EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 9
CONVERGENCE D'APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1. *Pour $f \in L^1_{per}[0,1]$. Considérons la somme de Fourier d'ordre n*

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2\pi\imath kx} c_k(f) \quad \text{où} \quad c_k(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-2\pi\imath kt}\,\mathrm{d}t.$$

Notez que par l'inégalité de Young, en faisant apparaitre la convolution $S_n f = D_n * f$ nous avons

$$\int_0^1 |S_n(f)(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 |D_n(t)|\,\mathrm{d}t \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

où $D_n(t)$ est le noyau de Dirichlet. Cette estimation dépend de n dans son membre de droite. Peut-on s'en abstraire?

Nous allons montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ ne dépendant pas de n telle que pour chaque n et $f \in L^1_{\mathrm{per}}([0,1])$

$$\int_0^1 |S_n(f)(x)|\,\mathrm{d}x \le C \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(a) *Reformulez l'existence de la constante $C > 0$ en terme de la finitude d'un supremum de la norme d'opérateur d'une famille d'opérateurs linéaires A_n.*

(b) *Etablissez l'égalité suivante :*

$$\sup_{\substack{u \in L^1_{per}[0,1] \\ \|u\|_{L^1[0,1]} \le 1}} \int_0^1 |S_n(f)(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |D_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

où $D_n(t)$ désigne le noyau de Dirichlet c'est-à-dire

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{2\pi\imath kt} = \begin{cases} \dfrac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ 2n+1 \end{cases}$$

Indication : pour une des inégalités, observez que $u_\epsilon = \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}/2\epsilon$ est de norme $L^1_{per}[0,1]$ unité et que $\lim_{\epsilon \downarrow 0} c_k(u_\epsilon) = \dots$

(c) *Utilisez le fait que $\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_{L^1[0,1]} = +\infty$ pour déduire l'inexistence de la constante $C > 0$.*

(d) *Existe-t-il une fonction $f \in L^1_{per}[0,1]$ telle que $S_n(f)$ ne converge pas vers f dans $L^1[0,1]$?*

Date: Automne 2022.

Idée de l'exercice 1. (a) We set $A_n : f \in L^1(0,1) \mapsto S_n(f)$. The constant $C > 0$ exists if and only if

$$\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(L^1(0,1),L^1(0,1))} < +\infty.$$

(b) There are two inequalities to prove. One is

$$\int_0^1 |S_n(f)(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |D_n(t)| \,\mathrm{d}t \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Let us compute

$$c_k(u_\epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{e}^{-2\pi\imath kt} \,\mathrm{d}t/2\epsilon = \frac{(\mathrm{e}^{-2\pi\imath k\epsilon} - \mathrm{e}^{2\pi\imath k\epsilon})}{-2\pi\imath k\epsilon} \xrightarrow{\epsilon\searrow 0} 1.$$

Hence $S_n(u_\epsilon) \to D_n(\cdot)$ almost everywhere. By dominated convergence (one can use $|\mathrm{e}^{\imath x}| = 1$ and the fact than n is fixed), we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |S_n(f)(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |D_n(t)| \,\mathrm{d}t.$$

(c) It is an instance of the uniform boundedness principle.
(d) No, it is an instance of the uniform boundedness principle.

□

Exercice 2. *Pour un espace vectoriel normé complet X et un espace vectoriel normé Y, on étudie la convergence d'une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs linéaires et continus $A_n : X \to Y$. Expliquer pourquoi les trois affirmations suivantes sont équivalentes.*

(i) (Convergence ponctuelle) Pour tout $x \in X$ $(A_n x)_n$ converge en norme dans Y.
(ii) (Convergence ponctuelle vers une limite continue) Il exist un operateur linéaire et continu $A : X \to Y$ de sorte que pour chaque $x \in X$ $(A_n x)_n$ converge vers Ax dans Y.
(iii) (Borne uniforme et convergence sur une classe dense) L'ensemble

$$\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\}$$

est borné et il existe un ensemble D, dense dans X, tel que pour chaque $d \in D$, la suite $(A_n d)_n$ converge dans Y.

Idea of solution of exercice 2. (ii) $\implies$ (i) follows by forgetting part of the conclusion. (i) $\implies$ (iii) follows by choosing $D \doteq X$ and the uniform boundedness principle.

(iii) $\implies$ (ii). For every $d \in D$ we define

$$f(d) \doteq \lim_{n\to\infty} A_n d$$

Then using the extension theorem for uniform continous mappings one gets a map f defined on the whole space X. Let us show that for all $x \in X$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x).$$

Take $(d_n)_n$ such $d_n \to x$. We have

$$\begin{aligned}|f(x) - A_n(x)| &\leq |f(x) - f(d_m)| + |f(d_m) - A_n(d_m)| + |A_n(d_m) - A_n(x)| \\ &\leq |f(x) - f(d_m)| + |f(d_m) - A_n(d_m)| + |d_m - x| \sup_n \|A_n\|\end{aligned}$$

Letting $\epsilon > 0$ we fix m so that

$$|f(x) - f(d_m)|, |d_m - x| \leq \epsilon$$

and we then fix $n = n(m)$ so that

$$|f(d_m) - A_n(d_m)| \leq \epsilon.$$

Linearity We want to show that

$$f(x + \mu y) = f(x) + \mu f(y)$$

This follows from the linearity of the limit and the linearity of A_n for each n. for all $x, y \in X$ and $\mu \in \mathbb{R}$. □

Exercice 3. *Let us consider $c_\#(\mathbb{N})$ the set of real sequences with only finitely many non-zero entries and equiped with the $\ell^\infty(\mathbb{N})$-norm. For each n we call $M_n : c_\#(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ the map that realizes*

$$(a_m)_m \mapsto n a_n.$$

Explain why the operators are pointwise bounded but not uniformly bounded. Does it contradicts the uniform boundedness principle ?

Idée de l'exercice 3. We have

$$\|M_n\|_{\mathcal{L}(c_\sharp(\mathbb{N}),\mathbb{R})} = n$$

which is not a bounded sequence in n. We observe that the space $c_\sharp(\mathbb{N})$ is not complete. □

Exercice 4. *Let us consider for each n the map*

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} n & \textit{if } x \in [n, n+1] \\ 0 & \textit{else.} \end{cases}$$

Explain why the operators $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are pointwise bounded but not uniformly bounded. Does it contradicts the uniform boundedness principle ?

Idée de l'exercice 4. We have

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f_n\|_\infty = n$$

which is not a bounded sequence in n. We observe that that none of the maps are linear. □

Exercice 5. *Pour un espace vectoriel normé complet X et un espace vectoriel normé Y, on étudie la convergence d'une série $\sum_{n=0}^\infty A_n$ d'opérateurs linéaires et continus $A_n : X \to Y$. Supposons que pour chaque $x \in X$ la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^k A_n x)_k$ converge dans Y vers un certain $S(x)$.*

Expliquer pourquoi $S(x)$ définit un opérateur linéaire et continu et donner un sens à l'égalité

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x.$$

Do we have

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty \ ?$$

Idée de l'exercice 5. Method 1. One can use exercice 2 with sequence of partial sums.

Method 2. Convergent sequences are bounded ; by the uniform boundedness principle,

$$\sup_k \sup_{x:\|x\|\leq 1} \left\| \sum_{n=0}^{k} A_n x \right\| < \infty$$

Therefore

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \sup_k \sup_{x:\|x\|\leq 1} \left\| \sum_{n=0}^{k} A_n x \right\|$$

and is S therefore define a continous linear mapping.

The equality

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x.$$

reads

$$S(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} A_n x.$$

and the limit happens to be in the sense of norm convergence in X.

By the triangle inequality one has

$$\|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

So we need to argue that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

is finite. It can be infite take $X = \mathbb{R}$, $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 1/n$ and $A_n x = (-1)^n/nx$. $\square$