DEVOIR 04 D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Devoir à rendre pour le jeudi premier décembre à 9h00.

Exercice 1. *Nous définissons l'opérateur de décalage unilatéral V sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de sa base canonique $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'expression*

$$V\delta_n = \delta_{n+1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *(i) Expliquer pourquoi V définit une isométrie, c'est-à-dire un opérateur de norme d'opérateur égal à 1.*
- *(ii) Déterminer le noyau et l'image de l'opérateur V.*
- *(iii) Donner l'adjoint V^* de V et vérifier si V^*V est égal à VV^*.*
- *(iv) L'opérateur V a-t-il des valeurs propres ?*
- *(v) Expliquer pourquoi tout nombre strictement compris entre -1 et 1 est une valeur propre approchée de V^* et déterminer le spectre de l'adjoint V^* puis celui de l'opérateur V.*
- *(vi) L'intérieur du spectre de V ne contient ni valeur propre ni valeur propre approchée et la frontière du spectre et l'ensemble des valeurs propres approchées de V.* Par frontière on entend l'adhérence retranchée de l'intérieur.

Date: Automne 2022.