# EXERCICES D'ANALYSE FONCTIONNELLE – SÉANCE 8
# CONVERGENCE D'APPLICATIONS LINÉAIRES

**Exercice 1.** *Du cours, on sait que si $X$, $Y$ sont des espaces normés et que $L_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ converge ponctuellement vers un $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ alors*

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

*Donner un exemple où l'inégalité est stricte. Suggestion : $L_n u(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-n)(1+x^2)^{-1}\,\mathrm{d}x$, $X = C_c(\mathbb{R})$ et $Y = \mathbb{R}$.*

*Idée de solution de l'exercice 1.* Par compacité du support la suite de fonctions

$$v_n(x) \doteq u(x-n)(1+x^2)^{-1},\ x \in \mathbb{R}$$

converge ponctuellement vers la fonction nulle. D'autre part toute fonction continue à support compact est bornée si bien que

$$v_n(x) \leq \|u\|_\infty (1+x^2)^{-1}$$

Le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n\to\infty} L_n u(x) = 0$$

Cela démontre la convergence simple de $L_n$ vers $L \doteq 0$ l'opérateur nul.

Aussi, on *sait* que

$$\|L_n\|_{\mathcal{L}(C_c(\mathbb{R}),\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

et

$$\|L\|_{\mathcal{L}(C_c(\mathbb{R}),\mathbb{R})} = 0.$$

Cela démontre l'inégalité stricte. □

**Exercice 2.** *Pour calculer numériquement l'intégrale d'une fonction continue $f \in C_b[a,b]$, nous pouvons utiliser des méthodes d'approximation. Parmi les exemples les plus célèbres de telles approximations, citons la méthode du trapèzes,*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{2},$$

*que l'on peut raffiner en subdivisant l'intervalle $[a,b]$ en $n+1$ sous-intervalles (non dégénrés) $[a_0,b_0] = [a,b_0]$, $[a_1,b_1] = [b_0,b_1]$, $\ldots$ et $[a_n,b_n] = [a_n,b]$ pour écrire*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=0}^{n} \frac{(f(b_i)-f(a_i))(b_i-a_i)}{2}$$

*Date*: Automne 2022.

*quand* $n$ *tend vers l'infini on montre que cette approximation devient arbitrairement bonne pour certaines normes. La méthode de Simpson est basée sur une évaluation à 3 points dans l'intervalle* $[a_i, b_i]$ *:*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=0}^{n} \frac{(b_i - a_i)}{6}\left[f(a_i) + 4f\Big(\frac{a_i+b_i}{2}\Big) + f(b_i)\right].$$

*D'une manière générale, nous sommes amenés à étudier une approximation de l'intégrale via une méthode avec* $n$ *points d'évaluation de la forme*

$$(\star) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i^n f(x_i^n)$$

*où pour chaque* $n$ *et chaque* $i = 1, \dots, n$*, les poids* $c_i^n \in \mathbb{R}$ *et les points* $x_i^n \in [a,b]$*. Un choix de* $c_i^n$ *et* $x_i^n$ *correspond à un choix d'une méthode linéaire d'intégration. La méthode est dite convergente si*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^n f(x_i^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall f \in C_b[a,b].$$

*(a) Justifiez l'épithète linéaire dans l'appellation méthode linéaire.*
*(b) Expliquez pourquoi la méthodes des trapèzes et la méthode de Simpson sont des méthodes linéaires.*
*(c) Si une méthode est convergente, expliquez pourquoi elle satisfait*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i^n = |b-a| \quad \textit{et} \ \sup_n \sum_{i=1}^{n} |c_i^n| < \infty.$$

*(d) Fixons* $\delta > 0$*. Supposons qu'une méthode linéaire d'intégration satisfait*

$$\delta \le \inf_{i=1,\dots,n} |c_i^n|.$$

*pour chaque* $n$*. Peut-elle converger ?*

*Idée de solution de l'exercice 2.* (a) *Justifiez l'épithète linéaire dans l'appellation méthode linéaire.* L'expression $(\star)$ est linéaire en $f$.

(b) *Expliquez pourquoi la méthodes des trapèzes et la méthode de Simpson sont des méthodes linéaires.* Pour chaque $n$ on peut donner des points $x_i$ spécifiques et des poids $c_i$ de sorte que les deux méthodes précitées prennent la forme de $(\star)$.

(c) *Si une méthode est convergente, expliquez pourquoi elle satisfait*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i^n = |b-a| \quad \text{et} \ \sup_n \sum_{i=1}^{n} |c_i^n| < \infty.$$

La première limite suit de fait qu'on poeut choisir $f \equiv 1$. Pour la seconde, on peut utliser le principe de la borne uniforme. On définit l'opérateur

$$A_n : f \in (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i^n f(x_i^n)$$

Pour tout $f \in C[a,b]$ la suite réelle $(A_n f)_n$ est convergeante et donc bornée et l'espace $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ est complet, si bien que par le principe de la borne uniforme,

$$\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],\mathbb{R})} < \infty.$$

On calcule que

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],\mathbb{R})} \leq \sum_{i=1}^n |c_i^n|$$

D'autre part, il existe une fonction continue $f : [a,b] \to [-1,1]$ telle que $f(x_i) = 1$ si $c_i \geq 0$ et $f(x_i) = -1$ si $c_i < 0$. Pour cette fonction on a que $\|f\|_\infty = 1$ et

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],\mathbb{R})} \geq \sum_{i=1}^n c_i^n f(x_i) = \sum_{i=1}^n |c_i^n|$$

et donc

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^n |c_i^n|$$

Si, comme on l'a dit plus haut,

$$\sup_n \|A_n\|_{\mathcal{L}(C[a,b],\mathbb{R})} < \infty.$$

alors

$$\sup_n \sum_{i=1}^n |c_i^n| < \infty.$$

(d) *Fixons $\delta > 0$. Supposons qu'une méthode linéaire d'intégration satisfait*

$$\delta \leq \inf_{i=1,\dots,n} |c_i^n|.$$

*pour chaque $n$. Peut-elle converger ?* Non elle ne peut par le point précédent puisque si un tel $\delta$ existe, on a

$$n\delta \leq \sup_n \sum_{i=1}^n |c_i^n|$$

et le membre de gauche de l'équation est non borné.

□

**Exercice 3.** *Fixons une suite réelle $(a_n)_n$.*

*(i) Expliquer pourquoi $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$ si et seulement si pour tout $x = (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$*

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n x_n|$$

*converge.*

(ii) *En supposant désormais que $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\|(x_n)_n\|_a \doteq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|$$

*définisse une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Par la suite, on suppose cette condition satisfaite.*

(iii) *Expliquer pourquoi, si $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, il existe une constante qui dépend de la suite $a_n$ telle que*

$$\|x\|_a \leq C\|x\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$$

*pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.*

(iv) *Expliquer pourquoi, si $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, les deux normes ne sont toutefois pas des normes équivalentes en général.*

(v) *Déduire que, si $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_a)$ n'est pas complet.*

*Idée de solution de l'exercice 3.* (i) *Expliquer pourquoi $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$ si et seulement si pour tout $x = (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|$$

*converge.* On a si $x = (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

$$\sum_{n=0}^{k} |a_n x_n| \leq \|a_n\|_{\ell^1(\mathbb{N})}\|x_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$$

pour tout $k$. Par comparaison la suite de termes positifs converge. Inversément le choix $x \equiv 1$ donne

$$[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

qui converge, ce qui est équivalent à être un élement de $\ell^1(\mathbb{N})$.

(ii) *En supposant désormais que $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\|(x_n)_n\|_a \doteq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|$$

*définisse une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Par la suite, on suppose cette condition satisfaite.* Du fait de $|ab| = |a| \cdot |b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ la quantité définit une semi norme par l'inégalité triangulaire. Étudions le caractère défini positive. Si la quantité est nulle on détecte que $a_n x_n = 0$ pour chaque $n$. Cette derniere assertion est vérifiée si et seulemenet si pour tout $n$ $a_n \neq 0$.

(iii) *Expliquer pourquoi, si $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, il existe une constante qui dépend de la suite $a_n$ telle que*

$$\|x\|_a \leq C\|x\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$$

*pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.*

*(iv) Expliquer pourquoi, si $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, les deux normes ne sont toutefois pas des normes équivalentes en général.* Du premier point on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n| \leq \|a_n\|_{\ell^1(\mathbb{N})}\|x_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$$

donnant ainsi la constante $C = \|a_n\|_{\ell^1(\mathbb{N})}$ ?

Supposons qu'il existe $c = c(a) > 0$ tel que

$$\|x_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \leq c\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|.$$

Prenont $a_n \doteq 1/n$ et $x^k \in \ell^\infty(\mathbb{N}))$ définit par $x_n^k = 0$ si $n \neq k$ et $x_n^k = 1$ si $n = k$, alors

$$1 = \|x_n\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \leq c\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n| = c/k,$$

impliquant ainsi que $c$ est plus grand que tout naturel, contredisant ainsi son existence.

(v) *Déduire que, si $(a_n)_n \in \ell^1(\mathbb{N})$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_a)$ n'est pas complet.*

On considère l'opérateur identité

$$A : x \in (\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_a) \mapsto x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$$

Pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ $Ax$ est fini dans $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_a)$ mais $\|A\|_{\mathcal{L}((\ell^\infty(\mathbb{N}),\|\cdot\|_a),\ell^\infty(\mathbb{N}))}$ ne l'est pas. Cela contredit le principe de la borne uniforme dès que l'on suppose que $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_a)$ est complet.

$\square$