量子力学基础习题课参考答案

1. b/λ_m，$4\pi R^2\sigma\frac{b^4}{\lambda^4}$;
2. $\left(\frac{Pl^2}{\sigma R^2}\right)^{1/4}$, $b\left(\frac{\sigma R^2}{Pl^2}\right)^{1/4}$;
3. b/λ, $\sigma\frac{b^4}{\lambda^4}$, $\frac{\sigma b^4 r^2}{\lambda^4 l^2}$;
4. $k\sigma T^4 S$;
5. 5760K, 2.07;
6. 0.6;
7. $(h\nu_1 - A)/e$, A/h;
8. $2h\nu + E_k$;
9. $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{e(U_1-U_2)}{c}$;
10. $\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0}$, $\frac{hc}{\lambda_0}$;
11. 6;
12. 6;
13. $\hbar$, 0;
14. 1, 0, $\pm 1/2$;
15. 粒子在 $x - dx$ 范围内的几率;
16. 电子自旋的存在;
17. $T = b/\lambda$, $P = 4\pi R^2\sigma\left(fracb\lambda_m\right)^4$;
18. $\sqrt{2}\hbar$, 0, $\pm\hbar$, $\sqrt{3}\hbar/2$;
19. $h\nu_0 + \frac{(eRB)^2}{2m}$;
20. $\frac{1}{c^2}\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4 4\pi R^2$;
21. $R = \frac{mvD}{1.22h}$;
22. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\varphi = E\varphi$, $\frac{3}{2}\hbar\omega$;
23. $hc/\lambda + m_0c^2 = hc/\lambda' + mc^2$, $p^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{7}\lambda\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\varphi$, $\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2}$;
24. $h = \frac{36e(U_1-U_2)}{19Rc}$ 或 $h = \frac{2e(U_1-U_2)}{Rc}$, $A = \frac{e}{2}(U_1 - 3U_2)$ 或者 $A = \frac{e}{19}(8U_1 - 27U_2)$;
25. 4, 6;
26. $\frac{1}{9}$;
27. 1 : 1,4 : 1;
28. $\frac{h}{\sqrt{2m_eE_k}}$, $\arcsin\left(\frac{h}{2d\sqrt{2m_eE_k}}\right)$, $\frac{2.44Dh}{a\sqrt{2m_eE_k}}$;
29. 单值，连续，有限；
30. 物质波的存在或电子的波动性等;
31. 0, $\sqrt{2}\hbar$, $\sqrt{6}\hbar$;
32. $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$;
33. $\frac{h}{\sqrt{2meU}}$, $\frac{2Dh}{a\sqrt{2meU}}$;
34. $\sqrt{6}\hbar$, $-2\hbar$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$;
35. $\frac{h}{\sqrt{2meU}}$;
36. **注意**：ppt 上题目势能表达式在 $x < 0$ 时有误，正确的应该是 $\frac{1}{2}k(x+a)^2$.

    (1)
    $$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{2}k(x+a)^2\psi(x) = E\psi(x) & -\infty < x \le 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{1}{2}k(x-a)^2\psi(x) = E\psi(x) & -\infty < x \le 0 \end{cases}$$

    (2) $\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$, $\left.\frac{d\psi_1(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right|_{x=0}$;

    (3) 选图 (b)，因为波函数应满足连续性条件；

    (4) $\int_{-\infty}^{0}|\psi_1(x)|^2dx$，$\frac{1}{2}$.
37. (1) 归一化条件为 $\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_n(x)|^2dx = 1$，代入 $\Phi_n(x)$ 的具体表达式得

    $$\int_0^L A^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 1$$

即

$$A=\sqrt{\frac{2}{L}}.$$

(2) 在 $0<x<L$ 区域，薛定谔方程具有形式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=E\psi(x)$$

当 $\psi(x)=\Phi_n(x)$ 时, 方程改写为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Phi_n(x)=E_n\Phi_n(x)$$

所以

$$E_n=\frac{-1}{\Phi_n(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Phi_n(x)=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2mL^2}.$$

(3) $\nu=\frac{E_4-E_1}{2\pi\hbar}=\frac{15\hbar\pi}{4mL^2}$.

38. (1) 归一化条件为 $\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x)|^2dx=1$，代入 $\Phi(x)$ 的具体表达式得

$$\int_{-a/2}^{a/2}A^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=1$$

即

$$A=\sqrt{\frac{2}{a}}.$$

(2) 概率为

$$\int_0^{a/4}A^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}.$$

(3) 在 $-a/2<x<a/2$ 区间内，薛定谔方程写成

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x)=E\Phi(x)$$

所以

$$E=\frac{-1}{\Phi(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x)=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}.$$

39. (1) 归一化条件为 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$，代入 $\psi(x)$ 的具体表达式得

$$\int_0^{\infty}A^2xe^{-2\lambda x}dx=1$$

即

$$A=2\lambda.$$

归一化后的波函数为

$$\psi(x)=\begin{cases}2\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

(2)

$$\rho(x)=|\psi(x)|^2=\begin{cases}4\lambda^2xe^{-2\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

(3) $\frac{d\rho(x)}{dx}=0$ 来确定 $\rho(x)$ 的极值，得 $x=\frac{1}{2\lambda}$ 处概率密度最大。

40. (1) 当 $n=3$ 时，$\phi_3(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$，概率密度为 $\rho(x)=|\phi_3(x)|^2=\frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$，该函数最大值在 $\frac{3\pi x}{L}=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k=0,1...)$ 位置，取 $k=0,1,2$(因 $0<x<L$) 解得 $x=L/6,\ L/2,\ 5L/6$ 时概率密度最大，概率密度最小位置满足 $\frac{3\pi x}{L}=k\pi$, 取 $k=0,1,2,3$，得 $x=0,\ L/3,\ 2L/3,\ L$ 以及 $x<0$ 和 $x>L$ 处概率密度最小。

(2) 在 $0<x<L$ 区域，薛定谔方程具有形式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)=E\phi(x)$$

当 $\phi(x)=\phi_n(x)$ 时, 方程改写为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi_n(x)=E_n\phi_n(x)$$

所以

$$E_n=\frac{-1}{\phi_n(x)}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi_n(x)=\frac{\hbar^2n^2\pi^2}{2mL^2}.$$

(3) $\nu=\frac{E_2-E_1}{2\pi\hbar}=\frac{3\hbar\pi}{4mL^2}$，因此

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{4mcL^2}{3\hbar\pi}.$$

41. 0.3 m 或 0.024 m;

42. 7.8keV，或 0.62keV;

43. 5.3×10^{-8}s，或 4.2×10^{-9}s;

44. 先计算归一化常数，由归一化条件得

$$\int_0^l C^2x^2(l-x)^2dx=1$$

即有 $C=\frac{\sqrt{30}}{l^{5/2}}$。在 $0<x<l/3$ 区间粒子出现的概率为

$$\int_0^{l/3} C^2x^2(l-x)^2dx=\frac{17}{81}.$$

45. $x=L/4$ 和 $x=3L/4$ 时概率密度最大，$x=L/2$ 时概率密度最小；$P\approx0.30$; $E_r=\frac{25\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.

46.（1）$A=\sqrt{\frac{2}{L}}$,（2）密度最大：$x_1=L/4$ 和 $x_2=3L/4$, 密度最小：$x=0,\ \frac{L}{2},\ L$,（3）$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$,（4）$\nu=\frac{4\pi^2\hbar^2}{mL^2h}$.

47. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Phi}{dx^2}=E\Phi$, 归一化的本征波函数为 $\Phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, 对应的本征能量为 $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, $n=1,2,3...$