LMAT1223
Équations différentielles ordinaires

Année académique 2022–23 ; 2ème quadrimestre

H. Olbermann, C. François

Feuille de devoirs 1, 21 février 2023

Exercice 1 (3 + 4 points)

Résoudre les PCI :

$$\text{(i)} \begin{cases} y'(x) &= \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)} \\ y(1) &= 1 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} y'(x) &= \frac{y(x)+2x+3}{y(x)-5x+6} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Indication : Si nécessaire, utiliser des fonctions réciproques non-classiques pour la solution (comme dans l'exemple 2.8 du syllabus).

Exercice 2 (4 points)

Trouvez un facteur intégrand pour l'équation

$$20xy(x)^2 + 9y(x)^3 + (10x^2y(x) + 9xy(x)^2)y'(x) = 0$$

qui dépend seulement de x. Déterminez toutes les solutions pour $x > 0$.

Exercice 3 (2 + 1 + 2 points)

Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Résoudre le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= \sqrt[5]{|y(x)|} \\ y(\varepsilon) &= \left(\frac{4}{5}\varepsilon\right)^{5/4} \end{cases}$$

sur $(0, \infty)$ et le PCI

$$\begin{cases} y'(x) &= \sqrt[5]{|y(x)|} \\ y(-\varepsilon) &= -\left(\frac{4}{5}\varepsilon\right)^{5/4} \end{cases}$$

sur $(-\infty, 0)$ par la méthode de séparation des variables.

(ii) Démontrer que les deux solutions sont les restrictions d'une fonction $w \in C^1(\mathbb{R})$ qui est une solution d'un PCI avec conditions initiales en 0 définie sur $\mathbb{R}$, et qu'une autre solution du même PCI est donnée par $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = 0$.

(iii) Pour $a < b$, démontrer que la fonction

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(x-a) & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \\ w(x-b) & \text{si } x > b \end{cases}$$

est dans $C^1(\mathbb{R})$ et qu'elle est une solution du PCI trouvé dans (ii).

Exercice 4 : (2,5 + 1,5 points)

Un modèle de croissance pour une population u est donné par l'équation

$$u'(x) = u(x)\left(b(x) - c(x)u(x)\right) ,$$

où $b, c \in C^0(\mathbb{R})$ sont strictement positives (Modèle de Verhulst).

(i) On pose $B(x) = \int_0^x b(t)\mathrm{d}t$ et on suppose $\lim_{x\to\infty} B(x) = +\infty$. Démontrez qu'il existe une solution unique positive pour la valeur initiale $u(0) = u_0 > 0$ et que

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b(x)}{c(x)} ,$$

supposant que la limite sur le côté droite existe.

Indication : Utilisez le changement de variables $y = u^{-1}$ et la règle de L'Hôpital.

(ii) Pour le cas de fonctions constantes $b(x) = \bar{b}$, $c(x) = \bar{c}$, trouvez la formule explicite pour $u(x)$.

Vos solutions doivent être soumises à l'assistant jusqu'au 28 février