EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 1

Exercice 1. *Une fonction mesurable $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est à variation moyenne bornée (*bounded mean oscillation*) si*

$$\|u\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \doteq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^d\\ r\in(0,1)}} \frac{1}{\mu(\mathbb{B}^d[a,r])}\int_{\mathbb{B}^d[a,r])}\frac{1}{\mu(\mathbb{B}^d[a,r])}\int_{\mathbb{B}^d[a,r])}|u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Nous notons $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ *l'ensemble formé par toutes ces fonctions.*

(i) Toute fonction mesurable $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bornée est-elle à variation moyenne bornée ?

(ii) Toute fonction constante est-elle à variation bornée ?

(iii) Les fonctions à variation moyenne bornée $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ forment-elles un espace vectoriel ?

- *(a) Si oui, la quantité $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}$ définit-elle un norme ? Une semi-norme ?*
- *(b) Si non, l'ensemble des fonctions à variations bornée muni de la fonction*

$$\mathrm{d}_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} : (u,v) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \times \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \mapsto \|u-v\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}$$

  admet-il une structure d'espace métrique ? Semi-métrique ?

Exercice 2. *Sur un ensemble Γ, on appelle* atome *toute fonction $a : \Gamma \to \mathbb{R}$ telle que $\{x \in \Gamma : a(x) \neq 0\}$ est fini,*

$$\sum_{x\in\Gamma} a(x) = 0 \text{ et } \|a\|_\infty \leq \frac{1}{\#\{x \in \Gamma : a(x) \neq 0\}}.$$

On construit alors l'ensemble

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) \doteq \left\{ f : x \in \Gamma \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n(x) : a_n \text{ atome }, \lambda_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| < +\infty \right\}.$$

On pose

$$\mathrm{d}_{\mathcal{H}^1(\Gamma)}(f,g) \doteq \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| : f - g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n,\ a_n \text{ atome }, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Si $f \in \mathcal{H}^1(\Gamma)$, expliquer pourquoi $f \in \ell^1(\Gamma)$.

(ii) Expliquez pourquoi $\mathrm{d}_{\mathcal{H}^1(\Gamma)}(f,g)$ est finie quand $f, g \in \mathcal{H}^1(\Gamma)$.

(iii) Déterminez si $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ muni de $\mathrm{d}_{\mathcal{H}^1(\Gamma)}(f,g)$ admet une structure d'espace (semi-)métrique.

Date: Automne 2022.

(iv) Si $\Gamma = \mathbb{N}$, montrez que

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n a_n(m)\right) = 0$$

Exercice 3. *Fixons $p \in [1,\infty)$. On considère toutes les fonctions $u \in L^1(0,1)$ telles que la quantité*

$$\|u\|_{X^p(0,1)} = \left(\int_0^1 (1+x)|u|^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

est finie et on considère l'ensemble $X^p(0,1)$ qu'elles forment.

(i) Expliquer pourquoi $X^p(0,1)$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un espace semi-normé.
(ii) Expliquer pourquoi $L^p(0,1) \subset X^p(0,1)$.
(iii) Est-il vrai que $X^1(0,1) \subset X^2(0,1)$? Et $X^1(0,1) \supset X^2(0,1)$?

Idée de solution à l'exercice 3. On observe que $X^p(0,1)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{X^p(0,1)}$ coïncide comm espace vectoriel normé avec $L^p((0,1),(1+|x|)\,\mathrm{d}x))$ avec sa norme usuelle. Les propriétés suivent alors de leur pendant pour les espaces de Lebesgue $L^p(X,\mu)$. □

Exercice 4. *On pose pour $g : \mathbb{B}(0,1) \to \mathbb{R}$*

$$E(g,\delta) \doteq \{(x,y) \in B(0,1) \times B(0,1) : |g(x) - g(y)| > \delta\}$$

et pour $p \in [1,\infty)$

$$\mathbb{I}_p(\mathbb{B}(0,1),\mathbb{R}) \doteq \left\{ g \in L^1(\mathbb{B}(0,1),\mathbb{R}) : \forall \delta > 0 \iint_{E(g,\delta)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y||^{p+d}} \right\}$$

et

$$\mathbb{J}_p(\mathbb{B}(0,1),\mathbb{R}) \doteq \left\{ g \in L^1(\mathbb{B}(0,1),\mathbb{R}) : \exists \delta > 0 \iint_{E(g,\delta)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y||^{p+d}} \right\}.$$

Déterminer si

(i) $\mathbb{I}_p$ et $\mathbb{J}_p$ sont des espaces vectoriels.
(ii) $\mathbb{I}_p$ est inclus dans $\mathbb{J}_p$.
(iii) $\mathbb{J}_p$ est inclus dans $\mathbb{I}_p$.
(iv) $\mathbb{I}_p$ contient toutes les fonctions uniformément continues sur $B(0,1)$.
(v) $\|g\|_{\mathbb{J}_p(\mathbb{B}(0,1))} \doteq \iint_{E(g,\delta)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y||^{p+d}}$ définit une norme, une semi-norme.

Expliquer pourquoi $\mathbb{I}_p \subset \mathbb{I}_q$ dès que $p \geq q$.

Exercice 5. *L'espace de Sobolev fractionnaire homogène* $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ *est défini pour* $d \in \mathbb{N}_*$, $s \in (0,1)$ *et* $p \in [1,+\infty)$ *par*

$$\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \Bigg\{ u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \textit{ mesurable} : \\ \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \doteq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s} \right)^p \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^d} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \Bigg\}$$

Expliquer pourquoi $(\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)})$ *est un espace vectoriel semi-normé. Décrivez le noyau de la semi-norme.*

(a) Expliquer pourquoi $(\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)})$ *est un espace vectoriel semi-normé.*

(b) Décrivez le noyau de la semi-norme.

(c) Expliquer pourquoi $(W^{s,p}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}) = (\dot{W}^{s,p} \cap L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)})$ *est un espace vectoriel semi-normé. Le noyau de la norme diffère-t-il ?*

Solution de l'exercice 5. (a) Comme les fonctions mesurables $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ forment un espace vectoriel, il suffit de montrer que la somme de deux éléments de $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ est encore dans l'ensemble, que la multiplication par un scalaire est dans $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ et enfin que la fonction nulle est encore dans $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$, ce qui suit de la définition. Pour la somme, considérons $u, v \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$. Observons que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s} \right)^p \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^d} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |u(x)-u(y)|^p \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}^{2d}(x,y)}{|x-y|^{sp+d}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

où $\mathscr{L}^{2d}$ est mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{2d}$. Si l'on définit la mesure

$$\mu(x,y) = \frac{1}{|x-y|^{sp+d}} \mathscr{L}^{2d}(x,y)$$

et que l'on considère l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mu)$, l'inégalité de Minkovski s'y écrit explicitement pour $F(x,y), G(x,y) \in L^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mu)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x,y)+G(x,y)|^p \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}^{2d}(x,y)}{|x-y|^{sp+d}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ \le \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |G(x,y)|^p \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}^{2d}(x,y)}{|x-y|^{sp+d}} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x,y)|^p \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}^{2d}(x,y)}{|x-y|^{sp+d}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Choisissant $F(x,y) = u(x) - u(y)$ et $G(x,y) = v(x) - v(y)$, nous observons que cela donne

$$\|u+v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)} + \|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)},$$

montrant ainsi que la somme $u+v \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient que $\|\lambda u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)} = |\lambda| \|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}$. Observons que $\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^d)}$ définit une semi-norme par ce qui précède.

(b) Il s'agit des fonctions mesurables $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ presque partout égales à une constante réelle.

(c) Observons que la somme de deux semi-norme est une semi-norme. Le noyau consiste en les fonction mesurables $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nulles presque partout.

$\square$

Exercice 6. *Pour $\gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^d)$ on pose*

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'|(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $a, b \in \Omega$, on définit

$$\mathrm{d}_\Omega(a,b) = \inf\{\ell(\gamma_{a,b}) : \gamma_{a,b} \in C^1([0,1], \mathbb{R}^d), \gamma_{a,b}[0,1] \subset \Omega\}$$

dès qu'il existe un $\gamma_{a,b} \in C^1([0,1], \mathbb{R}^d), \gamma_{a,b}[0,1] \subset \Omega$ sinon on pose $\mathrm{d}_\Omega(a,b) = +\infty$.

(i) Expliquer pourquoi $(\Omega, \mathrm{d}_\Omega)$ est un espace métrique.

(ii) A-t-on toujours $\mathrm{d}_\Omega(a,b) = |a-b|$?

Exercice 7. *Fixons $f \in L^1(0,\infty)$. Sur un espace métrique (X,d) on définit pour tout $(x,y) \in X \times X$*

$$D(x,y) = \int_0^{d(x,y)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Expliquer pourquoi, si f est positive et décroissante, D définit un semi-métrique sur X. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f de sorte à ce que D soit une métrique.

Exercice 8. *Sur les matrices réelles 2×2, la racine carrée valeur absolue du déterminant définit-elle une norme ?*

Exercice 9. *Fixons $p \in (1,\infty)$. Définissons*

$$L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d) = \{u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \|u\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} < +\infty\}$$

où

$$\|u\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} = \sup\left\{\frac{1}{|A|^{1-\frac{1}{p}}}\int_A |u| : A \subset \mathbb{R}^d \text{ mesurable }, |A| \neq 0\right\}.$$

(a) Expliquer pourquoi $(L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)})$ est un espace vectoriel semi-normé.

(b) Expliquer pourquoi $L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 10. *Posons pour $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable*

$$\|u\|_* = \inf\left\{t > 0 : \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{1 + \left(\frac{|u(x)|}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}x \leq 1\right\}.$$

Définissons $L^\phi(\mathbb{R}^d)$ comme l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurables tels que la quantité $\|u\|_*$ est finie. Expliquer pourquoi $L^\phi(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel semi-normé.

Exemple de solution à l'exercice 10. Commençons par montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurables. Il convient de montrer que pour tout $u, v \in L^\phi(\mathbb{R}^d)$ la somme $u + v \in L^\phi(\mathbb{R}^d))$ ainsi que le produit $\lambda u \in L^\phi(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observation. Commençons par remarquer que pour tout $t > 0$ l'association

$$w \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{1 + \left(\frac{w}{t}\right)^2}$$

définit une fonction convexe. En effet, fixons $\lambda \in [0, 1]$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (1-\lambda, (1-\lambda)w_1/t)$ et $v_2 = (\lambda, \lambda w_2/t)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ que nous munissons de la norme $|\cdot|_2$. Alors, l'inégalité triangulaire $|v_1 + v_2|_2 \le |v_1|_2 + |v_2|_2$ s'y lit

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{(1-\lambda)w_1 + \lambda w_2}{t}\right)^2} &\le \sqrt{(1-\lambda)^2 + \left(\frac{(1-\lambda)w_1}{t}\right)^2} + \sqrt{(\lambda)^2 + \left(\frac{\lambda w_1}{t}\right)^2} \\ &= (1-\lambda)\sqrt{1 + \left(\frac{w_1}{t}\right)^2} + \lambda\sqrt{1 + \left(\frac{w_2}{t}\right)^2}\end{aligned}$$

montrant ainsi la convexité désirée.

Additivité. Fixons $t, s > 0$ tels que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{1 + \left(\frac{|u(x)|}{t}\right)^2}\, \mathrm{d}x \le 1 \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{1 + \left(\frac{|v(x)|}{s}\right)^2}\, \mathrm{d}x \le 1 \tag{2}$$

L'existence de s et de t est garantie par le fait que $u, v \in L^\phi(\mathbb{R}^d)$.

De la convexité de la fonction nous tirons que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ avec le choix $\lambda = s/(t + s) \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{|u(x)| + |v(x)|}{s + t}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{|u(x)|}{t}\frac{t}{t+s} + \frac{|v(x)|}{s}\frac{s}{t+s}\right)^2} \\ &= \frac{t}{t+s}\sqrt{1 + \left(\frac{|u(x)|}{t}\right)^2} + \frac{s}{t+s}\sqrt{1 + \left(\frac{|v(x)|}{s}\right)^2}\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}^d$, nous trouvons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{1 + \left(\frac{|u(x) + v(x)|}{t + s}\right)^2}\, \mathrm{d}x \le \frac{t}{t+s} + \frac{s}{t+s} = 1.$$

Donc, $\|u + v\|_* \le t + s < \infty$.

Homogénéité. Si $\lambda \in \mathbb{R}_*$, on observe en faisant apparaitre la variable $t/|\lambda|$ dans l'infimum que

$$\|\lambda u\|_* = \inf\left\{t > 0 : \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{1 + \left(\frac{|\lambda u(x)|}{t}\right)^2}\, \mathrm{d}x \leq 1\right\}$$

$$(3) \qquad = |\lambda| \inf\left\{\frac{t}{|\lambda|} > 0 : \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{1 + \left(\frac{|u(x)|}{t/|\lambda|}\right)^2}\, \mathrm{d}x \leq 1\right\} = |\lambda|\|u\|_*.$$

Donc $\lambda u \in L^\phi(\mathbb{R}^d)$. Si $\lambda = 0$, on observe que $\|\lambda u\|_* = 0 = |\lambda|\|u\|_*$. De l'additivité et de la multiplication par un scalaire nous concluons que $L^\phi(\mathbb{R}^d)$ est un sous espace-vectoriel des fonctions mesurables et donc un espace vectoriel.

Semi-normé. Montrons qu'il est semi-normé. L'homogénéité a déjà été écrite en 3. Il convient de montrer que $\|u + v\|_* \leq \|u + v\|_*$. A cette fin, considérons une suite (t_n) qui décroît vers l'infimum $\|u\|_*$ et une suite (s_n) qui décroît vers l'infimum $\|v\|_*$ et qui satisfont respectivement 1 et 2. Du calcul du paragraphe sur l'additivité nous tirons que pour chaque n

$$\|u + v\|_* \leq t_n + s_n.$$

Or, le membre de droite tend vers $\|u\|_* + \|v\|_*$ quand $n \to \infty$ montant ainsi l'inégalité désirée. □

Exercice 11. *La variation d'une fonction mesurable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la quantité*

$$\|f\|_{\mathrm{BV}[a,b]} = \sup\left\{\sum_{i=0}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k = b, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Les fonctions à variation bornée $(\mathrm{BV}[a, b], \|\cdot\|_{\mathrm{BV}[a,b]})$ *forment-elles un espace vectoriel normé ? Semi-normé ?*

Exercice 12. *Fixons $R > 0$ et $p \in [1, \infty]$. Déterminez $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que, si l'on pose $u_\alpha(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^d$,*
(a) $u_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0, R))$
(b) $u_\alpha \in L^p(B(0, R))$
Déterminez $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u_{\alpha,\beta}(x) = |x|^\alpha/(1 + |x|^\beta) \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Exemple de solution à l'exercice 12. On a

(a) $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0, R))$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha < -d/p & \text{si } p \neq \infty \\ \alpha \leq 0 & \text{si } p = \infty \end{cases}$

(b) $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(B(0, R))$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha > -d/p & \text{si } p \neq \infty \\ \alpha \geq 0 & \text{si } p = \infty \end{cases}$

Enfin, $u_{\alpha,\beta} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\begin{cases} \beta > \alpha + d/p > 0 & \text{si } p \neq \infty \\ \beta \geq \alpha \geq 0 & \text{si } p = \infty \end{cases}.$

Traitons d'abord le cas de $p \neq \infty$. La formule d'intégration polaire stipule que pour tout $v \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{d-1} v(r\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}r.$$

Observons que la fonction $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0,R))$ si et seulement si

$$v_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha p} & x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0,R) \\ 0 & x \in B(0,R) \end{cases}$$

appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Par le théorème de convergence monotone, la suite $(x \mapsto v_\alpha(x)\chi_{B(0,n)}(x))_n$ étant positive et croissante,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |u_\alpha|^p\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} v_\alpha\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} v_\alpha(x)\chi_{B(0,n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fixons alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > R$. Nous calculons à l'aide de la formule d'intégration polaire que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} v_\alpha(x)\chi_{B(0,n)}(x)\,\mathrm{d}x &= \int_R^n \int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{d-1} v_\alpha(r\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}r \\ &= |\mathbb{S}^{d-1}| \int_R^n r^{\alpha p + d - 1}\,\mathrm{d}r = \begin{cases} |\mathbb{S}^{d-1}| \dfrac{n^{\alpha p+d} - R^{\alpha p+d}}{\alpha p + d} & \text{si } \alpha p + d \neq 0 \\ |\mathbb{S}^{d-1}| \ln \dfrac{n}{R} & \text{si } \alpha p + d = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |u_\alpha|^p\,\mathrm{d}x &= |\mathbb{S}^{d-1}| \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \dfrac{n^{\alpha p+d} - R^{\alpha p+d}}{\alpha p + d} & \text{si } \alpha p + d \neq 0 \\ \ln \dfrac{n}{R} & \text{si } \alpha p + d \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha p + d \geq 0 \\ |\mathbb{S}^{d-1}| \dfrac{R^{\alpha p+d}}{-(\alpha p + d)} & \text{si } \alpha p + d < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Nous concluons que $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0,R))$ si et seulement si $\alpha p + d < 0$.

Le cas de $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(B(0,R))$ est similaire. Posons cette fois-ci

$$w_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha p} & x \in B(0,R) \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0,R). \end{cases}$$

Par le théorème de convergence monotone et la formule d'intégration polaire,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} w_\alpha(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_{B(0,R)} w_\alpha(x)\chi_{B(0,R)\setminus B(0,1/n)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}|\mathbb{S}^{d-1}|\int_{\frac{1}{n}}^{R} r^{d-1+\alpha p}\,\mathrm{d}r \\ &= \begin{cases}\dfrac{R^{\alpha p+d}}{\alpha p+d} & \text{si } \alpha p+d>0 \\ +\infty & \text{si } \alpha p+d\le 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Vu que $w_\alpha \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(B(0,R))$, nous obtenons que $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(B(0,R))$ si et seulement si $\alpha p + d > 0$.

Concernant $u_{\alpha,\beta}$, observons que $u_{\alpha,\beta} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $u_{\alpha,\beta}\chi_{B(0,1)} \in \mathrm{L}^p(B(0,1))$ et $u_{\alpha,\beta}\chi_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0,1))$. Pour tout $x \in B(0,1)\setminus\{0\}$, nous avons que

$$\frac{|x|^\alpha}{2} \le \frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\beta} \le |x|^\alpha$$

montrant ainsi, par le théorème de comparaison, que $u_{\alpha,\beta}\chi_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)} \in \mathrm{L}^p(B(0,1))$ si et seulement si $u_\alpha \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$, ce qui est vrai si et seulement si $\alpha p + d > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$, nous avons que

$$\frac{|x|^{\alpha-\beta}}{2} \le \frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\beta} \le |x|^{\alpha-\beta}$$

montrant ainsi, par le théorème de comparaison, que $u_{\alpha,\beta}\chi_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)}$ si et seulement si $u_{\alpha-\beta} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0,1))$, ce qui est vrai si et seulement si $(\alpha-\beta)p + d < 0$.

En somme, il convient que $\boxed{\beta > \alpha + d/p > 0.}$

Le cas $p = \infty$. La fonction u_α appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus B(0,R))$ si et seulement si elle est essentiellement bornée sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)$. Cela veut dire $\alpha \in (-\infty, 0]$. En effet, si $\alpha = 0$, u_α est la fonction constante 1 et si $\alpha < 0$ alors

$$u_\alpha(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0.$$

Par la définition de limite, pour $\epsilon = 1$, il existe $B(0,T) \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{B}(0,T)$ $|u(x)| \le \epsilon = 1$. Sur le compact $K = \overline{B(0,R)\setminus B(0,T)}$, u_α est continue et donc bornée. Ainsi

$$\|u_\alpha\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d\setminus B(0,R)} \le \sup_{x\in K}|u(x)| + 1 < +\infty.$$

D'autre part, la fonction u_α appartient à $\mathrm{L}^\infty(B(0,R))$ si et seulement si elle est essentiellement bornée sur $B(0,R)$ si et seulement si $\alpha \in [0,\infty)$.

Enfin, la fonction u_α appartient à $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si elle est essentiellement bornée sur $\mathbb{R}^d$. D'une part, elle est bornée à l'origine (sur une boule centrée en $x = 0$ si et seulement si $\alpha \ge 0$. D'autre part, elle est bornée à l'infini (en dehors d'une grande boule) si et seulement si $\alpha - \beta \leq 0$. En effet, si $\alpha = \beta$,

$$|u_\alpha(x)| \leq 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et si $\alpha < \beta$,

$$|u_\alpha(x)| \leq |x|^{\alpha-\beta}$$

pour tout $|x| \geq 1$. En somme, $u_\alpha \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\beta \geq \alpha \geq 0. \qquad \square$$

Exercice 13. *Fixons $p \in (1, \infty)$. Définissons*

$$\mathrm{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^d) = \{u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \textit{ mesurable} : \|u\|_{\mathrm{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} < +\infty\}$$

où

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} = \sup\left\{\frac{1}{|A|^{1-\frac{1}{p}}}\int_A |u|\,\mathrm{d}x : A \subset \mathbb{R}^d \textit{ mesurable}, |A| < +\infty\right\}.$$

(a) Montrez que $(\mathrm{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)})$ est un espace vectoriel semi-normé.
(b) Montrez que $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{L}^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ dans le cas où $p = 2$. Indication : Montrez à l'aide de la définition (D.22) et/ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\int_A |u|\,\mathrm{d}x \leq |A|^{1-\frac{1}{2}}\left(\int_A |u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 14. *Étudions les relations entre les différents espaces de Lebesgue. Soit $p \in (1, \infty)$. Considérons les énoncés suivants*
(a) $u \in L^1(\mathbb{R})$
(b) $u \in L^p(\mathbb{R})$
(c) u est essentiellement bornée ($u \in L^\infty(\mathbb{R})$)
Prouver les implications suivantes ou donner un contre-exemple :

$$a \text{ et } b \Rightarrow c, \quad c \text{ et } a \Rightarrow b, \quad b \text{ et } c \Rightarrow a.$$

Exercice 15. *Si $u \in L^1(\mathbb{R})$, est-il vrai que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$? Et si $u \in L^3(\mathbb{R})$? Et si $u \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$?*

Idée de solution à l'exercice 15. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[n,n+2^{-n}]}.$$

Observons que pour tout $p \in [1, \infty)$, $|f|^p = f$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$ car

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\ dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Aussi, f ne converge pas vers zéro quand $x \to \infty$ puisque, si $x_n = n + 4^{-n} \to \infty$, alors

$$f(x_n) = 1$$

et la suite constante égale à 1 ne tend pas vers zéro. □