大学物理（3）参考答案

一、填空题

1、（**本小题 4 分**）费米　玻色

2、（**本小题 4 分**）本征值　本征函数

3、（**本小题 3 分**）$a_n = \int \varphi_n^*(x)\psi(x)dx$

4、（**本小题 3 分**）$h/\sqrt{2meU}$

5、（**本小题 3 分**）$\sqrt{6}\hbar$，$\pm 2\hbar$（正负号都对），$\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$

6、（**本小题 3 分**）$T = \frac{b}{\lambda}$，$\sigma\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4$，$\sigma\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4 \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^2$

7、（**本小题 1+3 分**）不能; $\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\phi + p\cos\theta$

8、（**本小题 3 分**）$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) + mgz\right]\Phi(x,y,z) = E\Phi(x,y,z)$

或者 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + mgz\right]\Phi(z) = E\Phi(z)$

9、（**本小题 3 分**）$\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\frac{e(U_1 - U_2)}{c}$ **（*e* 取正负都对！）**

10、（**本题 3 分**）$2i\hbar x$

11、（**本小题 3 分**）$\Psi(t) = 0.6e^{-\frac{iE_0}{\hbar}t}\varphi_1 + 0.8e^{-\frac{i2E_0}{\hbar}t}\varphi_2$

二、计算题（64 分）

1、（**本题 5 分**）

解：$\left[\hat{F},\hat{G}\right]=\left[\hat{L}_x+i\hat{L}_y,\hat{L}_x-i\hat{L}_y\right]=\left[\hat{L}_x,-i\hat{L}_y\right]+\left[i\hat{L}_y,\hat{L}_x\right]$ （**2 分**）

$\left[\hat{F},\hat{G}\right]=-2i\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=2\hbar\hat{L}_z$ （**1 分**）

故 $\left[\hat{L}^2,\hat{F}\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_x+i\hat{L}_y\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{L}^2,i\hat{L}_y\right]=0$ （**1 分**）

$\left[\hat{L}^2,\hat{G}\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_x-i\hat{L}_y\right]=0$ （**1 分**）

2、（**本题 7 分**）

解：电子在 r~r+dr 球壳内出现的概率为 $\rho(r)dr=|\psi|^2\,dV=|\psi|^2\,4\pi r^2dr=\frac{4}{a_0^3}e^{-2r/a_0}r^2dr$ （**2 分**）

径向概率密度 $\rho(r)=\frac{4}{a_0^3}e^{-2r/a_0}r^2$ （**1 分**）

$\frac{d\rho(r)}{dr}=\frac{4}{a_0^3}(2-\frac{2}{a_0}r)re^{-2r/a_0}=0$ 最可几半径 $\Rightarrow$ $r=a_0$ （**1+1 分**）

$\overline{\frac{1}{r^2}}=\int_0^\infty\frac{1}{r^2}\frac{4}{a_0^3}e^{-2r/a_0}r^2dr=\frac{4}{a_0^3}\int_0^\infty e^{-2r/a_0}dr=\frac{2}{a_0^2}$ （**2 分**）

3、（**本题 5 分**）

解： $\bar{E}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\hat{H}\psi(x)dx=\int_0^a\psi(x)\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi(x)dx$ （**1+1 分**）

$=\int_0^a A^2x(x-a)\cdot[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}x(x-a)]dx$ （**1 分**）

$=-\frac{A^2\hbar^2}{m}\int_0^a x(x-a)dx=\frac{A^2\hbar^2}{m}(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3})$

$=\frac{A^2\hbar^2a^3}{6m}$ （**2 分**）

4、（**本题 12 分**）

解：展开系数$c_{31}=\frac{2}{3}$，$c_{22}=\frac{2}{3}$，$c_{1-1}=-\frac{1}{3}$，

角动量平方及角动量 z 分量的可能取值，相应概率

$L^2=12\hbar^2$　　$L_z=\hbar$　　$\frac{4}{9}$　　（**1+1+1 分**）

$L^2=6\hbar^2$　　$L_z=2\hbar$　　$\frac{4}{9}$　　（**1+1+1 分**）

$L^2=2\hbar^2$　　$L_z=-\hbar$　　$\frac{1}{9}$　　（**1+1+1 分**）

$\overline{L^2}=12\hbar^2\times\frac{4}{9}+6\hbar^2\times\frac{4}{9}+2\hbar^2\times\frac{1}{9}=\frac{74}{9}\hbar^2$　　（**2 分**）

$\overline{L_z}=\hbar\times\frac{4}{9}+2\hbar\times\frac{4}{9}-\hbar\times\frac{1}{9}=\frac{11}{9}\hbar$　　（**1 分**）

5、（**本题 16 分**）

解：$\int_0^a\left|A\psi(x,0)\right|^2dx=A^2\int_0^a\left[\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\right]^2dx=1$　　（**1 分**）

$A=\sqrt{\frac{8}{5a}}$　　（**2 分**）

$$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}\left[1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)=\sqrt{\frac{8}{5a}}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

$\psi(x,0)=\frac{2}{\sqrt{5}}\Phi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi_2(x)$　　（**2 分**）

能量的可能值　$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$　　$P_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5};$　　（**1+1 分**）

$E_2=2\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$　　$P_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5};$　　（**1+1 分**）

能量的平均值

$\langle E\rangle=\frac{4}{5}E_1+\frac{1}{5}E_2=\frac{4}{5}\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}+\frac{1}{5}\cdot2\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}=\frac{4}{5}\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$　　（**1 分**）

$\psi(x,t)=\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\frac{E_1t}{\hbar}}\Phi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}}\Phi_2(x)$　　（**2 分**）

概率密度

$$\rho=\psi^*(x,t)\psi(x,t)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{i\frac{E_1t}{\hbar}}\Phi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\frac{E_2t}{\hbar}}\Phi_2(x)\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\frac{E_1t}{\hbar}}\Phi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}}\Phi_2(x)\right)$$

$$=\frac{4}{5}\Phi_1^2(x)+\frac{1}{5}\Phi_2^2(x)+\frac{4}{5}\Phi_1(x)\Phi_2(x)\cos\left(\frac{\left(E_2-E_1\right)t}{\hbar}\right)$$ （2 分）

（2）中的结果与时间无关 （2 分）

注：归一化系数算错不影响后面的得分！

6、（本题 10 分）

证明：（1）设厄米算符 $\hat{F}$ 的本征值为 λ

即 $\hat{F}\psi=\lambda\psi$ （1 分）

则 $\int\psi^*\hat{F}\psi dx=\lambda\int\psi^*\psi dx$ （1 分）

另一方面根据厄米算符性质 $\int\psi^*\hat{F}\psi dx=\int(\hat{F}\psi)^*\psi dx=\int(\lambda\psi)^*\psi dx=\lambda^*\int\psi^*\psi dx$ （2 分）

故 $\lambda=\lambda^*$，即厄米算符本征值都是实数。 （1 分）

（2）$\begin{matrix}\hat{F}u_k=\lambda_k u_k\\ \hat{F}u_l=\lambda_l u_l\end{matrix}$ $\lambda_k\neq\lambda_l$ （1 分）

故 $\int(\hat{F}u_k)^*u_l dx=\lambda_k\int u_k^*u_l dx$ $\int u_k^*\hat{F}u_l dx=\lambda_l\int u_k^*u_l dx$ （1+1 分）

另一方面根据厄米算符性质 $\int u_k^*\hat{F}u_l dx=\int(\hat{F}u_k)^*u_l dx$

故 $(\lambda_k-\lambda_l)\int u_k^*u_l dx=0$ $\lambda_k\neq\lambda_l$ （1 分）

$\int u_k^*u_l dx=0$ 厄米算符属于两个不同本征值的本征函数相互正交 （1 分）

7、（本题 9 分）

解：$\begin{bmatrix}E_0 & -A\\ -A & E_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=E\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}E_0-E & -A\\ -A & E_0-E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$ （2 分）

齐次方程有非零解条件 $\begin{vmatrix}E_0-E & -A\\ -A & E_0-E\end{vmatrix}=0$ （1 分）

$E=E_0\pm A$ （1+1 分）

对于本征值$E=E_0+A$

$$\begin{bmatrix} E_0-\left(E_0+A\right) & -A \\ -A & E_0-\left(E_0+A\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \qquad x_1=-x_2$$ **（1 分）**

$$\left(x_1\right)^2+\left(x_2\right)^2=1 \quad x_1=-x_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{本征矢} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ **（1 分）**

对于本征值$E=E_0-A$

$$\begin{bmatrix} E_0-\left(E_0-A\right) & -A \\ -A & E_0-\left(E_0-A\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \qquad x_1=x_2$$ **（1 分）**

$$\left(x_1\right)^2+\left(x_2\right)^2=1 \quad x_1=x_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{本征矢} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ **（1 分）**