EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 13
DUAUX ET HAHN-BANACH

Exercice 1. *Fixons $p, q \in (1, \infty)$. On muni l'espace $\ell^p(\mathbb{N}) \times \ell^q(\mathbb{N})$ de la norme*

$$\|(x, y)\| \doteq \|x\|_{\ell^p(\mathbb{N})} + \|y\|_{\ell^q(\mathbb{N})}$$

pour tout $(x, y) \in \ell^p(\mathbb{N}) \times \ell^q(\mathbb{N})$. Décrire son dual. Hint : le dual est $\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}) \times \ell^q(\mathbb{N}), \mathbb{R})$; pouvez-vous écrire un isomorphisme d'espace vectoriel normé entre cet espace un un espace plus simple qui ne fait pas apparaître $\mathcal{L}$.

Idée de solution de l'exercice 1. By definition $\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}) \times \ell^q(\mathbb{N}), \mathbb{R})$ consists in contionous linear functional acting on $\ell^p(\mathbb{N}) \times \ell^q(\mathbb{N})$, that is operators $A : \ell^p(\mathbb{N}) \times \ell^q(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$. $A = A \circ \pi_{\ell^p(\mathbb{N})} + A \circ \pi_{\ell^q(\mathbb{N})} = A_1 + A_2$. □

Exercice 2. *Fixons $p = 3$. Determiner tous les $\beta \in \mathbb{R}$ de sorte que*

$$A(x_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} x_n$$

définit un élément dans l'espace $\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}), \mathbb{R})$.

Idée de solution de l'exercice 2. Si $\beta < -(p-1)/p$ par l'inégalité de Hölder,

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} x_n\Big| \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta p/(p-1)}\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

car la suite n^{α} est sommable si et seulement si $\alpha < -1$. Inversément, par dualité si l'opérateur est bien un élément de $\mathcal{L}(\ell^p(\mathbb{N}), \mathbb{R})$ alors cela implique que $n^{\beta} \in \ell^p(\mathbb{N})$. □

Exercice 3. *(i) Fixons $u \in L^p(X)$, $p \in (1, \infty)$ telle que pour tout $f \in (L^p)'$, $\langle f, u \rangle = 0$. Montrez que $u = 0$ presque partout.*

(ii) Fixons $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in (1, \infty)$ telle que pour tout $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, $\langle f, u \rangle = 0$. Montrez que $u = 0$ presque partout.

Idée de solution de l'exercice 3. (i) On remarque que $f = u|u|^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-1}} = (L^p)'$ donc pour $\|u\|_{L^p} = \langle f, u \rangle = 0$.

(ii) Les fonctions lisses sont denses dans L^p. On trouve $f_n \to f$ dans $L^{p'}$ avec f comme au dessus.

□

Date: Automne 2022.

Exercice 4. *Fixons $p \in (1,\infty)$. Montrez que pour chaque $f \in L^p(X,\mu)$*

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X fg\,\mathrm{d}\mu : g \in L^{p'}(X,\mu), \|g\|_{p'} \le 1\right\}$$
$$= \sup\left\{\int_X f\frac{g}{\|g\|_{p'}}\,\mathrm{d}\mu : g \in L^{p'}(X,\mu)\right\}.$$

Idée de solution de l'exercice 4. C'est la définition de norme d'opérateur de $L_f : L^p \to \mathbb{R}$ qui à u associe $\langle f, u\rangle$. □

Exercice 5. *Expliquez pourquoi $\big(L^1(0,1)\big)^* = L^\infty(0,1)$ et l'identification est une isométrie c'est-à-dire pour tout $\langle f| \in \big(L^1(0,1)\big)^*$ il existe un unique $v \in L^\infty(0,1)$ tel que*

$$\langle f|u\rangle = \int_{(0,1)} vu\,\mathrm{d}x$$

pour tout $u \in L^1(0,1)$. De plus, $\|\langle f|\|_{\left(L^1(0,1)\right)^*} = \|v\|_{L^\infty(0,1)}$.

Indication : Il y a deux inclusions à prouver. Pour l'une, vu que $L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$, on obtient que $\big(L^1(0,1)\big)^* \subset \big(L^2(0,1)\big)^*$. On peut alors utliser la dualité $L^2(0,1)$ pour montrer que tout $\langle f| \in \big(L^1(0,1)\big)^*$ se représente par un élément v de $L^2(0,1)$ qui satisfait pour tout $A \subset (0,1)$ mesurable

$$\int_A |v|^2\,\mathrm{d}x \le \|\langle f|\|_{\left(L^1(0,1)\right)^*}\int_A |v|\,\mathrm{d}x.$$

Un choix de A permet de conclure que $v \in L^\infty(0,1)$.

Exercice 6. *Fixons $p > 1$. On définit $\ell^{1,p}(\mathbb{N})$ par la suites $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ dont*

$$\|x\|_{\ell^{1,p}(\mathbb{N})} \doteq \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2)|x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

est finie. L'espace $\ell^{1,p}(\mathbb{N})$ est un esapce vectoriel normé complet. Determiner son dual.

Idée de solution de l'exercice 6. On a que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^{1,p}(\mathbb{N})$. Donc, $\ell^{p'}(\mathbb{N}) = (\ell^{p'}(\mathbb{N}))' \supset (\ell^{1,p}(\mathbb{N}))'$. Cela veut dire que pour tout $A \in (\ell^{1,p}(\mathbb{N}))'$ il existe $g \in \ell^{p'}$ de sorte que pour tout $x \in \ell^{1,p}$

$$Ax = \langle g, x\rangle$$

On observe que

$$|\langle g, x\rangle| \le \|A\|\|x\|_{\ell^{1,p}}$$

pour tout $x \in \ell^{1,p}$ ou encore

$$\langle (g_n/(1+n^2)^{\frac{1}{p}}), (x_n(1+n^2))^{\frac{1}{p}}\rangle \le \|A\|\|(x_n(1+n^2)^{\frac{1}{p}})\|_{\ell^p}$$

Vu que $(x_n) \mapsto (x_n(1+n^2)^{\frac{1}{p}}$ se surjecte on obtient $(\ell^{1,p}(\mathbb{N}))' = \{g_n/(1+n^2)^{\frac{1}{p}}) \in \ell^{p'}(\mathbb{N})\}$. □

Exercice 7. *Donnez le dual de* $\mathbb{R}^n$ *c'est-à-dire* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Comment se compare-t-il avec son dual algébrique défini en algèbre linéaire ?*