Теория типов

Человек, который поспорил на 2 торта ♡

Содержание

1 λ-исчисление

1.1 Введение

> Смысла в этом нет.
>
> Д.Г.

Определение (λ-выражение)**.** λ-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\begin{aligned} \Lambda ::= & \lambda x.\Lambda && \text{(абстракция)} \\ & |\, \Lambda\Lambda && \text{(аппликация)} \\ & |\, x \\ & |\, (\Lambda) \end{aligned}$$

(a) аппликация левоассоциативна

(b) абстракция распространяется как можно дальше вправо

Пример. $((\lambda z.(z(yz)))(zx)z) = (\lambda z.z(yz))(zx)z$

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично ИП). $\lambda x.A$ связывает все свободные вхождения x в A. Договоримся, что:

(a) Переменные — x, a, b, c.

(b) Термы (части λ-выражения) — X, A, B, C.

(c) Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метапеременные — из конца.

Определение (α-эквивалентность)**.** A и B называются α-эквивалентными ($A =_\alpha B$), если выполнено одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$ и $B \equiv x$.
2. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda y.Q$ и $P_{[x:=t]} =_\alpha Q_{[y:=t]}$, где t — новая переменная.
3. $A \equiv PQ$, $B \equiv RS$ и $P =_\alpha R$, $Q =_\alpha S$.

Пример. $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx &\implies \lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx \\ tz =_\alpha tz &\implies \lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx \end{aligned}$$

$tz =_\alpha tz$ верно по третьему условию. □

Определение (β-редекс)**.** Терм вида $(\lambda a.A)\,B$ называется β-редексом.

Пример. В выражении $(\lambda f.\underbrace{(\lambda x.\overbrace{f(xx))}^{A_1}\overbrace{(\lambda x.f(xx))}^{B_1}}_{A_2})\,\underbrace{g}_{B_2}$ два β-редекса.

Определение. Множество λ-термов $\mathbf{\Lambda}$ назовём множеством классов эквивалентности Λ по $(=_\alpha)$.

Определение (β-редукция)**.** $A \to_\beta B$ (состоят в отношении β-редукции), если выполняется одно из условий:

1. $A \equiv PQ$, $B \equiv RS$ и

$$\begin{aligned} &\text{либо } P \to_\beta R \text{ и } Q =_\alpha S \\ &\text{либо } P =_\alpha R \text{ и } Q \to_\beta S \end{aligned}$$

2. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$, $P \to_\beta Q$ (x из какого-то класса из $\mathbf{\Lambda}$).
3. $A \equiv (\lambda x.P)Q$, $B \equiv P_{[x:=Q]}$, Q свободно для подстановки в P вместо x.

1.2 Числа Чёрча

Хотите знать, что такое истина?

Д.Г.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T} &= \lambda x \lambda y.x \\
\mathrm{F} &= \lambda x \lambda y.y \\
\mathrm{Not} &= \lambda a.a\mathrm{FT}
\end{aligned}
$$

Похоже на тип boolean, не правда ли?

Пример.

$$\mathrm{Not\ T} = (\lambda a.a\mathrm{FT})\mathrm{T} \to_\beta \mathrm{TFT} = (\lambda x.\lambda y.x)\mathrm{FT} \to_\beta (\lambda y.\mathrm{F})\mathrm{T} \to_\beta \mathrm{F}$$

Можно продолжить:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{And} &= \lambda a.\lambda b.ab\mathrm{F} \\
\mathrm{Or} &= \lambda a.\lambda b.a\mathrm{T}b
\end{aligned}
$$

Попробуем определить числа:

Определение (Чёрчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\left(f^{n-1}x\right) & ,n > 0 \\ x & ,n = 0 \end{cases}$$

Пример.

$$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$$

Пример.

$$(+1)\overline{1} = (\lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx))(\lambda f.\lambda x.fx) \to_\beta \lambda f.\lambda x.f((\lambda f.\lambda x.fx)fx) \twoheadrightarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f(fx) = \overline{2}$$

Определение (η-эквивалентность)**.**

$$\lambda x.fx =_\eta f$$

Аналог из C++: если **int** f(**int** x), то результат её вычисления равен результату вычисления [ ] (**int** x) { **return** f(x); } .

Арифметические операции:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IsZero} &= \lambda n.n(\lambda x.\mathrm{F})\mathrm{T} \\
\mathrm{IsEven} &= \lambda n.n \ \mathrm{Not\ T} \\
\mathrm{Add} &= \lambda a.\lambda b.\lambda f.\lambda x.af(bfx) \\
\mathrm{Mul} &= \lambda a.\lambda b.a(\mathrm{Add}\ b)\overline{0} \\
\mathrm{Pow} &= \lambda a.\lambda b.b(\mathrm{Mul}\ a)\overline{1} \\
\mathrm{Pow}^* &= \lambda a.\lambda b.ba
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы определить (-1), сначала определим "пару":

$$
\begin{aligned}
\langle a, b\rangle &= \lambda f.fab \\
\mathrm{First} &= \lambda p.\mathrm{T}p \\
\mathrm{Second} &= \lambda p.\mathrm{F}p
\end{aligned}
$$

n раз применим функцию $f\left(\langle a, b\rangle\right) = \langle b, b+1\rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n.\mathrm{First}\left(n\ \left(\lambda p.\left\langle (\mathrm{Second}\ p), (+1)\ (\mathrm{Second}\ p)\right\rangle\right)\ \left\langle \overline{0}, \overline{0}\right\rangle\right)$$

Сокращение записи:

$$\lambda xy.A = \lambda x.\lambda y.A$$

Определение (Нормальная форма).
Терм A — нормальная форма (н.ф.), если в нём нет β-редексов.
Нормальной формой A называется такой B, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, B — н.ф.
$\twoheadrightarrow_\beta$ — транзитивно-рефлексивное замыкание $\to_\beta$.

Утверждение 1.1. *Существует λ-выражение, не имеющее н.ф.*

$$\Omega = \omega\omega$$
$$\omega = \lambda x.xx$$

Определение (Комбинатор). Комбинатор — λ-выражение без свободных переменных.

Комбинатор неподвижной точки:

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Определение (β-эквивалентность). $A =_\beta B$, если $\exists C : C \twoheadrightarrow_\beta A, C \twoheadrightarrow_\beta B$

Утверждение 1.2.
$$Yf =_\beta f(Yf)$$

Доказательство. (на лекции не давалось)

$$\begin{aligned} Yf &=_\beta (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &=_\beta (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &=_\beta f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \\ &=_\beta f(Yf) \end{aligned}$$ □

Таким образом, с помощью Y-комбинатора можно определять рекурсивные функции.

Пример.
$$\text{Fact} = Y(\lambda fn.\text{IsZero}\ n\ \overline{1}\ (\text{Mul}\ n\ (f\ (-1)\ n)))$$

1.3 Ромбовидное свойство и параллельная редукция

Определение (Ромбовидное свойство (diamond)). G обладает ромбовидным свойством, если какие бы ни были a, b, c, что aGb, aGc, $b \neq c$, найдётся такое d, что bGd и cGd.

Пример. ($<$) на натуральных числах обладает ромбовидным свойством. ($>$) на натуральных числах не обладает ромбовидным свойством.

β-редукция не обладает ромбовидным свойством.

Пример.

$$a = (\lambda x.xx)(Ia)$$
$$a \to_\beta (Ia)(Ia) = b$$
$$a \to_\beta (\lambda x.xx)a = c$$
$$b \to_\beta (Ia)a \to_\beta aa$$
$$b \to_\beta a(Ia) \to_\beta aa$$
$$c \to_\beta aa$$

Нет d, что $b \to_\beta d$ и $c \to_\beta d$.

Теорема 1.3 (Чёрча-Россера). *β-редуцируемость обладает ромбовидным свойством.*

Лемма 1.4. *Если R обладает ромбовидным свойством, то R^* обладает ромбовидным свойством.*

Доказательство. (Упражнение) **TODO**

1. M_1RN_1 и $M_1RM_2...M_{n-1}RM_n \Rightarrow$ есть $N_2...N_n$:
$N_1RN_2...N_{n-1}RN_n$ и M_nRN_n.

2. Покажем ромбовидное свойство. □

Определение (Параллельная β-редукция)**.** $A \rightrightarrows_\beta B$

1. $A =_\beta B$, то $A \rightrightarrows_\beta B$
2. $A \rightrightarrows_\beta B$, то $\lambda x.A \rightrightarrows_\beta \lambda x.B$
3. $P \rightrightarrows_\beta Q$ и $R \rightrightarrows_\beta S$, то $PR \rightrightarrows_\beta QS$
4. $(\lambda x.P)Q \rightrightarrows_\beta R_{[x:=S]}$, если $P \rightrightarrows_\beta R$ и $Q \rightrightarrows_\beta S$.

Утверждение 1.5. *$(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.*

Доказательство. (Упражнение) **TODO** □

Утверждение 1.6. *Если $A \to_\beta B$, то $A \rightrightarrows_\beta B$.*

Утверждение 1.7. *Если $A \rightrightarrows_\beta B$, то $A \twoheadrightarrow_\beta B$.*

Доказательство. (Упражнение) **TODO** □

При этом, обратное не всегда верно.

Пример.

$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xxx) \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$$
$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xxx) \not\rightrightarrows_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$$

Утверждение 1.8. *Из предыдущих двух утверждений следует $(\to_\beta)^* = (\rightrightarrows_\beta)^*$.*

Теорема Чёрча-Россера следует из приведённых утверждений.

Следствие 1.9. *Нормальная форма для λ-выражения единственна, если существует.*

Теорема 1.10 (Тезис Чёрча)**.** *Если функция вычислима с помощью механического аппарата, то она вычислима с помощью λ-выражения.*

1.4 Порядок редукции

> «Завтра! Завтра! Не сегодня!» — так ленивцы говорят.
>
> sprichwort

Определение.

$$K = \lambda x \lambda y.x$$
$$I = \lambda x.x$$
$$S = \lambda xyz.xz(yz)$$

I выражается через S и K: $I = SKK$.

Утверждение 1.11. *Пусть A — замкнутое λ-выражение. Тогда найдётся выражение T, состоящее только из S, K, что $A =_\beta T$.*

Пример. тут какой-то пример с омегой, подскажите чё там было, **TODO**

Определение (Нормальный порядок редукции)**.** Нормальным порядком редукции называется редукция самого левого β-редекса.

«Ленивые вычисления» (ну, почти, в ленивых ещё есть меморизация)

Определение (Аппликативный порядок редукции)**.** Самый левый из самых вложенных.

«Энергичные вычисления»

Утверждение 1.12. *Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.*

1.5 Парадокс Карри

> Если это утверждение верно, то русалки существуют.

Попробуем построить логику на основе λ-исчисления. Введём комбнатор-импликацию, обозначим $(\supset)$. Введём М.Р. и правила:

1. $A \supset A$
2. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
3. $A =_\beta B$, тогда $A \supset B$

Введём обозначение: $Y_{\supset a} \equiv Y(\lambda t.t \supset a) =_\beta Y(\lambda t.t \supset a) \supset a$. Построим парадокс:

1)	$Y_{\supset a} \supset Y_{\supset a}$	(схема аксиом)
2)	$Y_{\supset a} \supset (Y_{\supset a} \supset a)$	(можно доказать)
3)	$(Y_{\supset a} \supset Y_{\supset a} \supset a) \supset (Y_{\supset a} \supset a)$	(схема аксиом)
4)	$Y_{\supset a} \supset a$	(М.Р.)
5)	$(Y_{\supset a} \supset a) \supset Y_{\supset a}$	(третье правило)
6)	$Y_{\supset a}$	(М.Р.)
7)	a	(М.Р.)

Так можно доказать любое a.

1.6 Импликационный фрагмент ИИВ

Определение (импликационный фрагмент ИИВ)**.** Рассмотрим интуиционистское исчисление высказываний.

1. Введём схему аксиом:
$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$
2. Правило введения импликации:
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$
3. И правило удаления импликации:
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Мы построили импликационный фрагмент ИИВ (и.ф.и.и.в).

Пример. Докажем $\varphi \to \psi \to \varphi$:
$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varphi, \psi \vdash \varphi}\ (1)}{\varphi \vdash \psi \to \varphi}\ (2)}{\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)}\ (2)$$

Теорема 1.13. *И.ф.и.и.в полон в моделях Крипке.*

Доказательство. Допишу, **TODO** □

Следствие 1.14. *И.ф.и.и.в замкнут относительно выводимости.*

Если некоторое утверждение выводится в ИИВ ($\vdash_{\text{и}} \varphi$) и содержит только импликации, то оно выводится и в и.ф.и.и.в. ($\vdash_{\text{и}\to} \varphi$).

2 Просто типизированное λ-исчисление

Определение (Тип)**.** $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ — множество типов.
σ, τ — метапеременные для типов.
Если τ, σ — типы, то $\sigma \to \tau$ — тип.

$$\Pi ::= T \mid \Pi \to \Pi \mid (\Pi)$$

$(\to)$ правоассоциативна.

Определение (Контекст)**.** Контекст — Γ.

$$\Gamma = \{\Lambda_1 : \sigma_1;\ \Lambda_2 : \sigma_2\ \dots\ \Lambda_n : \sigma_n\}$$
$$|\Gamma| = \{\sigma_1,\ \sigma_2\ \dots\ \sigma_n\}$$
$$\text{dom}\ \Gamma = \{\Lambda_1,\ \Lambda_2\ \dots\ \Lambda_n\}$$

2.1 Исчисление по Карри

Определение (Типизируемость по Карри)**.** Рассмотрим исчисление со следующими правилами:

1. $\dfrac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ (x \not\in \text{dom}(\Gamma))$
2. $\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$
3. $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ (x \not\in \text{dom}(\Gamma))$

Если λ-выражение типизируется этими трёмя правилами, то говорят, что оно типизируется по Карри.

Лемма 2.1 (subject deduction)**.** *Если $\Gamma \vdash M : \sigma$ то $\Gamma \vdash N : \sigma$.*

Следствие 2.2. *Если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $M \twoheadrightarrow_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$.*

Теорема 2.3 (Чёрча-Россера)**.** *Если $\Gamma \vdash M : \sigma$, $M \twoheadrightarrow_\beta N$ и $M \twoheadrightarrow_\beta P$, тогда найдётся Q, что $N \twoheadrightarrow_\beta Q$, $P \twoheadrightarrow_\beta Q$ и $\Gamma \vdash Q : \sigma$.*

Пример. Несколько доказательств:

1. Докажем $\lambda x.x : \alpha \to \alpha$:
$$\dfrac{\dfrac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha}\ (1)}{\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha}\ (3)$$

2. Докажем $\lambda f.\lambda x.fx : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$:
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash f : \sigma \to \tau}\ (1) \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \sigma}\ (1)}{f : \sigma \to \tau; x : \sigma \vdash fx : \tau}\ (2)}{f : \sigma \to \tau \vdash \lambda x.fx : \sigma \to \tau}\ (3)}{\vdash \lambda f.\lambda x.fx : (\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \tau)}\ (3)$$

3. $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ не типизируемо: **TODO**

Лемма 2.4 (Свойство subject expansion)**.** *Неверно, что если $M \to_\beta N$, $\Gamma \vdash N : \sigma$, то $\Gamma \vdash M : \sigma$.*

Например, для $K a \Omega$.

Свойство 2.5. В общем случае тип не уникален, бывает, что одновременно $\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha$ и $\vdash \lambda x.x : (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta)$.

Определение (Сильная нормализация)**.** Назовём исчисление сильно-нормализуемым, если не существует бесконечной последовательности β-редукций.

Определение (Слабая нормализация)**.** Назовём исчисление слабо-нормализуемым, если для любого терма существует последовательность β-редукций, приводящая его к нормальной форме.

Теорема 2.6 (о сильной нормализации)**.** *Просто типизируемое λ-исчисление сильно нормализуемо. Любое просто типизируемое λ-выражение сильно нормализуемо.*

TODO{

Теорема 2.7. *Рассмотрим полином* $E(m,n) = \begin{cases} \text{Полином}(m,n) & m>0, n>0 \\ \text{Полином}(m) & m>0, n=0 \\ \text{Полином}(n) & m=0, n>0 \\ \text{Константа} & m=0, n=0 \end{cases}$.
Если $\nu = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ и $F : \nu \to \nu \to \nu$, то F — рассматриваемый полином.

} // **TODO**

2.2 Исчисление по Чёрчу

Определение (Типизация по Чёрчу)**.**

$$\Lambda_ч ::= x \mid \lambda x^\sigma.\Lambda_ч \mid (\Lambda_ч) \mid \Lambda_ч\Lambda_ч$$

Правила:

1. $\dfrac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash_ч x:\sigma}$ $(x \not\in \mathrm{dom}(\Gamma))$
2. $\dfrac{\Gamma \vdash_ч M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash_ч N : \sigma}{\Gamma \vdash_ч MN : \tau}$
3. $\dfrac{\Gamma, x:\sigma \vdash_ч M : \tau}{\Gamma \vdash_ч \lambda x^\sigma.M : \sigma \to \tau}$ $(x \not\in \mathrm{dom}(\Gamma))$

Определение.

$$|\Lambda_ч| = \begin{cases} x & \Lambda_ч \equiv x \\ |\Lambda_1|\,|\Lambda_2| & \Lambda_ч \equiv \Lambda_1\Lambda_2 \\ \lambda x.\,|\Lambda| & \Lambda_ч \equiv \lambda x^\sigma.\Lambda \end{cases}$$

Лемма 2.8 (Subject reduction по Чёрчу)**.** *Пусть $\Gamma \vdash_ч M : \sigma$ и $|M| \to_\beta N$.*
Тогда найдётся такое H, что $absH = N$, $\Gamma \vdash_ч H : \sigma$.

Теорема 2.9 (Чёрча-Россера)**.** *Если $\Gamma \vdash_ч M : \sigma$, $|M| \twoheadrightarrow_\beta N$, $|M| \twoheadrightarrow_\beta T$.*
Тогда найдётся такое P, что $\Gamma \vdash_ч P : \sigma$, $N \twoheadrightarrow_\beta |P|$ и $T \twoheadrightarrow_\beta |P|$.

Теорема 2.10 (о стирании)**.**

1. *Если $M \to_\beta N$ и $\Gamma \vdash_ч M : \sigma$, то $|M| \to_\beta |N|$.*
2. *Если $\Gamma \vdash_ч M : \sigma$, то $\Gamma \vdash_к |M| : \sigma$.*

Теорема 2.11 (о поднятии)**.** *Пусть $P \in \Lambda_ч$, $M, N \in \Lambda_к$.*

1. *Если $M \to_\beta N$, $|P| = M$, то найдётся такое Q, что $|Q| = N$, $P \to_\beta Q$.*
2. *Если $\Gamma \vdash_к M : \sigma$, то найдётся такое $P \in \Lambda_ч$, что $\Gamma \vdash_ч P : \sigma$, $|P| = M$.*

TODO комментарии про то, зачем мы это делаем.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \psi}{\Gamma \vdash \langle A, B\rangle : \varphi \& \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash R : \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \pi_1 R : \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash R : \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \pi_2 R : \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \pi \quad \Gamma \vdash \psi \to \pi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \to \pi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi}{\Gamma \vdash \mathrm{inj}_1 A : \varphi \vee \psi}$$

TODO трешак какой-то пошёл :(

Теорема 2.12 (об изоморфизме Карри-Ховарда)**.**

1. *Пусть* $\Gamma \vdash \sigma$ *— и.ф.и.и.в., тогда найдётся такое* Δ*, что* $|\Delta| = \Gamma$*,* M *— такой терм, что* $\Delta \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$.
2. *Пусть* $\Delta \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$*, тогда* $|\Delta| \vdash \sigma$.

Доказательство. Построим Δ. $\Gamma = \{\sigma_1, \sigma_2 \ldots\}$, $\Delta = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots\}$. □