DEVOIR 03 D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Devoir à rendre pour le jeudi 17 novembre à 9h00.

Exercice 1. *Considérons une suite de fonctions continues* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *qui converge ponctuellement vers une application* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Nous allons que étudier la taille de l'ensemble des points de* $[0,1]$ *où la fonction* f *n'est pas continue au regard de la théorie des ensembles rares et maigres.*

(i) Rappeler que si la suite de fonctions continues converge de plus uniformément alors la fonction limite f *est continue et expliquer pourquoi.*

(ii) Expliquer qu'en général, quand on sait seulement que la suite (f_n) *de fonctions continues ne converge que ponctuellement, la limite* f *peut être discontinue.*

(iii) En fait, l'ensemble des points de $[0,1]$ *où la fonction* f *n'est pas continue est un ensemble maigre. Expliquer pourquoi en vous basant sur ce qui suit. Votre rédaction articulera les différentes étapes de la démonstration.*

Fixons $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{N}$ *ainsi que les ensembles*

$$\begin{aligned} A(k,p,q) &\doteq \{x \in [0,1] : |f_p(x) - f_q(x)| \leq 1/k\}, \\ B(k,p) &\doteq \bigcap_{q' \geq p} A(k,p,q'), \\ A &\doteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p)) \end{aligned}$$

Ici, $\operatorname{int}(B(k,p))$ *désigne l'inérieur de l'ensemble* $B(k,p)$, *le plus grand ouvert contenu dans* $B(k,p)$. *En tout point de* A, *la fonction* f *y est continue.*

Le complémentaire de A *dans* $[0,1]$ *est maigre. Pour cela, on peut observer que* $[0,1] = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} B(k,p)$.

Quelques indications sur le point (iii). Appelons

$$D \doteq \{x \in [0,1] : f \text{ n'est pas continue en } x\}$$

En décortiquant la définition de continuité,

$$D \subset [0,1] \setminus A.$$

(Ici, «$\subset$» signifie égal ou inclu.) Il suffit de montrer que $[0,1] \setminus A$ est maigre. On a que

$$[0,1] \setminus A = [0,1] \setminus \bigcap_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Big([0,1] \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{int}(B(k,p)) \Big).$$

Date: Automne 2022.

Par union dénombrable, il suffit donc de montrer que

$$[0,1] \setminus \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(B(k,p))$$

est maigre pour chaque $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Si

$$[0,1] = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} B(k,p) \tag{1}$$

alors

$$[0,1] \setminus \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(B(k,p)) \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \big(B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p)).\big)$$

Pour tout k, p, je note que $B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p)$ est rare comme $B(k,p)$ est fermé.

Une intuition de ce dernier fait pouvait venir du fait que l'ensemble $B(k,p)\setminus \mathrm{int}(B(k,p)$ correspond à la frontière topologique de l'ensemble $B(k,p)$. Si on se représente une frontière d'un honnête ensemble dans le plan, on peut deviner qu'il est d'intérieur vide, c'est le cas pour tout fermé. Une autre intuition de la rareté de $B(k,p) \setminus \mathrm{int}(B(k,p))$ est d'arguer que l'intérieur d'un ensemble fermé auquel on a retranché son intérieur est probablement «petit» ou vide.

Pour (1), on peut utiliser le critère de Cauchy pour la convergence ponctuelle de la suite $(f_n)_n$.