DEVOIR 01 D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Devoir à rendre pour le jeudi 29 septembre 9h00

Exercice 1. *Une fonction mesurable* $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *est à variation moyenne bornée (*bounded mean oscillation*) si*

$$\|u\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \doteq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^d\\ r\in(0,1)}} \frac{1}{\mu(\mathbb{B}^d[a,r])}\int_{\mathbb{B}^d[a,r])} \frac{1}{\mu(\mathbb{B}^d[a,r])}\int_{\mathbb{B}^d[a,r])} |u(x)-u(y)| \,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

où μ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$*. Nous notons* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ *l'ensemble formé par toutes ces fonctions.*

(i) Toute fonction mesurable $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *bornée est-elle à variation moyenne bornée ?*

(ii) Toute fonction constante est-elle à variation bornée ?

(iii) Les fonctions à variation moyenne bornée $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *forment-elles un espace vectoriel ?*

   (a) Si oui, la quantité $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}$ *définit-elle un norme ? Une semi-norme ?*

   (b) Si non, l'ensemble des fonctions à variations bornée muni de la fonction

$$\mathrm{d}_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} : (u,v) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \times \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \mapsto \|u-v\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}$$

   admet-il une structure d'espace métrique ? Semi-métrique ?

Date: Automne 2022.