Notes de cours

Équations différentielles ordinaires

Heiner Olbermann

UCLouvain

Année académique 2022–23, 2ème quadrimestre

Ces notes de cours sont basées sur les livres
— Bernd Aulbach, Gewöhnliche Differenzialgleichungen, Spektrum 2004
— Qingkai Kong, A Short Course in Ordinary Differential Equations, Springer 2014
Les seuls destinaires de ces notes sont les étudiants du cours nommé ci-dessus. Veuillez rapporter toute erreur par courriel électronique à `heiner.olbermann@uclouvain.be`

Les parties non pas dicutées en classe et qui doivent être étudiées indépendamment par les participants du cours sont imprimées en vert.

Les parties supplémentaires (exemples additionels, parties qui ne seront pas sujet de l'examen final) sont imprimés en bleu.

1. Introduction

Une équation différentielle est une équation pour des fonctions différentiables dans laquelle les dérivées de la fonction apparaissent.

Exemple 1.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. L'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = x_1 x_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in U\,. \tag{1.1}$$

est une équations différentielle pour $y \in C^2(U)$.

Si de telles équations sont formulées pour des fonctions différentiables définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$, on parle d'*équations différentielles ordinaires* (EDO). Si le domaine est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $p > 1$, (comme dans (1.1)) on parle d'*équations aux dérivées partielles.*

Définition 1.2 (EDO sous forme implicite)**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ une union d'intervalles, $m, n \in \mathbb{N}$ et $D \subset \mathbb{R}^{1+mn}$. Une équation différentielle ordinaire pour $y \in C^m(I; \mathbb{R}^n)$* sous forme implicite *est donnée par*

$$F(x, y(x), y'(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I \tag{1.2}$$

où $F \in C^0(D; \mathbb{R}^n)$. On appelle m l'ordre et n la dimension de l'EDO, et $y^{(k)}$ dénote la k-ième dérivée de y.

Remarque 1.3. Pour $n = 1$ on parle d'une EDO *scalaire*, et pour $n > 1$ on parle d'une EDO vectorielle. Si F ne dépend pas de x, on parle d'une EDO *autonome*.

Exemple 1.4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $I := [a, b]$ et $F \in C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définie par $F(x, p, q) = q^2 - 1$. L'EDO associée par (1.2) est

$$y'^2 - 1 = 0\,.$$

Toutes les fonctions avec une dérivée constante $\in \{\pm 1\}$ sont des solutions.

Définition 1.5 (EDO sous forme résolue)**.** *S'il est possible de réécrire* (1.2) *sous forme équivalente comme*

$$y^{(m)}(x) = f(x, y'(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(m-1)}(x)) \quad \forall x \in I \tag{1.3}$$

alors (1.3) *est la forme résolue de l'EDO.*

Exemple 1.6. Soient $m = n = 1$, $I = \mathbb{R}$ et l'EDO donnée par

$$y'(x) = -y(x)\,.$$

On vérifie sans problèmes que pour chaque $c \in \mathbb{R}$ la fonction $\varphi_c(x) := c\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'EDO. En plus, chaque solution est de cette forme. Démonstration : Soit y une solution. On considère $z(x) := \mathrm{e}^x\, y(x)$. On a que

$$z'(x) = \mathrm{e}^x\, y(x) + \mathrm{e}^x\, y'(x) = z(x) - z(x) = \mathrm{e}^x\, y(x) - \mathrm{e}^x\, y(x) = 0\,.$$

Cela prouve l'énoncé.

Assez souvent on retrouve le cas où les solutions des EDO possèdent un paramètre libre (comme dans l'exemple ci-dessus). Cela veut dire que l'on peut demander que d'autres propriétés soient satisfaites. Une possibilité de faire cela est un *problème à conditions initiales.*

Définition 1.7 (Problème à conditions initiales (PCI))**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$, $D \subset \mathbb{R}^{1+mn}$, $f \in C^0(D;\mathbb{R}^n)$, et $Y_i \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Alors le système d'équations*

$$\left\{\begin{array}{rl} y^{(m)}(x) = & f(x, y'(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(m-1)}(x)) \quad \forall x \in I \\ y(x_0) = & Y_0 \\ y'(x_0) = & Y_1 \\ \vdots = & \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) = & Y_{m-1} \end{array}\right. \tag{1.4}$$

est appelé problème à conditions initiales pour $y \in C^m(I;\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.8. Soient m, n et I comme dans l'exemple précédent (c-à-d $m = n = 1$), et le PCI soit donné par

$$\left\{\begin{array}{rl} y'(x) = & -y(x) \\ y(0) = & 1 \end{array}\right. \tag{1.5}$$

On vient de voir que les solutions de l'EDO sont données par $\{x \mapsto ce^{-x} : c \in \mathbb{R}\}$. Si on choisit $c = 1$, la deuxième équation est satisfaite aussi.

Remarque 1.9. Dans les exemples ci-dessus, on a pu donner des solutions explicites. Cela n'est pas toujours possible ; il est même vrai que cela est un cas particulier. Dans une situation plus typique, on voudra seulement établir l'existence d'une solution (unique).

Exemple 1.10. Pour l'EDO

$$y'(x) = y^2(x) - x$$

on ne peut pas donner de solution explicite qui peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires et leurs intégrales (d'après un théorème de Liouville de l'année 1841). On ne va pas prouver cela ; mais on va démontrer qu'il existe une solution aux PCI associés.

2. Méthodes explicites

2.1. **Séparation des variables.** Dans ce chapitre on va résoudre explicitement des PCI scalaires ($n = 1$).

Exemple 2.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $g \in C^0(I)$. On considère l'EDO
$$y'(x) = g(x)\,.$$
Chaque antidérivée de g est une solution. Aussi, chaque antidérivée est une solution. Pour $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, le PCI
$$\begin{cases} y'(x) = & g(x) \\ y(x_0) = & y_0 \end{cases}$$
a la solution unique
$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\,.$$

Exemple 2.2. Soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Considérons l'EDO
$$y'(x) = -y^2(x) \qquad \text{avec } y(x_0) > 0\,.$$
Calcul formel :
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 \Rightarrow -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} 1\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{substitution}}{\Rightarrow} -\int_{y(x_0)}^{y(x_1)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_{x_0}^{x_1} 1\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{intégration}}{\Rightarrow} \frac{1}{y(x_1)} - \frac{1}{y(x_0)} = x_1 - x_0 \Rightarrow y(x_1) = \frac{y(x_0)}{(x_1 - x_0)y(x_0) + 1}\,.$$
Attention : Ce calcul formel ne constitue pas une preuve. On va reformuler cette idée de façon rigoureuse dans le théorème suivant.

Théorème 2.3 (Solution de PCI scalaires autonomes)**.** *Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervals ouverts, $h \in C^0(J)$ avec $0 \notin h(J)$. Soit $y_0 \in J$, et $H \in C^1(J)$ définie par*
$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)}\,.$$
Soit $x_0 \in I$ et $x - x_0 \in H(J) \forall x \in I$. Alors il existe une solution unique $\varphi \in C^1(I)$ du PCI
$$\begin{cases} y'(x) & = h(y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$
De plus, φ est la seule fonction $I \to J$ avec la propriété $H(\varphi(x)) = x - x_0\ \forall\, x \in I$.

Démonstration. Puisque $H \in C^1(J)$ et $H' \neq 0$, on a que H est injective avec la fonction inverse $T : H(J) \to J$ satisfaisant
$$T \in C^1(H(J)), \quad T'(z) = \frac{1}{H'(T(z))} \quad \forall z \in H(J)\,.$$
On pose $\varphi(x) = T(x - x_0)$. Alors
$$\varphi'(x) = \frac{1}{H'(T(x - x_0))} = h(T(x - x_0)) = h(\varphi(x)) \quad \forall x \in I\,.$$

Or $\varphi(x_0) = T(0) = y_0$ par définition et injectivité de H. Cela implique que φ est une solution du PCI.

Soit $\tilde{\varphi} \in C^1(I)$ une autre solution. On a que $\tilde{\varphi}(x_0) = y_0 \in J$, et par la continuité de $\tilde{\varphi}$ il existe un intervalle ouvert I' avec $x_0 \in I'$ et $\tilde{\varphi}(I') \subset J$. Soit I'' l'union de tous ces intervals I'. On va démontrer $\tilde{\varphi} = \varphi$ sur I''.
Soit $\psi(x) = H(\tilde{\varphi}(x)) - (x - x_0)$ pour $x \in I''$. Alors $\psi(x_0) = H(\tilde{\varphi}(x_0)) = 0$ et

$$\psi'(x) = H'(\tilde{\varphi}(x))\tilde{\varphi}'(x) - 1 = \frac{h(\tilde{\varphi}(x))}{h(\tilde{\varphi}(x))} - 1 = 0 \quad \forall x \in I''.$$

Cela implique $H(\tilde{\varphi}(x)) = x - x_0$ pour tout $x \in I''$. Par l'injectivité de H on a que $\varphi = \tilde{\varphi}$ sur I''.
Maintenant on va démontrer que $I = I''$ par une preuve par l'absurde. Supposons que $I'' \subsetneq I$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $I'' = (a, b)$ et on a où $a \in I$ où $b \in I$. On considère le cas $b \in I$. Par la continuité de $\tilde{\varphi}$ on a que gilt $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(b) \in J$. Comme J est ouvert et $\tilde{\varphi}$ est continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\tilde{\varphi}([b - \varepsilon, b + \varepsilon]) \subset J$. Par la définition de I'' on a que $(a, b + \varepsilon) \subset I''$, ce qui est une contradiction. Le cas $a \notin I$ est traité de façon analogue. Il suit $I = I''$. □

Exemple 2.4. On considère le PCI

$$\begin{cases} y'(x) = & \sqrt{|y(x)|} \\ y(x_0) = & y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

D'abord on suppose $y_0 > 0$. On choisit $J = (0, \infty)$. En utilisant la notation du théorème, on a pour $y \in J$:

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}} = [2\sqrt{t}^{1/2}]_{y_0}^{y} = 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}).$$

Alors pour tout $x \in I = (x_0 - 2\sqrt{y_0}, \infty)$ on a que $2(\sqrt{y(x)} - \sqrt{y_0}) = (x - x_0)$, et alors

$$y(x) = \left(\frac{x - x_0}{2} + \sqrt{y_0}\right)^2. \tag{2.2}$$

De façon analogue, on démontre pour $y_0 < 0$ avec $I = (-\infty, x_0 - 2\sqrt{-y_0})$ et $J = (-\infty, 0)$ il existe une solution non-positive,

$$y(x) = -\left(\frac{x - x_0}{2} - \sqrt{-y_0}\right)^2. \tag{2.3}$$

Observation : De (2.2) et (2.3) on peut construire des solutions sur $\mathbb{R}$, par exemple

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -\frac{(x+2)^2}{4} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Pour éviter des malentendus, on va souligner le fait que l'existence d'une telle solution ne suit pas du théorème. On voit que les dérivées des fonctions définies dans (2.2) et (2.3) disparaissent au bord de gauche/droite. Alors on peut insérer un intervalle arbitraire sur lequel y disparait, puisque $y = 0$ est une solution. On voit que l'ensemble des solutions pour le PCI (2.1) est infini.

Exemple 2.5. On choisit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $I = (-\infty, x_0 + \mathrm{e}^{-y_0})$, $J = (0, \infty)$ et on considère le PCI

$$\begin{cases} y'(x) = & \mathrm{e}^{y(x)} \\ y(x_0) = & y_0 \,. \end{cases}$$

Du théorème, on obient $H(y) = \int_{y_0}^{y} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-y_0} - \mathrm{e}^{-y}$, et alors $x - x_0 = \mathrm{e}^{-y_0} - \mathrm{e}^{-y(x)}$ pour tout $x \in I$. On en déduit que

$$y(x) = -\ln(\mathrm{e}^{-y_0} - (x - x_0)) \,.$$

Remarque 2.6 (Changement de variables I)**.** Si l'EDO a la forme

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c) \qquad \text{avec } b \neq 0 \,,$$

on va essayer la changement de variables $u(x) = ax + by(x) + c$. On obtient

$$u'(x) = a + bf(u) \,.$$

Cette EDO peut être traitée à l'aide du Théorème 2.3.
Exemple : On considère le PCI

$$\begin{cases} y'(x) = & (x + y(x))^2 \\ y(x_0) = & y_0 \,. \end{cases}$$

Avec le changement de variables $u(x) = x + y(x)$, on obtient un PCI pour u,

$$\begin{cases} u'(x) = & 1 + u^2(x) \\ u(x_0) = & (x_0 + y_0)^2 =: u_0 \,. \end{cases}$$

La solution de ce PCI peut être déterminée avec le Théorème 2.3 : En posant $H(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = u - u_0$ on a

$$u(x) = \tan\left(x - x_0 - \arctan\left[(x_0 + y_0)^2\right]\right)$$

et le changement de variables inverse nous donne

$$y(x) = \tan\left(x - x_0 - \arctan\left[(x_0 + y_0)^2\right]\right) - x \,.$$

On va prouver une généralisation du Théorème 2.3 qui nous permettera la résolution d'une plus grande classe de problèmes. On considère le PCI

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \,.$$

Calcul formel :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y(x)) &\Rightarrow \frac{1}{h(y(x))} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \\ &\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{h(y(x))} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} g(x) \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{c.d.v.}}{\Rightarrow} \int_{y(x_0)}^{y(x_1)} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{x_0}^{x_1} g(x) \mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

La version rigoureuse de cette idée peut se formuler comme suit.

Théorème 2.7. *Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervals ouverts, $g \in C^0(I)$, $h \in C^0(J)$ avec $0 \notin g(I)$, $0 \notin h(J)$. Soient $y_0 \in J$, et $H \in C^1(J)$ définie par*

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(t)} \mathrm{d}t \,.$$

Soit $x_0 \in I$ et

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t \in H(J) \quad \forall x \in I\,.$$

Alors il existe une solution unique $\varphi \in C^1(I)$ du PCI

$$\begin{cases} y'(x) = & g(x)h(y(x)) \\ y(x_0) = & y_0\,. \end{cases}$$

De plus, φ est la fonction unique $I \to J$ avec la propriété

$$H(\varphi(x)) = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t \quad \forall x \in I\,.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemple 2.8. On considère le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2(x))} \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}.$$

Avec les notations du Théorème 2.7, on a

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} (1+t^2)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_{y_0}^{y}$$

On pose $g(t) = (1+t^2)^{-1}$ et $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$, et on obtient

$$G(x) = [\arctan t]_{x_0}^{x}\,.$$

D'après le théorème, la solution unique $y(x)$ satisfait

$$\frac{1}{3}y^3(x) + y(x) = \arctan x - \arctan x_0 + \frac{1}{3}y_0^3 + y_0\,.$$

Posons $F(t) := \frac{1}{3}t^3 + t$. Par $F'(t) = 1 + t^2 > 0$ et $\lim_{t\to\pm\infty} F(t) = \pm\infty$ on a que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, avec $F^{-1} \in C^1$. Alors on a que

$$y(x) = F^{-1}\left(\arctan x - \arctan x_0 + \frac{1}{3}y_0^3 + y_0\right)\,.$$

Remarque 2.9 (Changement de variables II)**.** Pour une EDO sous la forme

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

on peut utiliser le changement de variables $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, ce qui mène à

$$u'(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x}\,.$$

On peut résoudre cette équation avec le théorème précédent.

Exemple 2.10. On considère le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = \frac{y(x)}{x} - \frac{x^2}{y^2(x)} \\ y(1) & = 1 \end{cases}.$$

Avec le changement de variables $u(x) = x^{-1}y(x)$ on obtient le PCI équivalent (supposant que $x > 0$)

$$\begin{cases} u'(x) & = -\frac{1}{xu^2(x)} \\ u(1) & = 1 \end{cases} .$$

On va résoudre ce dernier problème avec un deuxième changement de variables :

$$\int_1^{u(x)} t^2 \mathrm{d}t = -\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \Rightarrow \frac{1}{3}\left(u^3(x) - 1\right) = -\ln x$$
$$\Rightarrow y(x) = x\left(1 - 3\ln x\right)^{1/3} ,$$

où le domaine a été restreint à $x \in (0, \mathrm{e}^{1/3})$ pour simplifier l'analyse.

Remarque 2.11 (Changement de variables III)**.** On considère l'EDO

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + by(x) + c}{\alpha x + \beta y(x) + \gamma}\right) ,$$

et on va supposer que

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Définissons $\tilde{x}, \tilde{y}$ par

$$(\tilde{x}, \tilde{y})^T = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^{-1} (-c, -\gamma)^T .$$

Dans d'autres mots, le paire $\tilde{x}, \tilde{y}$ est la solution unique du système linéaire

$$\begin{cases} a\tilde{x} + b\tilde{y} + c & = 0 \\ \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} + \gamma & = 0 \end{cases} .$$

De plus, on pose

$$\bar{y}(x) = y(x + \tilde{x}) - \tilde{y} .$$

Alors $\bar{y}$ satisfait l'EDO

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) = y'(x + \tilde{x}) = & = f\left(\frac{a(x + \tilde{x}) + by(x + \tilde{x}) + c}{\alpha(x + \tilde{x}) + \beta y(x + \tilde{x}) + \gamma}\right) \\ & = f\left(\frac{a(x + \tilde{x}) + b(\bar{y}(x) + \tilde{y}) + c}{\alpha(x + \tilde{x}) + \beta(\bar{y}(x) + \tilde{y}) + \gamma}\right) \\ & = f\left(\frac{ax + b\bar{y}(x)}{\alpha x + \beta\bar{y}(x)}\right) \\ & = f\left(\frac{a + b\frac{\bar{y}(x)}{x}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}(x)}{x}}\right) . \end{aligned}$$

On compare le côté droit avec le côté gauche de cette équation, et nous voyons que cette équation pour $\bar{y}$ peut être résolue par la deuxième version de changement de variables ci-dessus.

Exemple 2.12. On considère l'EDO

$$\begin{cases} y'(x) & = \frac{y(x)+1}{x+2} - \exp\frac{y(x)+1}{x+2} \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} .$$

Avec les notations de ci-dessus on a $a = \beta = 0$, $b = \alpha = 1$ et $c = -1$, $\gamma = -2$; de plus $f(t) = t - \mathrm{e}^t$. On obtient

$$(\tilde{x}, \tilde{y})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} (-1, -2)^T = (-2, 1)^T ,$$

et

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= f\left(\frac{a + b\frac{\bar{y}(x)}{x}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}(x)}{x}} \right) \\ &= \frac{\bar{y}(x)}{x} - \exp\frac{\bar{y}(x)}{x} . \end{aligned}$$

Des conditions initiales $y(x_0) = y_0$ on obtient $\bar{y}(x_0 + 2) = y_0 + 1$. On peut combiner ces deux dernières équations pour obtenir un PCI pour $\bar{y}$,

$$\begin{cases} \bar{y}'(x) &= \frac{\bar{y}(x)}{x} - \exp\frac{\bar{y}(x)}{x} \\ \bar{y}(x_0 + 2) &= y_0 + 1 \end{cases} .$$

Pour résoudre ce problème, on utilise le changement de variables $u(x) = \bar{y}(x)/x$. La condition initiale pour u est $u(x_0 + 2) = \frac{y_0+1}{x_0+1} =: u_0$. L'EDO pour u est

$$u'(x) = \frac{-\exp u}{x} .$$

Maintenant on va résoudre le PCI pour u par séparation des variables :

$$\begin{aligned} &\int_{u_0}^{u(x)} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\int_{x_0+2}^{x} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \mathrm{e}^{-u(x)} = \ln x - \ln(x_0 + 2) + \mathrm{e}^{u_0} \\ &\Rightarrow u(x) = -\ln\left(\ln x - \ln(x_0 + 2) + \mathrm{e}^{-u_0}\right) \\ &\Rightarrow \bar{y}(x) = -x\ln\left(\ln x - \ln(x_0 + 2) + \exp\left(-\frac{y_0 + 1}{x_0 + 1}\right)\right) \\ &\Rightarrow y(x) = \bar{y}(x - \tilde{x}) + \tilde{y} = -1 - (x + 2)\ln\left(\ln(x + 2) - \ln(x_0 + 2) + \exp\left(-\frac{y_0 + 1}{x_0 + 1}\right)\right) . \end{aligned}$$

2.2. **Équation linéaire scalaire de premier ordre.** On peut résoudre l'EDO

$$y'(x) = -g(x)y(x)$$

par la méthode de séparation des variables. Cela nous donne

$$y(x) = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right) ,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration qui dépend des conditions initiales.

On va maintenant remplacer la constante C par une fonction $C(x)$. Cela remonte à la définition

$$\tilde{y}(x) := C(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right) .$$

La fonction $\tilde{y}(x)$ satisfait l'EDO

$$\tilde{y}'(x) = C'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right) - g(x)\tilde{y}(x)\,.$$

On pose $C'(x) = h(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t\right)$, ce qui implique que $\tilde{y}$ est une solution de l'EDO

$$\tilde{y}'(x) = -g(x)\tilde{y}(x) + h(x)\,.$$

Cette observation mène au théorème suivant :

Théorème 2.13. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I$, et $g, h \in C^0(I)$. Alors le PCI*

$$\begin{cases} y'(x) &= -g(x)y(x) + h(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

possède une solution unique donnée par

$$y(x) = \mathrm{e}^{-G(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} h(t)\mathrm{e}^{G(t)}\mathrm{d}t\right)\,, \tag{2.4}$$

où G est définie par $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration. Le fait que (2.4) est une solution se démontre par un calcul direct. Il nous reste à démontrer l'unicité.

Supposons que $\bar{y} \in C^1(I)$ est une deuxième solution. Posons $\varphi := y - \bar{y}$. Par une subtraction des équations pour y et $\bar{y}$ on obtient que

$$\begin{cases} \varphi'(x) &= -g(x)\varphi(x) \\ \varphi(x_0) &= 0 \end{cases}\,.$$

On pose $\psi(x) := \mathrm{e}^{G(x)}\varphi(x)$. On a que $\psi(x_0) = 0$ et

$$\psi'(x) = g(x)\psi(x) - \mathrm{e}^{G(x)}\varphi'(x) = \mathrm{e}^{G(x)}\varphi(x)(g(x) - g(x)) = 0$$

pour tout $x \in I$. Alors on a que $\psi = 0$ sur I, et alors $\varphi = 0$ sur I, et alors $y = \bar{y}$ sur I. □

2.3. **Équations exactes.** Idée : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et connexe, et $S \in C^1(D)$. Si S est constante sur l'image d'une courbe $x \mapsto y(x)$, on a que

$$S(x, y(x)) = \text{constante} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}y'(x) = 0\,. \tag{2.5}$$

Notre but est de résoudre une EDO sous forme implicite,

$$h(x, y(x)) + g(x, y(x))y'(x) = 0 \tag{2.6}$$

en utilisant cette idée.

Définition 2.14 (EDO exacte)**.** *L'EDO (2.6) avec le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est nommée* exacte*, si pour le paire $g, h \in C^0(D)$ il existe une fonction $S \in C^1(D)$ telle que*

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = h(x, y)\,, \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D\,.$$

Lemme 2.15. *Soit un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et $g, h \in C^0(D)$. Supposons que l'ODE (2.6) est exacte avec $S \in C^1(D)$ comme ci-dessus. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\varphi \in C^1(I; D)$. Alors φ est une solution de l'EDO (2.6) si et seulement si $S(x, \varphi(x))$ est constante pour tout $x \in I$.*

Démonstration. La fonction $s : x \mapsto S(x,\varphi(x))$ est dans $C^1(D)$. Elle est constante ssi $s' = 0$ sur I. Pour tout $x \in I$ on a que :

$$\begin{aligned} s'(x) &= \frac{\partial S}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial S}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) \\ &= h(x,\varphi(x)) + g(x,\varphi(x))\varphi'(x) \,. \end{aligned}$$

On en déduit l'énoncé du lemme. □

On veut trouver une condition suffisante pour que une EDO sous la forme (2.6) soit exacte. On fait l'observation suivante : Si $g, h \in C^1(D)$ est un pair pour S comme dans la définition d'une EDO exacte, alors

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = \partial_y h = \partial_x g \,.$$

Alors l'égalité des dérivées partielles $\partial_y h = \partial_x g$ est *nécessaire*. Le théorème suivant constante qu'elle est aussi suffisante.

Théorème 2.16. *Soient $D = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$ et $g, h \in C^1(D)$. Alors l'EDO (2.6) est exacte sur D si et seulement si*

$$\partial_x g(x,y) = \partial_y h(x,y) \quad \forall (x,y) \in D \,. \tag{2.7}$$

Le cas échéant, pour tout $(x_0,y_0) \in D$ une fonction S comme dans la définition 2.14 est donnée par

$$S_0(x,y) = \int_{x_0}^{x} h(t,y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\mathrm{d}t \,.$$

Démonstration. La nécessité de (2.7) a déjà été démontrée. Pour l'inverse, on va démontrer que S_0 est une fonction comme dans la définition 2.14. En effet, sous l'hypothèse (2.7), on a pour tout $(x,y) \in D$:

$$\begin{aligned} \partial_x S_0(x,y) &= h(x,y) \,, \\ \partial_y S_0(x,y) &= \int_{x_0}^{x} \partial_y h(t,y)\mathrm{d}t + g(x_0,y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \partial_x g(t,y)\mathrm{d}t + g(x_0,y) \\ &= g(x,y) - g(x_0,y) + g(x_0,y) \\ &= g(x,y) \,. \end{aligned}$$

□

Exemple 2.17. L'EDO

$$y(x) + x^2 + xy'(x) = 0 \tag{2.8}$$

est exacte sur $\mathbb{R}^2$: Avec $g(x,y) = x$ et $h(x,y) = y + x^2$ on a que

$$\partial_x g = 1 = \partial_y h \quad \text{sur } D \,.$$

Une fonction S comme dans la définition 2.14 est donnée par (on choisit $x_0 = y_0 = 0$)

$$S_0(x,y) = \int_0^x (y + t^2)\mathrm{d}t + \int_0^y 0 \,\mathrm{d}t = xy + \frac{1}{3}x^3 \,.$$

Pour obtenir des solutions de (2.8), on doit considérer les ensembles sur lesquels S_0 est constante :

$$N(x_1, y_1) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : S_0(x, y) = S_0(x_1, y_1)\right\} .$$

Pour $x \neq 0$ on a que

$$xy + \frac{1}{3}x^3 = x_1y_1 + \frac{1}{3}x_1^3 \Leftrightarrow y = \frac{x_1y_1}{x} + \frac{x_1^3 - x^3}{3x}$$

Pour $x = 0$ on a que $S_0 = 0$, et les ensembles sur lesquels S_0 est constante avec valeur 0 sont donnés par

$$\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, -t^2/3) : t \in \mathbb{R}\} .$$

On peut en construire les solutions

$$y(x) = \frac{3x_1y_1 + x_1^3 - x^3}{3x} \qquad (\text{pour } x > 0 \text{ ou pour } x < 0) ,$$

et

$$y(x) = -x^2/3 \qquad (\text{pour } x \in \mathbb{R}) .$$

Résumé : (Procédure pour résoudre des équations exactes)

On est donné une EDO sous la forme implicite (2.6) avec $g, h \in C^1(D)$.

Étape 1 : Vérifier que l'équation soit exacte. Par le théorème 2.16 la condition $\partial_y h = \partial_x g$ sur D est nécessaire et suffisante.

Étape 2 : Déterminer la fonction S.
La fonction $S_0(x, y) = \int_{x_0}^{x} h(t, y)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x} g(x_0, t)\mathrm{d}t$ a les propriétés réquises.

Étape 3 : La résolution de l'équation $S_0(x, y) = S_0(x_1, y_1)$ pour obtenir y nous donne la solution de (2.6) avec les conditions initiales $y(x_1) = y_1$ (si une telle résolution est possible !)

Si dans l'étape 1, la condition sur les dérivées n'est pas satisfaite, on ne peut pas continuer. On voudrait généraliser la procédure pour pouvoir résoudre une plus grande classe d'équations.

Observation : L'EDO exacte

$$y'(x) = xy(x)$$

peut être comprise comme une équation sous forme implicite sous les formes suivantes :

a) $y'(x) - xy(x) = 0$ (avec domaine $D_a = \mathbb{R}^2$)
b) $\frac{y'(x)}{y(x)} - x = 0$ (avec domaine $D_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$)
c) $\frac{y'(x)}{x} - y(x) = 0$ (avec domaine $D_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$)
d) $\frac{y'(x)}{xy(x)} - 1 = 0$ (avec domaine $D_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$)

La condition $\partial_y h = \partial_x g$ (sur $D_a \cap D_b \cap D_c \cap D_d = D_d$) est, dans les différents cas,

a) $0 = -x$ (faux)
b) $0 = 0$ (correct)
c) $-\frac{1}{x^2} = -1$ (faux)
d) $-\frac{1}{x^2y} = 0$ (faux)

On voit que l'équation est exacte seulement sous la forme b). Cette observation nous montre qu'une EDO non-exacte peut devenir exacte si elle est multipliée avec un *facteur intégrand*.

Définition 2.18 (Facteur intégrand)**.** *Soient* $D \subset \mathbb{R}^2$*,* $g, h \in C^0(D)$*. Une fonction continue* $m : D \to \mathbb{R}$ *avec* $m \neq 0$ *sur* D *est nommée* facteur intégrand *pour l'EDO* (2.6)*, si l'EDO*

$$m(x, y(x))h(x, y(x)) + m(x, y(x))g(x, y(x))y'(x) = 0 \tag{2.9}$$

est exacte sur D*.*

Remarque 2.19. La condition $m \neq 0$ est nécessaire puisque seulement dans ce cas il est possible d'obtenir des solutions de (2.6) des solutions de (2.9).

Exemple 2.20. Considérons l'EDO

$$4x + 3y^2(x) + 2xy(x)y'(x) = 0\,. \tag{2.10}$$

On écrit

$$h_1(x, y) = 4x + 3y^2\,, \quad g_1(x, y) = 2xy\,,$$

et on calcule $\partial_y h_1 = 6y \neq \partial_x g_1 = 2y$. Cela veut dire que cette EDO n'est pas exacte. On essaie de trouver un facteur intégrand qui dépend seulement de x, $m = m(x)$. Si une telle fonction existe, on a pour tout x, y avec $xy \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\partial_y(m(x)h_1(x, y)) &= \partial_x(m(x)g_1(x, y)) \\
\Leftrightarrow 6ym(x) &= m'(x)2xy + m(x)2y \\
\Leftrightarrow m'(x) &= 2\frac{m(x)}{x} \\
\Leftrightarrow m(x) &= Cx^2 \qquad \text{pour un } C \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

On peut choisir $C = 1$, et, par exemple, $D = \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$. En particulier ce choix implique $m > 0$ sur D. On considère l'EDO exacte que l'on obtient de cette façon :

$$4x^3 + 3y^2(x)x^2 + 2x^3y(x)y'(x) = 0\,.$$

On écrit

$$h_2(x, y) = 4x^3 + 3y^2x^2\,, \quad g_2(x, y) = 2x^3y\,.$$

Maintenant on peut suivre la procédure ci-dessus. On n'a plus besoin de vérifier l'étape 1, puisque (2.11) ne contient que des énoncés équivalents. Pour l'étape 2, on a

$$\begin{aligned}
S_0(x, y) &= \int_{x_0}^{x} h_2(t, y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g_2(x_0, t)\mathrm{d}t \\
&= [t^4 + y^2t^3]_{x_0}^{x} + [t^2x_0^3]_{y_0}^{y} \\
&= x^4 + y^2x^3 + C\,.
\end{aligned}$$

Ici, C est une constante qui dépend de x_0, y_0. (On remarque que $(x_0, y_0) \in D$, ce qui implique $x_0 < 0, y_0 < 0$.) On peut déterminer la solution avec la condition initiale $y(x_1) = y_1$ (avec $y_1 < 0$, $x_1 < 0$) en considérant l'équation

$$S_0(x, y) = x^4 + y^2x^3 + C = x_1^4 + y_1^2x_1^3 + C = S_0(x_1, y_1)\,.$$

qui doit nous donner y comme fonction des autres variables. On obtient

$$y(x) = -\sqrt{\frac{x_1^4 + y_1^2x_1^3}{x^3} - x}\,,$$

ce qui est définie pour

$$\left\{x \in \mathbb{R}^- : \frac{x_1^4 + y_1^2 x_1^3}{x^3} - x > 0\right\}.$$

Remarque 2.21. Si on est donné une EDO non-exacte comme (2.6), il est en général très difficile de savoir s'il existe un facteur intégrand ou non. Pour décider cette question, on devrait résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_y(m\,h) = \partial_x(m\,g)\,,$$

ce qui est impossible de faire en toute généralité. Néanmoins, c'est possible dans des cas particuliers.

Exercices.

(1) Soient I, J des intervalles ouverts, $g \in C^0(I)$, $h \in C^0(J)$ avec $0 \notin g(I)$, $0 \notin h(J)$. Soient $y_0 \in J$, et $H \in C^1(J)$ définie par

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(t)} \mathrm{d}t\,.$$

Soit $x_0 \in I$ et supposons que

$$\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t \in H(J) \quad \forall x \in I\,.$$

Prouvez qu' il existe une solution unique $\varphi \in C^1(I)$ du PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= g(x)h(y(x)) \\ y(x_0) &= y_0\,. \end{cases}$$

De plus, prouvez que φ est l'unique fonction avec la propriété

$$H(\varphi(x)) = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t \quad \forall x \in I\,.$$

Indication : Essayez d'adapter la démonstration du Théorème 2.3.

(2) (i) Trouvez la solution et l'intervalle d'existence maximale pour les PCI suivants.

a) $\begin{cases} y'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-y^2(x)}}{(2x+x^2)y(x)} \\ y(2) &= 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'(x) &= \frac{y(x)\ln y(x)}{\sin x} \\ y(\pi/2) &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y'(x) &= \frac{\cos x}{\cos^2 y(x)} \\ y(\pi) &= \frac{\pi}{4} \end{cases}$

(ii) Déterminez toutes les solutions de l'EDO

$$y'(x) = 3|y(x)|^{2/3}\,.$$

(iii) Trouvez un intervalle ouvert I et une fonction $y \in C^1(I)$ tels que

$$y'(x) = (x - y + 3)^2$$

sur I.

(3) (i) (Rappel.) Démontrez le Théorème de Rolle : Soit $f \in C^0([a, b])$ différentiable sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $x_0 \in [a, b]$ avec $f'(x_0) = 0$.

(ii) Soit $f \in C^0([a, b])$ différentiable sur $[a, b]$ et $\gamma \in [f'(a), f'(b)]$. Alors il existe $x_0 \in [a, b]$ avec $f'(x_0) = \gamma$.

(iii) On définit $\chi_{\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$ par

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Démontrez que l'ODE

$$y'(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

ne possède aucune solution.

(4) (i) Soient $[a, b] = I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $g \in C^1(I)$ une fonction strictement monotone. Démontrez que

$$\int_I g'(x) f(g(x)) \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \mathrm{d}t\,.$$

(ii) Calculez :

a) $\int_0^1 x \exp(-x^2) \mathrm{d}x$

b) $\int_0^{\pi/4} \tan^2(2x) \mathrm{d}x$

c) $\int_1^2 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

(5) Résoudre les PCI suivants :

(i) $\begin{cases} y'(x) & = \frac{y^2(x)+2x^2}{x\,y(x)} \\ y(-1) & = 2 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} y'(x) & = -\frac{2x+y(x)+1}{x+2y(x)+2} \\ y(0) & = 0 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} y'(x) & = \frac{x+y(x)+1}{x+2} - \exp\frac{x+y(x)+1}{x+2} \\ y(0) & = 0 \end{cases}$

(6) Déterminez toutes les solutions de l'équation différentielle

$$x\,y^2(x) - y^3(x) + \big(1 - x\,y^2(x)\big)\,y'(x) = 0\,.$$

Indication : Il existe un facteur intégrand qui dépend seulement de y.

(7) Soit $D = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$, et $g, h \in C^1(D)$. On considère l'EDO

$$h(x, y(x)) + g(x, y(x))y'(x) = 0\,.$$

(i) On suppose que $g(x, y) \neq 0$ pout tout $(x, y) \in D$ et que l'expression

$$\frac{\partial_y h(x, y) - \partial_x g(x, y)}{g(x, y)}$$

est indépendente de y. Par cette hypothèse, on peut la dénoter par $\alpha(x)$. Démontrez que la fonction

$$M(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \alpha(t) \mathrm{d}t\right)$$

est un facteur intégrand pour l'EDO ci-dessus.

(ii) En analogie avec le raisonnement dans (i), trouvez une condition suffisante (non-triviale) pour l'existence d'un facteur intégrand qui dépend seulement de $x - y$.

(i) Trouvez la solution pour le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = -\frac{4x+3y(x)-1}{3x+4y(x)+1} \\ y(2) & = 2 \end{cases}$$

(ii) Trouvez un facteur intégrand pour l'EDO
$$xy(x)^2 - 2y(x)^3 + \left(3 - 2xy(x)^2\right) y'(x) = 0$$
qui ne dépend pas de x, et déterminez toutes les solutions qui peuvent se déterminer en suivant les étapes du cours.

(8) Une masse m est accélérée par une force f avec résistance de l'air qui est quadratique par rapport á la vitesse v (avec condition initiale $v(0) = 0$) :
$$mv'(t) = f - \mu v(t)^2\,,$$
où $\mu > 0$. Déterminez $v(t)$ et la vitesse finale $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(9) Un modèle de croissance pour une population u est donné par l'équation
$$u'(x) = u(x)\left(b(x) - c(x)u(x)\right)\,,$$
où $b, c \in C^0(\mathbb{R})$ sont strictement positives.

(i) On pose $B(x) = \int_0^x b(t)\mathrm{d}t$ et on suppose $\lim_{x\to\infty} B(x) = +\infty$. Démontrez qu'il existe une solution unique positive pour la valeur initiale $u(0) = u_0 > 0$ et que
$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b(x)}{c(x)}\,,$$
supposant que la limite sur le côté droit existe.
Indication : Utilisez le changement de variables $y = u^{-1}$ et la règle de L'Hôpital.

(ii) Pour le cas de fonctions constantes $b(x) = \bar{b}$, $c(x) = \bar{c}$, trouvez la formule explicite pour $u(x)$.

(10) Résoudre les PCI suivants dans un voisinage des conditions initiales :
$$\text{(i)} \begin{cases} y'(x) &= (\tan x)\, y(x) + \sin x \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$
$$\text{(ii)} \begin{cases} y'(x) &= f\left(\frac{3x+y(x)+5}{x+2y(x)-2}\right) \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$
avec
$$f(u) = \cos^2\left(\frac{u-3}{2u-1}\right) - \frac{u-3}{2u-1}\,.$$

3. Existence et unicité de solutions

3.1. **Deux réécritures utiles.** Considérons l'EDO

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))\,.$$

On voudrait réécrire cette équation comme une EDO d'ordre 1. Idée : On pose $v(x) = y'(x)$. Alors l'équation ci-dessus est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ll} y'(x) & = v(x) \\ v'(x) & = f(x, y(x), v(x))\,. \end{array}\right.$$

On va généraliser cette observation :

Lemme 3.1 (Réduction à un système d'ordre 1)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}^{1+nN}$ et $f \in C^0(D)$. Alors le système N-dimensionel*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \tag{3.1}$$

est équivalent au système nN-dimensionel

$$\left\{\begin{array}{ll} \tilde{y}_0'(x) & = \tilde{y}_1(x) \\ \tilde{y}_1'(x) & = \tilde{y}_2(x) \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{y}_{n-2}'(x) & = \tilde{y}_{n-1}(x) \\ \tilde{y}_{n-1}'(x) & = f(x, \tilde{y}_0(x), \tilde{y}_2(x), \dots, \tilde{y}_{n-1}(x))\,, \end{array}\right. \tag{3.2}$$

au sens que $\varphi(x)$ est une solution pour (3.1) *si et seulement si*

$$(\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))^T$$

est une solution pour (3.2).

Démonstration. Ceci est évident. $\square$

Exemple 3.2. L'EDO pour l'oscillateur harmonique est donnée par

$$y''(x) = -y(x)\,.$$

L'EDO équivalent d'ordre 1 est

$$\left\{\begin{array}{ll} \tilde{y}_1'(x) & = \tilde{y}_2(x) \\ \tilde{y}_2'(x) & = -\tilde{y}_1(x)\,. \end{array}\right.$$

Sous forme vectorielle :

$$\tilde{y}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{y}(x)\,.$$

Les solutions de ces équations vont être discutées ci-dessous.

Remarque 3.3. D'après le théorème, il suffit de considérer des systèmes d'ordre 1 pour l'analyse des EDO.

La seconde façon de réécrire des EDO que l'on va discuter ici s'obtient en intégrant l'EDO

$$y'(t) = f(x, y(t))$$

entre $t = x_0$ et $t = x$, avec la valeur initiale $y(x_0) = y_0$.

Lemme 3.4 (Réécrire une EDO comme une équation intégrale). *Soit $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$, $f \in C^0(D)$, $(x_0, y_0) \in D$, I un interval avec $x_0 \in I$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ avec $(x, \varphi(x)) \in D$ pour tout $x \in I$. Alors on a l'énoncé suivant :*
La fonction φ est une solution du PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

sur I si et seulement si $\varphi \in C^0(I)$ et

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\mathrm{d}t \quad \forall x \in I\,.$$

Démonstration. On prouve la partie "$\Rightarrow$" en intégrant l'EDO. La partie "$\Leftarrow$" est démontrée en posant $x = x_0$ dans l'équation intégrale, et en prenant la dérivée pour tout $x \in I$. □

3.2. **Le Théorème de Cauchy-Peano-Arzelà.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ et $f \in C^0(D)$. De plus soit

$$y'(t) = f(x, y(t))$$

une EDO N-dimensionelle. Soit φ une solution de l'EDO, et $x_0 \in I$. La tangente au graphe de φ en $(x_0, \varphi(x_0))$ est donnée par

$$G_{x_0} = \left\{(x_0, \varphi(x_0)) + (x - x_0)(1, \varphi'(x_0)) : x \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

En utilisant l'EDO on peut réécrire $(1, \varphi'(x_0))$ comme

$$(1, \varphi'(x_0)) = (1, f(x_0, \varphi(x_0))\,.$$

Donné $(x_0, y_0) \in D$, on sait que toute solution qui traverse ce point possède la même tangente à son graphe en ce point. Seul le champ de vecteurs

$$D \to \mathbb{R}^{1+N}\,, \quad (x, y) \mapsto (1, f(x, y)) \tag{3.3}$$

va être décisif pour la forme des solutions.

Basé sur cette observation, on va construire des solutions approximatives sous la forme de *lignes polygonales.*

On va supposer que x_0 est la borne inférieure le l'intervalle I, et on veut déterminer une solution approximative pour $y(x_0) = y_0$. On choisit $h > 0$, et en partant de x_0 on définit $x_k = x_0 + hk$ pour $k = \{1, \ldots, \lfloor |I|/h \rfloor\}$. (Notation : $\lfloor a \rfloor = \max\{i \in \mathbb{Z} : i \leq a\}$.) D'abord on va déterminer la fonction affine qui passe par (x_0, y_0), et dont la dérivée est $f(x_0, y_0)$:

$$x \mapsto y_0 + (x - x_0)f(x_0, y_0)\,.$$

On va considérer la restriction de cette fonction à $[x_0, x_1]$ comme une solution approximatve sur le segment $[x_0, x_1]$. Sur le prochain segment, la ligne polygonale est définie par le point final

$$(x_1, y_1) := (x_1, y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0))\,.$$

D'ici la ligne polygonale est prolongée en direction $(1, f(x_1, y_1))$, etc.

De ces reflexions, on retire la définition suivante.

Définition 3.5. *Soit $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$, $x_0, b \in \mathbb{R}$ avec $x_0 < b$, $I = [x_0, b]$, $f \in C^0(D)$, $(x_0, y_0) \in D$, $h > 0$ et $x_k := x_0 + hk$ pour $k = \{1, \ldots, \lfloor |I|/h \rfloor\}$.*
Alors la fonction p, définie itérativement par

$$p(x) := \begin{cases} y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0) & \text{pour } [x \in x_0, x_1] \\ p(x_k) + (x - x_k) f(x_k, p(x_k)) & \text{pour } x \in [x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

est nommée la ligne polygonale d'Euler *pour le PCI*

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

avec incrément h (si $(x, p(x)) \in D$ pour tout $x \in I$).

Une idée pour la preuve de l'existence d'une solution du PCI en résulte : On considère les lignes polygonales d'Euler avec incrément $h \to 0$. Pour réaliser cette idée on a besoin d'un théorème de convergence :

Théorème 3.6 (Arzelà-Ascoli)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $I := [a, b]$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C^0(I; \mathbb{R}^N)$ avec les propriétés suivantes :*

(i) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée *: Pour tout $x \in I$ il existe $S(x) > 0$ tel que*

$$\|y_n(x)\| \leq S(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

(ii) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue *: Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x, x' \in I$ on a que*

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|y_n(x) - y_n(x')\| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui est uniformément convergente.

Démonstration. 1ère étape : Construction de sous-suites convergentes sur $I \cap \mathbb{Q}$. L'ensemble $I \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable, et alors on peut écrire

$$I \cap \mathbb{Q} = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}\,.$$

La suite $(y_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^N$ par l'hypothèse (i). Par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite $(y_{n_k^{(1)}})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(y_{n_k^{(1)}}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}^N$. Par le même argument, la suite $(y_{n_k^{(1)}})_{k\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite $(y_{n_k^{(2)}})_{k\in\mathbb{N}}$, telle que $(y_{n_k^{(2)}}(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^N$. Et itérant cet argument on obtient une suite de fonctions $((y_{n_k^{(m)}})_{k\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ qui satisfait :

$$(y_{n_k^{(m)}}(x_p))_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{est convergente dans } \mathbb{R}^N \text{ pour } m \geq p\,.$$

Maintenant on choisit une suite "diagonale" $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$g_k(x) := y_{n_k^{(k)}}(x) \quad \forall x \in I\,.$$

La suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour chaque $x \in I \cap \mathbb{Q}$, puisque pour $x_m \in I \cap \mathbb{Q}$ on a que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est pour $k \geq m$ une sous-suite de $(y_{n_k^{(m)}})_{k\in\mathbb{N}}$, et alors convergente en x_m. Cela conclut la 1ère étape.

2ème étape : Démonstration de la convergence uniforme de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par (ii) il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, x' \in I$ on a que

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|g_k(x) - g_k(x')\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

On choisit $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_M \in I \cap \mathbb{Q}$ tels que

$$|a - \tilde{x}_1| < \delta, \quad |\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i+1}| < \delta, \quad \text{pour } i \in \{1, \ldots, M-1\} \text{ et } \quad |b - \tilde{x}_M| < \delta\,.$$

Par la convergence de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur $\{\tilde{x}_i : i \in \{1, \ldots, M\}\}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|g_k(\tilde{x}_i) - g_{k'}(\tilde{x}_i)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k, k' > K, \forall i \in \{1, \ldots, M\}\,.$$

Soit $x \in I$ arbitraire. Alors il existe $i \in \{1, \ldots, M\}$ tel que $|x - \tilde{x}_i| < \delta$. Alors

$$\begin{aligned}\|g_k(x) - g_{k'}(x)\| &\leq \|g_k(x) - g_k(\tilde{x}_i)\| + \|g_k(\tilde{x}_i) - g_{k'}(\tilde{x}_i)\| + \|g_{k'}(x) - g_{k'}(\tilde{x}_i)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Cela démontre le critère de Cauchy pour la convergence uniforme de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$. La preuve est complète. □

Notre exigence minimale pour un PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

est la continuité de f. Étant donné un intervalle $I := [x_0 - a, x_0 + a]$, en génerale, on n'a pas une solution sur I tout entier, même si f est continue. Pour démontrer ce dernier énoncé, on considère un PCI avec l'EDO $y' = y^2$. Par le Théorème 2.3 on obtient une solution unique qui possède une singularité à une distance finie à x_0. On va maintenant investiguer la longuer minimale de l'intervalle d'existence.

Considérons f sur le domaine

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{1+N} : |x - x_0| \leq a,\ \|y - y_0\| \leq b\right\}\,.$$

On remarque que le domaine D est compact. Soit $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N)$. Alors la fonction

$$x \mapsto \|f(x)\|$$

est continue sur D (comme la composition de deux fonctions continues). On sait que le maximum d'une fonction continue sur un compact est atteint, et on pose

$$M := \max_D \|f\|\,.$$

Supposons que y est une solution du PCI (3.4) avec $(x, y(x)) \in D$ pour tout x. Alors on a que $\|y'(x)\| = \|f(x, y(x))\| \leq M$ pour tout x. De cet estimé, on déduit

$$\|y(x) - y_0\| \leq b$$

sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, où $\alpha = \min(a, b/M)$. Cela constitue un estimé "a priori", puisqu'on a travaillé avec l'hypothèse de l'existence d'une solution y. Un estimé similaire est vrai pour des approximations d'une solution et cette observation va nous donner les estimés nécessaires dans la preuve du théorème suivant pour l'application du Théorème d'Arzelà-Ascoli.

Théorème 3.7 (Cauchy-Peano-Arzelà). *Soient $a, b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$,*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{1+N} : |x - x_0| \le a, \; \|y - y_0\| \le b\right\} ,$$

et $f \in C^0(D)$. Alors il existe une solution du PCI (3.4) sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, où $\alpha = \min(a, b/M)$ avec $M = \max_D \|f\|$.

Démonstration. 1ère étape : Construction des lignes polygonales d'Euler. Sur un compact quelconque une fonction continue est uniformément continue. Dans notre cas, on applique cela à $f : D \to \mathbb{R}^N$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\delta = \delta(k) > 0$ tel que pour tout $x, \tilde{x} \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ et $y, \tilde{y} \in [y_0 - b, y_0 + b]$ on a que :

$$|x - \tilde{x}| < \delta(k) \, , \quad \|y - \tilde{y}\| < \delta(k) \quad \Rightarrow \quad \|f(x,y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})\| < \frac{1}{k} \, . \tag{3.5}$$

Choisissons $n = n(k) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\alpha}{n(k)} < \min(\delta(k), \delta(k)/M) \, .$$

Posons

$$h(k) := \frac{\alpha}{n(k)} \, .$$

On définit la ligne polygonale d'Euler p_k avec incrément $h(k)$. Posons

$$x_i^k = x_0 + i h(k) \qquad \text{pour } i \in \{-n(k), \dots, n(k)\} = \{j \in \mathbb{Z} : |j| \le n(k)\} \, .$$

Dès lors on va omettre l'index "k" pour les objets $\delta = \delta(k)$, $n = n(k)$, $h = h(k)$, $x_i = x_i^k$. La ligne polygonale d'Euler p_k est définie itérativement par

$$p_k(x) = \begin{cases} y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0) & \text{si } x \in [x_{-1}, x_1] \\ p_k(x_i) + (x - x_i) f(x_i, p_k(x_i)) & \text{si } i \in \{1, \dots, n-1\}, \; x \in [x_i, x_{i+1}] \\ & \text{ou } i \in \{-(n-1), \dots, -1\}, \; x \in [x_{i-1}, x_i] \, . \end{cases}$$

La fonction p_k est bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque

$$\begin{aligned} \|p_k(x_i) - y_0\| &= \left\| \sum_{j=0}^{i-1} (p_k(x_{j+1}) - p_k(x_j)) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{i-1} ((x_{j+1} - x_j) f(x_i, p_k(x_i))) \right\| \\ &\le i \, h \, M \le n \frac{\alpha}{n} M \le b \, , \end{aligned}$$

et alors $(x_i, p_k(x_i)) \in D$ pour tout i.

2ème étape : Application du théorème d'Arzelà-Ascoli.

L'ensemble $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est uniformément borné par la 1ère étape de la preuve. Il reste à démontrer qu'il est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. On doit démontrer l'existence de $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon)$ avec la propriété suivante : Si $x, x' \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, alors on a l'implication

$$|x - x'| < \tilde{\delta} \quad \Rightarrow \quad \|p_k(x) - p_k(x')\| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \, . \tag{3.6}$$

Posons $\tilde{\delta}(\varepsilon) := \varepsilon / M$. Soient $x, x' \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, et $k \in \mathbb{N}$ arbitraire. On va distinguer les cas suivants :

Cas 1 : Il existe $i \in \{-n(k), \ldots, n(k)\}$ tel que x et x' sont contenus dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Alors

$$\|p_k(x) - p_k(x')\| \le |x - x'| f(x_i, p_k(x_i)) < \delta M \le \varepsilon\,.$$

(Ici on a supposé que $i \ge 0$; pour le cas $i < 0$ on doit remplacer $f(x_i, p_k(x_i))$ par $f(x_{i+1}, p_k(x_{i+1}))$.) Pour le cas présent, cela prouve l'implication (3.6).

Cas 2 : Il n'existe pas de tel i. Alors il existe $j, j' \in \mathbb{Z}$ tels que $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $x' \in [x_{j'}, x_{j'+1}]$. Sans perte de généralité on peut supposer $j < j'$. On a que

$$\begin{aligned}
\|p_k(x) - p_k(x')\| &\le \|p_k(x) - p_k(x_{j+1})\| + \left\| \sum_{l=j+1}^{j'-1} (p_k(x_l) - p_k(x_{l+1})) \right\| + \|p_k(x_{j'}) - p_k(x')\| \\
&\le M \left(|x - x_{j+1}| + \sum_{l=j+1}^{j'-1} |x_l - x_{l+1}| + |x_{j'} - x'| \right) \\
&= M|x - x'| < \delta M \le \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Cela prouve l'implication (3.6) pour le cas présent.

En résumé, on a démontré l'équicontinuité $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par le Théorème Arzelà-Ascoli il existe une sous-suite convergente. Maintenant on change notre notation et on va dénoter cette sous-suite par $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Dès lors, quand on considère $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, on va supposer que $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$. (La preuve pour $x \in [x_0 - \alpha, x_0]$ est complètement analogue, et va être omise.)

3ème étape : Estimé pour la dérivée. On va démontrer que

$$\left\|p_k'(x) - f(x, p_k(x))\right\| \le \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \setminus \{x_i : i = \{-n, \ldots, n\}\}\,. \tag{3.7}$$

Démonstration de (3.7) : Pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a que

$$p_k'(x) = f(x_i, p_k(x_i)) \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1})\,. \tag{3.8}$$

Alors pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ on a que

$$|x - x_i| < h < \delta, \quad \|p_k(x) - p_k(x_i)\| < Mh < \delta\,.$$

Par la continuité uniforme de f (voir (3.6)) on obtient

$$\|f(x, p_k(x)) - f(x_i, p_k(x_i))\| < \frac{1}{k}\,.$$

On va utiliser dans cette dernière inégalite l'équation (3.8). Cela nous donne (3.7).

4ème étape : Estimé pour l'intégrale. On va démontrer

$$\left\|p_k(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, p_k(t))\mathrm{d}t\right\| < \frac{1}{k}|x - x_0| \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]\,. \tag{3.9}$$

Démonstration de (3.9) : Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Par le théorème fondamentale de l'analyse, on a que

$$p_k(x) = y_0 + \left(\sum_{j=0}^{i-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_k'(t)\mathrm{d}t \right) + \int_{x_i}^{x} p_k'(t)\mathrm{d}t$$

et alors

$$\begin{aligned}\left\|p_k(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(t,p_k(t))\mathrm{d}t\right\| &\leq \left\|\sum_{j=0}^{i-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}(p_k'(t)-f(t,p_k(t)))\mathrm{d}t\right\|+\left\|\int_{x_i}^{x}(p_k'(t)-f(t,p_k(t)))\mathrm{d}t\right\|\\ &\leq \frac{1}{k}|x-x_0|\,.\end{aligned}$$

Dans ce dernier estimé on a utilisé (3.7). Cela nous donne (3.9).
5ème étape : Passage à la limite. On pose

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p_\infty\,.$$

Dans l'inégalité (3.9) on va passer à la limite $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|p_k(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(t,p_k(t))\mathrm{d}t\right\| \leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}|x-x_0| = 0\,.$$

Par la continuité de la norme, on a que

$$\lim_{k\to\infty}\left\|p_k(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(t,p_k(t))\mathrm{d}t\right\| = \left\|\lim_{k\to\infty}p_k(x)-y_0-\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t,p_k(t))\mathrm{d}t\right\|\,. \tag{3.10}$$

Finalement on remarque que, par la continuité uniforme de f sur D et la convergence uniforme de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a que la suite

$$(t\mapsto f(t,p_k(t)))_{k\in\mathbb{N}}$$

est uniformément convergente aussi. Cela nous permet de renverser l'ordre de la limite et de l'intégrale, et on obtient que (3.10) peut se réécrire comme

$$\left\|p_\infty(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(t,p_\infty(t))\mathrm{d}t\right\|\,.$$

On a déjà vu que cette expression vaut 0. Par le Théorème 3.4 on déduit l'énoncé du théorème présent. □

3.3. **Le Théorème de Cauchy-Lipschitz.** Observation : La solution de l'équation algébraique

$$a = \frac{a}{2}+\frac{1}{a}$$

nous donne la racine de 2. On peut déterminer la solution itétativement : Par exemple, en posant $a_0 = 1$ et

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}\,.$$

On prouve facilement que la suite définie de telle manière est croissante et bornée, et alors convergente. Dénotons sa limite par a_∞, alors

$$a_\infty = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}\right) = \frac{a_\infty}{2}+\frac{1}{a_\infty}\,.$$

On va maintenant appliquer cette idée à des équations intégrales, plus précisément à léquation

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t\,. \tag{3.11}$$

Définition 3.8 (Itérée de Picard)**.** *L'itérée de Picard λ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, pour l'équation intégrale* (3.12) *est définie par*

$$\begin{aligned}\lambda_0(x) &:= y_0\\ \lambda_k(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \lambda_{k-1}(t))\mathrm{d}t\,, \quad k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

si $(t, \lambda_{k-1}(t))$ est contenu dans le domaine de f pour tout t dans l'intervalle sur lequel on considère cette équation.

Comme on vient de voir dans la preuve du Théorème 3.7, il suffit de prouver la convergence uniforme de $\lambda_k \to \lambda_\infty$ et $f(t, \lambda_k(t)) \to f(t, \lambda_\infty(t))$ pour obtenir une solution λ_∞. Néanmoins notre but est d'obtenir une solution *unique* pour le PCI (3.4). Pour cela on va exiger des propriétés additionelles pour f :

Définition 3.9. *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}^N$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est nommée lipschitzienne par rapport à y s'il existe $L \geq 0$ tel que*

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

si $(x, y) \in D$ et $(x, \tilde{y}) \in D$. Le cas échéant, L est nommé la constante de Lipschitz *de f.*

Théorème 3.10 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soient $a, b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$, $L \geq 0$,*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{1+N} : |x - x_0| \leq a,\ \|y - y_0\| \leq b\right\}\,,$$

et $f \in C^0(D)$ tels que

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

si $(x, y), (x, \tilde{y}) \in D$. Alors il existe une solution unique du PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x))\\ y(x_0) &= y_0\end{cases} \tag{3.12}$$

sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, où $\alpha = \min(a, b/M)$ avec $M = \max_D \|f\|$.

Démonstration. 1ère étape : Construction de l'itérée de Picard. On pose

$$\begin{aligned}\lambda_0(x) &:= y_0\\ \lambda_k(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \lambda_{k-1}(t))\mathrm{d}t\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Les fonctions λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sont bien définies puisque

$$\begin{aligned}\|\lambda_k(x) - y_0\| &= \left\|\int_{x_0}^{x} f(t, \lambda_{k-1}(t))\mathrm{d}t\right\|\\ &\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, \lambda_{k-1}(t))\|\,\mathrm{d}t\\ &\leq M|x - x_0| \leq \alpha M \leq b\,,\end{aligned}$$

et alors on a que $(x, \lambda_k(x)) \in D$ pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
2ème étape : On va démontrer

$$\|\lambda_{k+1}(x) - \lambda_k(x)\| \leq ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]\,. \tag{3.13}$$

Démonstration par récurrence : Pour $k = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\|\lambda_1(x) - \lambda_0(x)\| &= \|\lambda_1(x) - y_0\| \\
&= \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0) \mathrm{d}t \right\| \\
&\leq M|x - x_0| \, .
\end{aligned}$$

Alors l'énoncé est démontré pour $k = 0$. Admettons l'énoncé pour $k \in \mathbb{N}_0$ fixé. Alors

$$\begin{aligned}
\|\lambda_{k+2}(x) - \lambda_{k+1}(x)\| &\leq \left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, \lambda_{k+1}(t)) - f(t, \lambda_k(t))) \mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, \lambda_{k+1}(t)) - f(t, \lambda_k(t))\| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{x_0}^{x} L \, \|\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)\| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{x_0}^{x} LML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= ML^{k+1} \frac{|x - x_0|^{k+2}}{(k+2)!} \, .
\end{aligned}$$

Cela démontre l'énoncé pour $k + 1$, et alors en toute généralité.
3ème étape : Convergence uniforme de $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Par la 2ème étape, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{k+1}(x) - \lambda_k(x))$$

possède la majorante

$$\sum_{k=0}^{\infty} ML^k \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}$$

sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Cette dernière série est absolument convergente avec la limite $(M/L)(\exp(\alpha L) - 1)$. Alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{k+1}(x) - \lambda_k(x))$ est uniformément convergente sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, et alors la suite

$$(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(y_0 + \sum_{i=0}^{k} (\lambda_{i+1}(x) - \lambda_i(x)) \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$$

est uniformément convergente sur cet intervalle aussi. On dénote la limite par λ_∞.
4ème étape : On va démontrer que λ_∞ est une solution pour le PCI. On a que

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k(x) = \lim_{k \to \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \lambda_{k-1}(t)) \mathrm{d}t \right) \, .$$

Par

$$\|f(t, \lambda_k(t)) - f(t, \lambda_\infty(t))\| \leq L \|\lambda_k(t) - \lambda_\infty(t)\|$$

on déduit la convergence uniforme de la suite $(f(t, \lambda_k(t)))_{k \in \mathbb{N}_0}$ vers la limite $f(t, \lambda_\infty(t))$. Alors on peut interchanger l'ordre de la limite et l'intégrale, et on obtient

$$\lambda_\infty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \lambda_\infty(t)) \mathrm{d}t \, .$$

Par le théorème 3.4 cela prouve que λ_∞ est une solution du PCI.

5ème étape : Unicité. Soit ξ une autre solution du PCI. On va prouver que

$$\|\xi(x)-\lambda_k(x)\| \le ML^k \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall k\in\mathbb{N}_0, x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\,. \tag{3.14}$$

Démonstration par induction complète : Pour $k=0$ on a

$$\begin{aligned}\|\xi(x)-\lambda_0(x)\| &= \|\xi(x)-y_0\| \\ &= \left\|\int_{x_0}^x f(t,\xi(t))\mathrm{d}t\right\| \\ &\le M|x-x_0|\,.\end{aligned}$$

Cela démontre l'énoncé pour $k=0$. Admettons-le pour $k\in\mathbb{N}_0$. Alors

$$\begin{aligned}\|\xi(x)-\lambda_{k+1}(x)\| &\le \left\|\int_{x_0}^x (f(t,\xi(t))-f(t,\lambda_k(t)))\mathrm{d}t\right\| \\ &\le \int_{x_0}^x \|f(t,\xi(t))-f(t,\lambda_k(t))\|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_{x_0}^x L\,\|\xi(t)-\lambda_k(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_{x_0}^x LML^k\frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= ML^{k+1}\frac{|x-x_0|^{k+2}}{(k+2)!}\,.\end{aligned}$$

Cela démontre l'énoncé (3.14) pour $k+1$, et alors en toute généralité.
Par (3.14), on obtient

$$\lim_{k\to\infty}\|\xi(x)-\lambda_k(x)\| = 0 \quad \forall x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\,.$$

Cela implique $\xi=\lambda_\infty$ et complète la preuve du théorème. $\square$

Corollaire 3.11 (Évaluation d'erreurs)**.** *Sous les conditions du théorème*

$$\|\lambda_\infty(x)-\lambda_k(x)\| \le ML^k\frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall k\in\mathbb{N}_0, x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$$

pour l'itérée de Picard λ_k et la solution unique λ_∞ du PCI.

Démonstration. Voir la 5ème étape de la preuve, et y poser $\xi=\lambda_\infty$. $\square$

Exemple 3.12. Considérons le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= y^2(x)-x \\ y(0) &= 0\end{cases}$$

On a remarqué dans le chapitre 1 que la solution de ce PCI ne peut pas être représentée par des fonctions élémentaires et leurs intégrales. Le Théorème 3.10 nous garantit l'existence d'une solution, et le Corollaire 3.11 nous donne des approximations :
Choisissons $D:=[-1/2,1/2]^2$. Alors

$$|(y^2-x)-(\tilde{y}^2-x)| = |(\tilde{y}+y)(y-\tilde{y})| \le |y-\tilde{y}| \quad \forall (x,y),(x,\tilde{y})\in D\,.$$

La constante de Lipschitz de $f(x,y) = y^2 - x$ sur D par rapport à y est donné par $L = 1$. En plus, $M = \max_D |f| = \frac{3}{4}$. Alors

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Comme iterée de Picard initiale on pose $\lambda_0 = 0$. On calcule

$$\lambda_1(x) = \int_0^x (0 - t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x^2\,,$$

$$\lambda_2(x) = \int_0^x (\frac{1}{4}t^4 - t)\mathrm{d}t = \frac{x^5}{20} - \frac{x^2}{2}\,,$$

$$\lambda_3(x) = \int_0^x \left(\frac{t^{10}}{400} - \frac{t^7}{20} + \frac{t^4}{4} - t\right)\mathrm{d}t = \frac{x^{11}}{4400} - \frac{x^8}{160} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^2}{2}\,.$$

La 3ème itérée de Picard donne une approximation de la solution avec une déviation par rapport à la solution qui est moins que

$$\frac{3}{4}\frac{(1/2)^4}{24} = \frac{3}{1496} \approx 0,002.$$

Exemple 3.13. On considère le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= xy(x) \\ y(x_0) &= 0\,. \end{cases}$$

Ici on a $f(x,y) = xy$ et on choisit comme domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y| \leq b\}\,,$$

où a et b vont être fixés plus tard. On voit tout de suite que $y(x) = 0$ est une solution qui est définie sur $\mathbb{R}$.

On va comparer cette observation avec l'énoncé du Théorème 3.10. On va choisir a, b tel que l'intervalle d'existence dans cet énoncé devient le plus grand possible. On détermine la constante de Lipschitz L de f :

$$|xy - x\tilde{y}| = |x||y - \tilde{y}| \leq (|x_0| + a)|y - \tilde{y}|\,.$$

Alors on peut poser $L = (|x_0| + a)$. De plus, on a que $M = \max_D |xy| = (|x_0| + a)b$ et alors

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(a, \frac{1}{|x_0| + a}\right)$$

On veut maximiser la longueur de l'intervalle d'existence par notre choix de a, b. Pourtant on voit bien que indépendamment de ce choix on va avoir une longueur inférieure à

$$2 \sup_a \min\left(a, \frac{1}{a}\right) = 2\,.$$

Le Théorème 3.10 nous donne un intervalle d'existence qui est trop petit.

On voudrait nous débarasser du problème que l'on vient de constater. Pour cela on admet la définition suivante :

Définition 3.14. *Soit $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ ouvert et $f \in C^0(D)$. Si pour tout $(x_0, y_0) \in D$ il existe un voisinage U et une constante $L \geq 0$ tels que*

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \forall (x,y), (x,\tilde{y}) \in U\,,$$

alors $f(x,y)$ est nommée localement lipschitzienne par rapport à y.

Exemple 3.15. Soit $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, et $g : D \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x\sqrt{y}$. La fonction g *n'est pas* lipschitzienne par rapport à y sur tout son domaine puisque

$$|g(x,y) - g(x,\tilde{y})| = |x||\sqrt{y} - \sqrt{\tilde{y}}| = \frac{|x|}{\sqrt{y} + \sqrt{\tilde{y}}}|y - \tilde{y}|\,,$$

et l'expression $\frac{|x|}{\sqrt{y}+\sqrt{\tilde{y}}}$ tend vers $+\infty$ pour $y, \tilde{y} \downarrow 0$. Néanmoins, g est *localement* lipschitzienne par rapport à y puisque pour tout $(x_0, y_0) \in D$ on peut trouver un voisinage tel que $\frac{|x|}{\sqrt{y}+\sqrt{\tilde{y}}}$ est borné dans ce voisinage.

Ci-dessous on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.16. *Soient $D \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ ouvert, $f \in C^0(D)$, et $f(x, y)$ localement lipschitzienne par rapport à y. De plus, soit $\tilde{D} \subset D$ un compact. Alors $f|_{\tilde{D}}$ est lipschitzienne par rapport à y.*

Démonstration. Démonstration par l'absurde. Supposons que l'énoncé est faux. Alors il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(x_n, y_n), (x_n, \tilde{y}_n) \in \tilde{D}$ et

$$\|f(x_n, y_n) - f(x_n, \tilde{y}_n)\| > n\|y_n - \tilde{y}_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.15}$$

Par la compacité de $\tilde{D}$ il existe des sous-suites convergentes $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{y}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ avec des limites x_∞, y_∞, $\tilde{y}_\infty$ respectivement. Dans la limite $k \to \infty$ on obtient dans (3.15) :

$$\|f(x_\infty, y_\infty) - f(x_\infty, \tilde{y}_\infty)\| \geq \lim_{k\to\infty} \left(n_k \|y_{n_k} - \tilde{y}_{n_k}\|\right)\,.$$

Alors $(\|y_{n_k} - \tilde{y}_{n_k}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, et on a que $y_\infty = \tilde{y}_\infty$. Soient $U \subseteq D$ un voisinage de (x_∞, y_∞) et $L \geq 0$ tels que

$$\|f(x,z) - f(x,\tilde{z})\| \leq L\|z - \tilde{z}\| \quad \forall (x,z), (x,\tilde{z}) \in U\,.$$

Par la convergence $x_{n_k} \to x_\infty$, $y_{n_k} \to y_\infty$ $\tilde{y}_{n_k} \to y_\infty$ il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$(x_{n_k}, y_{n_k}), (x_{n_k}, \tilde{y}_{n_k}) \in U \quad \forall k > K\,.$$

Alors

$$\|f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x_{n_k}, \tilde{y}_{n_k})\| \leq L\|y_{n_k} - \tilde{y}_{n_k}\| \quad \forall k > K.$$

Cela est une contradiction à (3.15). La preuve est complète. □

On va maintenant discuter l'idée pour résoudre le problème de l'exemple 3.13. Soient $D \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ ouvert, $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N)$, et $f(x, y)$ localement lipschitzienne par rapport à y. On considère le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0\,. \end{cases}$$

Puisque f est localement lipschitzienne, il existe un voisinage D_1 de (x_0, y_0) qui a la forme exigée dans les hypothèses du Théorème 3.10 (i.e., $D_1 = \{(x, y) \in D : |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$), et de plus une constante $L_1 \geq 0$ telle que $\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L_1|y - \tilde{y}|$ sur D_1. Par le Théorème 3.10 on obtient une solution unique y_1 sur l'interval $I_1 = [x_{-1}, x_1]$ qui satisfait $x_0 \in I_1$. Puis, on va considérer le PCI modifié

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_1) &= y_1(x_1)\,. \end{cases}$$

Pour ce PCI, on peut trouver un voisinage de $(x_1, y_1(x_1))$ (dénoté D_2) et $L_2 \geq 0$ tels que $\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \leq L_2|y - \tilde{y}|$ sur D_2. Ainsi on obtient (encore une fois par le Théorème 3.10) un prolongement de y_1 à un intervalle $I_2 = [x_1, x_2]$.
Cette idée est à la base du théorème suivant :

Théorème 3.17 (Théorème d'existence et unicité globales)**.** *Soient $D \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ ouvert, $f \in C^0(D;\mathbb{R}^N)$, et $f(x,y)$ localement lipschitzienne par rapport à y. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in D$ il existe un intervalle unique $I_{\max} = (I^-, I^+)$ (qui dépend de (x_0, y_0)) avec les propriétés suivantes :*

(i) Le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

possède une solution unique λ sur l'intervalle $I_{\max}$.

(ii) Si $\xi : J \to \mathbb{R}^N$ est une solution pour (3.16), alors on a que $J \subseteq I_{\max}$ et $\xi = \lambda$ sur J.

Démonstration. 1ère étape. On pose

$$I^+ := \sup\{\beta \in \mathbb{R} : \text{(3.16) possède une solution sur } [x_0, \beta]\} ,$$
$$I^- := \inf\{\beta \in \mathbb{R} : \text{(3.16) possède une solution sur } [\beta, x_0]\} .$$

Les ensembles ci-dessus sont non-vides et contiennent des éléments qui sont strictement plus grand (respectivement strictement plus petit) que x_0 par le Théorème 3.10. Alors $I_{\max} = (I^-, I^+)$ est bien défini.
2ème étape. On pose

$$I_n^+ := \begin{cases} +\infty & \text{si } I^+ = +\infty \\ I^+ - \frac{1}{n} & \text{ailleurs}, \end{cases} , \quad I_n^- := \begin{cases} -\infty & \text{si } I^- = -\infty \\ I^- + \frac{1}{n} & \text{ailleurs}. \end{cases}$$

D'après la 1ère étape, il existe une solution μ_n du PCI sur l'intervalle sur $I_n := (I_n^+, I_n^-)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer

$$\mu_n = \mu_{n+1} \quad \text{sur } I_n \quad \forall n \in \mathbb{N} . \tag{3.17}$$

Pour la preuve de cette égalité on pose

$$\tilde{I}_n := \{x \in I_n : \mu_n(x) = \mu_{n+1}(x)\} .$$

On veut prouver $\tilde{I}_n = I_n$. Il suffit de démontrer que $\tilde{I}_n$ est non-vide, et ouvert et fermé dans la topologie relative de I_n. L'ensemble $\tilde{I}_n$ est ouvert, puisque pour tout $x \in \tilde{I}_n$ on a par le fait que f est localement lipschitzienne et le Théorème 3.10 qu'il existe un voisinage V tel que une solution unique du PCI avec la condition initiale $y(x) = \mu(x)$ existe sur V. En particulier, $\mu_n(z) = \mu_{n+1}(z)$ pour $z \in V$. L'ensemble $\tilde{I}_n$ est fermé, puisque $\mu_n - \mu_{n+1}$ est continue, et

$$\tilde{I}_n = (\mu_n - \mu_{n+1})^{-1}(\{0\}) .$$

Verballement : $\tilde{I}_n$ est le préimage de $\{0\}$ sous la fonction continue $\mu_n - \mu_{n+1}$. Les préimages des fermés sont fermés, alors $\tilde{I}_n$ est fermé. Finalement, $\tilde{I}_n$ n'est pas vide puisque $x_0 \in \tilde{I}_n$. Cela complète la preuve de (3.17) et on obtient en particulier que tout μ_n et la restriction d'une seule fonction λ à I_n.

3ème étape. Soit $\xi : J \to \mathbb{R}^N$ une solution du PCI. Alors $J \subseteq I_{\max}$ par la définition de $I_{\max}$. Comme dans la 2ème étape de la preuve, on démontre que l'ensemble

$$\{x \in J : \xi(x) = \mu(x)\}$$

est ouvert, fermé et non-vide. Alors $\xi = \mu$ sur J. En particulier, cela prouve l'unicité de λ.
4ème étape. L'intervalle $I_{\max}$ avec les propriétés (i) et (ii) est unique : Soit J un intervalle avec les mêmes propriétés. Par (i) appliqué à J, on a qu'il existe une solution λ_J sur J, et par (ii) appliqué à $I_{\max}$ on a que $J \subseteq I_{\max}$. En renversant les rôles, on obtient $I_{\max} \subseteq J$ et alors $I_{\max} = J$. Cela démontre l'unicité de $I_{\max}$. □

Notation : Pour les intervalles et solutions dans le théorème on va désormais utiliser la notation suivante : Si le PCI auquel on fait référence est clair, on dénote par $I_{\max}$ l'intervalle d'existence maximale mentionné dans le théorème, et on dénote par $\lambda_{\max}$ la solution maximale (λ ci-dessus). Si seulement l'EDO est spécifiée, on dénote par $I_{\max}(x_0, y_0)$ l'intervalle d'existence maximale pour le PCI avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$, et on dénote par $\lambda_{\max}(x; x_0, y_0)$ la solution maximale. De plus, on va dénoter par $I^{\pm}(x_0, y_0)$ les bornes supérieures/inférieures de l'intervalle d'existence maximal.

Question : Comment déterminer si une solution donnée est maximale ou non ?

Réponse partielle : On connaît déjà deux cas pour lesquels on ne peut pas trouver un prolongement au delà des bornes de l'intervalle d'existence :

a) Si la borne supérieure est $+\infty$ on ne peut évidemment pas trouver un prolongement au delà de cette borne. De même si la borne inférieure est $-\infty$.
b) Si la solution converge vers $+\infty$ ou $-\infty$ à une de ses bornes, il n'existe pas de prolongement au delà de cette borne, puisque chaque solution doit être continue.

Exemple 3.18. On voudrait déterminer l'intervalle d'existence maximal $I_{\max}$ pour le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = xy^2(x) \\ y(1) & = -2 \end{cases}$$

On utilise la séparation des variables, et on obtient

$$\int_{-2}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_1^x t\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{4}{2 - 2(1 - x^2)} = -\frac{2}{x^2}.$$

On constate que $I_{\max} = (0, +\infty)$ satisfait les conditions du Théorème 3.17. On voit que la solution a une singularité à sa borne inférieure, et la borne supérieure est $+\infty$. Est-ce que ce sont les seuls types de comportement de solutions à ses bornes ? Si la borne du domaine D de f (le côté droit de l'EDO) n'est pas touchée, la réponse est postitive, comme on verra dans le théorème suivant.

Théorème 3.19 (Comportement des solutions au bord)**.** *Soient $D \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ ouvert, $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N)$, et $f(x, y)$ localement lipschitzienne par rapport à y. De plus, soient $(x_0, y_0) \in D$, et $\lambda_{\max}$ la solution maximale du PCI*

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

définie sur l'intervalle d'existence maximal $I_{\max} = (I^-, I^+)$. Alors au moins une des trois propositions suivantes tient :

(i) $I^+ = +\infty$

(ii) $\lambda_{\max}$ *n'est pas bornée sur* $[x_0, I^+)$

(iii) On a

$$\lim_{x\to I^+} \operatorname{dist}((x,\lambda_{\max}(x)),\partial D) = 0\,. \tag{3.18}$$

Un énoncé analogue tient pour le comportement de $\lambda_{\max}$ *proche de* I^-.

Démonstration. Il suffit de considérer la partie de droite de l'interval $[x_0, I^+)$: La démonstration de l'énoncé analogue pour $(I^-, x_0]$ se fait (avec les changements évidents) de la même façon.

Supposons que $I^+ < \infty$. Il faut démontrer que au moins un des deux énoncés (ii) et (iii) tient.

1ère étape : On introduit la notation suivante pour $(x_1, y_1) \in D$ et $\tilde a, \tilde b > 0$:

$$Z_{\tilde a,\tilde b}(x_1,y_1) := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{1+N} : |x-x_1|\le \tilde a,\ \|y-y_1\|\le \tilde b\right\}\,.$$

On va démontrer que pour tout $(x_1, y_1) \in D$ il existe $\tilde a, \tilde b > 0$ tels que $Z_{\tilde a,\tilde b}(x_1, y_1) \subset D$ et pour tout $(\tau, \xi) \in Z_{\tilde a,\tilde b}(x_1, y_1)$ le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x,y(x)) \\ y(\tau) &= \xi \end{cases} \tag{3.19}$$

a une solution unique sur l'intervalle $[\tau - \tilde a, \tau + \tilde a]$ [1]. Démonstration : Pour $(x_1, y_1) \in D$ on peut trouver $a, b > 0$ tels que $Z_{a,b}(x_1, y_1) \subset D$. On pose $M = \max_{Z_{a,b}(x_1,y_1)} \|f\|$, et $\tilde a := \min(\frac{a}{2}, \frac{b}{2M})$, $\tilde b = b/2$. Avec ce choix on a que

$$Z_{\tilde a,\tilde b}(\tau,\xi) \subset Z_{a,b}(x_1,y_1) \quad \forall(\tau,\xi)\in Z_{a/2,b/2}(x_1,y_1)\,.$$

Par le théorème 3.10, il existe une solution de (3.19) sur $[\tau - \tilde a, \tau + \tilde a]$. Cela complète la preuve de l'énoncé de la première étape.

2ème étape. On va démontrer l'énoncé suivant : S'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $z_n \in [x_0, I^+)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} z_n = I^+$ telle que la suite $((z_n, \lambda_{\max}(z_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (I^+, λ_∞), alors $(I^+, \lambda_\infty) \in \partial D$. Démonstration par l'absurde : Supposons le contraire. Alors par $(z_n, \lambda_{\max}(z_n)) \in D$ on a que $(I^+, \lambda_\infty) \in \overline{D}$. Par hypothèse on a que $(I^+, \lambda_\infty) \notin \partial D$, et alors $(I^+, \lambda_\infty) \in D$. On choisit $\tilde a, \tilde b > 0$ comme dans la 1ère étape tels que $Z_{\tilde a,\tilde b}(I^+, \lambda_\infty) \subset D$, et tels que pour tout $(\tau, \xi) \in Z_{\tilde a,\tilde b}(I^+, \lambda_\infty)$ le PCI (3.19) possède une solution unique sur l'intervalle $[\tau - \tilde a, \tau + \tilde a]$. Par la convergence $(z_n, \lambda_{\max}(z_n)) \to (I^+, \lambda_\infty)$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$(z_n,\lambda_{\max}(z_n)) \in Z_{\tilde a,\tilde b}(I^+,\lambda_\infty) \quad \forall n > m\,.$$

On en déduit qu'il existe une solution unique du PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x,y(x)) \\ y(z_n) &= \lambda_{\max}(z_n) \end{cases}$$

sur l'intervalle $[z_n - \tilde a, z_n + \tilde a]$ pour tout $n > m$. Ces solutions sont identiques à $\lambda_{\max}$ sur $I_{\max} \cap [z_n - \tilde a, z_n + \tilde a]$. En même temps, on a que $[z_n - \tilde a, z_n + \tilde a] \setminus I_{\max} \neq \emptyset$. Alors on peut prolonger $\lambda_{\max}$ au delà de son intervalle d'existence, ce qui est une contradiction à sa propre définition. Cela prouve l'énoncé de la deuxième étape.

1. Remarque : Pour tout $(\tau, \xi) \in Z_{\tilde a,\tilde b}(x_1, y_1)$ on exige la *même* longueur $2\tilde a$ de l'intervalle d'existence.

3ème étape. On suppose que $\lambda_{\max}$ est bornée sur $[x_0, I^+)$. On démontre que (3.18) tient par l'absurde : Supposons le contraire de (3.18). Alors il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\delta > 0$ tels que $z_n \in [x_0, I^+)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} z_n = I^+$ et

$$\operatorname{dist}((z_n, \lambda_{\max}(z_n)), \partial D) > \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.20}$$

Puisque $\lambda_{\max}$ est bornée, il existe une sous-suite convergente de $((z_n, \lambda_{\max}(z_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ avec une limite (I^+, λ_∞). Par la deuxième étape, on a que $(I^+, \lambda_\infty) \in \partial D$. Cela est une contradiction à (3.20). La preuve du théorème est complète. □

3.4. **EDO avec paramètres.** Des paramètres dans une EDO peuvent être considérés comme des constantes ou comme des variables. De toute façon, on va s'intéresser comment le comportement des solutions change avec les paramètres.

Exemple 3.20 (Pendule simple)**.** L'angle φ d'un pendule de masse m et longueur l avec accélération due à la pesanteur g va satisfaire les lois Newtoniennes :

$$ml\varphi''(t) = -mg\sin\varphi(t)\,.$$

Évidemment, cette EDO est équivalente à $\varphi''(t) = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t)$. Le côté droit de cette équation dépend des paramètres l, g.

Définition 3.21 (Exigences standards)**.** *Soit $D \subseteq \mathbb{R}^{1+N+M}$ ouvert. Si le côté droit $f : D \to \mathbb{R}^{1+N+M}$ de l'EDO*

$$y'(x) = f(x, y(x), \alpha)$$

est continue sur D et $f(x, y, \alpha)$ est localement lipschitzienne par rapport à y, on va dire que f satisfait les exigences standards.

On considère le PCI avec paramètres

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x), \alpha) \\ y(\tau) & = \xi \end{cases} \tag{3.21}$$

et on va adapter notre notation à cette situation.
Pour α fixe, il existe un intervalle d'existence maximal $I_{\max}(\tau, \xi)$ pour (3.21), et une solution générale $\lambda(\cdot;\tau,\xi) \equiv \lambda_{\max}(\cdot;\tau,\xi)$. Dès lors, on va inclure le paramètre α dans notre notation.

- Intervalle d'existence maximal : $I_{\max}(\tau, \xi, \alpha)$ pour $(\tau, \xi, \alpha) \in D$
- solution générale : $\lambda(\cdot;\tau,\xi,\alpha)$ pour $(\tau, \xi, \alpha) \in D$
- domaine de la solution générale : $\Omega := \{(x, \tau, \xi, \alpha) \in \mathbb{R}^{2+N+M} : (\tau, \xi, \alpha) \in D,\, x \in I_{\max}(\tau, \xi, \alpha)\}$

L'EDO pour la solution générale est

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x;\tau,\xi,\alpha) = f(x, \lambda(x;\tau,\xi,\alpha), \alpha) \quad \forall (x,\tau,\xi,\alpha) \in \Omega\,.$$

La condition initiale est

$$\lambda(\tau,\tau,\xi,\alpha) = \xi \quad \forall (\tau,\xi,\alpha) \in D\,.$$

On a aussi la propriété cocycle :

$$\begin{aligned} I_{\max}(x, \lambda(x;\tau,\xi,\alpha), \alpha) &= I_{\max}(\tau,\xi,\alpha) \quad \forall (x,\tau,\xi,\alpha) \in \Omega, \\ \lambda(x; t, \lambda(t;\tau,\xi,\alpha), \alpha) &= \lambda(x;\tau,\xi,\alpha) \quad \forall (\tau,\xi,\alpha) \in D,\, \forall x, t \in I_{\max}(\tau,\xi,\alpha)\,. \end{aligned}$$

Cette formule pour λ exprime le fait que l'on peut obtenir la même solution comme fonction de x en partant de différents conditions initiales.

Lemme 3.22 (Réécriture d'un PCI avec paramètres)**.** *Avec les exigences standards pour $f : D \to \mathbb{R}^N$ le PCI N-dimensionel* (3.21) *est équivalent au PCI $N+M$-dimensionel*

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x), \beta(x)) \\ \beta'(x) &= 0 \\ y(\tau) &= \xi \\ \beta(\tau) &= \alpha \end{cases} \tag{3.22}$$

au sens suivant : Si μ est une solution pour (3.21)*, alors (μ, α) est une solution pour* (3.22)*. Si (μ_1, μ_2) est une solution pour* (3.22)*, alors μ_2 est constante et μ_1 est une solution pour* (3.21) *avec $\alpha = \mu_2$.*

Démonstration. La deuxième et la quatrième équation dans (3.22) sont indépendentes de y, et alors $\beta(x) = \alpha$ est la solution unique de ces deux équations. En insérant dans la première et la troisième équation de (3.22) on obtient (3.21). $\square$

Remarque 3.23. Si la fonction $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisfait les exigences standards, et on définit $g : D \to \mathbb{R}^{N+M}$, $(x, y, \beta) \mapsto (f(x, y, \beta), 0)$, ce qui est le côté droit de (3.22), *n'est pas localement lipschitzienne* (puisque $f(x, y, \beta)$ n'est pas lipschitzienne par rapport à β). Alors ce PCI ne satisfait pas les conditions des théorèmes de ce chapitre. Pourtant, il existe une solution générale pour (3.22) : La fonction

$$(x, \tau, (\xi, \alpha)) \mapsto (\lambda(x; \tau, \xi, \alpha), \alpha)\,,$$

où λ est la solution générale de (3.21). Le fait que c'est une solution et l'unicité suivent du lemme, et la maximalité suit du comportement au bord, qui correspond à celui de λ.

3.5. **Continuité de la solution générale.** Une question élémentaire par rapport au comportement des solutions en fonction des paramètres est la continuité de la solution.

Exemple 3.24. Considérons le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= \frac{1}{x^2+\alpha^2} \\ y(\tau) &= \xi \end{cases}$$

sur le domaine $D = \{(\tau, \xi, \alpha) : (\tau, \alpha) \neq 0\}$. Par une intégration de l'équation on obtient la solution générale

$$\lambda(x; \tau, \xi, \alpha) = \begin{cases} \xi + \frac{1}{\alpha}\left(\arctan\frac{x}{\alpha} - \arctan\frac{\tau}{\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \xi - \frac{1}{x} + \frac{1}{\tau} & \text{si } \alpha = 0\,. \end{cases}$$

Les intervalles d'existences maximals sont donnés par

$$I_{\max}(\tau, \xi, \alpha) = \begin{cases} (-\infty, \infty) & \text{si } \alpha = 0 \\ (-\infty, 0) & \text{si } \alpha \neq 0 \text{ et } \tau < 0 \\ (0, \infty) & \text{si } \alpha \neq 0 \text{ et } \tau > 0 \end{cases}$$

Il n'est pas évident à partir de la formule pour λ que la solution générale est continue en $\alpha = 0$. On observe aussi qu'il y a un saut de l'intervalle d'existence maximal à cette valeur. Pourtant, λ est continue, comme on verra dans le théorème suivant.

Théorème 3.25 (Continuité de la solution générale)**.** *Supposons que $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisfait les exigences standards pour le PCI* (3.21)*. Alors l'ensemble*

$$\Omega = \{(x, \tau, \xi, \alpha) \in \mathbb{R}^{2+N+M} : (\tau, \xi, \alpha) \in D,\ x \in I_{\max}(\tau, \xi, \alpha)\}$$

est ouvert, et la solution générale $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}^N$ du PCI (3.21) *est continue.*

Démonstration. On utilise le Lemme 3.22 sur la réécriture des PCI avec paramètres :

$$\left\{\begin{array}{ll} y'(x) & = f(x, y(x), \alpha) \\ y(\tau) & = \xi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z'(x) & = g(x, z(x)) \\ z(\tau) & = \zeta \end{array}\right. \tag{3.23}$$

avec $z(x) = (y(x), \alpha)$, $g(x, (y, \alpha)) = (f(x, y, \alpha), 0)$, $\zeta = (\xi, \alpha)$. On va dénoter la solution générale pour (3.23) par $\mu(x; \tau, \zeta)$ (voir la remarque après le lemme).
Notation : Pour $a, b > 0$ on va écrire :

$$Z_{a,b}(x, \eta) = \left\{(x', \eta') \in \mathbb{R}^{1+N+M} : |x - x'| \leq a,\ \|\eta - \eta'\| \leq b\right\}.$$

1ère étape : On va prouver que pour tout $(\tau_0, \zeta_0) \in D$ il existe $a, b > 0$ tels que

$$Z_{a,b}(\tau_0, \zeta_0) \subset Z_{a,2b}(\tau_0, \zeta_0) \subset D,$$

et pour tout $(\tau, \zeta) \in Z_{a,b}(\tau_0, \zeta_0)$ on a que $[\tau_0 - a, \tau_0 + a] \subset I_{\max}(\tau, \zeta)$ et

$$\|\mu(x; \tau, \zeta) - \zeta_0\| \leq 2b \quad \forall x \in [\tau_0 - a, \tau_0 + a]. \tag{3.24}$$

Démonstration : On choisit $\tilde{a}, b > 0$ tels que $Z_{\tilde{a},2b}(\tau_0, \zeta_0) \subset D$, et on pose

$$M := \max_{(\tau,\zeta) \in Z_{\tilde{a},2b}(\tau_0,\zeta_0)} \|g(\tau, \zeta)\| + 1$$

$$a := \min\left(\frac{b}{2M}, \tilde{a}\right).$$

Preuve de (3.24) par l'absurde : Supposons que $(x_1, \tau, \zeta) \in [\tau_0 - a, \tau_0 + a] \times Z_{a,2b}(\tau_0, \zeta_0)$ avec $\|\mu(x_1; \tau, \zeta) - \zeta_0\| \geq 2b$. Sans perte de généralité on peut supposer $x_1 > \tau$. Par la continuité de $\mu(\cdot; \tau, \zeta)$ et $\|\mu(\tau; \tau, \zeta) - \zeta_0\| = \|\zeta - \zeta_0\| \leq b < 2b$ il existe $x_2 \in (\tau, x_1)$ tel que $\|\mu(x_2; \tau, \zeta) - \zeta_0\| = 2b$ et

$$\|\mu(x; \tau, \zeta) - \zeta_0\| < 2b \quad \forall x \in (\tau, x_2).$$

Alors par la définition de M on a que

$$\|g(x, \mu(x; \tau, \zeta))\| < M \quad \forall x \in (\tau, x_2).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 2b = \|\mu(x_2, \tau, \zeta) - \zeta_0\| &\leq \|\mu(x_2, \tau, \zeta) - \zeta\| + \|\zeta - \zeta_0\| \\ &\leq \left\|\int_\tau^{x_2} g(x, \mu(x; \tau, \zeta))\mathrm{d}x\right\| + \|\zeta - \zeta_0\| \\ &< 2aM + b \\ &\leq 2b. \end{aligned}$$

Cette contradiction prouve (3.24).
2ème étape : Continuité dans un voisinage de la diagonale $x = \tau$. On va prouver que pour tout (τ_0, ζ_0) il existe $a, b > 0$ tels que

$$\hat{Z}_{a,b}(\tau_0, \zeta_0) := [\tau_0 - a, \tau_0 + a] \times Z_{a,b}(\tau_0, \zeta_0) \subset \Omega,$$

et tels que μ est continue sur $\hat{Z}_{a,b}(\tau_0, \zeta_0)$.
Par la 1ère étape il existe $a, b > 0$ tels que

$$\|\mu(x; \tau, \zeta) - \zeta_0\| < 2b \quad \forall (x, \tau, \zeta) \in \hat{Z}_{a,b}(\tau_0, \zeta_0). \tag{3.25}$$

De plus pour tout $x, x' \in [\tau_0 - a, \tau_0 + a]$ et pout tout $(\tau, \zeta) \in Z_{a,b}(\tau_0, \zeta_0)$ on a que :

$$\|\mu(x;\tau,\zeta)-\mu(x';\tau,\zeta)\| = \left\|\int_{x'}^{x} g(t,\mu(t;\tau,\zeta))\mathrm{d}t\right\| \\ \leq |x-x'|M\,, \tag{3.26}$$

où on a choisi M comme dans la 1ère étape. On prouve par l'absurde que μ est continue sur $\hat{Z}_{a,b}(\tau_0,\zeta_0)$: On suppose qu'il existe $(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\zeta})\in\hat{Z}_{a,b}(\tau_0,\zeta_0)$, une suite $((x_k,\tau_k,\zeta_k))_{k\in\mathbb{N}}$ avec $(x_k,\tau_k,\zeta_k)\to(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\zeta})$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$\|\mu(x_k,\tau_k,\zeta_k)-\mu(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\zeta})\|>\varepsilon \quad \forall k\in\mathbb{N}\,. \tag{3.27}$$

La suite de fonctions $(\mu(\cdot;\tau_k,\zeta_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par (3.25), et par (3.26) elle est équicontinue. Par le Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 3.6) il existe une sous-suite (que l'on va toujours dénoter par $\mu(\cdot;\tau_k,\zeta_k)$) et une fonction $\Lambda\in C^0([\tau_0-a,\tau_0+a];\mathbb{R}^{N+M})$ telle que

$$\mu(\cdot;\tau_k,\zeta_k)\to\Lambda \qquad \text{uniformément sur } [\tau_0-a,\tau_0+a]\,. \tag{3.28}$$

Par l'EDO pour μ on a

$$\mu(x;\tau_k,\zeta_k)=\zeta_k+\int_{\tau_k}^{x} g(t,\mu(t;\tau_k,\zeta_k))\mathrm{d}t \quad \forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in[\tau-a,\tau+a]\,.$$

Par (3.28) on peut passer à la limite $k\to\infty$ et on obtient

$$\Lambda(x)=\bar{\zeta}+\int_{\bar{\tau}}^{x} g(t,\Lambda(t))\mathrm{d}t \quad \forall x\in[\tau-a,\tau+a]\,.$$

Cela est précisément le PCI qui détermine $\mu(\cdot;\bar{\tau},\bar{\zeta})$ uniquement, sous forme d'équation intégrale. Alors on a que $\Lambda=\mu(\cdot;\bar{\tau},\bar{\zeta})$, et alors

$$\mu(\cdot;\tau_k,\zeta_k)\to\mu(\cdot;\bar{\tau},\bar{\zeta}) \qquad \text{uniformément sur } [\tau_0-a,\tau_0+a]\,. \tag{3.29}$$

On choisit $K>0$ tel que pour tout $k>K$ on a que

$$|x_k-\bar{x}|<\varepsilon/(2M) \qquad \text{et} \qquad \|\mu(x;\tau_k,\zeta_k)-\mu(x;\bar{\tau},\bar{\zeta})\|<\varepsilon/2 \quad \forall x\in[\tau_0-a,\tau_0+a]\,.$$

La deuxième condition peut être satisfaite par (3.29). Pour un tel k on a

$$\begin{aligned}\|\mu(x_k;\tau_k,\zeta_k)-\mu(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\zeta})\| &\leq \|\mu(x_k;\tau_k,\zeta_k)-\mu(x_k,\bar{\tau},\bar{\zeta})+\mu(x_k,\bar{\tau},\bar{\zeta})-\mu(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\zeta})\| \\ &\leq \|\mu(x_k;\tau_k,\zeta_k)-\mu(x_k,\bar{\tau},\bar{\zeta})\|+\|\mu(x_k,\bar{\tau},\bar{\zeta})-\mu(\bar{x},\bar{\tau},\bar{\zeta})\| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\,,\end{aligned}$$

en contradiction à (3.27). Cela prouve que μ est continue sur $\hat{Z}_{a,b}(\tau_0,\zeta_0)$.
3ème étape : Continuité loin de la diagonale. Soit $\mathcal{U}$ le système d'ouverts sur lesquels μ est continue. On pose

$$V=\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\,,$$

et on doit démontrer que $V=\Omega$. Preuve par l'absurde : Supposons que $(x_0,\tau_0,\zeta_0)\in\Omega\setminus V$. Sans perte de généralité on peut supposer que $x_0>\tau_0$. Par la 2ème étape, on a que $(\tau_0,\tau_0,\zeta_0)\in V$. Puisque V est ouvert, il existe $x_1\in(\tau_0,x_0]$ tel que

$$(x_1,\tau_0,\zeta_0)\notin V \tag{3.30}$$

et

$$(x,\tau_0,\zeta_0)\in V \quad \forall x\in[\tau_0,x_1)\,.$$

On pose $\zeta_1 := \mu(x_1; \tau_0, \zeta_0)$. Par la 2ème étape il existe $a, b > 0$ tels que μ est continue sur $\hat{Z}_{a,b}(x_1, \zeta_1) \subset \Omega$. On choisit $x_2 \in (x_1 - a, x_1)$ tel que

$$\|\mu(x_2; \tau_0, \zeta_0) - \zeta_1\| < b/2\,. \tag{3.31}$$

D'après notre choix de x_2, μ est continue en (x_2, τ_0, ζ_0), et même dans un voisinage de ce point. En particulier, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\mu(x_2; \cdot, \cdot) \text{ est continue sur } Z_{\alpha,\beta}(\tau_0, \zeta_0)\,. \tag{3.32}$$

De plus, par la continuité de μ, on peut choisir α, β tels que

$$\|\mu(x_2; \tau, \zeta) - \mu(x_2; \tau_0, \zeta_0)\| < b/2 \quad \forall (\tau, \zeta) \in Z_{\alpha,\beta}(\tau_0, \zeta_0)\,. \tag{3.33}$$

Alors pour $x \in [x_1 - a, x_1 + a]$ et $(\tau, \zeta) \in Z_{\alpha,\beta}(\tau_0, \zeta_0)$, on a par le choix de x_2 et les inégalités (3.31), (3.33) que

$$(x, x_2, \mu(x_2; \tau, \zeta)) \in \hat{Z}_{a,b}(x_1, \zeta_1) \subset \Omega\,.$$

Alors on a la propriété de cocycle de la solution générale

$$\mu(x; \tau, \zeta) = \mu(x; x_2, \mu(x_2; \tau, \zeta)) \quad \forall x \in [x_1 - a, x_1 + a], \forall (\tau, \zeta) \in Z_{\alpha,\beta}(\tau_0, \zeta_0)\,.$$

Le côté droit de cette équation peut être considéré comme la composition des fonctions

$$\mu(x_2; \cdot, \cdot) : Z_{\alpha,\beta}(\tau_0, \zeta_0) \to B_b(\zeta_1)$$

(la restriction de l'image suit de (3.31) et (3.33)) et

$$\mu(\cdot; x_2, \cdot) : [x_1 - a, x_1 + a] \times B_b(\zeta_1) \to \mathbb{R}^{N+M}\,.$$

On voit que la composition des ces fonctions est continue en (x_1, τ_0, ζ_0) et alors on a une contradiction à (3.30). Cela prouve $\Omega = V$, et complète la preuve du théorème. $\square$

Dans le corollaire suivant, on va considérer la dépendence de la solution générale par rapport aux valeurs initiales :

Corollaire 3.26. *Pour le PCI avec paramètres*

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x), \alpha) \\ y(\tau) &= \xi\,, \end{cases}$$

on suppose que $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisfasse les exigences standard. Soit $(x_0, y_0, \alpha_0) \in D$, et $[a, b] \subset I_{\max}(x_0, y_0, \alpha_0)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(x_0, y_0, \alpha_0, a, b, \varepsilon)$ tel que

$$\|\lambda(x; x_0, \xi, \alpha_0) - \lambda(x; x_0, y_0, \alpha_0)\| < \varepsilon$$

pour tout $x \in [a, b]$ si $\|\xi - y_0\| < \delta$.

Démonstration. Exercice. $\square$

3.6. **Différentiablité de la solution générale.** Si le côté droit de l'EDO satisfait nos exigences standard, en général, la solution ne peut pas être différentiable (voir TP). Si le côté droit est continuement différentiable, on verra que cette propriété se transfère à la solution générale.

Dans la preuve, on aura besoin de la version suivante du Théorème des valeurs intermédiaires.

Lemme 3.27 (Lemme de Hadamard)**.** *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ convex, et $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$. Soit $G \in C^0(U;\mathbb{R}^{n\times m})$ définie par*

$$G(y,z) = \int_0^1 \nabla\varphi(ty + (1-t)z)\mathrm{d}t\,.$$

Alors pour tout $y, z \in U$ on a que

$$\varphi(y) - \varphi(z) = G(y,z)\cdot(y-z)\,.$$

Démonstration. On pose $\tilde{\varphi}(t) := \varphi(ty + (1-t)z)$. Alors on a que

$$\begin{aligned}
\varphi(y) - \varphi(z) &= \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0)\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \nabla\varphi(ty + (1-t)z)\cdot(y-z)\mathrm{d}t\\
&= G(y,z)\cdot(y-z)\,.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.28 (Différentiabilité de la solution générale)**.** *Soit $D \subseteq \mathbb{R}^{1+N+M}$ et $f \in C^1(D;\mathbb{R}^N)$. Alors la solution générale $\lambda(x;\tau,\xi,\alpha)$ du PCI*

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x), \alpha)\\ y(\tau) &= \xi \end{cases}$$

est continuement différentiable sur son domaine Ω. De plus, les dérivées partielles $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial\tau}$, $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial\xi_i}$, $i = 1,\dots,N$, $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial\alpha_i}$, $i = 1,\dots,M$ existent et sont continues. Pour ces dérivées partielles, les premières et secondes dérivées peuvent être échangées.

Démonstration. On utilise encore une fois la réécriture du PCI avec paramètres comme un PCI sans paramètres. Cela veut dire que l'on considère le PCI

$$\begin{cases} z'(x) &= g(x, z(x))\\ g(\tau) &= \zeta \end{cases}$$

avec $z(x) = (y(x), \alpha)$, $g(x, z(x)) = (f(x, y(x), \alpha), 0)$, $\zeta = (\xi, \alpha)$.
1ère étapae : Différentiablité partielle par rapport à x. Par l'EDO on a

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}(x;\tau,\zeta) = g(x, \mu(x;\tau,\zeta))\,.$$

Cela démontre l'existence de la derivée partielle par rapport à x. Par le théorème précédent, $\mu(x;\tau,\zeta)$ est continue, et alors la deérivée partielle par rapport à x est continue aussi.
2ème étape : Différentiabilité partielle par rapport à ζ. Pour $h \in \mathbb{R}$ et $i = 1,\dots,N+M$ on pose

$$\Delta(x;\tau,\zeta,h) := \mu(x;\tau,\zeta + he_i) - \mu(x;\tau,\zeta)\,.$$

Ici on permet seulement les valeurs pour h qui assurent que l'argument du côté droit est contenu dans le domaine. Avec cette définition on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta}{\partial x}(x;\tau,\zeta,h) &= \frac{\partial\mu}{\partial x}(x;\tau,\zeta + he_i) - \frac{\partial\mu}{\partial x}(x;\tau,\zeta)\\
&= g(x, \mu(x;\tau,\zeta + he_i)) - g(x;\mu(x;\tau,\zeta))\,.
\end{aligned}$$

On peut appliquer le Lemme 3.27, et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta}{\partial x}(x;\tau,\zeta,h) &= G(x,\mu(x;\tau,\zeta+he_i),\mu(x;\tau,\zeta))\cdot(\mu(x;\tau,\zeta+he_i)-\mu(x;\tau,\zeta))\\ &= \Phi(x;\tau,\zeta,h)\Delta(x;\tau,\zeta,h)\,,\end{aligned}\tag{3.34}$$

où on a utilsé la notation suivante :

$$\Phi(x;\tau,\zeta,h) := G(x,\mu(x;\tau,\zeta+he_i),\mu(x;\tau,\zeta))$$

avec

$$G(x,y,\tilde{y}) = \int_0^1 \nabla_z g(x,ty+(1-t\tilde{y}))\mathrm{d}t\,.$$

Dans cette dernière équation, $\nabla_z g$ est le gradient de $g(x,z)$ par rapport à la deuxième variable (ce qui veut dire, une matrice $(N+M)\times(N+M)$).
On constate que

$$\begin{aligned}\Delta(\tau;\tau,\zeta,h) &= \mu(\tau;\tau,\zeta+he_i)-\mu(\tau;\tau,\zeta)\\ &= \zeta+he_i-\zeta\\ &= he_i\,.\end{aligned}\tag{3.35}$$

On déduit de (3.34) et (3.35) que $\Delta(x;\tau,\zeta,h)$ est la solution unique du PCI linéaire (!)

$$\begin{cases} u'(x) &= \Phi(x;\tau,\zeta,h)u(x)\\ u(\tau) &= he_i\,.\end{cases}$$

Par la linéarité, on peut écrire $\Delta(x;\tau,\zeta,h) = hr(x;\tau,\zeta,h)$, où $r(x;\tau,\zeta,h)$ est la solution du PCI

$$\begin{cases} u'(x) &= \Phi(x;\tau,\zeta,h)u(x)\\ u(\tau) &= e_i\,.\end{cases}$$

La solution r de ce PCI est continue par rapport à toutes variables d'après le théorème précédent. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial\zeta_i} &= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta(x;\tau,\zeta,h)}{h}\\ &= r(x;\tau,\zeta,0)\,.\end{aligned}$$

En résumant, on a démontré que la derivée partielle de μ par rapport à ζ_i existe et est continue.
3ème étape : Différentiabilité par rapport à τ. Pour $h\in\mathbb{R}$ on définit

$$\tilde{\Delta}(x;\tau,\zeta,h) := \mu(x;\tau+h,\zeta)-\mu(x;\tau,\zeta)\,.$$

Avec cela on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial x}(x;\tau,\zeta,h) &= \frac{\partial\mu}{\partial x}(x;\tau+h,\zeta)-\frac{\partial\mu}{\partial x}(x;\tau,\zeta)\\ &= g(x,\mu(x;\tau+h,\zeta))-g(x;\mu(x;\tau,\zeta))\,.\end{aligned}$$

Comme dans l'étape précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial x}(x;\tau,\zeta,h) &= G(x,\mu(x;\tau+h,\zeta),\mu(x;\tau,\zeta))\cdot(\mu(x;\tau+h,\zeta)-\mu(x;\tau,\zeta))\\ &= \tilde{\Phi}(x;\tau,\zeta,h)\Delta(x;\tau,\zeta,h)\,,\end{aligned}\tag{3.36}$$

où

$$\tilde{\Phi}(x;\tau,\zeta,h) := G(x,\mu(x;\tau+h,\zeta),\mu(x;\tau,\zeta))\,,$$

avec G comme dans la 2ème étape. De plus on calcule

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(\tau;\tau,\zeta,h) &= \mu(\tau;\tau+h,\zeta)-\mu(\tau;\tau,\zeta)\\ &= \mu(\tau;\tau+h,\zeta)-\zeta\\ &= \mu(\tau;\tau+h,\zeta)-\mu(\tau+h;\tau+h,\zeta)\\ &= \int_{\tau+h}^{\tau} g(x,\mu(x;\tau+h,\zeta))\mathrm{d}x \\ &= -h\underbrace{\int_0^1 g(\tau+th,\mu(\tau+th;\tau+h,\zeta))\mathrm{d}t}_{\tilde{e}(\tau,\zeta,h)}\,.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Par (3.36) et (3.37) on déduit que $\tilde{\Delta}(x;\tau,\zeta,h)$ est la solution unique du PCI linéaire

$$\begin{cases} u'(x) &= \tilde{\Phi}(x;\tau,\zeta,h)u(x)\\ u(\tau) &= -h\tilde{e}(\tau,\zeta,h)\,.\end{cases}$$

Par la linéarité de l'EDO, on a que $\tilde{\Delta}(x;\tau,\zeta,h)=h\tilde{r}(x;\tau,\zeta,h)$, où $\tilde{r}(x;\tau,\zeta,h)$ dénote la solution du PCI

$$\begin{cases} u'(x) &= \tilde{\Phi}(x;\tau,\zeta,h)u(x)\\ u(\tau) &= -\tilde{e}(\tau,\zeta,h)\,.\end{cases}$$

La solution $\tilde{r}$ est continue par le théorème précédent, et alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu}{\partial\tau} &= \lim_{h\to0}\frac{\tilde{\Delta}(x;\tau,\zeta,h)}{h}\\ &= \tilde{r}(x;\tau,\zeta,0)\,.\end{aligned}$$

En résumant, on a démontré que la dérivée partielle de μ par rapport à τ existe et est continue.

4ème étape : Secondes dérivées partielles. Par les étapes 1-3 on a que μ possède des dérivées partielles par rapport à tous ses arguments. Cela est suffisant pour déduire $\mu\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^{N+M})$ (voir le cours Analyse II). Pour prouver l'énoncé concernant les deuxièmes dérivées partielles, on observe que

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}(x;\tau,\zeta)=g(x,\mu(x;\tau,\zeta))$$

où le côté droit est une composition de fonctions dans C^1, et alors les dérivées partielles par rapport à τ,ζ existent. La preuve du fait que l'on peut échanger l'ordre des dérivées est un exercice. □

Exercices.

(1) À l'aide de l'exemple

$$\begin{cases} y'(x) &= (y^2(x))^{1/3}\\ y(0) &= 0\end{cases}\,,$$

démontrez que toute solution d'un PCI ne peut pas être approximée par des lignes polygonales d'Euler.

Indication : Voir l'exemple 2.4.

(2) (i) Soient (X, d) un espace métrique complet, $\lambda \in (0,1)$ et $T : X \to X$ continue avec

$$d(T(y_1), T(y_2)) \leq \lambda d(y_1, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in X\,. \tag{3.38}$$

Prouvez qu'il existe un unique point fixe $\bar{y}$ de T, c'est à dire, une solution unique de l'équation $T\bar{y} = \bar{y}$.

(ii) Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$, $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^N)$ (globalement) Lipschitz par rapport à la seconde variable y. Prouvez qu'il existe $x_1 \in I$ et $\lambda \in (0,1)$ tels que, avec

$$X = \left(C^0([x_0, x_1]; \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{C^0}\right)\,,$$

l'application $T : X \to X$, définie par

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\mathrm{d}x \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$

satisfait l'équation (5.1).

(iii) Déduisez de (i) et (ii) l'existence d'une solution unique du PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

sur $[x_0, x_1]$.

(3) Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$. La fonction f est nommée lipschitzienne s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|f(x) - f(x')\| \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in U\,.$$

(i) Soient un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que $K \subset U$ et $g \in C^1(U)$. Prouvez que $g|_K$ (la restriction de g à K) est lipschitzienne.

(ii) Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : U \to \mathbb{R}$ lipschitziennes et bornées. Prouvez que fg est lipschitzienne.

(iii) Donnez un exemple d'une fonction $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ qui est différentiable et bornée mais non pas lipschitzienne. (Prouvez que votre exemple n'est pas lipschitzienne.)

(4) (i) Soient un compact $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$, $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N)$, $(x_0, y_0) \in D$, I un intervalle avec $x_0 \in I$, et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des itérées de Picard pour le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0\,. \end{cases}$$

Décidez si l'énoncé suivant est vrai : *Si $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en chaque $x \in I$, alors la limite est une solution du PCI sur I.*

(ii) Soient $D := [-1,1]^2$ et

$$g(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0, y \leq 0 \\ 2x - 4\frac{y}{x} & \text{si } 0 < x < y^2 \\ -2x & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Prouvez que $g(x,y)$ est continue, mais non pas localement lipschitzienne par rapport à y.

(iii) Calculez les itérées de Picard pour le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = g(x, y(x)) \\ y(0) & = 0 \end{cases}$$

sur $[-1, 1]$, et démontrez qu'il existe des sous-suites convergentes, dont la limite n'est pas une solution du PCI.

(5) Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Démontrez que le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = \sin(x\, y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

possède une solution unique sur $\mathbb{R}$.

(6) Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est lipschitzienne sur $[-a, a] \times \mathbb{R}$. Démontrez que le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

possède une solution unique sur $\mathbb{R}$.

(7) Soient un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^0(D)$ localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable y, $(x_0, y_0) \in D$ et $\lambda_{\max}$ la solution maximale pour l'EDO $y'(x) = f(x, y(x))$ sur l'intervalle d'existence maximal $I_{\max} = (I^-, I^+)$ avec $I^+ < \infty$ et condition initiale $\lambda_{\max}(x_0) = y_0$.

Supposons que $\lambda_{\max}$ ne soit pas bornée sur $[x_0, I^+)$.

(i) Décidez (avec preuve) si l'énoncé suivant est vrai :
La limite $\lim_{x\to I^+} \lambda_{\max}(x)$ *existe comme élément de* $\{\pm\infty\}$*, c'est à dire on a*

$$\textit{ou} \lim_{x\to I^+} \lambda_{\max}(x) = +\infty, \qquad \textit{ou} \lim_{x\to I^+} \lambda_{\max}(x) = -\infty\,.$$

(ii) Par rapport á (i), on introduit l'hypothèse additionelle que $f(x, y)$ ne dépend pas de x. Décidez de nouveau si l'énconcé ci-dessus est vrai.

(8) (i) Déterminez pour chaque $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ la solution maximale et l'intervalle d'existence maximal du PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = x^2 y^2(x) \\ y(x_0) & = y_0\,. \end{cases}$$

(ii) Décidez si l'énoncé suivant est vrai ou faux :
Il existe un ouvert $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$, $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N)$ avec $f(x, y)$ localement lipschitzienne par rapport à y, et $(x_0, y_0) \in D$ tels que la solution maximale $\lambda_{\max}$ et l'intervalle d'existence maximal $I_{\max} = (I^-, I^+)$ pour le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

satisfont (toutes) les propriétés suivantes :
a) $I^+ = +\infty$
b) $\lambda_{\max}$ n'est pas bornée sur $[x_0, I^+)$
c) $\lim_{x\to I^+} \operatorname{dist}((x, \lambda_{\max}(x)), \partial D) = 0$.

(9) Soient $\rho > 0$, $f \in C^0(\mathbb{R}^{1+N};\mathbb{R}^N)$ telle que $f(x,y)$ est lipschitzienne par rapport à y et $f = 0$ sur l'ensemble

$$M_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{1+N} : \|y\| > \rho\}\,.$$

Prouvez que l'intervalle d'existence maximal du PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x,y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

est égal à $\mathbb{R}$.

(10) Considérons un pendule de masse m, longueur l avec accélération due à la pesanteur g. On suppose l'intensité de la force de friction proportionnelle à la vitesse du pendule, avec coéfficient μ. On écarte la masse de sa position d'équilibre d'un angle α. Alors α est déterminé par le PCI

$$\begin{cases} \alpha''(t) = -\dfrac{\mu}{m}\alpha'(t) - \dfrac{g}{l}\sin\alpha(t) \\ \alpha'(t_0) = \alpha_1 \\ \alpha(t_0) = \alpha_0\,. \end{cases}$$

Démontrez que ce problème possède une solution sur $\mathbb{R}$ pour tout $(t_0,\alpha_0,\alpha_1) \in \mathbb{R}^3$.

(11) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C^1(\Omega)$ tels que pour $i \in \{2,\ldots n\}$, les dérivées partielles

$$\partial_{x_i}\left(\partial_{x_1} f(x)\right)$$

sont des fonctions continues. Démontrer que les dérivées $\partial_{x_1}\left(\partial_{x_i} f(x)\right)$ existent, et que

$$\partial_{x_1}\left(\partial_{x_i} f(x)\right) = \partial_{x_i}\left(\partial_{x_1} f(x)\right)\,.$$

(12) (i) Considérez l'EDO

$$y'(x) = |y(x)|\,,$$

et démontrez que la solution générale n'est pas différentiable.

(ii) Pour quel $k \in \mathbb{N}$ la solution générale de

$$y'(x) = |x|$$

est-elle dans C^k ?

(13) Calculez les dérivées partielles $\partial_\tau\lambda(x;\tau,\xi,\alpha)$, $\partial_\xi\lambda(x;\tau,\xi,\alpha)$, $\partial_\alpha\lambda(x;\tau,\xi,\alpha)$ de la solution générale de l'EDO

$$y'(x) = \sin\left(x\,\alpha\,y(x)\right)\,.$$

Indication : Ne pas essayer d'obtenir une expression explicite pour $\lambda(x;\tau,\xi,\alpha)$, mais la supposer donnée.

(14) Soient un ouvert $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$, $f \in C^1(D;\mathbb{R}^N)$, et $\lambda(x;\tau,\xi)$ la solution générale de l'EDO $y'(x) = f(x,y(x))$. Soient $(\bar\tau,\bar\xi) \in D$, $\zeta \in \mathbb{R}^N$. Déterminez la solution du PCI

$$\begin{cases} z'(x) & = \nabla_y f(x,\lambda(x;\bar\tau,\bar\xi))z(x) \\ z(\bar\tau) & = \zeta\,, \end{cases}$$

où $\nabla_y f(x,y) = (\partial_{y_1} f(x,y),\ldots,\partial_{y_N} f(x,y))$ dénote la dérivée de f par rapport à la seconde variable.

(15) Soient $D = (a, b) \times \mathbb{R}^N$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $(x_0, y_0) \in D$, $f \in C^0(D; \mathbb{R}^N)$ telle que $f(x, y)$ est localement lipschitzienne par rapport à y. De plus, on va supposer que f soit linéairement bornée, c'est à dire il existe $\rho, \sigma \in C^0(a, b)$ tels que

$$\|f(x, y)\| \leq \rho(x)\|y\| + \sigma(x) \quad \forall (x, y) \in D\,.$$

Démontrez que l'intervalle d'existence maximal pour le PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = f(x, y(x)) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

est égal à (a, b). (Indication : Utilisez le théorème 3.19 et le lemme de Gronwall.)

4. Systèmes linéaires

Dans le chapitre présent on va étudier des PCI sous la forme

$$\begin{cases} y'(x) &= A(x)y(x) + g(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

sur des intervalles $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, des fonctions $A \in C^0(I; \mathbb{R}^{N\times N})$ avec des valeurs dans les matrices $N \times N$, $g \in C^0(I; \mathbb{R}^N)$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$.

Théorème 4.1. *Le PCI* (4.1) *possède une solution unique sur* I.

Démonstration. On remarque que le côté droit est localement lipschitzien par rapport à y. En effet, soit $(x_1, y_1) \in D := I \times \mathbb{R}^N$, et U un voisinage borné de (x_1, y_1) avec $\overline{U} \subset D$. Alors $\overline{U}$ est compact, et on a que

$$\begin{aligned} \|(A(x)y + g(x)) - (A(x)\tilde{y} + g(x))\| &= \|A(x)(y - \tilde{y})\| \\ &\leq \left(\max_{(x,y)\in\overline{U}} \|A(x)\| \right) \|y - \tilde{y}\| . \end{aligned}$$

Cela démontre que le côté droit est lipschitzien. On prouve l'énoncé du théorème par l'absurde : Supposons $I_{\max} = (I^-, I^+) \subsetneq I$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $I^+ < b$. Par le théorème 3.19 on a que $\lambda_{\max}$ n'est pas bornée sur $[x_0, I^+)$. Cela mène à une contradiction, comme on va démontrer à l'aide du lemme suivant :

Lemme 4.2 (Gronwall). *Soit* $J = [x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ *avec* $x_1 < x_2$, $c, d \in \mathbb{R}$ *avec* $d \geq 0$, *et* $z \in C^0(J)$, *tels que*

$$z(x) \leq c + d \int_{x_1}^{x} z(t)\mathrm{d}t \quad \forall x \in J . \tag{4.2}$$

Alors on a que

$$z(x) \leq c\mathrm{e}^{d(x-x_1)} \quad \forall x \in J .$$

Démonstration. Soient $\varphi, \psi : J \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi(x) = z(x)\mathrm{e}^{-d(x-x_1)}$ et

$$\psi(x) = c\mathrm{e}^{-d(x-x_1)} + d \int_{x_1}^{x} \varphi(t)\mathrm{e}^{d(t-x)}\mathrm{d}t .$$

Alors l'inégalité (4.2) est équivalente à $\varphi(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in J$, et on doit démontrer $\varphi(x) \leq c$ pour tout $x \in J$. Évidemment, on a que $\psi(x_1) = c$. Or,

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= -cd\mathrm{e}^{-d(x-x_1)} + d\varphi(x) - d^2 \int_{x_1}^{x} \varphi(t)\mathrm{e}^{d(t-x)}\mathrm{d}t \\ &= d(\varphi(x) - \psi(x)) \leq 0 . \end{aligned}$$

On en déduit $\varphi(x) \leq \psi(x) \leq c$ pour tout $x \in J$. □

On continue la preuve du théorème : Par le Théorème 3.4, nous avons que

$$\lambda_{\max}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)\lambda_{\max}(t) + g(t))\, \mathrm{d}t .$$

On va condidérer la norme de cette équation et utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\|\lambda_{\max}(x)\| &\leq \|y_0\| + \left\| \int_{x_0}^{x} A(t)\lambda_{\max}(t)\mathrm{d}t \right\| + \left\| \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \left(\|y_0\| + \left(\max_{t\in[x_0,I^+]} \|g(t)\| \right) |I^+ - x_0| \right) + \left(\max_{t\in[x_0,I^+]} \|A(t)\| \right) \int_{x_0}^{x} \|\lambda_{\max}(t)\|\mathrm{d}t \,.
\end{aligned}$$

On applique le Lemme 4.2 : Avec $z(x) = \|\lambda_{\max}(x)\|$, $c = \|y_0\| + \left(\max_{t\in[x_0,I^+]} \|g(t)\|\right) |I^+ - x_0|$ et $d = \max_{t\in[x_0,I^+]} \|A(t)\|$ on obtient

$$\|\lambda_{\max}(x)\| \leq c\mathrm{e}^{d(x-x_0)} \quad \forall x \in [x_0, I^+)\,.$$

Cela est une contradiction à notre hypothèse que $\lambda_{\max}$ ne soit pas bornée sur $[x_0, I^+)$. Ceci complète la preuve. $\square$

Remarque 4.3. Une preuve alternative (sans le Théorème 3.19) consiste en démontrant que les itérées de Picard convergent sur I.

4.1. **Structure algébrique de l'espace des solutions.** Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $A \in C^0(I; \mathbb{R}^{N\times N})$.
Notation : Pour tout $g \in C^0(I; \mathbb{R}^N)$ le PCI (4.1) possède une solution unique $\lambda_g(\cdot; x_0, y_0)$. (Dans ce sous-chapitre, on ne va pas utiliser la notation $\lambda_{\max}$ car nous voudrions distinguer les solutions pour des côtés droits différents. L'espace des solutions pour l'EDO est dénoté par

$$\mathbb{L}(g) := \{y \in C^1(I; \mathbb{R}^N) : y'(x) = A(x)y(x) + g(x)\}\,.$$

Lemme 4.4. *Pour tout $y_1 \in \mathbb{L}(g_1), y_2 \in \mathbb{L}(g_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ on a que*

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 \in \mathbb{L}(c_1 g_1 + c_2 g_2)\,.$$

Démonstration. Par la linéarité de la dérivée,

$$\begin{aligned}
(c_1 y_1 + c_2 y_2)'(x) &= c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \\
&= A(x)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)\,.
\end{aligned}$$

Cela prouve l'énoncé. $\square$

E En outre, on a le théorème suivant :

Théorème 4.5 (Structure algébrique de $\mathbb{L}(0)$ et $\mathbb{L}(g)$)**.** *Pour tout $\tau \in I$, l'application $\mathbb{R}^N \to \mathbb{L}(0)$,*

$$\xi \mapsto \lambda_0(\cdot; \tau, \xi) \tag{4.3}$$

est un isomorphisme d'espcaces vectoriels (IEV). De plus, on a que :

(i) L'espace $\mathbb{L}(0)$ est un sous-espace N-dimensionel de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$.

(ii) Pour tout $\mu_g \in \mathbb{L}(g)$ on a que

$$\mathbb{L}(g) = \{\mu_g\} + \mathbb{L}(0)\,.$$

(Donc $\mathbb{L}(g)$ est un espace affin N-dimensionel.)

Démonstration. D'abord on va démontrer que (4.3) définit un IEV. On doit démontrer que l'application est linéaire, injective et surjective.
Linéarité : On doit démontrer

$$\lambda_0(\cdot; \tau, c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1\lambda_0(\cdot; \tau, \xi_1) + c_2\lambda_0(\cdot; \tau, \xi_2) \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Le côté gauche est la solution unique du PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = A(x)y(x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

avec $x_0 = \tau$ et $y_0 = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$. On va prouver que le côté droit est une solution aussi. Par l'unicité de la solution, on obtient l'égalité.
Par la définition de λ_0, on a $c_1\lambda_0(\tau;\tau,\xi_1) + c_2\lambda_0(\tau;\tau,\xi_2) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ ce qui implique que la condition initiale est satisfaite. De plus,

$$\begin{aligned} c_1\lambda_0'(x;\tau,\xi_1) + c_2\lambda_0'(x;\tau,\xi_2) &= c_1A(x)\lambda_0(x;\tau,\xi_1) + c_2A(x)\lambda_0(x;\tau,\xi_2) \\ &= A(x)\left(c_1\lambda_0(x;\tau,\xi_1) + c_2\lambda_0(x;\tau,\xi_2)\right) \quad \forall x \in I\,, \end{aligned}$$

et donc le côté droit est une solution du PCI.
Injectivité : Pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$ avec $\xi_1 \neq \xi_2$ on a

$$\lambda_0(\tau;\tau,\xi_1) = \xi_1 \neq \xi_2 = \lambda_0(\tau;\tau,\xi_2)\,,$$

ce qui implique l'injectivité de l'application (4.3).
Surjectivité : Soit $\mu \in \mathbb{L}(0)$. Alors μ est l'unique solution du PCI (4.4) avec $x_0 = \tau$ et $y_0 = \mu(\tau)$. Alors μ est identique à $\lambda_0(\cdot;\tau,\mu(\tau))$, ce qui démontre la surjectivité de l'application (4.3).
L'énoncé (i) suit directement de l'isomorphie de $\mathbb{L}(0)$ et $\mathbb{R}^N$. Pour (ii), on doit démontrer $\mathbb{L}(g) \subseteq \{\mu_g\} + \mathbb{L}(0)$ et $\mathbb{L}(g) \supseteq \{\mu_g\} + \mathbb{L}(0)$. D'abord soit $\mu \in \mathbb{L}(g)$. Alors

$$(\mu - \mu_g)'(x) = A(x)\mu(x) - A(x)\mu_g(x) + g(x) - g(x) = A(x)(\mu - \mu_g)(x) \quad \forall x \in I\,,$$

et donc $\mu - \mu_g \in \mathbb{L}(0)$. Cela implique $\mu = \mu_g + (\mu - \mu_g) \in \{\mu_g\} + \mathbb{L}(0)$.
Pour l'autre inclusion, soit $\mu \in \{\mu_g\} + \mathbb{L}(0)$. Alors il existe $\tilde\mu$ telle que $\mu = \mu_g + \tilde\mu$ et alors

$$(\mu_g + \tilde\mu)'(x) = A(x)\mu_g(x) + g(x) + A(x)\tilde\mu(x) = A(x)\mu(x) + g(x)\,,$$

ce qui n'est autre que $\mu \in \mathbb{L}(g)$. Cela prouve (ii). □

Par (i) du théorème précédent, $\mathbb{L}(0)$ possède une base à N éléments. Un ensemble à N éléments $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \subset \mathbb{L}(0)$ est une base si et seulement si il est linéairement indépendant. Explicitement, cela veut dire que pour tout $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$, on a l'implication suivante :

$$c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_N\mu_N = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0\,.$$

Corollaire 4.6. *Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ des solutions du système linéaire N-dimensionel $y'(x) = A(x)y(x)$. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*
(i) $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sont linéairement indépendant dans $C^1(I;\mathbb{R}^N)$.
(ii) Pour tout $x \in I$, $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_m(x)$ sont linéairement indépendant dans $\mathbb{R}^N$.
(iii) Il existe $x \in I$ tel que $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_m(x)$ sont linéairement indépendant dans $\mathbb{R}^N$.

Démonstration. Par le théorème 4.5 on a que pour chaque $x \in I$, l'application

$$\xi \mapsto \lambda_0(\cdot;x,\xi)$$

est un IEV $\mathbb{R}^N \to \mathbb{L}(0)$. Cela implique immédiatement les équivalences (i)⇔(ii) et (i)⇔(iii). □

Remarque 4.7. Pour des ensembles de fonctions, il n'est pas vrai en général que la dépendance linéaire des valeurs en un point implique la dépendance linéaire des fonctions. Exemple : $\mu_1(x) = 1$, $\mu_2(x) = x$ (définis pour $x \in \mathbb{R}$). Ces fonctions sont linéairement indépendants, puisqu'il n'existe pas de $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 0$. Néanmoins, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les valeurs $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ sont linéairement dépendants dans $\mathbb{R}$.

Exemple 4.8. On considère l'EDO

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^2} & \frac{2+2x+x^2}{x^2} \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2+2x}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} .$$

On choisit le domaine $I = (0, \infty)$. Par un calcul explicit, on peut vérifier que les fonctions

$$\mu_1(x) = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(x) = \begin{pmatrix} 2x + x^2 \\ 2x \end{pmatrix}$$

sont des solutions. On constate que $\mu_1(1) = (2,1)^T$ et $\mu_2(1) = (3,2)^T$ sont linéairement indépendant et alors par le théorème, le même est vrai pour μ_1, μ_2 dans C^1.

Dans la suite, soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $A \in C^0(I; \mathbb{R}^{N\times N})$.

Définition 4.9. *Un ensemble à N éléments de solutions $\mu_1, \dots, \mu_N$ linéairement indépendantes de l'équation vectorielle $y'(x) = A(x)y(x)$ N-dimensionelle est appelé* système fondamental*, et la fonction avec des valeurs dans les matrices $\Phi \in C^1(I; \mathbb{R}^{N\times N})$, définie par $\Phi(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x))$ est nommée* matrice fondamentale.

Par l'inversibilité de la matrice fondamentale, on déduit :

Théorème 4.10 (Représentation de $\lambda_0(x, \tau, \xi)$ par une matrice fondamentale)**.** *Soit Φ une matrice fondamentale. Alors on a que*

$$\lambda_0(x; \tau, \xi) = \Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)\xi \quad \forall x, \tau \in I, \forall \xi \in \mathbb{R}^N .$$

Démonstration. Le côté droit de l'équation est une solution du PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= A(x)y(x) \\ y(\tau) &= \xi , \end{cases}$$

car il existe N solutions $\mu_i, \dots, \mu_N$ linéairement indépendantes de l'équation vectorielle, telles que $\Phi(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_N(x))$ pour tout $x \in I$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)\xi &= (\mu_1'(x), \dots, \mu_N'(x))\Phi^{-1}(\tau)\xi \\ &= (A(x)\mu_1(x), \dots, A(x)\mu_N(x))\Phi^{-1}(\tau)\xi \\ &= A(x)\Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)\xi . \end{aligned}$$

Alors $\Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)\xi$ est une solution de l'EDO. De plus cette expression satisfait les conditions initiales, puisque $\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau)\xi = \xi$. Par l'unicité de la solution, on obtient l'égalité. □

Remarque 4.11. L'énoncé du théorème est vrai pour quelconque système fondamental.

Théorème 4.12. *Soit Φ une matrice fondamentale, et $\Gamma : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$. Alors Γ est une matrice fondamentale si et seulment s'il existe une matrice inversible $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ telle que*

$$\Gamma(x) = \Phi(x)B \quad \forall x \in I .$$

Démonstration. On écrit $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ et $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$.
"$\Rightarrow$" : Soit Γ une matrice fondamentale. Alors pour $i = 1, \dots, N$ on a $\gamma_i \in \mathbb{L}(0)$. L'ensemble $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ est une base pour $\mathbb{L}(0)$ et alors pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ il existe des coéfficients B_{ji} avec $j = 1, \dots, N$ tels que

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j B_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma = \Phi B\,.$$

"$\Leftarrow$" : Soit $\Gamma = \Phi B$. Alors pour $i = 1, \dots, N$ la colonne γ_i est une combinaison linéaire des solutions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ et alors une solution. De plus, pour tout $x \in I$ les vecteurs $\gamma_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) B_{ji}$, $i = 1, \dots, N$, sont linéairement indépendants, puisque la matrice B interprétée comme application $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un IVE. Par le théorème 4.6 $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ sont linéairement indépendantes. $\square$

On peut tirer enore une conséquence du Théorème 4.5 : L'application

$$\xi \mapsto \lambda_0(x; \tau, \xi) \tag{4.5}$$

est un automorphisme sur $\mathbb{R}^N$. On va maintenant s'intéresser à la représentation matricielle de cette application.

Définition 4.13. *Soient $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de base canoniques de $\mathbb{R}^N$ (c.à.d. $e_1 = (1, 0, 0, \dots)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)^T$, etc.). La matrice fondamentale $\Lambda(x, \tau)$ dont les colonnes sont données par $\lambda_0(x; \tau, e_1), \dots, \lambda_0(x; \tau, e_N)$ est nommée* matrice de transition.

Par la définition et le Théorème 4.10 on déduit aisément les propriétés suivantes de $\Lambda(x, \tau)$: Pour chaque matrice fondamentale Φ on a que $\Lambda(x, \tau) = \Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)$, et de plus

$$\lambda_0(x; \tau, \xi) = \Lambda(x, \tau)\xi \quad \forall x, \tau \in I,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N\,.$$

Exemple 4.14. Soient $I = (0, \infty)$ et

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Par un calcul explicit, on véfifie que la matrice

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$$

est une matrice fondamentale. On calcule

$$\Phi^{-1}(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 2\tau & -\tau^2 \\ -1 & \tau \end{pmatrix}$$

et donc

$$\Lambda(x, \tau) = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 2\tau x - x^2 & -\tau^2 x + x^2 \tau \\ 2\tau - 2x & -\tau^2 + 2\tau x \end{pmatrix}.$$

On continue notre étude des propriétés de la matrice de transition :

Théorème 4.15. *Soient $x, \tau, t \in I$. Alors :*
(i) $\Lambda(\tau, \tau) = \mathrm{Id}_{N \times N}$,
(ii) $\Lambda(x, t)\Lambda(t, \tau) = \Lambda(x, \tau)$,
(iii) $\Lambda(x, \tau) = \Lambda^{-1}(\tau, x)$.

Démonstration. Soit Φ une matrice fondamentale, alors on a que $\Lambda(x,\tau) = \Phi(x)\Phi^{-1}(\tau)$. Les énoncés (i)-(iii) sont des conséquences directs de cette équation. $\square$

On va appliquer les résultats obtenus ci-dessus au PCI inhomogène

$$\begin{cases} y'(x) &= A(x)y(x) + g(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $g \in C^0(I;\mathbb{R}^n)$. On va généraliser l'idée de la variation de la constante du chapitre 2.2. On va remplacer dans l'expression $\Phi(x)B$ (la forme générale d'une matrice fondamentale, où $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ est inversible) la matrice constante par $B \to B(x)$. On voudrait que pour un choix judicieux $\xi \in \mathbb{R}^N$, on obtienne

$$A(x)(\Phi(x)B(x)\xi) + g(x) \overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Phi(x)B(x)\xi) = A(x)(\Phi(x)B(x)\xi) + \Phi(x)B'(x)\xi$$

Évidemment, cela est équivalent á

$$B'(x)\xi \overset{!}{=} \Phi^{-1}(x)g(x) \Rightarrow B(x)\xi = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t + C\,,$$

où C est une constante d'intégration.

Théorème 4.16 (Variation de la constante)**.** *Soient $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ une matrice fondamentale pour l'équation vectorielle $y'(x) = A(x)y(x)$. Alors on a que*

$$\begin{aligned} \lambda_g(x;x_0,y_0) &= \Phi(x)\left(\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \lambda(x;x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} \Lambda(x,t)g(t)\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

(Rappel : La notation λ_g a été introduite au début du chapitre 4.1.)

Démonstration. La seule chose à faire est de vérifier que le côte droit est une solution du PCI (4.6). On a que

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Phi(x)\left(\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right)\right) \\ &\quad = A(x)\Phi(x)\left(\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right) + \Phi(x)\Phi^{-1}(x)g(x) \\ &\quad = A(x)\Phi(x)\left(\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right) + g(x) \quad \forall x \in I\,. \end{aligned}$$

De plus,

$$\left(\Phi(x_0)\left(\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \Phi^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right)\right) = y_0\,.$$

Cela prouve le théorème. $\square$

4.2. **Équations linéaires á coefficients constants.** Dans ce sous-chapitre, on va s'occuper d'un cas particulier des équations linéaires : Les EDO sous la forme

$$y'(x) = Ay(x) + g(x)$$

sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, où $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ est constante et $g \in C^0(I;\mathbb{C}^N)$. On remarque que contrairement au reste de ces notes, on traite le cas des équations avec des valeurs dans les nombres *complexes*. On va voir ci-dessous que cela est naturel, même si $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

Exemple 4.17. Soit $\mu \geq 0$. On considère l'EDO scalaire homogène linéaire

$$y''(x) = -2\mu y'(x) - y(x)\,.$$

Essayons l'*ansatz*

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

Cela nous donne

$$y''(x) + 2\mu y'(x) + y(x) = (\alpha^2 + 2\mu\alpha + 1)\mathrm{e}^{\alpha x} \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Cela est équivalent à

$$\alpha^2 + 2\mu\alpha + 1 \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Les solutions de cette équation sont données par

$$\alpha = \begin{cases} -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1} & \text{falls } \mu > 1 \\ -\mu & \text{falls } \mu = 1 \\ -\mu \pm \mathrm{i}\sqrt{1-\mu^2} & \text{falls } \mu < 1\,. \end{cases}$$

On s'intéresse au dernier cas, pour lequel on a les solutions linéairement indépendantes complexes

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{1-\mu^2}x}\,, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{1-\mu^2}x}\,.$$

Par combinaison linéaire, on peut obtenir des solution réelles,

$$\tilde{y}_1(x) = \mathrm{e}^{-\mu x}\cos\left(\sqrt{1-\mu^2}x\right)\,, \quad \tilde{y}_2(x) = \mathrm{e}^{-\mu x}\sin\left(\sqrt{1-\mu^2}x\right)\,.$$

De ces solutions-là on peut construire des matrices fondamentales.

La prochaine observation est qu'il ne pose pas de problème de considérer le cas complex au lieu du cas réel.

Remarque 4.18. Soient $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^N$ et $f \in C^0(D;\mathbb{C}^N)$. On considère l'EDO

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{4.7}$$

pour des fonctions $y \in C^1(I;\mathbb{C}^N)$. On pose

$$\tilde{D} = \{(x,\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N : (x, \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2) \in D\}\,,$$
$$\tilde{f}(x,\xi_1,\xi_2) = (\mathrm{Re} f(x,\xi_1+\mathrm{i}\xi_2), \mathrm{Im} f(x,\xi_1+\mathrm{i}\xi_2)) \quad \forall (x,\xi_1+\mathrm{i}\xi_2) \in D\,.$$

On a que (4.7) est équivalent à l'équation vectorielle $2N$-dimensionelle réelle

$$y'(x) = \tilde{f}(x, y(x))\,.$$

Grâce à cette équivalence, on peut transférer tous nos énoncés ci-dessus sans problèmes au cas de valeurs complexes, de même pour la structure algébrique de l'espace des solutions.

Réconsidérons pour un moment le cas scalaire : On sait que l'équation homogène avec coefficients constants $y'(x) = Ay(x)$ a comme solution l'exponentielle e^{Ax}. On va transférer cette idée au cas vectoriel.

Lemme 4.19. *Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. On pose $A^0 := \mathrm{Id}_{N\times N}$. On a que la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge absolument dans $\mathbb{C}^{N\times N}$. C'est à dire, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} < \infty$.

Démonstration. On a $\|A^k\| \le \|A\|^k$, et alors avec $z := \|A\|$ la série exponentielle $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ est une majorante pour $\sum \frac{\|A^k\|}{k!}$. Cela prouve le lemme. □

Définition 4.20 (Exponentielle matricielle)**.** *Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. On écrit*

$$\mathrm{e}^A = \exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}^{N\times N}\,.$$

Exemple 4.21. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a que $A^2 = \mathrm{Id}_{2\times 2}$, et alors

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{si } k \text{ impaire}$$
$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } k \text{ paire.}$$

Avec cela, la série exponentielle est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 2b \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

avec

$$a = \sum_{k \text{ paire}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1}\right),$$
$$b = \sum_{k \text{ impaire}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}\right).$$

Théorème 4.22 (Propriétés de l'exponentielle matricielle)**.** *Soient $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Alors :*

(i) Si $AB = BA$, on a que

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A\,.$$

(ii) Pour $t \in \mathbb{R}$ soit $h(t) = \mathrm{e}^{tA}$. Alors $h \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{N\times N})$ et

$$h'(t) = Ah(t) = h(t)A \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

(iii) Soit $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ inversible. Alors

$$\mathrm{e}^{MAM^{-1}} = M\mathrm{e}^A M^{-1}\,.$$

(iv) On a $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\, A}$.

Démonstration. (i) : Les séries $\sum \frac{A^k}{k!}$ et $\sum \frac{B^k}{k!}$ convergent absolument, et alors la série

$$\sum_{k,k' \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{k'}}{k'!} = \sum_{k,k' \in \mathbb{N}} \frac{B^k}{k!} \frac{A^{k'}}{k'!}$$

est absolument convergente, avec la limite $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$. Par la convergence absolue on peut rearranger l'ordre des membres de la série. En particulier,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{p-k}}{(p-k)!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} A^k B^{p-k} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (A+B)^p \\ &= \mathrm{e}^{A+B} . \end{aligned}$$

(ii) : On a que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{Id}_{N\times N}}{t} &= \frac{(\mathrm{Id}_{N\times N} + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots) - \mathrm{Id}_{N\times N}}{t} \\ &= A + O(t) \end{aligned}$$

et alors

$$h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{Id}_{N\times N}}{t} = A .$$

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a que

$$\begin{aligned} h'(\tau) &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(\tau+t)A} - \mathrm{e}^{tA}}{t} \\ &= \mathrm{e}^{\tau A} \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{Id}_{N\times N}}{t} \\ &= \mathrm{e}^{\tau A} A , \end{aligned}$$

où on a utilisé (i) et l'étape précédente. De la même façon, on démontre $h'(\tau) = A\mathrm{e}^{\tau A}$. Par récurrence, on obtient $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} h(t) = A^k \mathrm{e}^{tA}$.
(iii) : On a que

$$\begin{aligned} \exp(MAM^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(MAM^{-1})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} M \frac{A^k}{k!} M^{-1} \\ &= M\mathrm{e}^A M^{-1} . \end{aligned}$$

(iv) : Exercice. $\square$

Par (ii) ci-dessus, on obtient facilement :

Théorème 4.23 (Matrices fondamentales pour équations homogènes linéaires avec coefficients constants). *Soient $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Alors la matrice de transition $\Lambda(x,\tau)$ de l'équation vectorielle homogène $y'(x) = Ay(x)$ est identique à $\mathrm{e}^{(x-\tau)A}$.*

Démonstration. Par (ii) dans le dernier théorème,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{(x-\tau)A} = A\mathrm{e}^{(x-\tau)A},$$

et alors les colonnes de la matrice $\mathrm{e}^{(x-\tau)A}$ sont des solutions. De plus on a que $\mathrm{e}^{(\tau-\tau)A} = \mathrm{Id}_{N\times N}$, et donc on a démontré l'indépendance linéaire des solutions. $\square$

Maintenant on va s'occuper de la question comment calculer la matrice de transition pour $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ donnée.

Notation : Une matrice $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ est bloc-diagonale si elle possède des blocs matrices carrées $A_1, \dots, A_L$ sur la diagonale principale, tels que les blocs non diagonaux soient des matrices nulles,

$$A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_L) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A_L \end{pmatrix}.$$

Lemme 4.24. *Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_L)$. Alors*

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{A_1}, \dots, \mathrm{e}^{A_L}).$$

Démonstration. On a que $\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_L)^k = \mathrm{diag}(A_1^k, \dots, A_L^k)$ et alors

$$\begin{aligned}\exp \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_L) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathrm{diag}(A_1^k, \dots, A_L^k) \\ &= \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{A_1}, \dots, \mathrm{e}^{A_L}).\end{aligned}$$

$\square$

Pour des matrices bloc-diagonales, on calcule l'exponentielle en calculant l'exponentielle pour les blocs. Une forme particulièrement utile est la forme normale de Jordan :

Théorème 4.25 (Forme normale de Jordan). *Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Alors il existe une matrice inversible $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ telle que*

$$A = MJM^{-1},$$

où

$$J = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_L),$$

et pour $l = 1, \dots, L$, la matrice carrée J_l a la forme

$$J_l = \lambda_l \mathrm{Id}_{m_l\times m_l} + N_l,$$

où λ_l est une valeur propre de A, et $N_l \in \mathbb{C}^{m_l\times m_l}$ est donnée par

$$(N_l)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On dit que A est sous forme normale de Jordan par rapport à la base $\{M_1, \dots, M_N\}$, où M_i est la i-ième colonne de M.

Démonstration. D'abord on note que l'énoncé est équivalent à dire que pour $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, il existe une base $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$ de vecteurs propres généralisés, c'est á dire

$$y \in Y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ tels que } (A - \lambda \mathrm{Id})^p y = 0\,.$$

(Preuve de cette équivalence : Exercice.)

Preuve du théorème par récurrence sur la dimension N : Le cas $N = 1$ est clair. Soient $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, et λ une valeur propre de A. Alors on a que

$$r := \dim \mathrm{Ran}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) < N\,,$$

(où $\mathrm{Ran}\,B$ dénote l'image d'une application linéaire B, et Id est l'identité sur $\mathbb{C}^N$.) Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ de $\mathrm{Ran}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ telle que $A' := A|_{\mathrm{Ran}\,(A-\lambda\,\mathrm{Id})}$ est sous forme normale de Jordan par rapport à cette base. En particulier, il existe s blocs de Jordan à valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de taille $l_1, \dots, l_s$, et pour chaque bloc avec index i un vecteur de base $\bar{v}_i \in V$ tel que

$$(A - \lambda_i \mathrm{Id})^j \bar{v}_i \neq 0 \quad \text{pour } j < l_i \text{ et } (A - \lambda_i \mathrm{Id})^{l_i} \bar{v}_i = 0\,. \tag{4.8}$$

En fait, après un changement des indices, on peut supposer $\bar{v}_i = v_i$.

Si

$$\mathrm{Ran}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{0\}\,,$$

(où $\mathrm{Ker}\,B$ dénote le noyau de B) on a complété la preuve grâce au théorème du rang. Sinon, on pose

$$Q = \mathrm{Ran}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id})\,,$$

avec $s := \dim Q \leq r$. Choisissons une base de Q, $\{v_1, \dots, v_s\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour chaque v_i il existe un vecteur $w_i \in \mathrm{Ran}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ et $l_i \in \mathbb{N}$ tels que

$$(A - \lambda\,\mathrm{Id})^{l_i} w_i = v_i, \quad \nexists u \in \mathrm{Ran}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) : (A - \lambda\,\mathrm{Id})u = w_i\,.$$

(La deuxième propriété dans d'autres mots : $w_i \notin \mathrm{Ran}\,(A - \lambda \mathrm{Id})^2$.) On peut choisir les w_i linéairement indépendants. Puis on définit $u_i \in \mathbb{C}^N$ par

$$(A - \lambda\,\mathrm{Id})u_i = w_i\,.$$

Par cette définition de u_i, on a les implications

$$\begin{aligned} c_1 u_1 + \cdots + c_s u_s \in \mathrm{Ran}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \quad &\Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_s = 0 \\ c_1 u_1 + \cdots + c_s u_s \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \quad &\Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_s = 0\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

En particulier, $\{u_1, \dots, u_s\}$ est linéairement indépendant ; on a même que $\{u_1, \dots, u_s\} \cup \{v_1, \dots, v_r\}$ est linéairement indépendant. Choisissons une base $\{y_1, \dots, y_t\}$ de $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \setminus Q$; alors

$$\tilde{V} := \{u_1, \dots, u_s\} \cup \{v_1, \dots, v_r\} \cup \{y_1, \dots, y_t\}$$

est une base de $\mathbb{C}^N$. De plus, chaque vecteur dans $\tilde{V}$ est un vecteur propre généralisé, c'est à dire

$$\tilde{v} \in \tilde{V} \Rightarrow \exists \tilde{\lambda} \in \{\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_s\} \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } (A - \tilde{\lambda}\mathrm{Id})^p \tilde{v} = 0\,.$$

Ceci prouve que A est sous forme normale de Jordan par rapport à $\tilde{V}$. □

Schéma pour déterminer la forme normale de Jordan pour $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$:

1) Déterminer le polynome charactéristique de A et ses zéros :

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}_{N\times N}) = (-1)^N (\lambda - \lambda_1)^{a_1} (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{a_p} \,,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A, et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}$ leurs multiplicités algébriques

2) Déterminer les sous-espaces charactéristiques

$$\ker(A - \lambda_j \mathrm{Id}_{N\times N})^s \,, \quad s = 1, 2, \dots$$

et la dimension de ces espaces $a_{s,j} := \dim \ker(A - \lambda_j \mathrm{Id}_{N\times N})^s$. Le nombre des blocs de Jordan de la taille s à valeur propre λ_j est donné par $2a_{s,j} - a_{s+1,j} - a_{s-1,j}$, puisque

$$\begin{aligned} a_{s,j} = \sum_{k=1}^{s-1} & k\#\{\text{blocs de taille } k\} \\ & + s\#\{\text{blocs de taille} \geq s\} \,. \end{aligned}$$

Calculer e^{tA} **pour** $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$**.** Supposons que l'on connaisse la forme de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$,

$$A = MJM^{-1}$$

avec M et J comme ci-dessus. Alors par le théorème 4.22 (iii) on a :

$$\mathrm{e}^{tA} = M\mathrm{e}^{tJ}M^{-1} = M\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{tJ_1}, \dots, \mathrm{e}^{tJ_L})M^{-1} \,.$$

Alors il ne reste que le problème de calculer l'exponentielle des blocs J_l, $l = 1, \dots, L$. On a

$$\lambda_l \mathrm{Id}_{m_l\times m_l} N_l = N_l \lambda_l \mathrm{Id}_{m_l\times m_l} \,,$$

et alors par le théorème 4.22 (i) :

$$\mathrm{e}^{tJ_l} = \exp\left(t\lambda_l \mathrm{Id}_{m_l\times m_l}\right) \mathrm{e}^{tN_l} \,.$$

On va calculer les facteurs sur le côté droite : D'abord,

$$\begin{aligned} \exp\left(t\lambda_l \mathrm{Id}_{m_l\times m_l}\right) &= \exp \mathrm{diag}(t\lambda_l, \dots, t\lambda_l) \\ &= \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_l}, \dots, \mathrm{e}^{t\lambda_l}) \\ &= \mathrm{e}^{t\lambda_l} \mathrm{Id}_{m_l\times m_l} \,. \end{aligned}$$

Puis, par la définiton de la série exponentielle,

$$\mathrm{e}^{tN_l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tN_l)^k}{k!} \,. \tag{4.10}$$

Pour calculer les puissances de N_l, on commence avec N_l à la puissance 2 :

$$\begin{aligned} (N_l^2)_{ij} &= \sum_{q=1}^{m_l} (N_l)_{iq} (N_l)_{qj} \\ &= \sum_{q=1}^{m_l} (N_l)_{iq} (N_l)_{qj} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$(N_l^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En particulier, on voit que $N_l^k = 0$ pour $k \geq m_l$, puisqu'il n'y a pas d'indices $i, j \in \{1, \ldots, m_l\}$ satisfaisant $j = i + k$ dans ce cas. La série (4.10) finit avec le terme de m_l-ième ordre, et on obtient

$$(\mathrm{e}^{tN_l})_{ij} = \begin{cases} \frac{t^k}{k!} & \text{si } j = i + k, \text{ et } k \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La représentation matricielle est

$$\mathrm{e}^{tN_l} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m_l-1}}{(m_l-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 4.26 (Calcul de l'exponentielle matricielle)**.** *Soit $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ avec la forme normale de Jordan $A = MJM^{-1}$, où $M, J \in \mathbb{C}^{N \times N}$ comme dans le théorème 4.25. Alors on a*

$$\mathrm{e}^{tA} = M\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_1}\mathrm{e}^{tN_1}, \mathrm{e}^{t\lambda_2}\mathrm{e}^{tN_2}, \ldots, \mathrm{e}^{t\lambda_L}\mathrm{e}^{tN_L})M^{-1},$$

où pour $l = 1, \ldots, L$ la matrice $\mathrm{e}^{tN_l} \in \mathbb{C}^{m_l \times m_l}$ est donnée par

$$(\mathrm{e}^{tN_l})_{ij} = \begin{cases} \frac{t^k}{k!} & \textit{si } j = i + k, \textit{ et } k \geq 0 \\ 0 & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Exemple 4.27. Calcul de e^{tA} pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme charactéristique de A est

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}_{3\times3}) = -\lambda^2(\lambda + 2).$$

Les valeurs propres sont 0 (avec multiplicité algébrique 2) et -2 (avec multiplicité algébrique 1). On détermine les espaces charactéristiques, d'abord $\ker(A + 2\mathrm{Id}_{3\times3})$. L'équation pour $Ax = -2x$ nous donne

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2x_1 \\ x_1 - x_2 &= -2x_2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &= -2x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 = -x_1, x_2 = -x_1$$

$$\Rightarrow \ker(A + 2\mathrm{Id}_{3\times3}) = \mathrm{Span}((1, -1, -1)^T).$$

De manière analogue, on obtient de $Ax = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 = -x_1, x_2 = x_1$$

$$\Rightarrow \ker A = \operatorname{Span}((1,1,-1)^T)\,.$$

Alors la multiplicité géométrique de la valeur propre 0 est 1, et alors on n'a qu'un seul bloc de Jordan pour la valeur propre 0. On obtient la matrice bloc-diagonale

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On détermine $\ker A^2$. D'abord on calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant on va résoudre $A^2x = 0$; on voit facilement que cette équation nous mène à

$$\ker A^2 = \operatorname{Span}((1,0,0)^T, (1,1,-1)^T)\,.$$

On construit la base par rapport à laquelle A possède la forme normale de Jordan. On choisit $(1,0,0)^T \in \ker A^2 \setminus \ker A$ comme premier vecteur de base. Le deuxième est donné par $A(1,0,0)^T = (1,1,-1)^T$. Comme vecteur de base pour $\ker(A + 2\mathrm{Id}_{3\times 3})$ on choisit $(1,-1,-1)^T$. Alors,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cela détermine la forme normale de Jordan de A, $A = MJM^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= M\mathrm{e}^{tJ}M^{-1} \\ &= M\operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^0\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-2t}\right)M^{-1} \\ &= M\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1+t & \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t}) & \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t}+2t) \\ t & \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t}) & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2t}+2t-1) \\ -t & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2t}-1) & \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t}-2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercices.

(1) Démontrez à l'aide d'un exemple que l'ensemble de solutions d'une EDO non-linéaire n'est pas un espace affine. Est-ce toujours vrai si on considère une équation avec des bornes pour f comme dans l'exercice (15) du chapitre 3 ?

(2) Soit I un intervalle, $\lambda_0(x;\tau,\xi)$ la solution générale du PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = A(x)y(x) \\ y(\tau) & = \xi\,, \end{cases}$$

avec $A \in C^0(I;\mathbb{R}^{N\times N})$. De plus, soient $\mu_1,\ldots,\mu_N$ des solutions linéairement indépendantes de l'EDO $y'(x) = A(x)y(x)$. À partir de la formule

$$\lambda_0(x;\tau,\xi) = c_1\mu_1(x) + \cdots + c_N\mu_N(x)\,,$$

déterminez les nombres réelles $c_1,\ldots,c_N$. D'abord justifiez pourquoi il existe un tel N-tuple $(c_1,\ldots,c_N)$.

(3) Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f \in C^0(I\times\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N\times N})$ telle que $f(x,y)$ est localement lipschitzienne par rapport à y.

On suppose que pour chaque intervalle $J \subset I$, chaque paire de solutions $\mu_1,\mu_2 \in C^1(J;\mathbb{R}^N)$ de l'EDO $y'(x) = f(x,y(x))\ \forall \in J$ et pour tout $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ soit une solution de l'EDO aussi.

Démontrez que l'EDO est linéaire et homogène ; c'est à dire qu'il existe $A \in C^0(I;\mathbb{R}^{N\times N})$ tel que

$$f(x,y) = A(x)y \quad \forall (x,y) \in I\times\mathbb{R}^N\,.$$

(4) Soit

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & 1 \\ -2 & 3x \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminez un intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}$ avec $1 \in I$ et $A \in C^0(I;\mathbb{R}^{2\times 2})$ tel que Φ est une matrice fondamentale pour le système $y'(x) = A(x)y(x)$.

(ii) Calculez la matrice de transition $\Lambda(x,\tau)$.

(iii) Déterminez la solution du PCI

$$\begin{cases} y'(x) & = A(x)y(x) + g(x) \\ y(1) & = (3,2)^T \end{cases},$$

avec A comme dans (i) et

$$g(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(5) Soit $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Démontrez que

$$\det \exp A = \exp(\operatorname{Tr} A)\,.$$

(6) (i) Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

avec $a,b,c \in \mathbb{R}$. Déterminez $\exp tA$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminez $\exp(tB)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(7) Soient $A \in C^0(I; \mathbb{R}^{N\times N})$, $\Phi \in C^0(I; \mathbb{R}^{N\times N})$ une matrice fondamentale pour l'équation $y'(x) = A(x)y(x)$ et $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ une matrice inversible. Démontrez que $B\Phi$ est une matrice fondamentale si et seulement si $A(x)B = BA(x)$ pour tout $x \in I$.

5. Théorie de stabilité des EDO

On va s'intéresser au comportement des solutions des EDO

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

pour $x \to \infty$.

Exemple 5.1. Soient $a, b > 0$. On va considérer comme domaine $[0, \infty)$. L'équation logistique

$$y'(x) = a\, y(x) - b\, y(x)^2$$

possède la solution générale

$$\lambda(x; x_0, y_0) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{-a(x-x_0)}} .$$

On observe que

(i) pour $y_0 > 0$, $I_{\max} = [0, \infty)$ et $\lim_{x\to\infty} \lambda(x; x_0, y_0) \to \frac{a}{b}$

(ii) pour $y_0 < 0$, on a $\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right) < 0$ et $\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{-a(x-x_0)} \to \frac{b}{a} > 0$ pour $x \to \infty$. Alors il existe $x_* > x_0$ tel que $\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{-a(x-x_*)} = 0$ et alors $\lim_{x\to x_*} \lambda(x; x_0, y_0) = -\infty$.

On va reformuler ces observations en disant (voir la définition ci-dessous) que la solution $y(x) = \frac{a}{b}$ est asymptotiquement stable, tandis que la solution $y(x) = 0$ est instable.

Dans la suite on suppose que $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$ et $f \in C^0(D)$ satisfont les exigences standard.

Définition 5.2 (Stabilité)**.** *Soit $\lambda(x; x_0, y_0)$ la solution générale de l'EDO*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{5.1}$$

(i) Une solution $\mu(x)$ est appelée stable si pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $x_* \in I_{\max}$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_*)$ tel que l'hypothèse $\|\bar{y} - \mu(x^*)\| < \delta$ implique

$$\|\lambda(x; x_*, \bar{y}) - \mu(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in I_{\max} \cap [x_*, \infty) .$$

(ii) Une solution $\mu(x)$ est appelée uniformément stable si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour chaque $x_* \in I_{\max}$ l'hypothèse $\|\bar{y} - \mu(x^*)\| < \delta$ implique

$$\|\lambda(x; x_*, \bar{y}) - \mu(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in I_{\max} \cap [x_*, \infty) .$$

(iii) Une solution $\mu(x)$ est appelée asymptotiquement stable si pour chaque $x_* \in I_{\max}$ il existe $\delta = \delta(x_*)$ tel que

$$\lim_{x\to\infty} \|\lambda(x; x_*, \bar{y}) - \mu(x)\| = 0 \quad \forall \bar{y} \in B(\mu(x_*), \delta) .$$

(iv) Une solution $\mu(x)$ est instable si elle n'est pas stable.

Remarque 5.3. L'analyse de stabilité pour une solution $\mu(x)$ de (5.1) peut toujours être réduite à l'analyse de la solution zéro ($\tilde{\mu}(x) = 0\, \forall x$) pour une EDO modifiée, qui elle aussi satisfait les exigences standard :

Étant donné une deuxième solution pour (5.1), posons $\tilde{y} = y - \mu$. Alors

$$\begin{aligned}\tilde{y}'(x) &= f(x, y(x)) - f(x, \mu(x)) \\ &= f(x, \tilde{y}(x) + \mu(x)) - f(x, \mu(x)) \\ &=: g(x, \tilde{y}(x))\end{aligned} \tag{5.2}$$

La question de stabilité (uniforme, asymptotique) de la solution μ pour (5.1) est maintenant équivalent à la question de stabilité de la solution zéro pour (5.2).

Exemple 5.4. Considérons l'EDO scalaire

$$y'(x) = a(x)y(x)$$

sur $I = [0, \infty)$ avec $a \in C^\infty(I)$. On sait que la solution avec condition initiale $y(0) = y_0$ est donnée par

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right) = \lambda(x; x_0, y_0)\,.$$

On obtient de cette expression l'analyse suivante :

(i) Soit $\varepsilon > 0$, $x_0 \geq 0$. On choisit

$$\delta(x_0) < \frac{\varepsilon}{\sup_x \exp \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}\,.$$

Si $\sup_x \exp \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t = M(x_0) < \infty$, on obtient la stabilité de la solution zéro.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. On choisit

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\sup_{x_0,x} \exp \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}\,.$$

Si $\sup_{x_0,x} \exp \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t = M < \infty$, on obtient la stabilité uniforme de la solution zéro.

(iii) On a évidemment $|y(x)| = |y_0| \left|\exp\left(\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right)\right|$, et alors la solution zéro est asymptotiquement stable si et seulement si, pour $x \to \infty$,

$$|y(x)| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right)\right| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t \to -\infty\,.$$

Cette derniére propriété est bien sur indépendante de x_0.

5.1. **Stabilité des équations linéaires.** On va considérer la stabilité des solutions des solutions pour les équations

$$y'(x) = A(x)y(x) \tag{5.3}$$

et

$$y'(x) = A(x)y(x) + g(x) \tag{5.4}$$

avec $A \in C^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^{N\times N})$ et $g \in C^\infty([0, \infty); \mathbb{R}^N)$.

Lemme 5.5. *Toute solution de* (5.4) *est (uniformément, asymptotiquement) stable si et seulement si la solution zéro de* (5.3) *est (uniformément, asymptotiquement) stable.*

Démonstration. Soient $\mu, \tilde{\mu}$ des solution de (5.4). Posons $\phi = \mu - \tilde{\mu}$. Alors ϕ est une solution de (5.3). Évidemment, on a

$$\|\phi(x) - 0\| = \|\mu(x) - \tilde{\mu}(x)\| \quad \forall x \in [0, \infty)\,.$$

Avec cette identité, l'énoncé suit facilement de la définition 5.2. □

Remarque 5.6. Grâce au lemme, on peut parler de la *stabilité de l'équation* (5.4).

Théorème 5.7. *Soit* $\Phi \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}^{N\times N})$ *une matrice fondamentale pour l'EDO* (5.3). *Alors :*

(i) L'équation (5.4) *est stable si et seulement si il existe* $k > 0$ *tel que*

$$\|\Phi(x)\| \leq k \quad \forall x \in [0,\infty)\,.$$

(ii) L'équation (5.4) *est uniformément stable si et seulement si il existe* $k > 0$ *tel que*

$$\|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\| \leq k \quad \forall x_0 \in [0,\infty), \forall x \in [x_0,\infty)\,.$$

(iii) L'équation (5.4) *est asymptotiquement stable si et seulement si*

$$\lim_{x\to\infty} \|\Phi(x)\| = 0\,.$$

Démonstration. (i) "$\Leftarrow$" : Soient $x_0 \in [0,\infty)$, $\varepsilon > 0$. Posons $\delta(x_0,\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2}k^{-1}\|\Phi^{-1}(x_0)\|^{-1}$. Alors pour $\|y_0\| < \delta$, on a

$$\|\lambda(x;x_0,y_0)\| = \|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0\| \leq k\|\Phi^{-1}(x_0)\|\|y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

ce qui prouve la stabilité de la solution zéro.
"$\Rightarrow$" : Par la stabilité de l'équation il existe $\delta = \delta(0,1)$ tel que $\|\Phi(x)\Phi^{-1}(0)y_0\| \leq 1$ $\forall y_0 \in B(0,\delta)$. Puisque $\Phi^{-1}(0)B(0,\delta)$ contient une boule ouverte $B(0,\bar{\delta})$ on a que

$$\sup_{\|v\|=1} \|\Phi(x)v\| \leq \bar{\delta}^{-1} \quad \forall x \in [0,\infty)\,.$$

(ii) "$\Leftarrow$" : Pour $\varepsilon > 0$, soit $\delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2k}$. Alors pour $y_0 \in B(0,\delta)$, on a

$$\|\lambda(x;x_0,y_0)\| = \|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

"$\Rightarrow$" : Il existe $\delta = \delta(1)$ tel que

$$\|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0\| \leq 1 \quad \forall x_0 \in [0,\infty), x \in [x_0,\infty), y_0 \in \overline{B(0,\delta)}\,.$$

Alors

$$\|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\|^2 = \delta^{-2}\sum_{i=1}^{N} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\delta e_i\|^2 \leq N\delta^{-2}\,.$$

(iii) "$\Leftarrow$" : Pour chaque $x_0 \in [0,\infty)$, $y_0 \in \mathbb{R}^N$ on a que

$$\lim_{x\to\infty} \|\lambda(x;x_0,y_0)\| = \lim_{x\to\infty} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0\| \leq \lim_{x\to\infty} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\|\|y_0\| = 0\,.$$

"$\Rightarrow$" : Fixons $x_0 \in [0,\infty)$ arbitrairement. Soit $\delta > 0$ tel que

$$\|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)v\| \to 0 \quad \forall v \in B(0,\delta)\,.$$

Alors

$$\|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\|^2 = \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\frac{\delta}{2}e_i\|^2 \to 0\,.$$

□

5.2. **Stabilité des équations linéaires perturbées.** Maintenant on va considérer la stabilité de l'EDO

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in [0, \infty) \tag{5.5}$$

avec $f \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^N)$ et

$$f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, \infty) \tag{5.6}$$

En utilisant (5.6) dans (5.5), on obtient

$$f(x, y(x)) = \nabla_y f(x, 0) y(x) + r(x, y(x)), \tag{5.7}$$

où $\nabla_y f(x, 0)$ est la matrice jacobienne par rapport à y,

$$(\nabla_y f(x, 0))_{ij} = \partial_{y_j} f_i(x, 0) \qquad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, N\}$$

et on va supposer que $r : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ satisfasse

$$\lim_{\bar{y} \to 0} \frac{r(x, \bar{y})}{\|\bar{y}\|} = 0 \qquad \text{uniformément en } x\,.$$

L'existence de r satisfaisant $\lim_{\bar{y} \to 0} \frac{r(x,\bar{y})}{\|\bar{y}\|} = 0$ pour chaque x est une conséquence de l'hypothèse $f \in C^1$, mais l'uniformité de cette limite est une hypothèse additionelle.

En toute généralité, la décomposition (5.7) ne va pas nous aider dans l'analyse de la stabilité de la solution de cette équation. Pourtant, dans des cas particuliers elle sera utile : Par exemple, pour le cas $\nabla_y f(x, 0) = A \in \mathbb{R}^{N \times N} \forall x \in [0, \infty)$ (le cas d'une dérivée qui est indépendante de x), que l'on va traiter maintenant.

Théorème 5.8. *Soient $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ telle que que toutes les valeurs propres de A, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, aient une partie réelle non-positive,*

$$\operatorname{Re} \alpha_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

et $r : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ telle que

$$\lim_{\bar{y} \to 0} \frac{r(x, \bar{y})}{\|\bar{y}\|} = 0 \qquad \textit{uniformément en } x\,. \tag{5.8}$$

Alors la solution zéro de $y'(x) = Ay(x) + r(x, y(x))$ est uniformément et asymptotiquement stable.

Démonstration. Par le théorème 4.16, on a

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x - x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{A(x-t)} r(t, y(t)) \mathrm{d}t$$

pour la solution de (5.5) avec condition initiale $y(x_0) = y_0$. On va utiliser l'existence de $K, \alpha > 0$ tels que

$$\| \exp(A(x - x_0)) \| \leq K \mathrm{e}^{-\alpha(x - x_0)}\,.$$

La preuve de l'existence de tels K, α est un exercice. Alors on a

$$\|y(x)\| \leq K \mathrm{e}^{-\alpha(x - x_0)} \|y_0\| + \int_{x_0}^{x} K \mathrm{e}^{-\alpha(x-t)} \|r(t, y(t))\| \mathrm{d}t\,.$$

On pose

$$u(x) = \mathrm{e}^{\alpha(x - x_0)} \|y(x)\|$$

et on obtient

$$u(x) \le K\|y_0\| + \int_{x_0}^{x} K\mathrm{e}^{\alpha(t-x_0)}\|r(t,y(t))\|\mathrm{d}t\,.$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|r(t,v)\| \le \frac{\alpha}{2K}\|v\| \quad \forall t \in I \cap [x_0,\infty), \forall v \in B(0,\varepsilon)\,.$$

Alors

$$u(x) \le K\|y_0\| + \int_{x_0}^{x} K\mathrm{e}^{\alpha(t-x_0)}\frac{\alpha}{2K}\|y(t)\|\mathrm{d}t$$

$$\text{si } \|y(t)\| \le \varepsilon \forall t \in [x_0,x) \Leftrightarrow u(t) \le \varepsilon \mathrm{e}^{\alpha(t-x_0)} \forall t \in [x_0,x)$$

Pour

$$\|y_0\| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

on a

$$u(x) \le \frac{\varepsilon}{2} + \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha}{2}u(t)\mathrm{d}t \quad \text{si } u(t) \le \varepsilon\mathrm{e}^{\alpha(t-x_0)}\forall t \in [x_0,x) \tag{5.9}$$

Par le lemme 5.9 ci-dessous (qui est juste le lemme de Gronwall adapté aux conditions sur u que l'on vient de démontrer) on obtient

$$u(x) \le \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{\alpha/2(x-x_0)} \quad \forall x \in I \cap [x_0,\infty)$$

ce qui implique

$$\|y(x)\| \le \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-\alpha/2(x-x_0)} \quad \text{pour } y_0 \in B\left(0,\frac{\varepsilon}{2K}\right)\,.$$

Cela prouve que la solution zéro est uniformément et asymptotiquement stable. $\square$

Dans la preuve on a utilisé une variante du lemme de Gronwall, avec une hypothèse plus faible (la restriction de la validité de l'inégalité (5.9) au cas $u(t) \le \varepsilon\mathrm{e}^{\alpha(t-x_0)}\forall t \in [x_0,x)$). On va prouver cette variante maintenant.

Lemme 5.9. *Soient $\varepsilon, c, d > 0$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$, et $\varphi \in C^0(I)$ tels que pour tout $x \in I \cap [x_0,\infty)$,*

$$\varphi(x) \le c + d\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t \quad \textit{si } \varphi(t) \le 2c\mathrm{e}^{2d(t-x_0)}\forall t \in [x_0,x)\,. \tag{5.10}$$

Alors

$$\varphi(x) \le c\mathrm{e}^{d(x-x_0)} \quad \forall x \in I \cap [x_0,\infty)\,.$$

Démonstration. Posons

$$\psi(x) := c + d\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t\,.$$

Alors

$$\varphi(x) \le \psi(x) \quad \text{si } \varphi(t) \le 2c\mathrm{e}^{d(t-x_0)}$$

et $\psi(x_0) \le c$. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\psi(x)\mathrm{e}^{-d(x-x_0)}\right) = \left(-d\psi(x) + d\varphi(x)\right)\mathrm{e}^{-d(x-x_0)} \le 0 \quad \text{si } \varphi(t) \le 2c\mathrm{e}^{d(t-x_0)}\,.$$

Cela implique

$$\varphi(x) \le \psi(x) \le c\mathrm{e}^{d(x-x_0)} \quad \text{si } \varphi(t) \le 2c\mathrm{e}^{d(t-x_0)}\,. \tag{5.11}$$

Posons

$$U := \left\{ x : \varphi(x) < 2c\mathrm{e}^{2d(x-x_0)} \right\} \cap [x_0, \infty) \,.$$

On a que U est non-vide (puisque $x_0 \in U$), U est ouvert (puisque U est le préimage de l'ouvert $(0,\infty)$ pour la fonction continue $x \mapsto 2c\mathrm{e}^{d(x-x_0)} - \varphi(x)$), et U est fermé par (5.11). Alors $U = I \cap [x_0, \infty)$, et alors $\varphi(x) \leq c\mathrm{e}^{d(x-x_0)}$ pour tout $x \in I \cap [x_0, \infty)$. □

Exemple 5.10. Soit $k > 0$. On considère l'EDO deux-dimensionelle $y'(x) = f(y(x))$ avec

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= -ky_1\mathrm{e}^{-y_2} - \sin y_2 \\ f_2(y_1, y_2) &= -ky_2 \cos y_1 + \tan y_1 \,. \end{aligned}$$

On observe $f(0) = 0$ et

$$\nabla_y f(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} =: A \,.$$

On calcule les valeurs propres de A,

$$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda \mathrm{Id}_{N\times N}) = (k+\lambda)^2 + 1 \,.$$

Les valeurs propres de A sont alors

$$\lambda_\pm = -k \pm \mathrm{i} \,.$$

Cela veut dire que toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles non-positives, et la solution zéro est asymptotiquement stable d'après le théorème.

Maintenant on va traiter un deuxième cas particulier de la situation rencontrée dans (5.7). Notamment, on suppose que l'on connaisse les propriétés de stabilité de la partie linéaire.

Théorème 5.11. *Soient $A \in C^0([0,\infty); \mathbb{R}^{N\times N})$, $r \in C^0([0,\infty)\times\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, $p \in C^0([0,\infty); [0,\infty))$ et $\eta > 0$ tels que*

$$\begin{aligned} &\|r(x,y)\| \leq p(x)\|y\| \qquad \textit{pour tous } x \in [0,\infty), y \in B(0,\eta)\,, \\ \textit{et } &\int_0^\infty p(t)\mathrm{d}t < \infty \,. \end{aligned}$$

Alors la solution zéro de

$$y'(x) = A(x)y(x) + r(x, y(x))$$

(i) est uniformément stable si la solution zéro de $y'(x) = A(x)y(x)$ est uniformément stable.

(ii) est uniformément et asymptotiquement stable et si la solution zéro de $y'(x) = A(x)y(x)$ est uniformément et asymptotiquement stable.

Démonstration. Soit $\Phi(x)$ une matrice fondamentale pour l'équation homogène $y'(x) = A(x)y(x)$. On constate d'abord que la solution à condition initiale $y(x_0) = y_0$ satisfait l'équation intégrale

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0} \Phi(x)\Phi^{-1}(t)r(t, y(t))\mathrm{d}t \,,$$

d'après le Théorème 4.16.

(i) Soit $k > 0$ avec $\|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\| \leq k$ (un tel k existe d'après le Théorème 5.7 (ii)). Soit $\varepsilon > 0$. Si $\|y(t)\| \leq \eta$ pour $t \in (x_0, x)$, alors on a

$$\|y(t)\| \leq k\|y_0\| + \int_{x_0}^{x} kp(t)\|y(t)\|\mathrm{d}t\,.$$

Par une variation du Lemme de Gronwall, cette inégalité implique

$$\|y(x)\| \leq k\|y_0\| \exp\left(\int_{x_0}^{x} kp(t)\mathrm{d}t\right)\,.$$

(Preuve : TP.) On pose

$$\delta := \frac{\varepsilon}{k \exp\left(\int_0^\infty kp(t)\mathrm{d}t\right)}$$

et on obtient facilement $\|y(x)\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0, \infty)$ si $y_0 \in B(0, \delta)$, ce qui prouve la stabilité uniforme de la solution zéro.

(ii) D'après la partie (i) on sait que la solution zéro est uniformément stable. Soient $\eta > 0$, $x_0 \in [0, \infty)$ et $\bar{\delta} > 0$ tel que

$$\lambda(x; x_0, y_0) \in B(0, \eta) \quad \forall x \geq x_0,\, \forall y_0 \in B(0, \bar{\delta})\,,$$

où, comme d'habitude, λ dénote la solution générale. On a

$$\|\lambda(x; x_0, y_0)\| \leq \underbrace{\|\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0\|}_{\to 0 \text{ pour } x\to\infty} + \int_{x_0}^{x} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(t)\|p(t)\|y(t)\|\mathrm{d}t\,. \tag{5.12}$$

Soit $T > 0$ tel que

$$\int_T^\infty p(t)\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{\eta k}$$

avec k comme dans la preuve de (i), et ε est choisi arbitrairement. Alors on a

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(t)\|p(t)\|y(t)\|\mathrm{d}t &\leq \int_{x_0}^{T} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(t)\|p(t)\|y(t)\|\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{T}^{x} \|\Phi(x)\Phi^{-1}(t)\|p(t)\|y(t)\|\mathrm{d}t \\ &\leq \underbrace{\|\Phi(x)\|(T - x_0) \max_{t\in[x_0,T]} \left(p(t)\|\Phi^{-1}(t)\|\right)\eta}_{\to 0 \text{ pour } x\to\infty} + \underbrace{k\eta \int_T^\infty p(t)\mathrm{d}t}_{\leq \varepsilon}\,.\end{aligned} \tag{5.13}$$

La combinaison de (5.12) et (5.13) nous donne

$$\limsup_{x\to\infty} \|\lambda(x; x_0, y_0)\| \leq \varepsilon\,,$$

et puisque ε était arbitraire, on a $\|\lambda(x; x_0, y_0)\| \to 0$, ce qui prouve la stabilité asymptotique. □

Exemple 5.12. On considère l'EDO scalaire de deuxième ordre

$$u''(x) + \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}u'(x) + 2u(x) - \frac{1}{(x + 1)^{3/2}}u(x)^2 = 0\,.$$

Cette équation est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{ll} y_1'(x) & = y_2(x) \\ y_2'(x) & = -\frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} y_2(x) - 2y_1(x) + \frac{1}{(x+1)^{3/2}} y_1(x)^2 \,. \end{array}\right. \tag{5.14}$$

On va considérer ce système comme une perturbation du système

$$\left\{\begin{array}{ll} y_1'(x) & = y_2(x) \\ y_2'(x) & = -2y_1(x) - 3y_2(x) \,. \end{array}\right.$$

avec la perturbation $r(x, y(x))$ définie par

$$\begin{aligned} r_1(y_1, y_2) &= 0 \\ r_2(y_1, y_2) &= \frac{3}{\mathrm{e}^x + 1} y_2(x) + \frac{1}{(x+1)^{3/2}} y_1(x)^2 \,. \end{aligned}$$

Pour $|y_1| \leq 1$, on a $|y_2| \leq \|y\|$, $y_1^2 \leq \|y\|$, et alors

$$\|r(y_1, y_2)\| = |r_2(y_1, y_2)| \leq \left(\frac{3}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{1}{(x+1)^{3/2}} \right) \|y\| \,.$$

On démontre facilement

$$\int_0^\infty \left(\frac{3}{\mathrm{e}^x + 1} + \frac{1}{(x+1)^{3/2}} \right) \mathrm{d}x < \infty \,.$$

Alors les conditions du Théorème 5.11 sont satisfaites avec $p(x) = \frac{3}{\mathrm{e}^x+1} + \frac{1}{(x+1)^{3/2}}$, et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} ,$$

avec les valeurs propres -1 et -2. Alors l'équation homogène est uniformément et asymptotiquement stable, et par le Théorème 5.11 la solution zéro de (5.14) est uniformément et asymptotiquement stable.

Quand il y a une valeur propre de A avec partie réelle non-négative, la solution zéro est instable :

Théorème 5.13. *Soit $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Supposons que une des valeurs propres de A, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, aie une partie réelle non-négative,*

$$\exists i \in \{1, \dots, N\} : \operatorname{Re} \alpha_i > 0 \,,$$

et soit $r : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ telle que

$$\lim_{\bar{y} \to 0} \frac{r(x, \bar{y})}{\|\bar{y}\|} = 0 \qquad \textit{uniformément en } x \,. \tag{5.15}$$

Alors la solution zéro de $y'(x) = Ay(x) + r(x, y(x))$ est instable.

Démonstration. Soit $\alpha > 0$ le minimum des valeurs propres de A non-négatives. Par une variation du Théorème de la forme normale de Jordan, il existe $M, J \in \mathbb{C}^{N\times N}$ avec les propriétés suivantes :

- M est inversible
- $A = MJM^{-1}$
- $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2)$, avec $J_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $J_2 \in \mathbb{C}^{(N-m)\times(N-m)}$

— Sur la diagonale de J_1, on trouve les valeurs propres non-négatives de A,

$$0 < (J_1)_{ii} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} \quad \text{pour } i \in \{1, \ldots, m\}\,.$$

— Sur la diagonale de J_2, on trouve les valeurs propres négatives de A,

$$0 \geq (J_2)_{ii} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} \quad \text{pour } i \in \{m+1, \ldots, N\}\,.$$

— Sur la sur-diagonale de J, on trouve les valeurs 0 et $\alpha/6$,

$$J_{i(i+1)} \in \{0, \alpha/6\} \quad \text{pour } i \in \{1, \ldots, N-1\}\,.$$

— Tous les autres composantes de J valent 0,

$$J_{ij} = 0 \quad \text{pour } j - i \notin \{0, 1\}\,.$$

La preuve de l'existence de M, J est un exercice. On écrit $g(x,y) = M^{-1}f(x,y)$ et on a que $y(x)$ est une solution pour $y'(x) = Ay(x) + r(x, y(x))$ si et seulement si $\tilde{y}(x) := M^{-1}y(x)$ est une solution pour

$$\tilde{y}(x)' = J\tilde{y}(x) + g(x, \tilde{y}(x))\,. \tag{5.16}$$

De plus,

$$g(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,\infty)\,, \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\|g(x,y)\|}{\|y\|} = 0 \text{ uniformément pour } x \in [0,\infty)\,.$$

On choisit $\eta > 0$ tel que pour $\|y\| \leq \eta$, on a

$$\|g(x,y)\| \leq \frac{\alpha}{6}\|y\| \quad \forall x \in [0,\infty)\,. \tag{5.17}$$

On va dénoter la solution générale de (5.16) par $\lambda(x; 0, y_0)$, et on écrit aussi $z(x) = \lambda(x; 0, y_0)$ pour abréger la notation.
Soit $\delta > 0$ donné. On va démontrer qu'il existe $y_0 \in B(0, \delta)$ tel que

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \|\lambda(x, 0, y_0)\| > \eta\,. \tag{5.18}$$

L'inégalité (5.18) va prouver en particulier l'instabilité de la solution zéro de (5.16), et alors l'instabilité de la solution zéro de $y'(x) = Ay(x) + r(x, y(x))$. On démontre (5.18) par l'absurde ; alors on suppose $\|z(x)\| = \|\lambda(x, 0, y_0)\| \leq \eta$ à partir de maintenant, et on a $\|g(x,z)\| \leq \frac{\alpha}{6}\|z\|$. (On note que pour le moment y_0 n'est pas encore fixé ; les calculs que l'on fera avant de le choisir tiennent de toute façon.)
On écrit

$$R_1^2 = \sum_{i=1}^{m} |z_i(x)|^2\,, \qquad R_2^2 = \sum_{i=m+1}^{N} |z_i(x)|^2\,.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} R_1^2(x) = \sum_{i=1}^{m} z_i'(x)\bar{z}_i(x) + \bar{z}_i'(x) z_i(x)$$

et

$$z_i'(x) = \sum_{j=1}^{m} (J_1)_{ij} z_j(x) + (g(x, z(x)))_i \quad \text{pour } i = 1, \ldots m\,.$$

Cela implique

$$\sum_{i=1}^{m} z_i'(x)\bar{z}_i(x) \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha |z_i(x)|^2 - \left| \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha}{6} \bar{z}_i(x) z_{i+1}(x) \right| - \left| \sum_{i=1}^{m} \bar{z}_i(x) \left(g(x, z(x)) \right)_i \right| ,$$
$$\geq \alpha R_1^2 - \frac{\alpha}{6} R_1^2 - \frac{\alpha}{6} R_1 (R_1 + R_2) ,$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} R_1^2(x) = 2R_1(x) R_1'(x) \geq 2 \left(\alpha R_1^2 - \frac{\alpha}{6} R_1^2 - \frac{\alpha}{6} R_1 (R_1 + R_2) \right) ,$$

et alors

$$R_1' \geq \frac{5\alpha}{6} R_1 - \frac{\alpha}{6} (R_1 + R_2) .$$

De la même manière, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} R_2^2(x) \leq 2 \left(\frac{\alpha}{6} R_2^2 + \frac{\alpha}{6} R_2 (R_1 + R_2) \right) ,$$

et

$$R_2' \leq \frac{\alpha}{6} R_2 + \frac{\alpha}{6} (R_1 + R_2) .$$

On prend la différence de ces estimations,

$$(R_1 - R_2)' \geq \alpha \left(\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) R_1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) R_2 \right) = \frac{\alpha}{2} (R_1 - R_2) .$$

On choisit y_0 tel que

$$R_1(0) = 2R_2(0) = \frac{\delta}{2} .$$

Alors avec $\rho = R_1 - R_2$ on obtient, après une intégration,

$$\rho(x) \geq \frac{\delta}{4} + \int_0^x \frac{\alpha}{2} \rho(t) \mathrm{d}t$$

pour tout $x \in [0, \infty)$. Par le Lemme de Gronwall, on obtient

$$\rho(x) \geq \frac{\delta}{4} \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2} x}$$

pour tout $x \in [0, \infty)$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\sup_{x \in [0,\infty)} \|z(x)\| \geq \sup_{x \in [0,\infty)} |R_1(x) - R_2(x)| = +\infty .$$

C'est clairement une contradiction à l'hypothèse $\|z(x)\| \leq \eta$, ce qui prouve (5.18). □

5.3. **Fonctions de Lyapunov.**

Exemple 5.14. On considère le pendule simple,

$$F = ml \frac{\mathrm{d}^2 \phi}{\mathrm{d}t^2} = -mg \sin \phi$$

ce qui est évidemment équivalent à

$$\phi'' + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 . \tag{5.19}$$

Avec $k := \frac{g}{l}$, on peut réécrire cette équation de deuxième ordre comme un système de premier ordre,

$$\begin{cases} y_1'(x) & = y_2(x) \\ y_2'(x) & = -k \sin y_1(x) \,. \end{cases}$$

On calcule la dérivée du côté droit,

$$\nabla_y \begin{pmatrix} y_2 \\ -k \sin y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} =: A \,,$$

et on va réćrire le système de nouveau comme suit,

$$\begin{cases} y_1'(x) & = y_2(x) + r_1(y(x)) \\ y_2'(x) & = -ky_1(x) + r_2(y(x)) \,, \end{cases}$$

avec $r_1(y) = 0$, $r_2(y) = k(y_1 - \sin y_1) = o(\|y\|)$ pour $\|y\| \to 0$. On note que les valeurs propres de A sont $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{k}\mathrm{i}$, et alors $\operatorname{Re} \alpha_{1,2} = 0$. Cela veut dire que les théorèmes 5.8 et 5.13 ne peuvent pas s'appliquer ici.

En multipliant (5.19) par ϕ' et en intégrant, on obtient

$$\underbrace{\frac{1}{2}\phi'(t)^2 + k\,(1 - \cos\phi(t))}_{V(\phi(t),\phi'(t))} = \text{ const.}$$

Pour chaque solution ϕ, on a $V(\phi(t), \phi'(t)) = V(\phi(0), \phi'(0)) \forall t \in [0, \infty)$. Avec cette identité, il n'est pas difficile de démontrer la stabilité uniforme de la solution zéro. Au lieu de donner la preuve, on va généraliser cette situation, et prouver un énoncé analogue pour la situation plus générale (voir le théorème 5.19 ci-dessous).

Soient un ouvert $D \subset \mathbb{R}^N$ avec $0 \in D$, $f \in C^0(D)$ localement lipschitzienne. Dans ce sous-chapitre, on va traiter des équations autonomes, c'est à dire sous la forme

$$y'(x) = f(y(x)) \,. \tag{5.20}$$

Définition 5.15 (Fonctions de Lyapunov)**.** *Soit $V \in C^0(D)$ avec $V(0) = 0$. La fonction V est nommée*

(i) semi-définie positive en 0 si il existe $l > 0$ tel que $V(y) \geq 0$ pour tout $y \in \overline{B(0,l)} \subset D$;
semi-définie négative en 0 si il existe $l > 0$ tel que $V(y) \leq 0$ pour tout $y \in \overline{B(0,l)} \subset D$

(ii) définie positive en 0 si il existe $l > 0$ tel que $V(y) > 0$ pour tout $y \in \overline{B(0,l)} \setminus \{0\} \subset D$;
définie négative en 0 si il existe $l > 0$ tel que $V(y) \leq 0$ pour tout $y \in \overline{B(0,l)} \setminus \{0\} \subset D$

(iii) indéfinie si V change de signe dans chaque voisinage de 0.

Exemple 5.16. On pose $D := \mathbb{R}^2$.

(i) $V(y_1, y_2) = (y_1 + y_2)^2$ est semi-définie positive main non pas définie positive
(ii) $V(y_1, y_2) = 3y_1^2 + 2y_2^6$ est définie positive
(iii) $V(y_1, y_2) = y_1 y_2$ est indéfinie.

Notation 5.17. On suppose que l'on soit donné une équation du type (5.20). Pour $D \subset \mathbb{R}^N$, $V \in C^1(D)$, on écrit

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) f_i(y)$$

Remarque 5.18. Pour tout $x_0 \in [0, \infty)$, $y_0 \in D$ et $x \in I_{\max}(x_0, y_0)$, on a

$$V(\lambda(x; x_0, y_0)) = V(y_0) + \int_{x_0}^{x} \dot{V}(\lambda(t; x_0, y_0)) \mathrm{d}t \tag{5.21}$$

où λ dénote la solution générale de l'équation (5.20).

Théorème 5.19. *Soient un ouvert $D \subset \mathbb{R}^N$ avec $0 \in D$, $f \in C^0(D)$ localement lipschitzienne avec $f(0) = 0$ et $V \in C^1(D)$ avec $V(0) = 0$.*

(i) Si V est définie positive en 0 et $\dot{V}$ est semi-définie négative en 0, alors la solution zéro de (5.20) *est uniformément stable.*

(ii) Si V est définie positive en 0 et $\dot{V}$ est définie négative en 0, alors la solution zéro de (5.20) *est asymptotiquement stable.*

(iii) Si dans chaque voisinage de 0 il existe x_0 avec $V(x_0) > 0$ et $\dot{V}$ est définie positive, alors la solution zéro de (5.20) *est instable.*

Démonstration. (i) Soient $l > 0$ comme dans la définition 5.15, et $\varepsilon > 0$ donné. On pose

$$\eta := \frac{1}{2} \min V \left(\overline{B(0, l)} \setminus B(0, \varepsilon) \right)$$

et on choisit $\delta > 0$ tel que $\max V(\overline{B(0, \delta)}) < \eta$. Alors pour $y_0 \in B(0, \delta)$, on a par (5.21)

$$\begin{aligned} V(\lambda(x; x_0, y_0)) &= V(y_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\dot{V}(\lambda(t; x_0, y_0))}_{\leq 0} \mathrm{d}t \\ &< \eta \,. \end{aligned}$$

Par notre choix de η, on a

$$V^{-1}([0, \eta]) \cap \left(\overline{B(0, l)} \setminus B(0, \varepsilon) \right) = \emptyset$$

et alors, par $\lambda(x; x_0, y_0) = y_0 \in B(0, \delta) \subset B(0, \varepsilon)$ et la continuité de λ, on a

$$\lambda(x; x_0, y_0) \in B(0, \varepsilon) \quad \forall x \in [x_0, \infty) \,.$$

Cela prouve la stabilité uniforme.

(ii) Soit l comme ci-dessus. Par (5.21) on a que $x \mapsto V(\lambda(x; x_0, y_0))$ est une fonction décroissante positive, pour tout $y_0 \in B(0, l)$. Alors elle possède une limite $l(y_0) := \lim_{x \to \infty} V(\lambda(x; x_0, y_0))$. On va démontrer $l(y_0) = 0$ par l'absurde : Supposons $l(y_0) > 0$. Alors il existe[2] $x_1 > x_0$ et $\eta > 0$ tel que

$$\|\lambda(x; x_0, y_0)\| > \eta \quad \forall x \in [x_1, \infty) \,.$$

Cela implique l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$\dot{V}(\lambda(x; x_0, y_0)) < -\alpha \quad \forall x \in [x_1, \infty) \,,$$

2. Preuve : Supposons le contraire. Alors il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $x_k \to \infty$, $\lambda(x_k; x_0, y_0) \to 0$ et $V(\lambda(x_k; x_0, y_0)) > l(y_0)/2$. Cela est une contradiction à la continuité de V et $V(0) = 0$.

et alors, par (5.21), on a $\lim_{x\to\infty} V(\lambda(x;x_0,y_0)) = -\infty$, ce qui est une contradiction à l'hypothèse $V \geq 0$.
Alors

$$\lim_{x\to\infty} V(\lambda(x;x_0,y_0)) = 0 \quad \forall y_0 \in B(0,l)\,.$$

Puisque $V^{-1}(0) \cap \overline{B(0,l)} = \{0\}$, cela implique

$$\lim_{x\to\infty} \lambda(x;x_0,y_0) = 0 \quad \forall y_0 \in B(0,l)\,,$$

ce qui prouve la stabilité asymptotique.

(iii) Soit l comme ci-dessus. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\max V(\overline{B(0,\varepsilon)}) < \min V(\overline{B(0,l)} \setminus B(0,l/2))\,.$$

On va prouver par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver $\delta > 0$ tel que $\lambda(x;x_0,y_0) \in B(0,\varepsilon)$ pour tout $x \in [x_0,\infty)$ et $y_0 \in B(0,\delta)$. Cela va prouver l'instabilité de la solution zéro.

Supposons alors qu'un tel δ existe. La boule $B(0,\delta)$ contient un point y_0 avec $V(y_0) > 0$. Alors, par (5.21),

$$V(\lambda(x;x_0,y_0) \geq V(y_0) \quad \forall x \in [x_0,\infty)\,. \tag{5.22}$$

Alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|\lambda(x;x_0,y_0)\| \geq \eta \quad \forall x \in [x_0,\infty)\,.$$

Cela implique l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$\dot{V}(\lambda(x;x_0,y_0)) \geq \alpha \quad \forall x \in [x_0,\infty)\,,$$

ce qui nous donne en combinaison avec (5.21),

$$V(\lambda(x;x_0,y_0)) \to \infty \quad \text{pour } x \to \infty\,.$$

Cela est une contradiction à $\lambda(x;x_0,y_0) \in B(0,\varepsilon)$ pour tout $x \in [x_0,\infty)$ (puisque cette dernière hypothèse implique $V(\lambda(x;x_0,y_0)) \leq \min V(\overline{B(0,l)} \setminus B(0,l/2))$. Cela complète la preuve. $\square$

Remarque 5.20. Comment déterminer une fonction de Lyapunov pertinente qui possède une des propriétés (i), (ii), (iii) formulées dans le théorème 5.19 ? Malheureusement, il n'y a pas de réponse conclusive à cette question. C'est une tâche qui dépend de l'EDO sous considération, et il n'y a pas de garantie qu'il existe une fonction de Lyapunov dans tous les cas. L'expérience et la connaissance de quelques exemples peuvent aider à deviner la bonne fonction de Lyapunov. On va surtout considérer des exemples dans deux dimensions. On parle d'équations "planaires" dans ce cas. Souvent, une fonction de Lyapunov peut être construite à partir d'un ansatz

$$V(y) = V(y_1,y_2) = ay_1^{2p} + by_2^{2q}$$

avec $a,b > 0$, $p,q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ou

$$V(y) = \sum_{i,j=1}^{M} a_{ij}\, y_1^{2i}\, y_2^{2j}$$

Cette forme assure automatiquement que V soit définie positive.

Exemple 5.21. On considère l'EDO planaire $y'(x) = f(y(x))$ avec

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= -y_1 + y_1 y_2^2 \\ f_2(y_1, y_2) &= -2y_1^2 y_2 - y_2^3 \,. \end{aligned}$$

D'abord on note que les théorèmes 5.8 et 5.13 ne sont pas applicable, puisque

$$\nabla_y f(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres -1 et 0. On pose $V(y) = ay_1^2 + by_2^2$ et on a

$$\begin{aligned} \dot V(y) &= \nabla_y V(y) \cdot f(y) \\ &= 2ay_1(-y_1 + y_1 y_2^2) + 2by_2(-2y_1^2 y_2 - y_2^3) \\ &= -2ay_1^2 - 2by_2^2 + y_1^2 y_2^2 (2a - 4b) \end{aligned}$$

On choisit $a = 2b > 0$ et avec ce choix, $\dot V$ est définie négative. Cela implique que le cas (ii) du théorème 5.19 est applicable, et alors la solution zéro de l'EDO est asymptotiquement stable.

Exemple 5.22. On considère l'EDO planaire $y'(x) = f(y(x))$ avec

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= 2y_1 y_2 + y_1^3 \\ f_2(y_1, y_2) &= -y_1^2 + y_2^5 \,. \end{aligned}$$

On a $\nabla_y f(0) = 0$, (toutes les valeurs propres égales à 0) et alors les théorèmes sur les perturbations des équations linéaires ne peuvent pas être appliqués. On pose $V(y) = ay_1^2 + by_2^2$ et on trouve

$$\begin{aligned} \dot V(y) &= 2ay_1(2y_1 y_2 + y_1^3) + 2by_2(-y_1^2 + y_2^5) \\ &= 2ay_1^4 + 2by_2^6 + y_1^2 y_2 (4a - 2b) \end{aligned}$$

On choisit $2a = b > 0$ et cela nous donne $\dot V$ positive définie, ce qui par le Théorème 5.19 (iii) implique que la solution zéro de l'EDO est instable.

Exemple 5.23. On considère l'EDO planaire $y'(x) = f(y(x))$ avec

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= -y_1^3 - y_2 \\ f_2(y_1, y_2) &= y_1^5 - 2y_2^3 \,. \end{aligned}$$

On a

$$\nabla_y f(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et alors toutes les valeurs propres sont zéro. On pose $V(y) = ay_1^{2p} + by_2^{2q}$ et on a

$$\begin{aligned} \dot V(y) &= 2pay_1^{2p-1}(-y_1^3 - y_2) + 2qby_2^{2q-1}(y_1^5 - 2y_2^3) \\ &= -2pay_1^{2p+2} - 4qby_2^{2q+2} - 2pay_1^{2p-1} y_2 + 2qby_2^{2q-1} y_1^5 \end{aligned}$$

On voudrait que

$$-2pay_1^{2p-1} y_2 + 2qby_2^{2q-1} y_1^5 \overset{!}{=} 0 \,,$$

et alors on choisit $q = 1$, $p = 3$, et $3a = b > 0$. Ce choix nous donne un $\dot V$ définie négative, et alors la solution zéro de l'EDO est asymptotiquement stable par le Théorème 5.19 (ii).

Exemple 5.24. Soient $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ et $\delta > 0$ tels que

$$\begin{aligned} h(y,v)v &\geq 0 \\ g(y)y &> 0 \text{ pour } y \in \{-\delta, \delta\} \setminus \{0\}\,. \end{aligned}$$

On considère l'EDO scalaire

$$y''(x) + h(y(x), y'(x)) + g(y(x)) = 0\,.$$

Cela est une forme générale pour le mouvement d'un point de masse dans un potentiel g avec terme de friction h. On réécrit l'équation comme

$$\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ -h(u_1(x), u_2(x)) - g(u_1(x)) \end{pmatrix} = f(u(x))$$

Comme fonction de Lyapunov, on choisit l'énergie :

$$V(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} + \int_0^{u_1} g(t)\mathrm{d}t\,.$$

Par notre hypothèse sur g, on a que V est définie positive en 0. De plus,

$$\dot{V}(u) = g(u_1)u_2 - u_2(h(u_1, u_2) + g(u_1)) = -u_2 h(u_1, u_2)\,,$$

ce qui est définie négative en 0. Alors la solution zéro de l'EDO est asymptotiquement stable.

Exercices.

(1) Soient $a, b \in C^0([0,\infty))$ des fonctions positives, et $y \in C^1([0,\infty))$ telles que

$$y'(x) \leq a(x)y(x) + b(x)$$

pour tout $x \geq 0$. Prouvez que

$$y(x) \leq \exp\left(\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right)\left(y(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s} b(t)\mathrm{d}t\right) \qquad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Puis, démontrez

$$y'(x) \geq a(x)y(x) + b(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) \geq \exp\left(\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right)\left(y(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}s} b(t)\mathrm{d}t\right).$$

(2) Soient $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ et $\eta > 0$. Prouvez qu'il existe une matrice inversible $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ telle que $A = MJM^{-1}$ avec $J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_L)$, et pour $l = 1, \ldots, l$, la matrice carrée J_l a la forme

$$J_l = \lambda_l \mathrm{Id}_{m_l \times m_l} + \eta N_l$$

où λ_l est une valeur propre de A, et $N_l \in \mathbb{C}^{m_l \times m_l}$ est donnée par

$$(N_l)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i+1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(3) (i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez la stabilité du système linéaire

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} y(x)\,.$$

(ii) Pour quelles valeurs de α pouvez-vous déterminer la stabilité de la solution zéro du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= -y_2(x) + y_1(x)^3 \\ y_2'(x) &= y_1(x) + \alpha y_2(x) - 2y_1(x)y_2(x)^2 \text{ ?} \end{cases}$$

(iii) Pour quelles valeurs de α pouvez-vous déterminer la stabilité de la solution zéro du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= \mathrm{e}^{-x} y_1(x)^3 - y_2(x) \\ y_2'(x) &= \frac{x^2}{1+x^2} y_1(x) + \alpha y_2(x) \text{ ?} \end{cases}$$

(4) Par linéarisation, déterminez la stabilité de la solution zéro pour les systèmes suivants :

$$\text{(i)} \begin{cases} y_1'(x) &= y_1(x) - 6\sin y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x)\cos y_1(x) + y_1(x)y_2(x) \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} y_1'(x) &= -2y_1(x) + \mathrm{e}^{y_2(x)} - \cos y_2(x) \\ y_2'(x) &= \sin y_1(x) - y_2(x) + y_1(x)y_2(x) \end{cases}$$

(5) Démontrer que la solution zéro du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= -y_1(x)^3 + 2y_2(x)^3 \\ y_2'(x) &= -2y_1(x)y_2(x)^2 \end{cases}$$

est asymptotiquement stable.

(6) Trouver les points d'équilibre du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= \ln(2 - y_2(x)^2) \\ y_2'(x) &= \exp(y_1(x)) - \exp(y_2(x)) \end{cases}$$

et déterminer la stabilité de ces points d'équilibre.

(7) Déterminer le type de stabilité de la solution zéro du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= -3y_1(x)^3 - y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x)^5 - 2y_2(x)^3 \end{cases}$$

(8) Déterminer le type de stabilité de la solution zéro du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= -y_1(x)^3 - y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x)^5 \end{cases}$$

(9) Trouver les points d'équilibre du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_2(x)^2 - 2y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) &= \ln\left(\frac{1}{2} + y_1(x) + y_2(x)\right) \end{cases}$$

et déterminer la stabilité de ces points d'équilibre.

(10) Déterminer le type de stabilité de la solution zéro du système

$$\begin{cases} y_1'(x) &= y_2(x)^3 \\ y_2'(x) &= y_1(x)^7 \end{cases}$$

Email address: `heiner.olbermann@uclouvain.be`