Теория типов

♡

Содержание

1 λ-исчисление

1.1 Введение

Смысла в этом нет.

Д.Г.

Определение (λ-выражение)**.** λ-выражение — выражение, удовлетворяющее грамматике:

$$
\begin{aligned}
\Lambda ::= & \lambda x.\Lambda && \text{(абстракция)}\\
& |\, \Lambda\Lambda && \text{(аппликация)}\\
& |\, x\\
& |\, (\Lambda)
\end{aligned}
$$

(а) аппликация левоассоциативна

(б) абстракция распространяется как можно дальше вправо

Пример. $((\lambda z.(z(yz)))(zx)z) = (\lambda z.z(yz))(zx)z$

Есть понятия связанного и свободного вхождения переменной (аналогично ИП). $\lambda x.A$ связывает все свободные вхождения x в A. Договоримся, что:

(а) Переменные — x, a, b, c.

(б) Термы (части λ-выражения) — X, A, B, C.

(в) Фиксированные переменные обозначаются буквами из начала алфавита, метапеременные — из конца.

Определение (α-эквивалентность)**.** A и B называются α-эквивалентными ($A =_\alpha B$), если выполнено одно из следующих условий:

1. $A \equiv x$ и $B \equiv x$.
2. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda y.Q$ и $P_{[x:=t]} =_\alpha Q_{[y:=t]}$, где t — новая переменная.
3. $A \equiv PQ$, $B \equiv RS$ и $P =_\alpha R$, $Q =_\alpha S$.

Пример. $\lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx$.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
\lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx &\implies \lambda x.\lambda y.xy =_\alpha \lambda y.\lambda x.yx\\
tz =_\alpha tz &\implies \lambda y.ty =_\alpha \lambda x.tx
\end{aligned}
$$

$tz =_\alpha tz$ верно по третьему условию. □

Определение (β-редекс)**.** Терм вида $(\lambda a.A)\,B$ называется β-редексом.

Пример. В выражении $(\lambda f.\underbrace{(\lambda x.\overline{f(xx)}^{A_1})\overline{(\lambda x.f(xx))}^{B_1}}_{A_2})\underbrace{g}_{B_2}$ два β-редекса.

Определение. Множество λ-термов $\mathbf{\Lambda}$ назовём множеством классов эквивалентности Λ по $(=_\alpha)$.

Определение (β-редукция)**.** $A \to_\beta B$ (состоят в отношении β-редукции), если выполняется одно из условий:

1. $A \equiv PQ$, $B \equiv RS$ и

$$
\begin{aligned}
&\text{либо } P \to_\beta R \text{ и } Q =_\alpha S\\
&\text{либо } P =_\alpha R \text{ и } Q \to_\beta S
\end{aligned}
$$

2. $A \equiv \lambda x.P$, $B \equiv \lambda x.Q$, $P \to_\beta Q$ (x из какого-то класса из $\mathbf{\Lambda}$).
3. $A \equiv (\lambda x.P)Q$, $B \equiv P_{[x:=Q]}$, Q свободно для подстановки в P вместо x.

1.2 Числа Чёрча

Хотите знать, что такое истина?

Д.Г.

$$\begin{aligned}\mathrm{T} &= \lambda x \lambda y.x \\ \mathrm{F} &= \lambda x \lambda y.y \\ \mathrm{Not} &= \lambda a.a\mathrm{FT}\end{aligned}$$

Похоже на тип boolean, не правда ли?

Пример.

$$\mathrm{Not}\ \mathrm{T} = (\lambda a.a\mathrm{FT})\mathrm{T} \to_\beta \mathrm{TFT} = (\lambda x.\lambda y.x)\mathrm{FT} \to_\beta (\lambda y.\mathrm{F})\mathrm{T} \to_\beta \mathrm{F}$$

Можно продолжить:

$$\begin{aligned}\mathrm{And} &= \lambda a.\lambda b.ab\mathrm{F} \\ \mathrm{Or} &= \lambda a.\lambda b.a\mathrm{T}b\end{aligned}$$

Попробуем определить числа:

Определение (Чёрчевский нумерал)**.**

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x, \quad \text{где} \quad f^n x = \begin{cases} f\left(f^{n-1}x\right) & ,n > 0 \\ x & ,n = 0\end{cases}$$

Пример.

$$\overline{3} = \lambda f.\lambda x.f(f(fx))$$

Несложно определить прибавление единицы к такому нумералу:

$$(+1) = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$$

Пример.

$$(+1)\overline{1} = (\lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx))(\lambda f.\lambda x.fx) \to_\beta \lambda f.\lambda x.f((\lambda f.\lambda x.fx)fx) \twoheadrightarrow_\beta \lambda f.\lambda x.f(fx) = \overline{2}$$

Определение (η-эквивалентность)**.**

$$\lambda x.fx =_\eta f$$

Аналог из C++: если **int** f(**int** x), то результат её вычисления равен результату вычисления [ ] (**int** x) { **return** f(x); } .

Арифметические операции:

$$\begin{aligned}\mathrm{IsZero} &= \lambda n.n(\lambda x.\mathrm{F})\mathrm{T} \\ \mathrm{IsEven} &= \lambda n.n\ \mathrm{Not}\ \mathrm{T} \\ \mathrm{Add} &= \lambda a.\lambda b.\lambda f.\lambda x.af(bfx) \\ \mathrm{Mul} &= \lambda a.\lambda b.a(\mathrm{Add}\ b)\overline{0} \\ \mathrm{Pow} &= \lambda a.\lambda b.b(\mathrm{Mul}\ a)\overline{1} \\ \mathrm{Pow}^* &= \lambda a.\lambda b.ba\end{aligned}$$

Для того, чтобы определить (-1), сначала определим "пару":

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle &= \lambda f.fab \\ \mathrm{First} &= \lambda p.p\mathrm{T} \\ \mathrm{Second} &= \lambda p.p\mathrm{F}\end{aligned}$$

n раз применим функцию $f(\langle a, b\rangle) = \langle b, b+1\rangle$ и возьмём первый элемент пары:

$$(-1) = \lambda n.\mathrm{First}\left(n\ (\lambda p.\ \langle(\mathrm{Second}\ p), (+1)\ (\mathrm{Second}\ p)\rangle)\ \left\langle\overline{0}, \overline{0}\right\rangle\right)$$

Введём сокращение записи:

$$\lambda xy.A = \lambda x.\lambda y.A$$

Определение (Нормальная форма)**.**
Терм A — нормальная форма (н.ф.), если в нём нет β-редексов.
Нормальной формой A называется такой B, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$, B — н.ф.
$\twoheadrightarrow_\beta$ — транзитивно-рефлексивное замыкание $\rightarrow_\beta$.

Утверждение 1.1. *Существует λ-выражение, не имеющее н.ф.*

Определение (Комбинатор)**.** Комбинатор — λ-выражение без свободных переменных.

Определение.

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega\omega \\ \omega &= \lambda x.xx\end{aligned}$$

Ω не имеет нормальной формы.

Определение (Комбинатор неподвижной точки)**.**

$$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Определение (β-эквивалентность)**.** $A =_\beta B$, если $\exists C : C \twoheadrightarrow_\beta A, C \twoheadrightarrow_\beta B$

Утверждение 1.2.

$$Yf =_\beta f(Yf)$$

Доказательство. (на лекции не давалось)

$$\begin{aligned}Yf &=_\beta (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))f \\ &=_\beta (\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)) \\ &=_\beta f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \\ &=_\beta f(Yf)\end{aligned}$$

□

Таким образом, с помощью Y-комбинатора можно определять рекурсивные функции.

Пример.

$$\mathrm{Fact} = Y(\lambda fn.\mathrm{IsZero}\ n\ \overline{1}\ (\mathrm{Mul}\ n\ (f\ (-1)\ n)))$$

TODO

1.3 Ромбовидное свойство и параллельная редукция

Определение (Ромбовидное свойство (diamond))**.** G обладает ромбовидным свойством, если какие бы ни были a, b, c, что aGb, aGc, $b \neq c$, найдётся такое d, что bGd и cGd.

Пример. $(<)$ на натуральных числах обладает ромбовидным свойством. $(>)$ на натуральных числах не обладает ромбовидным свойством.

β-редукция не обладает ромбовидным свойством.

Пример.

$$\begin{aligned}a &= (\lambda x.xx)(Ia) \\ a &\rightarrow_\beta (Ia)(Ia) = b \\ a &\rightarrow_\beta (\lambda x.xx)a = c \\ b &\rightarrow_\beta (Ia)a \rightarrow_\beta aa \\ b &\rightarrow_\beta a(Ia) \rightarrow_\beta aa \\ c &\rightarrow_\beta aa\end{aligned}$$

Нет d, что $b \rightarrow_\beta d$ и $c \rightarrow_\beta d$.

Теорема 1.3 (Чёрча-Россера)**.** *β-редуцируемость обладает ромбовидным свойством.*

Лемма 1.4. *Если R обладает ромбовидным свойством, то R^* обладает ромбовидным свойством.*

Доказательство. (Упражнение) **TODO**

1. M_1RN_1 и $M_1RM_2...M_{n-1}RM_n \Rightarrow$ есть $N_2...N_n$:
   $N_1RN_2...N_{n-1}RN_n$ и M_nRN_n.

2. Покажем ромбовидное свойство. □

Определение (Параллельная β-редукция)**.** $A \rightrightarrows_\beta B$

1. $A =_\beta B$, то $A \rightrightarrows_\beta B$

2. $A \rightrightarrows_\beta B$, то $\lambda x.A \rightrightarrows_\beta \lambda x.B$

3. $P \rightrightarrows_\beta Q$ и $R \rightrightarrows_\beta S$, то $PR \rightrightarrows_\beta QS$

4. $(\lambda x.P)Q \rightrightarrows_\beta R_{[x:=S]}$, если $P \rightrightarrows_\beta R$ и $Q \rightrightarrows_\beta S$.

Утверждение 1.5. $(\rightrightarrows_\beta)$ *обладает ромбовидным свойством.*

Доказательство. (Упражнение) **TODO** □

Утверждение 1.6. *Если $A \to_\beta B$, то $A \rightrightarrows_\beta B$.*

Утверждение 1.7. *Если $A \rightrightarrows_\beta B$, то $A \twoheadrightarrow_\beta B$.*

Доказательство. (Упражнение) **TODO** □

При этом, обратное не всегда верно.

Пример.

$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xxx) \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$$
$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xxx) \not\rightrightarrows_\beta (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$$

Утверждение 1.8. *Из 1.6 и 1.7 следует, что $(\to_\beta)^* = (\rightrightarrows_\beta)^*$.*

Доказательство. Теорема Чёрча-Россера следует из 1.5 и 1.8. □

Следствие 1.9. *Нормальная форма для λ-выражения единственна, если существует.*

Теорема 1.10 (Тезис Чёрча)**.** *Если функция вычислима с помощью механического аппарата, то она вычислима с помощью λ-выражения.*

1.4 Порядок редукции

«Завтра! Завтра! Не сегодня!» — так ленивцы говорят.

Das deutsches Sprichwort

Определение.

$$K = \lambda x \lambda y.x$$
$$I = \lambda x.x$$
$$S = \lambda xyz.xz(yz)$$

I выражается через S и K: $I = SKK$.

Утверждение 1.11. *Пусть A — замкнутое λ-выражение. Тогда найдётся выражение T, состоящее только из S и K, что $A =_\beta T$.*

Пример. тут какой-то пример с омегой, подскажите чё там было, **TODO**

Определение (Нормальный порядок редукции)**.** Нормальным порядком редукции называется редукция самого левого β-редекса.

«Ленивые вычисления» (ну, почти, в ленивых ещё есть меморизация)

Определение (Аппликативный порядок редукции)**.** Самый левый из самых вложенных.

«Энергичные вычисления»

Утверждение 1.12. *Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.*

1.5 Парадокс Карри

Если это утверждение верно, то русалки существуют.

Попробуем построить логику на основе λ-исчисления. Введём комбнатор-импликацию, обозначим $(\supset)$. Введём М.Р. и правила:

1. $A \supset A$
2. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$
3. $A =_\beta B$, тогда $A \supset B$

Покажем, как в полученной логике можно доказать любое утверждение. Введём обозначение: $Y_{\supset a} \equiv Y(\lambda t.t \supset a) =_\beta Y(\lambda t.t \supset a) \supset a$.

1)	$Y_{\supset a} \supset Y_{\supset a}$	(схема аксиом)
2)	$Y_{\supset a} \supset (Y_{\supset a} \supset a)$	(можно доказать)
3)	$(Y_{\supset a} \supset Y_{\supset a} \supset a) \supset (Y_{\supset a} \supset a)$	(схема аксиом)
4)	$Y_{\supset a} \supset a$	(М.Р.)
5)	$(Y_{\supset a} \supset a) \supset Y_{\supset a}$	(третье правило)
6)	$Y_{\supset a}$	(М.Р.)
7)	a	(М.Р.)

Получается, что данная логика противоречива.

1.6 Импликационный фрагмент ИИВ

Определение (импликационный фрагмент ИИВ)**.** Рассмотрим интуиционистское исчисление высказываний.

1. Введём схему аксиом:
$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$
2. Правило введения импликации:
$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$
3. И правило удаления импликации:
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Мы построили импликационный фрагмент ИИВ (и.ф.и.и.в).

Пример. Докажем $\varphi \to \psi \to \varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi, \psi \vdash \varphi}\,(1)}{\varphi \vdash \psi \to \varphi}\,(2)}{\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)}\,(2)$$

Теорема 1.13. *И.ф.и.и.в полон в моделях Крипке, то есть* $\Gamma \vdash \varphi$ *т.и.т.т., когда для любой модели крипке* C *из* $\Vdash_C \Gamma$ *следует* $\Vdash_C \varphi$*.*

Доказательство. Рассмотрим модель Крипке вида $W = \{\Delta \mid \Gamma \subseteq \Delta, \Delta \text{ замкнуто относительно } \vdash\}$, $\Gamma \leq \Delta$ если $\Gamma \subseteq \Delta$. Индукцией по структуре φ покажем, что $\Delta \Vdash \varphi$ т.и.т.т., когда $\Delta \vdash \varphi$:

1. Пусть $\varphi \equiv x$ — переменная. Тогда $\Gamma \vdash \varphi$ эквивалентно $x \in \Gamma$, что эквивалентно $\Vdash x$ (по определению).
2. Пусть $\varphi \equiv \alpha \to \beta$.
   (a) Пусть $\Delta \vdash \varphi$. Рассмотрим такое Δ', что $\Delta \leq \Delta'$ и $\Delta' \Vdash \alpha$.

   ой всё **TODO**

□

Следствие 1.14. *И.ф.и.и.в замкнут относительно выводимости.*

Если некоторое утверждение выводится в ИИВ ($\vdash_{\text{и}} \varphi$) и содержит только импликации, то оно выводится и в и.ф.и.и.в. ($\vdash_{\text{и}\to} \varphi$).

2 Просто типизированное λ-исчисление

Определение (Тип)**.** $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ — множество типов. σ, τ — метапеременные для типов. Если τ, σ — типы, то $\sigma \to \tau$ — тип.

$$\Pi ::= T \mid \Pi \to \Pi \mid (\Pi)$$

$(\to)$ правоассоциативна.

Определение (Контекст)**.** Контекст — Γ.

$$\Gamma = \{\Lambda_1 : \sigma_1;\ \Lambda_2 : \sigma_2\ \ldots\ \Lambda_n : \sigma_n\}$$
$$|\Gamma| = \{\sigma_1,\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_n\}$$
$$\mathrm{dom}\,\Gamma = \{\Lambda_1,\ \Lambda_2\ \ldots\ \Lambda_n\}$$

2.1 Исчисление по Карри

Определение (Типизируемость по Карри)**.** Рассмотрим исчисление со следующими правилами:

1. $\dfrac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ (x \notin \mathrm{dom}(\Gamma))$
2. $\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$
3. $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ (x \notin \mathrm{dom}(\Gamma))$

Если λ-выражение типизируется этими трёмя правилами, то говорят, что оно типизируется по Карри.

Лемма 2.1 (subject reduction)**.** *Если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $M \to_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$.*

Следствие 2.2. *Если $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $M \twoheadrightarrow_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$.*

Теорема 2.3 (Чёрча-Россера)**.** *Если $\Gamma \vdash M : \sigma$, $M \twoheadrightarrow_\beta N$ и $M \twoheadrightarrow_\beta P$, тогда найдётся Q, что $N \twoheadrightarrow_\beta Q$, $P \twoheadrightarrow_\beta Q$ и $\Gamma \vdash Q : \sigma$.*

Пример. Несколько доказательств:

1. Докажем $\lambda x.x : \alpha \to \alpha$:

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha}\,(1)}{\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha}\,(3)$$

2. Докажем $\lambda f.\lambda x.fx : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash f : \sigma \to \tau}\,(1) \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash x : \sigma}\,(1)}{f : \sigma \to \tau; x : \sigma \vdash fx : \tau}\,(2)}{f : \sigma \to \tau \vdash \lambda x.fx : \sigma \to \tau}\,(3)}{\vdash \lambda f.\lambda x.fx : (\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \tau)}\,(3)$$

3. $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ не типизируемо: **TODO**

Лемма 2.4 (Свойство subject expansion)**.** *Неверно, что если $M \to_\beta N$, $\Gamma \vdash N : \sigma$, то $\Gamma \vdash M : \sigma$.*

Например, для $Ka\Omega$.

В общем случае тип не уникален, бывает, что одновременно $\vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha$ и $\vdash \lambda x.x : (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta)$.

Определение (Сильная нормализация)**.** Назовём исчисление сильно-нормализуемым, если любая последовательность редукций неизбежно приводит к нормальной форме (не существует бесконечной последовательности β-редукций) .

Определение (Слабая нормализация)**.** Назовём исчисление слабо-нормализуемым, если для любого терма существует последовательность β-редукций, приводящая его к нормальной форме.

Теорема 2.5 (о сильной нормализации)**.** *Просто типизируемое λ-исчисление сильно нормализуемо. Любое просто типизируемое λ-выражение сильно нормализуемо.*

2.2 Исчисление по Чёрчу

Определение (Типизация по Чёрчу).

$$\Lambda_{\text{ч}} ::= x \mid \lambda x^{\sigma}.\Lambda_{\text{ч}} \mid (\Lambda_{\text{ч}}) \mid \Lambda_{\text{ч}}\Lambda_{\text{ч}}$$

Правила:

1. $\dfrac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\text{ч}} x : \sigma}\ (x \notin \mathrm{dom}(\Gamma))$

2. $\dfrac{\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash_{\text{ч}} N : \sigma}{\Gamma \vdash_{\text{ч}} MN : \tau}$

3. $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash_{\text{ч}} M : \tau}{\Gamma \vdash_{\text{ч}} \lambda x^{\sigma}.M : \sigma \to \tau}\ (x \notin \mathrm{dom}(\Gamma))$

Определение.

$$|\Lambda_{\text{ч}}| = \begin{cases} x & \Lambda_{\text{ч}} \equiv x \\ |\Lambda_1|\,|\Lambda_2| & \Lambda_{\text{ч}} \equiv \Lambda_1\Lambda_2 \\ \lambda x.\,|\Lambda| & \Lambda_{\text{ч}} \equiv \lambda x^{\sigma}.\Lambda \end{cases}$$

Лемма 2.6 (Subject reduction по Чёрчу). *Пусть* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$ *и* $|M| \to_{\beta} N$.
Тогда найдётся такое H*, что* $|H| = N$, $\Gamma \vdash_{\text{ч}} H : \sigma$.

Теорема 2.7 (Чёрча-Россера). *Пусть* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$, $|M| \twoheadrightarrow_{\beta} N$, $|M| \twoheadrightarrow_{\beta} T$.
Тогда найдётся такое P*, что* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} P : \sigma$, $N \twoheadrightarrow_{\beta} |P|$ *и* $T \twoheadrightarrow_{\beta} |P|$.

Лемма 2.8 (Уникальность типов). *Если* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \gamma$ *и* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \tau$*, то* $\sigma = \tau$.

Лемма 2.8 показывает, чем исчисление по Чёрчу отличается исчислением по Карри.

Теорема 2.9 (о стирании).

1. *Если* $M \to_{\beta} N$ *и* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$*, то* $|M| \to_{\beta} |N|$.
2. *Если* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$*, то* $\Gamma \vdash_{\text{к}} |M| : \sigma$.

Теорема 2.10 (о поднятии). *Пусть* $P \in \Lambda_{\text{ч}}$, $M, N \in \Lambda_{\text{к}}$.

1. *Если* $M \to_{\beta} N$, $|P| = M$*, то найдётся такое* Q*, что* $|Q| = N$, $P \to_{\beta} Q$.
2. *Если* $\Gamma \vdash_{\text{к}} M : \sigma$*, то найдётся такое* $P \in \Lambda_{\text{ч}}$*, что* $\Gamma \vdash_{\text{ч}} P : \sigma$, $|P| = M$.

2.3 Изоморфизм Карри-Ховарда

TODO Многими логиками замечалась связь между выражениями типизированного λ-исчисления и доказательствами выражений ИИВ.

Правило вывода в ИИВ	Правило вывода в типизированном λ-исчислении
$\dfrac{\Gamma \vdash \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau}$ $\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma \to \tau}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash B : \sigma}{\Gamma \vdash AB : \tau}$ $\dfrac{\Gamma, x^\sigma : \sigma \vdash A : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^\sigma . A : \sigma \to \tau}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \psi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \psi}{\Gamma \vdash \langle A, B \rangle : \varphi \,\&\, \psi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash R : \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \pi_1 R : \varphi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash R : \varphi \,\&\, \psi}{\Gamma \vdash \pi_2 R : \psi}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \pi \quad \Gamma \vdash \psi \to \pi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \to \pi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A : \varphi}{\Gamma \vdash \mathrm{inj}_1\, A : \varphi \vee \psi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \mathrm{inj}_2\, A : \varphi \vee \psi}$ $\dfrac{\Gamma \vdash T : \varphi \vee \psi \quad \Gamma \vdash A : \varphi \to \pi \quad \Gamma \vdash B : \psi \to \pi}{\Gamma \vdash \textbf{case}\ T\ A\ B : \pi}$

TODO Пояснения значений инъекций, проекций и case; примеры.

Интуиционистская логика	λ-исчисление
выражение	тип
доказательство	терм (программа)
предположение	свободная переменная
импликация	абстракция (функция)

Теорема 2.11 (об изоморфизме Карри-Ховарда)**.**

1. *Пусть* $\Gamma \vdash \sigma$ *— и.ф.и.и.в., тогда найдётся такой терм* M*, что* $\Delta \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$*, где* $\Delta = \{(x^\varphi : \varphi) \mid \varphi \in \Gamma\}$*.*
2. *Пусть* $\Delta \vdash_{\text{ч}} M : \sigma$*, тогда* $|\Delta| \vdash \sigma$*.*

Доказательство. **TODO**

$\square$

3 Задачи в λ-исчислении

Помните, что в λ-исчислении нет смысла?
Здесь смысл отрицательный, скорее.

Д.Г.

В λ-исчислении выделяют 3 задачи:

(а) Проверка типа: верно ли $\Gamma \vdash M : \sigma$?

(б) Вывод типа: $? \vdash M :?$

(в) Обитаемость типа: $? \vdash ? : \sigma$

В этом разделе будем рассматривать задачу вывода типа.

3.1 Вывод типа

Определение (Алгебраический терм)**.**

$$A ::= x \mid f\,(A, \dots, A)$$
$$(x \in X)$$

Уравнение в алгебраических термах: $A = A$.

Определение (S-подстановка)**.**

$$S : X \to A$$

Причём S — id почти везде. (везде кроме конечного количества)

Определение (Естественное обобщение)**.** Естественное обобщение — такая подстановка $S : A \to A$, что $S\,(f\,(A_1, \dots, A_n)) = f\,(S(f_1), \dots, S(f_n))$

Определение (Унификатор)**.** S — унификатор (решение уравнения) $P = Q$, если $S(P) = S(Q)$.

Задача решения уравнение в алгебраических термах — унификация.

Определение (Композиция)**.** $(S \circ T)(A) = S(T(A))$

Определение (Частный случай)**.** T — частный случай U, если существует такое S, что $T = S \circ U$.

Определение (Наибольший общий унификатор)**.** Наибольший общий унификатор U для уравнения $A = B$ — такой унификатор, что:

1. $U(A) = U(B)$.
2. Любой другой унификатор — частный случай U.

Определение (Несовместная система)**.** Назовём систему несовместной, если выполнено одно из условий:

1. в ней есть уравнение вида $f(\dots) = g(\dots)$
2. в ней есть уравнение вида $x = \dots x \dots$

Определение (Эквивалентные системы)**.** Назовём две системы эквивалентными, если они имеют одинаковые решения.

Утверждение 3.1. *Для любой системы*

$$\begin{cases} A_1 = B_1 \\ \vdots \\ A_n = B_n \end{cases}$$

найдётся эквивалентная ей система из одного уравнения:

$$f(A_1, \dots, A_n) = f(B_1, \dots, B_n),$$

где f — новый символ.

Определение (Разрешённая система)**.** Назовём систему разрешённой, если:

1. все уравнения имеют вид $x = A$;
2. все переменные в левой части встречаются однократно.

Решение по системе в разрешённой форме строится так: По системе в разрешённой форме мы можем построить решение S, определив $S(x_i) = A_i$ для каждого i. **TODO**

Утверждение 3.2. *Построенный по системе в разрешённой форме унификатор S — наибольший общий унификатор.*

Утверждение 3.3. *Несовместная система не имеет решений.*

Рассотрим следующие преобразования, которые не меняют свойства системы:

Выражения	Условия	Новые выражения
$T = x$, T не переменная		$x = T$
$T = T$		убрать это уравнение
$f(A_1, \dots A_n) = g(B_1, \dots B_n)$	$f = g$	$A_1 = B_1 \dots A_n = B_n$
	$f \neq g$	система несовместна
$x = T$, $R = S$, x входит в S или T	T не содержит x	$x = T$, $R\,[x \coloneqq T] = S\,[x \coloneqq T]$
	T содержит x	система несовместна

Утверждение 3.4. *Последовательное применение правил либо за конечное число шагов приведёт систему в разрешённый вид, либо сделает её несовместной.*

Доказательство. **TODO** Пусть (n_1, n_2, n_3) — характеристика системы, где n_1 — количество переменных не входящих слева в систему слева от знака равенства только один раз, n_2 — общее количество вхождений функциональных символов в S, n_3 — количество выражений вида $x = x$ или $T = x$. Каждое преобразование уменьшает эту тройку (если сравнивать лексикографически). □

Теорема 3.5. *Задача вывода типа в λ-исчислении разрешима.*

Доказательство. Опишем алгоритм.
Пусть нам дан λ-терм M. Рекурсивно построим по нему систему уравнений E_m:

$M \equiv x$	$E_m = \{\}$	$\tau_m = \alpha$ — новая переменная.
$M \equiv PR$	$E_m = E_p \cup E_r \cup \{\tau_p = \tau_r \to \pi\}$	$\tau_m = \pi$
$M \equiv \lambda x.P$	$E_m = E_p$	$\tau_m = \tau_x \to \tau_p$

Решим построенную систему уравнений.
Можно показать, что алгоритм корректный. □

Пример. **TODO**

3.2 Про ложь

TODO послушать запись.

4 Система F

Обычное λ-исчисление позволяет слишком много, просто-типизированное — слишком мало ((-1) не выразим). Хотелось бы золотую середину.

4.1 Интуиционистское исчисление предикатов второго порядка

Определение.

$$\Phi ::= (\Phi) \mid p \mid \Phi \to \Phi \mid \forall p.\Phi \underbrace{\mid \exists p.\Phi \mid \bot \mid \Phi \,\&\, \Phi \mid \Phi \vee \Phi}_{\text{не существенные}}$$

Введение кванторов:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall p.\varphi}\ p \notin \mathrm{FV}(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi\,[p := \psi]}{\Gamma \vdash \exists p.\varphi}$$

Удаление кванторов:

$$\frac{\Gamma \vdash \forall p.\varphi}{\Gamma \vdash \varphi\,[p := \sigma]} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists p.\varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ p \notin \mathrm{FV}(\Gamma, \psi)$$

Последние четыре связки можно выразить через первые:

$$\begin{aligned}
\bot &\equiv \forall p.p \\
\varphi \,\&\, \psi &\equiv \forall a.((\varphi \to \psi \to a) \to a) \\
\varphi \vee \psi &\equiv \forall a.(\varphi \to a) \to (\psi \to a) \to a \\
\exists x.\tau &\equiv \forall a.(\forall x.\tau \to a) \to a
\end{aligned}$$

4.2 Система F

Определение (Тип в системе F)**.**

$$\tau = \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma, \ldots & \text{(атомарный тип)} \\ \tau \to \sigma & \\ \forall \alpha.\tau & (\alpha \text{ — переменнная}) \end{cases}$$

Определение (Исчисление по Чёрчу в системе F)**.**

$$\mathbf{\Lambda} ::= x \mid \lambda p^{\alpha}.\mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda} \mid (\mathbf{\Lambda}) \mid \Lambda\alpha.\mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{\Lambda}\tau$$

$\Lambda\alpha.\mathbf{\Lambda}$ — типовая (полиморфная абстракция), $\mathbf{\Lambda}\tau$ — применение типа.

Правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma} \qquad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^{\tau}.M : \tau \to \sigma}\ (x \notin \mathrm{dom}(\Gamma))$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.M : \forall\alpha : \sigma}\ x \in \mathrm{FV}(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M\tau : \sigma[\alpha := \tau]}\ \text{(подстановка типа)}$$

Пример. Левая проекция:

	Просто типизированное λ-исчисление	Система F
Тип	$\pi_1 : \alpha \,\&\, \beta \to \alpha$	$\pi_1 : \forall\alpha.\forall\beta.\alpha \,\&\, \beta \to \alpha$
Выражение	$\pi_1 = \lambda p.pT$	$\pi_1 = \Lambda\varphi.\Lambda\psi.\lambda p^{\varphi \& \psi}.pT$

Определение (β-редукция в F)**.**

(a) Типовая редукция: $(\Lambda\alpha.M^{\sigma})\,\tau \to_{\beta} M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$

(б) Классическая β-редукция: $(\lambda x^{\sigma}.M)^{\sigma\to\tau}\ X \to_{\beta} M[x := X] : \tau$

Теорема 4.1 (Изоморфизм Карри-Ховарда)**.** *$\Gamma \vdash_F M : \tau$ т.и.т.т., когда $|\Gamma| \vdash \tau$ в интуиционистском исчислении предикатов второго порядка.*

Теорема 4.2. *F сильно нормализуемо.*

TODO

4.3 Экзистенциальные тип

Допустим, у нас есть абстрактный тип данных «Стек»:
empty $: \alpha$
push $: \alpha \,\&\, \nu \to \alpha$
pop $: \alpha \to \alpha \,\&\, \nu$
Можно попробовать сказать это так: «stack $: \alpha \,\&\, (\alpha \,\&\, \nu \to \alpha) \,\&\, (\alpha \to \alpha \,\&\, \nu)$». Но проблема в том, что у нас есть только интерфейс стека, а не его реализация. Поэтому лучше будет сказать так: $\exists\alpha.\alpha \& (\alpha\&\nu \to \alpha)\&(\alpha \to \alpha\&\nu)$. То есть существует какое-то α, реазизовывающее требуемый интерфейс.

По аналогии с правилом удаления квантора существования, можно определить правила вывода для выражений экзистенциальных типов:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash (\textbf{pack}\ M, \theta\ \textbf{to}\ \exists\alpha.\varphi) : \exists\alpha.\varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \exists\alpha.\varphi \qquad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash\ \textbf{abstype}\ \alpha\ \textbf{with}\ x : \varphi\ \textbf{in}\ M\ \textbf{is}\ N : \psi}\ \alpha \notin \mathrm{FV}(\Gamma, \psi)$$

Пример. **TODO** нормально написать пример со стеком.

Если вспомнить, что квантор существования выразим через квантор всеобщности ($\exists\alpha.x \equiv \forall\beta.(\forall\alpha.x \to \beta) \to \beta$), то можно попытаться записать типы выражений **pack** и **abstype** через квантор существования и выразить их без расширения языка.

$$\textbf{pack}\ M, \theta\ \textbf{to}\ \exists\alpha.\varphi = \Lambda\beta.\lambda x^{\forall\alpha.\varphi\to\beta}.(x\theta M)$$
$$\textbf{abstype}\ \alpha\ \textbf{with}\ x : \varphi\ \textbf{in}\ M\ \textbf{is}\ N^{\psi} = M\psi(\Lambda\alpha.\lambda x^{\varphi}.N)$$

Можно показать, что $\textbf{abstype}\ \alpha\ \textbf{with}\ x : \sigma\ \textbf{in}\ (\textbf{pack}\ M, \tau\ \textbf{to}\ \exists\alpha.\sigma)\ \textbf{is}\ N \twoheadrightarrow_{\beta} N[\alpha := \tau][x := M]$. **TODO**

Пример. **TODO**

Утверждение 4.3. *F сильно нормализуемо.*

Утверждение 4.4. *F неразрешима.*

Ни одна из задач λ-исчисления в системе F не разрешима, даже задача проверки типизации. Доказать это можно через сведение к проблеме останова.

Итак, мы попытались добавить к типизированному λ-исчислению абстрактные типы данных, и получили слишком сложный язык. Давайте попробуем немного его упростить, чтобы с ним можно было работать.

4.4 Типовая система Хиндли-Милнера

Определение (Ранг типа)**.**

$$\mathrm{rk}(\tau) = \begin{cases} \max(\mathrm{rk}(\sigma)+1, \mathrm{rk}(\rho)) & \tau \equiv \sigma \to \rho, \text{ если } \sigma \text{ содержит } \forall \\ \mathrm{rk}(\rho) & \tau \equiv \sigma \to \rho, \text{ если } \sigma \text{ не содержит } \forall \\ 0 & \tau \equiv \alpha \\ \max(\mathrm{rk}(\rho), 1) & \tau \equiv \forall\alpha.\rho \end{cases}$$

Определение.
Тип (монотип) — выражение в грамматике $\tau ::= \alpha \mid \tau \to \tau \mid\ (\tau)$.
Типовая схема (политип) — выражение в грамматике $\sigma ::= \tau \mid \forall\alpha.\sigma$.

Утверждение 4.5. $\mathrm{rk}(\tau) = 0$*,* $\mathrm{rk}(\sigma) = 1$*.*

Пример. Ранг экзистенциального типа

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(\exists\alpha.\beta) &= \mathrm{rk}(\forall\gamma.(\forall\alpha.\beta\to\gamma)\to\gamma)\\ &= \max(\mathrm{rk}((\forall\alpha.\beta\to\gamma)\to\gamma),1)\\ &= \max(\max(\mathrm{rk}(\forall\alpha.\beta\to\gamma)+1,\mathrm{rk}(\gamma)),1)\\ &= \max(\max(2,0),1)=2\end{aligned}$$

Определение. σ_1 — подтип σ_2, если существует подстановка $[\alpha_1 \coloneqq \theta_1, \alpha_2 \coloneqq \theta_2 \dots \alpha_n \coloneqq \theta_n]$:

1. $\sigma_1 = \forall\beta_1 \dots \forall\beta_k.\tau[\alpha_1 \coloneqq \theta_1 \dots \alpha_n \coloneqq \theta_n]$, α_i не входит свободно в θ_j.
2. $\sigma_2 = \forall\alpha_1 \dots \forall\alpha_n\tau$

Определение (Правила вывода в системе Хиндли-Милнера)**.**

$$\frac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash x:\sigma}\ \text{(Аксиома)} \qquad \frac{\Gamma\vdash e:\sigma}{\Gamma\vdash e:\sigma'}\ \text{(Уточнение)},\ \sigma_1 \text{ — подтип } \sigma$$

$$\frac{\Gamma\vdash e:\sigma}{\Gamma\vdash e:\forall\alpha.\sigma}\ \text{(Обобщение)},\ \sigma\notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma, x:\tau'\vdash e:\tau}{\Gamma\vdash\lambda x.e:\tau'\to\tau}\ \text{(Абстракция)}$$

$$\frac{\Gamma\vdash e:\tau'\to\tau \qquad \Gamma\vdash e':\tau'}{\Gamma\vdash ee':\tau}\ \text{(Подстановка, применение)} \qquad \frac{\Gamma\vdash e:\sigma \qquad \Gamma\setminus\{x\}, x:\sigma\vdash e':\tau}{\Gamma\vdash \textbf{let } x=e \textbf{ in } e'=\tau}\ \text{(Let)}$$

TODO попросить у Д.Г. оригинальную статью.

Грамматика выражения выглядит следующим образом:

$$\Lambda ::= x \mid \lambda x.\Lambda \mid \Lambda\Lambda \mid\ (\Lambda) \mid \textbf{let } x=\Lambda \textbf{ in } \Lambda$$

4.5 Алгоритм W

Утверждение 4.6. *Задача вывода типа в Х-М разрешима.*

Обозначения: $\overline{\Gamma(\tau)} = \forall\alpha_1\dots\forall\alpha_n.\tau$, где $\alpha_1\dots\alpha_n \notin FV(\Gamma)$ (замыкание всех несвязанных переменных); $\Gamma_x = \Gamma\setminus\{x\}$.

Определим $W(\Gamma, e) = (S, \tau)$, принимающую контекст и выражение, и возвращающую такую подстановку и тип, что $S(\Gamma)\vdash e:\tau$.

$e \equiv x$	$x : \forall\alpha_1\dots\alpha_k.\tau' \in \Gamma$	$S' = \mathrm{Id}$
$e \equiv e_1e_2$	$W(\Gamma, e_2) = (S_2, \tau_2)$ $W(S_2(\Gamma), e_1) = (S_1, \tau_1)$ $U(S_1(\tau_1), \tau_2\to\beta) = V$, где β — новый тип	$(V(S_1\circ S_2), V(\beta))$
$e \equiv \lambda x.e$	$W(\Gamma_x \cup \{x:\beta\}, e) = (S_1, \tau_1)$, β — новый тип	$(S_1, S_1(\beta\to\tau_1))$.
$e \equiv \textbf{let } x = e_1 \textbf{ in } e_2$	$W(\Gamma, e_1) = (S_1, \tau_1)$ $W(S_1(\Gamma_x \cup \{x : S_1(\overline{\Gamma(\tau_1)})\}), e_2) = (S_2, \tau_2)$	$(S_2\circ S_1, \tau_2)$

TODO примеры

5 Линейные и уникальные типы

Пусть $A \to_\beta A'$. С одной стороны, порядок редукции не важен, $(\lambda x.xx)A \to_\beta (\lambda x.xx)A' \to_\beta A'A'$ и $(\lambda x.xx)A \to_\beta AA \to_\beta A'A \to_\beta A'A'$. По теореме Чёрча-Россера нормальная форма единственна, если существует. С другой стороны, реальный мир на самом деле не таков, в нём есть побочные эффекты.

5.1 Комбинаторы

Рассмотрим комбинаторные логики Моисея Шейнфинкеля и Хаскелла Карри:

Моисей Шейнфинкель:

$$\begin{array}{ll} I & \text{Identität} \\ K & \text{Konstanz} \\ S & \text{VerSchmelzung} \\ T & \text{VerTauschung} \end{array}$$

Хаскел Карри:

$$\begin{aligned} B &= \lambda xyz.x(yz) \\ C &= \lambda xyz.xzy \\ K &= \lambda xy.x \\ W &= \lambda xy.xyy \end{aligned}$$

Докажем 1.11. Определим $T : \Lambda \to \Lambda_{SK} \cup \{\text{свободные переменные}\}$:

$$\begin{aligned} T[x] &= x \\ T[AB] &= T[A]\ T[B] \\ T[\lambda x.P] &= K\ T[P], \text{ если } x \notin FV(P) \\ T[\lambda x.x] &= I =_\beta SKK \\ T[\lambda x.AB] &= S\ T[\lambda x.A]\ T[\lambda x.B] \\ T[\lambda x.\lambda y.A] &= T[\lambda x.T[\lambda y.A]] \end{aligned}$$

$T[\lambda\text{-выражение}]$ завершается и не содержит абстракций. Можно показать, что $T[A] =_\beta A$. □

Можно доказать аналогичную теорему для комбинаторов B, C, K, W, выразив через них S и K: $K = K$, $S = B(BW)(BBC)$, $I = CKK$.

А теперь выведем типы у S и K:

$$\begin{aligned} S &= \lambda xyz.xz(yz) : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \\ K &= \lambda xy.x : \alpha \to \beta \to \alpha \end{aligned}$$

Это похоже на вторую и первую схемы аксиом в ИИВ.

Базис $BCKWI$ по изоморфизму Карри-Ховарда порождает интуиционистскую логику. Можно рассматривать исчисления, прорджённые базисами $BCKI$ и BCI.

$$\begin{aligned} I &: \alpha \to \alpha \\ B &: (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma) \\ C &: (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\beta \to \alpha \to \gamma) \\ K &: \alpha \to \beta \to \alpha \\ W &: (\alpha \to \alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta) \end{aligned}$$

Сейчас мы выпишем какое-то исчисление.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \times B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \times B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \times B}{\Gamma \vdash B}$$

TODO шенька

5.2 Линейные высказывания

Определение.

$$T ::= x \mid T \multimap T \mid T \otimes T \mid T \mathbin{\&} T \mid T \oplus T \mid !T$$

Контексты двух сортов. $\langle A \rangle$ — линейный, $[A]$ — интуиционистский.

$$\frac{}{\langle A\rangle \vdash A} \qquad \frac{}{[A] \vdash A} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \vdash A}{\Delta, \Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma, [A], [A] \vdash B}{\Gamma, [A] \vdash B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, [A] \vdash B}$$

Докажем закон Де-Моргана:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle !(A \mathbin{\&} B)\rangle \vdash !(A \mathbin{\&} B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A \mathbin{\&} B] \vdash A \mathbin{\&} B}}{[A \mathbin{\&} B] \vdash A}}{[A \mathbin{\&} B] \vdash !A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{[A \mathbin{\&} B] \vdash A \mathbin{\&} B}}{[A \mathbin{\&} B] \vdash B}}{[A \mathbin{\&} B] \vdash !B}}{[A \mathbin{\&} B, A \mathbin{\&} B] \vdash !A \otimes !B}}{[A \mathbin{\&} B] \vdash !A \otimes !B}}{\langle !(A \mathbin{\&} B)\rangle \vdash !A \otimes !B}$$

Вложение интуиционистских связок в нашу логику:

$$A \to B = !A \multimap B$$
$$A \times B = A \mathbin{\&} B$$
$$A + B = !A \oplus !B$$

Также можно вкладывать $A \times B$ как $!A \otimes !B$.