\leq \frac{1}{m(Q)}\int_Q |u(x)-u| + \frac{1}{m(Q)}\int_Q |u(y)-u| \\
&\leq \frac{2^{1+\lambda}}{\lambda}\sqrt{N}|x-y|^\lambda\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \\
&\leq c_2|x-y|^\lambda\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

On a dans cette dernière étape non plus regardé se qui se passait dans une boule individuelle , mais dans une boule commune à notre $u(x)$ et notre $u(y)$. □

Notation. We define

$$C_0(\bar{\Omega}) = \left\{u|_\Omega : u \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$$

Theorem 6.4.4. (Sobolev's embedding theorem, 1936 – 1938 **) :** Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^N$ of class C^1 with a bounded frontier or the product of N open intervals.

(a) If $1 \leq p < N$ and if $p \leq q \leq p^*$, then $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, and the canonical injection is continuous.
$\hookrightarrow$ On sait de base que $u \in L^p$ et on peut montrer qu'il sera dans L^{p^*}, avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, l'exposant conjugué de Sobolev. Celui-ci est strictement plus grand que zéro si $p < N$.

(b) If $N < p < \infty$ and $\lambda = 1 - N/p$, then $W^{1,p}(\Omega) \subset C_0(\bar{\Omega})$, the canonical injection is contimuous, and there exists $c = c(p, \Omega)$ such that for every $u \in W^{1,p}(\Omega)$ and all $x, y \in \Omega$,

$$|u(x) - u(y)| \leq c.\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x - y|^\lambda$$

$\hookrightarrow$ Dans le cas où la dimension est plus petite, alors, les fonctions dans $W^{1,p}(\Omega)$ sont continues.

Nous voyons ce théorème dans le cadre $\Omega = \mathbb{R}^N =]-\infty, +\infty[^N$. On remarque que nous ne savons rien sur le cas $p = N$, c'est le cas critique (on a des gros soucis en dimension 2 avec $W^{1,2}$). Cette inégalité est intéréssante car si on a une info sur sa dérivée faible, on aura une info sur une meilleure intégrabilité ou alors, une info sur la continuité de notre fonction.
En particulier, en utilisant d'autres résultats du chapitre, cela permet de montrer que avoir des sous-suites bornées dans $W^{1,p}$ si on a un domaine borné , on va pouvoir montrer de la compacité.

Démonstration. Let $1 \leq p < N$ and $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. By Theorem 6.1.10, $(\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} = W_0^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) = W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right))$ there exists a sequence $(u_n) \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ such that $u_n \to u$ in $W^{1,P}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer that $u_n \to u$ almost every where on $\mathbb{R}^N$ (prop. 4.2.10). It follows from Fatou's (1) lemma and Sobolev's (2) inequality that

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \varliminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq c \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

La dernière inégalité (3) est vraie par continuité de la norme. On utilise le lemme de Fatou car on ne sait pas au départ que u sera dans L^{p*}. Mais justment, la manière dont on borne cette norme dans L^{p*} montre que u est bien dans L^{p*}.
De plus, si u est dans L^{p*} et dans L^p, alors, par l'inégalité d'interpolation (prop. 4.2.4), on a que $u \in L^q(\Omega)$, donc, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

Montrons maintenant le cas (b).
Soit $(u_n) \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$. Nous pouvons supposer que $u_n \to u$ presque partout sur $\mathbb{R}^N$. Les inégalités de Morrey assurent que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\lambda \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$
$$\|u_n - u_m\|_\infty \leq c\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

on a que

$$\|u_n - u_m\|_\infty \leq c.\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$$

La suite u_n est de Cauchy pour la norme uniforme. Ceci implique qu'elle converge uniformément vers une fonction $\tilde{u} \in L^\infty$. Comme la convergence uniforme préserve la continuité, on en déduit que $\tilde{u}$ est continue. Puisque $u_n \to \tilde{u}$ uniformément, en particulier $u_n \to \tilde{u}$ ponctuellement. Or, $u_n \to u$ presque partout. Ceci implique que $\tilde{u}(x) = u(x)$ pour tout x tel que $u_n(x) \to u(x)$, donc pour presque tout x. On en déduit que $u = \tilde{u}$ presque partout. Comme $C_0(\mathbb{R}^N)$ est la fermeture de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ dans L^∞, on a que $u \in C_0(\mathbb{R}^N)$
Dès lors, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)) \subset C_0(\mathbb{R}^N)$.

□

La cas de la projection canonique n'est pas utile pour nous car on est déjà sur $\mathbb{R}^N$ et pas sur Ω. C'est une fonction qui nous permet d'agrandir le domaine par injections canoniques et de démontrer notre théorème sur $\mathbb{R}^N$.

On a démontré ce théorème car dans un cas habituel, lorsque f est dérivable, alors, elle est continue. On a aussi ue autre égalité classique qui est

$$|f(x) - f(y)| \leq (\sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|)|x - y|$$

L'inégalité (b) ci-dessus nous donne un résultat similaire pour les dérivées faibles. Ces inégalités peuvent alors ensuite nous aider à montrer des théorèmes de compacité.

6.3 Remarques sur le chapitre 6 : Espaces de Sobolev

- $\|u\|_{W^{1,p}} \simeq \|u\|_p + \|\nabla u\|_p$
- Toute dérivée classique est une dérivée faible. Quand notre fonction est aussi classiquement dérivable, alors on peut observer que notre dérivée faible est notre dérivée classique.
- Puisque
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{p} + \frac{\lambda}{p^*}$$
par l'inégalité d'interpolation, on peut déduire que $L^q \subset L^p \cap L^{p^*}$.
- On a clairement que $\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{1,p}}$ car, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a que, $|\alpha| = 1$, $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots 0)$. Dès lors,
$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{1,p} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega \left|\partial^0 u\right|^p \, dx + \sum_{0<|\alpha|\leq 1} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&= \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{0<|\alpha|\leq 1} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}
\end{aligned}$$
La deuxième somme représente une somme sur toutes les permutations de l'indice 1 dans notre "vecteur" α. Cette somme d'intégrales étant positive, on a que $\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{1,p}}$.
Cela est généralisable, on a toujours $\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{k,p}}$ car étant donné que
$$\left(\sum_{0<|\alpha|\leq k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} \geq 0$$
l'inégalité est démontrée.
- On a les inlusions suiventes :