EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 9
PRINCIPE DE LA BORNE UNIFORME

Exercice 1. *L'espace complet* $(C^0]a,b[,\|\cdot\|_\infty)$ *est-il maigre ?*

Idée de solution de l'exercice 1. On pose $X \doteq C^0]a,b[$ et $A \doteq C^0]a,b[$. On vérifie que

$$\overline{X \setminus \overline{A}} = \emptyset$$

empéchant l'ensemble d'être maigre car il n'est pas rare. □

Exercice 2. *Montrez que le sous-ensemble* P *des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *paires est maigre dans* $(C_b(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$*. Le sous-ensemble* I *des fonctions impaires jouit-il de la même propriété ?*

Considérons alors l'ensemble

$$E = \{f = g + h \in C_b(\mathbb{R}) : g \in P, h \in I\}.$$

Est-il maigre ? Et $F = P \cap I$ *?*

Idée de solution de l'exercice 2. L'ensemble est maigre car rare. On observe que $\overline{P} = P$ car l'identité $f(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ est stable par convergence uniforme (laquelle implique la convergence ponctuelle). Il convient de vérifier si

$$\overline{C_b(\mathbb{R}) \setminus P} = C_b(\mathbb{R})$$

ce qui se reformule en se demandant si toute fonction de $C_b(\mathbb{R})$ peut s'approcher par une suite de fonctions de $C_b(\mathbb{R})$ convergant dans $C_b(\mathbb{R})$ par une fonction non paire. Si $u \in C_b(\mathbb{R})$ est une fonction non paire, la suite constante est une telle suite. Si $u \in C_b(\mathbb{R}) \cap P$, montrons qu'on peut l'approcher par une suite de fonctions continues non paires. On prend un fonction continue à support compact non nulle $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le support $\mathrm{Spt}(u) \subset [1,2]$. Pour tout n, on pose

$$u_n = u + \frac{1}{n}h.$$

On observe que pour chaque n, u_n n'est pas paire :

$$u_n(\cdot) - u_n(-\cdot) = \frac{1}{n}(h(\cdot) - h(-cdot))$$

et il existe par construction un $x \in [1,2]$ de sorte que

$$h(x) \neq h(-x).$$

Par ailleurs,

$$\|u_n - u\|_\infty = \frac{1}{n}\|h\|_\infty$$

Date: Automne 2022.

tend vers zéro quand n tend vers l'infini montrant ainsi la convergence uniforme de la suite.

Concernant les fonctions impaires, la même démarche s'applique. On peut *casser* le caractère pair par la même technique.

Concernant la somme, on sait que toute fonction $C_b(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme de deux fonctions continues, l'une paire l'autre impaire. Si bien que $E = C_b(\mathbb{R})$ lequel n'est pas maigre par l'exercice 1. □

Exercice 3. *Montrez que les fonctions affines par morceaux sur $[a, b]$ forment un sous-ensemble dense de $(C_b([a, b]), \| \cdot \|_\infty)$.*

Exercice 4. *Existe-t-il une métrique qui rend les rationnels $\mathbb{Q}$ complet ?*

Exercice 5. *Considérons une partie fermée $F \subset C_b[a, b]$ muni de la norme uniforme. Montrez que F est rare si, et seulement si, il ne contient aucune boule ouverte.*

Idée de solution of exercice 5. We set $X = C_b[a, b]$ Let us assume that the set F is rare. *Ad absurdum* let us assume that it contains an open ball B. From this we have that

$$B \subset F \implies X \setminus F \subset X \setminus B \implies \overline{X \setminus F} \subset \overline{X \setminus B}$$

but by rarity

$$X = \overline{X \setminus F} \text{ and } \overline{X \setminus B} = X \setminus B$$

Those two line implies

$$X \subset X \setminus B \subset X$$

which implies that $B = \emptyset$ a contradiction.

Conversely, if F is closed and contains no open ball it is possible to show that if

$$\overline{X \setminus F} \neq X$$

then there exists a ball $B \subset X$. □

Exercice 6. *Dans un espace normé complet, montrez que les parties maigres sont d'intérieur vide.*

Idée de solution of exercice 6. Confer exercice 5. □

Exercice 7. *Expliquer pourquoi la frontière topologique d'un ensemble fermé est rare dans tout espace topologique. En est-il de même pour les ouverts ?*

Idée de solution of exercice 7. La frontière topologique d'un ensemble est l'ensemble retranché de son intérieur. Soit F est fermé et U sont intérieur Calculons, vu que $F \setminus U$ est fermé,

$$\overline{X \setminus \overline{F \setminus U}} = \overline{X \setminus (F \setminus U)} = \overline{(X \setminus F) \cup U} = (X \setminus U) \cup \overline{U} = X.$$ □

Exercice 8. *Montrons que dans $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, les fonctions qui admettent une dérivée en au moins un point forment un ensemble maigre. A cette fin, posons pour chaque entier naturel n*

$$A_n = \Big\{ u \in C_b(\mathbb{R}) : \text{il existe } x \in [-n, n] \text{ tel que} \\ \text{pour tout } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ on a } \frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|} \leq n \Big\}.$$

(a) *Observez que les fonctions qui admettent une dérivée en au moins un point forment un sous-ensemble de l'union $\bigcup_{n \geq 0} A_n$.*

(b) *Pour chaque n, l'évènement A_n est rare. Indication : montrez que*
   (i) *A_n est fermé*
   (ii) *A_n ne contient aucune boule ouverte. Indication : Supposons que $B_\epsilon(u) \subset A_n$. Construisez une fonction w affine par morceaux sur $[-2n, 2n]$ et continue sur le complémentaire telle que $w \in B_\epsilon(u)$ mais pour h petit et pour tout $x \in [-n, n]$*

$$\frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|} > n.$$

(c) *Concluez que, dans $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, les fonctions qui admettent une dérivée en au moins un point forment un ensemble maigre.*