

# Теория типов

Человек, который поспорил на 2 торта ♡

## Содержание

<b>1</b>	<b><math>\lambda</math>-исчисление</b>	<b>2</b>
1.1	Введение . . . . .	2
1.2	Числа Чёрча . . . . .	3
1.3	Ромбовидное свойство и параллельная редукция . . . . .	4
1.4	Порядок редукции . . . . .	5
1.5	Парадокс Карри . . . . .	6
1.6	Импликационный фрагмент ИИВ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Просто типизированное <math>\lambda</math>-исчисление</b>	<b>8</b>
2.1	Исчисление по Карри . . . . .	8
2.2	Исчисление по Чёрчу . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Связь с программированием</b>	<b>11</b>
3.1	Вывод типа . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Интуиционистское исчисление предикатов второго порядка</b>	<b>13</b>
4.1	Логика второго порядка . . . . .	13
4.2	Система $F$ . . . . .	13
4.3	Экзистенциальные тип . . . . .	14

# 1 $\lambda$ -исчисление

## 1.1 Введение

Смысла в этом нет.

Д.Г.

**Определение** ( $\lambda$ -выражение).  $\lambda$ -выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$\begin{aligned}\Lambda &::= \lambda x. \Lambda && \text{(абстракция)} \\ &| \Lambda \Lambda && \text{(аппликация)} \\ &| x \\ &| (\Lambda)\end{aligned}$$

- (а) аппликация левоассоциативна
- (б) абстракция распространяется как можно дальше вправо

*Пример.*  $((\lambda z.(z(yz)))(zx)z) = (\lambda z.z(yz))(zx)z$

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично ИП).  $\lambda x.A$  связывает все свободные вхождения  $x$  в  $A$ . Договоримся, что:

- (а) Переменные —  $x, a, b, c$ .
- (б) Термы (части  $\lambda$ -выражения) —  $X, A, B, C$ .
- (в) Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метапеременные — из конца.

**Определение** ( $\alpha$ -эквивалентность).  $A$  и  $B$  называются  $\alpha$ -эквивалентными ( $A =_\alpha B$ ), если выполнено одно из следующих условий:

1.  $A \equiv x$  и  $B \equiv x$ .
2.  $A \equiv \lambda x.P$ ,  $B \equiv \lambda y.Q$  и  $P_{[x:=t]} =_\alpha Q_{[y:=t]}$ , где  $t$  — новая переменная.
3.  $A \equiv PQ$ ,  $B \equiv RS$  и  $P =_\alpha R$ ,  $Q =_\alpha S$ .

*Пример.*  $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx &\implies \lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx \\ tz =_\alpha tz &\implies \lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx\end{aligned}$$

$tz =_\alpha tz$  верно по третьему условию. □

**Определение** ( $\beta$ -редекс). Терм вида  $(\lambda a.A) B$  называется  $\beta$ -редексом.

*Пример.* В выражении  $(\lambda f. \frac{A_1}{A_2} (\lambda x. \frac{B_1}{B_2} f(xx))) g$  два  $\beta$ -редекса.

**Определение.** Множество  $\lambda$ -термов  $\Lambda$  назовём множеством классов эквивалентности  $\Lambda$  по  $(=_\alpha)$ .

**Определение** ( $\beta$ -редукция).  $A \rightarrow_\beta B$  (состоят в отношении  $\beta$ -редукции), если выполняется одно из условий:

1.  $A \equiv PQ$ ,  $B \equiv RS$  и
  - либо  $P \rightarrow_\beta R$  и  $Q =_\alpha S$
  - либо  $P =_\alpha R$  и  $Q \rightarrow_\beta S$
2.  $A \equiv \lambda x.P$ ,  $B \equiv \lambda x.Q$ ,  $P \rightarrow_\beta Q$  ( $x$  из какого-то класса из  $\Lambda$ ).
3.  $A \equiv (\lambda x.P)Q$ ,  $B \equiv P_{[x:=Q]}$ ,  $Q$  свободно для подстановки в  $P$  вместо  $x$ .

## 1.2 Числа Чёрча

Хотите знать, что такое истина?

Д.Г.

$$\begin{aligned}T &= \lambda x \lambda y. x \\F &= \lambda x \lambda y. y \\Not &= \lambda a. a F T\end{aligned}$$

Похоже на тип boolean, не правда ли?

*Пример.*

$$Not\ T = (\lambda a. a F T) T \rightarrow_{\beta} T F T = (\lambda x. \lambda y. x) F T \rightarrow_{\beta} (\lambda y. F) T \rightarrow_{\beta} F$$

Можно продолжить:

$$\begin{aligned}And &= \lambda a. \lambda b. a b F \\Or &= \lambda a. \lambda b. a T b\end{aligned}$$

Попробуем определить числа:

**Определение** (Чёрчевский нумерал).

$$\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f(f^{n-1} x) & , n > 0 \\ x & , n = 0 \end{cases}$$

*Пример.*

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n. \lambda f. \lambda x. f(nfx)$$

*Пример.*

$$(+1)\bar{1} = (\lambda n. \lambda f. \lambda x. f(nfx))(\lambda f. \lambda x. fx) \rightarrow_{\beta} \lambda f. \lambda x. f((\lambda f. \lambda x. fx)fx) \rightarrow_{\beta} \lambda f. \lambda x. f(fx) = \bar{2}$$

**Определение** ( $\eta$ -эквивалентность).

$$\lambda x. fx =_{\eta} f$$

Аналог из C++: если `int f(int x)`, то результат её вычисления равен результату вычисления `[ ] (int x) { return f(x); }`.

Арифметические операции:

$$\begin{aligned}IsZero &= \lambda n. n(\lambda x. F) T \\IsEven &= \lambda n. n\ Not\ T \\Add &= \lambda a. \lambda b. \lambda f. \lambda x. a f (b f x) \\Mul &= \lambda a. \lambda b. a (Add\ b) \bar{0} \\Pow &= \lambda a. \lambda b. b (Mul\ a) \bar{1} \\Pow^* &= \lambda a. \lambda b. b a\end{aligned}$$

Для того, чтобы определить  $(-1)$ , сначала определим "пару":

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle &= \lambda f. f a b \\First &= \lambda p. T p \\Second &= \lambda p. F p\end{aligned}$$

$n$  раз применим функцию  $f(\langle a, b \rangle) = \langle b, b + 1 \rangle$  и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n. First\ (n\ (\lambda p. \langle Second\ p, (+1)\ (Second\ p) \rangle))\ \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle$$

Введём сокращение записи:

$$\lambda xy. A = \lambda x. \lambda y. A$$

**Определение** (Нормальная форма).

Терм  $A$  — нормальная форма (н.ф.), если в нём нет  $\beta$ -редексов.

Нормальной формой  $A$  называется такой  $B$ , что  $A \rightarrow_\beta B$ ,  $B$  — н.ф.

$\rightarrow_\beta$  — транзитивно-рефлексивное замыкание  $\rightarrow_\beta$ .

**Утверждение 1.1.** *Существует  $\lambda$ -выражение, не имеющее н.ф.*

**Определение** (Комбинатор). Комбинатор —  $\lambda$ -выражение без свободных переменных.

**Определение.**

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega\omega \\ \omega &= \lambda x.xx\end{aligned}$$

$\Omega$  не имеет нормальной формы.

**Определение** (Комбинатор неподвижной точки).

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

**Определение** ( $\beta$ -эквивалентность).  $A =_\beta B$ , если  $\exists C : C \rightarrow_\beta A, C \rightarrow_\beta B$

**Утверждение 1.2.**

$$Yf =_\beta f(Yf)$$

*Доказательство.* (на лекции не давалось)

$$\begin{aligned}Yf &=_\beta (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &=_\beta (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &=_\beta f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \\ &=_\beta f(Yf)\end{aligned}$$

□

Таким образом, с помощью  $Y$ -комбинатора можно определять рекурсивные функции.

*Пример.*

$$\text{Fact} = Y(\lambda f n. \text{IsZero } n \ \bar{1} \ (\text{Mul } n \ (f \ (-1) \ n)))$$

**TODO**

### 1.3 Ромбовидное свойство и параллельная редукция

**Определение** (Ромбовидное свойство (diamond)).  $G$  обладает ромбовидным свойством, если какие бы ни были  $a, b, c$ , что  $aGb, aGc, b \neq c$ , найдётся такое  $d$ , что  $bGd$  и  $cGd$ .

*Пример.* ( $<$ ) на натуральных числах обладает ромбовидным свойством. ( $>$ ) на натуральных числах не обладает ромбовидным свойством.

$\beta$ -редукция не обладает ромбовидным свойством.

*Пример.*

$$\begin{aligned}a &= (\lambda x.xx)(Ia) \\ a &\rightarrow_\beta (Ia)(Ia) = b \\ a &\rightarrow_\beta (\lambda x.xx)a = c \\ b &\rightarrow_\beta (Ia)a \rightarrow_\beta aa \\ b &\rightarrow_\beta a(Ia) \rightarrow_\beta aa \\ c &\rightarrow_\beta aa\end{aligned}$$

Нет  $d$ , что  $b \rightarrow_\beta d$  и  $c \rightarrow_\beta d$ .

**Теорема 1.3** (Чёрча-Россера).  $\beta$ -редуцируемость обладает ромбовидным свойством.

**Лемма 1.4.** Если  $R$  обладает ромбовидным свойством, то  $R^*$  обладает ромбовидным свойством.

*Доказательство.* (Упражнение) **TODO**

1.  $M_1RN_1$  и  $M_1RM_2\dots M_{n-1}RM_n \Rightarrow$  есть  $N_2\dots N_n$ :  
 $N_1RN_2\dots N_{n-1}RN_n$  и  $M_nRN_n$ .

2. Покажем ромбовидное свойство. □

**Определение** (Параллельная  $\beta$ -редукция).  $A \Rightarrow_\beta B$

1.  $A =_\beta B$ , то  $A \Rightarrow_\beta B$
2.  $A \Rightarrow_\beta B$ , то  $\lambda x.A \Rightarrow_\beta \lambda x.B$
3.  $P \Rightarrow_\beta Q$  и  $R \Rightarrow_\beta S$ , то  $PR \Rightarrow_\beta QS$
4.  $(\lambda x.P)Q \Rightarrow_\beta R_{[x:=S]}$ , если  $P \Rightarrow_\beta R$  и  $Q \Rightarrow_\beta S$ .

**Утверждение 1.5.**  $(\Rightarrow_\beta)$  обладает ромбовидным свойством.

*Доказательство.* (Упражнение) **TODO** □

**Утверждение 1.6.** Если  $A \rightarrow_\beta B$ , то  $A \Rightarrow_\beta B$ .

**Утверждение 1.7.** Если  $A \Rightarrow_\beta B$ , то  $A \twoheadrightarrow_\beta B$ .

*Доказательство.* (Упражнение) **TODO** □

При этом, обратное не всегда верно.

*Пример.*

$$\begin{aligned} & (\lambda x.xx)(\lambda x.xxx) \rightarrow_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \\ & (\lambda x.xx)(\lambda x.xxx) \not\Rightarrow_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \end{aligned}$$

**Утверждение 1.8.** Из 1.6 и 1.7 следует, что  $(\rightarrow_\beta)^* = (\Rightarrow_\beta)^*$ .

*Доказательство.* Теорема Чёрча-Россера следует из 1.5 и 1.8. □

**Следствие 1.9.** Нормальная форма для  $\lambda$ -выражения единственна, если существует.

**Теорема 1.10** (Тезис Чёрча). Если функция вычислима с помощью механического аппарата, то она вычислима с помощью  $\lambda$ -выражения.

## 1.4 Порядок редукции

«Завтра! Завтра! Не сегодня!» — так ленивцы говорят.

---

Das deutsches Sprichwort

**Определение.**

$$\begin{aligned} K &= \lambda x \lambda y. x \\ I &= \lambda x. x \\ S &= \lambda x y z. xz(yz) \end{aligned}$$

$I$  выражается через  $S$  и  $K$ :  $I = SKK$ .

**Утверждение 1.11.** Пусть  $A$  — замкнутое  $\lambda$ -выражение. Тогда найдётся выражение  $T$ , состоящее только из  $S$ ,  $K$ , что  $A =_\beta T$ .

*Пример.* тут какой-то пример с омегой, подскажите чё там было, **TODO**

**Определение** (Нормальный порядок редукции). Нормальным порядком редукции называется редукция самого левого  $\beta$ -редекса.

«Ленивые вычисления» (ну, почти, в ленивых ещё есть меморизация)

**Определение** (Аппликативный порядок редукции). Самый левый из самых вложенных.

«Энергичные вычисления»

**Утверждение 1.12.** Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.

## 1.5 Парадокс Карри

Если это утверждение верно, то русалки существуют.

---

Попробуем построить логику на основе  $\lambda$ -исчисления. Введём комбинатор-импликацию, обозначим ( $\supset$ ). Введём М.Р. и правила:

1.  $A \supset A$
2.  $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
3.  $A =_\beta B$ , тогда  $A \supset B$

Введём обозначение:  $Y_{\supset a} \equiv Y(\lambda t. t \supset a) =_\beta Y(\lambda t. t \supset a) \supset a$ . Построим парадокс:

- 1)  $Y_{\supset a} \supset Y_{\supset a}$  (схема аксиом)
- 2)  $Y_{\supset a} \supset (Y_{\supset a} \supset a)$  (можно доказать)
- 3)  $(Y_{\supset a} \supset Y_{\supset a} \supset a) \supset (Y_{\supset a} \supset a)$  (схема аксиом)
- 4)  $Y_{\supset a} \supset a$  (М.Р.)
- 5)  $(Y_{\supset a} \supset a) \supset Y_{\supset a}$  (третье правило)
- 6)  $Y_{\supset a}$  (М.Р.)
- 7)  $a$  (М.Р.)

Так можно доказать любое  $a$ .

## 1.6 Импликационный фрагмент ИИВ

**Определение** (импликационный фрагмент ИИВ). Рассмотрим интуиционистское исчисление высказываний.

1. Введём схему аксиом:

$$\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

2. Правило введения импликации:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

3. И правило удаления импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Мы построили импликационный фрагмент ИИВ (и.ф.и.и.в.).

*Пример.* Докажем  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ :

$$\frac{\frac{\overline{\varphi, \psi \vdash \varphi} \quad (1)}{\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi} \quad (2)}{\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} \quad (2)$$

**Теорема 1.13.** *И.ф.и.и.в полон в моделях Крипке.*

*Доказательство.* Допишу, **TODO**

□

**Следствие 1.14.** *И.ф.и.и.в замкнут относительно выводимости.*

Если некоторое утверждение выводится в ИИВ ( $\vdash_{\text{И}} \varphi$ ) и содержит только импликации, то оно выводится и в и.ф.и.и.в. ( $\vdash_{\text{И} \rightarrow} \varphi$ ).

## 2 Просто типизированное $\lambda$ -исчисление

**Определение (Тип).**  $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$  — множество типов.

$\sigma, \tau$  — метапеременные для типов.

Если  $\tau, \sigma$  — типы, то  $\sigma \rightarrow \tau$  — тип.

$$\Pi ::= T \mid \Pi \rightarrow \Pi \mid (\Pi)$$

$(\rightarrow)$  правоассоциативна.

**Определение (Контекст).** Контекст —  $\Gamma$ .

$$\Gamma = \{\Lambda_1 : \sigma_1; \Lambda_2 : \sigma_2 \dots \Lambda_n : \sigma_n\}$$

$$|\Gamma| = \{\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n\}$$

$$\text{dom } \Gamma = \{\Lambda_1, \Lambda_2 \dots \Lambda_n\}$$

### 2.1 Исчисление по Карри

**Определение (Типизируемость по Карри).** Рассмотрим исчисление со следующими правилами:

1.  $\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \quad (x \notin \text{dom}(\Gamma))$
2.  $\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$
3.  $\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau} \quad (x \notin \text{dom}(\Gamma))$

Если  $\lambda$ -выражение типизируется этими тремя правилами, то говорят, что оно типизируется по Карри.

**Лемма 2.1** (subject deduction). Если  $\Gamma \vdash M : \sigma$  и  $M \rightarrow_\beta N$ , то  $\Gamma \vdash N : \sigma$ .

**Следствие 2.2.** Если  $\Gamma \vdash M : \sigma$  и  $M \twoheadrightarrow_\beta N$ , то  $\Gamma \vdash N : \sigma$ .

**Теорема 2.3** (Чёрча-Россера). Если  $\Gamma \vdash M : \sigma$ ,  $M \twoheadrightarrow_\beta N$  и  $M \twoheadrightarrow_\beta P$ , тогда найдётся  $Q$ , что  $N \twoheadrightarrow_\beta Q$ ,  $P \twoheadrightarrow_\beta Q$  и  $\Gamma \vdash Q : \sigma$ .

*Пример.* Несколько доказательств:

1. Докажем  $\lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha$ :

$$\frac{\frac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha} (1)}{\vdash \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha} (3)$$

2. Докажем  $\lambda f.\lambda x.fx : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$ :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash f : \sigma \rightarrow \tau} (1)}{f : \sigma \rightarrow \tau; x : \sigma \vdash fx : \tau} (2)}{f : \sigma \rightarrow \tau \vdash \lambda x.fx : \sigma \rightarrow \tau} (3)}{\vdash \lambda f.\lambda x.fx : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau)} (3)$$

3.  $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$  не типизируемо: **TODO**

**Лемма 2.4** (Свойство subject expansion). Неверно, что если  $M \rightarrow_\beta N$ ,  $\Gamma \vdash N : \sigma$ , то  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .

Например, для  $Ka\Omega$ .

В общем случае тип не уникален, бывает, что одновременно  $\vdash \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha$  и  $\vdash \lambda x.x : (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$ .

**Определение (Сильная нормализация).** Назовём исчисление сильно-нормализуемым, если любая последовательность редукций неизбежно приводит к нормальной форме (не существует бесконечной последовательности  $\beta$ -редукций).



**Определение** (Слабая нормализация). Назовём исчисление слабо-нормализуемым, если для любого терма существует последовательность  $\beta$ -редукций, приводящая его к нормальной форме.

**Теорема 2.5** (о сильной нормализации). *Просто типизируемое  $\lambda$ -исчисление сильно нормализуемо. Любое просто типизируемое  $\lambda$ -выражение сильно нормализуемо.*

**TODO**{ это к чему и о чём вообще?

**Теорема 2.6.** Рассмотрим полином  $E(m, n) = \begin{cases} \text{Полином}(m, n) & m > 0, n > 0 \\ \text{Полином}(m) & m > 0, n = 0 \\ \text{Полином}(n) & m = 0, n > 0 \\ \text{Константа} & m = 0, n = 0 \end{cases}$ .

Если  $\nu = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$  и  $F : \nu \rightarrow \nu \rightarrow \nu$ , то  $F$  — рассматриваемый полином.

} // **TODO**

## 2.2 Исчисление по Чёрчу

**Определение** (Типизация по Чёрчу).

$$\Lambda_{\text{ч}} ::= x \mid \lambda x^{\sigma}. \Lambda_{\text{ч}} \mid (\Lambda_{\text{ч}}) \mid \Lambda_{\text{ч}} \Lambda_{\text{ч}}$$

Правила:

1.  $\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\text{ч}} x : \sigma} \quad (x \notin \text{dom}(\Gamma))$
2.  $\frac{\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash_{\text{ч}} N : \sigma}{\Gamma \vdash_{\text{ч}} MN : \tau}$
3.  $\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\text{ч}} M : \tau}{\Gamma \vdash_{\text{ч}} \lambda x^{\sigma}. M : \sigma \rightarrow \tau} \quad (x \notin \text{dom}(\Gamma))$

**Определение.**

$$|\Lambda_{\text{ч}}| = \begin{cases} x & \Lambda_{\text{ч}} \equiv x \\ |\Lambda_1| |\Lambda_2| & \Lambda_{\text{ч}} \equiv \Lambda_1 \Lambda_2 \\ \lambda x. |\Lambda| & \Lambda_{\text{ч}} \equiv \lambda x^{\sigma}. \Lambda \end{cases}$$

**Лемма 2.7** (Subject reduction по Чёрчу). Пусть  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$  и  $|M| \rightarrow_{\beta} N$ . Тогда найдётся такое  $H$ , что  $|H| = N$ ,  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} H : \sigma$ .

**Теорема 2.8** (Чёрча-Россера). Если  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$ ,  $|M| \rightarrow_{\beta} N$ ,  $|M| \rightarrow_{\beta} T$ . Тогда найдётся такое  $P$ , что  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} P : \sigma$ ,  $N \rightarrow_{\beta} |P|$  и  $T \rightarrow_{\beta} |P|$ .

**Лемма 2.9** (Уникальность типов). Если  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \gamma$  и  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \tau$ , то  $\sigma = \tau$ .

**Теорема 2.10** (о стирании).

1. Если  $M \rightarrow_{\beta} N$  и  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$ , то  $|M| \rightarrow_{\beta} |N|$ .
2. Если  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$ , то  $\Gamma \vdash_{\text{к}} |M| : \sigma$ .

**Теорема 2.11** (о поднятии). Пусть  $P \in \Lambda_{\text{ч}}$ ,  $M, N \in \Lambda_{\text{к}}$ .

1. Если  $M \rightarrow_{\beta} N$ ,  $|P| = M$ , то найдётся такое  $Q$ , что  $|Q| = N$ ,  $P \rightarrow_{\beta} Q$ .
2. Если  $\Gamma \vdash_{\text{к}} M : \sigma$ , то найдётся такое  $P \in \Lambda_{\text{ч}}$ , что  $\Gamma \vdash_{\text{ч}} P : \sigma$ ,  $|P| = M$ .

**TODO** комментарии про то, зачем мы это делаем.

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \psi}{\Gamma \vdash \langle A, B \rangle : \varphi \& \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash R : \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \pi_1 R : \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash R : \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \pi_2 R : \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \pi \quad \Gamma \vdash \psi \rightarrow \pi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \rightarrow \pi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi}{\Gamma \vdash \text{inj}_1 A : \varphi \vee \psi}$$

**TODO** трешак какой-то пошёл :(

**Теорема 2.12** (об изоморфизме Карри-Ховарда).

1. Пусть  $\Gamma \vdash \sigma$  — и.ф.и.и.в., тогда найдётся такое  $\Delta$ , что  $|\Delta| = \Gamma$ ,  $M$  — такой терм, что  $\Delta \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$ .
2. Пусть  $\Delta \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$ , тогда  $|\Delta| \vdash \sigma$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $x_\varphi$ ,  $\varphi \in \Gamma$ .  $\Gamma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ ,  $\uparrow \Gamma = \Delta = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \dots\}$ . Индукция по сложности доказательства  $\sigma$ :

База:  $\overline{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$

1.  $\varphi \in \Gamma$ . Тогда  $\overline{\Delta \vdash x_\varphi : \varphi}$
2.  $\varphi \notin \Gamma$ . Тогда  $\overline{\Delta, x_\varphi : \varphi \vdash x_\varphi : \varphi}$ ,  $x_\varphi$  — новая переменная.

Переход:  $\overline{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$ . По индукционному предположению  $\Delta, y : \varphi \vdash M : \psi$ .

1.  $\varphi \in \Gamma$ . Тогда  $\overline{\Delta \vdash M : \psi}$   
1.  $\varphi \in \Gamma$ . Тогда  $\overline{\Delta \setminus \{x_\varphi\} \vdash \lambda x_\varphi. M : \varphi \rightarrow \psi}$ .
2.  $\varphi \notin \Gamma$ . Тогда  $\overline{\Delta, x_\varphi : \varphi \vdash M : \psi}$   
2.  $\varphi \notin \Gamma$ . Тогда  $\overline{\Delta \vdash \lambda x_\varphi. M : \varphi \rightarrow \psi}$ .

□

**TODO**

### 3 Связь с программированием

Помните, что в  $\lambda$ -исчислении нет смысла?  
Здесь смысл отрицательный, скорее.

---

Д.Г.

3 задачи:

- (а) Проверка типа: верно ли  $\Gamma \vdash M : \sigma$ ?
- (б) Вывод типа:  $? \vdash M : ?$
- (в) Обитаемость типа:  $? \vdash ? : \sigma$

#### 3.1 Вывод типа

**Определение** (Алгебраический терм).

$$A ::= x \mid f(A, \dots, A) \\ (x \in X)$$

Уравнение в алгебраических термах:  $A = A$ .

**Определение** ( $S$ -подстановка).

$$S : X \rightarrow A$$

$S - \text{id}$  почти везде. (везде кроме конечного количества)

$S : A \rightarrow A$  — естественное обобщение.  $A_1, \dots, A_n$  — термы.  $S(f(A_1, \dots, A_n)) = f(S(f_1), \dots, S(f_n))$

**Определение.**  $S$  — решение уравнения  $P = Q$ , если  $S(P) = S(Q)$  ( $S$  — унификатор).

**Определение.**  $(S \circ T)(A) = S(T(A))$

Задача решения уравнение в алгебраических термах — унификация.

**Определение.** Существует  $S: T = S \circ U$ ,  $T$  — частный случай  $U$ .

**Определение.** Наибольший общий унификатор  $U$ :

1.  $U(A) = U(B)$ .
2. Если  $U(A) = U(B)$ , то существует  $S: T = S \circ U$ .

**Определение.** Назовём две системы эквивалентными, если они имеют одно решение.

**Определение.** Назовём систему несовместной, если выполнено одно из условий:

1. в ней есть уравнение вида  $f(\dots) = g(\dots)$ .
2. в ней есть уравнение вида  $x = \dots x \dots$

**Утверждение 3.1.** Для любой системы

$$\begin{cases} A_1 = B_1 \\ \vdots \\ A_n = B_n \end{cases}$$

найдётся эквивалентная ей система из одного уравнения:

$$f(A_1, \dots, A_n) = f(B_1, \dots, B_n)$$

( $f$  — новый символ).

**Определение.** Назовём систему разрешённой, если:

1. все уравнения имеют вид  $x = A$ ,
2. если  $x_i = A_i$ , то
  - (а)  $x_i$  не принадлежит никакому  $A_j$ .
  - (б)  $x_i \neq x_j$ , если  $j \neq i$ .

Решение по системе в разрешённой форме строится так:

$$S(x_i) = A_i$$

**TODO**

**Утверждение 3.2.**  $S$  — наибольший общий унификатор.

**Утверждение 3.3.** Несовместная система не имеет решений.

Рассмотрим следующие 4 преобразования:

- (а)  $T = x$ , где  $T$  не переменная  $\Rightarrow x = T$
- (б)  $x = x \Rightarrow \varepsilon$
- (в)  $s$   
бе

## 4 Интуиционистское исчисление предикатов второго порядка

Обычное  $\lambda$ -исчисление позволяет слишком много, просто-типизированное — слишком мало ( $(-1)$  не выразим). Хотелось бы золотую середину.

### 4.1 Логика второго порядка

**Определение.**

$$\Phi ::= (\Phi) \mid p \mid \Phi \rightarrow \Phi \mid \forall p. \Phi \mid \underbrace{\exists p. \Phi \mid \perp \mid \Phi \& \Phi \mid \Phi \vee \Phi}_{\text{сокращения}}$$

Введение кванторов:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall p. \varphi} \quad p \notin \text{FV}(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[p := \psi]}{\Gamma \vdash \exists p. \varphi}$$

Удаление кванторов:

$$\frac{\Gamma \vdash \forall p. \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[p := \sigma]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists p. \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \quad p \notin \text{FV}(\Gamma, \psi)$$

Сокращения:

$$\begin{aligned} \perp &\equiv \forall p. p \\ \varphi \& \psi &\equiv \forall a. ((\varphi \rightarrow \psi \rightarrow a) \rightarrow a) \\ \varphi \vee \psi &\equiv \forall a. (\varphi \rightarrow a) \rightarrow (\psi \rightarrow a) \rightarrow a \\ \exists x. \tau &\equiv \forall a. (\forall x. \tau \rightarrow a) \rightarrow a \end{aligned}$$

### 4.2 Система $F$

**Определение** (Тип в системе  $F$ ).

$$x = \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma, \dots & (\text{атомарный тип}) \\ \tau \rightarrow \sigma & \\ \forall \alpha. \tau & (\alpha - \text{переменная}) \end{cases}$$

**Определение** (Исчисление по Чёрчу в системе  $F$ ).

$$\begin{aligned} \Lambda ::= & x \mid \lambda p^\alpha. \Lambda \mid \Lambda \Lambda \mid (\Lambda) \\ & \mid \Lambda \alpha. \Lambda \\ & \quad (\text{полиморфная абстракция}) \\ & \mid \Lambda \tau \\ & \quad (\text{переменная типа}) \end{aligned}$$

Правила вывода:

1.  $\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)$
2.  $\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$
3.  $\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^\tau. M : \tau \rightarrow \sigma} \quad (x \notin \text{dom}(\Gamma))$

4.  $\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.M : \forall\alpha : \sigma} \quad x \in \text{FV}(\Gamma)$
5.  $\frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M\tau : \sigma[\alpha := \tau]} \quad (\text{подстановка типа})$

*Пример.*

$$\begin{aligned} \text{Pr1} &= \lambda x.xT \\ \text{Pr1} &: \forall\alpha.\forall\beta.\alpha \& \beta \rightarrow \alpha \\ \textbf{TODO} \end{aligned}$$

**Определение** ( $\beta$ -редукция в  $F$ ).

- (а) Типовая редукция:  $(\Lambda\alpha.M^\sigma)\tau \rightarrow_\beta M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$
- (б) Классическая  $\beta$ -редукция:  $(\lambda x^\sigma.M)^{\sigma \rightarrow \tau} Y \rightarrow_\beta M[x := Y] : \tau$

**Теорема 4.1** (Изоморфизм Карри-Ховарда).  $\Gamma \vdash_F M : \tau$  т.и.т.т.  $|\Gamma| \vdash \tau$  в интуиционистском исчислении предикатов второго порядка.

**Теорема 4.2.**  $F$  сильно нормализуемо.

### 4.3 Экзистенциальные тип