

Vincent Manet

Méthode des
éléments finis

*Vulgarisation des aspects mathématiques
et illustration de la méthode*

Vincent Manet — 2013 (Ceci est la version « livre » de ce document)

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France :

- paternité ;
- pas d'utilisation commerciale ;
- partage des conditions initiales à l'identique ;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



Introduction

Dans ce (de moins en moins court) document, plutôt à destination d'ingénieurs mécaniciens connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons essayer de faire une présentation un peu plus théorique que ce qui leur est généralement proposé (et qui est quand même souvent de type « preuve par les mains », ce qui occulte trop de points).

Nous ne ferons appel qu'à des notions mathématiques de bases généralement déjà vues pour la plupart en taupe (ou en tout début de cycle d'ingé)... bien que des compléments que l'on peut qualifier d'élémentaires nous aient été demandés et aient été inclus.

Nous espérons, grâce à cette présentation théorique montrer toute la souplesse et la puissance de la méthode, afin de permettre au lecteur d'envisager d'autres simulations que celles qu'il a pu déjà réaliser par le passé.

But du document

Le but initial était de *présenter brièvement la théorie mathématique* derrière les éléments finis afin que les ingénieurs utilisant cette méthode puissent envisager toutes les applications, ainsi que de *covrir les aspects qui, selon nous, devraient être connus de tout ingénieur mécanicien impliqué ou intéressé par le calcul numérique*.

Toutefois, il s'envisage comme support de référence à plusieurs cours, cours qui ne portent pas sur tous les aspects traités dans ce document, et pendant lesquels les aspects pratiques sont plus développés (avec mise en situation sur machine).

Même si nous avons voulu rester le plus succinct possible, l'introduction de notions de proche en proche à conduit à un document fait aujourd'hui une certaine taille (par exemple, nous avons besoins des espaces de Sobolev, mais comment les introduire sans parler des espaces de Lebesgue, mais comment les introduire sans parler...).

Aussi le document a-t-il finalement été découpé en plusieurs parties : un survol des notions mathématiques, puis le traitement du problème continu constituent l'ossature théorique nécessaire à assoir la MEF sur un socle solide. La discrétisation par éléments finis à proprement parler n'est aborder qu'ensuite, et d'ailleurs un seul chapitre suffirait à en faire le tour... sauf à entrer plus dans le détail concernant « ce qui fâche » : homogénéisation, non linéarité, dynamique, ce qui est fait dans des chapitres séparés.

Enfin, d'autres méthodes sont abordées car également très employées aujourd'hui. Aussi est-il indispensable selon nous d'en avoir entendu parlé et d'en connaître les principales notions (BEM, FEEC...).

En annexes, se trouve un petit fourre-tout comprenant des choses censées être maîtrisées depuis la taupe (mais qui parfois nous sont demandées) et les compléments qui alourdiraient encore les propos précédents.

Certaines notions (essentiellement de topologie) ne sont pas présentées dans ce document. Il nous a semblé que le lecteur devait avoir quelques souvenirs de ce qu'est un ouvert, un fermé, l'adhérence, la densité... Par ailleurs, leur nom peut être suffisamment évocateur pour se passer d'une définition formelle dans le contexte de ce document.

Attention, ce document n'est pas un document de mathématiques, il ne contient d'ailleurs aucune preuve. C'est, dans ces deux premières parties, un document de vulgarisation de notions mathématiques nécessaires à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Nous avons voulu réaliser un survol des notions importantes, mais malgré tout, afin de ne pas être parfois trop laconique, nous avons un peu débordé.

En fin de document, un petit index des noms propres permettra au lecteur de replacer les divers développements mentionnés dans l'histoire... Il se peut qu'il subsistent quelques erreurs, notamment au niveau des nationalités mentionnées, car il n'est pas toujours aisément de déterminer rapidement cette information (et nous ne connaissons pas toutes les biographies des personnes citées).

Ce document a été réalisé très rapidement, et de manière extrêmement hachée. Il comporte forcément encore beaucoup de fautes : merci de m'en faire part.

Démarche de l'ingénieur numéricien

En préambule à ce document, nous tenions à synthétiser la démarche complète de l'ingénieur numéricien :

- Modélisation / mise en équations – Construction du problème continu (système d'EDP).
- Analyse mathématique du problème posé – Existence, unicité, propriétés des solutions.
- Conception d'une méthode numérique – Construction d'un problème discrétilisé.
- Analyse numérique – Questions de stabilité, convergence, précision.
- Algorithmique – Choix de méthodes de résolution en dimension finie.
- Mise en œuvre sur ordinateur – Programmation.
- Pre et Post Traitement (maillages / visualisation) – Interpolation, extrapolation, outils de la CAO.

Tous ces points ne seront évidemment pas abordés dans ce document !

Remerciements :

Nous n'avions pas prévu de réaliser une deuxième version aussi rapidement. Celle-ci existe suite aux sollicitations de Mathias Legrand. C'est lui qui a développé les macros nécessaires à l'amélioration très très nette de la qualité typographique (environnements pour les notes historiques, les théorèmes, lemmes...).

C'est également pourquoi coexistent aujourd'hui deux versions (mais issues du même code source) : l'un que nous appelons « version cours » (plus en accord avec ce que nous proposons en cours), et l'autre « version livre », plus proche d'un ouvrage.

Table des matières

Introduction	3	
But du document	3	
Démarche de l'ingénieur numéricien	4	
Table des matières	5	
I	SURVOL MATHÉMATIQUE	
1	Les espaces de base	9
1.1	Panorama non exhaustif des espaces	9
1.1.1	Point de vue topologique	10
1.1.2	Point de vue métrique	11
1.1.3	Point de vue algébrique	11
1.2	Tribu, mesure, espaces mesurable et mesuré	13
1.3	Tribu borélienne, mesures de Dirac et Lebesgue	14
1.4	Propriétés de la mesure de Lebesgue	15
1.5	Petit exemple amusant d'injection dans un Hilbert	16
2	Applications et morphismes	19
2.1	Fonction, application, injection, surjection, bijection	20
2.2	Morphismes	21
2.2.1	Présentation	21
2.2.2	Cas des espaces vectoriels : application et forme linéaires	21
2.2.3	Endo, iso, auto -morphismes	22
2.2.4	Espace dual d'un espace vectoriel	22
2.2.5	Noyau et image	23
2.3	Opérateur	23
3	Continuité et dérivabilité	25
3.1	Continuité et classe C^0	25
3.2	Continuité de Hölder et Lipschitz	27
3.3	Dérivée	27
3.4	Fonctions de classe C^k	29
3.5	Dérivées partielles	29
3.6	Retour sur les classes C^k pour une fonction de plusieurs variables	30
3.7	Nabla et comparses	31
3.7.1	Champs de vecteurs et de scalaires	31

3.7.2	Gradient, divergence, rotationnel, Laplacien et D'Alembertien	31
3.7.3	Normale et dérivée normale	32
3.7.4	Potentiel d'un champ vectoriel	32
3.7.5	Signification « physique »	33
3.8	Quelques théorèmes sur les intégrales	34
4	Espaces de Lebesgue	37
4.1	Présentation des espaces de Lebesgue L^p	39
4.2	Construction de L^p	39
4.3	Espace L^0	40
4.4	Espace L^∞ et dualité avec L^1	40
4.5	Espace L^2	40
4.6	Complément et exemples	40
4.7	Mais où se situent nos fonctions C^k ?	40
5	Espaces de Sobolev	43
5.1	Distributions	43
5.2	Dérivées au sens des distributions	44
5.3	Espaces $W^{m,p}(\Omega)$	45
5.4	Espaces $H^m(\Omega)$	45
5.5	Espaces $H_0^m(\Omega)$	46
5.6	Espaces $H^{-m}(\Omega)$	46
5.7	Trace	47
5.8	Espace trace	47
5.8.1	Cas $p = 2$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$	48
5.8.2	Cas $p = 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ quelconque	48
5.8.3	Cas $p \neq 2$ et $\Omega =]0, 1[$	48
5.8.4	Cas général des espaces H^s	48
5.8.5	Cas général des espaces $W^{s,p}$	49
5.9	Espaces $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$	49
5.10	Espaces $H(\text{div})$ et $H(\text{rot})$	50
5.11	Inégalités utiles	51
	Résumé des outils d'analyse fonctionnelle	53

II	PROBLÈME CONTINU	
6	Problèmes physiques : équations différentielles et aux dérivées partielles	59
6.1	Introduction	59
6.2	Conditions aux limites	61
6.2.1	Dirichlet – valeurs aux bords	61
6.2.2	Neumann – gradients aux bords	61
6.2.3	Robin – relation gradient/valeurs sur le bord	61
6.2.4	Condition aux limites dynamique	62
6.2.5	Condition aux limites mêlée	62

6.3	Types d'équations aux dérivées partielles	62
6.4	Phénomènes de propagation et de diffusion	62
6.4.1	Équations de Laplace et Poisson	63
6.4.2	Équation d'onde, phénomènes vibratoires	63
6.4.3	Équation de la chaleur	64
6.5	Mécanique des fluides	65
6.5.1	Équation de Navier-Stokes	65
6.5.2	Équation de Stokes	67
6.5.3	Équation d'Euler	68
6.6	Équations de la mécanique des milieux continus des solides	68
6.6.1	Notions générales conduisant aux équations de la mécanique	68
6.6.2	Formulation générale	71
6.6.3	Dynamique / statique	71
6.6.4	Grands / petits déplacements	71
6.6.5	Loi de comportement	72
6.7	Équations de l'acoustique	73
6.8	Multiplicateurs de Lagrange	73
7	Formulations faible et variationnelle	75
7.1	Principe des formulations faible et variationnelle	75
7.2	Théorème de représentation de Riesz-Fréchet	78
7.2.1	Cas des formes linéaires	78
7.2.2	Extension aux formes bilinéaires	78
7.3	Théorème de Lax-Milgram	78
7.4	Théorème de Babuška et condition inf-sup	79
7.5	Théorèmes de Brezzi et condition BBL	80
7.6	Multiplicateurs de Lagrange	81
8	Problèmes physiques : formulations faibles et variationnelles	83
8.1	Phénomènes de propagation et de diffusion	83
8.1.1	Équations de Laplace et Poisson	83
8.1.2	Équation d'onde	85
8.1.3	Équation de la chaleur	86
8.2	Mécanique des fluides	86
8.2.1	Équation de Stokes	86
8.2.2	Équation de Navier-Stokes	87
8.2.3	Équation d'Euler	88
8.3	Équations de la mécanique des milieux continus des solides	89
8.3.1	Formulation générale	89
8.3.2	Choix des variables	89
8.4	Équations de l'acoustique	92
8.4.1	Équation de Helmholtz	92
8.4.2	Conditions aux limites en acoustique	92
8.4.3	Formulation faible	93

9	Exemple de formulation variationnelle d'un problème de Neumann	95
9.1	Étude directe de l'existence et l'unicité de la solution	95
9.2	Formulation variationnelle	95
9.3	Formulation mixte duale	97

III

ÉLÉMENS FINIS

Introduction	103
10 La méthode des éléments finis	105
10.1 Introduction	105
10.2 Problèmes de la modélisation « réelle »	107
10.2.1 Problèmes géométriques	107
10.2.2 Problèmes d'échelle	107
10.2.3 Couplage géométrique	108
10.2.4 Couplage intrinsèque	109
10.3 Principe de la méthode : résolution d'un système matriciel	109
10.4 Approximation conforme et lemme de Céa	111
10.4.1 Cas Lax-Milgram	111
10.4.2 Cas Babuška	112
10.4.3 Cas Brezzi	112
10.5 Approximations non conformes et lemmes de Strang	113
10.5.1 Cas $V_h \subset V$	113
10.5.2 Cas $V_h \not\subset V$	113
10.6 Convergence de la méthode des éléments finis en approximation conforme ou non lorsque $V_h \subset V$	114
10.6.1 Calcul de la majoration d'erreur	114
10.6.2 Majoration de l'erreur	115
11 Choix d'un Modèle	117
11.1 La mécanique, un problème à plusieurs champs	118
11.2 Plusieurs modélisations d'un même problème	121
11.3 Exemple : retour sur le calcul de poutre du paragraphe 11.1 avec CAST3M	124
11.3.1 Modélisation 2D	124
11.3.2 Modèle 3D	126
11.4 Interpolation des champs et de la géométrie	128
12 Formulation pratique d'éléments finis	129
12.1 Éléments de Lagrange	129
12.1.1 Unisolvance	129
12.1.2 Éléments finis de Lagrange	130
12.1.3 Famille affine d'éléments finis – élément de référence	132
12.1.4 Construction de la base globale	132
12.2 Éléments d'Hermite	133
12.2.1 Classe d'un EF	133
12.2.2 EF d'Hermite	133

12.3	Traitement de plusieurs champs	134
12.4	Validation pratique d'un EF, indicateurs d'erreur	136
12.4.1	Modes rigides et parasites	137
12.4.2	Modes associés aux déformations constantes	137
12.4.3	Patch-tests	137
12.4.4	Test de précision d'un élément	138
12.5	Exemple : quelques variations sur le thème des éléments 1D	138
12.5.1	Élément de référence 1D linéaire à 2 noeuds	138
12.5.2	Quelques rappels sur la jacobienne et le jacobien d'une transformation	139
12.5.3	Éléments de référence 1D linéaires à n noeuds	140
12.5.4	Élément de référence 1D infini	141
12.5.5	Élément fini de barre 1D	141
12.5.6	Assemblage de 3 éléments 1D linéaires à 2 noeuds	142
12.5.7	Élément de barre 1D de type Hermite (élément subparamétrique)	143
12.5.8	Élément mixte 1D	143
12.6	Sur les déplacements imposés	144
12.6.1	Problème considéré	144
12.6.2	Retour sur la résolution de systèmes linéaires	145
12.6.3	Complément de Schur et déplacements imposés	145
12.6.4	Multiplicateurs de Lagrange et déplacements imposés	146
12.6.5	Actions extérieures et déplacements imposés	146
12.6.6	Retour sur notre exemple	147
12.6.7	Relations linéaires entre ddl	148
13	Calcul efficient : qualité des résultats et efforts de calcul	149
13.1	Amélioration d'un modèle : méthodes r, h et p	149
13.2	Post-traitement	149
13.3	Exemple d'implémentation d'un post-traitement dans ANSYS	150
13.3.1	Macro dans ANSYS	150
13.3.2	Poutre en U	153
13.3.3	Résultats	155
13.4	Sous-structuration et simulation multi-échelles	156
13.4.1	Condition de périodicité – méthodes multi-niveaux	160
13.4.2	Couplage des cellules micro – méthodes de décomposition de domaine	162
13.5	Super-éléments	164
13.5.1	Condensation statique	165
13.5.2	Remonter aux ddl internes	166
13.6	Pseudo-inversion et réanalyse	166
13.6.1	Modification du chargement uniquement	167
13.6.2	Modification de la matrice	167
13.6.3	Modification des conditions cinématiques	167
13.7	Dérivées d'ordre supérieur	169
13.7.1	Dérivées par rapport à la géométrie	169
13.7.2	Calcul des dérivées	170
14	Homogénéisation	171
14.1	Méthodes d'homogénéisation	172
14.1.1	Méthode de développement régulier	173
14.1.2	Méthode de la couche limite	173
14.1.3	Méthode de développement asymptotique infini	174
14.1.4	Cas des coefficients discontinus	174

14.2	Homogénéisation simplifiée pour les matériaux composites	175
14.2.1	Introduction	175
14.2.2	Loi des mélanges, bornes de Voigt et de Reuss	175
14.3	Homogénéisation des matériaux poreux	176
14.4	Homogénéisation des problèmes non stationnaires	177
14.5	Changement de dimension, raccord de maillage	177
15	Problèmes non stationnaires	179
15.1	Équation non stationnaire de la dynamique	179
15.2	Schéma explicite : différences finies centrées	180
15.3	Schéma implicite : schéma de Newmark classique	180
15.4	Comparaison des méthodes explicite et implicite	181
15.5	Exemple : un calcul de propagation avec FREEFEM++	182
15.6	Décomposition modale	184

I

SURVOL MATHÉMATIQUE

Chapitre 1

Les espaces de base

Résumé — Dans les problèmes que nous envisageons de traiter *in fine*, il n'est finalement besoin que d'espaces vectoriels normés finis sur le corps des réels. On pourrait rapidement en donner les principales propriétés qui sont sans doute encore en mémoire des lecteurs tant elles sont « naturelles ».

Mais en faisant cela, nous ne respecterions pas nos engagements de présenter un peu plus avant les fondements mathématiques.

Sans toutefois aller trop loin dans les notions topologiques générales, nous allons essayer dans ce chapitre de passer en revue la liste des espaces depuis les espaces topologiques jusqu'aux espaces de Hilbert, de manière succincte et didactique (nous l'espérons) en relevant les points importants essentiellement du point de vue de leur utilité.

1.1 Panorama non exhaustif des espaces

Histoire

Le mot « topologie » vient de la contraction des noms grecs « *topos* » (lieu) et « *logos* » (étude), c'est donc l'étude du lieu. On a d'ailleurs commencé par l'appeler *Analysis Situs*, le terme « topologie » n'étant introduit qu'en 1847, en allemand, par Johann Benedict Listing dans *Vorstudien zur Topologie*.

La topologie vise à définir ce qu'est un lieu (i.e. un espace) et quelles peuvent être ses propriétés (je dirais uniquement en tant que tel, sans autre ajout). Elle s'intéresse plus précisément à ce que l'on appelle aujourd'hui espaces topologiques et aux applications, dites continues, qui les lient, ainsi qu'à leurs déformations (“*A topologist is one who doesn't know the difference between a doughnut and a coffee cup*”).

En analyse, elle fournit des informations sur l'espace considéré permettant d'obtenir un certain nombre de résultats (existence et/ou unicité de solutions d'EDP, notamment). Les espaces métriques ainsi que les espaces vectoriels normés sont des exemples d'espaces topologiques. L'origine de la topologie est l'étude de la géométrie dans les cultures antiques. Le travail de Leonhard Euler datant de 1736 sur le problème des sept ponts de Königsberg est considéré comme l'un des premiers résultats de géométrie qui ne dépend d'aucune mesure, i.e. l'un des premiers résultats topologiques.

Henri Poincaré publia *Analysis Situs* en 1895, introduisant les concepts d'homotopie et d'homologie. Bien d'autres mathématiciens ont contribué au sujet parmi lesquels nous citerons : Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard, Ascoli, Fréchet, Hausdorff...

Finalement, une dernière généralisation en 1922, par Kuratowski, donna le concept actuel d'espace topologique.



Euler

Poincaré

Hausdorff

1.1.1 Point de vue topologique

E, un ensemble

Cela suffit déjà pour pouvoir s'intéresser par exemple à des fonctions, à des relations d'équivalence (donc au quotient)... décomposition canonique, permutation...

On peut ensuite définir un ensemble ordonné...

Une topologie T est un ensemble de parties de E que l'on définit comme les ouverts de (E, T) , vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble vide et E appartiennent à T .
- Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, i.e. si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de T , indexée par un ensemble I quelconque (pas nécessairement fini ni même dénombrable) alors $\bigcup_{i \in I} O_i \in T$.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, i.e. si O_1, \dots, O_n sont des éléments de T (avec $n > 0$), alors $O_1 \cap \dots \cap O_n \in T$.

→ **Espace topologique**

À partir des ouverts, on définit les fermés, l'adhérence, l'intérieur, l'extérieur, voisinage...

Séparation :

deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.

→ **Espace séparé (ou de Hausdorff)**

Intérêts :

- Unicité de la limite de tout filtre convergent.
- Une suite convergente a une limite unique.
- Une topologie plus fine qu'une topologie séparée est séparée.
- Tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.
- Deux applications continues à valeurs dans un séparé qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Régularité :

Il est possible de séparer un point x et un fermé F ne contenant pas x par deux ouverts disjoints.

On peut même alors choisir ces deux ouverts de manière à ce que leurs adhérences respectives soient disjointes.

→ **Espace régulier**

Application :

- Tout point admet une base de voisinages fermés.
- Tout fermé est l'intersection de ses voisinages fermés.

Compacité (recouvrement fini) :

Un espace séparé est compact (vérifie la propriété de Borel-Lebesgue), si chaque fois qu'il est recouvert par des ouverts, il est recouvert par un nombre fini d'entre eux.

→ **Espace compact**

Tout produit de compacts est compact.

\mathbb{R} est compact

Un espace peut ne pas être compact, mais une de ses parties l'est :

- \mathbb{R} n'est pas fermé, mais tout $[a; b]$ fermé borné l'est.
- \mathbb{R}^n n'est pas compact, mais tout pavé fermé l'est.

Notons bien que rien n'est dit sur les éléments de l'ensemble E . Ce peuvent être des éléments discrets, des scalaires, des vecteurs, des fonctions...

1.1.2 Point de vue métrique

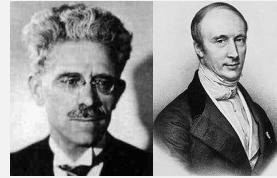
Comme nous le mentionnions au paragraphe précédent, lorsque l'on parle d'espace on a intuitivement envie de parler de « distance ».

Histoire

Unifiant les travaux de ses prédecesseurs sur les espaces de fonctions, c'est en 1906 que Maurice Fréchet introduit le concept d'espace métrique.

La métrique qui nous est la plus usuelle est évidemment la métrique euclidienne, qui est celle que nous utilisons en géométrique « classique » (euclidienne) : la distance entre deux points est égale à la longueur du segment les reliant. La structure métrique fournit beaucoup plus d'information sur la forme géométrique des objets que la structure topologique.

Enfin nous redonnerons le si important critère de Cauchy (qui est valable pour tout espace uniforme, dont notamment les espaces métriques) qui permet de définir la toute aussi importante notion de complétude.



Fréchet

Cauchy

E, un ensemble

Une distance ou métrique d est une application de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;
- $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$ (positivité) ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Espace métrique

On peut réexprimer les notions d'ouvert, fermé, adhérence... densité, continuité... avec la métrique (les ε ...).

2 normes sont équivalentes si elles définissent la même topologie.

2 normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes s'il existe 2 constantes strictement positives k' et k'' telles que : $\forall x \in E, \|x\|_1 \leq k'\|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq k''\|x\|_1$

Critère de Cauchy :

Soit E un espace métrique et soit $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ une suite d'éléments de E . Cette suite est de Cauchy de E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \geq N, m \geq N) : d(x_m, x_n) \leq \varepsilon \quad (1.1)$$

ou encore : $d(x_m, x_n)$ tend vers 0 quand m et n tendent vers l'infini.

Espace métrique complet

Toute suite convergente est de Cauchy.

Réciproque : si $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ est de Cauchy sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors elle converge.

Cette propriété est fondamentale car elle permet de reconnaître si une suite converge sans connaître sa limite.

Attention, la notion d'espace complet est une notion métrique et non topologique (elle peut donc être vraie pour une métrique et fausse pour une autre).

L'importance de la complétude tient à ce que la solution d'un problème passe souvent par une solution approchée. Si la suite des solutions approchées est de Cauchy d'un espace convenable, et si cet espace est complet, alors la convergence vers une solution du problème est assurée.

1.1.3 Point de vue algébrique

Jusqu'à présent, nous n'avons pas vraiment parlé d'opérations que nous pourrions effectuer à l'intérieur des espaces que nous avons définis, ou entre ces espaces. Pour une présentation des structures algébriques on se reportera au cours homonyme. Elles sont riches et nombreuses. Dans le cadre de ce document, nous ne nous intéresserons qu'au cas de la structure d'espace vectoriel, le but étant, comme mentionné en introduction, d'en arriver aux espaces de Hilbert, fondements de l'analyse fonctionnelle.

Histoire

Lorsque l'on demande de citer l'un des grands mathématiciens du XXe siècle, Henri Poincaré et David Hilbert se partagent souvent la première place, aussi bien pour l'éventail considérable des sujets qu'ils ont abordés que pour avoir fait émerger de nombreuses idées fondamentales.

Hilbert reste célèbre pour ses 23 problèmes (dits problèmes de Hilbert) qu'il présenta au deuxième congrès international des mathématiciens à Paris en 1900, qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec et devaient marquer le cours des mathématiques du XXe siècle (et il avait raison ; tous ne sont pas résolus à ce jour).

Nous croiserons également un autre fondateur de l'analyse fonctionnelle, Stephan Banach qui a généralisé entre autre les travaux de Hilbert sur les équations intégrales, notamment en approfondissant la théorie des espaces vectoriels topologiques.



Hilbert

Banach

E, un ensemble

Structure d'espace vectoriel :

C'est une structure comportant une loi de composition interne et une loi de composition externe sur un corps \mathbb{K} permettant d'effectuer des combinaisons linéaires (voir cours sur les structures algébriques).

La loi de composition interne, notée $+$ en fait un groupe abélien, la loi de composition externe est la multiplication par un scalaire, scalaire pris sur le corps \mathbb{K} considéré.

→ Espace vectoriel (topologique)

Sur un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , 2 normes quelconques sont équivalentes.

Une norme sur un espace vectoriel E est une fonction, $x \mapsto \|x\|$ possédant les propriétés :

- positivité : $\|x\| > 0$ pour $x \neq 0$, $\|0\| = 0$;
- transformation par les homothéties : $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
- inégalité de convexité : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La distance issue de la norme est la distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

→ Espace vectoriel normé

Tout espace vectoriel normé est automatiquement un espace métrique (avec la distance issue de sa norme). De plus :

- la distance est invariante par translation : $d(x-a, y-a) = d(x, y)$.
- une homothétie de rapport λ multiplie la distance par $|\lambda|$: $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact (i.e. tout point possède au moins un voisinage compact), car toute boule fermée est compacte.

Comme un espace vectoriel normé muni avec la distance issue de sa norme est un espace métrique, on peut se demander si cet espace métrique vérifie le critère de Cauchy (voir paragraphe précédent) afin d'en faire un espace complet.

→ Espace de Banach

C'est donc finalement un espace vectoriel normé sur un sous-corps \mathbb{K} de \mathbb{C} (en général, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), complet pour la distance issue de sa norme.

Comme la topologie induite par sa distance est compatible avec sa structure d'espace vectoriel, c'est un espace vectoriel topologique.

Une norme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire ou hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si l'on a : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

→ Espace de Hilbert

C'est donc un espace préhilbertien complet, i.e. un espace de Banach dont la norme découle d'un produit scalaire ou hermitien unique.

Un espace de Hilbert est la généralisation en dimension quelconque d'un espace euclidien ou hermitien (Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire).

On peut encore faire les remarques suivantes concernant les espaces de Hilbert :

- Tout sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert est un Hilbert.
- Le plus important est de disposer d'un produit scalaire, car on va alors pouvoir déterminer des parties orthogonales de l'espace, donc en somme directe (théorème 2).

On rappelle, si besoin, qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire (i.e. une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , linéaire pour chacune des deux variables) possédant les propriétés :

- symétrie : $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

- positivité : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$
- définie : $\forall x \in E, (\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$

ce qui se traduit pas la définition : « Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire symétrique définie positive ».

Quelques espaces de Banach :

- Les espaces euclidiens \mathbb{R}^n et les espaces hermitiens \mathbb{C}^n munis de la norme :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i} \quad (1.2)$$

où \bar{x}_i désigne le conjugué de x_i .

- L'espace des fonctions (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}) continues et bornées sur un espace topologique X , muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} (|f(x)|)$. En particulier, l'espace des fonctions continues sur un espace X compact, comme un intervalle réel $[a, b]$.
- Pour tout réel $p \geq 1$, l'espace L^p des classes de fonctions mesurables, dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , sur un espace mesuré X .

Quelques espaces de Hilbert :

- Certains espaces de Sobolev (voir plus loin) sont des espaces de Hilbert (ceux qui nous intéresserons en général, ça tombe bien).
- L'espace euclidien \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel est hilbertien, ainsi que l'espace L^2 .

Théorème 1 — Théorème de complétion sur un espace de Banach. Soit E un espace vectoriel normé incomplet. Alors E est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel, et isométrique à un sous-espace vectoriel dense dans un espace de Banach \bar{E} .

Cet espace de Banach \bar{E} est unique à un isomorphisme isométrique près.

Ce théorème de complétion répond par l'affirmative à la question : si l'espace normé E n'est pas complet, existe-t-il un Banach minimal \bar{E} le contenant ?

Théorème 2 — Théorème de projection dans un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert H (il est alors lui-même un Hilbert). Alors :

- son orthogonal F^\perp , qui est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à chaque vecteur de F , est un sous-espace vectoriel fermé (donc un Hilbert) ;
- Tout $h \in H$ s'écrit de façon unique $h = h' + h''$ où h' est le projeté orthogonal de h sur F , et h'' le projeté orthogonal de h sur F^\perp .

Les points importants de ce théorème de projection sont que cette décomposition est unique, et que l'on a $H = F \oplus F^\perp$ (on parle parfois de « somme hilbertienne »).

1.2 Tribu, mesure, espaces mesurable et mesuré

En complément à l'aspect métrique (Fréchet 1906), nous allons maintenant aborder l'aspect mesure.

Définition 1 — Tribu. Une tribu \mathcal{A} sur un ensemble X est un ensemble non vide de parties de X , stable par passage au complémentaire et par union dénombrable (donc aussi par intersection dénombrable), i.e. :

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$
2. $\forall A \in \mathcal{A}, {}^c A \in \mathcal{A}$, où ${}^c A$ désigne le complémentaire de A dans X . (donc $X \in \mathcal{A}$)
3. si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

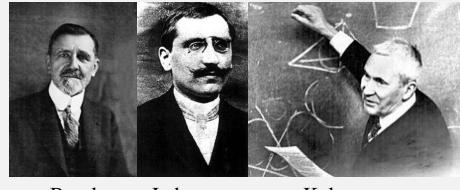
Définition 2 — Espace mesurable. Le couple (X, \mathcal{A}) est appelé espace mesurable ou espace probabilisable en fonction du contexte. Sur les espaces mesurables on définit des mesures (voir ci-après) ; sur les espaces probabilisables, on appelle ces mesures des probabilités.

Histoire

La théorie de la mesure s'occupe de regarder un peu plus en détail ce qui se passe à l'intérieur des espaces dits mesurés (définis plus bas) : il s'agit de mesurer les différentes parties existant dans un tel espace, parties en lien avec la topologie, ce qui reboucle le sujet...

Lorsque l'on évoque le concept de mesure, on en arrive assez rapidement à se demander : Est-ce que l'on peut tout mesurer ? Est-ce que l'on doit tout mesurer ? Qu'est-ce qui est négligeable ?

En 1894, Émile Borel énonce la première définition d'ensemble négligeable. En 1897, il définit les ensembles mesurables. En 1901, Henri-Léon Lebesgue introduit la notion de mesure. La théorie se développe jusque dans les années 1950. Andréï Kolmogorov proposera une axiomatisation du calcul des probabilités basée notamment sur l'intégrale définie à partir d'une mesure.



Borel Lebesgue Kolmogorov

Les parties de X qui appartiennent à la tribu \mathcal{A} sont appelées ensembles mesurables. Dans un contexte probabiliste, on les appelle événements (il suffit que $\mu(X) = 1$ pour que μ soit une probabilité).

Une mesure μ sur un ensemble X est une fonction qui associe à chaque élément d'une tribu d'un ensemble X un scalaire positif (une longueur, un volume, une probabilité...).

Définition 3 — Mesure. Soit (X, \mathcal{A}) , un espace mesurable. Une application μ définie sur \mathcal{A} , à valeurs dans $[0, +\infty]$ est appelée mesure lorsque les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1. L'ensemble vide a une mesure nulle : $\mu(\emptyset) = 0$
2. L'application μ est σ -additive : si E_1, E_2, \dots est une famille dénombrable de parties de X appartenant à \mathcal{A} et si ces parties sont deux à deux disjointes, alors la mesure $\mu(E)$ de leur réunion E est égale à la somme des mesures des parties :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).1 \quad (1.3)$$

On appelle espace mesuré un triplet (X, \mathcal{A}, μ) , où X est un ensemble, \mathcal{A} une tribu sur X et μ une mesure sur \mathcal{A} .

Soient (X, T) et (Y, U) deux espaces mesurables. On appelle rectangle mesurable du produit $\Omega = X \times Y$, toute partie de Ω de la forme $A \times B$ où A et B sont des éléments resp de T et U -mesurables.

On appelle produit tensoriel des deux tribus T et U , la tribu engendrée par l'ensemble des rectangles mesurables. Cette tribu est notée $T \otimes U$, et est la plus petite tribu de Ω qui contient toutes les parties de la forme $A \times B$, $A \in T$, $B \in U$.

Le produit des espaces mesurables est $(X \times Y, T \otimes U)$ et est un espace mesurable :

$$\int f d(\mu \otimes \nu) = \int \int f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) \quad (1.4)$$

1.3 Tribu borélienne, mesures de Dirac et Lebesgue

Définition 4 — Tribu borélienne. On appelle tribu borélienne sur un espace topologique donné la tribu engendrée par les ensembles ouverts. Dans le cas simple et fondamental de l'espace usuel à n dimensions, la tribu borélienne de \mathbb{R}^n est engendrée par une famille dénombrable de parties,

les pavés dont les sommets sont à coordonnées rationnelles.

On aura besoin de ces notions (dont la tribu borélienne) pour l'intégrale de Lebesgue et par extension toute la théorie de l'intégration qui est à la base de l'analyse numérique (et oui, formulation faible, quand tu nous tiens) ainsi notamment que pour le théorème de représentation de Riesz fondamental en éléments finis.

La mesure de Dirac ou masse de Dirac est une mesure supportée par un singleton et de masse totale 1.

Définition 5 — Mesure de Dirac. Pour un espace mesurable (X, \mathcal{A}) et un point a de X , on appelle mesure de Dirac au point a la mesure notée δ_a sur (X, \mathcal{A}) telle que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad (\delta_a(A) = 1 \text{ si } a \in A \text{ et } \delta_a(A) = 0 \text{ si } a \notin A). \quad (1.5)$$

Le support de δ_a est réduit au singleton $\{a\}$.

Les masses de Dirac sont très importantes, notamment dans la pratique car elles permettent par exemple de construire des mesures par approximations successives.

Définition 6 — Mesure complète. Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, on dit que μ est une mesure complète lorsque tout ensemble négligeable pour μ appartient à la tribu \mathcal{A} , i.e. :

$$\forall M, N \in \mathcal{P}(X), (N \subset M, M \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(M) = 0) \Rightarrow N \in \mathcal{A}. \quad (1.6)$$

La mesure de Lebesgue a permis de bâtir une théorie de l'intégration palliant les insuffisances de l'intégrale de Riemann (il suffit de vouloir intégrer $0 + 1_{\mathbb{Q}}$ sur $[0, 1]$ avec Riemann pour être dans l'impasse). Nous détaillerons cela un peu plus au chapitre sur les espaces de Lebesgue.

Parmi les définitions de cette mesure, nous présentons la plus intuitive, celle qui consiste à généraliser la notion de volume en gardant les mesures sur les pavés de \mathbb{R}^n .

Définition 7 — Mesure de Lebesgue. Il existe une plus petite mesure définie sur une tribu de parties de \mathbb{R}^n qui soit complète et coïncide sur les pavés avec leur volume (i.e. avec le produit des longueurs de leurs côtés).

Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue (notée λ_n) et sa tribu de définition la tribu de Lebesgue (notée \mathcal{L}_n et que nous ne définissons pas ici, et dont les éléments sont dits Lebesgue-mesurables).

Cette restriction aux boréliens de la mesure de Lebesgue est parfois dénommée mesure de Borel-Lebesgue.

Si pour la mesure de Lebesgue λ sur \mathbb{R} , la notion de « presque partout » correspond bien à l'intuition, ce n'est pas vrai en général. Par exemple, pour $\mu = \delta_a$ sur la tribu de l'ensemble des parties de X , une propriété est vraie μ -pp simplement si elle est vérifiée en a .

Si la mesure μ est nulle, toute propriété est vérifiée pp (ainsi que sa négation).

1.4 Propriétés de la mesure de Lebesgue

On appelle mesure de Lebesgue sur un espace euclidien E la mesure image de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n par n'importe quelle isométrie de \mathbb{R}^n dans E .

Soit A une partie Lebesgue-mesurable d'un espace euclidien E . On appelle mesure de Lebesgue sur A la restriction à A de la mesure de Lebesgue de E .

La mesure de Lebesgue est invariante sous toutes les isométries. Elle est en particulier invariante sous les translations : c'est une mesure de Haar du groupe topologique \mathbb{R}^n .

Définition 8 — Mesure régulière. Une mesure (positive) μ définie sur une tribu contenant la tribu borélienne d'un espace topologique X est dite régulière lorsque elle est à la fois intérieurement régulière et extérieurement régulière :

1. $\forall A \subset X$ de la tribu, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \text{ compact contenu dans } A\}$;
2. $\forall A \subset X$ de la tribu, $\mu(A) = \inf\{\mu(O) \mid O \text{ ouvert contenant } A\}$.

La mesure de Lebesgue est finie sur tout compact, chaque compact, qui est borné, pouvant être enfermé dans un cube.

Elle est par voie de conséquence régulière, \mathbb{R}^n étant métrisable, localement compact et séparable.

- \mathbb{R}^n est métrisable : un espace topologique est un espace métrisable lorsqu'il est homéomorphe à un espace métrique (un homéomorphisme est une application bijective continue entre deux espaces topologiques dont la réciproque est continue) ;
- \mathbb{R}^n est localement compact : un espace localement compact est un espace séparé qui, sans être nécessairement compact lui-même, admet des voisinages compacts pour tous ses points (De plus, on a la propriété : Tout espace localement compact est régulier) ;
- \mathbb{R}^n est séparable : un espace séparable est un espace topologique contenant un sous-ensemble fini ou dénombrable et dense, i.e. contenant un ensemble fini ou dénombrable de points dont l'adhérence est égale à l'espace topologique tout entier.

Théorème 3 Dans \mathbb{R}^n , les compacts sont les ensembles fermés bornés.

Histoire

En complément à la première note historique de ce chapitre, nous vous proposons une illustration très concrète de l'application de la topologie, que vous avez très certainement rencontrée : la carte du métro.



La représentation schématique généralement utilisée pour représenter un réseau de métro a été mise au point, la première fois, en 1931 par Henry Beck, alors dessinateur industriel de 29 ans et engagé comme intérimaire par la société du métro londonien. Facile à comprendre et à utiliser, esthétique... il est pourtant faux à tous les égards sauf deux.

Il n'est pas à l'échelle, donc toutes les distances sont fausses ; les lignes droites reliant les stations ne traduisent absolument pas le cheminement réel du métro sous les rues ; les orientations sont fausses (une ligne verticale ne signifie pas que le trajet s'effectue selon l'axe nord-sud).

Le premier aspect exact est que si une station de métro est représentée au nord de la Tamise, alors il en est de même pour la station réelle. Le second aspect exact est la description du réseau : l'ordre des stations sur chaque ligne et les interconnexions entre les lignes sont fidèles à la réalité. C'est d'ailleurs ce second aspect qui est finalement le seul dont les voyageurs ont effectivement besoin.

Notons enfin que cette illustration permet de comprendre aisément comment la notion de distance peut être appréhendée en topologie.

1.5 Petit exemple amusant d'injection dans un Hilbert

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur \mathbb{R} et V inclus dans H avec injection continue et V dense dans H . Comme V est inclus dans H , l'injection est tout bêtement $i: x \mapsto x$.

Dans ces conditions, H est un espace de Hilbert avec un produit scalaire $(\cdot | \cdot)_H$, et V muni du produit scalaire induit est un sous-espace dense, donc ne peut pas être un espace de Hilbert par restriction du produit scalaire $(\cdot | \cdot)_H$. La structure hilbertienne de V est définie par un produit scalaire $(\cdot | \cdot)_V$ propre à V .

Il y a donc deux topologies sur V : la topologie hilbertienne propre à V et la topologie héritée de la structure hilbertienne de H . La continuité de l'injection i impose donc une condition sur

ces topologies : la topologie hilbertienne de V est plus fine que la trace sur V de la topologie hilbertienne de H .

... et maintenant que le terme « injection » a été prononcé, il est temps de passer au chapitre suivant...

Chapitre 2

Applications et morphismes

Résumé — Au chapitre précédent, des espaces ont été définis, mais on ne s'est pas intéressé beaucoup aux relations entre eux ou au sein d'eux.

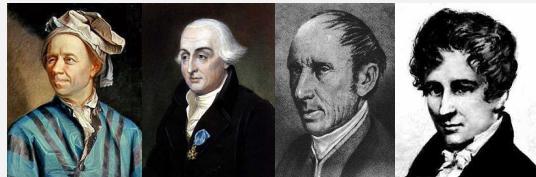
Des distances, normes... ont été introduites, sans utiliser plus que ça le vocable de fonction. Le terme d' injection a été prononcé à la fin du chapitre précédent comme fil conducteur pour introduire celui-ci...

Dans ce chapitre, nous ne présenterons pour le coup que des choses extrêmement « rudimentaires » et toutes vues en taupe ou avant. Il s'agit uniquement d'un aide-mémoire.

Histoire

L'univers mathématiques du début du XVIII^e siècle est dominé par Leonhard Euler et par ses apports tant sur les fonctions que sur la théorie des nombres, tandis que Joseph-Louis Lagrange éclairera la seconde moitié de ce siècle.

Euler a introduit et popularisé plusieurs conventions de notation par le biais de ses nombreux ouvrages largement diffusés. Plus particulièrement, il a introduit la notion de fonction (dans *L'Introductio in analysin infinitorum*, premier traité dans lequel le concept de fonction est à la base de la construction mathématique, et dont les premiers chapitres lui sont consacrés) et a été le premier à écrire $f(x)$ pour désigner la fonction f appliquée à l'argument x , en 1734 (bien que le terme de « fonction » apparaisse pour la première fois dans un manuscrit d'août 1673 de Leibniz, resté inédit, et intitulé *la Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions*). Il a également introduit la notation moderne des fonctions trigonométriques, la lettre e pour la base du logarithme naturel (également connue sous le nom de nombre d'Euler) en 1727, la lettre grecque Σ pour désigner une somme en 1755 et la lettre i pour représenter l'unité imaginaire, en 1777. L'utilisation de la lettre grecque π pour désigner le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre a également été popularisée par Euler, mais celui-ci n'est pas à l'origine de la notation.



Euler Lagrange Cauchy Abel

Les différentes techniques mises au point (par exemple pour la résolution des ED, le développement en séries entières ou asymptotiques, applications aux réels négatifs, aux complexes...) conduisent à s'intéresser à la « fonction » en tant que sujet d'étude.

À la fin du XVIII^e, les mathématiciens croient encore, pour peu de temps, que la somme infinie de fonctions continues est continue, et (pour plus longtemps) que toute fonction continue admet une dérivée... (sur ces notions, voir chapitre suivant).

C'est Cauchy qui met un peu d'ordre dans tout cela en montrant que la somme d'une série numérique n'est commutativement convergente que si la série est absolument convergente. Mais Cauchy, qui pourtant n'est qu'à un doigt de la notion de convergence uniforme, énonce un faux théorème de continuité d'une série de fonctions continues qu'Abel contredit par un contre-exemple du 16 janvier 1826.

2.1 Fonction, application, injection, surjection, bijection

Si ça c'est pas du rappel de base, je ne m'y connais pas...

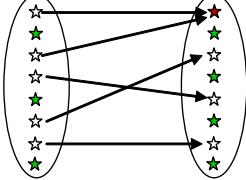
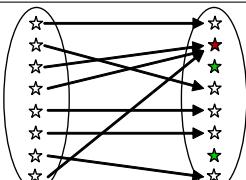
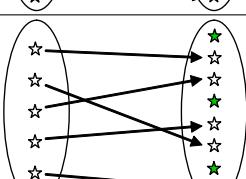
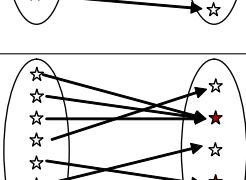
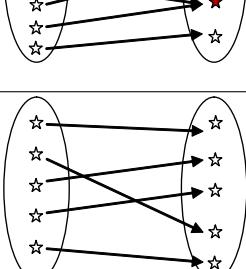
Fonction	Un « truc » qui met en relation certains éléments de E avec certains élément de F .	
Application	Fonction définie partout : <i>(plus d'étoile verte dans E)</i> Une fonction f est une application si son ensemble de départ est égal à son ensemble de définition.	
Injection	Application telle que tout élément de F a au plus 1 antécédent. F a au moins autant d'éléments que E . <i>(plus d'étoile verte dans E et plus d'étoile rouge dans F)</i> Soit $\forall x, y \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, ou $\forall x, y \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$	
Surjection	Application telle que tout élément de F a au moins 1 antécédent. F a au plus autant d'éléments que E . <i>(plus d'étoile verte dans E et plus d'étoile verte dans F)</i> Soit $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$, ou f est surjective si son ensemble image est égal à son ensemble d'arrivée.	
Bijection	C'est une injection ET une surjection : chaque élément de l'ensemble de départ correspond à un seul élément de l'ensemble d'arrivée et vice-versa.	

TABLE 2.1 – \star = élément n'ayant pas de relation ; \circledast = élément ayant 1 relation ; \star = élément ayant plus d'une relation.

Une étoile rouge dans E n'a pas de sens, cela voudrait dire qu'un élément de E peut avoir plusieurs valeurs différentes par la relation considérée...

En fait, on sait donner un sens à cela. C'est ce que l'on appelle une fonction multivaluée ou fonction multiforme ou fonction multivoque ou multifonction. L'exemple le plus simple d'un fonction multiforme est la fonction réciproque d'une application non injective (penser simplement aux fonctions circulaires).

On trouve les fonctions multiformes en analyse complexe : lorsque l'on veut utiliser le théorème des résidus pour calculer une intégrale réelle, on peut être amené à considérer des restrictions (déterminations) qui font de ces fonctions multiformes des fonctions (univoques), par exemple en utilisant la théorie des revêtements qui considère des fonctions sur des surfaces de Riemann.

En restreignant une fonction à son domaine de définition, on en fait une application. En la restreignant en plus à son ensemble d'arrivée on en fait une surjection (une surjection, c'est un « truc » défini partout sur E et F).

Quand on a une surjection, on est sûr que tout élément de l'ensemble de départ à une image, et que tout élément de l'ensemble d'arrivée a un antécédent (au moins un même).

Dans la pratique, on ne fait pas de distinction formelle entre fonction et application...

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction, pas une application, car la racine carrée n'est pas définie sur \mathbb{R} mais sur \mathbb{R}_+ . $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est une application ! Mais pourquoi s'intéresserait-on à f là où elle n'est pas définie... De plus, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ est une surjection par définition (puisque l'on considère f de son ensemble de définition jusqu'à son ensemble image). C'est évidemment une bijection (il ne reste que l'injectivité à prouver...).

Définition 9 — Support. On appelle support d'une fonction f l'adhérence (ou la fermeture, i.e. le plus petit fermé) du lieu où la fonction n'est pas nulle :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}} \quad (2.1)$$

2.2 Morphismes

Cette section est extraite du cours sur les structures algébriques. Nous l'avons toutefois sérieusement amputée pour coller à l'objectif de ce document.

2.2.1 Présentation

Histoire

Mort au cours d'un duel à l'âge de vingt ans (ce qui en fait un héros romantique), il laisse un manuscrit élaboré trois ans plus tôt, dans lequel il établit qu'une équation algébrique est résoluble par radicaux si et seulement si le groupe de permutation de ses racines a une certaine structure, qu'Emil Artin appellera justement résoluble.

Son Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, publié par Joseph Liouville quatorze ans après sa mort, a été considéré par ses successeurs, en particulier Sophus Lie, comme le déclencheur du point de vue structural et méthodologique des mathématiques modernes.

Toutefois, pour être tout à fait exact, Lagrange, reprenant une idée de d'Alembert en vue de prouver qu'un polynôme de degré n possède n racines (i.e. que \mathbb{C} est algébriquement clos), utilise des résultats sur les fonctions semblables des racines, i.e. des fonctions rationnelles des racines qui restent invariantes par les mêmes permutations. Ce résultat, qu'il a établi dans son fameux mémoire de 1771 *Réflexions sur la résolution algébrique*, inspirera Abel et Galois et peut être considéré comme le tout premier de la théorie des groupes.



Galois

Soient deux ensembles G et G' munis d'un même type de structure (topologique, groupe, anneau, espace vectoriel, algèbre...). Un morphisme (ou homomorphisme) de $G \rightarrow G'$ est une application f qui respecte cette structure.

Pour ce faire, cette application doit vérifier certaines conditions, notamment une certaine « linéarité » vis-à-vis des lois des G et G' (on pourrait également remplacer le terme linéarité par « capacité à faire sortir de la fonction »).

Un morphisme entre deux espaces topologiques est tout simplement une application continue (voir chapitre suivant sur la continuité). C'est d'ailleurs ce dernier terme qui est utilisé en topologie, pas celui de morphisme (mais cela revient bien au même).

Un morphisme de groupe entre $(G, *)$ et (G', \star) satisfait à l'égalité suivante qui est bien une « condition de linéarité par rapport à la loi » : $\forall (x, y) \in G, f(x * y) = f(x) \star f(y)$. En particulier, si e et e' sont les éléments neutres de G et G' , alors : $f(e) = e'$. Une autre conséquence directe est que : $\forall x \in G, f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.

2.2.2 Cas des espaces vectoriels : application et forme linéaires

Définition 10 — Morphisme d'ev. Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} . Un morphisme d'ev f entre E et F est une application qui respecte la condition de

linéarité par rapport aux lois $+$ (en fait qui est un morphisme de groupe entre les groupes $(E, +)$ et $(F, +)$) et qui conserve la « linéarité par rapport à la multiplication par un scalaire » :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) & \text{condition d'additivité} \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) & \text{condition d'homogénéité} \end{cases} \quad (2.2)$$

Ceci est équivalent à la condition suivante (on parle de « préservation des combinaisons linéaires ») :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) \quad (2.3)$$

et on utilise plutôt le terme d'application linéaire ou d'opérateur linéaire ou encore de transformation linéaire.

Dans le cas où $F = \mathbb{K}$, on ne parle pas d'application linéaire mais de forme linéaire. Une forme linéaire est donc une application linéaire définie sur E et à valeurs dans \mathbb{K} (supposé commutatif). En d'autres termes, on parle de forme au lieu d'application, mais c'est la même chose !

Si φ et ψ sont des formes linéaires et a et b des éléments de \mathbb{K} :

$$\forall x \in E, \quad (a\varphi + b\psi)(x) = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x) \quad (2.4)$$

L'application constante de valeur $0_{\mathbb{K}}$ s'appelle la « forme linéaire nulle ».

2.2.3 Endo, iso, auto -morphismes

Un endomorphisme est un morphisme d'une structure dans elle-même.

Un isomorphisme est un morphisme f entre deux ensembles munis de la même espèce de structure, tel qu'il existe un morphisme f' dans le sens inverse, tels que $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont les identités des structures. Un isomorphisme est un morphisme bijectif.

Deux ensembles munis du même type de structure algébrique sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme entre les deux ensembles.

L'isomorphie présente un intérêt majeur, car elle permet de transposer des résultats et propriétés démontrés sur l'un des deux ensembles à l'autre.

Un automorphisme est un isomorphisme d'une structure dans elle-même, i.e. à la fois un isomorphisme et un endomorphisme. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

L'identité d'un ensemble est toujours un automorphisme, quelle que soit la structure considérée.

On note :

- $L_K(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F ;
- $\text{Isom}_K(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F ;
- $L_K(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E ;
- $GL_K(E)$ le « groupe linéaire », i.e. le groupe des automorphismes de E .

2.2.4 Espace dual d'un espace vectoriel

Définition 11 — Espace dual. On appelle espace dual d'un espace vectoriel E l'ensemble des formes linéaires sur E . Il est lui-même un \mathbb{K} -espace vectoriel, et on le note E^* ou $\text{hom}(E, \mathbb{K})$.

La structure d'un espace et celle de son dual sont très liées. Nous allons détailler quelques points en nous restreignant aux cas qui nous intéressent (cas réel, dimension finie).

Si l'on dispose, sur l'espace vectoriel considéré E , d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (voir chapitre sur les espaces), alors il existe un moyen « naturel » de plonger E dans E^* , i.e. d'associer à chaque élément de E un élément du dual, et ce de manière à former un isomorphisme entre E et un sous-espace de E^* : à chaque élément $x \in E$ on associe la forme linéaire $\varphi_x : E \rightarrow K$; $y \mapsto \langle x, y \rangle$.

Alors l'application $f : E \rightarrow E^*; x \mapsto \varphi_x$ est une application linéaire injective, donc l'espace E est isomorphe au sous-espace $f(E)$ de E^* .

Si l'espace E est de dimension finie n , alors l'espace dual E^* est isomorphe à E et est donc lui aussi de dimension n . On a alors le théorème de la base duale (que je ne présente pas, car je n'ai pas parlé de base... mais peut-être pourrons-nous nous passer de ces rappels dans ce document).

Pour $x \in E$, on note $\langle \varphi, x \rangle$ pour $\varphi(x)$. Cette notation est appelée crochet de dualité.

Définition 12 — Dual topologique. Soit E un espace vectoriel topologique sur le corps \mathbb{K} . Le dual topologique E' de E est le sous-espace vectoriel de E^* (le dual algébrique de E) formé des formes linéaires continues.

Si l'espace est de dimension finie, le dual topologique coïncide avec le dual algébrique, puisque dans ce cas toute forme linéaire est continue. Mais dans le cas général, l'inclusion du dual topologique dans le dual algébrique est stricte.

2.2.5 Noyau et image

Définition 13 — Noyau. Le noyau du morphisme f est l'ensemble des antécédents de l'élément neutre :

$$\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \quad (2.5)$$

et f est injectif si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Définition 14 — Image. L'image du morphisme f est l'image par f de E :

$$\text{im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E) \quad (2.6)$$

et f est surjectif si et seulement si son image est égale à F .

Dans le cas d'espaces vectoriels, l'ensemble $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et l'ensemble $\text{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Théorème 4 — Théorème du rang. Il est assez visible que (théorème de factorisation) f induit un isomorphisme de l'espace vectoriel quotient $E/\ker(f)$ sur l'image $\text{im}(f)$. Deux espaces isomorphes ayant même dimension, il s'en suit la relation, valable pour un espace E de dimension finie, appelée théorème du rang :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)) = \dim(E) \quad (2.7)$$

Le nombre $\dim(\text{im}(f))$ est aussi appelé rang de f et est noté $\text{rg}(f)$.

On a également :

- l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E ;
- l'image directe d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous-espace vectoriel de F .

2.3 Opérateur

Le terme « opérateur » a été utilisé au paragraphe précédent... regardons d'un peu plus près.

D'une manière générale, un opérateur est une application entre deux espaces vectoriels topologiques.

Un opérateur $O : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x_1, x_2) \in E, \quad O(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda O(x_1) + \mu O(x_2) \quad (2.8)$$

où \mathbb{K} est le corps des scalaires de E et F .

Lorsque $F = \mathbb{R}$, un opérateur est une fonctionnelle sur E .

Un opérateur est continu s'il est continu en tant qu'application (pour la définition de la continuité, voir chapitre suivant).

Un opérateur différentiel est un opérateur agissant sur des fonctions différentiables au sens des dérivés ordinaires ou partielles : voir définition au chapitre suivant.

On définit également les opérateurs différentiels elliptiques et hyperboliques. Mais pour cela, il faut introduire les notions de symbole et symbole principale d'un opérateur... et cela ne nous semble ni adapté à ce document, ni suffisamment « naturel » pour cet exposé. Nous nous contenterons de définir plus loin les notions d'EDP linéaires et homogènes du second-ordre dites elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

Chapitre 3

Continuité et dérivabilité

Résumé — Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux notions de continuité et de dérivabilité, les espaces nécessaires ayant été définis précédemment, ainsi que les notions d'application...

Dans la mesure où les problèmes que nous souhaitons aborder, i.e. ceux issus de la physique, sont généralement décrits par des ED ou des EDP, on comprend bien que la notion de dérivation est centrale.

Mais n'oublions pas que ces notions de continuité et de différentiabilité n'ont pas toujours été définies de manière précise au cours de l'histoire et ont donné lieu à de bien terribles affrontements entre nos glorieux anciens.

3.1 Continuité et classe C^0

Histoire

Dans le manuscrit de 1673 *la Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions*, Leibniz dit : « J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fit en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe ; comme sont abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente, sous-perpendiculaire... et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on ne peut figurer. » Finalement, au terme d'une correspondance nourrie entre Leibniz et Jean Bernoulli, celui-ci donne en 1718 la définition suivante : « On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et des constantes. ». Il propose la notation ϕx .

La continuité est en quelque sorte contenue, sous-jacente à ces définitions car les fonctions considérées sont « physiques » et ne présentent au plus qu'un nombre fini de discontinuités.

Dans son *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, Euler définit une fonction d'une quantité variable comme « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes ». Le mot « analytique » n'est pas davantage précisé. En fait, pour Euler, une fonction est une combinaison quelconque d'opérations prises dans le stock des opérations et des modes de calcul connus de son temps, et applicables aux nombres : opérations classiques de l'algèbre, exponentielle, logarithme, passage d'un arc à ses lignes trigonométriques..., certaines de ces opérations pouvant être itérées un nombre illimité de fois...



Euler

Bolzano

Heine

Dans ce même ouvrage, Euler dit qu'une fonction est continue si elle est définie par une seule expression analytique (finie ou infinie) et mixte ou discontinue si elle possède plusieurs expressions analytiques suivant ses intervalles de définition. La définition actuelle est celle due à Bernard Bolzano dans sa théorie des fonctions en 1816 : « La fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour la valeur x si la différence $|f(x+w) - f(x)|$ peut-être rendue plus petite que toute valeur donnée. » Il existe une notion de continuité uniforme qui est plus forte que la simple continuité et fixée par Heinrich Eduard Heine en 1872.

La continuité est une propriété topologique (donc indépendante de la métrique).

Définition 15 — Continuité d'une fonction en un point (version topologique). Soit f une application d'un espace topologique E dans un espace topologique F . On dit que f est continue en un point a de E si, quelque soit le voisinage W de $f(a)$ dans F , il existe un voisinage V de a dans E tel que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) \in W \quad (3.1)$$

i.e. que l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a .

Cette définition est donnée pour la culture, car nous n'avons pas rappelé la notion de voisinage dans ce document. Cela n'a pas d'importance dans ce contexte puisque nous travaillerons sur des cas moins généraux.

Évidemment, une application de E dans F est continue si elle est continue en tout point de E .

Ramenons nous à des choses plus connues et plus en lien avec ce document. Dans le cas des espaces métriques, la continuité se définit comme suit.

Définition 16 — Continuité d'une fonction en un point (version métrique). Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \rightarrow E'$ et $a \in E$. On dit que l'application f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in E, \quad [d(x, a) < \eta \implies d'(f(x), f(a)) < \varepsilon] \quad (3.2)$$

Ainsi f est continue en a si et seulement si la limite de f en a existe (elle vaut alors nécessairement $f(a)$).

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.3)$$

Elle n'a pas de limite en $(0, 0)$.

En effet, $f(x, y)$ est continue partout sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Elle est continue sur l'axe des abscisses et des ordonnées où elle est $\equiv 0$. Elle est donc séparément continue à l'origine, et par suite dans tout le plan. Mais elle n'est pas continue par rapport à l'ensemble des variables à l'origine, car sur la droite $y = mx$, elle prend la valeur $m/(1+m^2)$ en dehors de l'origine ; or $\frac{m}{1+m^2} \neq 0$ dès que $m \neq 0$, et par conséquent elle ne tend pas vers 0 lorsque (x, y) tend vers l'origine.

Pour une fonction réelle, on peut définir une fonction continue comme une fonction dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon. Si l'on exclut certains fonctions très particulières (comme les fractales), alors l'idée générale de la continuité est bien traduite par cette phrase (la fonction ne présente pas de « saut »).

Définition 17 — Continuité d'une fonction réelle en un point. Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sera dite continue au point $a \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad [|x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon]. \quad (3.4)$$

La classe des fonctions continues est notée C^0 . Elle inclut par exemple les fonctions continues par morceaux ainsi que les constantes (dont la fonction nulle).

Attention à ne pas confondre la classe des fonctions continues C^0 avec C_0 l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent à l'infini (sous-espace de l'espace des fonctions continues).

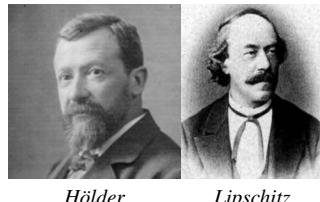
3.2 Continuité de Hölder et Lipschitz

Remarque : Dans le cas des espaces métriques, nous avons vu qu'il était possible de redéfinir la continuité à l'aide des ε , plutôt que par les voisinages.

Avec Hölder et Lipschitz, la notion de « continuité uniforme » nous est proposée. La distinction entre continuité et continuité uniforme est la même que celle entre la convergence simple et la convergence uniforme dans le cas des séries (pour le lecteur qui s'en souviendrait). En effet, cette continuité uniforme ne regarde pas comment (quel ε) la fonction est continue en chaque point, mais comment elle est continue dans sa globalité, i.e. lorsque ce fameux ε n'est plus lié à la position sur la courbe, mais est fixé pour la fonction entière.

La continuité höldérienne ou condition de Hölder est une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'une application définie entre deux espaces métriques soit continue.

La définition s'applique en particulier pour les fonctions d'une variable réelle.



Définition 18 — Fonction a -höldérienne. Si (E, d) et (F, d') sont deux espaces métriques, une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite a -höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)^a \quad (3.5)$$

La continuité höldérienne d'une fonction dépend donc d'un paramètre réel strictement positif $a \in]0, 1]$, et prend en compte toutes les variations de la valeur de la fonction sur son ensemble de définition. Si $0 < a \leq 1$ est fixé, l'ensemble des fonctions réelles a -höldériennes est un espace vectoriel, conventionnellement noté $\mathcal{C}^{0,a}(E, \mathbb{R})$.

Théorème 5 Toute application f qui est a -höldérienne est continue. Mieux, elle est uniformément continue, dans le sens suivant :

$$\text{Si } \varepsilon > 0, \text{ alors pour } \eta = (\varepsilon/C)^{1/a}, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad (3.6)$$

Le réel η dépend de ε mais est indépendant de la variable x parcourant l'espace de définition de l'application.

Définition 19 — Fonction lipschitzienne. Lorsque $a = 1$, l'application est dit lipschitzienne. Une application lipschitzienne est plus « régulière » qu'une fonction simplement continue.

Toute fonction lipschitzienne (en tant que fonction höldérienne) est uniformément continue. Toute fonction réelle lipschitzienne est (absolument continue donc à variation bornée donc) dérivable presque partout pour la mesure de Lebesgue et sa dérivée est essentiellement bornée.

3.3 Dérivée

Définition 20 — Dérivée d'une fonction. Soit f une application d'un ouvert Ω du corps des scalaires \mathbb{K} (resp. un intervalle de \mathbb{R}) dans un espace affine normé F (resp. \mathbb{R}), alors on peut donner un sens, pour $a \in \Omega$ à la quantité :

$$f'(a) = \lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0, a+h \in \Omega} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in F \quad (3.7)$$

que l'on appelle le vecteur dérivé ou simplement la dérivée de f en a .

Histoire

Au XVII^e siècle, la compréhension mais surtout la modélisation (i.e. la mise en équations) de phénomènes physiques et techniques conduit à la création au siècle suivant de l'analyse en tant que branche des mathématiques abordant les notions de dérivation, intégration et équations différentielles.

Les échanges, les conceptions et la compréhension des infinitésimaux ont animé le monde scientifique pendant bien longtemps, la discussion était tout autant philosophique que mathématique, ce qui est somme toute assez normal compte tenu du sujet... Les fondateurs incontestés de l'analyse sont Newton et Leibniz. La portée de ces travaux est considérable car ils vont permettre non seulement la compréhension des courbes (puis le calcul des aires), mais aussi celle du mouvement des corps. C'est véritablement une révolution où l'on passe d'une science de la statique à une science de la dynamique.



Newton Leibniz

Un débat houleux sur la paternité du calcul différentiel entre mathématiciens britanniques et allemands fit rage, mais Newton et Leibniz s'en tinrent à l'écart. Toutefois, cette polémique entre les deux camps ne sera pas sans effet. Celle-ci fera que les anglais resteront à l'écart du développement général des mathématiques au XVIII^e siècle, la tradition newtonienne dominante ayant abouti à une certaine stagnation scientifique. Au début du XIX^e siècle, avec la diffusion des notations symboliques leibniziennes du calcul infinitésimal, un petit groupe de mathématicien de Cambridge se mettront à réfléchir sur le rôle et l'importance de la symbolique.

L'opinion générale est aujourd'hui que Leibniz s'est presque certainement inspiré de certaines des idées de Newton (dont les travaux sont antérieurs, mais non publiés au moment où Leibniz publie), mais que sa contribution reste suffisamment importante pour que le mérite de l'invention du calcul différentiel soit accordé aux deux hommes.

L'approche de Newton est proche de la physique : il parle en termes de mouvement physique et ses notations ne sont employées que très rarement en dehors de la sphère des physiciens.

L'approche de Leibniz en revanche est plus géométrique et conduit à une présentation plus naturelle, encore utilisée aujourd'hui, et qui va rapidement être adoptée en Europe. C'est lui également qui introduit la notation dy/dx encore utilisée.



Archimète Oresme

Pourtant, si on regarde un peu plus dans l'Histoire, on peut dire que la méthode d'exhaustion, telle qu'elle a été développée et utilisée par Archimète (i.e. avec toute la rigueur nécessaire, en usant du procédé d'encadrement évitant le recourt aux ε) est réellement la première utilisation des infinitésimaux. Malgré, ou peut-être à cause de, la grande originalité de ses travaux, Archimète n'a été que peu suivi dans le monde grec et n'a pas eu de disciple direct.

Les savants arabes commenceront d'ailleurs dès le IX^e siècle à s'intéresser aux procédés infinitésimaux mis en œuvre par le génial Alexandrin.

Notons également que le plus grand progrès théorique réalisé au Moyen-Âge est l'étude quantitative de la variabilité par Nicole Oresme. Éveillé par la diffusion des méthodes infinitésimales des Anciens, et d'Archimète en particulier, nourri par les spéculations scolastiques sur l'infini, le goût des mathématiciens pour les considérations infinitésimales se développe peu à peu. Ils s'appliquent d'abord à imiter le modèle archimédien, puis s'émancipent et essaient de trouver des substituts pour la méthode d'exhaustion, jugée trop lourde.

En 1748, Euler définit les deux nouvelles opérations que sont la différentiation et l'intégration dans *Introductio in analysin infinitorum*, puis dans *Calculi differentialis* (1755) et *Institutiones calculi integralis* (1770) essaie de mettre au point les règles d'utilisation des infinitésimaux et développe des méthodes d'intégration et de résolution d'équations différentielles.

La dérivabilité est elle-aussi une notion topologique et non métrique (même si on sait l'écrire en termes métrique comme ci-dessus), elle ne dépend donc pas de la norme choisie (du moment que celle-ci est compatible avec la topologie choisie...).

3.4 Fonctions de classe C^k

Il est évident que si la dérivée (telle que définie au dessus) existe partout dans Ω , alors on peut à nouveau considérer sa dérivée... et ainsi de suite.

On définit donc les classes $C^1, C^2, \dots, C^k, \dots, C^\infty$ de fonctions 1 fois, 2 fois, ..., k fois continûment dérivables ou même indéfiniment dérivables.

Pour $k = 0$, on retombe sur la définition de l'ensemble des fonctions continues.

Pour être très clair, une fonction est de classe C^k signifie que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω .

Toutes les fonctions polynomiales sont C^∞ , car à partir d'un certain rang leur dérivée est identiquement nulle.

3.5 Dérivées partielles

Nous allons maintenant étendre la dérivation au cas où une fonction dépend de plusieurs variables. Évidemment, il faudra que dans le cas où la fonction ne dépend que d'une seule variable, les deux notions coïncident.

La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est la dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes.

La dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable x est notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$ ou encore f'_x .

De la même manière, on peut noter des dérivés secondes,... k -èmes par rapport à différentes variables. Par exemple : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'_{xx} = \partial_{xx} f = \partial_x^2 f$, mais également $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f'_{yx} = \partial_{yx} f$, ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f'_{xy} = \partial_{xy} f$, mais également $\frac{\partial^{i+j+k} f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = f'_{kz jy ix} = \partial_{kz jy ix} f$.

Définition 21 — Dérivée partielle d'ordre 1 en un point. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction de n variables :

$$f: \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \quad (3.8)$$

On définit la dérivée partielle d'ordre 1 de f au point $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ par rapport à la i -ème variable x_i par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \quad (3.9)$$

Attention : Même si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})$ existent en un point \mathbf{a} , la fonction peut ne pas être continue en ce point. Si l'on considère à nouveau la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.10)$$

on voit qu'elle vérifie $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ mais elle n'a pas de limite en $(0, 0)$ comme nous l'avons vu avant.

Si toutes les dérivées partielles (d'ordre 1) existent et sont continues dans un voisinage de \mathbf{a} , alors f est différentiable dans ce voisinage et la différentielle est continue. Dans ce cas, on dit que f est une fonction de classe C^1 sur ce voisinage de \mathbf{a} .

Si toutes les dérivées partielles secondes de f existent et sont continues sur l'ouvert Ω , on dit que f est une fonction de classe $C^2(\Omega)$. L'ordre de dérivation peut alors être changé sans que cela modifie le résultat. C'est le théorème de Schwarz.

Théorème 6 — Théorème de Schwarz. Si $f \in C^2(\Omega)$, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (3.11)$$

Définition 22 — Différentielle totale. On appelle différentielle totale de f l'expression :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (3.12)$$

3.6 Retour sur les classes C^k pour une fonction de plusieurs variables

Ce paragraphe met l'accent sur le cas multi-dimensionnel des classes C^k (ce qui est le cas avant, mais peut-être moins visiblement). Nous en profitons également pour introduire des notations et notions dont nous nous servirons plus loin.

Définition 23 — Fonctions k fois différentiables. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , on définit l'ensemble des fonctions k fois différentiables dans Ω , à valeurs dans \mathbb{R} dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω par :

$$C^k(\Omega) = \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}, k \geq 1 \quad (3.13)$$

Définition 24 — Multi-indice. On appelle multi-indice α un n -uplet d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$. Sa longueur est $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, et on note ∂^α la quantité (l'opération)

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \quad (3.14)$$

$C^k(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall \alpha, |\alpha| \leq k, x \mapsto \partial^\alpha f(x)$ existe et appartient à $C^0(\Omega)$.

Pour f et g dans $C^k(\Omega)$, on définit :

$$d(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\sum_{|\alpha| \leq k_i} \sup | \partial^\alpha f(x) - g(x) |}{1 + \sum_{|\alpha| \leq k_i} \sup | \partial^\alpha f(x) - g(x) |} \quad (3.15)$$

qui est une distance sur $C^k(\Omega)$ qui en fait un espace complet. L'espace $C^\infty(\Omega)$ peut se définir par :

$$C^\infty(\Omega) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega) \quad (3.16)$$

qui est également complet pour la même distance.

On définit également $C_b^k(\Omega)$ comme le sous-espace vectoriel des éléments de $C^k(\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées sur Ω .

On définit alors :

$$\|f\|_{C_b^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} | \partial^\alpha f(x) | \quad (3.17)$$

qui est une norme sur $C_b^k(\Omega)$ et en fait un espace de Banach (i.e. normé complet pour cette norme).

On définit, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $C_c^k(\Omega)$ par : $f \in C_c^k(\Omega)$ si $f \in C^k(\Omega)$ et si f est de support compact inclus dans Ω .

Pour tout ouvert Ω de R^n , et pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

- $C_c^k(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$
- $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$

3.7 Nabla et comparases

3.7.1 Champs de vecteurs et de scalaires

Définition 25 — Champ de vecteurs. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et Ω un ouvert de E . Un champ de vecteurs sur Ω est une application F de Ω dans E , définie par ses n fonctions composantes :

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

C'est donc une fonction qui à un vecteur fait correspondre un vecteur.

Définition 26 — Champ de scalaires. Un champ de scalaires sur Ω est une application f de Ω dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , i.e. une fonction qui à un vecteur fait correspondre un scalaire.

La dérivée d'un champ scalaire est un champ vectoriel appelé gradient (voir plus bas).

Nabla, noté ∇ , est un pseudo-vecteur servant à noter un opérateur différentiel :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\text{cartésiennes}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\text{polaires}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{\text{sphériques}} \quad (3.19)$$

3.7.2 Gradient, divergence, rotationnel, Laplacien et D'Alembertien

Les quantités présentées ci-après apparaîtront constamment dans les problèmes physiques.

Soient \mathbf{A} un champ de vecteur et f un champ scalaire, on définit :

- Le gradient :

$$\mathbf{grad} f \equiv \nabla f \quad (3.20)$$

- La divergence :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3.21)$$

- Le rotationnel :

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (3.22)$$

- Le Laplacien (scalaire et vectoriel) :

$$\Delta f = \nabla^2 f \quad (3.23)$$

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.24)$$

- Le D'alembertien : il s'agit plus d'une « contraction d'écriture ». En coordonnées cartésiennes, \square s'écrit :

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (3.25)$$

où c est la vitesse de la propagation considérée (ou la vitesse de la lumière).

En coordonnées cartésiennes, il vient explicitement :

- gradient : $\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
- divergence : $\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- rotationnel : $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$
- Laplacien scalaire : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- Laplacien vectoriel : $\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$

De plus :

$$\text{div} \mathbf{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f \quad (3.26)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{grad} f = \nabla \wedge (\nabla f) = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

$$\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{A} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (3.29)$$

$$\Delta f g = f \Delta g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + g \Delta f \quad (3.30)$$

3.7.3 Normale et dérivée normale

Définition 27 — Normale. On appelle normale au domaine Ω un champ de vecteurs $n(x)$ défini sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω et tel qu'en tout point $x \in \Gamma$ où le bord est régulier, $n(x)$ soit orthogonal au bord et de norme 1.

On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.

Définition 28 — Dérivée normale. On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur Γ , la fonction définie sur les points réguliers de Γ par :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u(x) \cdot n(x) \quad (3.31)$$

Il s'agit d'un produit scalaire car ∇u est un vecteur, tout comme $n(x)$.

3.7.4 Potentiel d'un champ vectoriel

Le potentiel d'un champ vectoriel est une fonction scalaire ou vectorielle qui, sous certaines conditions relatives au domaine de définition et à la régularité, permet des représentations alternatives de champs aux propriétés particulières. Ainsi :

- Un champ vectoriel irrotationnel (de rotationnel nul) peut être identifié au gradient d'un potentiel scalaire.

- Un champ vectoriel solénoïdal (de divergence nulle) peut être identifié au rotationnel d'un potentiel vecteur.

Dans les deux cas, on dit que le champ d'origine dérive d'un potentiel (allusion entre une fonction et sa primitive).

Ces potentiels permettent non seulement d'appréhender certains champs vectoriels sous un angle complémentaire (pour un traitement parfois plus aisé), mais ils légitiment des abstractions essentielles comme, par exemple en physique, l'énergie potentielle associée à un champ de forces conservatives.

Un champ de vecteurs \mathbf{A} continu et irrotationnel dérive d'un potentiel scalaire U :

$$\mathbf{A} = -\mathbf{grad} U \quad (3.32)$$

Le même résultat se vérifie dans l'espace entier à condition que, vers l'infini, le champ décroisse « assez » rapidement.

Le potentiel scalaire n'est pas unique, il est défini à une constante près.

Un champ de vecteurs \mathbf{A} régulier et de divergence nulle dérive d'un potentiel vectoriel \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = -\mathbf{rot} \mathbf{B} \quad (3.33)$$

Le même résultat se vérifie dans l'espace entier à condition que, vers l'infini, le champ décroisse « assez » rapidement.

Le potentiel vecteur n'est pas unique, il est défini à un « gradient » près (i.e. $\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \mathbf{grad} f$ convient également).

3.7.5 Signification « physique »

Un champ de scalaires, c'est un « truc », une application, qui à un vecteur associe un scalaire. Typiquement, on peut penser à la température. Une application $T(x, y, z)$ qui à chaque point de l'espace de coordonnées (x, y, z) associe sa température T est un champ de scalaire.

Un champ de vecteurs, c'est un « truc », une application, qui à un vecteur associe un autre vecteur. Typiquement, on peut penser à la vitesse. Une application $\mathbf{V}(x, y, z)$ qui à chaque point de l'espace de coordonnées (x, y, z) associe son vecteur vitesse \mathbf{V} est un champ de vecteurs.

Si f est une fonction de classe C^1 , alors le gradient de f au point \mathbf{a} , quand il est non nul, s'interprète comme la direction selon laquelle f varie le plus vite, i.e. la ligne de plus grande pente.

La divergence d'un champ de vecteurs mesure comment son courant déforme un volume (on devrait dire comment son flot déforme une forme volume au sens de la géométrie différentielle). L'idée est un peu la suivante : imaginons un écoulement de fluide et intéressons-nous au courant en fonction de la profondeur. Lorsque l'on est un peu en dessous de la surface et loin du sol, on peut imaginer que le courant est à peu près constant, donc une section (ou un volume) de fluide perpendiculaire à l'écoulement se retrouve, un instant plus tard, un peu plus loin, mais toujours perpendiculaire au sol, i.e. la section n'a pas varié. Si l'on est proche du fond, on peut penser que le courant est plus faible très près du sol, par exemple à cause du frottement. Si l'on considère à nouveau une section de fluide perpendiculaire au sol, alors un instant plus tard, elle n'est plus perpendiculaire au sol : près du sol, les particules ont effectué un petit déplacement, celles plus éloignées ont beaucoup plus avancé. La section n'a ni la même forme, ni la même longueur qu'à l'instant précédent. La divergence mesure justement ce type d'écart. D'une manière plus générale, la divergence traduit la conservation (si elle est nulle) ou non d'une grandeur physique en un point : cela mesure donc, en chaque point si une grandeur (par exemple le volume comme avant) est conservative ou non.

Le rotationnel exprime la tendance qu'ont les lignes de champ d'un champ vectoriel à tourner autour d'un point : sa circulation locale sur un petit lacet entourant ce point est non nulle quand son rotationnel ne l'est pas (nous n'avons pas défini la notion de lacet, nous compterons sur l'imagination du lecteur). On rappelle que les lignes de champ sont les lignes qui, en première

approche, représente le chemin que l'on suivrait en partant d'un point. Ce sont en fait les lignes orthogonales aux équipotentielles, ou surfaces de niveau, du champ.

Concernant le Laplacien scalaire, la quantité Δf est une mesure de la différence entre la valeur de f en un point quelconque P et la valeur moyenne \bar{f} au voisinage du point P .

Le Laplacien scalaire d'une fonction peut aussi être interprété comme la courbure moyenne locale de la fonction, que l'on visualise aisément pour une fonction à une seule variable $f(x)$. La dérivée seconde (ou courbure) f'' représente la déviation locale de la moyenne par rapport à la valeur au point considéré.

Les notions de rotationnel, gradient, Laplacien... interagissent. Par exemple en mécanique des fluides, le rotationnel de la vitesse décrit une rotation de la particule fluide. Si l'écoulement est irrotationnel (son rotationnel est nul en tout point), alors le vecteur vitesse est le gradient du potentiel (on dit alors que les vitesses dérivent d'un potentiel). Si le fluide peut être considéré comme incompressible, la divergence de ce vecteur s'annule. Le laplacien du potentiel est donc nul : il s'agit d'un potentiel harmonique qui satisfait l'équation de Laplace.

3.8 Quelques théorèmes sur les intégrales

Les relations ci-après permettent de passer d'intégrales sur un domaine à des intégrales sur le bord de ce domaine.

Théorème 7 — Théorème du gradient. Ce théorème met en relation l'intégrale de volume du gradient d'un champ scalaire et l'intégrale de surface de ce même champ :

$$\int_{\Omega} \nabla f = \int_{\Gamma} f \mathbf{n}(x) \quad (3.34)$$

où Γ est le bord du domaine Ω et f un champ scalaire (i.e. une fonction régulière).

Théorème 8 — Théorème du rotationnel. Ce théorème met en relation l'intégrale de volume du rotationnel d'un champ vectoriel et l'intégrale de surface du même champ :

$$\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{A} = - \int_{\Gamma} \mathbf{A} \wedge \mathbf{n}(x) \quad (3.35)$$

où Γ est la frontière de Ω , \wedge est le produit vectoriel et $n(x)$ est la normale dirigée vers l'extérieur.

Une autre identité remarquable met en relation l'intégrale de surface du rotationnel d'un champ vectoriel et l'intégrale curviligne (ou circulation) du même champ sur la frontière. Elle découle du théorème de Green qui, pour une surface S (généralement non fermée) de frontière C , implique :

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot dl \quad (3.36)$$

Si S est fermée, C est vide (ou réduit à un point) et le membre de droite est nul.

L'orientation de la surface et celle de la courbe frontière sont liées puisque le changement d'une orientation modifie le signe de l'intégrale correspondante. En fait, la relation est satisfaite lorsque ces orientations sont telles que, sur un point frontière, le vecteur tangent à la surface $d\vec{s} \wedge d\vec{l}$ est orienté en direction de la surface.

Théorème 9 — Théorème de Green (-Riemann). Ce théorème donne la relation entre une intégrale curviligne autour d'une courbe simple fermée C et l'intégrale double sur la région du plan S délimitée par C .

Soit C , une courbe plane simple, positivement orientée et C^1 par morceaux, S le domaine compact lisse du plan délimité par C et $Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle sur \mathbb{R}^2 . Si P et Q

ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte incluant S , alors :

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy \quad (3.37)$$

Il existe une autre façon de noter ce théorème. On se place sur un domaine compact lisse du plan Ω , de bord $\partial\Omega$, en notant la forme différentielle ω . Alors la dérivée extérieure de ω s'écrit :

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (3.38)$$

On peut alors résumer le théorème de Green par la formule :

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \iint_{\Omega} d\omega \quad (3.39)$$

(Le cercle sur l'intégrale précise que le bord décrit une courbe fermée).

Théorème 10 — Théorème de Green-Ostrogradsky (flux-divergence). (« Ostrogradsky » peut s'écrire avec un « y » ou un « i » à la fin.)

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de frontière Γ et \mathbf{A} un champ de vecteurs :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \quad (3.40)$$

Ce théorème prend aussi le nom de théorème du flux-divergence ou plus simplement formule de la divergence.

Théorème 11 — Formule de Green. Du théorème de Green-Ostrogradsky on peut déduire la formule de Green : soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de frontière Γ et u et v deux fonctions régulières :

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \quad (3.41)$$

On en déduit certaines formules utiles du calcul vectoriel. Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 de frontière Γ , \mathbf{A} et \mathbf{B} des champs de vecteurs, f et g des fonctions régulières, et $n(x)$ la normale extérieure au point considéré :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{A})) = \int_{\Gamma} f \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}(x) \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})) = \int_{\Gamma} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}(x) \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) = \int_{\Gamma} f \nabla g \cdot \mathbf{n}(x) \quad (3.44)$$

Ces formules sont exploitées pour obtenir des formulations faibles associées à des problèmes aux dérivées partielles.

Chapitre 4

Espaces de Lebesgue

Résumé — Les espaces L^p sont indispensables à la définition des espaces de Sobolev après lesquels nous courons depuis quelques chapitres.

La mesure de Lebesgue a été introduite, les notions d'application et de continuité ont été rappelées... nous en avons plus qu'il ne nous en faut pour définir de tels espaces.

Comme promis au paragraphe 1.3, nous fournissons maintenant quelques compléments sur l'intégration. Nous avons mentionné la mise en défaut de l'intégrale de Riemann dans le cas de l'indicatrice des rationnels. Ce contre-exemple a été historiquement fourni par Dirichlet. Regardons toutefois d'un peu plus près d'où tout cela provient.

Histoire

Dans le chapitre VI, « Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques » de sa *Théorie analytique*, Fourier considère une fonction f définie dans $]-\pi/2, +\pi/2[$ dont le développement en série trigonométrique est de la forme :

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_k \sin kx + \dots \quad (4.1)$$

Le problème est de calculer les coefficients a_k dans le cas même, dit-il, où « la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire... On ne suppose point que ces coordonnées soient assujetties à une loi commune ; elles se succèdent d'une manière quelconque et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité ».

On notera au passage que la fonction considérée par Fourier n'est définie que par la donnée de ses points (si en plus ils sont en nombre fini, cela représente alors un échantillonnage).

Fourier conduit son calcul selon une voie nouvelle : en multipliant l'expression précédente par $\sin kx$ et en intégrant terme à terme la série, mais sans justification, il obtient :

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx \quad (4.2)$$

Fourier observe que dans tous les cas envisagés, ces intégrales ont un sens et en conclut que toute fonction d'une variable peut-être représentée par une série trigonométrique.

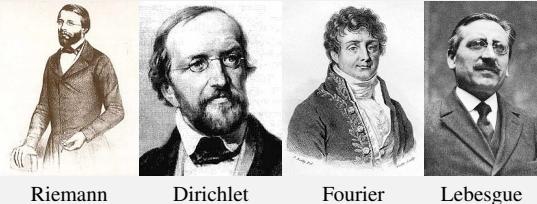
Fourier, même manquant de rigueur, aboutit à un résultat juste pour les fonctions qu'il considère. Or les fonctions considérées en l'occurrence « vont bien » pour l'intégrale de Riemann telle qu'elle est définie.

Définition 29 — Intégrale de Riemann. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$. On considère une suite (x_i) , $0 \leq i \leq n$ de subdivisions de cet intervalle : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Notons $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ et $S = \delta_1 f(a + \epsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \epsilon_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \epsilon_n \delta_n)$, où $0 \leq \epsilon_i \leq 1$.

Si la somme S « a la propriété, de quelque manière que les δ et les ϵ puissent être choisis, de s'approcher indéfiniment d'une limite fixe A , quand les δ tendent vers zéro, cette limite s'appelle la valeur de l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$.

En termes modernes, on dira que pour qu'une fonction bornée soit Riemann-intégrable, il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuité de f soit de mesure nulle. En complément, on rappellera également que l'intégrale de Riemann n'est que la généralisation de celle de Cauchy : la valeur retenue pour calculer la fonction sur chaque sous-intervalle n'est plus celle du point de gauche, mais peut être prise n'importe où dans ledit sous-intervalle.

Dès la fin de son mémoire de 1829, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, Dirichlet donne l'exemple, d'une nature toute nouvelle, d'une fonction discontinue en tous ces points : la fonction $f(x)$ qui vaut une constante c si x est un rationnel et qui vaut une autre constante d si x est irrationnel. On voit alors directement que la Riemann-intégrabilité est mise à mal. Le travail consistera alors à définir précisément ce que l'on peut négliger, i.e. les parties de mesure nulle.



Riemann Dirichlet Fourier Lebesgue

Lebesgue va commencer par définir un ensemble mesurable : c'est un ensemble dont la mesure extérieure (i.e. la borne inférieure de la mesure des ouverts le contenant) est égale à sa mesure intérieure (i.e. la borne supérieure de la mesure des fermés qu'il contient) : est-il besoin de rappeler la différence entre borne inférieure et minimum et entre borne supérieure et maximum ? La borne supérieure (ou le supremum) d'une partie d'un ensemble partiellement ordonné est le plus petit de ses majorants. Une telle borne n'existe pas toujours, mais si elle existe alors elle est unique. Elle n'appartient pas nécessairement à la partie considérée. Dualement, la borne inférieure (ou l'infimum) d'une partie est le plus grand de ses minorants...

L'intégrale de Lebesgue peut être définie de manière géométrique : pour une fonction positive f définie sur $[a, b]$, elle est égale à la mesure de dimension deux de l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ quand cette mesure existe. D'une manière analytique, cette définition de l'intégrale de Lebesgue devient :

Définition 30 — Intégrale de Lebesgue. soit f une fonction réelle, bornée, définie sur $[a, b]$. Supposons $m \leq f(x) \leq M$ pour $x \in [a, b]$. Pour tous ξ, η tels que $\xi \leq \eta$, on définit : $V_{\xi, \eta} = \{x \in [a, b] / \xi \leq f(x) \leq \eta\}$. Si pour tous ξ, η , $V_{\xi, \eta}$ est mesurable, alors f est mesurable.

En considérant la partition $m = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = M$ et $V_i = \{x / \xi_i \leq f(x) \leq \xi_{i+1}\}$, on définit les sommes

$$\sum_{i=1}^n \xi_i m(V_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \xi_{i+1} m(V_i) \tag{4.3}$$

où $m(V)$ est la mesure de l'ensemble V . L'intégrale de Lebesgue est la limite commune de ces deux sommes, dont on peut montrer qu'elle existe lorsque f est mesurable.

Voici par quelle image Lebesgue expliquait la nature de son intégrale : « Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verses à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale. »

La théorie de Lebesgue éclaire bien des difficultés des discussions du XIXe siècle (notamment sur les propriétés de différentiabilité des fonctions continues) et fournit un cadre général simplifié à de nombreux théorèmes alors que la théorie de Riemann multiplie les hypothèses et les conditions restrictives.

De plus, toute cette évolution s'est accompagnée de l'idée qu'on doit manipuler les fonctions comme des objets mathématiques en soi, des points de nouveaux espaces, les *espaces fonctionnels*. Avec l'extension du langage ensembliste, il devient naturel d'employer un langage géométrique à propos de ces espaces.

Rendons quand même hommage à cette belle (et malgré tout puissante) intégrale de Riemann, qui a de plus le bon goût d'être souvent très bien comprise des élèves. L'intégrale de Riemann nous apprends à nous poser la question « où se passent les choses importantes ? », question qui n'a pas de sens pour l'intégrale de Lebesgue qui ne connaît pas la question « où ? », mais seulement « combien souvent ? ». Les techniques riemannniennes consistent à localiser les problèmes et à

découper l'intégrale sur plusieurs intervalles restent des outils indispensables pour aborder bien des problèmes.

Dans les années 50 a été mise au point l'intégrale de Kurzweil-Henstock (ou KH-intégrale, ou intégrale de jauge) à partir de celle de Riemann : on retravaille un peu les sous-intervalles et les points de calcul de la fonction : chaque point est appelé « marque » et l'on parle de « subdivision marquée ». Sans faire appel à la théorie de la mesure, on dispose alors d'une intégrale aussi puissante que celle de Lebesgue (mais moins générale, car définie uniquement sur \mathbb{R}). Et on dispose même d'un très beau résultat : toute fonction dérivée est intégrable, et il n'est pas nécessaire d'introduire la notion d'intégrale impropre. L'intégrale de Lebesgue peut alors être introduite comme un cas particulier de cette intégrale.

4.1 Présentation des espaces de Lebesgue L^p

Un espace L^p est un espace vectoriel (des classes) de fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif (ce qui suppose que l'on a un espace mesuré, donc une mesure et une tribu). Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces L^∞ des fonctions bornées.

En fait, chaque espace L^p est plus exactement une classe d'équivalence obtenu en identifiant les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble négligeable.

Chaque espace L^p est un espace de Banach lorsque son exposant p est ≥ 1 .

Lorsque $0 < p < 1$, l'intégrale définit une quasi-norme qui en fait un espace complet.

Définition 31 — Exposants conjugués. Soient p et $q \in [1, +\infty]$. On dit que p et q sont des exposants conjugués si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (4.4)$$

Théorème 12 Soient p et q des exposants conjugués, alors il existe une dualité entre les espaces d'exposants p et q .

Il suffit en effet de considérer, à $g \in L^q$ fixé (de mesure μ), l'application $\Phi_g : f \mapsto \int f g d\mu$. Cette dernière définit une forme linéaire continue sur L^p .

4.2 Construction de L^p

On considère Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Les fonctions f seront considérées de Ω dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

On appelle $L^p = L_M^p(\Omega, \mathbb{C})$ pour $p < \infty$ l'espace des fonctions f mesurables, de $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$, telles que $\mu(|f|^p) < \infty$ où μ est une mesure sur Ω .

Comme une fonction s'annulant presque partout est d'intégrale nulle, on peut définir l'espace $L^p(X, A, \mu)$ comme le quotient de l'espace des fonctions p intégrables $L^p(X, A, \mu)$ par le sous-espace vectoriel des fonctions presque nulles.

Ce quotient identifie donc les fonctions qui sont presque partout égales, autrement dit qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

Définition 32 — Norme L^p . Pour $p < \infty$, on appelle norme L^p et on note $\|\cdot\|_p$, l'application définie par $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}$.

Sur \mathbb{R} , cela donne : $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$.

Sur un espace mesuré (X, A, μ) et à valeurs réelles ou complexes : $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

4.3 Espace L^0

L'espace L^0 est l'ensemble des fonctions mesurables. L^0 est l'espace obtenu en quotientant L^0 par les fonctions nulles.

Soit φ une fonction mesurable strictement positive et μ -intégrable, alors :

$$\rho(f, g) = \int \frac{\|f - g\|}{1 + \|f - g\|} \varphi d\mu \quad (4.5)$$

définit une distance sur L^0 qui redonne la topologie de la convergence en mesure.

Muni de cette distance, l'espace L^0 est complet.

Rappel : la notion de convergence (de suite) est une propriété topologique et non métrique (l'écriture avec les ε n'est que la traduction métrique de l'écriture topologique avec les boules).

4.4 Espace L^∞ et dualité avec L^1

Dans le cas où l'exposant est infini, on procède de la même manière.

L'espace $L^\infty(X, A, \mu)$ est défini comme l'espace vectoriel des fonctions μ -essentiellement bornées (i.e. des fonctions bornées presque partout).

L'espace $L^\infty(X, A, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient de $L^\infty(X, A, \mu)$ par la relation d'équivalence « $f \sim g$ » ssi « f et g sont égales presque partout ».

L'espace dual de L^1 est L^∞ mais l'espace dual de L^∞ contient strictement L^1 .

4.5 Espace L^2

Par définition, si Ω est un ouvert donné de \mathbb{R}^n , $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions (réelles ou complexes) qui sont de carré intégrable au sens de l'intégrale de Lebesgue.

C'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu \quad (4.6)$$

La formule des exposants conjugués conduit dans le cas $p = 2$, à $q = 2$, i.e. que L^2 s'identifie à son dual.

4.6 Complément et exemples

Si $f \in L^p$ et $f \in L^q$, alors $f \in L^r$, $p \leq r \leq q$.

La fonction $1/\sqrt{x}$ est L^1 mais pas L^2 .

La fonction $1/|x|$ est L^2 mais pas L^1 .

La fonction $e^{-|x|}/\sqrt{|x|}$ est L^1 mais pas L^2

4.7 Mais où se situent nos fonctions C^k ?

Soit Ω une partie mesurable de \mathbb{R}^n .

L'espace $C_c^0(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$, i.e. :

$$\forall f \in L^1(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_c^0(\Omega), \text{ tel que } \|f - g\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon \quad (4.7)$$

Pour tout ouvert Ω de R^n , et pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

$C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

MAIS attention, $C_c^\infty(\Omega)$ N'est PAS dense dans $L^\infty(\Omega)$

Chapitre 5

Espaces de Sobolev

Résumé — Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme L^p de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet.

Les espaces de Sobolev sont donc des espaces de Banach. Intuitivement, un espace de Sobolev est un espace de Banach ou un espace de Hilbert de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois (pour donner sens par exemple à une équation aux dérivées partielles) et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction.

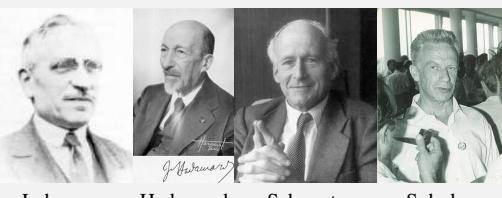
Les espaces de Sobolev sont un outil très important et très adapté à l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions d'équations aux dérivées partielles, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues dont les dérivées sont comprises dans un sens classique (mais rien n'empêche d'avoir de la chance).

Histoire

Le XXe siècle avait commencé par la thèse de Lebesgue « intégrale, longueur, aire » qui constitue vraiment le début de la théorie de la mesure. La théorie de Lebesgue mène à l'étude des espaces L^p , qui permettront, sur les traces de Hilbert, Riesz et Banach, l'étude des opérateurs différentiels.

Cauchy avait publié nombre d'applications de sa théorie dans des recueils d'exercices, notamment concernant l'évaluation d'intégrales réelles, qu'il n'hésita pas à généraliser en ce qu'on appelle aujourd'hui la « valeur principale de Cauchy », un peu moins d'un siècle avant que Hadamard en ait besoin dans sa résolution des EDP dans un problème d'hydrodynamique par les « parties finies » et que Laurent Schwartz n'en vienne aux distributions.

L'étude des conditions de régularité des solutions des EDP permet à Sergueï Sobolev et ses continuateurs de définir ses espaces de fonctions et les théorèmes de trace en fonction des propriétés géométriques du domaine.



5.1 Distributions

Une distribution (également appelée fonction généralisée) est un objet qui généralise la notion de fonction et de mesure. La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables et au-delà.

Définition 33 — Espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$. Soit Ω un sous-espace topologique de \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n). L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles

indéfiniment dérivables de Ω à support compact inclus dans Ω .

On munit cet espace vectoriel de la topologie suivante : un ensemble $U \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est ouvert ssi $\forall K \subset \Omega$ compact et $f \in U$ dont le support est inclus dans K , il existe $\varepsilon > 0$ et $k \geq 0$ tels que :

$$\{g \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \text{supp}(g) \subset K \quad \text{et} \quad \forall x \in K, |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| \leq \varepsilon\} \subset U. \quad (5.1)$$

Muni de cette topologie, $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel topologique non métrisable.

Définition 34 — Distribution. Une distribution est une **forme linéaire continue** sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

L'ensemble des distributions est donc le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ et est donc noté $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Toujours aussi classiquement, si T est une distribution et φ une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$ alors on note $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$. (i.e. $\langle ., . \rangle$ désigne comme d'habitude le crochet de dualité).

Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'application qui à φ associe $\varphi(0)$ est une distribution, et c'est la distribution de Dirac : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Une propriété fondamentale est que toute fonction localement intégrable f représente aussi une distribution T_f définie par la forme intégrale suivante :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (5.2)$$

5.2 Dérivées au sens des distributions

Pour définir la dérivée d'une distribution, considérons d'abord le cas d'une fonction différentiable et intégrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit φ une fonction test, supposée régulière et à support compact. Une intégration par parties permet d'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx \quad \text{soit} \quad I_{f'}(\varphi) = I_{-f}(\varphi'). \quad (5.3)$$

En effet, puisque la fonction φ est nulle en dehors d'un ensemble borné (elle est à support compact), les termes de bords s'annulent.

Définition 35 — Dérivée d'une distribution. Si S est une distribution, cet exemple suggère que l'on puisse définir sa dérivée S' comme la forme linéaire qui à une fonction test φ fait correspondre la valeur $-S(\varphi')$. On pose donc :

$$\langle S', \varphi \rangle = -\langle S, \varphi' \rangle \quad (5.4)$$

Cette définition étend la notion classique de dérivée : chaque distribution devient indéfiniment dérivable et l'on peut montrer les propriétés usuelles des dérivées.

Cette notion peut aussi se définir comme la dérivée du produit de dualité $\langle S, \varphi \rangle$. On note $\varphi_h : x \rightarrow \varphi(x-h)$ la translatée de φ par la valeur $h \in \mathbb{R}$, alors, en utilisant la linéarité et la continuité par rapport au deuxième terme :

$$\langle \frac{dS}{dx}, \varphi \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle S, \varphi_h \rangle - \langle S, \varphi \rangle}{h} = \langle S, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_h - \varphi}{h} \rangle = -\langle S, \frac{d\varphi}{dx} \rangle \quad (5.5)$$

Lorsque la distribution S modélise un phénomène physique, la fonction test φ peut s'interpréter comme un instrument de mesure, $\langle S, \varphi \rangle$ en étant le résultat ; la définition ci-dessus représente alors la mesure expérimentale (au moins de pensée) de la dérivée du phénomène S à l'aide de l'instrument φ .

Nous définirons dans un autre cours (sur le traitement du signal) les notions de distribution à support compact, les distributions tempérées et la décroissance rapide utiles en analyse de Fourier ainsi que les espaces de Schwartz.

5.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 36 — Espace $W^{m,p}(\Omega)$. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque, p un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$ et m un entier naturel positif. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega)\} \quad (5.6)$$

où α est un multi-indice tel que $0 \leq |\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (i.e. au sens des distributions) et L^p un espace de Lebesgue.

La norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty; \end{cases} \quad (5.7)$$

où $\|\cdot\|_{L^p}$ désigne la norme des espaces de Lebesgue.

Muni de cette norme $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Dans le cas où $p < \infty$, c'est aussi un espace séparable.

La norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & 1 \leq p < +\infty; \\ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = +\infty. \end{cases} \quad (5.8)$$

est une norme équivalente à la précédente.

On utilisera donc indifféremment l'une de ces normes, et on notera la norme employée $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ ou plutôt $\|\cdot\|_{m,p}$.

Si $p < \infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est identique à la fermeture de l'ensemble $\{u \in C^m(\Omega); \|u\|_{m,p} < \infty\}$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ où $C^m(\Omega)$ désigne l'espace de Hölder des fonctions de classe m sur Ω .

Le théorème de Meyers-Serrin $H = W$ donne une définition équivalente, par complétion de l'espace vectoriel normé, $\{u \in C^\infty(\Omega); \|u\|_{H^{m,p}} < \infty\}$, avec : $\|u\|_{H^{m,p}} := (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p)^{1/p}$, où $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens classique ($u \in C^\infty(\Omega)$).

5.4 Espaces $H^m(\Omega)$

Définition 37 — Espace $H^m(\Omega)$. Dans le cas $p = 2$, on note $H^m(\Omega)$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$, défini par la relation (5.6).

Théorème 13 Les espaces de Sobolev H^m ont un intérêt particulier car il s'agit alors d'espaces de Hilbert. Leur norme est induite par le produit intérieur suivant :

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \text{ où } (u, v) = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx \text{ est le produit intérieur dans } L^2(\Omega) \quad (5.9)$$

(produit scalaire dans le cas réel, hermitien dans le cas complexe).

Si Ω est Lipschitzien, alors l'ensemble $C^\infty(\overline{\Omega})$ des fonctions régulières jusqu'au bord de Ω est dense dans $H^m(\Omega)$.

De plus, dans le cas où la transformation de Fourier peut être définie dans $L^2(\Omega)$, l'espace $H^k(\Omega)$ peut être défini de façon naturelle à partir de la transformée de Fourier (voir cours sur le traitement du signal).

Par exemple si $\Omega = \mathbb{R}^n$, si \hat{u} est la transformée de Fourier de u :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty ; \text{ pour } |\alpha| \leq m\} \text{ ou ce qui est équivalent :}$$

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^m d\xi < \infty\}$$

et que :

$(u, v)_m = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} (1 + \xi^2)^m d\xi$ est un produit hermitien équivalent à celui défini plus haut.

Ou encore si $\Omega =]0, 1[$, on vérifie que :

$$H^m(]0, 1[) = \left\{ u \in L^2(]0, 1[); \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + n^2 + n^4 + \dots + n^{2m}) |\hat{u}_n|^2 < \infty \right\}$$

où \hat{u}_n est la série de Fourier de u . On peut aussi utiliser la norme équivalente : $\|u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + |n|^2)^m |\hat{u}_n|^2$.

5.5 Espaces $H_0^m(\Omega)$

Définition 38 — Espace $H_0^m(\Omega)$. On définit $H_0^m(\Omega)$ comme l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω .

Plus exactement et de manière générale, $W_0^{m,p}$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}$. La définition ci-dessus correspond donc au cas $p = 2$.

Il faut bien comprendre que cela signifie quelque chose de simple : c'est l'ensemble constitué des fonctions qui sont à la fois $\mathcal{D}(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$. Comme on s'intéresse à la frontière (puisque l'on prend l'adhérence), et que Ω est un ouvert, la valeur que prennent les fonctions de cet ensemble sur la frontière est celle que prennent les fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω , soit 0 !

Ainsi, « physiquement » les espaces $H_0^m(\Omega)$ sont les fonctions de $H^m(\Omega)$ qui sont nulles sur $\Gamma = \partial\Omega$, ainsi que leurs dérivées « normales » jusqu'à l'ordre $m - 1$. Plus mathématiquement, on dit que ces fonctions sont de trace nulle sur la frontière. Les espaces trace sont définis plus loin.

Par exemple :

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \middle/ v \in H^2(\Omega), v|_\Gamma = 0, \frac{\partial v}{\partial n}|_\Gamma = 0 \right\} \quad (5.10)$$

Les espaces $H_0^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

5.6 Espaces $H^{-m}(\Omega)$

Il est possible de caractériser le dual topologique de $H_0^m(\Omega)$ de la façon suivante.

$\forall m \geq 1$, on définit l'espace des distributions suivant :

$$H^{-m}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega), f = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, \text{ avec } f_\alpha \in L^2(\Omega) \right\} \quad (5.11)$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{H^{-m}} = \inf \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

l'infimum étant pris sur toutes les décompositions possibles de f sous la forme intervenant dans la définition de H^{-m} .

Ainsi défini, l'espace $H^{-m}(\Omega)$ est un espace de Hilbert isomorphe au dual topologique de $H_0^m(\Omega)$, et le crochet de dualité s'écrit :

$$\langle f, u \rangle_{H^{-m}, H_0^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_{\alpha} \partial^{\alpha} u dx, \quad \forall f \in H^{-m}(\Omega), \forall u \in H_0^m(\Omega) \quad (5.13)$$

(cette formule ne dépend pas de la décomposition de f en somme des $\partial^{\alpha} f_{\alpha}$)

Remarquons que le dual de $H^m(\Omega)$ n'est pas un espace de distribution et ne possède donc pas de caractérisation aussi simple.

5.7 Trace

Dans ce paragraphe, nous essayons de présenter la notion de trace de manière simple et intuitive.

Afin de pouvoir parler de la valeur d'une fonction sur la frontière de Ω , il nous faut définir le prolongement (la trace) d'une fonction sur ce bord.

Cas $n = 1$: on considère un intervalle ouvert $I =]a; b[$ borné. On a vu que $H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$. Donc, pour $u \in H^1(I)$, u est continue sur $[a; b]$, et $u(a)$ et $u(b)$ sont bien définies.

Cas $n > 1$: il nous faut définir la trace lorsque l'on n'a plus $H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$. On procède ainsi :

- On définit l'espace : $C^1(\bar{\Omega}) = \{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \exists O \text{ ouvert contenant } \bar{\Omega}, \exists \psi \in C^1(O), \psi|_{\Omega} = \varphi \}$
 $C^1(\bar{\Omega})$ est donc l'espace des fonctions C^1 sur Ω , prolongeables par continuité sur $\partial\Omega$ et dont le gradient est lui-aussi prolongeable par continuité. Il n'y a donc pas de problème pour définir la trace de telles fonctions.
- On montre que, si Ω est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ « assez régulière », alors $C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.
- L'application linéaire continue, qui à toute fonction u de $C^1(\bar{\Omega})$ associe sa trace sur $\partial\Omega$, se prolonge alors en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée γ_0 , qu'on appelle application trace. On dit que $\gamma_0(u)$ est la trace de u sur $\partial\Omega$.

Pour une fonction u de $H^1(\Omega)$ qui soit en même temps continue sur $\bar{\Omega}$, on a évidemment $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$. C'est pourquoi on note souvent par abus simplement $u|_{\partial\Omega}$ plutôt que $\gamma_0(u)$.

De manière analogue, on peut définir γ_1 , l'application trace qui permet de prolonger la définition usuelle de la dérivée normale sur $\partial\Omega$. Pour $u \in H^2(\Omega)$, on a $\partial_i u \in H^1(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, n$ et on peut donc définir $\gamma_0(\partial_i u)$. La frontière $\partial\Omega$ étant « assez régulière » (par exemple, idéalement, de classe C^1), on peut définir la normale $n = (n_1 \dots n_n)^T$ en tout point de $\partial\Omega$. On pose alors $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\partial_i u) n_i$. Cette application continue γ_1 de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ permet donc bien de prolonger la définition usuelle de la dérivée normale. Dans le cas où u est une fonction de $H^2(\Omega)$ qui soit en même temps dans $C^1(\bar{\Omega})$, la dérivée normale au sens usuel de u existe, et $\gamma_1(u)$ lui est évidemment égal. C'est pourquoi on note souvent, par abus, $\partial_n u$ plutôt que $\gamma_1(u)$.

5.8 Espace trace

Compte tenu du paragraphe précédent qui exposait la notion de trace, cette section n'a plus vraiment d'intérêt si l'on ne souhaite pas entrer trop dans les détails mathématiques.

Dans le cas d'exposant entier, on note souvent l'ordre avec la lettre m , dans le cas non-entier, on utilisera la lettre s , et donc les espaces seront notés : $W^{s,p}$ ou H^s .

5.8.1 Cas $p = 2$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$

Dans ce cas, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$, peut être défini grâce à la transformée de Fourier :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \quad (5.14)$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \quad (5.15)$$

5.8.2 Cas $p = 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ quelconque

On peut alors caractériser les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire $H^s(\Omega)$ grâce au produit intérieur donné par :

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = (u, v)_{H^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y))(D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y))}{|x-y|^{n+2t}} dx dy \quad (5.16)$$

où $s = k + T$, k est un entier tel que $0 < T < 1$ et n est la dimension du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La norme induite est essentiellement l'analogie pour L^2 de la continuité au sens de Hölder.

5.8.3 Cas $p \neq 2$ et $\Omega =]0, 1[$

On définit un opérateur D^s de dérivation d'ordre fractionnaire s par :

$$D^s u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^s \hat{u}(n) e^{int} \quad (5.17)$$

En d'autres mots, il s'agit de prendre la transformée de Fourier, de la multiplier par $(in)^s$ et à prendre la transformée de Fourier inverse (les opérateurs définis par la séquence : transformation de Fourier – multiplication – transformation inverse de Fourier sont appelés des multiplicateurs de Fourier). Cet opérateur permet de définir la norme de Sobolev de $H^s(]0, 1[)$ par : $\|u\|_{s,p} = \|u\|_p + \|D^s u\|_p$ et de définir l'espace de Sobolev $H^s(]0, 1[)$ comme l'espace des fonctions pour lesquelles cette norme est finie.

5.8.4 Cas général des espaces H^s

Soit $s > \frac{1}{2}$. Si Ω est un ouvert dont la frontière $\partial\Omega$ est « suffisamment régulière », alors on peut définir un opérateur de trace T qui à une fonction $u \in H^s(\Omega)$ lui associe sa trace, i.e sa restriction sur la frontière de Ω : $Tu = u|_{\partial\Omega}$.

Une hypothèse simple qui satisfasse la condition de régularité est que $\partial\Omega$ soit uniformément C^m pour $m \geq s$. Ainsi défini, cet opérateur de trace T a pour domaine de définition $H^s(\Omega)$ et son image est précisément $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$.

En fait, T est d'abord défini pour les fonctions indéfiniment dérivables et cette définition est ensuite étendue par continuité à tout l'ensemble $H^s(\Omega)$. De façon intuitive, on peut dire que l'on perd en régularité « une demi-dérivée » en prenant la trace d'une fonction de $H^s(\Omega)$.

Nous nous servirons de ces espaces dans le cas des éléments finis pour un problème de continuité des contraintes à une interface entre deux milieux solides ayant des propriétés matérielles différentes. Ce problème sera abordé plusieurs fois dans ce document, et le paragraphe 12.3 fera une synthèse des stratégies possibles pour le résoudre.

5.8.5 Cas général des espaces $W^{s,p}$

Définir la trace d'une fonction de $W^{s,p}$ est très difficile et demande d'utiliser les techniques plus compliquées (dont les espaces de Besov).

De façon plus intuitive, on peut dire que l'on perd en régularité $1/p$ -ème de dérivée en prenant la trace d'une fonction de $W^{s,p}(\Omega)$.

5.9 Espaces $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$

Par définition :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \forall i = 1, \dots, n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (5.18)$$

Muni du produit scalaire :

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \quad (5.19)$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

En physique et en mécanique, l'espace $H^1(\Omega)$ est également appelé « espace d'énergie » au sens où il est constitué des fonctions d'énergie finie (i.e. de norme finie).

Théorème 14 — Théorème de densité. Si Ω est un borné régulier de classe C^1 , ou si $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, ou encore si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

En pratique, il est très important de savoir si les fonctions régulières sont denses dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. Cela justifie en partie la notion d'espace de Sobolev qui apparaît ainsi très simplement comme l'ensemble des fonctions régulières complétées par les limites des suites de fonctions régulières dans la norme de l'énergie. Cela permet de démontrer facilement de nombreuses propriétés en les établissant d'abord sur les fonctions régulières puis en utilisant un argument de densité.

Par définition de $H_0^1(\Omega)$, et en prenant en compte une remarque précédente :

$$H_0^1(\Omega) = \{ v / v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0 \} \quad (5.20)$$

On voit que sur cet espace, la condition de Dirichlet est satisfaite automatiquement sur tout le pourtour $\Gamma = \partial\Omega$.

La frontière Γ est généralement partitionnée en deux sous-frontières Γ_D et Γ_N sur lesquelles on satisfait les conditions de Dirichlet et de Neumann respectivement : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$H_{0,D}^1(\Omega) = \{ v / v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_D} = 0 \} \quad (5.21)$$

et $H_0^1(\Omega) \subset H_{0,D}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

On rappelle que l'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual de $H_0^1(\Omega)$. Or, grâce au théorème de représentation de Riesz-Fréchet (voir plus loin, au chapitre portant sur les formulations faibles), on sait que l'on peut identifier le dual d'un espace de Hilbert avec lui-même. Cependant en pratique, on n'identifie pas $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. En effet, ayant défini $H_0^1(\Omega)$ comme un sous-espace strict mais dense de $L^2(\Omega)$, et ayant déjà identifié $L^2(\Omega)$ à son dual (muni du produit scalaire usuel, voir chapitre précédent), on ne peut pas en plus identifier $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ (avec un autre produit scalaire). On a donc les inclusions strictes suivantes :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega) \quad (5.22)$$

Grâce à $H^{-1}(\Omega)$, on pourrait définir une nouvelle notion de dérivation pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, plus faible encore que la dérivée faible. Devant l'afflux de notions de dérivations, rassurons le lecteur en disant qu'elles sont toutes des avatars de la dérivation au sens des distributions (c'est l'intérêt de la théorie des distribution que d'avoir unifié ces divers types de dérivation).

L'exemple le plus simple à retenir, et le plus utile pour la suite, est que tout élément f de $H^{-1}(\Omega)$ s'écrit, au sens des distributions, sous la forme :

$$f = u + \operatorname{div} G \quad (5.23)$$

avec $u \in L^2(\Omega)$ et $G \in (L^2(\Omega))^n$.

Théorème 15 — Dérivation des fonctions composées dans les espaces de Sobolev. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ et toute fonction $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 à dérivée bornée nous avons :

$$T(u) \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla T(u) = T'(u) \nabla u \quad (5.24)$$

De plus, l'application $u \in H^1(\Omega) \mapsto T(u) \in H^1(\Omega)$ est continue.

On se contente ici de donner les résultats concernant l'espace $H^1(\Omega)$ même si des résultats similaires peuvent être démontrés pour les espaces $H^m(\Omega)$ ou les espaces $W^{1,p}(\Omega)$, avec $p \neq 2$. Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de \mathbb{R}^n .

- si $n = 1$, on a une injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace de Hölder $C^{\frac{0,1}{2}}(\Omega)$;
- si $n = 2$, on a une injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$ (et donc pas dans $L^\infty(\Omega)$).
- si $n \geq 3$, on a une injection continue de $H^1(\Omega)$ dans l'espace $L^{p^*}(\Omega)$ avec $p^* = \frac{2d}{d-2}$.

De plus les injections non critiques sont compactes.

Comme on va s'intéresser par la suite à la discréétisation de problème aux dérivées partielles, le cadre de domaines bornés nous suffira.

5.10 Espaces $H(\operatorname{div})$ et $H(\operatorname{rot})$

Nous introduisons un espace, intermédiaire entre $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, l'espace $H(\operatorname{div}, \Omega)$ défini par :

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{f \in L^2(\Omega)^n, \quad \operatorname{div} f \in L^2(\Omega)\} \quad (5.25)$$

C'est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} (f(x) \cdot g(x) + \operatorname{div} f(x) \operatorname{div} g(x)) dx \quad (5.26)$$

et de la norme $\|f\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Un des intérêts de l'espace $H(\operatorname{div}, \Omega)$ est qu'il permet de démontrer un théorème de trace et une formule de Green avec encore moins de régularité que dans $H^1(\Omega)$. En effet, si $f \in H(\operatorname{div}, \Omega)$, on ne « contrôle » qu'une seule combinaison de ses dérivées partielles, et non pas toutes comme dans $H^1(\Omega)$, mais on peut quand même donner un sens à la trace normale $f \cdot n$ sur $\partial\Omega$.

L'espace $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ est défini par :

$$H(\operatorname{rot}, \Omega) = \{f \in (L^2(\Omega))^2; \operatorname{rot}(f) \in L^2(\Omega)\} \quad (5.27)$$

$H(\operatorname{rot}, \Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|f\|_{H(\operatorname{rot}, \Omega)} = \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{rot}(f)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (5.28)$$

L'application trace tangentielle $f \mapsto f \wedge n$ est continue de $H(\text{rot}, \Omega)$ sur un espace de Hilbert de fonctions définies sur $\partial\Omega$ qui n'est pas précisé. On peut introduire l'espace $H_0(\text{rot}, \Omega)$ des fonctions de $H(\text{rot}, \Omega)$ de trace tangentielle nulle. Cet espace peut être utilisé pour la modélisation de phénomènes électromagnétiques par les équations de Maxwell.

En fait, il est possible de définir de nombreux espaces de Sobolev en fonction du problème considéré et c'est tout l'intérêt.

5.11 Inégalités utiles

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques inégalités utilisées pour borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition.

Nous en aurons besoin pour les formulations faibles ainsi que pour les problèmes d'homogénéisation.

Définition 39 — Exposant conjugué de Sobolev. On s'intéresse à Ω un ouvert de \mathbb{R}^n (qui peut être \mathbb{R}^n tout entier), ainsi qu'aux espaces de type $W^{m,p}(\Omega)$.

On appelle conjugué de Sobolev du nombre p , le nombre p^* , défini par la relation :

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \quad (5.29)$$

Théorème 16 — Injections continues de Sobolev. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Si Ω est borné et a une frontière Lipschitz-continue, alors, pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout $p \in [1, +\infty[$, on dispose des inclusions avec injections continues suivantes :

$$\begin{cases} W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*} & \text{si } m < \frac{n}{p} \\ W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q & \forall q \in [1, +\infty[, \text{ si } m = \frac{n}{p} \\ W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) & \text{si } \frac{n}{p} < m \end{cases} \quad (5.30)$$

Théorème 17 — Inégalité de Poincaré. Soit p , tel que $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert de largeur finie (i.e. borné dans une direction). Alors il existe une constante C , dépendant uniquement de Ω et p , telle que, pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on ait :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (5.31)$$

Théorème 18 — Inégalité de Poincaré-Friedrichs. Si Ω est borné de diamètre d , alors la constante de Poincaré précédente s'exprime en fonction de ce diamètre. On a, pour toute fonction $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d^p \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad (5.32)$$

En particulier pour $p = 2$:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq d^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (5.33)$$

Théorème 19 — Inégalité de Poincaré-Wirtinger. Soit p , tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un domaine (i.e. un ouvert connexe) lipschitzien (i.e. borné et « à frontière lipschitzienne ») de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante C , dépendant uniquement de Ω et p , telle que, pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on ait :

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad (5.34)$$

où $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y) dy$ est la valeur moyenne de u sur Ω , $|\Omega|$ désignant la mesure de Lebesgue du domaine Ω .

Théorème 20 — Inégalité de Korn. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de la frontière est « suffisamment » régulière (par exemple C^1 par morceaux). Notons $\varepsilon(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + (\nabla v)^T)$ le linéarisé du tenseur des déformations défini pour tout $v \in V = (H^1(\Omega))^n$ ou $(H_0^1(\Omega))^n$. Alors il existe une constante (dite constante de Korn) $C_K > 0$ telle que

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_V \leq C_K \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (5.35)$$

Cette inégalité est assez puissante puisqu'elle contient, dans son membre de gauche, toutes les dérivées partielles de v , alors que son membre de droite ne fait intervenir que certaines combinaisons linéaires des dérivées partielles.

L'inégalité inverse de l'inégalité de Korn étant évidente, on en déduit que les deux membres définissent des normes équivalentes.

En mécanique, l'inégalité de Korn dit que l'énergie élastique (qui est proportionnelle à la norme du tenseur des déformations dans $L^2(\Omega)$) contrôle (i.e. est supérieure à) la norme du déplacement dans $H^1(\Omega)$ à l'addition près de la norme du déplacement dans $L^2(\Omega)$. Ce dernier point permet de prendre en compte les « mouvements de corps rigides », i.e. les déplacements u non nuls mais d'énergie élastique nulle.

Histoire

Arthur Korn a été un étudiant de Poincaré.

Il est plus connu comme pionnier des télécommunications, plus précisément comme l'inventeur de la téléphotographie. Il met au point un téléautographe, un système de transmission des images fixes à distance, par le biais du fil télégraphique, en recourant aux propriétés photoélectriques du sélénium.



Poincaré

Friedrichs

Wirtinger

Korn

Résumé des outils d'analyse fonctionnelle

Norme, produit scalaire, espaces

Soit E un espace vectoriel.

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme sur E ssi elle vérifie :

1. $(\|x\| = 0) \implies (x = 0)$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \lambda \in \mathbb{K}$;
3. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

La distance issue de la norme est la distance définie par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Toute forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E . Elle vérifie les propriétés :

1. bilinéarité : $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$;
2. symétrie : $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3. positivité : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$;
4. définie : $\forall x \in E, (\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$.

La norme induite par le produit scalaire est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

L'inégalité triangulaire donne alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace normé.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien, qui est donc également un espace normé pour la norme induite.

Exemple : Pour $E = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a les normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$$

Le produit scalaire défini par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ a pour norme induite la norme $\|\cdot\|_2$.

Soit E un espace vectoriel et $(x_n)_n$ une suite de E . $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p > N, \forall q > N : \|x_p - x_q\| > \varepsilon$.

Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse.

Un espace vectoriel est complet ssi toute suite de Cauchy y est convergente.

Un espace de Banach est un espace normé complet.

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Un espace euclidien est un espace de Hilbert de dimension finie.

Espaces fonctionnels

Un espace fonctionnel est un espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions.

Dans la suite, nous considérons les fonctions définies sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^p .

Un fonction u est mesurable ssi $\{x/|u(x)| < r\}$ est mesurable $\forall r > 0$.

On définit les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$ par :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable, et telle que } \int_{\Omega} |u|^p < \infty \right\}$$

$L^p(\Omega)$ est la classe d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour la relation d'équivalence «égalité presque partout» : on confondra deux fonctions dès qu'elles sont égales presque partout, i.e. lorsqu'elles ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

Les formes :

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^\infty} = \sup_{\Omega} |u|$$

ne sont pas des normes sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ (en effet, $\|u\|_{L^p} = 0$ implique que u est nulle presque partout dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ et non pas $u = 0$, d'où la définition des espaces $L^p(\Omega)$).

Ces formes sont des normes sur $L^p(\Omega)$ et en font des espaces de Banach (i.e. complets).

Dans le cas particulier $p = 2$, on obtient l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable pp. sur Ω . On remarque que la norme $\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2}$ est induite par le produit scalaire $(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv$, ce qui fait de l'espace $L^2(\Omega)$ un espace de Hilbert.

Dérivée généralisée

Les éléments des espaces L^p ne sont pas nécessairement des fonctions très régulières. Leurs dérivées partielles ne sont donc pas forcément définies partout. C'est pourquoi on va étendre la notion de dérivation. Le véritable outil à introduire pour cela est la notion de distribution. Une idée simplifiée en est la notion de dérivée généralisée (certes plus limitée que les distributions, mais permettant de sentir les aspects nécessaires pour aboutir aux formulations variationnelles).

Fonctions tests

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de Ω vers \mathbb{R} , de classe C^∞ , et à support compact inclus dans Ω . $\mathcal{D}(\Omega)$ est parfois appelé espace des fonctions-tests.

Théorème : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$

Dérivée généralisée

Soit $u \in C^1(\Omega)$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par intégration par parties (ou Green) on a l'égalité :

$$\int_{\Omega} \partial_i u \varphi = - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi + \int_{\partial\Omega} u \varphi n = - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi$$

(car φ est à support compact donc nulle sur $\partial\Omega$).

Le terme $\int_{\Omega} u \partial_i \varphi$ a un sens dès que $u \in L^2(\Omega)$, donc $\int_{\Omega} \partial_i u \varphi$ aussi, sans que u ait besoin d'être C^1 . Il est donc possible de définir $\partial_i u$ même dans ce cas.

Cas $n = 1$: Soit I un intervalle de \mathbb{R} , pas forcément borné. On dit que $u \in L^2(I)$ admet une dérivée généralisée dans $L^2(I)$ ssi $\exists u_1 \in L^2(I)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I u_1 \varphi = \int_I u \varphi'$.

Par itération, on dit que u admet une dérivée généralisée d'ordre k dans $L^2(I)$, notée u_k , ssi : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_I u_k \varphi = (-1)^k \int_I u \varphi^{(k)}$.

Ces définitions s'étendent au cas où $n > 1$.

Théorème : Quand elle existe, la dérivée généralisée est unique.

Théorème : Quand u est de classe $C^1(\bar{\Omega})$ la dérivée généralisée est égale à la dérivée classique.

Espaces de Sobolev

Espaces H^m

L'espace de Sobolev d'ordre m est défini par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m\}$$

On voit que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire et la norme induite :

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 \quad \text{et} \quad \|u\|_m = \sqrt{(u, u)_m}$$

Théorème : Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière «suffisamment régulière», alors on a l'inclusion : $H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ pour $k < m - \frac{n}{2}$.

Trace

Dans les problèmes physiques que nous renconterons (voir partie 2), nous devrons pouvoir imposer des conditions aux limites. Ceci est vrai, que l'on s'intéresse aux formulations forte ou faible.

Pour cela, il faut que la valeur d'une fonction sur la frontière soit définie. C'est justement ce que l'on appelle sa trace. La trace est le prolongement d'une fonction sur le bord de l'ouvert Ω .

De manière analogue, il est possible de prolonger la définition de la dérivée normale sur le contour de Ω , ce qui permet de prendre en compte des conditions aux limites de type Neumann par exemple.

Espace $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ de $H^1(\Omega)$.

Théorème : Par construction $H_0^1(\Omega)$ est un espace complet. C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_1$.

$H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ de trace nulle sur la frontière $\partial\Omega$ (on a : $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$ où γ_0 est l'application trace).

Pour toute fonction u de $H^1(\Omega)$, on peut définir :

$$\|u\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_0^2} = \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2}$$

Inégalité de Poincaré : Si Ω est borné dans au moins une direction, alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que $\forall u \in H_0^1(\Omega) ; \|u\|_0 \leq C(\Omega)|u|_1$. On en déduit que $|\cdot|_1$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$.

Corollaire : Le résultat précédent s'étend au cas où l'on a une condition de Dirichlet nulle seulement sur une partie de $\partial\Omega$, si Ω est connexe.

On suppose que Ω est un ouvert borné connexe, de frontière C^1 par morceaux. Soit $V = \{v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ où Γ_0 est une partie de $\partial\Omega$ de mesure non nulle. Alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que $\forall u \in V ; \|u\|_{0,V} \leq C(\Omega)|u|_{1,V}$, où $\|\cdot\|_{0,V}$ et $|\cdot|_{1,V}$ sont les norme et semi-norme induites sur V . On en déduit que $|\cdot|_{1,V}$ est une norme sur V équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,V}$.

II

PROBLÈME CONTINU

Chapitre 6

Problèmes physiques : équations différentielles et aux dérivées partielles

Résumé — La première partie était uniquement des « rappels » de notions mathématiques nécessaires pour disposer d'un certains nombre d'outils. Maintenant que nous avons ces outils, nous allons nous intéresser à des problèmes concrets de la physique (au sens général).

Cette deuxième partie va donc présenter des problèmes physiques, sous leur forme forte (dans ce chapitre), puis sous forme faible et variationnelle ; la théorie de la formulation faible étant exposée entre temps.

6.1 Introduction

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une ED correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Pour les méthodes explicites de résolution des ED, on ira voir en annexes.

Histoire

Les problèmes posés ou menant à des ED sont aussi vieux que l'analyse elle-même (XVIIe-XVIIIe, voir notes précédentes sur les fonctions et sur la continuité et la dérivabilité). Avant même qu'on ait complètement élucidé la question des infiniment petits l'on se préoccupe déjà de résoudre des problèmes de tangente, qui mènent invariablement à une ED. Dès les débuts de la mécanique classique, dite newtonienne, on est confronté à l'intégration de systèmes d'ED du second ordre (voir exemples ci-dessous).

On s'habitue progressivement à ce que l'inconnue d'une équation puisse être une fonction, même si la fonction a encore à l'époque un statut flou.

On résoud les ED par la méthode des séries entières sans s'encombrer des notions de convergence, bien que l'on entrevoit parfois certaines difficultés dues justement à ces problèmes de convergence... et on en arrive presque aux séries asymptotiques qui ne seront conceptualisées qu'au XIXe.



Riccati

Clairaut

D'Alembert

Euler

Un autre problème reste d'écrire, à l'aide de fonctions simples, les solutions des ED. La liste des ED que l'on sait résoudre de cette manière est plutôt maigre : Leibniz et sa méthode de décomposition en éléments simples, les Bernouilli et les ED linéaires du premier ordre, puis Riccati...

La découverte par Clairaut en 1734 de l'existence d'une solution singulière à l'équation $y - xy' + f(y') = 0$ (à la famille de droites $y = Cx + f(C)$ qui est l'expression générale des courbes intégrales, il faut adjoindre l'enveloppe de cette famille pour avoir toutes les solutions analytiques de l'équation) relance la dynamique. D'Alembert, en 1748, trouve un second cas d'intégrale singulière. Mais c'est

Euler et Lagrange qui élucident ce qui se passe en général en exhibant la courbe qui est le lieu des points singuliers.

Si l'on sait, dès la fin du XVII^e siècle intégrer les ED linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants par des sommes d'exponentielles, il faut attendre 1760 pour que la théorie vienne à bout des ED linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque. En 1739, Euler rencontre une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 4^e ordre sur un problème de vibration des tiges qu'il ne sait pas intégrer. C'est en 1743 qu'il forme ce qu'on appelle aujourd'hui l'équation caractéristique, qu'il complète un peu plus tard lorsqu'une racine de cette équation polynomiale est multiple.

D'Alembert remarque que pour les ED non homogènes, l'adjonction d'une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène donne la solution générale de l'équation homogène. Lagrange introduit la méthode de variation des constantes pour résoudre par quadratures l'équation linéaire non homogène lorsque l'on connaît la solution générale de l'équation homogène.

Clairaut, D'Alembert, Euler, Lagrange et Laplace consacrent de nombreux mémoires au problème des n corps. Le premier exemple du problème de Sturm-Liouville est donné par D'Alembert à propos de la vibration d'une corde non homogène.



Lagrange Laplace Sturm Liouville

Les mathématiciens du XVIII^e siècle admettent sans discussion l'existence de solutions des ED et EDP sans chercher le domaine d'existence de ces solutions. Il faut attendre Cauchy, vers 1820, pour que soit abordée l'existence d'une solution à l'ED $y' = f(x, y)$, où f est supposée continument différentiable en chaque variable. Sans connaître les travaux de Cauchy, Lipschitz, en 1868, retrouve le résultat de Cauchy mais, s'affranchit de l'hypothèse de différentiabilité de f au profit de la condition dite aujourd'hui de Lipschitz. En 1837, Liouville utilise, pour le cas particulier d'une équation linéaire du second ordre une méthode d'approximation successive : on construit une suite de fonctions convergeant vers la solution.

Si l'on considère une fonction f , sa dérivée f' exprime sa variation : positive f est croissante (et plus sa valeur est grande, plus la croissance est rapide), négative f est décroissante...

À partir de là on peut considérer une population de personnes. Le nombre total de personnes à un instant t est donné par $f(t)$. Plus la population est nombreuse, plus elle se reproduit : en d'autres termes, la vitesse de croissance de la population est proportionnelle à la taille de la population. On peut donc écrire :

$$f'(t) = k f(t) \quad (6.1)$$

C'est une ED très simple, mais qui modélise le problème dit de dynamique de population.

Un autre problème simple, toujours en dynamique des populations, est celui de deux populations interdépendantes : les proies $g(t)$ et les prédateurs $m(t)$. Les proies se reproduisent et sont mangées par les prédateurs, alors que les prédateurs meurent sauf s'ils peuvent manger des proies.

Cela conduit au système de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} g'(t) &= A g(t) - B g(t) m(t) \\ m'(t) &= -C m(t) + D g(t) m(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

où il est nécessaire de résoudre les équations simultanément (on dit que les équations sont couplées)

Pour revenir à des exemples plus connus du lecteur, on n'oubliera pas que la relation fondamentale de la dynamique, de Newton :

$$m\ddot{x} = f(x) \quad (6.3)$$

est une d'ED du second ordre.

On pourrait multiplier les exemples comme l'équation de l'oscillation d'une masse suspendue à un ressort :

$$\ddot{x} = -c\dot{x} - \omega^2 x \quad (6.4)$$

avec ($c > 0$) ou sans ($c = 0$) frottement.

Comme on le voit sur les exemples ci-dessus, et comme on s'en souvient sans doute, il est nécessaire, pour déterminer complètement la solution d'une ED (ou d'une EDP), de disposer de valeurs de la solution en certains points. On appelle ces « contraintes », des conditions aux limites.

Les conditions aux limites types sont présentées au paragraphe suivant.

Histoire

Concernant les EDP, elles sont initialement résolues par des méthodes ad-hoc, le plus souvent géométriques. On n'écrit pas l'EDP. On ne s'étonnera donc pas que la première équation aux dérivées partielles n'apparaisse qu'assez tard.

La théorie de l'intégration des EDP du premier ordre ne date que de 1734. L'idée d'Euler est de ramener ladite intégration à celle des ED ordinaires. Euler montre qu'une famille de fonctions dépendant de deux paramètres vérifie une EDP du premier ordre en éliminant ces paramètres entre les dérivées partielles. Inversement, une telle équation admet une solution dépendant d'une fonction arbitraire. Il parvient ainsi à intégrer plusieurs équations de ce type.



Cauchy Lipschitz Dirichlet Neumann

Lagrange, dans un mémoire de 1785, résume les connaissances de l'époque sur ces questions. Il ne sait intégrer que onze types d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

La solution de l'intégration de ces équations allait venir d'un mathématicien peu connu, mort en 1784, Paul Charpit. Son mémoire, présenté en 1784 à l'académie des sciences n'a jamais été publié et est resté longtemps une énigme. Une copie de ce mémoire a été trouvée en 1928.

6.2 Conditions aux limites

Comme nous venons de le dire, les conditions aux limites sont des contraintes (des valeurs) que l'on impose à la fonction solution (ou à certaines de ces dérivées) sur tout ou partie du domaine Ω , et/ou sur toute ou partie de sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$.

D'un point de vue « vocabulaire », certains types de conditions aux limites standard existent qui sont listées ci-après.

6.2.1 Dirichlet – valeurs aux bords

On parle de condition de Dirichlet imposée à une ED ou une EDP, lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur toute ou partie de la frontière du domaine.

Il peut s'agir par exemple d'un déplacement imposé (par exemple nul) en des points d'une structure (points d'appuis rigides).

6.2.2 Neumann – gradients aux bords

On parle de condition de Neumann imposée à une ED ou une EDP, lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur la frontière du domaine (flux, contraintes...)

6.2.3 Robin – relation gradient/valeurs sur le bord

On parle de condition de Robin ou condition de Fourier ou condition d'impédance imposée à une ED ou une EDP, lorsque l'on spécifie une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les

valeurs de la dérivée de la fonction qui est solution du problème sur toute ou partie de la frontière du domaine.

C'est donc une pondération de conditions de Dirichlet et de Neumann.

6.2.4 Condition aux limites dynamique

On parle de condition aux limites dynamique imposée à une ED ou une EDP, lorsque l'on spécifie une combinaison linéaire entre la dérivée temporelle et la dérivée normale que la solution doit vérifier sur toute ou partie la frontière du domaine.

6.2.5 Condition aux limites mêlée

On parle de condition aux limites mêlée lorsque l'on juxtapose plusieurs conditions aux limites différentes sur toute ou partie de la frontière du domaine.

6.3 Types d'équations aux dérivées partielles

La forme générale d'une EDP linéaire, scalaire, d'ordre 2 est :

$$au + c\nabla u + \operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad (6.5)$$

où $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les coefficients de l'EDP.

Dans le cas où u est scalaire ($n = 1$) et les coefficients sont constants, on obtient :

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = f \quad (6.6)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \gamma$ sont des scalaires.

Cette équation est dite :

- * si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$;
- parabolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$;
- hyperbolique si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

On peut dire que :

- les problèmes elliptiques vont concerner les problèmes de la mécanique ;
- les problèmes paraboliques ceux de type équation de la chaleur ;
- les problèmes hyperboliques ceux de la propagation des ondes.

6.4 Phénomènes de propagation et de diffusion

Dans ce paragraphe, nous avons regroupé les notions de propagation et de diffusion.

La propagation et la diffusion sont liées. La diffusion, c'est en quelque sorte l'homogénéisation d'une grandeur dans un milieu et dans le temps. Or pour qu'il y ait diffusion, il faut bien que ledit phénomène se propage.

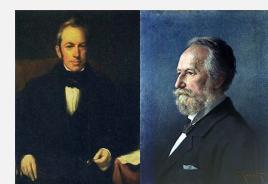
Histoire

Le déplacement des atomes, ions ou molécules dans un milieu, que celui-ci soit solide (cristallin ou amorph), liquide ou gazeux, est appelé de manière générale « migration ».

Au sens large la diffusion désigne des transferts obéissant aux lois de

Fick, i.e. dont la résultante macroscopique vérifie l'équation de diffusion.

La turbulence entraîne ainsi une forte diffusion dans les fluides. La diffusion moléculaire est la migration sous l'effet de l'agitation thermique, à l'exception des autres phénomènes. Elle intervient par exemple dans des procédés d'amélioration des caractéristiques mécaniques (traitements de surface comme la nitruration ou cémentation), la résistance à la corrosion et les procédés d'assemblage par brasage.



Brown

Fick

En 1827, le botaniste Robert Brown observe le mouvement erratique de petites particules de

pollen immergées dans de l'eau. Il ne s'agit pas d'un phénomène de diffusion, puisque ce qui bouge est une particule macroscopique, mais cette « marche aléatoire », que l'on appellera « mouvement brownien », servira de modèle pour la diffusion : Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est le mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule. Ce mouvement, qui permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), est aussi très utilisé dans des modèles de mathématiques financières.

En 1855, Adolph Fick propose des lois phénoménologiques, empiriques, inspirées de la loi de Fourier pour la chaleur (établie en 1822). C'est Albert Einstein qui démontrera les lois de Fick en 1905 avec ses travaux sur la loi stochastique. La première loi de Fick énonce que « le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration ».

Nous nous placerons dans un cadre beaucoup plus macroscopique, où les interactions entre particules sont quantifiées au travers de variables macroscopiques continues, comme par exemple la température, la pression, mais également le frottement fluide, la conductivité thermique, la masse volumique...

L'analogie de formulation mathématique nous fera également considérer les cas de propagation des ondes dans des milieux donnés. C'est d'ailleurs essentiellement via la propagation des ondes que nous aborderons les formulations... l'équation de la chaleur constituant le liant idéal pour illustrer les liens entre propagation et diffusion.

6.4.1 Équations de Laplace et Poisson

L'équation de Laplace, ou Laplacien est l'équation :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (6.7)$$

Elle est elliptique.

Elle apparaît dans de nombreux problèmes physiques : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique.

Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont appelées les fonctions harmoniques. Toute fonction holomorphe est harmonique.

L'équation de Poisson est l'équation :

$$\Delta\varphi = f \quad (6.8)$$

où f est une fonction donnée. Elle est elliptique.

Par exemple, en électrostatique, on exprime le potentiel électrique V associé à une distribution connue de charges ρ (dans le vide) par la relation :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.9)$$

En gravitation universelle, le potentiel gravitationnel Φ est relié à la masse volumique μ par la relation :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\mu \quad (6.10)$$

6.4.2 Équation d'onde, phénomènes vibratoires

Il s'agit encore d'une extension de l'équation de Laplace.

L'équation d'onde est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde (sonore ou électromagnétique dont la lumière), qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle.

Dans le cas vectoriel, en espace libre, dans un milieu homogène, linéaire et isotrope, l'équation d'onde s'écrit :

$$\Delta u = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \square u = 0 \quad (6.11)$$

où la fonction d'onde inconnue est notée $u(x, y, z, t)$, t représente le temps, et le nombre c représente la célérité ou vitesse de propagation de l'onde u (rappel : \square est le d'Alembertien). Elle est hyperbolique.

Dans le cas de l'acoustique, alors cette équation est obtenue à partir des équations de la mécanique ainsi que de l'hypothèse de fluide parfait :

- conservation de la masse : $\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho u) = 0$ avec ρ la masse volumique du milieux et u sa vitesse ;
- conservation de la quantité de mouvement : $\operatorname{div}(\sigma) = \rho \ddot{u}$, avec σ le tenseur des contraintes
- le fluide est parfait, et sa relation de comportement est donc : $\sigma = -p'I$ avec p' la pression dans le fluide.

À partir de ces trois équations, on retrouve l'équation des ondes sous la forme :

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \ddot{p}' = 0 \quad (6.12)$$

avec c la célérité de l'onde acoustique dans le milieu (vitesse du son).

L'équation des ondes permet également de modéliser le problème de l'évolution de la déformation d'une membrane tendue (peau de tambour). Dans ce cas là, on note plutôt :

$$\sigma \Delta u = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega \quad (6.13)$$

où Ω est notre domaine qui est une surface, donc $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

La même équation en dimension deux ou trois modélise la plupart des phénomènes vibratoires. En dimension 1, cette équation s'appelle l'équation des cordes vibrantes.

6.4.3 Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est une EDP parabolique, introduite initialement en 1811 par Fourier pour décrire le phénomène physique de conduction thermique.

Histoire

À propos de l'effet régularisant de la chaleur :

L'équation de la chaleur a un « effet régularisant » : quelque soit la distribution initiale de la température pour un problème donné, même discontinue, on aboutit rapidement à une distribution continue et même lisse de la température.

En 1956, Louis Nirenberg propose un nouveau problème à John Nash (qui est « aussi pressé que X, aussi exaspérant que Y, quels que soient X et Y » selon Warren Ambrose) : la continuité des solutions de l'équation de la chaleur dans les milieux discontinus, i.e. lorsque le coefficient de conductivité est quelconque, et peut même varier brutalement d'un point à l'autre et que l'on a seulement des bornes inférieure et supérieure sur la conductivité.



Nirenberg Nash De Giorgi

John Nash résoud le problème, notamment à l'aide du concept d'entropie de Boltzmann, mais n'obtiendra pas le triomphe escompté, le problème ayant été résolu, en même temps, mais par une autre méthode, par l'italien De Giorgi, qui lui deviendra célèbre (mais John Nash est célèbre pour d'autres travaux... prix Nobel d'économie en 1994, voir le film « un homme d'exception » (A Beautiful Mind) de Ron Howard en 2001).

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et $T(x, t)$ un champ de température sur ce domaine (champ de scalaires). En présence d'une source thermique dans le domaine, et en l'absence de

convection, i.e. de transport de chaleur (i.e. on s'intéresse à la propagation de la température au sein d'un milieu « stable », i.e. qui ne bouge pas ; on ne s'intéresse pas à la propagation de chaleur due par exemple à l'existence d'un courant d'air, d'un courant de convection. La convection est plutôt un problème de mécanique des fluides.), l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\Delta T(x,t) + \frac{f}{\rho c} \quad (6.14)$$

où :

- Δ est l'opérateur Laplacien ;
- D est le coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s) ;
- f une éventuelle production volumique de chaleur (en W/m^3) ;
- ρ est la masse volumique du matériau (en kg/m^3) ;
- c la chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg\Delta K$).

L'équation de la chaleur est donc une équation de la forme :

$$\dot{u} - \Delta u = f \quad (6.15)$$

Elle est parabolique.

Pour que le problème soit bien posé, il faut spécifier :

- une condition initiale : $\forall x \in \Omega, \quad T(x,0) = T_0(x)$;
- une condition aux limites sur le bord du domaine, par exemple :
 - de Dirichlet : $\forall x \in \partial\Omega, \quad T(x,t) = 0$;
 - ou de Neumann : $\forall x \in \partial\Omega, \quad \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} = n(x) \cdot \nabla T(x,t) = 0$, où $n(x)$ est le vecteur normal unitaire au point x .

L'équation de la chaleur, introduite initialement pour décrire la conduction thermique, permet de décrire le phénomène de diffusion.

La diffusion est un phénomène de transport irréversible qui se traduit à terme par une homogénéisation de la grandeur considérée (par exemple la température dans un domaine, la concentration en produits chimiques dans une solution...).

D'un point de vue phénoménologique, et au premier ordre, ce phénomène est régi par une loi de Fick (par exemple sorption d'eau dans les matériaux composites, diffusion d'actifs au travers de la peau). Dans l'équation précédente, T représente alors la répartition de la grandeur considérée (eau dans un composite, concentration d'un constituant chimique...) et le terme source dans Ω est souvent nul (i.e. $f = 0$).

6.5 Mécanique des fluides

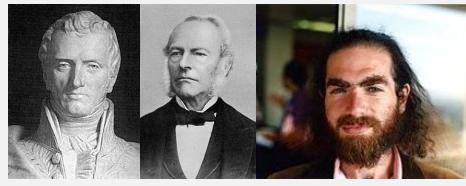
La mécanique des fluides est une des deux composantes de la mécanique des milieux continus ; l'autre composante étant la mécanique des solides qui sera traitée un peu plus loin.

6.5.1 Équation de Navier-Stokes

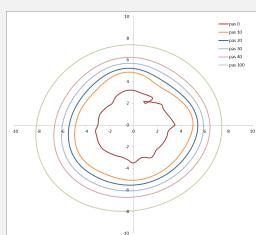
Histoire

Des 23 problèmes de Hilbert énoncés en 1900, la moitié est aujourd'hui complètement résolue, l'un a été démontré indécidable, cinq ne le sont pas du tout, les autres étant partiellement traités.

Des 7 problèmes de l'institut Clay (ou problèmes du prix du millénaire, dotés chacun d'un million de dollars américains) énoncés en 2000, seule la conjecture de Poincaré a été démontrée en 2003 par Grigori Perelman (qui a refusé le prix, ainsi que la médaille Field. D'ailleurs il n'a pas publié son travail dans un journal, mais l'a rendu publique et gratuit sur internet...). Notons au passage que Grigori Perelman est analyste, i.e. un spécialiste des EDP, un sujet que beaucoup de topologues avaient l'habitude de regarder de loin. Ils ont changé d'avis depuis !



Navier Stokes Perelman



Pour information, la preuve de Perelman suit le programme de Hamilton, qui le premier a pensé à utiliser le flot de Ricci pour s'attaquer à ce problème. Deux mots en aparte sur le flot de Ricci dont on entend beaucoup parlé en ce moment... Regardons se qui se passe dans le plan. On part d'une courbe (au centre de l'image ci-contre) qui est « biscourvée » et peut même comporter des boucles. Si on la modifie de sorte que chacun de ses points est bougé proportionnellement à sa courbure, alors on obtient une seconde courbe, un peu plus lisse... et en itérant le procédé, on finit par retomber sur un cercle (i.e. sur une sphère en dimension 2), et donc on « voit » que la conjecture de Poincaré est vraie. En d'autres termes, le flot de Ricci permet d'homogénéiser la courbure de la courbe (de la variété dans le cas général).

Le problème des équations de Navier-Stokes figure parmi ces 7 problèmes, c'est dire si le problème n'est pas simple. Et c'est, des 7 problèmes du millénaire, le seul qui soit en lien direct avec la physique (en lien très direct...). De plus, l'Institut Clay n'a pas fixé comme objectif la démonstration de l'existence de solutions pour les équations de Navier-Stokes et la démonstration que les solutions, si elles existent, sont uniques. Il a « simplement » proposé de récompenser des « progrès essentiels » sur le sujet. Pourtant des calculs en mécaniques des fluides sont effectués chaque jour, par exemple au sein de bureaux d'études pour dimensionner des voitures en aérodynamique.

On n'a pas pu prouver, pour ces équations, qu'il existe en toutes circonstances une solution parfaitement déterminée par les conditions initiales. Pour expliquer sommairement où réside la difficulté avec ces équations, on pourrait dire qu'avec les équations de Navier-Stokes, on passe du discret au continu.

Le problème c'est que l'on n'est pas sûr que ce qui est calculé est réellement une solution approchée et si le résultat est fidèle à la réalité : nous nous trouvons dans un cas où l'existence et l'unicité des solutions n'est pas facile à prouver. S'il existe des cas où des solutions régulières parfaitement déterminées à partir des conditions aux limites, cela n'est pas vrai en toutes circonstances et pour tous temps (on ne sait pas si une solution régulière ne peut pas devenir turbulente près un temps suffisamment long par exemple).

La non linéarité de ces équations joue des tours conduisant à des solutions qui peuvent par exemple ne pas se superposer sans s'influencer (alors que ce n'est pas le cas avec les équations linéaires). La viscosité n'est pas exempte de problème non plus, puisqu'elle conduit aux turbulences (que l'on pourrait qualifier de problème de passage d'échelle). D'ailleurs une description à un niveau intermédiaire entre une description atomiste (microscopique) et une description continue (macroscopique) a été faite par Boltzmann (niveau mésoscopique, description statistique), mais nous ne la présenterons pas ici. Les travaux de Cédric Villani (médaillé Fields 2010) ont répondu en grande partie au problème de la théorie cinétique (qui décrit un système constitué d'un très grand nombre de particules en interaction). Il a également prouvé des formes quantifiées du second principe de la thermodynamique : Boltzmann avait prouvé la croissance de l'entropie, et Cédric Villani en collaboration avec Laurent Desvillettes et Giuseppe Toscani a permis de quantifier la production d'entropie et le retour à l'équilibre. Ses travaux sur l'effet Landau (phénomène de relaxation non collisionnelle) ont des répercussions théoriques et pratiques, par exemple dans les modèles de mécanique classique en astrophysique.



Boltzmann Villani

La description faible du problème, qui sera présentée dans un autre chapitre, comporte elle-aussi ses problèmes car on n'est pas sûr de la convergence vers la solution forte.

Bien que des résultats d'existences et d'unicité existent, aucun ne permet soit de conclure à l'existence de solutions régulières pour tout temps, soit à l'apparition de singularité... On retrouve

ici la notion de chaos, déterministe ou non, que nous n'aborderons pas dans ce document, mais pour lequel il est aisément de trouver de la documentation. Signalons quand même qu'il est identique de parler de dynamique non linéaire ou de théorie du chaos. On pourra donc se servir de ces deux points d'entrée pour toute recherche sur le sujet.

Les équations de Navier-Stokes sont des EDP non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens (visqueux) dans l'approximation des milieux continus. Elles modélisent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides.

Nous considérons l'équation de Navier-Stokes sous la forme :

$$\rho \dot{u} + \rho(u \cdot \nabla)u - \eta \Delta u - \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } u) = \rho f - \nabla p \quad (6.16)$$

où :

- u est la vitesse du fluide ;
- p est la pression dans le fluide ;
- ρ est la masse volumique du fluide ;
- η est la viscosité dynamique en cisaillement du fluide ;
- ζ est la viscosité dynamique en compression du fluide ;
- f est une force massique s'exerçant dans le fluide (par exemple : pesanteur).

Si de plus le fluide est incompressible (bonne approximation pour les liquides), alors $\text{div } u = 0$ et l'équation se simplifie :

$$\rho \dot{u} + \rho(u \cdot \nabla)u - \eta \Delta u = \rho f - \nabla p \quad (6.17)$$

6.5.2 Équation de Stokes

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes (termes inertIELS absents ou négligés).

Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule lentement en un lieu étroit ou autour d'un petit objet, les effets visqueux dominent sur les effets inertIELS. Son écoulement est alors appelé écoulement de Stokes. On parle aussi d'écoulement à faible nombre de Reynolds (le nombre de Reynolds mesure le poids relatif des termes visqueux et inertIEL dans l'équation de Navier-Stokes). Ce nombre de Reynolds est alors beaucoup plus petit que 1.

L'équation de Stokes, qui décrit l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible en régime permanent et à faible nombre de Reynolds, s'écrit dans Ω :

$$-\eta \Delta u + \nabla p = \rho f \quad (6.18)$$

On rappelle que si de plus le fluide est incompressible, alors on a également $\text{div } u = 0$ dans Ω .

Contrairement à l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Stokes est linéaire. Les écoulements solutions de cette équation possèdent par conséquent des propriétés bien particulières :

- **unicité** : pour des conditions aux limites données (valeur de la vitesse au niveau des parois et/ou à l'infini), il existe un et un seul écoulement vérifiant l'équation de Stokes ;
- **additivité** : les solutions de l'équation de Stokes vérifient le principe de superposition : si u_1 et u_2 sont solutions, alors toute combinaison linéaire $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ le sera aussi (ceci n'est pas incompatible avec la propriété d'unicité : seul l'écoulement vérifiant les bonnes conditions aux limites sera observé) ;
- **réversibilité** : si un champ de vitesse u est solution de l'équation, alors $-u$ l'est aussi, à condition de changer le signe des gradients de pression, ainsi que des vitesses aux parois et à l'infini ; cette propriété est contraire à l'intuition, fondée sur notre expérience des écoulements macroscopiques : la réversibilité des écoulements à bas nombre de Reynolds a ainsi poussé les êtres vivants de très petite taille à développer des moyens de propulsion originaux.

- **paradoxe de Stokes** : il faut prendre garde au fait que les solutions mathématiques de l'équation de Stokes, dans un cas donné ou dans certaines régions du domaine de solution, peuvent être physiquement fausses. Ceci est dû au « paradoxe de Stokes » à savoir que les conditions physiques permettant de ramener l'équation de Navier-Stokes à l'équation de Stokes ne sont pas nécessairement réalisées dans tout le domaine de solution, à priori. On aboutit alors à des solutions présentant des comportements potentiellement aberrants dans certaines limites. C'est le cas par exemple « à l'infini » où souvent le terme inertiel finit par l'emporter sur le terme visqueux, sans qu'on puisse le préjuger à priori.

6.5.3 Équation d'Euler

L'équation d'Euler établie en 1755 en appliquant le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide (i.e. sous forme locale), s'applique dans le cas d'un fluide parfait, i.e. un fluide non visqueux et sans conductivité thermique. Le fluide peut être incompressible ou compressible (à condition, dans ce dernier cas, de se placer dans l'hypothèse de vitesses faibles).

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes.

Toujours avec les mêmes notations, elle s'écrit dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$:

$$\rho \dot{u} + \nabla p = \rho f \quad (6.19)$$

Et, si de plus le fluide est incompressible, alors on a également $\operatorname{div} u = 0$ dans Ω .

Dans le cas où la description du problème est une description eulérienne (i.e. le champ de vitesse est associé à chaque point et est considéré de manière instantanée), on peut alors écrire :

$$\rho f - \nabla p = \rho \dot{u} = \rho (\dot{u} + (u \cdot \nabla) u) = \rho \left(\dot{u} + \frac{1}{2} \nabla u^2 + (\nabla \wedge u) \wedge u \right) \quad (6.20)$$

Bien que ces équations correspondent à une simplification de l'équation de Navier-Stokes, elles n'en sont pas plus stables... bien au contraire.

6.6 Équations de la mécanique des milieux continus des solides

La mécanique des milieux continus traite aussi bien de la déformation des solides que de l'écoulement des fluides. Ce dernier point a déjà été abordé auparavant aux paragraphes sur les équation de Navier-Stokes et de Stokes. Intéressons-nous maintenant au cas de la déformation des solides.

6.6.1 Notions générales conduisant aux équations de la mécanique

Comme ce document est initialement prévu pour un public d'ingénieur mécanicien, c'est dans cette section que se trouve du « matériel » qui aurait pu être présenté avant. Il va nous permettre de montrer que les équations de la mécanique comme celles de la chaleur, de Faraday, d'Ohm... viennent toutes d'une équation d'équilibre (ou de conservation) et d'une équation de flux (ou loi de comportement). Il est donné à titre de culture général.

Équation aux dérivées partielles elliptique linéaire

Si l'on considère le cas scalaire, i.e. celui d'une fonction inconnue u définie sur un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, une EDP elliptique linéaire se met sous la forme :

$$a(x, y)u_{xx}(x, y) + b(x, y)u_{yy}(x, y) + c(x, y)u_x(x, y) + d(x, y)u_y(x, y) + eu(x, y) = f(x, y) \quad (6.21)$$

avec $a(x, y)b(x, y) > 0$.

Dans le cas où la fonction u est définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, une EDP elliptique linéaire est définie par :

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (6.22)$$

où l'opérateur différentiel \mathcal{L} est défini par :

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) \quad (6.23)$$

avec les valeurs propres de la matrice $A = a_{ij}$ qui sont toutes non nulles et de même signe. On rappelle que la matrice A peut toujours être choisie symétrique du fait de la symétrie $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ et donc que les valeurs sont réelles.

D'ailleurs, en dimension finie, le fait que toutes les valeurs propres sont strictement positives est équivalent au fait que la matrice A est définie positive.

Flux conservatif

Les EDP elliptiques conduisent à la notion physique de flux conservatif donné par un gradient. Considérons le cas scalaire. On associe à la fonction $u(x)$ un flux $q(x)$ qui est nul vers l'extérieur :

$$\int_{\delta\omega} q(x) \cdot n_x ds = 0, \quad \forall \text{ volume } \omega \subset \Omega \quad (6.24)$$

En utilisant la formule de divergence-flux, il vient : $\int_{\omega} \operatorname{div}_x q(x) dx = 0$, et en supposant la fonction $q(x)$ suffisamment régulière on en déduit $\operatorname{div}_x q(x) = 0, \forall x \in \Omega$.

En supposant que ce flux est une fonction linéaire du gradient ∇u , et qu'il est orienté dans la direction opposée (physiquement, les flux se font souvent de façon opposée au gradient d'une grandeur), on écrit $q(x) = -a(x)\nabla u$ et on obtient une loi de conservation à l'équilibre du type :

$$\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) = 0 \quad (6.25)$$

Pour $a(x) \equiv 1$, on retrouve la plus simple des équations elliptiques, l'équation de Laplace :

$$\operatorname{div}\nabla u(x) = \Delta u(x) = 0 \quad (6.26)$$

Équilibre des lois de conservation en comportement linéaire

Le raisonnement précédent peut être mené en considérant les lois de conservations dans les milieux continus. Les ingrédients principaux qui vont nous conduire à une grande famille d'équations elliptiques sont les suivants :

- Conservation d'une grandeur ;
- Milieu immobile et régime stationnaire ;
- Loi de comportement linéaire entre le flux de cette grandeur et le gradient.

Les deux premières notions sont souvent associées à l'équilibre d'un système.

Lois de conservation Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 1, 2$ ou 3 . Pour tout sous-domaine $\omega(t) \subset \Omega$, on définit, d'une manière générale, une grandeur $\mathcal{U}(t)$ à partir de sa densité spécifique $u(x, t)$ à l'aide de la masse volumique du milieu ρ par :

$$\mathcal{U}(t) = \int_{\omega(t)} \rho(x, t)u(x, t)dx \quad (6.27)$$

On suppose que la variation de cette grandeur $\mathcal{U}(t)$ ne peut se faire que par un apport extérieur volumique noté $\int_{\omega(t)} \varphi u dv$ et/ou un apport extérieur surfacique $\int_{\partial\omega(t)} J_{\mathcal{U}} ds$.

Le Lemme de Cauchy affirme alors l'existence d'un tenseur $j_{\mathcal{U}}$ tel que $J_{\mathcal{U}} = j_{\mathcal{U}} \cdot n$ et que l'on a la loi de conservation locale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho uv) = \varphi u - \operatorname{div} j_{\mathcal{U}} \quad (6.28)$$

Cette équation de conservation local peut, en utilisant la conservation de la masse, se mettre sous la forme :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \varphi u - \operatorname{div} j_{\mathcal{U}} \quad (6.29)$$

Hypothèse de milieu immobile et de régime stationnaire Si le milieu est immobile, la vitesse eulérienne (particulaire), $v(x, t)$ est nulle et donc la dérivée particulaire se réduit à :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u(x, t) \cdot v(x, t) = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.30)$$

L'équation de conservation précédente devient alors :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi u - \operatorname{div} j_{\mathcal{U}} \quad (6.31)$$

Si de plus, on est en régime stationnaire, i.e. $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, alors :

$$\varphi u - \operatorname{div} j_{\mathcal{U}} = 0 \quad (6.32)$$

Hypothèse de loi de comportement linéaire On va maintenant introduire dans l'équation précédente la loi de comportement du milieu. Le choix le plus simple est celui liant de manière linéaire le flux et le gradient :

$$j_{\mathcal{U}}(x, t) = A(x, t) \nabla u(x, t) \quad (6.33)$$

En reportant cette loi dans l'équation de conservation, il vient $\operatorname{div} A(x, t) \nabla u(x, t) = \varphi u$, soit :

$$A \Delta u + \nabla A \nabla u = \varphi u \quad (6.34)$$

Cette équation est de type elliptique dès que l'opérateur $A(x)$ possède de bonnes propriétés de positivité.

Équilibre général

Pour résumer, les modèles elliptiques se mettent sous la forme :

- Équation de flux (ou loi de comportement dans le cas vectoriel) :

$$j = -A(x) \nabla u \quad (6.35)$$

- Équation d'équilibre ou de conservation :

$$\operatorname{div} j = f - c(x)u \quad (6.36)$$

où :

- la fonction scalaire inconnue $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un potentiel ;
- la fonction vectorielle inconnue $j : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée un flux ;
- la fonction scalaire connue $f : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ correspond au termes sources du potentiel ;
- les fonctions scalaires connues $A(x)$ et $c(x)$ sont les données du problème.

Dans le cas vectoriel :

- u devient une fonction vectorielle $\Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- j un tenseur d'ordre 2 ;
- $A(x)$ un tenseur d'ordre 4 ;
- et $c(x)$ une fonction vectorielle.

Retour sur les exemples précédents

Si $u \rightarrow T$ est la température, $j \rightarrow q$ le flux de chaleur, f la source de chaleur, $A(x) \rightarrow \kappa(x)$ la conductivité du matériaux et $c(x) \equiv 0$, on retrouve l'équation de la chaleur.

Si $u \rightarrow V$ est le potentiel électrostatique, $\nabla u \rightarrow E$ le champ électrostatique, $j \rightarrow D$ le déplacement électrique ou flux de densité de courant, $f \rightarrow \rho$ la densité de charge, $A(x) \rightarrow \epsilon(x)$ le tenseur diélectrique et $c(x) \equiv 0$, on retrouve la loi de Faraday.

Si $u \rightarrow V$ est le potentiel électrique, $\nabla u \rightarrow E$ le champ électrique, $j \rightarrow J$ la densité de courant, $f \equiv 0$, $A(x) \rightarrow \sigma(x)$ le tenseur de conductivité et $c(x) \equiv 0$, on retrouve la loi d'Ohm.

Si $u \rightarrow C$ est la concentration, j le flux molaire, $f \rightarrow \rho$ le taux d'absorption ou le taux de réaction, $A(x) \rightarrow D(x)$ la constante de diffusion et $c(x)$ la coefficient de réaction, alors on retrouve le cas de la diffusion moléculaire.

Si u est le déplacement orthogonal, $\nabla u \rightarrow \epsilon$ la déformation, $j \rightarrow \sigma$ la contrainte dans le plan, f la force volumique extérieure, $A(x) \rightarrow H(x)$ le tenseur des rigidités et $c(x) = 0$, on se retrouve dans le cas de l'élasticité plane ($n = 2$) linéaire.

6.6.2 Formulation générale

En repartant du second principe de la dynamique, et en introduisant un terme de dissipation visqueuse, on écrira le problème général sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = \rho \ddot{u} + \mu \dot{u} & \text{dans } \Omega \quad \text{équation de la dynamique} \\ \sigma = H(\epsilon - \epsilon_{th}) & \text{dans } \Omega \quad \text{loi de comportement} \end{cases} \quad (6.37)$$

où f est une force de volume, ρ la masse volumique, μ est un facteur traduisant l'amortissement visqueux, ϵ_{th} est la déformation d'origine thermique et H traduit la relation de Hooke, i.e. la loi de comportement. Les inconnues sont donc les déplacements u , les déformations ϵ et les contraintes σ .

Nous allons maintenant faire quelques remarques concernant ces équations, notamment des simplifications correspondant à certains cas courant d'étude.

6.6.3 Dynamique / statique

La formulation générale est celle de la dynamique avec amortissement.

Une structure est sans amortissement si $\mu = 0$.

Le problème est statique s'il ne dépend pas du temps, i.e. s'il n'y a plus les termes \ddot{u} et \dot{u} .

6.6.4 Grands / petits déplacements

La relation entre déformation et déplacement est donnée par :

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \text{ soit pour chaque composante : } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (6.38)$$

Dans le cas des petits déplacements (termes d'ordre 2 négligés), elle devient :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ que l'on note } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.39)$$

Dans le cas de grandes déformations, on décompose les différentes grandeurs en deux parties : l'une symétrique, l'autre antisymétrique. On ne parle plus de contraintes de Cauchy (qui est l'application linéaire reliant le vecteur contrainte à la normale unitaire au point considéré), mais de contraintes nominales et de contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce (plus de contrainte corotationnelle pour les poutres ou les coques). Pour les déformations, on remarque qu'elles sont le produit d'une rotation pure par une déformation pure... Ces tenseurs sont présentés au paragraphe ??, quant aux grandes déformation, elles sont exposées au paragraphe ??.

6.6.5 Loi de comportement

La loi de comportement, reliant contrainte et déformation, peut être relativement compliquée selon les cas, et varie en fonction du niveau de chargement. On se reportera alors au paragraphe ???. Si elle est linéaire, on parle alors d'élasticité linéaire. La figure 6.1 présente quelques lois types de comportement pour différents matériaux.

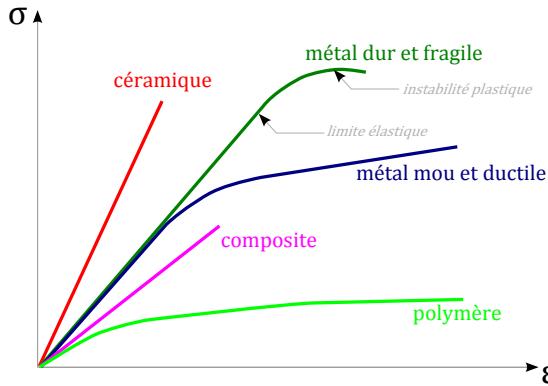


FIGURE 6.1 – Quelques lois types de comportement pour différents matériaux.

Dans le cas de matériaux isotropes (i.e. possédant les mêmes propriétés matérielles quelque soit l'orientation), les relations constitutives s'écrivent à l'aide des coefficients de Lamé λ et μ :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda Tr(\varepsilon)I \quad (6.40)$$

i.e. $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$. On rappelle également que :

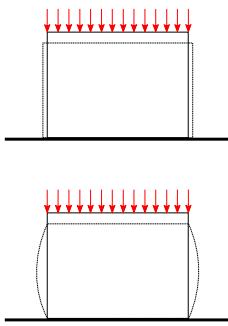
$$\lambda = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (6.41)$$

avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson, que l'on exprime, inversement :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (6.42)$$

Pour assurer que la matrice H est définie positive, il faut que $0 < \nu < 0,5$.

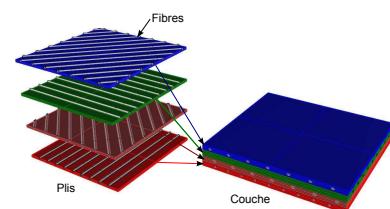
Le cas $\nu = 0,5$ correspond au cas d'un matériau incompressible, comme par exemple le caoutchouc. Nous verrons que selon les formulations il est plus ou moins aisément de prendre en compte ces matériaux. De plus, la littérature ne manque pas sur le sujet.

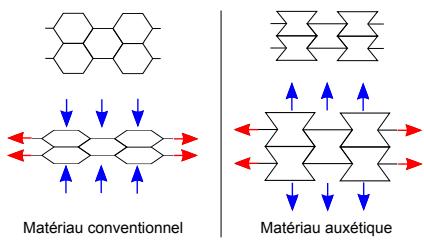


La signification physique du coefficient de Poisson est simple : 2ν traduit le pourcentage de déformation dans le sens transverse à l'effort. En restant dans le cas plan, quand on fait subit à une pièce un effort de compression telle qu'elle subit une déformation (de compression) de 1, alors elle s'élargit de 2ν dans la direction transverse (ν de chaque côté par symétrie). Ainsi, il devient évident qu'un matériau incompressible est caractérisé par $2\nu = 1$, i.e. lorsqu'il perd un volume 1 selon une direction, il reprend un volume 1 dans la direction transverse : en d'autres termes, il ne varie pas de volume, il est donc incompressible [ce qui ne veut pas dire « incomprimable » !].

Attention, cette signification physique du coefficient de Poisson n'est exacte que dans le cas de matériaux non seulement isotropes mais pleins. Pour un assemblage de matériaux ou de géométries, cette relation est mise en défaut.

Par exemple, la rigidité globale d'un assemblage de couches de composites renforcés de fibres peut conduire, selon les orientations des plis, à un coefficient de Poisson supérieur à 1 sans problème.





Si l'on considère un matériau constitué d'alvéoles (de type hexagonal), mais dont les pointes sont rentrantes et non sortantes, alors le coefficient de Poisson macroscopique de ce matériau est négatif (quand on le comprime, il ne gonfle pas mais rétrécit).

On parle alors d'un matériau auxétique.

Notons également que si $\mu \neq 0$ et $3\lambda + 2\mu \neq 0$, alors on peut inverser la relation contrainte/déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{Tr}(\sigma) \delta_{ij} \right) \quad (6.43)$$

Nous reviendrons plus tard sur ces aspects non linéaires au chapitre ??.

6.7 Équations de l'acoustique

L'acoustique, de manière la plus générale, a pour objet l'étude des sons et des ondes mécaniques. Elle fait appel aux phénomènes ondulatoires et à la mécanique vibratoire.

C'est là tout « le problème » de la vibro-acoustique : elle met en jeu des échelles d'énergies très différentes. Considérons l'étude vibro-acoustique d'un véhicule. Alors, on doit aussi bien prendre en compte les effets mécaniques ayant une forte énergie (la rotation du moteur fait bouger tout le véhicule), qu'à des effets ayant une énergie comparativement très faible : la composante aérienne du bruit. Dans le premier cas, vous êtes face à quelque chose capable de faire « sauter » une voiture sur place, alors que dans le second vous êtes face au déplacement d'une feuille de papier lorsque vous criez devant elle !

Il est clair qu'il sera nécessaire d'étudier chaque aspect :

- solidien/solidien : il s'agit d'une étude mécanique « classique », bien que l'on se trouve dans le cas d'une sollicitation qui dépend du temps. Celle-ci est d'ailleurs généralement périodique, d'où l'utilisation d'outils appropriés (en fréquence). On est dans le cas de propagation solidienne d'onde ;
- aérien/aérien : il s'agit de la propagation d'une onde acoustique de sa source jusqu'au récepteur. On est en présence d'un modèle purement de propagation d'onde ;
- solidien/aérien : il s'agit du cas du rayonnement. Une vibration mécanique fait vibrer un élément qui se met à émettre une onde dans l'air ;
- aérien/solidien : dans le cas de sources acoustiques très puissantes, l'onde acoustique se propageant dans l'air peut arriver à déformer et à faire vibrer une surface physique (par exemple un tablier de voiture).

Les deux derniers cas sont typiquement des cas dits de couplage fluide/structure.

D'un point de vue de la formulation d'EDP, tout à été dit précédemment. Nous verrons plus loin comment prendre en compte tous ces aspects de manière plus appliquée.

6.8 Multiplicateurs de Lagrange

Les multiplicateurs de Lagrange ont une grande utilité, car leurs applications sont vraiment très larges. Pour rester très général, on va dire qu'ils permettent de « faire des liens » entre des grandeurs. Nous allons expliquer cela sur quelques exemples.

Si l'on reprend les équations de l'élasticité, on peut les réécrire en fonction uniquement des déplacements. L'avantage est que l'on dispose qu'un problème qui ne dépend que d'un unique champ inconnu, pour lequel les conditions aux limites correspondent à des choses très physiques : les déplacements imposés (appui simple, encastrement, contact).

Lorsque l'on résout un problème avec uniquement le champ de déplacements, alors évidemment, on obtient le champ de déplacements, mais uniquement lui ! Alors comment remonter aux autres grandeurs ? En utilisant les relations existantes... mais : entre déplacement et déformation, on a une dérivation, qui peut faire perdre en qualité d'approximation, d'autant plus lorsque l'on néglige les termes du second ordre. Ensuite on se sert des relations entre déformation et contraintes, mais encore faut-il être capable de mesurer ces grandeurs... et même si l'on sait le faire, que se passe-t-il à l'interface entre deux matériaux distincts, comme par exemple entre l'une des peaux et l'âme d'un matériau sandwich ? (sur le sujet, abordé en plusieurs fois dans ce document, voir synthèse au paragraphe 12.3)

Le cas du calcul des contraintes à l'interface entre deux matériaux est un exemple typique d'application des multiplicateurs de Lagrange. Si l'on considère chacun des deux matériaux comme indépendant, alors au sein de chaque matériau, les relations fonctionnent. Si l'on impose maintenant la continuité des déplacements à l'interface entre les deux matériaux (en écrivant que λ (qui représente les multiplicateurs de Lagrange) multiplié par la différence entre les déplacements de part et d'autre de l'interface est nul : analogie immédiate avec les résidus pondérés – voir chapitre suivant), alors on s'aperçoit (ce sera détaillé dans le chapitre sur les formulations variationnelles) que les multiplicateurs de Lagrange s'interprètent comme les composantes des contraintes qui doivent être continues à l'interface (on parle de trace... comme défini au chapitre sur les espaces de Sobolev).

Si maintenant l'un des domaines est l'air et l'autre la structure considérée, alors on se doute que les multiplicateurs de Lagrange peuvent servir à « faire le lien » entre ces deux domaines, à les coupler en écrivant une équation liant la pression dans le fluide aux efforts de surface sur la structure par exemple... On voit comment on peut résoudre les problèmes évoqués dans le court paragraphe sur l'acoustique.

Mais les multiplicateurs de Lagrange peuvent également être utilisés directement afin d'améliorer les méthodes numériques : ils permettent par exemple de « passer » les informations entre des maillages incompatibles, permettant par exemple de circonscrire une zone de maillage raffiné (avec raffinement automatique en plus si l'on veut) et une zone de maillage plus léger...

Une illustration de leur utilisation pour imposer des conditions aux limites en déplacement est donnée en 12.6.

Les multiplicateurs de Lagrange peuvent être introduits partout où l'on veut créer un lien entre des grandeurs, et cela sans se soucier de leur signification physique. Toutefois, dans de nombreux cas, il se trouve que ces multiplicateurs représentent certaines grandeurs, permettant une analogie entre différentes formulation d'un même problème.

Chapitre 7

Formulations faible et variationnelle

Résumé — Un problème physique est généralement décrit par la donnée d'équations différentielles ou plus certainement aux dérivées partielles. Une telle formulation est appelée formulation forte du problème.

Nous allons voir qu'il est possible d'exprimer ces ED ou EDP d'une manière « moins contraignante » pour les solutions recherchées. Une telle formulation sera qualifiée de formulation faible, et ses solutions appelées solutions faibles.

Évidemment, une solution forte du problème d'origine est également solution de la formulation faible.

7.1 Principe des formulations faible et variationnelle

Quand on cherche la solution d'une EDP, on peut être confronté aux problèmes suivants :

- La solution ou les coefficients de l'EDP peuvent ne pas être assez réguliers pour donner un sens classique à l'équation ;
- La solution peut être régulière mais l'espace de régularité en question n'a pas les bonnes propriétés pour obtenir directement l'existence de la solution dans cet espace.

On va donc essayer de donner un sens plus faible à la notion de solution, sans perdre de vue si possible les notions les plus naturelles. Donner un sens faible à une EDP signifie :

1. Chercher une solution dans un espace de régularité plus faible que souhaité ;
2. Établir, en général à l'aide de fonction tests et d'intégrations par parties « formelles », une série d'équations que doit vérifier cette solution. Cette série d'équations doit être construite (si possible) de telle sorte que les éventuelles solutions régulières soient aussi solutions faibles et, a contrario, que des solutions faibles qui seraient régulières soient aussi solutions classiques du problème initial.

Les difficultés d'une telle approche sont nombreuses :

- Le choix de l'espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution est crucial, pas toujours unique et parfois non trivial.
- Si l'on affaiblit trop la notion de solution, il sera a priori plus facile de démontrer l'existence mais les propriétés d'unicité seront plus difficiles à obtenir.
- Si l'on n'affaiblit pas suffisamment l'équation, l'existence sera ardue à prouver mais l'unicité sera plus simple.

Il s'agit donc de trouver un juste équilibre...

Dans le cas des équations elliptiques, celles-ci ont pour propriété, en général, de mettre en jeu des dérivées d'ordre pair de la solution dans le terme principal de l'équation. L'idée première pour résoudre ces problèmes aussi bien d'un point de vue théorique que numérique va être de multiplier formellement l'équation par une fonction test régulière, puis d'intégrer sur le domaine et enfin d'intégrer par parties un nombre suffisant de fois pour faire porter autant de dérivées sur la solution

que sur les fonctions tests. On pourra ainsi envisager d'utiliser le même espace fonctionnel pour la solution et les fonctions tests.

Étant donné un opérateur différentiel $A(\cdot)$ et une fonction f définie sur un domaine ouvert Ω , la formulation forte du problème est la suivante :

Trouver la fonction u définie sur Ω vérifiant $A(u) = f$ en tout point de Ω .

Une solution u du problème précédent est alors également solution du problème suivant appelé formulation faible (On appelle v une fonction test) :

Trouver une fonction u définie sur Ω vérifiant $\int_{\Omega} A(u), \quad v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v$ définie sur Ω .

Justification Tout réside dans le fait de « multiplier par une fonction test et d'intégrer ». Pourquoi peut-on faire ça ?

Partons de l'équation forte :

$$A(u) = f, \quad \forall x \in \Omega \tag{7.1}$$

Nous pouvons multiplier les deux membres de l'équation par une fonction v à condition que cette fonction v ne soit pas identiquement nulle. Dans ce cas, la solution de

$$A(u)v = f \cdot v, \quad \forall x \in \Omega \tag{7.2}$$

est la même $\forall v$ suffisamment sympathique. Comme cette seconde équation est vraie en tout point de Ω , alors elle est encore vraie sous forme intégrale, i.e. sous forme faible, à condition que v soit suffisamment régulière pour pouvoir être intégrée.

On entrevoit alors clairement la suite des opérations : si en plus d'être régulière, la fonction v est différentiable, alors on va pouvoir réaliser sur le terme $\int A(u) \cdot v$ une intégration par parties pour diminuer les conditions de dérivabilité portant sur u , mais en augmentant celles portant sur v .

Si l'ordre de dérivation de u est paire (disons $2k$), alors on pourra faire en sorte par un nombre suffisant de manipulations que u et v aient à être différentiables à l'ordre k ... et on pourra essayer de faire en sorte que u et v appartiennent au même espace fonctionnel...

Petit aparté sur d'autres manières de présenter « la chose » : en mécanique, on parle également du « principe du travail virtuel » (ou des puissances virtuelles), de « minimisation de l'énergie potentielle », ou encore de « méthode des résidus pondérés », Toutes ces méthodes sont « équivalentes » à celle exposée ici, mais souvent leur démonstration se fait uniquement « par les mains », ce qui peut être frustrant.

Principe des puissances virtuelles Le PTV est un principe fondamental en mécanique, qui postule un équilibre de puissance dans un mouvement virtuel, il s'agit d'une formulation duale du principe fondamental de la dynamique. On raisonne comme suit : si un solide est à l'équilibre (statique du solide), la somme des efforts est nulle. Donc si l'on fait faire un déplacement fictif (virtuel) à l'objet, la somme des puissances des forces et moments est nulle. Ce principe constitue la base d'une démarche de modélisation pour les milieux continus (théorie du premier gradient, théorie du second gradient). On parle parfois du principe des travaux virtuels qui est sensiblement identique.

Histoire

L'origine de ce principe revient à Jean Bernoulli, qui énonce en 1725 le principe des vitesses virtuelles, qui consiste à considérer la perturbation de l'équilibre d'un système mécanique par un mouvement infinitésimal respectant les conditions de liaison du système, un mouvement virtuel, et d'en déduire une égalité de puissance.

Ce principe a été par la suite généralisé par D'Alembert et Lagrange en ce qui est connu actuellement sous le nom de principe de D'Alembert (1743).

Le principe des puissances virtuelles est une synthèse de ces principes, ancrée dans un cadre beaucoup plus rigoureux et mathématique (on parle alors de « dualisation » et non plus de « perturbation » de l'équilibre ou du mouvement par un mouvement infinitésimal).



J. Bernoulli D'Alembert Lagrange

Minimisation de l'énergie potentielle L'énergie potentielle d'un système physique est l'énergie liée à une interaction, qui a le « potentiel » de se transformer en énergie cinétique.

Cette énergie est une fonction de ce système, dépendant des coordonnées d'espace, et éventuellement du temps, ayant la dimension d'une énergie et qui est associée à une force dite conservative dont l'expression s'en déduit par dérivation (ce qui veut dire au passage que dans les cas où toutes les forces ne sont pas conservatives, par exemple s'il y a du frottement, alors la méthode ne fonctionne pas et doit être « adaptée ».). La différence entre les énergies potentielles associées à deux points de l'espace est égale à l'opposé du travail de la force concernée pour aller d'un point à l'autre, et ce quel que soit le chemin utilisé.

Méthode des résidus pondérés Si l'on considère l'équation $A(u) = f, \forall x \in \Omega$ sur Ω , on appelle résidu des équations d'équilibre la quantité $R(x) = A(u) - f$. Aux bords, on a les conditions $B(u) = h, \forall x \in \Gamma = \partial\Omega$, et on appelle résidu des équations de bords la quantité $\bar{R}(x) = B(u) - h$. En écrivant le problème dans Ω et sur son contour Γ de manière intégrale, on retombe sur une formulation faible.

La méthode des résidus pondérés consiste à calculer les composantes de la solution approchée par la projection sur des couples de fonctions de projection, appelées fonctions de pondération.

Selon les fonctions de pondération on retrouve les méthodes de collocation par sous-domaine (fonctions constante sur chaque sous-domaine), de collocation par point (fonctions non nulles en un seul point), des fonctions splines (en ajoutant des conditions des raccordements des fonctions et des dérivées), de Galerkine (mêmes fonctions pour les fonctions de forme et de pondération).

Selon la nature du problème (donc selon la nature de l'opérateur A), l'égalité précédente (la formulation faible) peut être transformée (par exemple par intégration par parties), ce qui permet de faire apparaître une forme symétrique ayant la nature d'un produit scalaire (ou d'un produit hermitien dans le cas de fonctions complexes). Les deux fonctions u et v appartiennent alors à un même espace fonctionnel.

La formulation variationnelle d'un problème régi par des EDP correspond à une formulation faible de ces équations qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre d'un espace de Hilbert.

Il n'y a donc fondamentalement pas de différence entre formulation faible et formulation variationnelle, sauf que cette dernière appellation est généralement réservée à des cas « qui vont bien »... et de manière très pragmatique aux cas où la formulation faible peut être transformée en un problème de minimisation : on dit alors qu'il existe une fonctionnelle Π dont la variation $\delta\Pi$ correspond au problème faible, d'où le terme de formulation variationnelle (d'un point de vue physique, la fonctionnelle représente l'énergie du système, et le lieu où sa variation est nulle $\delta\Pi = 0$ l'état recherché).

Par ailleurs, d'autres contraintes sur la frontière de Ω peuvent (doivent) être imposées à u (et à v). Ce sont les conditions aux limites. Les conditions aux limites types ont été présentées au chapitre précédent sur les ED(P).

7.2 Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Le théorème le plus fondamental sera le théorème de Lax-Milgram, toutefois, nous aurons besoin du théorème de représentation de Riesz-Fréchet pour sa démonstration.

Pour tout vecteur y d'un espace de Hilbert H , la forme linéaire qui à x associe $\langle y, x \rangle$ est continue sur H (sa norme est égale à celle de y , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Le théorème de Riesz énonce la réciproque : toute forme linéaire continue sur H s'obtient de cette façon.

7.2.1 Cas des formes linéaires

Théorème 21 — Théorème de représentation de Riesz-Fréchet. Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in H'$ une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait $f(x) = \langle y, x \rangle$.

$$\exists ! y \in H, \quad \forall x \in H, \quad f(x) = \langle y, x \rangle \quad (7.3)$$

7.2.2 Extension aux formes bilinéaires

Si a est une forme bilinéaire continue sur un espace de Hilbert réel H (ou une forme sesquilinearéaire complexe continue sur un Hilbert complexe), alors il existe une unique application A de H dans H telle que, pour tout $(u, v) \in H \times H$ on ait $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$.

De plus, A est linéaire et continue, de norme égale à celle de a .

$$\exists ! A \in \mathcal{L}(H), \quad \forall (u, v) \in H \times H, \quad a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad (7.4)$$

7.3 Théorème de Lax-Milgram

Définition 40 — Continuité d'une forme linéaire. Une forme bilinéaire a est dite continue si elle vérifie :

$$\exists c > 0, \quad \forall (u, v) \in H^2, \quad |a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\| \quad (7.5)$$

Définition 41 — Coercivité d'une forme linéaire. Une forme bilinéaire a est dite coercitive si elle vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall u \in H, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad (7.6)$$

Théorème 22 — Théorème de Lax-Milgram. Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée $\|\cdot\|$.

Soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire (ou une forme sesquilinearéaire dans le cas complexe) continue et coercitive sur $H \times H$, et soit f une forme linéaire continue sur H (i.e. $f \in H'$).

Alors il existe un unique u dans H tel que l'équation $a(u, v) = f(v)$ soit vérifiée $\forall v \in H$.

$$\exists ! u \in H, \quad \forall v \in H, \quad a(u, v) = f(v) \quad (7.7)$$

Preuve La continuité et la coercivité de a permettent de dire que a définit un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_a$ dont la norme associée $\|\cdot\|_a$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. Le problème devient : trouver u tel que $\forall v \in H, (u, v)_a = f(v)$.

Or $f(v) = \langle f, v \rangle$ dans la dualité $H \times H'$ et le problème devient : trouver u tel que $\forall v \in H, (u, v)_a = \langle f, v \rangle$.

Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet permet de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution. \square

Une autre preuve consiste à étudier directement le problème de minimisation de la fonctionnelle $J = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$ (ce qui est une façon de montrer le théorème de Riesz) en considérant une suite minimisante et en montrant qu'elle est de Cauchy par l'identité du parallélogramme. \square

Ce théorème est l'un des fondements de la méthode des éléments finis dits « classiques » ou « en déplacement ». Dans le cas d'éléments finis plus « exotiques » tels que les éléments mixtes, hybrides, mixtes-hybrides et des multiplicateurs de Lagrange, on a besoin d'un peu plus... c'est ce que nous allons voir au paragraphe suivant.

Théorème 23 — Forme variationnelle du théorème du Lax-Milgram. Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$ pour tout v de E :

$$\exists! u \in H, \quad J(u) = \min_{v \in H} J(v) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \right) \quad (7.8)$$

Pour les problèmes issus de la mécanique des solides déformables, la quantité $\frac{1}{2}a(v, v)$ représente l'énergie de déformation du solide associé à un « déplacement virtuel » v , et $f(v)$ l'énergie potentielle des forces extérieures appliquées au solide pour le même déplacement virtuel v .

7.4 Théorème de Babuška et condition inf-sup

Il s'agit d'une situation introduite en 1971/72 par Babuška.

Le but est d'étendre le théorème de Lax-Milgram aux problèmes non nécessairement coercitifs (i.e. la forme bilinéaire n'est plus supposée coercitive).

Théorème 24 — Théorème de Babuška. Soient H et M deux espaces de Hilbert. Soient $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $H \times M$ et $f(\cdot)$ une forme linéaire continue sur M . On s'intéresse au problème : Existe-t-il $u \in H$ tel que $a(u, v) = f(v), \forall v \in M$?

Si $a(\cdot, \cdot)$ vérifie :

$$\begin{cases} \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} \sup_{\substack{v \in M \\ \|v\|_M=1}} a(u, v) > 0 \\ \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|_H=1}} a(u, v) > 0, \quad \forall v \in M \setminus \{0\} \end{cases} \quad (7.9)$$

Alors $\forall f \in M'$, le problème admet une unique solution u .

La première condition s'écrit aussi :

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{\substack{v \in M \\ \|v\|_M=1}} a(u, v) \geq \beta \|u\|_H, \quad \forall u \in H \quad (7.10)$$

Alors que la seconde s'écrit :

$$\forall v \in M \setminus \{0\}, \quad \exists u \in H, \quad a(u, v) > 0 \quad (7.11)$$

La preuve du théorème de Babuška revient à montrer que l'opérateur A associé à la forme bilinéaire a est un homéomorphisme.

7.5 Théorèmes de Brezzi et condition BBL

Il s'agit d'étendre le théorème de Lax-Milgram au cas où, cette fois, le problème n'est plus écrit à l'aide d'une seule variable (u jusqu'à présent), mais à l'aide de plusieurs variables. Dans ce cas, on parle de formulation mixte.

Théorème 25 — Théorème de Brezzi (1974). Considérons le problème variationnel mixte suivant : Trouver (u, λ) dans $H \times M$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle & \forall v \in H, \\ b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle & \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (7.12)$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $a(\cdot, \cdot)$ est continue ;
- $a(\cdot, \cdot)$ est coercitive sur V ou V -elliptique (uniquement sur V et pas sur H tout entier) (sur $\ker B$) :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V = \{v \in H; b(v, \mu) = 0, \forall \mu \in M\} \quad (7.13)$$

- $b(\cdot, \cdot)$ est continue ;
- $b(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition inf-sup suivante :

$$\inf_{\substack{\mu \in M \\ \|\mu\|_M=1}} \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H=1}} b(v, \mu) > 0 \quad (7.14)$$

Alors, $\forall (f, g) \in H' \times M'$, le problème précédent possède une unique solution $(u, \lambda) \in H \times M$.

On dit condition inf-sup ou condition de Brezzi, ou condition de Babuška-Brezzi-Ladyjenskaïa, ou condition BBL.

La condition de V -ellipticité s'écrit également :

$$\inf_{v \in V \setminus \{0\}} a(v, v) > 0 \quad (7.15)$$

et la condition BBL :

$$\exists \beta > 0, \quad \sup_{v \in H} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_H} \geq \beta \|\mu\|_M, \quad \forall \mu \in M \quad (7.16)$$

On va écrire la démarche de la preuve, car elle est typique de la résolution de ce genre de problème.

On va écrire la démarche de la démonstration car elle est typique de la résolution de ce genre de problème.

Preuve : On va se servir de $H = V \oplus V^\perp$ avec $V = \ker B$ où évidemment B est l'opérateur défini de H dans M' tel que : $\langle Bu, \mu \rangle_M = b(u, \mu)$, $\forall \mu \in M$. Pour le produit scalaire induit, V et V^\perp sont des Hilbert.

La solution cherchée est $u = u_0 + u_\perp$.

Les inconnues seront donc u_0 , u_\perp et λ .

On a les équations pour v_0 , v_\perp et μ . Pour v_\perp l'équation est :

$$\begin{cases} a(u_\perp, v_\perp) + a(u_0, v_\perp) + b(v_\perp, \lambda) = \langle f, v_\perp \rangle & \forall v_\perp \in V^\perp \\ a(u_\perp, v_0) + a(u_0, v_0) + b(v_0, \lambda) = \langle f, v_0 \rangle & \forall v_0 \in V \\ b(u_\perp, \mu) + b(u_0, \mu) = \langle g, \mu \rangle & \forall \mu \in M \end{cases} \quad (7.17)$$

Or dans la seconde équation, $b(v_0, \lambda) = 0$ car $v_0 \in \ker b$ et dans l'équation 3, $b(u_0, \mu) = 0$ car $u_0 \in V$.

On est ramené à 3 sous-problèmes :

- sous-problème 1 : chercher $u_\perp \in V^\perp$ tel que $b(u_\perp, \mu) = g(\mu)$, $\forall \mu \in M$, ce qui est effectivement le cas d'après le théorème de Babuška ;
- sous-problème 2 : chercher $u_0 \in V$ tel que $a(u_0, v_0) = \langle f, v_0 \rangle - a(u_\perp, v_0)$, $\forall v_0 \in V$. Il suffit de vérifier que le second membre définit un opérateur tel que l'on a bien les hypothèses du théorème de Lax-Milgram ;

- sous-problème 3 : chercher $\lambda \in M$ tel que $b(v_\perp, \lambda) = \langle f, v_\perp \rangle - a(u, v_\perp), \forall v_\perp \in V^\perp$. Il faut un peu plus travailler pour vérifier que l'on est dans le cas d'application du théorème de Babuška, mais ça se fait (une quinzaine de lignes en détail).

On peut remplacer les conditions de V -ellipticité sur $a(\cdot, \cdot)$ par des conditions de Babuška.

Théorème 26 — Théorème généralisé de Brezzi. Considérons le problème variationnel mixte suivant : Trouver (u, λ) dans $H \times M$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H, \\ b(u, \mu) &= \langle g, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (7.18)$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $a(\cdot, \cdot)$ est continue ;
- $a(\cdot, \cdot)$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que : } \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \forall u \in V = \ker B \quad (7.19)$$

$$\forall v \in V \setminus \{0\}, \exists u \in V, a(u, v) \neq 0 \text{ ou de manière équivalente } \forall v \in V \setminus \{0\}, \sup_u a(u, v) > 0$$

- $b(\cdot, \cdot)$ est continue ;
- $b(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition inf-sup suivante :

$$\inf_{\substack{\mu \in M \\ \|\mu\|_M=1}} \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|_H=1}} b(v, \mu) > 0 \quad (7.20)$$

Alors, $\forall (f, g) \in H' \times M'$, le problème précédent possède une unique solution $(u, \lambda) \in H \times M$.

Pour vérifier la condition LBB, il est souvent plus simple de vérifier le critère suivant : La condition inf-sup sur $b(\cdot, \cdot)$ est équivalente à :

$$\forall \mu \in M, \exists v \in H \text{ (uniquement dans } V^\perp \text{) tel que : } b(v, \mu) = \|\mu\|^2 \text{ et } \|v\| \leq \frac{1}{\beta} \|\mu\| \quad (7.21)$$

7.6 Multiplicateurs de Lagrange

Nous avons déjà présenté les multiplicateurs de Lagrange d'un point de vue pratique au chapitre précédent. Regardons maintenant l'aspect mathématique.

Dans les paragraphes 7.3 et 7.4 sur les théorèmes de Lax-Milgram et de Babuška, nous avons traité le cas d'un problème décrit par un seul champ inconnu. Dans le paragraphe 7.5 sur le théorème de Brezzi, nous avons traité le cas d'un problème formulé avec deux champs inconnus (mais on pourrait l'étendre à autant de champs que nécessaire). Dans ce paragraphe, nous allons traiter un cas un peu « au milieu » : par exemple deux domaines possédant chacun leur formulation, mais couplés. Il est donc nécessaire dans ce cas d'introduire une « équation de couplage » entre ces formulations. C'est ce que l'on se propose de réaliser à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

Soient H et M deux Hilbert, $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique et continue, $b(\cdot, \cdot) : H \times M \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue, $f \in H'$ et $g \in M'$ deux formes linéaires. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ les produits de dualité entre H et H' et entre M et M' respectivement.

On considère le problème suivant : Trouver $u \in H$ tel que $a(u, v) = f(v), \forall v \in H$ et vérifiant les contraintes supplémentaires $b(v, \mu) = g(\mu), \forall \mu \in M$.

Ce problème est équivalent à :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que } J(u) = \min\{J(v), v \in H \text{ et } b(v, \mu) = \langle g, \mu \rangle_M, \mu \in M\} \\ \text{avec } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_H \end{aligned} \quad (7.22)$$

On parle de problème de minimisation sous contrainte.

On introduit un Lagrangien : $\mathcal{L}(v, \mu) = J(v) + b(v, \mu) - \langle g, \mu \rangle_M$. Évidemment, $\forall \mu, \mathcal{L}(v, \mu) = J(v)$ si v vérifie les contraintes. L'idée est de considérer $\min_{v \in H} \mathcal{L}(v, \cdot)$. La question devient alors : existe-t-il un multiplicateur particulier $\lambda \in M$ tel que $\min_{v \in H} \mathcal{L}(v, \lambda)$ soit égale à $u \in H$ solution de (7.22) ? λ est parfois également appelé pénalité ou fonction de pénalisation.

En notant que :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u, \lambda), v \right\rangle_H = \frac{d}{dt} \mathcal{L}(y + tv, \lambda) |_{t=0} = a(u, v) - \langle f, v \rangle_H + b(v, \lambda) \quad (7.23)$$

Alors $(u, \lambda) \in H \times M$ est solution du problème mixte (7.12) :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H, \\ b(u, \mu) &= \langle g, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (7.24)$$

et on se retrouve dans le cadre du théorème de Brezzi au paragraphe précédent 7.5.

et on se retrouve dans le cadre du théorème de Brezzi au paragraphe 7.5.

De plus, si $a(v, v) \geq 0, \forall v \in H$, alors (u, λ) est solution de (7.12) correspond à (u, λ) est un point-selle de \mathcal{L} , i.e. :

$$\forall \mu \in M, \mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda), \forall v \in H \quad (7.25)$$

Remarquons enfin que si l'on note :

$$A((u, \lambda), (v, \mu)) = a(u, v) + b(v, \lambda) + b(u, \mu) \quad (7.26)$$

$$L((v, \mu)) = f(v) + g(\mu) \quad (7.27)$$

et que l'on pose les nouvelles variables $\mathcal{U} = (u, \lambda)$ et $\mathcal{V} = (v, \mu)$, alors on revient à un problème de type Lax-Milgram : trouver $\mathcal{U} \in H \times M$ tel que pour tout $\mathcal{V} \in H \times M, A(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = L(\mathcal{V})$.

Histoire

Comme nous l'avons déjà mentionné, Lagrange est le fondateur du calcul des variations avec Euler.

Il est également le fondateur de la théorie des formes quadratiques, et démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés (connu aussi sous le nom de théorème des quatre carrés de Lagrange). On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) en 1772.



Lagrange

En mécanique des fluides, il introduit le concept de potentiel de vitesse en 1781, bien en avance sur son temps. Il démontre que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduit, en plus, deux notions fondamentales : le concept de la fonction de courant, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond. Rétrospectivement, cet ouvrage marqua une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne.

Chapitre 8

Problèmes physiques : formulations faibles et variationnelles

Résumé — Nous allons maintenant reprendre les problèmes types exposés sous forme forte dans le chapitre sur les ED et EDP, pour leur appliquer les méthodes du chapitre précédent. Nous obtiendrons alors les formulations faibles et variationnelles des mêmes problèmes.

8.1 Phénomènes de propagation et de diffusion

8.1.1 Équations de Laplace et Poisson

Sur ce premier exemple, nous détaillerons plus la démarche et les étapes que dans la suite des cas présentés.

Laplacien de Dirichlet

On considère l'équation de Poisson (Laplace si $f = 0$) avec les conditions aux limites de Dirichlet, i.e. le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (8.1)$$

Multiplier par une fonction test v et intégrer par parties (ou utiliser la formule de Green) conduit à :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} f v \quad (8.2)$$

Comme, rappelons le, le but est de faire en sorte que u et v jouent un rôle symétrique, on veut donc qu'ils aient même régularité et mêmes conditions aux limites. La régularité nécessaire est u et v sont $H^1(\Omega)$, et la prise en compte des CL conduit finalement à chercher u et v dans $H_0^1(\Omega)$.

Le problème est donc :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad (8.3)$$

dont le second membre n'a de sens que si $f \in L^2(\Omega)$, ce qui sera supposé. Notons que le problème est également bien défini dans le cas où $f \in H^{-1}(\Omega)$, car $v \in H_0^1(\Omega)$.

Avec cette formulation, le théorème de Lax-Milgram permet de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution.

Équivalence des solutions Nous avons construit un problème variationnel dont on sait qu'il a une unique solution. Une question naturelle est alors de savoir en quel sens on a résolu le problème initial.

Il est facile de voir que l'équation $-\Delta u = f$ est vérifiée au sens des distributions. Or $f \in L^2(\Omega)$, donc $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, et l'égalité a donc lieu presque partout. De la même manière, on a $u = 0$ presque partout sur Γ (pour la mesure surfacique sur Γ).

On comprend pourquoi, parmi différentes formulations faibles, on en retient une plutôt qu'une autre : afin d'obtenir une formulation variationnelle à partir de laquelle on raisonne rigoureusement, i.e. existence et unicité du résultat, puis retour au problème initial.

Une autre formulation variationnelle Afin d'illustrer la remarque précédente, construisons une autre formulation variationnelle du même problème. Pour cela, intégrons une nouvelle fois par parties, afin de chercher une solution encore plus faible. Le problème devient :

$$\text{Trouver } u \in L^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in C_c^\infty(\Omega), \quad - \int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\Omega} f v \quad (8.4)$$

Tout d'abord, on peut remarquer que l'on ne peut plus appliquer Lax-Milgram. Ensuite, rappelons une remarque déjà faite : plus on cherche des solutions en un sens faible, plus il est facile de prouver l'existence de solutions, mais plus il est difficile d'obtenir l'unicité de la solution.

En travaillant dans $L^1(\Omega)$, on ne pourrait pas, par exemple, donner de sens à $u = 0$ sur Γ .

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'intérêt des problèmes symétriques, c'est qu'ils peuvent s'interpréter en terme de minimisation.

La solution du problème initial est également la fonction u qui réalise le minimum de :

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f u \quad (8.5)$$

Laplacien de Dirichlet relevé

On considère l'équation de Laplace-Poisson avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (8.6)$$

où $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ est une fonction donnée.

L'idée est évidemment de se ramener au cas précédent en réalisant un relèvement d'espace.

Pour cela, on considère la fonction $v = u - \bar{u}$ où $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ est un relèvement de la condition au bord, i.e. tel que $\bar{u} = g$ sur Γ .

On utilise ensuite la surjectivité de l'application trace, γ_0 (ce qui devrait malgré tout rester compréhensible bien que la trace ait été définie de manière « un peu légère » au chapitre sur les espaces de Sobolev).

La formulation variationnelle du problème est :

$$\text{Trouver } u \in \{v \in H^1(\Omega), v = g \text{ sur } \Gamma\} \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad (8.7)$$

Laplacien de Neumann

On considère l'équation de Laplace-Poisson avec les conditions aux limites de Neumann, i.e. le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (8.8)$$

On obtient immédiatement la formulation variationnelle suivante :

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma} gv \quad (8.9)$$

qui nécessite $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$.

On peut remarquer qu'ici une simple intégration par parties a suffit à intégrer les conditions aux limites dans la formulation variationnelle, i.e. les CL n'ont pas eu à être introduites dans l'espace fonctionnel pour u , contrairement au cas du Laplacien de Dirichlet (en même temps, demander à une fonction de $H^1(\Omega)$ d'avoir une dérivée normale égale à une fonction g au bord n'a pas de sens).

Lorsque les conditions aux limites s'introduisent d'elles-mêmes comme dans le cas du Laplacien de Neumann, on dit que l'on tient compte des CL de manière naturelle. Lorsqu'il faut les inclure, on dit qu'on en tient compte de manière essentielle.

Il faut remarquer que le problème variationnel ne peut avoir de solution que si f et g vérifient une condition de compatibilité, i.e. si :

$$\int_{\Omega} f + \int_{\Gamma} g = 0 \quad (8.10)$$

Il faut aussi remarquer que si u est une solution du problème, alors $u + c$, où c est une constante, est également solution. On ne peut donc pas espérer prouver qu'il existe une unique solution au problème sans restreindre l'espace fonctionnel pour u . Pour éliminer l'indétermination due à cette constante additive, on introduit, par exemple, $V = \{u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u = 0\}$ et on pose le problème sous la forme :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma} gv \quad (8.11)$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on montre que le problème est bien coercif et donc qu'il admet une unique solution.

Remarquons que si la condition de compatibilité n'est pas vérifiée, alors la solution de la dernière formulation résoud bien le problème initial avec un f ou un g modifié d'une constante additive, de manière à vérifier la condition de compatibilité.

Il y aurait lieu à quelques discussions sur l'interprétation des résultats, mais celle-ci serait beaucoup plus abstraite que dans le cas du Laplacien de Dirichlet. Le lecteur désireux de rentrer (à raison) dans ce genre de détail trouvera aisément un cours de M2 sur le sujet. Cela dépasse le cadre que nous nous sommes fixé dans ce document.

Laplacien avec conditions mixtes

On considère l'équation de Laplace-Poisson avec les conditions aux limites mixtes suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (8.12)$$

On obtient la formulation variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \alpha uv = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma} gv \quad (8.13)$$

8.1.2 Équation d'onde

Rappelons que l'équation des ondes correspond à un problème d'évolution hyperbolique linéaire. Différentes conditions aux limites peuvent être imposées. Dans le cadre de ce document, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'acoustique. Ce paragraphe est donc traité un peu plus loin dans le document.

8.1.3 Équation de la chaleur

Après avoir présenté le problème elliptique du Laplacien, intéressons-nous maintenant au cas parabolique de l'équation de la chaleur. Pour cela, considérons le problème suivant : Trouver $u(x, t)$ tel que :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } [0, T] \times \Omega \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{sur } [0, T] \times \Gamma \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (8.14)$$

On opère comme précédemment. Toutefois, nous faisons jouer à la variable de temps t et la variable d'espace x des rôles différents : on considère la fonction $u(t, x)$ comme une fonction du temps, à valeur dans un espace fonctionnel en x , et on prend comme fonctions tests des fonctions qui dépendent seulement de la variable x . On obtient alors facilement la formulation variationnelle suivante :

$$\text{Trouver } u \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} fv \quad (8.15)$$

Pour donner un sens à cette formulation variationnelle, une certaine régularité de u est requise :

$$u \in V = C^0([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_0^1(\Omega)) \quad (8.16)$$

L'espace $C^0([0, T], L^2(\Omega))$ est l'espace des fonctions $v(t, x)$ telles que pour tout t , $v(t, \cdot)$ est une fonction de $L^2(\Omega)$; l'espace $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ est l'espace des fonctions $v(t, x)$ telles que pour presque tout t , $v(t, \cdot)$ est une fonction de $H_0^1(\Omega)$ et $\int_0^T \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 < \infty$. Le premier est un Banach, le second, un Hilbert.

La formulation variationnelle est donc :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } u(0, \cdot) = u_0 \text{ et tel que } \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} fv \quad (8.17)$$

Pour résoudre le problème, il faut utiliser une méthode numérique. On montre l'existence puis l'unicité par les estimateurs à priori. Nous détaillerons cela plus loin.

8.2 Mécanique des fluides

Pour la présentation des formulations faibles, nous commencerons par le cas de l'équation de Stokes avant de passer à celui de l'équation de Navier-Stokes (afin de nous permettre d'introduire les notations progressivement).

8.2.1 Équation de Stokes

Si l'on considère la problème de Stokes pour un fluide incompressible avec condition de Dirichlet, il nous faut résoudre le système :

$$\begin{cases} -\eta \Delta u + \nabla p = \rho f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (8.18)$$

La formulation mixte qui en découle est :

$$\eta \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v = \int_{\Omega} f \cdot v \quad (8.19)$$

On introduit les formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega)^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto a(u, v) &= \eta \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \end{aligned} \tag{8.20}$$

et

$$\begin{aligned} b : H_0^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, q) \mapsto b(u, q) &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} v) q \end{aligned} \tag{8.21}$$

On introduit également l'espace $L_0^2(\Omega)$ des fonction $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q = 0 \right\} \tag{8.22}$$

La formulation variationnelle mixte (vitesse/pression) est alors : Trouver $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = (f, v) & \forall v \in H_0^1(\Omega)^n \\ b(u, q) = 0 & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{8.23}$$

Notons que dans le seconde équation, la fonction test q pourrait de manière équivalente être cherchée dans $L^2(\Omega)$ (pas besoin de la moyenne nulle).

Par contre, il est important de chercher $p \in L_0^2(\Omega)$. C'est cette condition de pression nulle qui assure l'unicité de la pression (comme dans le cas précédent du Laplacien de Neumann).

Il est possible de formuler ce problème de manière non mixte, i.e. sous une forme compatible avec Lax-Milgram. Considérons $V = \{u \in H_0^1(\Omega)^n / \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega\}$. Alors u (la vitesse) est solution du problème :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = (f, v), \forall v \in V.$$

D'ailleurs c'est cette formulation qui permet (a est continue et coercitive sur V) de conclure à l'existence et à l'unicité de u . De là, il ne reste plus qu'à démontrer la même chose pour p dans la formulation mixte.

8.2.2 Équation de Navier-Stokes

Considérons le problème de Navier-Stokes, pour un fluide incompressible, et soumis à des conditions initiales en temps et sur le contour $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \eta \Delta u + \nabla p = \rho f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{8.24}$$

La fonction $g = g(x, t)$ dans la condition de type Dirichlet sur le bord du domaine doit être à flux nul sur Γ , i.e. on suppose que :

$$\int_{\Gamma} g \cdot n = 0 \tag{8.25}$$

avec n la normale extérieure à Γ . Cette condition est nécessaire pour que le problème de Navier-Stokes admette une solution.

Introduisons également les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach B . Pour $q \geq 1$, on a :

$$L^q(0, T; B) = \left\{ v : [0, T] \rightarrow B; v \text{ est mesurable et } \int_0^T \|v(t)\|_B^q dt < +\infty \right\} \quad (8.26)$$

Ces espaces sont munis de la norme :

$$\|u\|_{L^q(0, T; B)} = \left(\int_{\Omega} \|u(t)\|_B^q dt \right)^{1/q} \quad (8.27)$$

Notons que ces espaces ont été « présentés » au paragraphe précédent sur l'équation de la chaleur. La notation était un peu différente mais il s'agit bien des mêmes espaces. Nous avons voulu profiter de ces exemples pour introduire ces deux notations, différentes mais désignant bien la même chose.

Posons $X = H_0^1(\Omega)^n$ et $Y = L_0^2(\Omega)^n$. La formulation variationnelle mixte des équations de Navier-Stokes s'écrit : Soit $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)^n$. Trouver :

$$u \in W(0, T) = \left\{ v \in L^2(0, T; X), \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; X') \right\} \quad (8.28)$$

et $p \in L^2(0, T; Y)$, tels que p.p. $t \in (0, T)$, on a :

$$\begin{cases} \langle \frac{du}{dt}(t), v \rangle_{X', X} + a(u(t), v) + c(u(t), u(t), v) + b(v, p(t)) = (f(t), v) & \forall v \in X \\ b(u(t), q) = 0 & \forall q \in Y \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (8.29)$$

où $c : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme trilinéaire définie par :

$$c(w, z, v) = \int_{\Omega} [(w \cdot \nabla) z] \cdot v = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_j \frac{\partial z_i}{\partial x_j} v_i \quad (8.30)$$

Cette forme trilinéaire a certaines propriétés, par exemple lorsque l'on permute des termes où lorsque l'on considère que certaines variables sont à divergence nulle...

Pour des raisons de stabilité, la forme c est remplacée par la forme \tilde{c} définie par :

$$\tilde{c} = \frac{1}{2} (c(w, z, v) - c(w, v, z)) \quad (8.31)$$

qui est antisymétrique et possède par conséquent la propriété $\tilde{c}(w, z, z) = 0, \forall w, x, z \in X$.

Nous ne rentrons pas plus avant dans la méthode, car il faudrait alors parler dès à présent du schéma numérique associé, ce qui sera fait plus tard.

8.2.3 Équation d'Euler

Nous avons déjà vu que sans le cas d'un nombre de Reynolds élevé, alors le terme de convection non-linéaire $(u \cdot \nabla) u$ devient prépondérant, et on obtient alors l'équation d'Euler. Pour un fluide incompressible, le problème à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = \rho f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (8.32)$$

On considérera qu'il s'agit d'un cas simplifié de Navier-Stokes, et on le traitera comme tel.

8.3 Équations de la mécanique des milieux continus des solides

8.3.1 Formulation générale

La formulation la plus générale du problème est :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = \rho \ddot{u} + \mu \dot{u} & \text{dans } \Omega \quad \text{équation de la dynamique} \\ \sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_{th}) & \text{dans } \Omega \quad \text{loi de comportement} \end{cases} \quad (8.33)$$

à laquelle il est nécessaire d'ajouter les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u = \bar{u} & \text{sur } \Gamma_D \quad \text{déplacement imposé} \\ \sigma \cdot n(x) = g_N & \text{sur } \Gamma_N \quad \text{condition sur le bord} \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 & \text{condition initiale en vitesse} \\ u(t=0) = u_0 & \text{condition initiale en déplacement} \end{cases} \quad (8.34)$$

avec comme d'habitude, Γ_D et Γ_N une partition de la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ du domaine Ω .

Pour obtenir une formulation faible, on applique les mêmes recettes que ci-dessus. Dans un premier temps, on ne traite que l'équation de la dynamique, la loi de comportement n'étant là finalement que pour « simplifier » l'équation en permettant de lier des variables entre elles. Ainsi, la formulation faible générale est :

$$\int_{\Omega} \rho v \ddot{u} + \int_{\Omega} \mu v \dot{u} + \int_{\Omega} \varepsilon : \sigma - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_N} g_N v = 0, \quad \forall v \text{ tel que } v = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_D \quad (8.35)$$

Nous sommes restés très prudents sur l'appartenance des différentes grandeurs à des espaces, car cela dépend du choix des variables.

8.3.2 Choix des variables

Dans la formulation variationnelle présentée, on ne manquera pas de remarquer que les variables sont : les déplacements (et leurs dérivées temporelles : vitesse et accélération), les déformations et les contraintes.

Il est possible de choisir de conserver toutes ces variables, i.e. d'avoir un problème dépendant de trois champs inconnus : u , ε et σ . Une telle formulation est qualifiée de mixte. On qualifie d'ailleurs de mixte, toute formulation ayant plus d'un seul champ inconnu.

Comme on connaît des relations entre les différents champs (relation déplacement / déformation et relation déformation / contrainte), il est possible d'obtenir des formulations ayant deux ou même un seul champ inconnu, comme nous l'avons déjà vu au chapitre précédent (théorèmes de Brezzi).

Formulation classique en déplacements

L'intérêt de réduire le nombre de champ inconnu est évident. Faut-il donc opter définitivement pour une formulation à un seul champ ? Ce n'est pas évident. En effet, utiliser une formulation à k champs parmi n se traduira par n'obtenir que ces k champs comme solution directe du système. Les $n - k$ champs manquant doivent alors être obtenus à partir des k champs choisis... et cela peut poser certains problèmes, dont nous parlerons plus tard.

Il est à noter que la formulation dite en déplacements, également qualifiée de classique, est la plus utilisée. Comme son nom l'indique, elle ne comporte que le champ de déplacement comme inconnu. Il suffit de considérer, dans la formulation précédente, que les contraintes sont obtenues à partir des déformations, via la loi de comportement, et que les déformations sont obtenues à partir des déplacements par la relation idoine (en petits ou grands déplacements).

Dans la formulation en déplacement, on suppose que les relations liant les déformations aux déplacements (opérateur de dérivation en petites ou grandes déformations) et les contraintes

aux déplacements (en fait les contraintes aux déformations via la loi de comportement, puis les déformations aux déplacements comme ci-avant) sont connues et vérifiées :

$$\int_{\Omega} \rho v \ddot{u} + \int_{\Omega} \mu v \dot{u} + \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \sigma(u) - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_N} g_N v = 0, \quad \forall v \text{ tel que } v = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_D \quad (8.36)$$

De manière plus explicite, si on note $\varepsilon = \mathcal{L}u$ la relation entre déformations et déplacements et $\sigma = H\varepsilon = H\mathcal{L}u$ la relation entre contraintes et déplacement, alors il vient :

$$\int_{\Omega} \rho v \ddot{u} + \int_{\Omega} \mu v \dot{u} + \int_{\Omega} \mathcal{L}v : H\mathcal{L}u - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_N} g_N v = 0, \quad \forall v \text{ tel que } v = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_D \quad (8.37)$$

où n'apparaissent effectivement plus que les déplacements comme inconnues.

On se contente toutefois généralement d'écrire $\varepsilon(u)$ et $\sigma(u)$ pour dire que l'inconnue est bien u , ce qui évite d'alourdir l'écriture.

Cette formulation « en déplacement » correspond au problème de minimisation de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale que l'on appelle également fonctionnelle primale :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \sigma(u) - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_N} g_N v \quad (8.38)$$

où le champ de déplacements doit vérifier $v = \bar{u}$ sur Γ_D . Les relations entre déformations et déplacements et entre contraintes et déplacements sont supposées vérifiées de manière implicite dans Ω .

Illustration : formulation en déplacements de la statique des matériaux isotropes

En se plaçant dans le cas statique, et en écrivant « en déplacements », i.e. en supprimant le champ de contrainte des inconnues (et en utilisant, au passage, la symétrie de σ), la formulation variationnelle précédente devient :

$$\int_{\Omega} H_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_N v, \quad \forall v \in H_D^1(\Omega) \quad (8.39)$$

Notons que pour prouver la coercitivité de la forme bilinéaire, il faut recourir à l'inégalité de Korn, qui a été présentée précédemment à la fin de la partie 1.

Si en plus le matériau est isotrope, cette expression se simplifie en :

$$\int_{\Omega} \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) + 2\mu \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g_N v, \quad \forall v \in H_D^1(\Omega) \quad (8.40)$$

que l'on peut voir comme un problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$J(u) = \int_{\Omega} \lambda (\operatorname{div} u)^2 + 2\mu \sum_{ij} \varepsilon_{ij}(u)^2 - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_N} g_N v \quad (8.41)$$

D'une manière générale, toute formulation faible, quelque soit le nombre de champs inconnus, s'écrit en mécanique sous la forme de minimisation d'une fonctionnelle, dont on sait trouver la signification physique.

Formulations mixte et hybride

La formulation la plus générale est celle comportant les trois champs de déplacements u , de déformations ε , et de contraintes σ comme inconnues. Cette formulation mixte est connue sous le nom de principe de Hu-Washizu (1975). Sous forme variationnelle, elle s'écrit :

$$J(u, \varepsilon, \sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon : \sigma + \int_{\Omega} (\nabla u) \sigma - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_N} g_N v - \int_{\Gamma_D} (u - \bar{u})(\sigma(v) \cdot n) \quad (8.42)$$

et ne comporte aucune condition (puisque elles sont toutes formellement présente dans la formulation).

Il est possible d'obtenir une formulation n'ayant que le champ de contraintes comme inconnue. Il s'agit de la fonctionnelle duale :

$$J(\sigma) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma - \int_{\Omega} \sigma(v) S \sigma_0 + \int_{\Gamma_D} \bar{u} \sigma(v) \cdot n \quad (8.43)$$

où le champ de contrainte doit vérifier les conditions aux limites $\operatorname{div} \sigma + f = 0$ sur Ω et $\sigma n = g_N$ sur Γ_N . S désigne la loi de comportement donnée sous forme inverse (i.e. sous forme de souplesse, i.e. $S = H^{-1}$).

L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange permet de construire des fonctionnelles multi-champs. La fonctionnelle de l'énergie complémentaire est la suivante :

$$J(\sigma, \lambda, \mu) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma - \int_{\Omega} \lambda (\operatorname{div} \sigma + f) + \int_{\Gamma_D} \bar{u} \sigma \cdot n + \int_{\Gamma_N} \mu (\sigma \cdot n - g_N) \quad (8.44)$$

où λ et μ sont les multiplicateurs de Lagrange. Les multiplicateurs de Lagrange présentés ci-dessus ont une signification physique (que l'on trouve en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle). En remplaçant les multiplicateurs par les quantités qu'ils représentent, i.e. en remplaçant λ par u dans Ω et μ par u sur Γ_N , on obtient la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner sous sa première forme :

$$J(u, \sigma) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f) u + \int_{\Gamma_D} \bar{u} \sigma \cdot n - \int_{\Gamma_N} (\sigma \cdot n - g_N) v \quad (8.45)$$

En notant :

$$a(\sigma, \sigma) = -\int_{\Omega} \sigma S \sigma \quad (8.46)$$

$$b(\sigma, u) = -\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u + \int_{\Gamma_D} \bar{u} \sigma \cdot n + \int_{\Gamma_N} u \sigma \cdot n \quad (8.47)$$

$$L(u) = \int_{\Omega} f u + \int_{\Gamma_N} g_N v \quad (8.48)$$

alors, la première fonctionnelle de Reissner se met sous la forme :

$$J(\sigma, u) = \frac{1}{2} a(\sigma, \sigma) + b(\sigma, u) - L(u) \quad (8.49)$$

En effectuant une intégration par parties du terme mixte $b(\sigma, u)$, on obtient la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner sous sa deuxième forme :

$$J(u, \sigma) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma + \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon - \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma_N} g_N v \quad (8.50)$$

où le champ de déplacement doit vérifier $v = \bar{u}$ sur Γ_D , et où la relation entre déformations et déplacement est supposée vérifiée dans Ω .

Cette fonctionnelle d'Hellinger-Reissner est également appelée fonctionnelle mixte. L'adjectif hybride peut être adjoint à l'une quelconque des formulations précédentes si le ou les champs sont interpolés d'une part sur tout le domaine Ω et d'autre part sur tout ou partie du contour Γ de façon indépendante.

Il est possible de modifier la fonctionnelle de l'énergie complémentaire de plusieurs manière. Nous ne présentons que celle conduisant à ce que l'on appelle souvent fonctionnelle hybride et qui est la fonctionnelle de Pian et Tong (1978) :

$$J(u, \varepsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma + \int_{\Gamma} u \sigma(v) \cdot n - \int_{\Gamma_N} g_N v \quad (8.51)$$

Sa variation :

$$\delta J(u, \varepsilon) = - \int_{\Omega} \sigma S \sigma + \int_{\Gamma} u \sigma(v) \cdot n + v \sigma(u) \cdot n - \int_{\Gamma_N} g_N v \quad (8.52)$$

a l'avantage de ne pas comporter de dérivée.

Au paragraphe 11.1, nous reprendrons ces formulations pour les exprimer, peut-être de manière plus « explicite » pour le lecteur sous forme matricielle.

8.4 Équations de l'acoustique

On s'intéresse à la propagation et à la réflexion d'ondes de pression dans un fluide parfait non pesant. On supposera le mouvement harmonique autour d'un état moyen (ambiance) au repos (ce qui est le lien « physique » avec l'introduction de l'espace $L_0^2(\Omega)$ présenté pour l'équation de Stokes).

On rappelle que l'équation des ondes acoustiques de célérité c dans un milieu est :

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \ddot{p}' = 0 \quad (8.53)$$

8.4.1 Équation de Helmholtz

Il s'agit de la formulation générale d'un problème acoustique linéaire. Elle est obtenue en cherchant la solution harmonique de l'équation des ondes, i.e. une solution sous la forme : $p'(x, y, z, t) = p(x, y, z) e^{i\omega t}$. (Au passage, les physiciens utilisent plutôt j au lieu de i pour gagner en clarté sans doute... comme s'ils passaient leur temps à parler d'intensité !)

On obtient alors l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (8.54)$$

où k est le nombre d'onde : $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

8.4.2 Conditions aux limites en acoustique

Soit $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine concerné. On considère que Γ est partitionné en trois zones (i.e. dont l'union vaut Γ et dont aucune n'intersecte les autres) qui portent chacune une condition aux limites différente : Γ_D de Dirichlet, Γ_N de Neumann et Γ_R de Robin. On a donc :

- Dirichlet : $p = \bar{p}$ sur Γ_D ;
- Neumann : $\partial_n p = -i\rho\omega\bar{V}_n$ sur Γ_N ;
- Robin : $\partial_n p = -i\rho\omega A_n p$ sur Γ_R .

Condition de Neumann \bar{V}_n est la valeur imposée de la composante normale de la vitesse. Cette condition limite modélise la vibration d'un panneau, ce qui en fait la condition la plus souvent utilisée lorsque l'on a un couplage faible entre la structure et le fluide. On effectue alors une étude vibratoire de la structure, puis grâce à celle-ci une étude acoustique du fluide sans se préoccuper des interactions fluide-structure.

Condition de Robin A_n est appelé coefficient d'admittance, il vaut l'inverse de l'impédance Z_n : $A_n \cdot Z_n = 1$. Physiquement, ce coefficient représente l'absorption de l'onde par le matériau environnant dont la frontière est modélisée par Γ_R .

8.4.3 Formulation faible

En notant $H_D^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega), p = \bar{p} \text{ sur } \Gamma_D\}$ et $H_D^0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$, les espaces qui sont des sous-espaces de $H^1(\Omega)$, on trouve finalement :

$$a(p, \tilde{w}) = b(\tilde{w}), \quad \forall w \in H_D^0(\Omega) \quad (8.55)$$

avec $\tilde{\cdot}$ la conjugaison complexe, $a(p, q) : H_D^1 \times H_D^1 \rightarrow \mathbb{C}$ la forme sesquilinearéaire définie par :

$$a(p, q) = \int_{\Omega} \partial_{x_i} p \partial_{x_i} \tilde{q} - k^2 p \tilde{q} + \int_{\Gamma_R} i \rho c k A_n \tilde{q} \quad (8.56)$$

et $b(a) : H_D^1 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$b(q) = - \int_{\Gamma_N} i \rho c k \bar{V}_n q \quad (8.57)$$

Et comme on peut vérifier que l'on est dans un cas qui va bien, on définit l'énergie potentielle totale du domaine par :

$$W_p = \frac{1}{2} a(p, \tilde{p}) - b(\tilde{p}) \quad (8.58)$$

et la résolution du problème devient :

$$\text{Trouver } p \in H_D^1(\Omega) \text{ tel que } W_p \text{ soit minimal} \quad (8.59)$$

ou de manière équivalente :

$$\text{Trouver } p \in H_D^1(\Omega) \text{ tel que } \delta W_p = 0, \quad \forall \delta p \in H_0^1(\Omega) \quad (8.60)$$

Chapitre 9

Exemple de formulation variationnelle d'un problème de Neumann

Résumé — Dans cet exemple, portant sur formulation d'un problème de Neumann, nous allons essayer de montrer comment la réflexion mathématique se fait et évolue « au fil de l'eau » pour transformer un problème initial donné et obtenir les bonnes conditions d'existence et d'unicité de la solution sur les « espaces qui vont bien » (et qui eux, feront ensuite l'objet d'une discréétisation numérique).

Supposons que nos « investigations » sur un problème nous aient conduit à sa formulation sous forme d'un problème de Neumann (avec $f \in L^2(\Omega)$, ce qui n'est pas une condition si forte finalement, et c'est ce que l'on aimeraient avoir) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (9.1)$$

Nous allons donc nous poser la question de l'existence et de l'unicité de la solution de ce problème.

9.1 Étude directe de l'existence et l'unicité de la solution

Sans être magicien, il doit sembler à peu près évident qu'une condition nécessaire d'existence doit être que $f \in L_0^2(\Omega)$, et que les conditions imposées semblent un peu courtes pour assurer l'unicité.

On voit en effet que l'existence implique que

$$\int_{\Omega} -\Delta u = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (9.2)$$

qui conduit à :

$$\int_{\Omega} f = 0 \quad (9.3)$$

i.e. $f \in L_0^2(\Omega)$. Donc $f \in L_0^2(\Omega)$ est bien une condition nécessaire d'existence.

De même, d'après ce qui précède, on voit que si u est solution, alors $u + c$ est solution, ce qui prouve qu'il n'y a pas unicité de la solution.

9.2 Formulation variationnelle

Nous allons écrire la formulation variationnelle de notre problème dans $H^1(\Omega)$. Nous regarderons si nous retrouvons la même condition d'existence. Nous nous demanderons ensuite si, en nous restreignant à un certain espace, il n'est pas possible d'obtenir l'unicité de la solution.

Nous commençons donc par écrire notre problème sous la forme :

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \quad (9.4)$$

et comme le dernier terme est nul (condition aux limites), il reste :

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (9.5)$$

Comme nous voulons la formulation variationnelle dans $H^1(\Omega)$ (i.e. $u \in H^1(\Omega)$), il vient :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (9.6)$$

Si nous considérons $u = u_0 + c$ et $v = v_0 + d$, alors il vient :

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v_0 = \int_{\Omega} f v_0 + d \int_{\Omega} f, \quad \forall v_0 \in H^1(\Omega), \quad \forall d \quad (9.7)$$

ce qui implique, pour que ce soit vrai pour tout d que $\int_{\Omega} f = 0$, et on retrouve bien que $f \in L_0^2(\Omega)$ est une condition nécessaire d'existence.

Mézalor, il est naturel de considérer $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ (car on veut que u et v vivent dans le même espace pour pouvoir appliquer nos « méthodes »), et la formulation précédente donne :

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v_0 = \int_{\Omega} f v_0, \quad \forall v_0 \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \quad (9.8)$$

i.e. nous sommes ammenés à considérer l'espace $V = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$.

L'espace V est un espace de Hilbert normé par $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

- $v \in V \Rightarrow v \in H^1(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} v = 0$ et l'application $v \in H^1(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} v$ est continue sur $H^1(\Omega)$, donc V est un sous-espace fermé de H^1 , donc est un Hilbert. Et donc maintenant que l'on sait que V est un Hilbert, on aimeraient bien appliquer Lax-Milgram (voir 7.3), c'est pourquoi il faut s'intéresser à la forme bilinéaire définissant le problème. C'est ce qui suit.
- Si l'on considère la forme bilinéaire :

$$a(u_0, v_0) = \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v_0 \quad (9.9)$$

alors on voit que

$$a(u_0, v_0) \leq |u_0|_1 |\overline{v_0}|_1 \leq \|u_0\|_{H^1} \|v_0\|_{H^1} \quad (9.10)$$

et donc a est **continue**.

- $(v_0, v_0) = |v_0|_1^2$. Or on a l'inégalité de type Poincaré suivante : $\exists c(\Omega) > 0$ tel que :

$$|\varphi|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) |\varphi|_{1,\Omega}, \quad \forall \varphi \in V \quad (9.11)$$

Cela conduit à :

$$\frac{|v_0|_1^2}{|v_0|_1^2 + |v_0|_0^2} \geq \frac{1}{1 + c^2(\Omega)}, \quad \forall v \in V \quad (9.12)$$

Donc a est **V-elliptique**.

Le théorème de Lax-Milgram permet donc de conclure à l'existence et à l'unicité de la solution $u_0 \in V$.

9.3 Formulation mixte duale

On va regarder maintenant ce qui se passe si l'on exprime le problème sous forme mixte, i.e. en se servant de deux variables. C'est une voie fréquente pour « simplifier » les conditions aux limites.

En effet, plutôt que considérer $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$, on peut interpréter cela comme une pression nulle sur les bords, i.e. $p \cdot n = 0$ sur Γ .

Le problème considéré se formule alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u + p = 0 & \text{loi de comportement dans } \Omega \\ \operatorname{div} p = -f & \text{loi de conservation dans } \Omega \\ p \cdot n = 0 & \text{condition aux limites sur } \Gamma \end{cases} \quad (9.13)$$

On peut alors écrire la loi de conservation :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} p)v = - \int_{\Omega} fv, \quad \forall v \in L^2(\Omega) \text{ (à priori)} \quad (9.14)$$

et la loi de comportement :

$$0 = \int_{\Omega} (p - \nabla u) \cdot q = \int_{\Omega} p \cdot q + \int_{\Omega} u \operatorname{div} q = \langle u, q \cdot n \rangle \quad (9.15)$$

On n'a pas d'information sur u . Par contre, on a un terme $p \cdot n = 0$. Et il serait bien de disposer de son « symétrique », i.e. d'un terme $q \cdot n = 0$ qui serait imposé par le choix de l'espace dans lequel vivrait u . Ce que l'on a en tête c'est bien sûr de pouvoir utiliser le théorème de Brezzi.

En correspondance avec les notations du paragraphe 7.5, on choisit alors les espaces : $H = \{q \in H(\operatorname{div}; \Omega); q \cdot n|_{\Gamma} = 0\}$ et $M = L^2(\Omega)$. Le problème est donné, dans la formulation de Brezzi, par les deux formes bilinéaires

$$a(p, q) = \int_{\Omega} p \cdot q \quad \text{et} \quad b(v, q) = \int_{\Omega} v \operatorname{div} q \quad (9.16)$$

Quant aux formes linéaires définissant le problème, la première est nulle et la seconde vaut :

$$-\int_{\Omega} fv \quad (9.17)$$

Maintenant que nous nous sommes rapprochés du cadre du théorème de Brezzi, il va nous falloir vérifier si toutes les conditions sont vérifiées. Toutefois, d'après ce qui a été vu dans les paragraphes précédents, il semble naturel de se demander s'il faudra bien conserver $L^2(\Omega)$, ou s'il faudra passer à $L_0^2(\Omega)$, et ce qu'il se passe quand $u = u_0 + c$.

Pour l'instant, on a :

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} p = - \int_{\Omega} fv, \quad \forall v \in L^2(\Omega) \quad (9.18)$$

Si l'on prend $v = 1$, alors il vient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} p = - \int_{\Gamma} p \cdot n = 0 \quad (9.19)$$

ce qui implique que $\int_{\Omega} f = 0$, soit $f \in L_0^2(\Omega)$. On a également :

$$\int_{\Omega} p \cdot q + \int_{\Omega} u \operatorname{div} q = 0, \quad \forall q \in H \quad (9.20)$$

Or $q \in H$ implique $\int_{\Omega} \operatorname{div} q = 0$, ce qui implique aussi que si u est solution, alors $u + c$ l'est aussi.

Encore une fois il n'y a pas unicité de la solution. Pour l'imposer, il faut donc une condition sur u , comme par exemple $\int_{\Omega} u = 0$, i.e. $u \in L_0^2(\Omega)$. Si de plus $\operatorname{div} p \in L_0^2(\Omega)$ (et avec $f \in L_0^2(\Omega)$ comme vu au dessus), alors ce implique que :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} p + f)(v_{L_0^2} + c) = \int_{\Omega} (\operatorname{div} p + f)v_{L_0^2} \quad (9.21)$$

Donc le choix $M = L_0^2(\Omega)$ semble un choix convenable à priori.

Il reste alors maintenant à vérifier que toutes les conditions du théorème de Brezzi sont bien satisfaites pour pouvoir conclure à l'existence et à l'unicité de la solution. Ces conditions sont :

- H et M sont des Hilbert ;
- a , b et f sont continues ;
- a est V-elliptique ;
- condition inf-sup sur b .

H est un Hilbert Pour montrer que H est un Hilbert, on s'appuie sur le fait que l'application :

$$\varphi : q \in H(\operatorname{div}; \Omega) \mapsto q \cdot n \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ est continue (car } \|q, 0\|_{-1/2, \Gamma} \leq \|q\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}).$$

Il en résulte alors que $H = \varphi^{-1}(0)$ est fermé et que $H(\operatorname{div}; \Omega)$ étant un Hilbert, c'est également un Hilbert pour la norme de $H(\operatorname{div})$.

M est un Hilbert Pour montrer que M est un Hilbert, on s'appuie sur le fait que l'application :

$$\varphi : v \in L^2(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} v = 0 \text{ est continue car } |\int v| \leq \sqrt{|\Omega|} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il en résulte que $M = \varphi^{-1}(0)$ est fermé et que $L^2(\Omega)$ étant un Hilbert, c'est également un Hilbert pour la norme de $L^2(\Omega)$.

a est continue

$$a(p, q) = \int_{\Omega} p \cdot q \leq |p|_0 |q|_0 \leq \|p\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \|q\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \quad (9.22)$$

et donc a est continue et $\|a\| \leq 1$.

b est continue

$$b(v, q) = \int_{\Omega} v \operatorname{div} q \leq |v|_0 |\operatorname{div} q|_0 \leq |v|_0 \|q\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \quad (9.23)$$

et donc b est continue et $\|b\| \leq 1$.

f est continue

$$\int_{\Omega} f v \leq |f|_0 |v|_0 \quad (9.24)$$

ce qui implique que la norme de la forme linéaire est $\leq |f|_0$.

a est V-elliptique On a :

$$V = \left\{ q \in H; \int_{\Omega} v \operatorname{div} q = 0, \quad \forall v \in L_0^2(\Omega) \right\} \quad (9.25)$$

$q \in H$ implique que $\int_{\Omega} (v + c) \operatorname{div} q = 0$, et donc $\int_{\Omega} w \operatorname{div} q = 0, \forall w \in L^2(\Omega)$, ce qui finalement implique que $\operatorname{div} q = 0$ dans $L^2(\Omega)$.

On a donc $V = \{q \in H; \operatorname{div} q = 0\}$.

On a alors :

$$a(q, q) = \int_{\Omega} |q|^2 = \|q\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}^2 \quad (9.26)$$

si $q \in V$, et donc la V-ellipticité de a est démontrée.

Condition inf-sup Pour montrer la conditions inf-sup, nous construirons q à partir d'un φ vérifiant $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sur Γ , i.e. :

$$\forall v \in M, \quad \exists q \in H; \quad \int_{\Omega} v \operatorname{div} q = |v|_0^2 \quad \text{et} \quad \|q\|_{H(\operatorname{div})} \leq \frac{1}{\beta} |v|_0 \quad (9.27)$$

$q \in H$, $\operatorname{div} q = v$ et $q = -\nabla \varphi$, $q \cdot n = 0$ donc $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, et :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = v \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (9.28)$$

Comme au paragraphe sur la formulation variationnelle, $\exists! \varphi \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ car $v \in L_0^2(\Omega)$:

$$|q|_0^2 = \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 = |\varphi|_1^2 = \int_{\Omega} v \varphi \leq |v|_0 |\varphi|_0 \leq c(\Omega) |V|_0 |\varphi|_1 \quad (9.29)$$

d'où $|a|_0 \leq c(\Omega) |V|_0$. De plus :

$$|q|_0^2 + |\operatorname{div} q|_0^2 = |q|_0^2 + |v|_0^2 \leq (C^2(\Omega) + 1) |v|_0^2 \quad (9.30)$$

d'où :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2(\Omega)}} \quad (9.31)$$

On peut donc appliquer le théorème de Brezzi et conclure à l'existence et à l'unicité de la solution.

III

ÉLÉMENTS FINIS

Introduction

En introduction à cette partie, il nous semblait important d'en exposer sa structure, car elle peut sembler un peu décousue à la simple lecture de la table des matières.

Après les pré-requis exposés dans les deux premières parties, la partie III va s'ouvrir « tout naturellement » sur une présentation générale de la méthode des éléments finis au chapitre 10.

Immédiatement après, compte tenu du public visé, le chapitre 11 essayera de mettre en avant les spécificités et surtout la complexité de la mécanique comme champ d'application de la méthode des éléments finis.

Cette mise en garde, au regard de l'expérience, nous semble importante : on a tendance souvent à considérer que la mécanique est quelque chose de très bien maîtrisé, et ce n'est pas le cas. Bien des sujets restent pointus, voire ouverts. Il convient donc de rester prudent, surtout pour ceux ayant une expérience de calcul importante qui les porte parfois à sous estimer les difficultés.

Le chapitre 12, qui fait suite logiquement en terme de présentation de la méthode des éléments finis, au chapitre 10, est souvent le mieux maîtrisé par le public d'ingénieurs, au moins concernant les éléments de Lagrange.

Nous l'avons complété de remarques sur les modèles à plusieurs champs (qui peut faire pour partie écho au chapitre 11).

Encore une fois, pour le public visé, c'est surtout le paragraphe 12.4 sur la validation pratique des éléments finis qui aura sans doute le plus de valeur ajoutée. Le contenu de ce paragraphe fait souvent partie des choses oubliées.

Comme nous en serons sur des choses un peu oubliées, nous en profiterons au chapitre 13 pour continuer dans le même sillon et rappeler quelques méthodes d'amélioration de la performance du calcul. Nous y présentons des choses qui sont utilisées plus ou moins fréquemment par notre public.

Seuls les paragraphes 13.6 et 13.7 (sur les méthodes de réanalyse et aux dérivées d'ordre élevé) sont généralement moins bien connus. Nous avons voulu les introduire ici plutôt qu'au chapitre ?? car ils sont vraiment en lien avec les préoccupations directes de notre public.

Pour continuer sur les choses pouvant avoir un réel intérêt pratique pour le public d'ingénieurs mécaniciens (ou acousticiens), nous aborderons au chapitre suivant 14 les méthodes d'homogénéisation.

Si les méthodes les plus « physiques » sont bien connues, l'approche mathématique (généralisante) est bien souvent quasi totalement inconnue.

À ce niveau du document, il nous semble que nous aurons parcouru bon nombre des applications typiques de la méthode des éléments finis, surtout dans le cadre de la mécanique... mais uniquement sous l'angle statique !

Il sera donc temps d'aborder « le temps », i.e. les problèmes non stationnaires, au chapitre 15. La propagation des ondes, quant à elle, ne sera traitée qu'au chapitre ?? C'est d'ailleurs dans ce chapitre que seront abordés également les modes propres, dont nous n'aurons pas parlé jusqu'alors (à quelques exception près lors de remarques diverses et variées... mais rien de sérieux).

Dès lors, on pourra considérer qu'une présentation assez complète de la méthode des éléments finis a été faite. Toutefois, ce qui était encore de l'ordre de la recherche il y a une décennie fait aujourd'hui partie des phénomènes que notre public doit prendre en compte de plus en plus souvent.

Ces phénomènes, un peu plus complexes, un peu plus exotiques, sont souvent liés à ce que l'on appelle la ou plutôt les non linéarités. C'est ce qui sera abordé au chapitre ??.

Parmi toutes les non linéarités, c'est celle des lois de comportement qu'il nous est demandé d'exposer en priorité. Les problèmes de contact ou de grands déplacements, qui seront abordés dans ce chapitre, nous sont bien moins demandés car souvent traités par des personnes très au fait des méthodes et même souvent en lien avec la recherche dans le domaine.

Enfin, un chapitre sera dédié au traitement de la modélisation de la rupture en mécanique au chapitre ?? . Il s'agit néanmoins d'une affaire de spécialistes, et nous ne ferons qu'aborder le sujet.

Le chapitre ?? permet de mettre l'accent sur le fait que même si la méthode des éléments finis est une méthode extrêmement générale, performante et répandue, elle n'est qu'une méthode numérique parmi une multitude d'autres méthodes.

Ce chapitre n'a pas vocation bien évidemment à approfondir aucune des méthodes abordées, mais uniquement à fournir un petit complément culturel qui nous semblait indispensable dans le monde actuel.

Le chapitre ?? clôt cette partie sur un petit rappel lié aux singularités, juste comme une petite piqûre de rappel sur des problèmes dont les ingénieurs pratiquant le calcul numérique restent assez conscients. Il nous a semblé que passer les singularités sous silence pouvait laisser à penser que ce problème n'était peut-être pas si important, ce qui n'est pas le cas bien évidemment.

Enfin, à notre grand regret (mais ce document est déjà suffisamment, voire même trop, volumineux) certaines méthodes n'ont pas été abordées et feront l'objet de fascicules séparés.

Nous pensons par exemple en acoustique aux méthodes de tir de rayons, les méthodes énergétiques simplifiées, les « Wave based methods »... i.e. les méthodes aussi bien temporelles que spectrales.

En mécanique, nous pensons notamment à toutes les méthodes probabilistes de la « mécanique aléatoire », incluant l'approche spectrale et reliées au calcul des l'indice de fiabilité d'une structure.

Chapitre 10

La méthode des éléments finis

Résumé — Une fois le travail précédent accompli, i.e. une fois que l'on dispose d'une formulation faible, « il n'y a plus qu'à » calculer la solution ! La méthode des éléments finis est l'un des outils numériques développés pour cela.

La méthode des éléments finis se propose de mettre en place, sur la base de formulations faibles, un algorithme discret (discrétisation) permettant de rechercher une solution approchée d'un problème aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact.

Il s'agit donc de répondre aux questions d'existence et d'unicité de la solution, de stabilité, convergence des méthodes numériques, ainsi que d'apprecier l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée (indicateurs et estimateurs d'erreur, à priori et à posteriori).

10.1 Introduction

Les chapitres des parties précédentes ont eu pour but de nous permettre de décrire un problème physique à partir d'EDP, mais à aucun moment nous n'avons encore parlé de la manière de résoudre ces équations (que ce soit la formulation forte ou la faible).

Ce sera le but de ce chapitre, dans lequel la mise en œuvre de la méthode des éléments finis va être exposée.

Nous avons vu dans la partie précédente, comment passer d'une formulation forte à une formulation faible. Dans de nombreux cas, nous avons montré qu'il y a équivalence (existence et unicité de la solution) entre l'étude des deux formulations.

Il faut toutefois bien garder en tête que dans certains cas, l'équivalence entre les deux formulations n'est pas évidente.

Une condition qui n'a pas été vraiment évoquée jusque là est le cas où le bord du domaine n'est pas suffisamment régulier, par exemple s'il possède des points singuliers (par exemple point d'inflexion ou de rebroussement, ou dans le cas des fissures en MMC).

Cela peut également se produire si l'on ne peut pas assurer que la fonction f (celle agissant dans tout le domaine) n'est pas suffisamment dérivable. Comme en général on suppose dans les problèmes physiques que la solution est C^∞ , on n'est pas confronté à ce genre de problème.

L'idée de la méthode des éléments finis est de décomposer (on dit discréteriser) le domaine Ω en un certain nombre de sous-domaines (les éléments). Les éléments recouvriront l'intégralité du domaine (de la frontière pour les éléments de frontière qui est une autre méthode) et sans chevauchement entre eux (les éléments peuvent se chevaucher dans la méthode des volumes finis). De plus, on va chercher la fonction solution u comme étant interpolée par des « bouts » de solutions définies sur chaque élément.

Le problème étant interpolé sur les éléments, on se doute que le nombre d'éléments va jouer sur la qualité de cette approximation de la solution. On se doute également que, comme on résout

un problème comportant des dérivées, c'est plutôt dans les endroits où la solution va varier vite qu'il sera nécessaire de « resserrer » le maillage.

Histoire

C'est l'ingénieur américain Ray William Clough qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis (Finite Element Method) le premier dans un article de 1960. Dans le titre d'un autre de ses articles de 1956 apparaissait déjà le mot rigidité (Stiffness).

Si on veut replacer très brièvement cela dans un contexte plus global, on peut dire que l'analyse des structures est née vers 1850.

La RdM, recourant au calcul manuel, était développée par Maxwell, Castigliano, Mohr.

Le concept d'éléments finis est né vers 1940, avec des figures comme Newmark, Hrennikoff (1941), Mc Henry, Courant (1942)...

Son réel essor ne commence toutefois que dans les années 60 avec le développement du calcul numérique sur ordinateur.

La méthode des éléments finis (MEF) prend ses origines dans le besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse de structures en ingénierie civile et aéronautique. Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942). Bien qu'utilisant des approches différentes, ces deux pionniers partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discréttisation par maillage du domaine continu en sous-domaines discrets, que l'on appelle éléments. C'est Olgierd Zienkiewicz de l'Imperial College qui synthétisa ces deux méthodes en ce que l'on peut appeler la méthode des éléments finis et qui fit la première formalisation mathématique de la méthode.



Dans ses travaux, Hrennikoff discréttise le domaine en utilisant une analogie avec les treillis, tandis que l'approche de Courant divise le domaine en sous-régions finies triangulaires pour résoudre les EDP elliptiques du second ordre issues du problème de la torsion d'un cylindre. On peut dire que la contribution de Courant était une évolution s'appuyant sur un vaste corpus de résultats antérieurs pour les EDP développés par Rayleigh, Ritz et Galerkin.

Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu de années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough dans le 1960 pour l'utilisation dans le génie civil.

À la fin des années 50, les concepts clés de matrice de rigidité et d'assemblage d'éléments existaient quasiment sous la forme actuelle. La NASA publia une demande de propositions pour le développement du logiciel d'éléments finis NASTRAN en 1965.

La base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été consolidée en 1973 avec la publication de Strang et Fix de *An Analysis of The Finite Element Method*. Elle a depuis été intégrée comme une branche des mathématiques appliquées à la modélisation numérique des systèmes physiques dans une large variété de disciplines.

On veillera également à ce que les éléments ne soient pas trop distordus. Des critères dits « de forme » existent. Néanmoins, dans certains cas il est possible de violer allègrement ces critères tout en obtenant une très bonne approximation de la solution.

Bien que la méthode des éléments finis soit théoriquement généralisable à toutes les dimensions d'espace et à tous les ordres de dérivation, dans la pratique, l'augmentation de ces paramètres accroît de manière dramatique la difficulté et on se contente de résoudre des problèmes limités à trois dimensions en espace et deux ordres de dérivation.

Par exemple, un problème à trois dimensions d'espace et une dimension de temps, qui pourrait être discréttisé par une formulation à quatre dimensions (les éléments finis espace-temps existent), sera traité par une discréttisation EF à trois dimensions d'espace couplé à un schéma en différences finis en temps.



Clough Courant Zienkiewicz

Pour des problèmes avec des ordres de dérivations supérieurs (des techniques dites d'ordres élevés existent), comme par exemple en statique des poutres où l'on a une dérivation partielle d'ordre 4, on introduit des variables supplémentaires afin de diminuer les ordres des dérivées (déformations, contraintes... cela a été évoqué en parlant du « choix des variables » en mécanique, nous détaillerons un peu plus loin la formulation EF de ces formulations mixtes).

10.2 Problèmes de la modélisation « réelle »

Pour faire suite aux dernières remarques faites au paragraphe précédent, il faut se rendre à l'évidence que les équations qui modélisent les principales théories de la physique ont été présentées (et développées) dans un cadre idéalisé. Dans les problèmes réels, il est souvent difficile de rester dans ce cadre à cause de nombreuses difficultés telles que les problèmes géométriques, d'échelle et du couplage de différents modèles.

Toutefois, cela ne signifie pas qu'il est alors impossible de simuler le problème, mais seulement qu'il est nécessaire d'ajouter encore un peu plus d'intelligence et d'astuce. En effet, ces difficultés peuvent souvent être découplées dans un calcul numérique par des algorithmes adéquats et l'on se ramène alors à la résolution itérée de problèmes standard (d'où la nécessité de disposer de méthodes sûres et performantes pour calculer des solutions numériques de ces problèmes standard).

Nous allons présenter quelques exemples de problèmes pouvant survenir dans une modélisation, sachant qu'un certains nombre seront traités dans des chapitres ultérieurs (mais pas tous).

10.2.1 Problèmes géométriques

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le domaine Ω dans lequel le problème était considéré était fixe. Or, dans de nombreux problèmes ce domaine est variable, on parle de problèmes à surface libre, dont voici quelques exemples :

- Le problème le plus évident pour le lecteur, et qui a déjà été évoqué, est celui de la grande déformation d'un solide.
- L'étude des mouvements d'un liquide, notamment les vagues ou le mouvement de l'eau dans un réservoir. Quand la variation de la forme du domaine n'est pas trop grande on peut définir le domaine inconnu comme l'image d'un domaine fixe par une certaine fonction. Cette fonction devient alors une inconnue du problème qui se ramène à une équation plus complexe que l'équation initiale mais sur un domaine fixe. Mais, parfois, le domaine peut être amené à se fragmenter comme dans le cas de la formation de gouttes...
- La fusion de la glace dans l'eau : la frontière entre la glace et l'eau est alors une inconnue du problème.

10.2.2 Problèmes d'échelle

La formulation d'un problème peut dépendre de l'échelle à laquelle on regarde ce problème, comme cela a été mentionné précédemment. Mais il se peut également que différentes échelles interagissent...

Quelques problèmes classiques d'échelle sont :

- Nous avons déjà évoqué un peu cela en mécanique des fluides : dans l'écoulement d'un fluide la turbulence est un phénomène qui fait apparaître des mouvements à très petite échelle. La complexité de ces mouvements rend nécessaire, dans un calcul numérique, le remplacement des valeurs exactes des champs inconnus par leur moyenne, en un sens à préciser. Cela conduit à des modèles de turbulence qui se différencient par les hypothèses supplémentaires qui sont faites.
- Dans un champ plus proche des considérations du lecteur, on pensera évidemment aux ondes. Une excitation à très haute fréquence crée une onde de longueur très petite. Or une

longueur d'onde très petite ne peut pas être prise en compte dans un calcul numérique à grande échelle. La prise en compte de ce phénomène dans l'équation des ondes conduit à des modèles asymptotiques dans lesquels l'étude des ondes se ramène à la théorie de l'optique géométrique plus ou moins enrichie pour tenir compte de phénomènes comme la diffraction. Mais si la longueur d'onde est proche des longueurs des variations géométriques du bord du domaine d'étude il faut revenir à l'équation des ondes pour étudier l'effet de ces variations géométriques. On peut donc être amener à coupler l'optique géométrique et une étude directe de l'équation des ondes.

- Un autre champ lui-aussi déjà mentionné est celui des hétérogénéités d'un milieu continu, qui, quand elles sont à très petite échelle, peuvent empêcher la prise en compte exacte de celles-ci, au moins dans une approximation numérique.

C'est le cas des solides formés de matériaux composites, des fluides comme l'air chargé de gouttelettes d'eau ou de l'eau contenant des bulles de vapeur. On est conduit à définir des modèles limites dits homogénéisés dans lesquels on remplace les grandeurs usuelles (vitesse, masse volumique), qui ont une forte variation locale, par leur valeur moyenne.

Les équations obtenues peuvent avoir la même forme que les équations initiales comme dans le cas de la théorie élastique des matériaux composites (le seul problème est de calculer les propriétés matérielles du matériau homogénéisé, mais nous présenterons cela plus loin) ou bien, quand les paramètres des hétérogénéités (la densité de bulles par exemple) dépendent de la solution, ces paramètres s'ajoutent aux grandeurs inconnues initiales et le nombre d'équations peut donc s'accroître.

10.2.3 Couplage géométrique

De nombreux problèmes impliquent la prise en compte de plusieurs modèles selon le point considéré.

C'est le cas de l'interaction d'un fluide et d'une structure (l'écoulement d'un fluide par exemple peut faire vibrer une structure qui en retour fait vibrer le fluide). Une des difficultés vient de ce que les inconnues utilisées dans la modélisation de chacun des milieux sont de natures différentes : les déplacements dans le solide et les vitesses dans le fluide.

Comme illustration de ce couplage, nous proposons le cas d'un poisson, issu de l'intéressante étude de San Martín et al. Le déplacement d'un poisson dans son milieu, illustré à la figure 10.1.a, n'est pas imposé mais résulte de l'interaction entre la déformation propre du poisson (donnée à la figure 10.1.b, et qui elle est imposée) et le fluide.

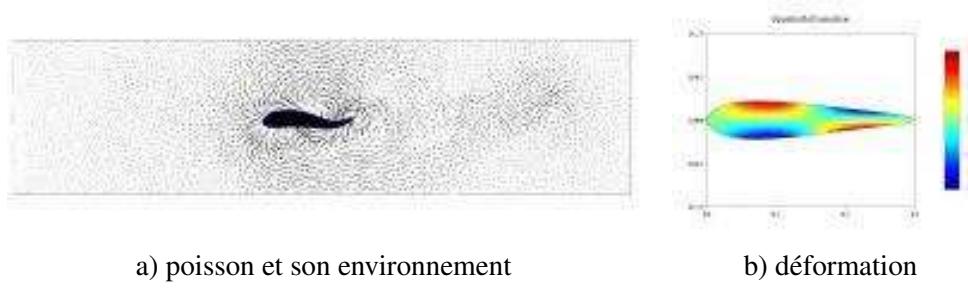


FIGURE 10.1 – Interaction fluide/structure : déplacement d'un poisson

On retrouve aussi les problèmes d'interaction fluide/structure dans la modélisation de la circulation sanguine : le sang est un liquide très faiblement compressible, alors que les vaisseaux sanguins sont déformables et susceptibles de grands déplacements

Le contact entre deux solides peut également être placé dans cette catégorie.

10.2.4 Couplage intrinsèque

L'étude de la convection naturelle d'un fluide, pour la météorologie par exemple, se modélise par le couplage des équations de la dynamique des fluides d'une part, de la diffusion et du transport de la chaleur d'autre part : ce sont en effet les variations de température qui créent les variations de densité responsables du mouvement de l'air, mais ce mouvement lui-même entraîne un transport de chaleur responsable de variations de la température. Même si l'on considère un modèle simplifié linéarisé pour modéliser l'écoulement du fluide, le couplage fait apparaître une non linéarité.

L'étude des plasmas oblige à coupler les équations de dynamiques des fluides et les équations de Maxwell puisque ce sont les forces électromagnétiques qui font se mouvoir les particules chargées mais leur mouvement est lui même la cause d'un champ électromagnétique induit.

10.3 Principe de la méthode : résolution d'un système matriciel

Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ou 3 en pratique), de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et sur lequel on cherche à résoudre une EDP munie de conditions aux limites.

Ce problème, mis sous forme variationnelle, est :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \quad (10.1)$$

où V est un espace de Hilbert. On supposera également que l'équation de départ a de bonnes propriétés, i.e. que l'on est dans les hypothèses vues précédemment permettant d'affirmer que le problème admet une solution unique u .

La méthode des éléments finis se propose de discréteriser le problème considéré. La discréétisation intervient à plusieurs niveaux :

- discréétisation : il est nécessaire de disposer d'une description du domaine Ω sur lequel on souhaite travailler. Cette description va se faire en l'approchant par un maillage, qui sera constitué d'éléments.
- interpolation : il est ensuite nécessaire de disposer d'une manière de représenter le ou les champs inconnus. Ce que se proposer de faire la MEF, c'est d'approcher ces champs par des fonctions plus simples (disons polynomiales de degré un ou deux) définies sur chacun des éléments du maillage (le champ est approché par des bouts de fonctions qui, elles, ne sont définies chacune que sur un seul élément).
- approximation : selon le type d'approximation, on remplace non seulement l'espace V (qui correspond, selon les notations utilisées au chapitre sur la formulation faible, aux espaces H, V, M ou même $H \times M$), de dimension infinie, par des approximations V_h de dimension finie, mais parfois également les formes bilinéaires et linéaires définissant le problème (nous expliquerons plus tard les motivations).

De manière classique, on notera \mathcal{T}_h le maillage de Ω considéré.

Il est caractérisé par les dimensions géométriques représentatives que sont le diamètre maximum des éléments, h et le facteur de forme du maillage, σ (qui caractérise l'aplatissement du maillage).

Le maillage est constitué d'éléments, généralement notés K . On note h_K le diamètre de l'élément K , i.e. le maximum des distances (euclidiennes) entre deux points de K , et ρ_K la rondeur de l'élément K , i.e. le diamètre maximum des sphères incluses dans K .

On a donc évidemment $h_K \leq h, \forall K \in \mathcal{T}_h$ puisque par définition $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, et $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in \mathcal{T}_h$.

On notera \hat{K} l'élément de référence correspondant à l'élément K du maillage \mathcal{T}_h , et d'une manière générale on ajoutera ce « chapeau » ^ sur toute quantité relative à un élément de référence (voir plus loin le chapitre sur la formulation pratique des EF).

Les types d'approximation du problème (10.1), qui seront détaillés un peu plus loin, sont : En fait, on expose généralement les méthodes à partir de la méthode dite conforme selon le tableau ci-dessus, alors qu'en pratique on travaille souvent dans le second cas, i.e. approximation conforme

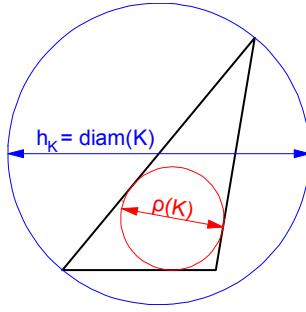


FIGURE 10.2 – Dimensions géométriques caractéristiques d'un élément.

type d'approximation	espaces	formes	problème (P) \Rightarrow problème approché (P_h)
conforme	$V_h \subset V$	inchangées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a(u_h, v_h) = b(v_h), \forall v_h \in V_h$
non conforme	$V_h \subset V$	approchées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a_h(u_h, v_h) = b_h(v_h), \forall v_h \in V_h$
non conforme	$V_h \not\subset V$	approchées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a_h(u_h, v_h) = b_h(v_h), \forall v_h \in V_h$

TABLE 10.1 – Relations approximation et espaces

en espace (i.e. $V_h \subset V$) mais non conforme concernant les formes, car au moins les intégrations sont réalisées numériquement.

Toujours est-il que dans tous les cas, l'espace V est remplacé par un espace V_h , de dimension finie N_h , dont (e_1, \dots, e_{N_h}) en est une base. L'approximation u_h de u dans cette base s'écrit :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} q_i e_i \quad (10.2)$$

Le problème de la méthode des éléments finis devient donc :

$$\text{Trouver } q_1, \dots, q_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, v_h) = f_h(v_h), \forall v_h \in V_h \quad (10.3)$$

soit, en exploitant les linéarités de $a_h(\cdot, \cdot)$ et $f_h(\cdot)$ et en décomposant v_h :

$$\text{Trouver } q_1, \dots, q_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, e_j) = f_h(e_j), \forall j = 1, \dots, N_h \quad (10.4)$$

Il s'agit donc de résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} a_h(e_1, e_1) & \dots & a_h(e_{N_h}, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_h(e_1, e_{N_h}) & \dots & a_h(e_{N_h}, e_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h(e_1) \\ \vdots \\ f_h(e_{N_h}) \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

que l'on note (dans la tradition mécanicienne) :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad \text{ou encore} \quad (\mathbf{K})(\mathbf{q}) = (\mathbf{F}) \quad (10.6)$$

Telle que formulée, la matrice \mathbf{K} semble pleine à priori. L'astuce consiste à choisir des fonctions de base e_i dont le support sera petit, i.e. chaque fonction e_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes $a(e_i, e_j)$ seront le plus souvent nuls et la matrice \mathbf{A} sera creuse. De plus, on ordonnera les e_i de sorte que \mathbf{K} soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible. Il existe un moyen avantageux de stocker une matrice creuse qui s'appelle le stockage en ligne de ciel ou skyline.

Les difficultés majeures en pratique sont de trouver les e_i et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de \mathbf{K} . Indiquons d'ores et déjà que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales qui seront détaillées au chapitre sur la formulation pratique des EF :

Principe d'unisolvance On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de V_h . Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points. Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.

Définition des e_i On définira les fonctions de base par $e_i = 1$ sur le i ème ddl, et $e_i = 0$ sur les autres ddl. La manipulation des e_i sera alors simplifiée, et les e_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

Notion de « famille affine d'éléments » Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille de référence, par un simple changement de variable.

Notons que la matrice \mathbf{K} est appelée matrice de rigidité par analogie avec la mécanique des solides.

Si la forme bilinéaire a est coercive, alors \mathbf{K} est symétrique, définie positive donc inversible. On obtient donc l'existence et l'unicité de $\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$.

De nombreuses méthodes permettent de résoudre le système matriciel (d'inverser la matrice de rigidité) : Gauss, mais également toutes sortes de décomposition de la matrice de rigidité comme LU, LDLT, LLT (Cholesky). Lorsque K est symétrique définie-positive, la méthode de Cholesky est la meilleure. Elle consiste à décomposer la matrice A en le produit $L\cdot L^T$, où la matrice L est une matrice triangulaire inférieure.

10.4 Approximation conforme et lemme de Céa

Dans le cas d'une approximation conforme (dite aussi approximation interne), on se propose de construire un espace V_h , de dimension N_h , comme étant un sous-espace vectoriel de V .

10.4.1 Cas Lax-Milgram

On se place dans le cas d'une formulation relevant du théorème de Lax-Milgram.

V_h étant de dimension finie, c'est un fermé de V . V étant un espace de Hilbert, V_h l'est donc aussi. D'où l'existence et l'unicité de u_h , à partir de Lax-Milgram.

L'espace V_h sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine Ω , et l'indice h désignera la taille typique des mailles. Lorsque l'on construit des maillages de plus en plus fins, la suite de sous-espaces $(V_h)_h$ formera une approximation interne de V , i.e. pour tout élément φ de V , il existe une suite de $\varphi_h \in V_h$ telle que $\|\varphi - \varphi_h\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Cette méthode d'approximation interne est appelée méthode de Galerkine (Galerkine ou Galerkin).

Signification de u_h On a $a(u, v) = f(v)$, $\forall v \in V$, donc en particulier $a(u, v_h) = f(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$, car $V_h \subset V$. Par ailleurs, $a(u_h, v_h) = f(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$. Par différence, il vient $a(u - u_h, v_h) = 0$, $\forall v_h \in V_h$.

Dans le cas où $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire sur V . u_h peut alors être interprété comme la projection orthogonale de u sur V_h au sens de $a(\cdot, \cdot)$.

Lemme 1 — Lemme de Céa. $a(\cdot, \cdot)$ étant continue (de constante de majoration M) et coercitive (de constante de minoration α), il est aisément d'obtenir la majoration de l'erreur appelée lemme de Céa :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \forall v_h \in V_h \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) \quad (10.7)$$

où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

Cette majoration donnée par le lemme de Céa ramène l'étude de l'erreur d'approximation $\|u - u_h\|$ à celle de l'erreur d'interpolation $d(u, V_h)$.

10.4.2 Cas Babuška

On se place cette fois dans le cas d'un problème relevant du théorème de Babuška. Le problème est (v est dans M et non plus V) :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = f(v), \forall v \in M \quad (10.8)$$

L'approximation conforme du problème (10.8) est le problème approché :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in M_h \quad (10.9)$$

où $V_h \subset V$ et $M_h \subset M$. Attention : rien ne garantit à priori que la condition inf-sup discrète sera vérifiée, même si la condition inf-sup est vérifiée. V_h et M_h étant de dimension finie, il faut nécessairement que $\dim V_h = \dim M_h$. Le problème (10.9) est bien posé, i.e. admet une unique solution, si :

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in M_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{M_h}} \geq \alpha_h \\ \forall w_h \in M_h, \quad (a(v_h, w_h) = 0) \Rightarrow (w_h = 0) \end{cases} \quad (10.10)$$

ce qui est équivalent aux conditions :

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in M_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{M_h}} \geq \alpha_h \\ \dim V_h = \dim M_h \end{cases} \quad (10.11)$$

La première relation est appelée condition inf-sup discrète.

Attention : ces propriétés doivent être démontrées.

On dispose de plus de la majoration d'erreur suivante :

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \{\|u - v_h\|\} \quad (10.12)$$

10.4.3 Cas Brezzi

On se place cette fois dans le cas d'un problème relevant du théorème de Brezzi (problème mixte). Le problème est de trouver (u, λ) dans $H \times M$ tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H, \\ b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (10.13)$$

Dans ce cas, on va faire une hypothèse forte d'injection continue... Le problème discréétisé correspondant à (10.13) est bien posé, si : le problème (10.13) vérifie les conditions de Brezzi, et si $(H_h \hookrightarrow H, M_h \hookrightarrow M)$ vérifie les conditions de Brezzi (de constantes α^* et β^*). De plus, on dispose alors de la majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_H + \|\lambda - \lambda_h\|_M \leq C \left[\inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\| + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \right] \quad (10.14)$$

où la constante C ne dépend que de $\|a\|$, α^* et β^* .

10.5 Approximations non conformes et lemmes de Strang

Lorsque les formes linéaires et linéaires définissant le problèmes doivent être approchées, on se trouve alors en présence d'une approximation non conforme. Comme mentionné, il existe deux types d'approximations non conformes selon que $V_h \subset V$ ou $V_h \not\subset V$.

10.5.1 Cas $V_h \subset V$

Le problème est donc :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \forall v_h \in V_h \quad (10.15)$$

où $V_h \subset V$ est de dimension finie, et a_h et f_h sont des approximations de a et f définies sur $V_h \times V_h$ et V_h resp. Dans le pratique, a_h et f_h sont définies sur un espace plus grand que V_h , mais pas sur V .

Motivation Considérons la forme :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (a \nabla u, \nabla v)(x) dx \quad (10.16)$$

Comme $a = a(x)$, le problème est : comment intégrer ? On prend des formules d'intégrations, donc on ne calcule par $a(\cdot, \cdot)$, mais $a_h(\cdot, \cdot)$ et $f_h(\cdot)$. Une majoration de l'erreur est donnée par le lemme 1 de Strang.

Lemme 2 — Lemme 1 de Strang. S'il existe $\alpha^* > 0$ tel que $\forall h, a_h(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|^2, \forall v_h \in V_h$, alors il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right\} + \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|} \right\} \right] \quad (10.17)$$

Le premier terme $\|u - v_h\|$ est appelé erreur d'approximation, le reste erreur de consistence.

10.5.2 Cas $V_h \not\subset V$

Le problème est encore :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (10.18)$$

mais $V_h \not\subset V$ est de dimension finie, et a_h et f_h sont des approximations de a et f définies sur $V_h \times V_h$ et V_h resp.

Motivation Considérons le problème du Laplacien de Dirichlet. L'espace V est $H_0^1(\Omega)$.

On considère l'espace des éléments finis triangulaires engendrés par l'élément ayant une pression constante par élément et les nœuds au centre des arêtes du triangles. Nous notons cet espace V_h ; alors $V_h \not\subset H^1(\Omega)$. Nous prenons maintenant l'espace $V_{h,0}$ qui tient compte des C.L. de Dirichlet. Si on prend :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (10.19)$$

alors, dans Ω , il y a des sauts et l'intégrale n'a pas de sens. Par contre, si l'on considère :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \quad (10.20)$$

l'intégrale sur chaque élément a un sens.

Une majoration de l'erreur est donnée par le lemme 2 de Strang.

Lemme 3 — Lemme 2 de Strang. Si la norme $\|\cdot\|_h$ est définie sur $V_h + V$, et s'il existe deux constantes indépendantes de h , $\alpha^* > 0$ et $M^* > 0$ tq : $a_h(v, v) \geq \alpha^* \|v\|_h^2, \forall v \in V_h$ et $|a_h(u, v)| \leq M^* \|u\|_h \|v\|_h, \forall u \in V_h + V, \forall v \in V_h$, alors : il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \{\|u - v_h\|\} + \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|a(u, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \right] \quad (10.21)$$

Le premier terme $\|u - v_h\|_h$ est appelé erreur d'approximation, le second erreur de consistance.

10.6 Convergence de la méthode des éléments finis en approximation conforme ou non lorsque $V_h \subset V$

Reprendons un cadre général, i.e. considérons Ω notre domaine de \mathbb{R}^n , et notre problème que nous résolvons de manière approchée par la MEF. Il s'agit maintenant de fournir une estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_m$ dans H^m (souvent $m = 0, 1$ ou 2). La régularité de u et de u_h (et donc les valeurs possibles pour m) dépendent du problème continu considéré ainsi que du type d'éléments finis choisis pour sa résolution.

On rappelle que \mathcal{T}_h est le maillage de Ω considéré. On supposera de plus le domaine Ω polygonal, ce qui permet de le recouvrir exactement par le maillage. Si ce n'est pas le cas, il faut prendre en compte de l'écart entre le domaine couvert par le maillage et le domaine réel.

10.6.1 Calcul de la majoration d'erreur

Les étapes du calcul de la majoration de l'erreur sont les suivantes :

- $\|u - u_h\|_m \leq C \|u - \pi_h u\|_m$: l'erreur d'approximation est bornée par l'erreur d'interpolation ;
- $\|u - \pi_h u\|_m^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2$: décomposition en majorations locales sur chaque élément ;
- $\|u - \pi_h u\|_{m,K} \leq C(K) \|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}\|_{m,\hat{K}}$: passage à l'élément de référence ;
- $\|\hat{u} - \hat{\pi}\hat{u}\|_{m,\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{u}|_{k+1,\hat{K}}$: majoration sur l'élément de référence ;
- $\|u - \pi_h u\|_m \leq C' h^{k+1-m} |u|_{k+1}$: assemblage des majorations locales.

Majoration par l'erreur d'interpolation

En appliquant le lemme de Céa à $v_h = \pi_h u$, il vient :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \pi_h u\| \quad (10.22)$$

Décomposition en majorations locales sur chaque élément

$$\|u - \pi_h u\|_m^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=0}^m |u - \pi_h u|_{l,K}^2 \quad (10.23)$$

et le calcul est ramené à un calcul sur chaque élément, pour toutes les semi-normes $\|\cdot\|_{l,K}$ pour $l = 0, \dots, m$.

Passage à l'élément de référence

On se sert du théorème suivant :

Théorème 27 Soit K un élément quelconque de \mathcal{T}_h , et \hat{K} l'élément de référence. Soit F la transformation affine de \hat{K} vers K : $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$, avec B inversible. On a :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |\hat{v}|_{l,K} \leq C(l,n) \|B\|_2^l |\det B|^{-1/2} |v|_{l,K} \quad (10.24)$$

Ce résultat n'est rien d'autre qu'un résultat de changement de variable dans une intégrale.

On a même :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |\hat{v}|_{l,K} \leq C(l,n) \|B^{-1}\|_2^l |\det B|^{1/2} |v|_{l,\hat{K}} \quad (10.25)$$

Et avec les données géométriques de l'élément :

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}} \quad \text{et} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K} \quad (10.26)$$

Majoration sur l'élément de référence

On a le théorème suivant :

Théorème 28 soient l et k deux entiers tels que $0 \leq l \leq k+1$. Si $\hat{p}i \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), J^l(\hat{K}))$ laisse $P_k(\hat{K})$ invariant, i.e. si $\forall \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{\pi}\hat{p} = \hat{p}$, alors :

$$\exists C(\hat{K}, \hat{\pi}), \forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K}), |\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{j,\hat{K}} \leq C |\hat{v}|_{k+1,\hat{K}} \quad (10.27)$$

Majoration sur un élément quelconque

De ce qui précède, il vient :

$$|v - \pi_K v|_{l,K} \leq \hat{C}(\hat{\pi}, \hat{K}, l, k, n) \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^l} |v|_{k+1,K} \quad (10.28)$$

où il faut remarquer que la constante \hat{C} est indépendante de l'élément K .

Assemblage des majorations locales

Il ne reste plus qu'à assembler les résultats précédents pour tous les éléments K du maillage \mathcal{T}_h et pour toutes les valeurs des semi-normes, i.e. pour $l = 0, \dots, m$.

Par majoration et sommation sur les éléments, on obtient :

$$\|v - \pi_h v\|_m \leq C(\mathcal{T}_h, m, k, n) h^{k+1-m} |v|_{k+1} \quad (10.29)$$

10.6.2 Majoration de l'erreur

On obtient au final, le résultat classique de majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_m \leq Ch^{k+1-m} |u|_{k+1} \quad (10.30)$$

Quelques remarques :

- On rappelle que la formule précédente a été obtenue pour domaine Ω polygonal. Si ce n'est pas le cas, elle n'est plus valable. Les éléments linéaires conduisent à une erreur en $O(h)$. Utiliser des éléments plus raffinés (de degré 2 au lieu d'éléments linéaires) permet, même si la géométrie n'est également ici pas décrite de manière exacte, d'obtenir une erreur asymptotique en $O(h^2)$. Quelque soit le degré de l'approximation, si le domaine Ω n'est pas représenté de manière exact, alors cela revient à une modification des conditions aux limites.
- Les calculs, et plus précisément les intégrations, ont été réalisées sans erreur. Si celles-ci sont faites de manière numérique, il convient d'introduire encore un terme correctif supplémentaire, appelé erreur de consistance due au remplacement des formes par leur approximation ($a(\cdot, \cdot)$ par $a_h(\cdot, \cdot)$, $f(\cdot)$ par $f_h(\cdot)$...). Toutefois, cette erreur supplémentaire peut être estimée en $O(h^k)$ selon la précision du schéma d'intégration utilisé.
- Le résultat de majoration d'erreur est souvent utilisé dans le cas $m = 1$. Comme l'espace des polynômes $P_k(\hat{k}) \subset H^1(\hat{K})$, alors si $\hat{\pi}$ est bien défini sur $H^{k+1}(\hat{K})$, on a :

$$\text{si } u \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|u - u_h\|_1 \leq Ch^k |u|_{k+1} \quad (10.31)$$

Chapitre 11

Choix d'un Modèle

Résumé — L'intégralité de la méthode des éléments finis a été présentée au chapitre précédent.

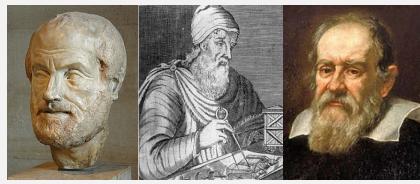
Avant de présenter plus en détail la formulation d'éléments finis, nous tenions à ajouter un court chapitre comme mise en garde en modélisation. Comme ce document étant essentiellement destiné à un public d'ingénieurs mécaniciens, nous allons illustrer notre propos en mécanique.

Histoire

La mécanique est sans doute aussi vieille que l'homme. Aussi bien pour des aspects pratiques (faire des outils pour chasser...), que pour des aspects plus philosophiques et spirituels visant notamment à expliquer les mouvements des astres...

Archimède, outre ces travaux en mathématiques, pourrait sans conteste être considéré comme le saint patron de la mécanique. Il est tout au moins indubitablement le père de la mécanique statique.

Il s'intéressa aussi bien aux aspects « théoriques » portant sur le principe du levier et la recherche de centre de gravité dans *De l'équilibre des figures planes*, sur le principe d'Archimède sur les corps plongés dans un liquide dans *Des corps flottants*; qu'aux aspects pratiques au travers de nombreuses inventions : machines de traction (où il démontre qu'à l'aide de poulies, de palans et de leviers, l'homme peut soulever bien plus que son poids), machines de guerre (principe de la meurtrière, catapultes, bras mécaniques utilisés dans le combat naval), l'odomètre (appareil à mesurer les distances), la vis sans fin et la vis d'Archimède, le principe de la roue dentée...



Aristote Archimède Galilée

Le siège de Syracuse, les miroirs d'Archimède et sa mort ne font qu'ajouter à sa légende.

Bien qu'Aristote posa le premier (avant Archimède) les bases d'une véritable théorie mécanique (alors encore très imparfaite), les fondements de la mécanique, en tant que science et au sens moderne du terme, sont posés par Galilée en 1632 dans *les Dialogues* et en 1638 dans *les Discours*.

La mécanique n'est alors pas dissociée des arts mécaniques, i.e. des techniques de construction des machines. La distinction entre la mécanique en tant science et la mécanique en tant que technique ne se fera qu'au XIXe siècle.

En 1677, Newton reprend ses travaux sur la mécanique, i.e. sur la gravitation et ses effets sur les orbites des planètes. En novembre 1684, il fit parvenir à Halley un petit traité de neuf pages avec le titre : *De motu corporum in gyrum* (Mouvement des corps en rotation), montrant la loi en carré inverse, la force centripète, ainsi que les prémisses des lois du mouvement.



Newton

Son ouvrage *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (aujourd'hui connu sous le nom de *Principia* ou *Principia Mathematica*), écrit en 1686 et publié le 5 juillet 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire de la science. Il y décrit la gravitation universelle, formule les trois lois du mouvement et jette les bases de la mécanique classique ou mécanique newtonienne. Ces trois lois universelles du mouvement resteront inchangées, sans aucune amélioration, durant plus de deux siècles, jusqu'à l'arrivée des mécaniques relativiste et quantique.

Rappelons que ces trois lois sont : 1) le principe d'inertie ; 2) le principe fondamental de la dynamique ; et 3) le principe des actions réciproques.

La mécanique classique sera ensuite complétée et mathématisée pour devenir la mécanique analytique. Cette dernière, initiée dès le XVIII^e siècle, regroupe, en plus de la mécanique newtonienne, les mécaniques de Hamilton et de Lagrange. Toutes ces mécaniques ont en commun l'application initiale d'un principe variationnel, et avec lui l'utilisation du calcul variationnel... ce qui fait le lien avec le présent document.

11.1 La mécanique, un problème à plusieurs champs

Dans ce paragraphe, nous reprenons les formulation présentées au paragraphe 8.3.2, mais en essayant de les éclairer par un discours plus pragmatique. C'est pourquoi nous changerons quelque peu les notations, afin de retomber sur des choses peut-être plus familières pour des ingénieurs mécaniciens.

Bien qu'étant un sujet ancien, la mécanique n'en est pas pour autant un problème simple.

En mécanique, les champs inconnus sont les déplacements, déformations et contraintes (et d'autres si besoin, comme la température...). De plus, on dispose de relations entre ces champs.

Il est possible de n'exprimer le problème qu'à l'aide des seuls déplacements. Les déformations sont alors calculées à partir des déplacements (par combinaison linéaire des dérivées, obtenues de manière approchée), puis les contraintes sont obtenues à partir des déformations par la loi de comportement (linéaire ou non, isotrope ou non...).

Il est également tout à fait possible d'exprimer le problème en utilisant les déplacements et les contraintes comme inconnues. Cela permet de prendre en compte certaines continuités des contraintes en certains lieux (interface entre deux matériaux par exemple, voir paragraphe 12.3 pour une synthèse) de la structure, et d'imposer les CL de nullité des contraintes aux lieux le nécessitant (par exemple bord libre).

Par contre, le champ de contraintes peut également être « trop » continu en certains endroits selon le type de problème. Cette continuité étant liée à la constitution de l'élément fini choisi, on peut ne pas disposer d'éléments capables de modéliser correctement ce phénomène...

Notons qu'il serait tout aussi possible d'utiliser une formulation ayant les trois champs comme inconnues...

Enfin bref, tout est possible, mais il faut veiller à ce que la modélisation de chaque champ soit cohérente avec le phénomène physique à modéliser.

En d'autres termes, on ne choisit pas un élément au hasard, juste parce qu'il a le bon nombre d'inconnues, il est évidemment nécessaire de se demander comment ces inconnues sont interpolées, ce que cela implique sur la régularité des solutions et donc si cela est compatible avec le phénomène physique que l'on souhaite simuler.

Un autre exemple typique est le cas des éléments « déplacement-pression » utilisés par exemple pour la modélisation des solides incompressibles (nous avons évoqué le problème précédemment).

Ce document s'adressant à des personnes connaissant déjà la MEF, nous allons présenter très brièvement, sous forme d'a parte, la discrétisation multi-champs, de manière un peu découpée du reste du document, juste pour fixer les idées.

Si l'on note u le champ de déplacements, il peut être approché à partir des déplacements nodaux (sous forme de vecteur) \mathbf{q} par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice \mathbf{N}_u .

Compte tenu des notations utilisées, les interpolations des différents champs se font, sur chaque élément, de la manière suivante :

$$u = \mathbf{N}_u \mathbf{q} \quad (11.1)$$

De la même manière, si les déformations ε sont choisies comme champ inconnu, elles seront approchées à partir des déformations nodales (sous forme de vecteur avec la convention de

l'ingénieur) γ par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice \mathbf{N}_ε .

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}_\varepsilon \boldsymbol{\gamma} \quad (11.2)$$

Cela vaut également pour les contraintes σ qui, si elles sont choisies comme champ inconnu, seront approchées à partir des contraintes nodales (sous forme de vecteur avec la convention de l'ingénieur) τ par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice \mathbf{N}_σ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \boldsymbol{\tau} \quad (11.3)$$

Notons que dans la pratique, rien n'empêche de prendre les mêmes fonctions de forme pour les différents champs. De manière analogue, le vecteur λ de multiplicateurs de Lagrange sera interpolé de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda \mathbf{L} \quad (11.4)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{N}_\varepsilon \boldsymbol{\gamma} && \text{approximation en déformations} \\ &= \mathcal{L} \mathbf{u} && \text{relation déformations déplacements} \\ &= \mathcal{L} \mathbf{N}_u \mathbf{q} && \text{approximation en déplacements} \\ &= \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} && \text{loi de Hooke inverse} \\ &= \mathbf{S} \mathbf{N}_\sigma \boldsymbol{\tau} && \text{approximation en contraintes} \end{aligned} \quad (11.5)$$

et, de façon inverse :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{N}_\sigma \boldsymbol{\tau} && \text{approximation en contraintes} \\ &= \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} && \text{loi de Hooke généralisée} \\ &= \mathbf{H} \mathbf{N}_\varepsilon \boldsymbol{\gamma} && \text{approximation en déformations} \\ &= \mathbf{H} \mathcal{L} \mathbf{u} && \text{loi de Hooke en élasticité linéaire} \\ &= \mathbf{H} \mathcal{L} \mathbf{N}_u \mathbf{q} && \text{approximation en déplacements} \end{aligned} \quad (11.6)$$

avec, en petites déformations :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \text{ en 2D, et } \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \text{ en 3D} \quad (11.7)$$

La méthode des éléments finis *classique*, ou *en déplacements*, n'utilise que le champ de déplacements comme variable. Elle est basée sur le principe du travail virtuel :

$$\delta \Pi_{TV} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}(u) \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(u) - \delta u \bar{f}_\Omega \, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta u \bar{T} \, d\Gamma \quad (11.8)$$

avec \bar{f}_Ω les forces imposées dans Ω et \bar{T} les forces imposées sur Γ_σ , où Γ_σ et Γ_u forment une partition de $\Gamma = \partial\Omega$. Ce principe est obtenu comme variation de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale exprimée en déplacements :

$$\Pi_{TV} = \int_{\Omega} \frac{1}{2}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - {}^T \mathbf{q} \bar{\mathbf{f}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} {}^T \mathbf{q} \bar{\mathbf{T}} \, d\Gamma \quad (11.9)$$

où les conditions subsidiaires sur les déplacements sont prises en compte directement par l'espace dans lequel les déplacements sont recherchés.

La fonctionnelle d'Hellinger-Reissner est sans doute la plus connue des fonctionnelles mixtes. Elle utilise les champs de déplacements et de contraintes comme variables indépendantes. Son expression est la suivante, \bar{U} désignant les déplacement imposés :

$$\Pi_{HR} = \int_{\Omega} -\frac{1}{2} \sigma S \sigma - \sigma_{ij,j} u + \bar{f}_{\Omega} u \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{T} - T) u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{U} T \, d\Gamma \quad (11.10)$$

bien que l'on puisse la trouver sous une autre forme, obtenue par intégration par parties de celle-ci. Elle n'a à satisfaire à aucune condition subsidiaire.

La stationnarité de cette fonctionnelle conduit aux équations d'équilibre, à la loi de comportement, et aux conditions aux limites en forces et déplacements.

Cette fonctionnelle conduit à un élément ayant les champs de déplacements et de contraintes comme inconnues nodales. Il s'en suit que toutes les composantes de ces champs sont continues. Elle conduit à la résolution d'un système du type mixte (Brezzi) :

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

où la matrice de rigidité est symétrique et non définie-positive, et :

$$\mathbf{A} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} \mathbf{S} \mathbf{N}_{\sigma} \, d\Omega \quad \mathbf{B} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} \mathcal{L} \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad \mathbf{F} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{f}} \, d\Omega \quad (11.12)$$

L'un des moyens pour obtenir une fonctionnelle hybride est d'introduire une condition sur une partie du contour par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange comme présenté un peu plus loin.

Tout comme la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner est associée à la méthode mixte, celle de Pian et Tong est indissociable de l'adjectif hybride, même si, en toute rigueur, elle est une méthode mixte (deux champs) hybride (différents domaines d'interpolation) :

$$\Pi_{PT} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma \, d\Omega + \int_{\Gamma} T u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{T} u \, d\Gamma \quad (11.13)$$

Sa variation est :

$$\delta \Pi_{PT} = - \int_{\Omega} \sigma S \sigma \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta T u + \delta u T \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} \, d\Gamma_{\sigma} \quad (11.14)$$

dont l'avantage principal est de ne pas comporter de dérivée.

Cette variation peut être transformée en :

$$\int_{\Omega} \delta \sigma (\varepsilon - S \sigma) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u T \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} \, d\Gamma$$

La stationnarité de cette fonctionnelle conduit à la loi de comportement, et aux conditions aux limites en contraintes. Les conditions aux limites en déplacements seront imposées par l'espace dans lequel on cherche u .

Le système à résoudre est de la forme mixte donné précédemment à la relation (11.11) avec :

$$\mathbf{A} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} \mathbf{S} \mathbf{N}_{\sigma} \, d\Omega \quad \mathbf{B} = + \int_{\Gamma} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} {}^T \mathbf{M} \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad \mathbf{F} = + \int_{\Gamma_{\sigma}} {}^T \mathbf{N}_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{T}} \, d\Gamma \quad (11.15)$$

\mathbf{M} étant la matrice des cosinus directeurs donnée par les relations :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{pmatrix} \text{ dans le plan, et } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans l'espace.}$$

Toutefois, le champ de contraintes n'étant défini que dans Ω , il est possible d'effectuer une condensation statique du champ de contraintes, i.e. de transformer le système (11.11) en écrivant :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (11.17)$$

et le champ de déplacements est solution d'un système de type classique $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$, où la matrice de rigidité \mathbf{K} est remplacée par la matrice de rigidité équivalente suivante :

$$\mathbf{K}_{\text{eq}} = {}^T \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (11.18)$$

Sur le plan du déroulement du calcul, on commence par résoudre une « forme classique » mais en utilisant la matrice de rigidité équivalente \mathbf{K}_{eq} , puis le calcul des contraintes dans chaque élément se fait par la relation (11.17).

Les multiplicateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour introduire des conditions supplémentaires directement à la fonctionnelle. Ces conditions sont généralement imposées sur Γ_X , tout ou partie de Γ , contour de Ω . Pour ce faire, il suffit d'ajouter à la fonctionnelle Π du problème le terme :

$$\pm \int_{\Gamma_X} {}^T \lambda \text{ condition} \quad (11.19)$$

où les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Les multiplicateurs de Lagrange sont généralement utilisés pour :

- introduire des variables physiques additionnelles comme inconnues ;
- obtenir des conditions de dérivabilité ou des conditions aux limites moins sévères sur les inconnues.

Notons qu'un autre de leurs avantages est de permettre l'utilisation d'une formulation différente dans chaque élément, en assurant les continuités nécessaires aux interfaces (voir synthèse de ce problème d'interface au paragraphe 12.3). Bien sûr, apparaissant comme inconnues, ils viennent grossir la taille du système à résoudre.

11.2 Plusieurs modélisations d'un même problème

La qualité de l'approximation des différents champs est non seulement liée au nombre de champs inconnus choisis, mais également au choix de l'élément. Ce dernier peut traduire une « simplification » du problème physique : il s'agit du problème du choix du type de modélisation, en 1, 2 ou 3D.

Selon le type d'information recherché, un modélisation « plus simple » qu'une autre peut fournir les résultats escomptés.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier un exemple où seul le champ de déplacement apparaît comme inconnue nodale. Toutefois, si ce n'est plus le nombre de champ qui peut modifier la formulation, nous allons voir que la mécanique offre moult théories qui toutes ont leurs avantages et inconvénients, mais qui surtout ne sont pas toutes équivalentes.

Histoire

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke¹. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

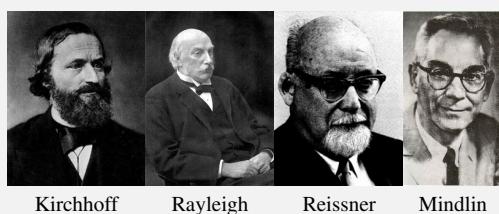
Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui éminent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent (et le fils de Jean Bernoulli), écrit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques... On continua donc à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.



Euler J. Bernoulli D. Bernoulli Timoshenko

La théorie des poutres est une simplification unidimensionnelle. On distingue :

- la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.



Kirchhoff Rayleigh Reissner Mindlin

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces.

La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff, suppose que :

- le plan moyen (équivalent de la courbe moyenne des poutres) est initialement plan ;
- le feuillet moyen (équivalent de la fibre neutre des poutres) ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du feuillet moyen ;
- modèle de Kirchhoff : les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation ; en conséquence, on peut négliger le cisaillement ;
- l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ;
- on reste en petites déformations.

Notons que cette théorie permet de déterminer la propagation des ondes dans les plaques, ainsi que l'étude des ondes stationnaires et des modes vibratoires.

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. On ne peut donc plus négliger le cisaillement.

Robert Hooke, qui désirait obtenir une théorie des ressorts en soumettant ces derniers à des forces croissantes successives, énonça en 1978, à partir d'expériences datant de 1675, la loi de comportement suivante : « ut tensio sic vis » ce qui signifie « telle extension, telle force », ou bien en termes modernes « l'allongement est proportionnel à la force ».

La figure 11.1 propose trois modélisations d'un même problème. Il s'agit d'une poutre encastrée à une extrémité et soumise à une force décentrée à l'autre. Vaut-il mieux modéliser l'intégralité du volume de la poutre, la traiter comme une plaque, ou peut-on se contenter d'un modèle de poutre ?

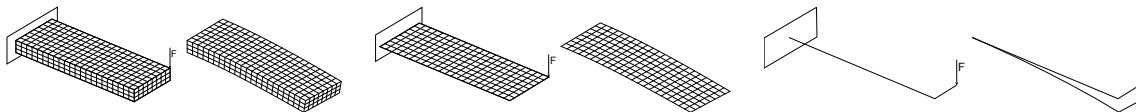


FIGURE 11.1 – Trois modélisations d'un même problème.

L'étude de la contrainte axiale σ_{xx} est donnée à la figure 11.2. Si les cartographies présentent bien la même répartition, seul le modèle 3D permet de mettre en évidence la concentration de contrainte due à la force ponctuelle.

Si on veut comparer les trois modèles sur cette même composante, alors on se reportera à la figure 11.2. On y voit que loin des extrémités, les trois solutions concordent parfaitement,

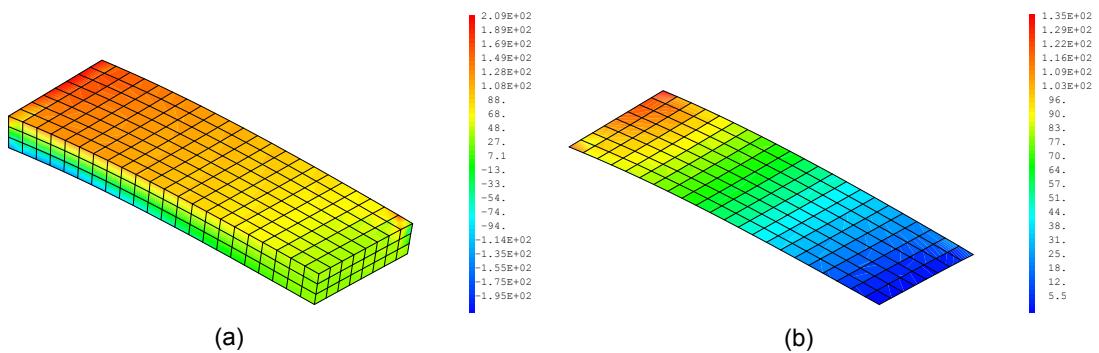


FIGURE 11.2 – Contrainte axiale sur la peau supérieure : (a) modèle 3D, (b) modèle 2D.

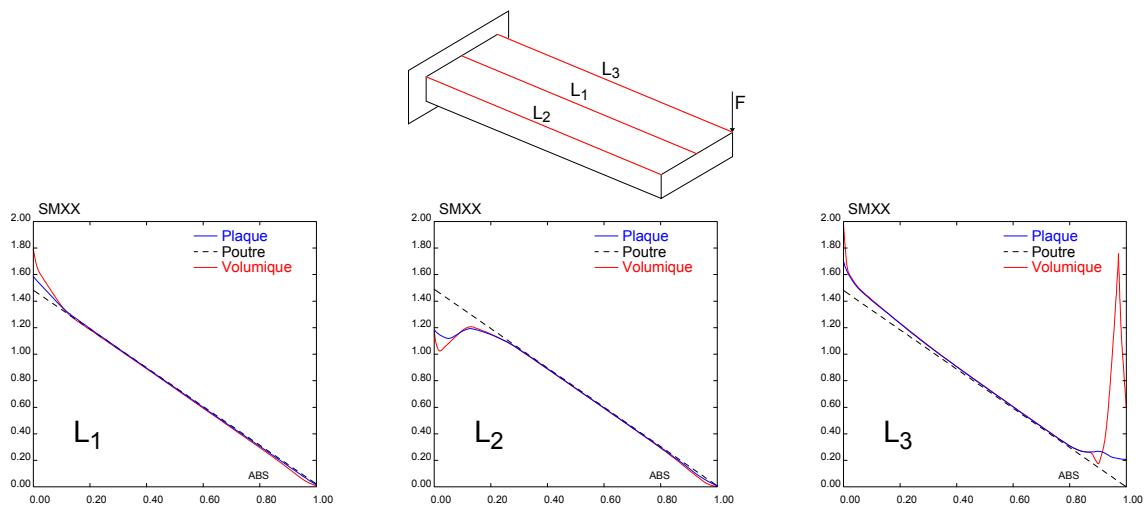


FIGURE 11.3 – Contrainte axiale sur la peau supérieure en différentes sections

conformément au principe de Saint-Venant.² Les différences proviennent des effets de bord, i.e. des variations locales des contraintes et déformations au voisinage des conditions aux limites.

Une comparaison plus fine des trois modélisations concernant cette même contrainte normale le long de trois lignes est reportée à la figure 11.4.

Les différences de résultats proviennent des hypothèses cinématiques et des composantes accessibles dans les différentes théories utilisées.

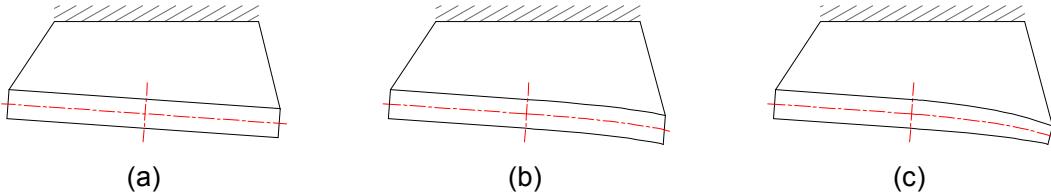


FIGURE 11.4 – Mouvements d'une section droite : (a) théorie des poutres ; (b) théorie des plaques ou coques ; (c) théorie volumique

Les hypothèses cinématiques sont :

- la **théorie des poutres** (Figure 11.4a) suppose que chaque section droite suit un mouvement de solide rigide. Les sections ne peuvent donc pas se déformer, elles peuvent uniquement se translater et tourner dans l'espace (sans forcément rester perpendiculaires à la ligne moyenne,

2. Le **principe de Saint-Venant** précise que le comportement en un point quelconque de la poutre, pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'applications des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons ; le comportement dépend alors uniquement du torseur des forces internes en ce point.

car dans ce cas on considère une théorie avec cisaillement transverse) ;

- la **théorie des plaques** (Figure 11.4b), moins restrictive, suppose que chaque segment perpendiculaire au plan moyen de la plaque suit un mouvement de solide rigide (là encore, sans forcément rester perpendiculaire au plan moyen). Elle permet donc de modéliser certaines formes de déformations des sections, planes (flexion et cisaillement dans le plan de la section, traction dans le sens de la largeur) ou hors plan (certains types de gauchissement). Cependant, les segments ne pouvant pas changer de longueur, elle ne permet pas de modéliser l'écrasement de l'épaisseur ;
- enfin, la **théorie 3D** (Figure 11.4c) ne comporte aucune de ces restrictions et peut modéliser n'importe quelle forme de gauchissement ou d'écrasement, à condition que le maillage employé soit suffisamment fin.

Ici, la comparaison des résultats « plaque » et « 3D » montre que la contribution de l'écrasement de la section à la flèche semble négligeable (0,7% d'écart). Ce n'est pas forcément vrai car l'écrasement est un phénomène localisé sous la charge et lié au contact, qui a été modélisé très grossièrement... Cette très forte concentration de contraintes sous la charge est caractéristique d'une singularité. La valeur obtenue est peu fiable. On peut même dire que physiquement, une force ponctuelle n'existe pas. Elle est forcément distribuée sur une petite surface...

De même, la comparaison des résultats « poutre » et « plaque » montre que la flexion et le cisaillement de la section contribuent davantage à la flèche que l'écrasement (6,4% d'écart) : la largeur de la pièce est visiblement suffisante pour que les déformations des sections droites provoquent un déplacement vertical non négligeable sous la charge.

Il est essentiel de noter que toutes les théories ne permettent pas d'accéder à toutes les composantes du champ des contraintes : de manière générale, seuls les efforts qui travaillent dans les déplacements permis par la théorie sont accessibles (les théories sont ainsi faites afin de pouvoir respecter le premier principe de la thermodynamique dont l'écriture nécessite de calculer le travail de tous les efforts permis par la théorie). Les composantes accessibles sont :

- la **théorie des poutres** ne permet pas de calculer les contraintes dans le plan transversal (σ_{yy} , σ_{zz} et σ_{yz}) du fait de l'indéformabilité des sections droites. ;
- la **théorie des plaques** ne permet pas de calculer la contrainte normale au plan de la plaque (σ_{zz} , du fait de l'indéformabilité des segments perpendiculaires à ce plan) ;
- enfin, la **théorie 3D** permet de calculer les six composantes du tenseur des contraintes.

À ces limitations théoriques peuvent s'ajouter des limitations techniques propres à chaque logiciel, susceptibles de rendre d'autres grandeurs physiques inaccessibles. Avant d'effectuer une modélisation par éléments finis, il est donc indispensable de s'assurer que le logiciel utilisé et son cadre théorique permettent bien d'accéder au résultat voulu (en plus d'être pertinents vis-à-vis de la géométrie du produit, de son environnement et du comportement attendu).

De plus, si certains logiciels peuvent avoir des « limitations techniques », ils peuvent également disposer de méthodes de post-traitement susceptibles d'améliorer ou de permettre d'accéder à certaines composantes (sous certaines hypothèses). Cela aussi doit être pris en compte.

11.3 Exemple : retour sur le calcul de poutre du paragraphe 11.1 avec CAST3M

Nous allons reprendre pour partie l'exemple de la poutre encastrée traitée au paragraphe précédent et présenter le listing CAST3M correspondant.

11.3.1 Modélisation 2D

Nous commençons par définir les données du problème : longueur, largeur, épaisseur, nombre d'éléments selon chacune de ces directions, et force appliquée :

```

1 * DONNEES
2 * geometrie
3 long1=22.0;
4 larg1=8.;
5 ep1=4;
6 * maillage
7 nlong1=22;
8 nlarg1=8;
9 * effort
10 Forc1=-41.;
```

Puis nous définissons la dimension du problème (modèle tridimensionnel), et le type de découpe :

```
11 OPTION DIME 3 ELEM QUA4;
```

Nous définissons les points k_i (dénommés ainsi pour rappel de la syntaxe Ansys des keypoints k, i, \dots), puis les lignes L_i , et la surface S_1 .

```

12 k1 = 0. 0. 0. ;
13 k2 = long1 0. 0. ;
14 k3 = long1 larg1 0. ;
15 k4 = 0. larg1 0. ;
16 *
17 L1 = DROI nlong1 k1 k2;
18 L2 = DROI nlarg1 k2 k3;
19 L3 = DROI nlong1 k3 k4;
20 L4 = DROI nlarg1 k4 k1;
21 *
22 S1 = DALLER L1 L2 L3 L4;
```

Le modèle est un modèle de mécanique élastique isotrope utilisant lélément de coque COQ4 pour le maillage S_1 :

```
23 Model1 = MODL S1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE COQ4;
```

Enfin on résoud le problème après avoir fourni les données matérielles et les conditions aux limites :

```

24 Mater1 = MATERIAU Model1 YOUNG 70000.0 NU 0.33 RHO 2700.0;
25 Car1 = CARAC Model1 EPAI ep1;
26 Mater1 = Mater1 ET Car1;
27 MR1 = RIGIDITE Model1 Mater1;
28 CL1 = BLOQ DEPL L4;
29 CL2 = BLOQ ROTA L4;
30 FOR1 = FORCE(0. 0. Forc1) k3;
31 MTOT1 = MR1 ET CL1 ET CL2;
32 Depl1 = RESOUD MTOT1 FOR1 ;
```

On peut post-traiter les résultats et les afficher.

Les composantes de Sig_1 dans le repère LOCAL sont :

- les efforts normaux : N11, N22 ;
- l'effort de cisaillement plan : N12 ;

- les moments de flexion : M11, M22 ;
- le moment de cisaillement plan : M12 ;
- les efforts tranchants V1, V2.

Les composantes de Eps_1 dans le repère LOCAL sont :

- les elongations normales dans le plan : EPSS, EPTT ;
- les cissions dans le plan et transverses : GAST, GASN, GATN ;
- les courbures : RTSS, RTTT, RTST.

```

33 * DEPLACEMENTS
34 UZ1 = EXCO 'UZ' depl1;
35 *TRAC UZ1 S1;
36 *
37 * DEFORMEE
38 def0 = DEF0 S1 Depl1 0.0 BLEU;
39 def1 = DEF0 S1 Depl1;
40 *TRAC (def0 ET def1);
41 *
42 * CONTRAINTES:
43 Sig1 = SIGM Model1 Mater1 Depl1;
44 Siigg1 = EXCO M11 Sig1;
45 TRAC Siigg1 Model1 def1;
46
47 * DEFORMATIONS
48 Eps1 = EPSI Model1 Mater1 Depl1;
49 Eppss1 = EXCO RTSS Eps1;
50 *TRAC Eppss1 Model1;
51
52 fin;
```

11.3.2 Modèle 3D

Nous allons maintenant construire le modèle tridimensionnel.

Comme nous voulons travailler à l'économie, nous repartons du fichier précédent que nous adaptons.

```

1 * DONNEES
2 * geometrie
3 long1=22.0;
4 larg1=8.;
5 ep1=2;
6 * maillage
7 nlong1=22;
8 nlarg1=8;
9 nep1=3;
10 * effort
11 Forc1=-41.;
```

Cette fois, nous nous servons de CUB8 au lieu de QUA4.

```

12 OPTION DIME 3 ELEM CUB8;
13 *
14 k1 = 0. 0. 0.;
```

```

15 k2 = long1 0. 0.;
16 k3 = long1 larg1 0.;
17 k4 = 0. larg1 0.;
18 *
19 L1 = DROI nlong1 k1 k2;
20 L2 = DROI nlarg1 k2 k3;
21 L3 = DROI nlong1 k3 k4;
22 L4 = DROI nlarg1 k4 k1;
23 *
24 S1 = DALLER L1 L2 L3 L4;

```

À partir de la surface S_1 , qui est la même que précédemment, nous allons créer le volume V_1 par translation selon le vecteur $Vect_1$.

Nous en profitons également pour créer $Face_1$ sur laquelle porterons les conditions aux limites. Notons par exemple que la ligne L_4 appartient bien au maillage V_1 , puisque ce dernier est construit dessus. Par contre, la surface $face_1$ n'appartient pas à V_1 , il est donc nécessaire de la lier à V_1 en utilisant la commande ELIM.

```

25 Vec1=0. 0. (-1.0*ep1);
26 V1=S1 VOLU nep1 TRAN Vec1;
27 Face1 = L4 TRAN nep1 Vec1;
28 ELIM 0.0000001 V1 Face1;

```

Cette fois, le modèle correspond au maillage V_1 et utilise l'élément CUB8.

```
29 Model1 = MODL V1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE CUB8;
```

On résoud, puis on post-traite.

```

30 Mater1 = MATERIAU Model1 YOUNG 70000.0 NU 0.33 RHO 2700.0;
31 MR1 = RIGIDITE Model1 Mater1;
32 CL1 = BLOQ DEPL Face1;
33 CL2 = BLOQ ROTA Face1;
34 FOR1 = FORCE(0. 0. Forc1) k3;
35 MR1 = MR1 ET CL1 ET CL2;
36 Depl1 = RESOUD MR1 FOR1 ;
37 *
38 * DEPLACEMENTS
39 UZ1 = EXCO 'UZ' depl1;
40 *TRAC CACH UZ1 V1;
41 * DEFORMEE
42 def0 = DEFO V1 Depl1 0.0 BLEU;
43 def1 = DEFO V1 Depl1;
44 *TRAC CACH (def0 ET def1);
45 *
46 * CONTRAINTES:
47 Sig1 = SIGM Model1 Mater1 Depl1;
48 * Les composantes de Sig1 sont: VONMISES, SMXX, SMYY, SMZZ, SMXY, SMXZ, SMYZ
49 Siigg1 = EXCO SMXX Sig1;
50 * on trace sur la geometrie deformee, c'est plus beau
51 TRAC CACH Siigg1 Model1 def1;
52 *

```

```

53 * DEFORMATIONS
54 *Eps1 = EPSI Model1 Mater1 Depl1;
55 *TRAC CACH Eps1 Model1;
56
57 fin;

```

11.4 Interpolation des champs et de la géométrie

Un élément est dit isoparamétrique si on prend les mêmes fonctions d'interpolation pour le déplacement et la géométrie.

De manière évidente, on définit également les éléments super et sous-paramétriques, comme illustré à la figure 11.5.

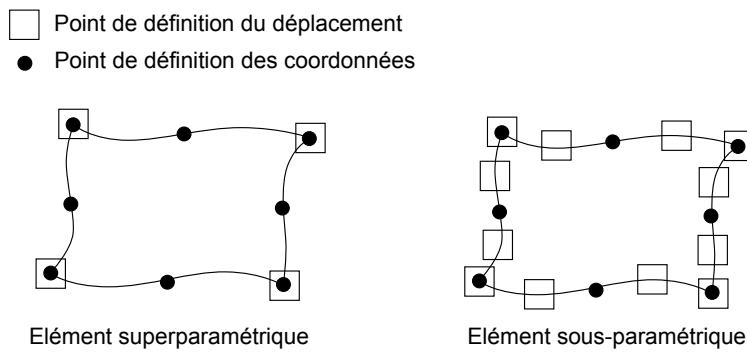


FIGURE 11.5 – éléments finis non isoparamétriques

Ceci est juste une remarque en passant, pour définir le vocabulaire en somme, nous n'en reparlerons plus dans la suite du document.

Chapitre 12

Formulation pratique d'éléments finis

Résumé — L'intégralité de la méthode des éléments finis a été présentée au chapitre 10.

Dans ce chapitre et dans les suivants, nous allons détailler certains aspects. Nous proposons dans ce chapitre d'exposer un peu plus complètement les notions d'interpolation sur un élément, ainsi que le lien entre approximation locale (sur un élément) et approximation globale (construction de la base de V_h).

Nous avons dit vouloir interpoler le problème sur chaque élément. Pour ce faire, il faut prendre une base sur chaque élément. Plusieurs choix sont possibles, mais en général, les fonctions de base utilisées pour les éléments finis sont dites interpolantes, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont les valeurs des grandeurs inconnues aux nœuds, et que c'est à partir de ces valeurs que l'on effectue l'interpolation.

La méthode la plus simple consiste à utiliser les polynômes de Lagrange. Dans cette méthode les fonctions de base valent 1 à un nœud du maillage et 0 à tous les autres. La fonction de base i est alors la fonction valant 1 au nœud i et 0 sur les autres nœuds et qui est polynomiale sur chaque élément. Il y a autant de fonctions de base par élément que de nombre de nœuds.

On appelle élément la donnée d'une géométrie (souvent polygonale en 2D, polyédrique en 3D) et de fonctions de base associées à cette géométrie.

D'autres solutions peuvent exister pour les fonctions de base. Par exemple, les éléments finis d'Hermite ont la particularité d'avoir deux fonctions de base associées à chaque nœud. La valeur de la solution est alors ajustée avec la première fonction alors que la deuxième permet d'ajuster la valeur de la dérivée. Ce type de fonctions de base peut avoir un intérêt pour la résolution de certaines EDP (telle que l'équation des plaques en MMC), même si elle nécessite d'avoir deux fois plus de fonctions pour un maillage donné.

12.1 Éléments de Lagrange

Les éléments de Lagrange sont les éléments finis les plus simples.

12.1.1 Unisolvance

Définition 42 — Unisolvance. Soit $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n . Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que Σ est P -unisolvant ssi pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, il existe un unique élément p de P tel que $\forall i = 1, \dots, N$, $p(a_i) = \alpha_i$. (ce qui revient à dire que la fonction de P dans \mathbb{R}^N qui à p fait correspondre $(p(a_1), \dots, p(a_N)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ est bijective).

12.1.2 Éléments finis de Lagrange

Définition 43 — Éléments finis de Lagrange. Un élément fini de Lagrange est un triplet (K, Σ, P) tel que :

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n , compact, connexe, et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n ;
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant (donc $\dim P = N$).

Les fonctions de bases locales de l'élément fini de Lagrange (K, Σ, P) sont les N fonctions de P telles que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq N$.

Remarque (p_1, \dots, p_N) est une base de P .

Définition 44 — Opérateur de P -interpolation. Un opérateur de P -interpolation sur Σ est un opérateur π_K qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction $\pi_K v$ de P définie par :

$$\pi_K v = \sum_{i=1}^N v(a_i) p_i.$$

Théorème 29 $\pi_K v$ est l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ .

On notera P_k l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à k .

- sur \mathbb{R} , $P_k = \text{Vect}\{1, X, \dots, X^k\}$ et $\dim P_k = k+1$;
- sur \mathbb{R}^2 , $P_k = \text{Vect}\{X^i Y^j, 0 \leq i+j \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$;
- sur \mathbb{R}^3 , $P_k = \text{Vect}\{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i+j+l \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.

On notera Q_k l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable.

- sur \mathbb{R} , $Q_k = P_k$;
- sur \mathbb{R}^2 , $Q_k = \text{Vect}\{X^i Y^j, 0 \leq i, j \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k+1)^2$;
- sur \mathbb{R}^3 , $Q_k = \text{Vect}\{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i, j, l \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k+1)^3$.

Éléments finis unidimensionnels

On discrétise le segment $[a, b]$ avec des polynômes de degrés 1 à m . On obtient les éléments suivants :

Élément	P_1	P_2	...	P_m
K	$[a, b]$	$[a, b]$...	$[a, b]$
Σ	$\{a, b\}$	$\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$...	$\{a + i \frac{b-a}{m}, i = 0, \dots, m\}$
P	P_1	P_2	...	P_m

Éléments finis bidimensionnels triangulaires

On discrétise le triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$ avec, le long de chaque arête une interpolation polynomiale de degré 1 à m . On obtient les éléments suivants :

Élément	P_1	P_2
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}, 1 \leq i, j \leq 3\}$
P	P_1	P_2

Remarque Les fonctions de base pour l'élément P_1 sont définies par $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. Ce sont les coordonnées barycentriques : $p_i = \lambda_i$.

Éléments finis bidimensionnels rectangulaires

On discrétise le rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes.

Élément	Q_1
K	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes.
Σ	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
P	Q_1

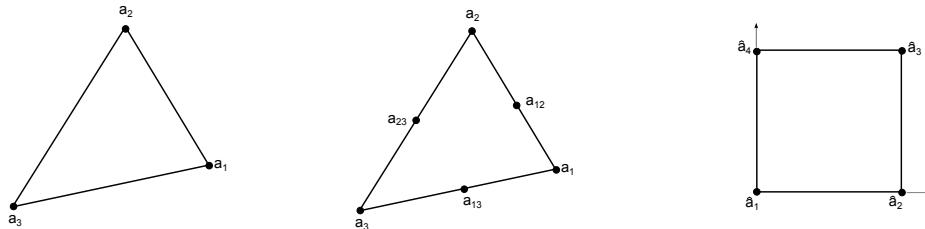


FIGURE 12.1 – Éléments finis de Lagrange 2D : triangulaire P_1 , triangulaire P_2 et rectangulaire Q_1

Éléments finis tridimensionnels

Éléments tétraédriques :

Élément	P_1	P_2
K	tétraèdre de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	tétraèdre de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
Σ	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	$\{a_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$
P	P_1	P_2

Élément parallélépipédique :

Élément	Q_1
K	parallélépipède de sommets $\{a_1, \dots, a_8\}$ de côtés parallèles aux axes.
Σ	$\{a_i\}_{1 \leq i \leq 8}$
P	Q_1

Élément prismatique :

Élément	Q_1
K	prisme droit de sommets $\{a_1, \dots, a_6\}$
Σ	$\{a_i\}_{1 \leq i \leq 6}$
P	$\{p(X, Y, Z) = (a + bX + cY) + Z(d + eX + fY), a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$

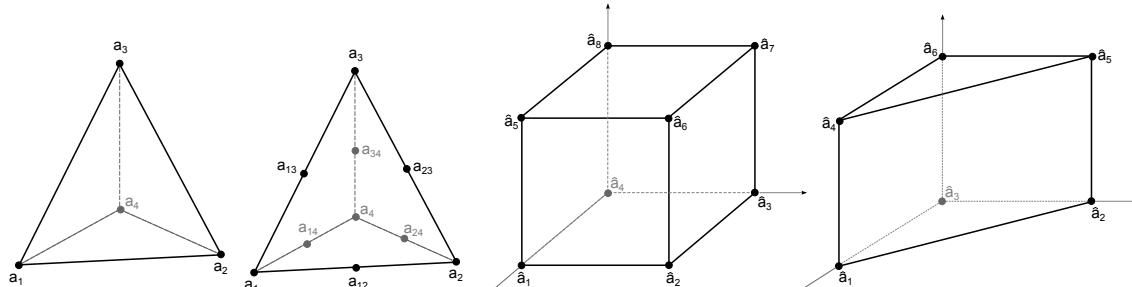


FIGURE 12.2 – Éléments finis de Lagrange 3D : tétraédriques P_1 et P_2 , parallélépipédique Q_1 et prismatique

12.1.3 Famille affine d'éléments finis – élément de référence

En fait, la notion de transformation affine entre un élément K d'un maillage \mathcal{T}_h et un élément de référence a déjà été utilisée en calcul de majoration d'erreur, mais la transformation elle-même n'a pas été détaillée.

Deux éléments finis $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ et (K, Σ, P) sont affine-équivalents ssi il existe une fonction affine F inversible telle que $K = F(\hat{K})$, $a_i = F(\hat{a}_i)$, $i=1, \dots, N$, et $P = \{\hat{p} \circ F^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}$.

Définition 45 — famille affine d'éléments finis. On appelle famille affine d'éléments finis une famille d'éléments finis tous affine-équivalents à un même EF appelé élément de référence.

D'un point de vue pratique, le fait de travailler avec une famille affine d'EF permet de ramener tous les calculs d'intégrales à des calculs sur l'élément de référence. Voir figure 12.3 pour une illustration d'une transformation affine.

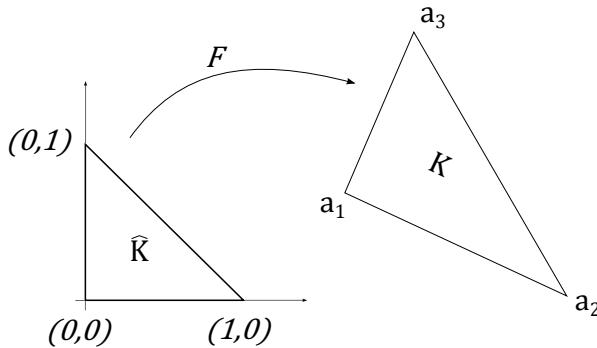


FIGURE 12.3 – Transformation affine sur un triangle

Les EF de références sont ceux obtenus, dans les cas présentés ci-dessus avec :

- le segment $[0, 1]$ en 1D ;
- le triangle unité de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$,
- et le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ en 2D ;
- le tétraèdre unité de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$,
- le cube unité $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$,
- le prisme unité de sommets $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.

12.1.4 Construction de la base globale

Revenons à notre problème décrit par une EDP sous forme faible dans un domaine Ω sur lequel on réalise un maillage \mathcal{T}_h à partir d'une famille affine de N_e éléments finis $(K_i, \Sigma_i, P_i)_{i=1, \dots, N_e}$.

Par unisolvance, la solution approchée u_h sera entièrement définie sur chaque EF par ses valeurs sur les points de Σ_i , nommés nœuds du maillage. Notons (a_1, \dots, a_{N_h}) les nœuds du maillage ($N_h < N_e \cdot \text{Card} \Sigma_i$). Le problème approché revient à déterminer les valeurs de u_h aux points a_i : ce sont les degrés de liberté du problème approché.

On va construire une base de V_h en associant à chaque ddl a_i un vecteur de la base. On définit ainsi les fonctions de base globales φ_i ($i = 1, \dots, N_h$) par :

$$\varphi_i|_{K_j} \in P_j, j = 1, \dots, N_e \quad \text{et} \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq N_h \quad (12.1)$$

et l'espace d'approximation interne est : $V_h = \text{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$.

On remarquera qu'une telle fonction φ_i est nulle partout sauf sur les éléments dont a_i est un nœud.

De plus, sur un élément K dont a_i est un nœud, φ_i vaut 1 en a_i et 0 aux autres nœuds de K . Donc $\varphi_i|_K$ est une fonction de base locale de K . On voit donc que la fonction de base globale φ_i est

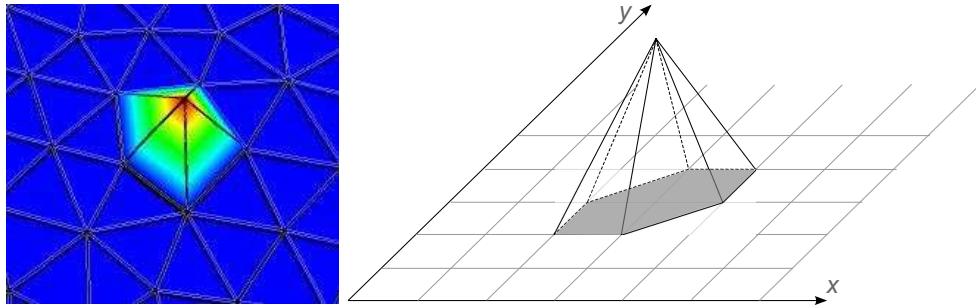


FIGURE 12.4 – Base de V_h : exemple de fonction de base globale φ_i sur un maillage avec des éléments triangulaires P_1 .

construite comme réunion des fonctions de base locales sur les éléments du maillage dont a_i est un nœud.

Remarque : ce qui précède est vrai dans le cas d'un maillage conforme, i.e si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un sommet ou une arête en dimension 2, ou à un sommet, une arête ou une face en dimension 3.

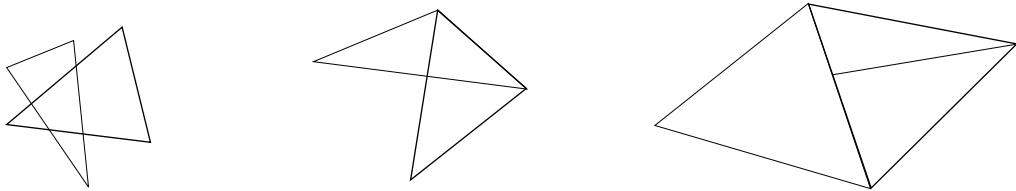


FIGURE 12.5 – Maillage non conforme : situations interdites

12.2 Éléments d'Hermite

12.2.1 Classe d'un EF

Une question naturelle est de savoir quelle est la régularité de la solution approchée u_h . En particulier, u_h est-elle continue ? dérivable ?

u_h est obtenue par combinaison linéaire des fonctions de base globales φ , la question revient donc à déterminer la régularité de celles-ci. Par construction, on voit que la régularité de φ_i sera donnée par sa régularité au niveau des interfaces entre les éléments adjacents formant son support.

Dans les EF de Lagrange, φ_i est construite pour être continue d'un élément à l'autre, mais pas sa dérivée... c'est cette contrainte que nous allons introduire maintenant.

12.2.2 EF d'Hermite

Définition 46 — EF d'Hermite. Un élément fini d'Hermite ou élément fini général est un triplet (K, Σ, P) tel que :

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n , compact, connexe, et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ un ensemble de N formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur K , ou sur un sous-espace plus régulier contenant P ;
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant.

Définition 47 — Opérateur de P-interpolation. Un opérateur de P-interpolation sur Σ est un opérateur π_K qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction $\pi_K v$ de P définie par :

$$\pi_K v = \sum_{i=1}^N \sigma_i(v) p_i.$$

$\pi_k v$ est l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ .

On remarque immédiatement que si $\sigma_i(p) = p(ai)$, $i = 1, \dots, N$, on retrouve les EF de Lagrange.

Cette généralisation permet d'introduire des opérations de dérivation dans Σ , et donc d'améliorer la régularité des fonctions de V_h .

Les fonctions de base globales φ_i , ($i = 1, \dots, N_h$) sont définies par :

$$\varphi_i|_{K_j} \in P_j, j = 1, \dots, N_e \quad \text{et} \quad \sigma_j(\varphi_i) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq N_h \quad (12.2)$$

Suivant les éléments utilisés, ces fonctions de base pourront être de classe C^1 ou même plus, et il en sera donc de même pour la solution approchée u_h .

EF 1D

Élément d'Hermite	cubique	quintique
K	segment $[a, b]$	segment $[a, b]$
Σ	$\{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$	$\{p(a), p'(a), p''(a), p(b), p'(b), p''(b)\}$
P	P_3	P_3
Régularité	C^1 et H^2	C^2 et H^3

EF 2D triangulaire

- Élément d'Hermite cubique :
 - K = triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$;
 - $\Sigma = \left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1, 2, 3 \right\} \cup \{p(a_0)\}$;
 - $P = P_3$;
 - élément C^0 , mais pas C^1 .
- Élément d'Argyris :
 - K = triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$;
 - $\Sigma = \left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, 2, 3 \right\} \cup \left\{ \frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3 \right\}$;
 - $P = P_5$;
 - élément C^1

EF 2D rectangulaire

Élément Q_3 :

- K = rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes ;
- $\Sigma = \left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \dots, 4 \right\}$;
- $P = P_3$;
- élément C^1 .

12.3 Traitement de plusieurs champs

Dans ce qui précède, le lecteur aura noté que l'on interpole un seul champ, en imposant ou non certaines régularités (dérivées partielles).

Une question naturelle consiste à se demander comment traiter les problèmes ayant plusieurs champs inconnus (cela à déjà été abordé, et certaines stratégies ont déjà été présentées : formulation mixte (Brezzi), utilisation de multiplicateurs de Lagrange).

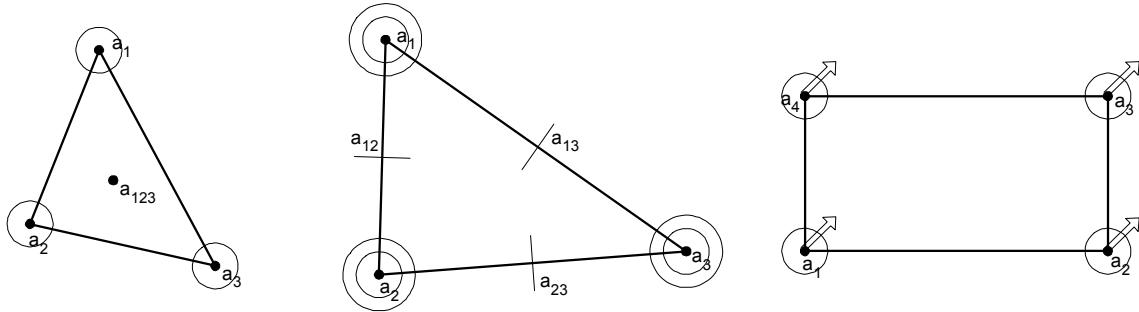


FIGURE 12.6 – Éléments finis d’Hermite triangulaire cubique, élément d’Argyris et élément rectangulaire Q_3

On pourrait imaginer, si ces champs sont « dissociés » (sans lien les uns avec les autres), de modéliser chaque champ séparément, i.e. de traiter un problème par champ (avec pour chaque champ un choix de maillage et d’élément qui lui est propre).

En fait, les problèmes à plusieurs champs ne concernent généralement pas des champs indépendants. Lorsque l’on a plusieurs champs interdépendants, alors on dispose de relations entre ces champs, qui doivent elles-aussi être satisfaites.

Nous avons exposé au chapitre précédent pourquoi la mécanique reste un cas compliqué. Cela provient de ce que les champs inconnus sont les déplacements, déformations et contraintes. De plus, le chapitre précédent a permis une illustration du choix d’un modèle, même lorsque l’on ne recourt qu’à une théorie à un champ (déplacements).

Nous ne construirons pas ici un élément à plusieurs champs, mais nous allons donner une motivation pour le faire : celui du calcul des contraintes à l’interface entre deux matériaux différents que nous supposerons parfaitement collés.

Considérons donc le problème décrit à la figure 12.7. Deux domaines Ω_1 et Ω_2 , constitués

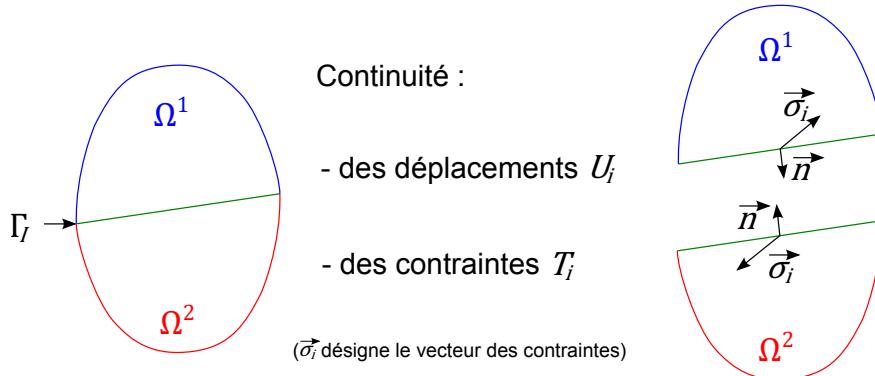


FIGURE 12.7 – Interface et continuités

chacun de leur propre loi de comportement, ont une interface commune Γ_I . On supposera que le champ de déplacement est continu le long de Γ_I . La continuité de la composante normale du déplacement à l’interface traduit le fait qu’il n’y a pas décollement entre les deux domaines ; celle de la composante tangentielle qu’il n’y a pas glissement entre eux.

On peut donc dire qu’en tout point de Γ_I le déplacement est continu, ce que l’on peut noter $u_i^1 = u_i^2$.

L’état d’équilibre des forces doit lui-aussi être vérifié le long de l’interface. Cela implique que les composantes normales des contraintes doivent être également continues le long de cette interface, i.e. que la trace du tenseur des contraintes doit être continue le long de l’interface. Par contre, les autres composantes peuvent (et doivent selon les cas) être discontinues.

Plusieurs stratégies sont envisageables :

Post-traitement Dans cette méthode, on effectue le calcul en déplacements, de manière classique.

On obtient les contraintes de manière toute aussi classique, mais celles-ci n'ont évidemment pas les continuités et discontinuités souhaitées.

On utilise une méthode de post-traitement qui va modifier le calcul des contraintes sur les éléments situés de part et d'autre de l'interface, par exemple en imposant la vérification des équations d'équilibre (voir par exemple la méthode de Reissner locale, qui applique la fonctionnelle de Reissner uniquement le long de l'interface).

Élément mixte La fonctionnelle d'Hellinger-Reissner possède les champs de déplacement et de contrainte comme inconnues. Elle conduit à un système de type mixte (équation (11.11)) avec une matrice qui n'est plus définie-positive.

Il s'en suit que ces deux champs sont continus, et notamment que toutes les composantes des contraintes le sont, ce qui ne satisfait pas les conditions d'équilibre.

Si l'on souhaite utiliser ce type d'élément, il faudra par exemple, faire une condensation statique des composantes devant être discontinues, ou utiliser une méthode de post-traitement.

Élément hybride La fonctionnelle de Pian et Tong (mixte hybride) présentée précédemment a l'avantage de ne pas faire intervenir de dérivée. Elle conduit elle-aussi à un système de type mixte, mais la matrice de rigidité n'est même plus symétrique (dans une discréétisation « brutale »). On sait la retrouver.

Toutes les composantes des contraintes sont là aussi continues, et il faudra appliquer les mêmes remèdes que ci-dessus.

Notons qu'un avantage de cette formulation c'est qu'elle nécessite la matrice de souplesse $[S]$ au lieu de la matrice de Hooke $[H]$, ce qui permet de traiter le cas des matériaux incompressibles.

Multiplicateurs de Lagrange D'une manière évidente, la continuité du champ de déplacements à l'interface Γ_I entre deux éléments ¹ et ² peut être imposée par l'ajout à la fonctionnelle de la condition :

$$-\int_{\Gamma_I} \lambda_i(U_i^1 - U_i^2) \, d\Gamma \quad (12.3)$$

Cette condition est facile à écrire et facile à implémenter (mais on perd la définie-positivité de la matrice de rigidité).

De plus, l'interprétation physique de ces multiplicateurs de Lagrange montre que ceux-ci sont égaux aux composantes normales des contraintes.

Voilà quelques stratégies. D'autres peuvent exister, surtout si en plus on veut passer sur des modèles poutre ou plaque.

Le but était de montrer que non seulement il est possible de développer de nombreux éléments finis, mais que même à partir d'éléments existants, il est toujours possible de construire une méthode numérique permettant d'obtenir les résultats souhaités.

Les méthodes de post-traitement, que nous n'aborderons pas dans ce document, sont très riches et permettent de faire beaucoup de choses. Elles ont en outre l'avantage d'être parfois plus faciles à implémenter dans des codes industriels que de nouveaux éléments.

12.4 Validation pratique d'un EF, indicateurs d'erreur

Les tests numériques des éléments et au delà des codes de calcul sont indispensables. Non seulement ils permettent de vérifier la satisfaction de critères de convergence et d'évaluer la précision des éléments finis développés, ce qui peut être réalisé par une analyse mathématique, mais ils permettent également de s'assurer de la bonne programmation.

Plusieurs types de tests peuvent et doivent être faits, sur plusieurs problèmes types. Ces tests concernent aussi bien un seul élément, que plusieurs (patch-test), et même différents maillages.

En mécanique, on distingue les cas suivants :

Problème / solution de référence	Maillage	Vérification	Importance
Mouvement rigide et déformations constantes	1 élément	base polynomiale complète / modes parasites	convergence du modèle EF vers la solution théorique lorsque le nombre d'élément tend vers l'infini.
Mouvement rigide et déformations constantes	plusieurs éléments : patch-test cinématique ou mécanique	base complète, conformité, indépendance par rapport au maillage (vérification de l'assemblage), absence de modes parasites	Test particulièrement pour les non standard ou non conformes.
Champ de déformations générales	différents maillages	précision et influence de la distortion sur les déplacements et la contrainte	qualité de l'élément par rapport à d'autres éléments existants.

12.4.1 Modes rigides et parasites

Le problème consiste à savoir si un élément fini, que l'on définira ici par sa matrice \mathbf{k} , peut présenter l'état de déformation nulle ou d'énergie interne nulle (mode ou mouvement de corps rigide).

Une méthode consiste à déterminer le nombre de valeurs propres nulles de \mathbf{k} . Ce nombre doit être égal au nombre de modes rigides : soit 3 en 2D (2 translations, 1 rotation), 6 en 3D, 1 en axisymétrique. On notera m_r le nombre de modes rigides.

S'il y a plus de valeurs propres nulles que de modes rigides, alors c'est qu'il y a des modes parasites (à énergie nulle). Ces modes parasites doivent disparaître après assemblage de plusieurs éléments afin d'éviter que la matrice de rigidité soit singulière (d'où le test sur plusieurs éléments).

Le schéma d'intégration choisi pour la définition de l'élément (par exemple intégration complète, réduite ou sélective) peut influer sur les modes parasites. C'est pourquoi, il n'est pas toujours aussi simple de déterminer mathématiquement ce facteur.

Dans ce cas, il est possible d'introduire un champ de déplacement représentant le mouvement rigide.

Pour chaque mode rigide i , le vecteur \mathbf{u}_n^i associé à la matrice \mathbf{k} doit vérifier :

$$\mathbf{k}\mathbf{u}_n^i = \mathbf{0} \quad (12.4)$$

Un mode rigide quelconque étant une combinaison linéaire des modes \mathbf{u}_n^i , on construit un problème EF dans lequel on impose m_r valeurs du vecteur \mathbf{u}_n^i et on détermine numériquement les $n - m_r$ composantes (non imposées) de \mathbf{u}_n^i . Celles-ci doivent être identiques aux valeurs théoriques associées au mode rigide i . Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il existe des modes rigides.

12.4.2 Modes associés aux déformations constantes

Pour converger correctement l'élément doit également représenter exactement l'état de déformations ou contraintes constantes (ou plus généralement la représentation « constante » de tous les termes de la forme variationnelle).

Dans un premier temps, on calcule les efforts nodaux correspondant à une contrainte fixée.

Dans un second temps, on introduit les efforts nodaux comme condition aux limites dans le modèle élément fini et on vérifie si l'on retrouve bien l'état de contrainte initialement choisi.

12.4.3 Patch-tests

Le domaine choisi doit posséder au moins un nœud à l'intérieur du domaine.

On définit un champ de déplacement conduisant à un état de déformation désiré (constant ou non), que l'on introduit comme condition aux limites dans le modèle élément fini.

On vérifie qu'au point intérieur, l'état de déformation obtenu est bien celui désiré.

12.4.4 Test de précision d'un élément

On confronte le modèle élément fini à un ou des cas tests représentatifs de ce pour quoi l'élément a été développé (élasticité tridimensionnelle, bidimensionnelle, problème de torsion, problème avec concentrations locales de déformations ou de contraintes, prise en compte des frontières courbes...).

Sur les composantes d'« intérêt », on regardera s'il y a bien convergence du modèle et sa vitesse de convergence en fonction du nombre d'éléments, de la distorsion de ceux-ci...

La « mesure » de l'écart peut demander une « jauge » particulière. C'est ce que l'on appelle un estimateur d'erreur. Nous n'avons abordé jusqu'à présent que la mesure de l'erreur due à la MEF elle-même, mais chaque problème particulier peut demander un estimateur particulier. Pour la mécanique, les estimateurs sont souvent liés à la qualité des contraintes ou à des estimateurs d'énergie.

Un indicateur local d'erreur pourra par exemple être basé sur l'écart entre les contraintes aux nœuds et aux frontières après extrapolation des points d'intégration de chaque élément. On rappelle que certaines contraintes doivent être nulles sur les frontières libres.

On trouve par exemple l'écart sur les contraintes équivalentes (selon un sens à définir en fonction du type de matériau : par exemple von Mises pour un matériau isotrope, Hill, Tsai-Hill, Tsai-Wu... pour les matériaux anisotropes, les mousses, les os, les composites...) ; l'écart sur la contrainte moyenne...

On peut également utiliser la densité d'énergie interne de déformation sur chaque élément, l'idéal étant que tous les éléments contribuent de manière identique à l'estimation de l'énergie interne totale.

Un indicateur global d'erreur pourra être par exemple la valeur de l'énergie potentielle totale. Plus sa valeur sera petite, meilleur sera le modèle.

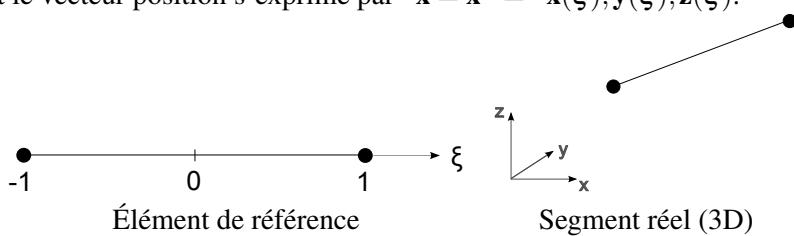
On peut également vérifier que certaines équations d'équilibre sont vérifiées à l'intérieur d'un élément ou le long d'une frontière entre éléments (par exemple à l'interface entre deux domaines, un problème évoqué un peu avant au paragraphe 12.3)...

12.5 Exemple : quelques variations sur le thème des éléments 1D

Dans ce paragraphe, nous appliquons ce que nous venons de voir sur quelques cas simples d'éléments 1D.

12.5.1 Élément de référence 1D linéaire à 2 nœuds

Considérons un segment reliant deux points dans l'espace. Ce segment est défini par un point courant dont les coordonnées sont le vecteur \mathbf{x} . On peut paramétriser ce segment par le paramètre $\xi \in [-1, 1]$, et le vecteur position s'exprime par ${}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T = {}^T\mathbf{x}(\xi), \mathbf{y}(\xi), \mathbf{z}(\xi)$.



Cet élément (segment) est défini par ses seules extrémités. Nous avons donc deux nœuds de coordonnées ${}^T\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$ et ${}^T\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$.

Un point courant de cet élément sera obtenu par interpolation linéaire entre les deux nœuds, paramétrée par ξ . On cherche cette interpolation sous la forme : $x = {}^T\mathbf{N}(\xi)\mathbf{x}_n$, $y = {}^T\mathbf{N}(\xi)\mathbf{y}_n$ et $z = {}^T\mathbf{N}(\xi)\mathbf{z}_n$, avec ${}^T\mathbf{N}(\xi) = {}^T(N_1(\xi), N_2(\xi))$ et $N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$, $N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$.

De manière plus « compacte », on peut écrire :

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi), \quad i = 1, 2, \quad \xi_i = \pm 1 \quad (\text{et } \xi \in [-1, 1]) \quad (12.5)$$

Dans cette interpolation (comme dans toutes interpolation), on a une relation entre $d\mathbf{x}$ et $d\xi$. Notons $d\mathbf{x} = \mathbf{a}d\xi$. Alors :

$${}^T \mathbf{a} = {}^T (x_{,\xi}, y_{,\xi}, z_{,\xi}) = \frac{1}{2} {}^T (x_{21}, y_{21}, z_{21}) \quad (12.6)$$

$$\text{avec ici : } x_{21} = x_2 - x_1; \quad y_{21} = y_2 - y_1; \quad z_{21} = z_2 - z_1 \quad (12.7)$$

On voit ainsi comment passer d'une intégrale sur le segment réel à une intégrale sur l'élément de référence.

De même, on peut chercher la relation entre $ds = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$. Nous notons $ds = m d\xi$. On a alors :

$$m = |\mathbf{a}| = \frac{1}{2} \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2} = \frac{L_e}{2} \quad (12.8)$$

On voit alors l'égalité des intégrations : $\int_{L_e} ... ds = \int_{-1}^{+1} ... m d\xi$.

Par ailleurs, on a la relation :

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{ds}{d\xi} \frac{d}{ds} = m \frac{d}{ds} \quad (12.9)$$

12.5.2 Quelques rappels sur la jacobienne et le jacobien d'une transformation

Nous considérons une transformation de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m donnée par la fonction $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_{y_1}, \dots, f_{y_m})$.

La matrice jacobienne (d'après Carl Jacobi) associée à f est définie par :

$$J_f = \begin{pmatrix} {}^T \nabla \mathbf{f}_{y_1} \\ \vdots \\ {}^T \nabla \mathbf{f}_{y_m} \end{pmatrix} \quad (12.10)$$

i.e., sous forme complètement développée la jacobienne de f s'écrit :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{y_m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{y_m}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

Au voisinage d'un point M , l'approximation linéaire de la fonction f est donnée par :

$$f(X) \approx f(M) + J_f(M) \overrightarrow{MX} \quad (12.12)$$

La composée $f \circ g$ de fonctions différentiables est différentiable, et sa matrice jacobienne s'obtient par la formule :

$$J_{f \circ g} = (J_f \circ g) \cdot J_g \quad (12.13)$$

Dans le cas où $m = n$, on appelle j_f le jacobien de f , défini comme le déterminant de sa matrice jacobienne :

$$j_f = \det(J_f) \quad (12.14)$$

Dire que le jacobien est non nul revient donc à dire que la matrice jacobienne est inversible.

Si le jacobien est positif au point M , l'orientation de l'espace est conservée au voisinage de ce point. À l'inverse, l'orientation est inversée si le jacobien est négatif.

Le jacobien d'une composée de fonctions est le produit des jacobiens individuels.

Le jacobien de la réciproque d'une fonction est l'inverse du jacobien de la fonction.

Cette dernière propriété est liée au théorème d'inversion locale (qui peut être vu entre autre comme une extension du théorème des fonctions implicite en dimension supérieure à 1 dans le cas réel).

Une fonction F de classe C^1 est inversible au voisinage de M avec une réciproque F^{-1} de classe C^1 si et seulement si son jacobien en M est non nul (théorème d'inversion locale). De plus, la matrice jacobienne de F^{-1} se déduit de l'inverse de la matrice jacobienne de F au moyen de la formule :

$$J_{F^{-1}} = (J_F \circ F^{-1})^{-1} \quad (12.15)$$

Théorème 30 — Théorème d'inversion locale. Soit f une application de U dans F , où U est un ouvert d'un espace de Banach réel et F un espace de Banach et soit x un point de U . Si f est de classe C^p , avec p un entier strictement positif et si la différentielle de f au point x est un isomorphisme bicontinu, alors il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert W de $f(x)$ tels que f se restreigne en une bijection de V dans W dont la réciproque est de classe C^p .

Comme illustré au paragraphe précédent, le jacobien sert surtout pour effectuer des changement de variables dans le calcul des intégrales.

Théorème 31 — Théorème de changement de variables dans les intégrales multiples. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , F une injection de classe C^1 de U dans \mathbb{R}^n et $V = F(U)$.

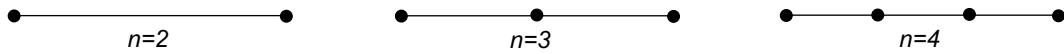
Si g est une fonction mesurable de V dans $[0, +\infty[$, on a égalité des intégrales pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n :

$$\int_V g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_U g(F(x_1, \dots, x_n)) |\det J_F(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n. \quad (12.16)$$

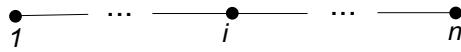
Si l'on considère un « petit » domaine, le volume de l'image de ce domaine par la fonction f sera celui du domaine de départ multiplié par la valeur absolue du jacobien.

12.5.3 Éléments de référence 1D linéaires à n nœuds

Il est possible de généraliser en considérant un segment ayant plusieurs nœuds intermédiaires :



Si l'on considère le cas général à n nœuds :



alors il vient :

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \frac{\xi_r - \xi}{\xi_r - \xi_i} \quad (12.17)$$

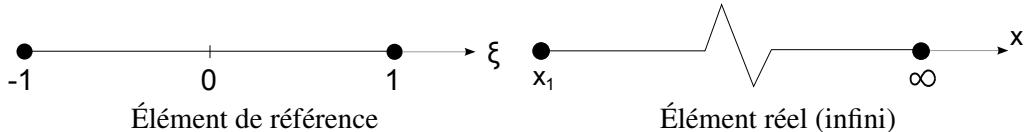
Si de plus, les n nœuds sont régulièrement espacés :

$$\xi_i = -1 + 2 \frac{i-1}{n-1} \quad N_i(\xi) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \frac{(2r-n-1) - \xi(n-1)}{2(r-i)} \quad (12.18)$$

12.5.4 Élément de référence 1D infini

Dans certains cas, il peut être nécessaire de prendre en compte des CL situées à l'infini : problèmes de fondations, d'acoustique, de couplage fluide-dstructure.

Il est possible, comme aux paragraphes précédents, de proposer une transformation entre un élément de référence de longueur 2 et un élément réel infini :



Nous ne considérerons que le cas de l'élément 1D linéaire à 2 nœuds dans ce paragraphe, mais on pourrait étudier le cas de l'élément linéaire 1D à n nœuds, ou des éléments 2D par exemple.

Nous allons toujours avoir une interpolation de la fonction solution sous la forme :

$$u = \frac{1-\xi}{2}u_1 + \frac{1+\xi}{2}u_2 \quad (12.19)$$

car concrètement u_2 est connu (et fini) : c'est le « lieu » où l'on situe l'infini dans le modèle EF.

Par contre, l'interpolation du point courant sera donnée par :

$$x = x_1 + \frac{1+\xi}{1-\xi}\alpha \quad (12.20)$$

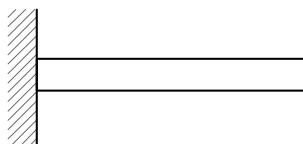
où α est une constante.

On aura également :

$$u_x = \frac{u_2 - u_1}{4\alpha}(1-\xi)^2 \quad (12.21)$$

12.5.5 Élément fini de barre 1D

On considère la barre donnée ci-dessous, de section A , de longueur L , et constituée d'un matériau homogène isotrope de module d'Young E et densité ρ et soumise uniquement à son poids propre.



On souhaite discréteriser ce problème à l'aide d'un éléments 1D linéaires tel que présenté au paragraphe 12.5.1.

La forme variationnelle de ce problème d'élasticité linéaire 1D (théorie des poutres) est :

$$W = \int_0^L EA v_{,x} u_{,x} dx - \int_0^L \rho g A v dx = 0, \quad \forall v \quad (12.22)$$

avec les CL : $u(0) = 0$ (et $v(0) = 0$).

Cette forme variationnelle, s'écrit pour l'élément (ou pour chaque élément si on en avait plusieurs) :

$$W = {}^T \mathbf{v} (\mathbf{k} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \quad (12.23)$$

Nous avons vu que la géométrie, représentée par un élément, est approximée par :

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2, \quad \xi \in [-1; 1] \quad (12.24)$$

La représentation de la fonction solution, est :

$$u = \frac{1-\xi}{2}u_1 + \frac{1+\xi}{2}u_2, \quad \xi \in [-1;1] \quad (12.25)$$

Nous obtenons la matrice de rigidité élémentaire :

$$\mathbf{k} = \frac{2EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.26)$$

et le vecteur des forces nodales élémentaires :

$$\mathbf{f} = \rho g A \frac{L}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.27)$$

En prenant en compte la CL $u_1 = 0$ et $v_1 = 0$, l'expression $W = 0$ donne :

$$u_2 = \frac{\rho g L^2}{8E} \quad (12.28)$$

La déformation est donnée par $\varepsilon = u_{,x} = {}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_n$ avec ${}^T \mathbf{B} = \frac{1}{L} {}^T (-1, 1)$. On obtient :

$$\varepsilon = \frac{\rho g L}{8E} \quad (12.29)$$

Elle est constante sur l'élément.

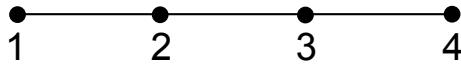
Quant à la contrainte, elle est obtenue par $\sigma = E\varepsilon$, soit

$$\sigma = \frac{\rho g L}{8} \quad (12.30)$$

Elle est également constante sur l'élément.

12.5.6 Assemblage de 3 éléments 1D linéaires à 2 nœuds

Poursuivons le cas de la poutre du paragraphe précédent, mais considérons une discrétisation de la barre à l'aide de 3 éléments :



Chaque élément e (de longueur L_e) possède une matrice de rigidité élémentaire \mathbf{k}_e et un vecteur des forces nodales élémentaires \mathbf{f}_e définis par :

$$\mathbf{k}_e = \frac{2EA}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_e = \rho g A \frac{L_e}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.31)$$

Les variables nodales sont ${}^T \mathbf{q} = {}^T \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, et, les matrices élémentaires redonnées ci-dessus s'écrivent, en fonction de ces variables nodales :

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \frac{2EA}{L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_3 = \frac{2EA}{L_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.32)$$

et les forces nodales :

$$\mathbf{f}_1 = \rho g A \frac{L_1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_2 = \rho g A \frac{L_2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_3 = \rho g A \frac{L_3}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.33)$$

L'assemblage permettant de constituer le système complet est simplement obtenu par :

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \quad (12.34)$$

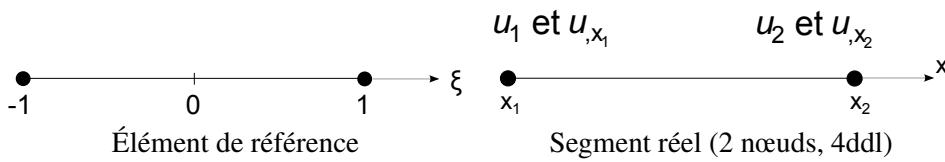
On résoud alors $\mathbf{Kq} = \mathbf{F}$ avec les CL $u_1 = 0$.

Remarque : La matrice \mathbf{K} obtenue sur cet exemple a un caractère bande (la matrice est vide en dehors d'une zone centrée sur la diagonale). Ceci est dû à la numérotation des nœuds. Une autre numérotation pourrait faire perdre ce caractère important (stockage et résolution).

C'est pourquoi dans les programmes EF une étape de renumérotation automatique des nœuds est généralement faite.

12.5.7 Élément de barre 1D de type Hermite (élément subparamétrique)

En restant encore sur notre élément linéaire 1D, nous allons voir comment ajouter des contraintes sur les dérivées aux nœuds :



La géométrie est encore une fois approximée par :

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2, \quad \xi \in [-1; 1] \quad (12.35)$$

Mais cette fois, l'approximation de la fonction solution est voulue sous la forme :

$$u = {}^T(N_1, N_2, N_3, N_4) \mathbf{u}_n \quad \text{avec les ddl} \quad {}^T\mathbf{u}_n = {}^T(u_1, u_{,x_1}, u_2, u_{,x_2}) \quad (12.36)$$

Les fonctions N_i choisies sont des fonctions cubiques de type Hermite assurant une continuité de u et $u_{,x}$ aux nœuds 1 et 2. On a :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi); \quad N_2 = \frac{L}{8}(\xi^2-1)(1-\xi); \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi); \quad N_4 = \frac{L}{8}(\xi^2-1)(1+\xi) \quad (12.37)$$

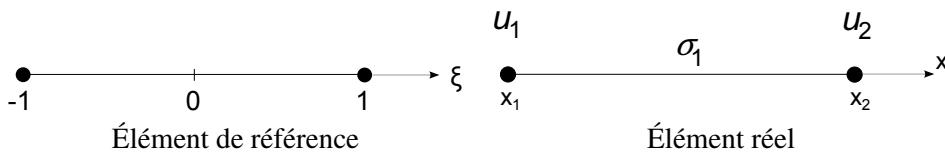
Le champ $u_{,x}$, qui est la déformation ε est donné par : $\varepsilon = {}^T\mathbf{B}\{u_n\}$ avec :

$${}^T\mathbf{B} = {}^T\left(\frac{3}{2L}(\xi^2-1), \quad \frac{1}{4}(3\xi^2-2\xi-1), \quad \frac{3}{2L}(1-\xi^2), \quad \frac{1}{4}(3\xi^2+2\xi-1)\right) \quad (12.38)$$

La contrainte, dans le cas où le coefficient d'élasticité H est constant est donnée par : $\sigma_x = H^T \mathbf{B} \mathbf{u}_n$.

12.5.8 Élément mixte 1D

Continuons avec notre élément de référence linéaire 1D. Cette fois-ci nous souhaitons le mettre en relation avec un segment réel dont les inconnues nodales sont les déplacements u_1 et u_2 , mais qui possède en plus une approximation constante de la contrainte par élément :



Nous cherchons donc une approximation C^0 du déplacement et C^{-1} de la contrainte.

Pour la géométrie, nous avons une fois encore :

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2, \quad \xi \in [-1;1] \quad (12.39)$$

Pour la contrainte, nous avons :

$$\sigma_x(x) = \sigma_1 \text{ (constante)} \quad (12.40)$$

La formulation variationnelle mixte de l'élasticité linéaire 1D est (voir fonctionnelle d'Hellinger-Reissner sous sa deuxième forme ou fonctionnelle mixte) :

$$W = \int_0^L A \left(-\sigma_x^* \frac{1}{H} \sigma_x + \sigma_x^* u_{,x} + v_{,x} \sigma_x \right) dx - \int_0^L A v f_x dx - (v f_S)_{S_f} = 0 \quad \forall v, \sigma^* \quad (12.41)$$

avec les CL $u = \bar{u}$ et $u^* = 0$ sur S_u .

De manière discrétisée, il vient :

$$W = {}^T(v_1, v_2, \sigma_1^*) \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b} \\ {}^T \mathbf{b} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}_n \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \right) \quad (12.42)$$

avec :

$$\mathbf{b} = \int_0^L \frac{A}{L} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a = \int_0^L \frac{A}{H} dx; \quad \mathbf{f}_n = \int_{-1}^{+1} A \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \frac{L}{2} f_x d\xi = A f_x \frac{L}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.43)$$

On pourrait s'arrêter là avec le système précédent à résoudre.

Toutefois, σ_1 est une variable locale sans couplage avec les autres éléments. On peut donc l'exprimer en fonction des autres ddl de l'élément u_1 et u_2 . La dernière ligne du système donne : $\sigma_1^* = ({}^T \mathbf{b} \mathbf{u}_n - a \sigma_1) = 0, \forall \sigma_1^*$, d'où :

$$\sigma_1 = \frac{1}{a} {}^T \mathbf{b} \mathbf{u}_n \quad (12.44)$$

Et le système devient alors :

$$W = {}^T \mathbf{v}_n (\mathbf{b} \sigma_1 - \mathbf{f}_n) = {}^T \mathbf{v}_n (\mathbf{k} \mathbf{u}_n - \mathbf{f}_n) \quad (12.45)$$

avec :

$$\mathbf{k} = \mathbf{b} \frac{1}{a} {}^T \mathbf{b} \quad (12.46)$$

Dans le cas où H est constant, la matrice de rigidité obtenue est identique à celle du modèle en déplacements du paragraphe 12.5.5.

12.6 Sur les déplacements imposés

12.6.1 Problème considéré

Nous repartons de l'élément de barre 1D défini au paragraphe 12.5.5.

Rappelons que la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des forces nodales élémentaires sont :

$$\mathbf{k} = \frac{2EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \rho g A \frac{L}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.47)$$

L'assemblage de 3 éléments, décrit au paragraphe 12.5.6, conduit à :

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \quad (12.48)$$

On traitera le cas où les trois éléments ont la même longueurs ($L_1 = L_2 = L_3 = L$) et où seul le nœud 4 est soumis à une force. On obtient alors un système de type $\mathbf{Kq} = \mathbf{F}$ à résoudre, avec la CL $u_1 = 0$, qui s'écrit explicitement dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad (12.49)$$

(avec $F' = \rho g L^2 / (8E)$).

12.6.2 Retour sur la résolution de systèmes linéaires

Soit à résoudre un système linéaire de type :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (12.50)$$

Ce système peut être réécrit par blocs sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (12.51)$$

Si A_{11} est inversible, alors on peut écrire la première ligne :

$$x_1 = A_{11}^{-1} (b_1 - A_{12}x_2) \quad (12.52)$$

ce qui donne, dans la deuxième ligne :

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \quad \text{que l'on note : } Sx_2 = c \quad (12.53)$$

La matrice S est appelée complément de Schur (présenté au paragraphe ??), ou matrice condensée sur les degrés de liberté x_2 . Ce calcul est également identique à celui présenté à propos de la condensation statique au paragraphe 13.5.1. Dans ce cas, la matrice S est la matrice de rigidité du super-élément considéré.

Le système initial (12.50) est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbb{O} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ c \end{pmatrix} \quad (12.54)$$

qui peut être réécrit :

$$\begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbb{O} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c \end{pmatrix} \quad (12.55)$$

12.6.3 Complément de Schur et déplacements imposés

Nous cherchons toujours à résoudre notre système : $\mathbf{Kq} = \mathbf{F}$.

Considérons la matrice \mathbf{D} , matrice booléenne, permettant d'extraire de l'ensemble des inconnues nodales \mathbf{q} le sous-ensemble $\mathbf{q}_2 = \mathbf{D}\mathbf{q}$ sur lesquels portent les conditions de déplacements imposés \mathbf{q}_d (ici on traite le cas général, i.e. les déplacements imposés peuvent être nuls ou non). La matrice \mathbf{D} n'est pas rectangulaire : si on souhaite imposer d déplacements parmi les n ddl du système, alors \mathbf{D} est de dimension $d \times n$, et donc \mathbf{q}_2 est bien un vecteur à d composantes, comme \mathbf{u}_d .

Le système $\mathbf{Kq} = \mathbf{F}$ peut alors s'écrire, par blocs, en utilisant le complément de Schur (12.54) sous une forme triangulaire d'où l'on tire le sous-système correspondant aux déplacements non imposés :

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_d \quad (12.56)$$

Ce système est réduit, i.e. possède moins d'inconnues que le problème initial, mais il est nécessaire de modifier le chargement extérieur.

Son inconvénient est qu'il est nécessaire d'effectuer un tri explicite au sein des ddl, ce qui a pour conséquence de «remplir» le terme \mathbf{K}_{12} , et par suite peut générer un surcoût de calcul lorsque le nombre de ddl bloqué est grand.

C'est ainsi que procède le code ABAQUS pour imposer les déplacements.

12.6.4 Multiplicateurs de Lagrange et déplacements imposés

Une autre technique, pour imposer des déplacements, consiste à utiliser les multiplicateurs de Lagrange : les contraintes sont relaxées, puis réintroduites via des multiplicateurs de Lagrange.

Dans ce cas, il n'est plus nécessaire de séparer explicitement les ddl, mais la taille du problème augmente puisqu'il faut lui adjoindre les multiplicateurs.

Le système à résoudre s'écrit très simplement :

$$\begin{pmatrix} K & -D^T \\ -D & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} q \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ -u_d \end{pmatrix} \quad (12.57)$$

Il est intéressant de remarquer que la première ligne montre que les multiplicateurs de Lagrange sont bien les réactions aux appuis.

Par contre, la matrice du système (12.57), \mathbf{A} , si elle reste bien symétrique, n'est plus définie positive. Elle possède des valeurs propres négatives.

Toutefois, on dispose du résultat suivant :

Théorème 32 si \mathbf{K} est symétrique définie positive, alors :

$$\mathbf{A} \text{ inversible} \iff \mathbf{D} \text{ injective} \iff \ker \mathbf{D} = \emptyset \quad (12.58)$$

ce qui correspond aux cas où toutes les liaisons sont indépendantes.

Afin de ne pas détruire la structure bande de \mathbf{K} (ce que ferait une factorisation de Gauss), et d'éviter des pivotages (que ferait une factorisation de Crout, i.e. LDL^T), on peut développer une autre technique, dite technique de double multiplicateur, qui est celle employée dans CAST3M :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Kq} = \mathbf{F} - {}^T\mathbf{D}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \mathbf{Dq} = \mathbf{u}_d \end{array} \right. \quad (12.59)$$

L'inconvénient reste l'augmentation de la taille du système lorsque l'on a de nombreux blocages.

12.6.5 Actions extérieures et déplacements imposés

L'interprétation physique des multiplicateurs de Lagrange conduit naturellement à une autre méthode : il est possible de considérer un déplacement imposé comme une action extérieure, par exemple comme la réaction d'un ressort ayant une raideur k très grande et un déplacement imposé à sa base.

On se retrouve alors avec un système du type :

$$(\mathbf{K} + {}^T\mathbf{DkD}) \mathbf{q} = \mathbf{F} + {}^T\mathbf{DkDu}_d \quad (12.60)$$

dans lequel on n'a fait qu'ajouter des termes à la matrice de rigidité sur les ddl correspondant à ces déplacements et au vecteur des forces généralisées sur les efforts duals.

Le problème réside dans le choix de la valeur de k : trop petite, la condition est mal imposée ; trop grande, le système devient très mal conditionné, voire numériquement singulier.

12.6.6 Retour sur notre exemple

Nous devons toujours résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad (12.61)$$

avec la CL $u_1 = 0$.

Tout d'abord, on pourra essayer de résoudre sans introduire de CL afin de voir que le système est alors singulier. On obtient $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ et $F' = 0$.

La méthode la plus rudimentaire consiste à prendre en compte directement et explicitement la CL. On supprime donc du système matriciel la ligne et la colonne correspondant à u_1 , et on résoud :

$$u_1 = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \end{cases} \quad (12.62)$$

Séparons maintenant les déplacements imposés des autres ddl, par une matrice booléenne \mathbf{D} : \mathbf{D} est une matrice 1×4 , et seul le terme $D_{11} = 1$ est non nul : $\mathbf{q}_2 = \mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{u}_1$, et le déplacement imposé est $\mathbf{u}_d = \mathbf{0}$.

Le système s'écrit $\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, avec :

$$\begin{pmatrix} K_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & K_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ K_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_{22} = (1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\ q_2 = \begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \\ f_2 = \begin{pmatrix} u_d = 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (12.63)$$

Par la méthode du complément de Schur, on est encore ramené à la résolution du système (12.62). On pourra s'amuser à calculer $(K_{11})^{-1}$, $(S)...$

Par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ u_d = 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \\ \lambda = -F' \end{cases} \quad (12.64)$$

Par la technique du double multiplicateur, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ 0 \\ u_d = 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \\ \lambda_1 = -F' \\ \lambda_2 = -F' \end{cases} \quad (12.65)$$

En considérant une action extérieure, on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 1+k & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + k \cdot u_d = 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \end{cases} \quad (12.66)$$

Dans tous les exemples présentés, nous avons résolu les systèmes à la main, ce qui masque les éventuels problèmes numériques (notamment dans le dernier cas).

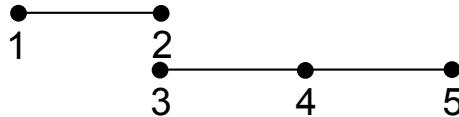
12.6.7 Relations linéaires entre ddl

Cette situation se présente par exemple lors de la prise en compte de conditions de symétrie, de CL périodiques... Il s'agit à chaque fois de conditions de type :

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{u}_d \quad (12.67)$$

où \mathbf{D} n'est plus forcément booléenne.

Nous allons l'appliquer ici, à titre d'exemple simple, au cas où la poutre considérée est maintenant constituée de 2 poutres, que l'on va «coller» par une telle relation :



La poutre précédemment considérée est constituée de la poutre $1 - 2$ et de la poutre $3 - 4 - 5$, les points 2 et 3 étant astreints à rester collés ensemble.

En ajoutant la relation $u_2 = u_3$ par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange (i.e. en ajoutant $\lambda_1(u_2 - u_3)$), on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ 0 \\ u_d = 0 \end{pmatrix} \quad (12.68)$$

auquel il faut également ajouter les CL $u_1=0$.

Si cette CL est imposée par un multiplicateur de Lagrange λ_2 , alors finalement, il nous faut résoudre :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = F' \\ u_4 = 2F' \\ u_5 = 3F' \\ \lambda_1 = -F' \\ \lambda_2 = -F' \end{cases} \quad (12.69)$$

Chapitre 13

Calcul efficient : qualité des résultats et efforts de calcul

13.1 Amélioration d'un modèle : méthodes r, h et p

Les indicateurs d'erreur ont pour but de nous indiquer si « nous sommes loin de la solution », afin de pouvoir modifier le modèle si besoin. Ainsi, par itérations successives, on pourra tendre vers une solution de plus en plus proche de la solution exacte.

Les indicateurs locaux nous permettent notamment de faire des modifications uniquement locales du modèles, i.e. uniquement là où il y en a besoin, par exemple en raffinant le maillage.

Globalement, il existe trois stratégies pour améliorer la précision de la solution obtenue :

Méthode r Pour un maillage et un type d'élément donné, il s'agit de déplacer les nœuds, en fonctions des indicateurs d'erreur, et donc sans impacter le nombre de ddl du système. Ainsi, la taille des éléments peut augmenter (maillage plus grossier) dans les zones les moins sollicitées et diminuer (maillage plus fin) dans les zones les plus sollicitées. On voit que la restriction de la méthode est qu'elle ne joue pas sur le nombre de nœuds, et que par conséquent, sans violer les contraintes de distorsion, elle est limitée.

Méthode h En conservant le même type d'élément, on les subdivise dans les zones les plus sollicitées selon le ou les indicateurs d'erreur choisis. Dans cette méthode, on augmente le nombre de nœuds afin de contrôler les erreurs et la précision du modèle. Il est nécessaire de se fixer une limite dans la précision recherchée afin de ne pas trop raffiner le maillage.

Méthode p À nombre d'éléments constant, dans les zones les plus sollicitées, on va modifier les éléments en introduisant des fonctions de formes polynomiales d'ordre plus élevé, dites hiérarchiques. La complexité du système est cette fois encore accrue.

Évidemment, ces méthodes peuvent être combinées. La méthode -hp- propose de modifier à la fois le maillage et les fonctions d'interpolation. Elle semble aujourd'hui être la méthode optimale en terme d'efficacité et de vitesse de convergence.

Notons que les méthodes -r- et -h- dépendent des capacités du maillage automatique implémenté. De nombreux travaux existent sur le maillage automatique, nous n'entrerons pas dans ce détail.

13.2 Post-traitement

Une manière d'améliorer les résultats est de recourir à des méthodes dites de post-traitement, i.e. des méthodes qui, à partir des données issues de la résolution du système matriciel correspondant au problème, fournissent des données complémentaires ou améliorent toute ou partie des données déjà disponibles.

En fonction des problèmes (donc des données disponibles et des données souhaitées) de nombreuses méthodes existent. Elles sont généralement dédiées à un problème donné.

Un exemple déjà abordé dans ce document est celui où, à partir des déplacement nodaux obtenus par un calcul EF d'une structure mécanique composée de deux matériaux différents dans une discréétisation classique « en déplacements », on souhaite remonter aux contraintes à l'interface entre lesdits matériaux.

Une méthode déjà mentionnée est la méthode dite de « Reissner local » qui consiste à intégrer les équations d'équilibre sous la forme mixte de Reissner, mais uniquement sur des paires d'éléments ayant des propriété matérielles différentes et possédant une face commune.

On obtient alors un champ de contrainte complètement continu dont on ne retient que les composantes correspondant à la trace des contraintes, les autres étant calculées comme dans la méthode classique. On montre que l'on améliore grandement la qualité de l'approximation des contraintes aux interfaces, mêmes avec un maillage grossier.

Un autre exemple serait, disposant d'un point de pression constant par élément, de calculer la pression en un point quelconque comme interpolation (linéaire ou non) à partir des points disponibles.

Un troisième exemple serait à partir des données nodales dans un modèle 1D (poutre ou barre selon le cas), de remonter à la répartition des contraintes en un points quelconque de la structure (donc via les hypothèses faites dans le modèle sur la répartition des contraintes dans une section + via un interpolation lorsque l'on se trouve dans une section ne passant pas par un nœud)...

13.3 Exemple d'implémentation d'un post-traitement dans ANSYS

Dans ce chapitre, nous présentons un manière d'implémenter la méthode de Reiss local mentionnée aux paragraphes 13.2 et 12.3.

Il s'agit de calculer les contraintes à l'interface entre deux matériaux en utilisant la fonctionnelle mixte d'Hellinger-Reissner donnée à l'équation (8.50).

Le but est de montrer que même sur un maillage grossier, il est possible de correctement estimer les contraintes aux interfaces, pour peu que l'on dispose d'une méthode appropriée. Nous espérons qu'au passage, nous démontrerons également qu'il est assez simple d'implémenter des fonctions dans un code existant.

13.3.1 Macro dans ANSYS

Si un code ne dispose pas de la méthode que l'on souhaite utiliser, il est toujours possible de retraiter les résultats... toutefois, selon les codes, il est plus ou moins aisé d'implémenter des fonctions dans ledit code.

ANSYS est souvent qualifié de « code industriel », ce qui pourrait laisser supposer qu'il n'a pas la même capacité à résoudre les problèmes que des codes dits « de recherche » ou « spécialisés ». Or il n'en est rien (même si en toute rigueur, il y a une quinzaine d'années il était plus faible que d'autres sur les non linéarités, ce qui n'est plus vrai depuis longtemps).

C'est vrai que disposant d'une interface utilisateur remarquable (comparée à celle de nombreux autres codes), il est possible de ne réaliser les calculs que via cette interface, i.e. sans passer par un fichier batch... ce que ne font de toutes façons pas les gens sérieux (donc cet argument ne tient pas).

Le qualificatif d'industriel peut également laisser penser que le logiciel est plus fermé que d'autres, mais ce n'est que partiellement le cas, en tous les cas on peut y remédier facilement, et c'est pourquoi nous allons présenter l'implémentation d'une macro dans ce code.

Pour implémenter une nouvelle fonction dans ANSYS, plusieurs méthodes s'offrent à nous. Nous citerons :

- écrire le bout de programme et recompiler le noyau : c'est faisable en théorie, mais personnellement je n'ai jamais réussi...

- partir des fichiers de résultats binaires pour les retravailler : c'est également théoriquement faisable, mais il faut décortiquer les formats d'écriture desdits fichiers, les relire, réécrire dans le même format... et c'est donc beaucoup de travail (purement informatique) ;
- programmer la fonction directement sous ANSYS (ANSYS possède un langage assez riche et puissant) ;
- ou alors, et c'est la voie que nous allons montrer, utiliser ANSYS en « coopération » avec un petit programme extérieur.

La structure de la macro ANSYS que nous proposons (et qui peut être également incluse dans les menus d'ANSYS, mais nous n'entrons pas dans ce niveau de détail d'interfaçage) est très simple :

- on récupère les données dont nous avons besoin et on les stocke dans des fichiers externes (simples) ;
- on lance un programme externe (dont la structure sera exposée plus bas) ;
- on réintègre les résultats dans ANSYS.

On peut alors se servir de toutes les fonctions de visualisation disponibles dans ANSYS avec les résultats modifiés...

```

1 /nop
2 ! Vincent MANET
3 ! ENSM.SE, 1998
4 !
5 nall
6 !
7 ! Parametres
8 *get,Nnoeuds,node,,count
9 *get,Nmater,mat,,count
10 *get,Nelem,elem,,count
11 *cfopen,temp,par
12 *vwrite,Nnoeuds
13 (E13.7,' ')
14 *vwrite,Nelem
15 (E13.7,' ')
16 *vwrite,Nmater
17 (E13.7,' ')
18 *cfclose
19 !
20 ! Materiaux
21 *cfopen,temp,mat
22 *dim,Mater,,Nmater,3
23 *do,I,1,Nmater
24     *get,Mater(I,1),Ex,I
25     *get,Mater(I,2),Ey,I
26     *get,Mater(I,3),Nuxy,I
27 *enddo
28 *vwrite,Mater(1,1),Mater(1,2),Mater(1,3)
29 (3(E13.7,' '))
30 *cfclose
31 !
32 ! Noeuds
33 *dim,CoordX,,Nnoeuds
34 *dim,CoordY,,Nnoeuds
35 *dim,CoordZ,,Nnoeuds
36 *vget,CoordX(1),node,,loc,x
37 *vget,CoordY(1),node,,loc,y
38 *cfopen,temp,coo
39 *vwrite,CoordX(1),CoordY(1)
40 (2(E13.7,' '))
41 *cfclose
42 !
43 ! Elements + numero du materiau
44 *dim,E1,,Nelem,9
45 *vget,E1(1,1),elem,1,node,1
46 *vget,E1(1,2),elem,1,node,2
47 *vget,E1(1,3),elem,1,node,3
48 *vget,E1(1,4),elem,1,node,4
49 *vget,E1(1,5),elem,1,node,5
50 *vget,E1(1,6),elem,1,node,6
51 *vget,E1(1,7),elem,1,node,7
52 *vget,E1(1,8),elem,1,node,8
53 *vget,E1(1,9),elem,1,attr,mat
54 *cfopen,temp,elt
55 *vwrite,E1(1,1),E1(1,2),E1(1,3),E1(1,4),E1(1,5),E1(1,6),
56             E1(1,7),E1(1,8),E1(1,9)
57 (9(E13.7,' '))
58 *cfclose
59 !
60 ! Resultats
61 *vget,CoordX(1),node,1,U,x
62 *vget,CoordY(1),node,1,U,y
63 *cfopen,temp,res
64 *vwrite,CoordX(1),CoordY(1)
65 (2(E13.7,' '))
66 *cfclose
67 !
68 ! Contraintes
69 *vget,CoordX(1),node,1,S,x
70 *vget,CoordY(1),node,1,S,y
71 *vget,CoordZ(1),node,1,S,xy
72 *cfopen,temp,str
73 *vwrite,CoordX(1),CoordY(1),CoordZ(1)
74 (3(E13.7,' '))
75 *cfclose
76 !
77 ! run locreiss.exe
78 /sys,'locreiss.exe'
79 !
80 ! Effacer les fichiers
81 !   generes par ANSYS :
82 !     - temp.par : parametres
83 !     - temp.coo : coordonnees nodales
84 !     - temp_elt : incidences
85 !     - temp.mat : proprietes materielles
86 !     - temp.res : deplacements nodaux
87 !     - temp.str : contraintes nodales
88 !   generes par locreiss.exe :
89 !     - temp.dum
90 !     - temp.tmp
91 ! Il reste les fichiers
92 !     - temp.sij : contraintes nodales modifiees
93 !
94 !/sys,'rm ./temp.par'
95 !/sys,'rm ./temp.coo'
96 !/sys,'rm temp_elt'
97 !/sys,'rm temp.mat'
98 !/sys,'rm temp.res'
99 !/sys,'rm temp.str'
100 !/sys,'rm temp.dum'
```

```

101 !/sys,'rm temp.tmp'
102 !
103 ! lire les valeurs dans temp.sij
104 ! ces fichiers contiennent: sxx, syy, sxy
105 ! ce sont toutes les composantes continues.
106 ! Elles n'ont pas toutes un sens:
107 ! Sxx discontinu, mais dans le repere
108 ! local, donc on la laisse pour qu'ANSYS
109 ! puisse faire la ! rotation de repere
110 ! si necessaire.
111 *vread,CoordX(1),temp,sxx,,          117 *vput,CoordX(1),node,1,S,x
112 (E13.7)                                118 *vput,CoordY(1),node,1,S,y
113 *vread,CoordY(1),temp,syy,,          119 *vput,CoordZ(1),node,1,S,xy
114 (E13.7)                                120 !
115 *vread,CoordZ(1),temp,sxy,,          121 ! Cleanup
116 (E13.7)                                122 CoordX(1)=
123 CoordY(1)=
124 CoordZ(1)=
125 Mater(1,3)=
126 E1(1,9)=
127 Nnoeuds=
128 Nmater=
129 Nelem=
130 !
131 /gop

```

Le programme extérieur `locreiss.exe`, est structuré comme suit :

```

1      PROGRAM VM2
2 C
3      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
4      IMPLICIT INTEGER (I-N)
5 C
6 C-----C
7 C
8 C   But:
9 C     1. on relit les fichiers d'ANSYS generes avec la macro INTERF
10 C    2. on determine les noeuds de post-traitement
11 C    3. on effectue un Reissner local aux interfaces
12 C
13 C   WARNING:
14 C     On ne traite que le cas de PLANE 82 avec une geometrie definie
15 C     dans le plan (X,Y)
16 C
17 C   MAIN of : VM
18 C
19 C   Written by : Vincent MANET
20 C           EMSE, 98
21 C
22 C-----C
23 C
24 C   PARAMETER(NODMAX=1000,NELTMAX=300,MATMAX=4)
25 C
26 C   COMMON /VMCTS/ COMPI,ZERO,ONE,IINP,IOUT,ICON,MONI
27 C   COMMON /NPB/ NNOD,NELT,NMAT,NCAL
28 C
29 C
30 C   DIMENSION COORD(NODMAX,3),DISP(NODMAX,2)
31 C   DIMENSION XMAT(MATMAX,3),NLT(NELTMAX,9)
32 C   DIMENSION NCALC(NODMAX,5),NADJ(NODMAX,8),NDT(NODMAX,8)
33 C   DIMENSION D1(3,3),D2(3,3)
34 C
35 C---- Presettings
36 C   MONI=0          ! monitoring level (debug)
37 C   ICON=6          ! standard output = screen
38 C   IINP=10         ! input file
39 C   IOUT=20         ! output file
40 C   ZERO=0.ODO      ! zero
41 C   ONE=1.ODO       ! one
42 C   COMPI=DACOS(-ONE) ! pi
43 C
44 C
45 C---- Read input files
46 C   CALL READANS(NODMAX,NELTMAX,MATMAX,COORD,XMAT,NLT,DISP)
47 C
48 C---- Find Adjacent elements
49 C   CALL CHELT(NODMAX,NELTMAX,NLT,NCALC,NADJ,NDT)
50 C
51 C---- Material properties
52 C   CALL MATER(MATMAX,XMAT,D1,D2,D3,D4,NODMAX,NADJ,NELTMAX,NLT)
53 C

```

```

54 C---- Computation: Local Reissner
55      CALL LOCREISS(NODMAX,NELTMAX,D1,D2,D3,D4,
56      X           COORD,NLT,NADJ,DISP)
57 C
58 C---- Average multi-computed nodes
59      CALL AVERAGE(NODMAX,MULTI)
60 C
61 C---- Last line of VM2
62      END

```

La routine READANS permet de lire les données. Celles-ci sont stockées dans les matrices COORD(NODMAX,3), DISP(NODMAX,2), XMAT(MATMAX,3) et NLT(NELTMAX,9).

la routine CHELT détecte les interfaces, i.e. les faces dont les nœuds appartiennent à des éléments dont les propriétés matérielles sont différentes. Le vecteur NADJ(NODMAX,8) contient les numéros des deux éléments adjacents (positions 1 et 2) ainsi que les numéros des nœuds de l'interface (position 3, 4 et 5).

La routine MATER construit, pour chacune des faces de l'interface, la matrice de rigidité (aussi bien pour le cas isotrope que pour le cas orthotrope).

La routine LOCREISS calcule les contraintes nodales le long de chaque face.

Les contraintes ayant été calculées pour les nœuds de chacune des faces de l'interface, on moyenne les résultats pour un nœud appartenant à plusieurs faces. C'est ce que fait la routine AVERAGE. À ce stade, nous disposons donc des contraintes nodales, calculées par la fonctionnelle mixte d'Hellinger-Reissner, le long de toutes les interfaces présentes dans le modèle. Il ne reste plus qu'à écrire ces résultats pour qu'ils soient relus par la macros ANSYS.

13.3.2 Poutre en U

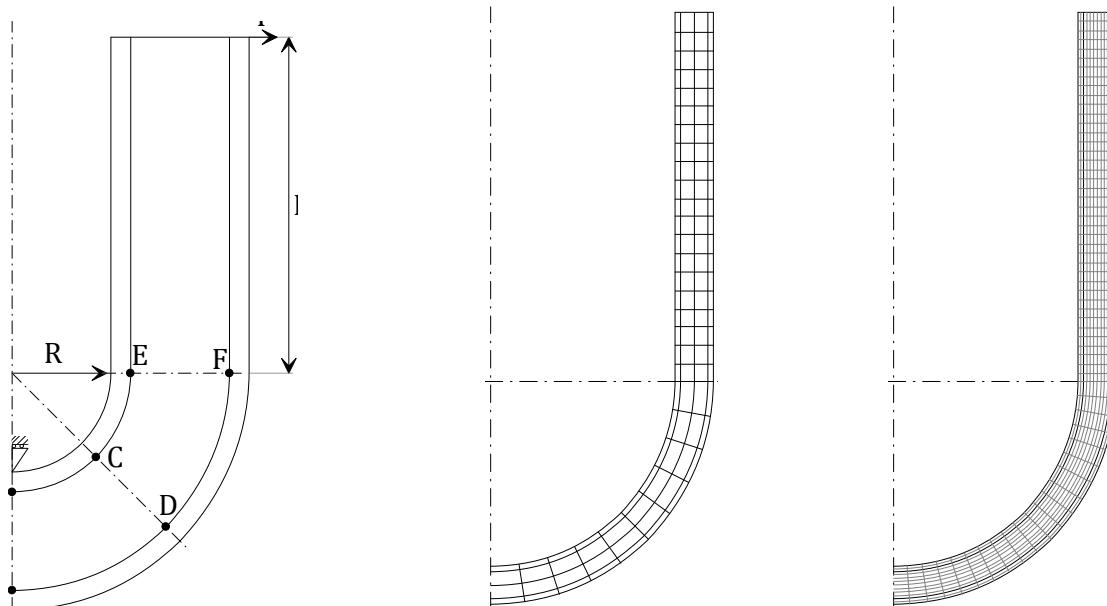


FIGURE 13.1 – a) Géométrie de la poutre en U, b) le maillage utilisé pour le calcul (test de la méthode Reissner local, c) maillage permettant d'obtenir la « solution de référence » puisqu'il n'y a pas de solution analytique

Disposant de la macro précédente, nous allons l'appliquer au calcul d'une poutre en *U*.

Il s'agit d'une poutre sandwich dont les peaux sont en aluminium et l'âme en résinde époxy. Par symétrie, seule une demi-poutre est modélisée. Elle est soumise à une force unitaire sur chaque montant.

Les points pour lesquels nous nous intéresserons aux contraintes sont les points indiqués sur la figure 13.1, à savoir les points A, B, C, D, E et F.

Le listing ANSYS est le suivant :

```

1 !* geom: partie droite
2 long=20
3 H1=0.2
4 H2=1.8
5 H3=2
6 !*
7 !* geom coude
8 Rint=10
9 Rh1=Rint+H1
10 Rh2=Rint+H2
11 Rh3=Rint+H3
12 !*
13 !* maillage
14 NCUTS=40
15 NRCUTS=20
16 NCORE=16
17 NSKIN=2
18 Forc=1
19 !*
20 /PREP7
21 !*
22 ET,1,PLANE82
23 !*
24 UIMP,1,EX, , ,70000,
25 UIMP,1,NUXY, , ,0.3,
26 UIMP,1,EMIS, , ,1,
27 !*
28 !*
29 UIMP,2,EX, , ,3400,
30 UIMP,2,NUXY, , ,0.34,
31 UIMP,2,EMIS, , ,1,
32 !*
33 k,1,0,-Rh3
34 k,2,Rh3,0
35 k,3,Rh2,0
36 k,4,0,-Rh2
37 k,5,0,-Rh1
38 k,6,Rh1,0
39 k,7,Rint,0
40 k,8,0,-Rint
41 k,9,Rh3,long
42 k,10,Rh2,long
43 k,11,Rh1,long
44 k,12,Rint,long
45 k,13,0,0
46 !*
47 larc,1,2,13,Rh3,NRCUTS
48 1,2,3,NSKIN
49 larc,4,3,13,Rh2,NRCUTS
50 1,1,4,NSKIN
51 1,4,5,NCORE
52 1,3,6,NCORE
53 larc,5,6,13,Rh1,NRCUTS
54 1,5,8,NSKIN
55 larc,8,7,13,Rint,NRCUTS
56 1,6,7,NSKIN
57 !*
58 1,2,9,NCUTS
59 1,9,10,NSKIN
60 1,10,3,NCUTS
61 1,10,11,NCORE
62 1,11,6,NCUTS
63 1,11,12,NSKIN
64 1,12,7,NCUTS
65 !*
66 mat,1
67 a,1,2,3,4
68 a,5,6,7,8
69 a,2,9,10,3
70 a,6,11,12,7
71 mat,2
72 a,4,3,6,5
73 a,3,10,11,6
74 mat,1
75 amesh,1
76 amesh,2
77 amesh,3
78 amesh,4
79 mat,2
80 amesh,5
81 amesh,6
82 !*
83 DL,4,,symm
84 DL,5,,symm
85 DL,8,,symm
86 !*
87 dk,8,uy,0
88 !*
89 fk,9,fx,Forc
90 !*
91 FINISH
92 /SOLU
93 /STAT,SOLU
94 SOLVE
95 FINISH
96 /POST1
97 pldisp,1
98 *USE,INTERF
99 ...

```

On utilise la macro en tapant *USE,INTERF, et les contraintes sont directement modifiées dans ANSYS. On peut alors utiliser les mêmes fonctions qu'habituellement pour visualiser les différentes composantes des contraintes.

Le listing Cast3M est le suivant :

```

1 * geom: partie droite
2 long=20.0;
3 H1=0.2;
4 H2=1.8;
5 H3=2.0;
6 *
7 * geom coude
8 Rint=10.0;
9 Rh1=Rint+H1;
10 Rh2=Rint+H2;
11 Rh3=Rint+H3;
12 MRint = -1. * Rint;
13 MRh1 = -1. * Rh1;
14 MRh2 = -1. * Rh2;
15 MRh3 = -1. * Rh3;
16 *
17 * maillage
18 NCUTS=40;
19 NRCUTS=20;
20 NCORE=16;
21 NSKIN=2;
22 Forc=1.0;
23 *
24 OPTION DIMENSION 2 ELEMENT QUA4;

```

```

25 *
26 k1 = 0. MRh3;
27 k2 = Rh3 0. ;
28 k3 = Rh2 0. ;
29 k4 = 0. MRh2;
30 k5 = 0. MRh1;
31 k6 = Rh1 0. ;
32 k7 = Rint 0. ;
33 k8 = 0. MRint;
34 k9 = Rh3 long;
35 k10 = Rh2 long;
36 k11 = Rh1 long;
37 k12 = Rint long;
38 k13 = 0. 0. ;
39 *
40 L1 = CERCLE NRCUTS k1 k13 k2 ;
41 L2 = DROITE k2 k3 NSKIN;
42 L3 = CERCLE NRCUTS k4 k13 k3 ;
43 L4 = DROITE k1 k4 NSKIN;
44 L5 = DROITE k4 k5 NCORE;
45 L6 = DROITE k3 k6 NCORE;
46 L7 = CERCLE NRCUTS k5 k13 k6 ;
47 L8 = DROITE k5 k8 NSKIN;
48 L9 = CERCLE NRCUTS k8 k13 k7 ;
49 L10 = DROITE k6 k7 NSKIN;
50 *
51 L11 = DROITE k2 k9 NCUTS;
52 L12 = DROITE k9 k10 NSKIN;
53 L13 = DROITE k10 k3 NCUTS;
54 L14 = DROITE k10 k11 NCORE;
55 L15 = DROITE k11 k6 NCUTS;
56 L16 = DROITE k11 k12 NSKIN;
57 L17 = DROITE k12 k7 NCUTS;
58 *
59 SURF1 = DALLER L1 L2 L3 L4;
60 SURF2 = DALLER L2 L11 L12 L13;
61 PEAUEXT = SURF1 ET SURF2;
62 * ELIMINE PEAUEXT;
63 SURF1 = DALLER L3 L6 L7 L5;
64 SURF2 = DALLER L6 L13 L14 L15;

65 AME = SURF1 ET SURF2;
66 * ELIMINE AME;
67 SURF1 = DALLER L8 L7 L10 L9;
68 SURF2 = DALLER L10 L15 L16 L17;
69 PEAUINT = SURF1 ET SURF2;
70 * ELIMINE PEAUINT;
71 PoutU = PEAUEXT ET AME ET PEAUINT;
72 *
73 Model1 = MODL peauext MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE QUA4;
74 Model2 = MODL ame MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE QUA4;
75 Model3 = MODL peauint MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE QUA4;
76 ModelTot = Model1 ET Model2 ET Model3;
77 *
78 Mater1 = MATERIAU Model1 YOUNG 70000.0 NU 0.3 RHO 2700.0;
79 Mater2 = MATERIAU Model2 YOUNG 3400.0 NU 0.34 RHO 1000.0;
80 Mater3 = MATERIAU Model3 YOUNG 70000.0 NU 0.3 RHO 2700.0;
81 *
82 MR1 = RIGIDITE Model1 Mater1;
83 MR2 = RIGIDITE Model2 Mater2;
84 MR3 = RIGIDITE Model3 Mater3;
85 Mrigid = MR1 ET MR2 ET MR3;
86 *
87 CondL2 = BLOQUER UX (L4 ET L5 ET L8);
88 CondL1 = BLOQUER UY k8;
89 CondLtot = CondL1 ET CondL2;
90 FOR1 = FORCE(Forc 0.) k9;
91 Mrigid = Mrigid ET CondLtot;
92 *
93 Depl1 = RESOUD Mrigid For1 ;
94 *
95 UX1 = EXCO 'UX' depl1;
96 UY1 = EXCO 'UY' depl1;
97 Trace UX1 PoutU;
98 Trace UY1 PoutU;
99 *
100 def0 = DEFORMEE poutU Depl1 0.0 BLEU;
101 def1 = DEFORMEE poutU Depl1 ROUGE;
102 trace (def0 ET def1);
103 * ...

```

Il reste maintenant à avoir les résultats dans les repères locaux élémentaires, et voir ce qui se passe aux interfaces...

13.3.3 Résultats

Dans les listings ci-dessus, nous n'avons pas exposé comme atteindre les contraintes, car cela sera fait en TP.

Les résultats directement obtenus sont donnés à la figure 13.2 pour la déformée et les déplacements selon x et y , et à la figure 13.3 pour les déformations.

Néanmoins nous présentons quelques résultats issus de l'analyse des contraintes aux interfaces avec ou sans utilisation de la méthode de Reissner local. Nous nous concentrerons sur les résultats numériques et graphiques permettant d'apprecier la précision de la méthode de Reissner local par rapport aux résultats d'ANSYS aux points A , B , E et F ainsi que d'étudier l'influence de la valeur du rayon R .

Une première remarque s'impose : plus la valeur du rayon est faible, plus les résultats sont mauvais, quelle que soit la méthode employée (et vous devez savoir pourquoi à ce niveau du document).

Au point A , l'influence des conditions aux limites est encore sensible : en plus de la condition de symétrie de la structure, le blocage du déplacement vertical induit une légère détérioration des résultats numériques. L'influence de cette condition aux limites n'est plus visible au point B .

En A et B , la composante discontinue est σ_{xx} , les composantes σ_{yy} et σ_{xy} sont continues. Par contre, aux points E et F , c'est σ_{yy} la composante discontinue et σ_{xx} et σ_{xy} les composantes

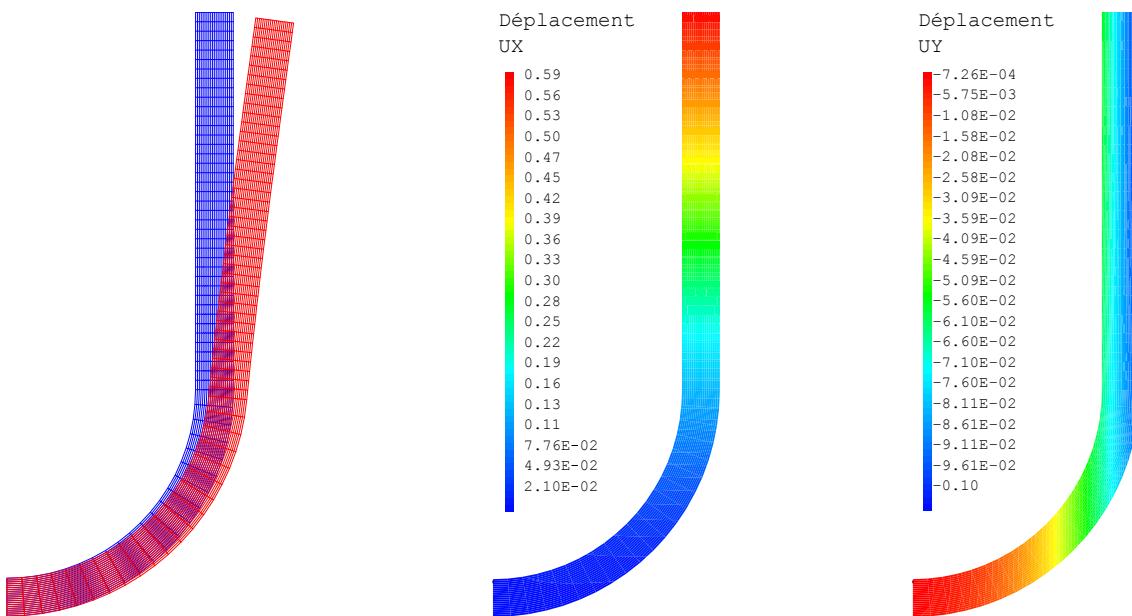


FIGURE 13.2 – Déformée et déplacements

continues.

D'après les résultats présentés ci-après, il est visible que la méthode de Reissner local permet d'améliorer les résultats par rapport à ANSYS.

Méthode	R (mm)	σ_{xx} peau (MPa)	σ_{xx} âme (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)
Ref	10	72,085	4,0121	1,5883	-0,0023339
Reiss	10	71,957	3,9670	1,5987	-0,0155720
ANSYS	10	71,957	3,9670	1,5116	0,0086231
Ref	8	66,500	3,8400	1,8556	-0,0022273
Reiss	8	66,665	3,7863	1,8888	-0,0118667
ANSYS	8	66,665	3,7863	1,7943	0,0111910
Ref	5	57,289	3,6598	2,6317	-0,0018770
Reiss	5	57,727	3,5771	2,6979	-0,0071024
ANSYS	5	57,727	3,5771	2,6066	0,0128210
Ref	3	49,551	3,6827	3,9304	-0,0014368
Reiss	3	49,454	3,5552	4,0110	-0,0046055
ANSYS	3	49,454	3,5552	3,9621	0,0106410
Ref	2	42,699	3,8289	5,4227	-0,0009727
Reiss	2	42,362	3,6593	5,4785	-0,0037443
ANSYS	2	42,362	3,6593	5,5264	0,0059470
Ref	1	27,171	4,3142	9,2850	-0,0004173
Reiss	1	25,876	4,0707	9,1122	-0,0021565
ANSYS	1	25,876	4,0707	9,6345	0,0005231

TABLE 13.1 – Résultats au point A

13.4 Sous-structuration et simulation multi-échelles

Le fonctionnement des produits industriels met en jeu des phénomènes physiques à des échelles très différentes. La prise en compte de tous ces phénomènes dans les simulations numériques demanderait d'utiliser des modèles extrêmement détaillés, entraînant des coûts d'identification et/ou de calcul prohibitifs. La simulation multi-échelles est une réponse à cette problématique.

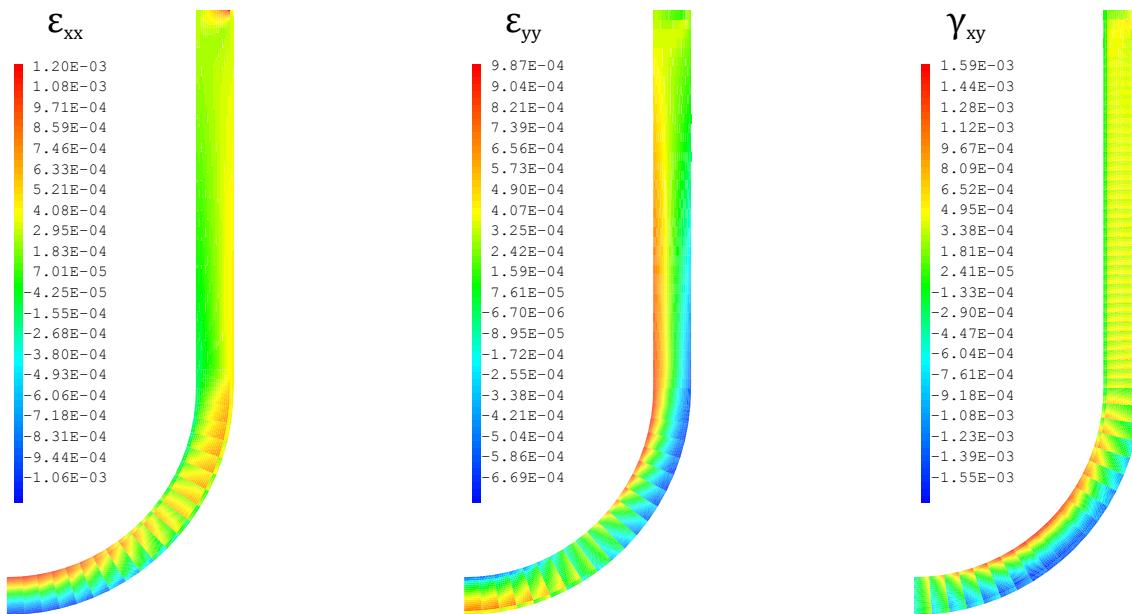


FIGURE 13.3 – Déformations

Elle consiste à simuler chaque phénomène à l'échelle la plus pertinente, i.e. en utilisant plusieurs modèles de tailles et de finesse différentes ; cela permet, grâce à des solveurs adaptés, de réaliser des simulations qui seraient inaccessibles par des approches plus directes.

Imaginons que nous souhaitions calculer un avion, mais que, pour des raisons évidentes de sécurité nous ayons besoin d'obtenir une précision « boulon par boulon ». On se doute bien que l'on ne peut mailler tout l'avion avec un tel niveau de détail... On recourt alors à une cascade de modèles de dimensions et de finesse différentes, allant de l'avion tout entier (mais modélisé relativement grossièrement) à des détails structuraux modélisés très finement (mais limités à de petites zones), comme montré sur la figure 13.12.

La simulation est donc décomposée en différents niveaux, chacun représentant une échelle différente. Pour coordonner ces niveaux entre eux, on utilise généralement une approche dite descendante : on commence par simuler le comportement global de l'avion, puis les résultats sont utilisés pour déterminer les conditions aux limites appliquées sur les niveaux inférieurs. Toutefois, il est parfois également nécessaire de combiner ces approches descendantes à des approches ascendantes : les résultats des simulations fines sont utilisés pour construire des modèles de comportements plus grossiers.

De très nombreuses méthodologies multi-échelles existent et reposent toutes sur le fait de simuler chaque phénomène à l'échelle la plus pertinente. Pour cela, il est nécessaire :

1. de distinguer différentes échelles dans la modélisation et dans la simulation ;
2. de modéliser les relations existant entre ces différentes échelles.

Considérons un problème comportant deux échelles. Le point 1 évoqué ci-dessus se traduit par le fait de disposer de deux modèles distincts :

- Un modèle macroscopique

Il représente le produit et son environnement extérieur et est constitué d'une géométrie et d'un modèle de comportement relativement grossiers (puisque n'ayant pas vocation à représenter les phénomènes microscopiques) ;

- Un modèle microscopique

Il possède une description géométrique et un maillage suffisamment fin ainsi qu'un modèle de comportement détaillé. Il ne comprend qu'une ou quelques « cellules types » de petites dimensions.

Il est souvent possible, pour les matériaux notamment, de disposer d'hypothèses simplificatrices (telles que l'élasticité linéaire) permettant de se restreindre à une seule cellule type.

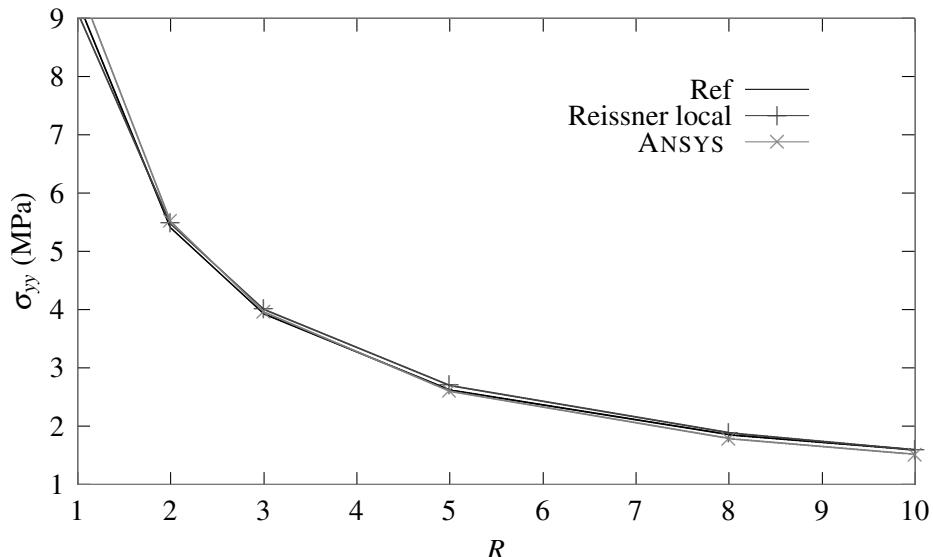


FIGURE 13.4 – σ_{yy} en A

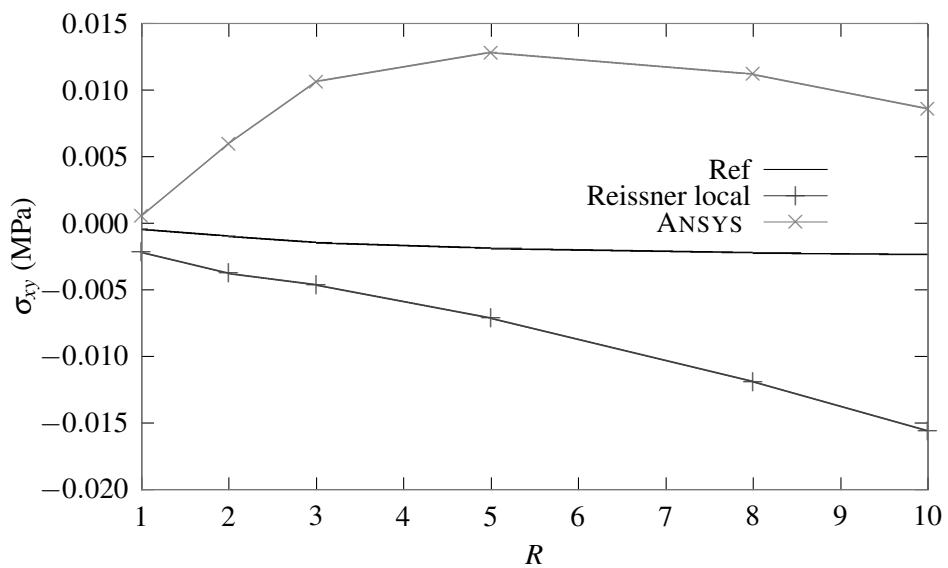


FIGURE 13.5 – σ_{xy} en A

Pour le cas des matériaux anisotropes constitués de plusieurs autres matériaux tels que les matériaux composites et fibreux, on se reportera au chapitre suivant sur l’homogénéisation. Toutefois, certaines fois on ne dispose pas de telles hypothèses et il faut multiplier le nombre de cellules (jusqu’à parfois couvrir tout le modèle macro !)

Le point 2 consiste donc à relier les deux échelles de modélisation.

En effet, les modèles macro et micro ne sont pas indépendants puisqu’ils modélisent la même physique à des échelles différentes. Il est donc nécessaire qu’ils soient cohérents l’un vis-à-vis de l’autre, en tout point et à chaque instant de la simulation. Pour cette raison, les modélisations multi-échelles comportent des couplages, i.e. des modèles d’interactions, entre les échelles.

Dans le cadre de la mécanique des solides déformables, on procède généralement comme suit :

- Le modèle de comportement macroscopique : qui modélise des phénomènes se produisant « au cœur du matériau », doit correspondre à la relation contraintes/déformations observée sur la cellule micro ;
- Le modèle de comportement microscopique : qui traduisent la façon dont la cellule est

Méthode	R (mm)	σ_{xx} peau (MPa)	σ_{xx} âme (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)
Ref	10	-72,248	-3,0668	1,4080	-0,0023570
Reiss	10	-72,542	-3,1193	1,2573	-0,0138800
ANSYS	10	-72,542	-3,1193	1,5464	-0,0198700
Ref	8	-67,723	-2,7905	1,5799	-0,0026011
Reiss	8	-68,001	-2,8457	1,4570	-0,0107700
ANSYS	8	-68,001	-2,8457	1,7111	-0,0197300
Ref	5	-61,079	-2,3199	2,0320	-0,0024099
Reiss	5	-61,335	-2,3813	1,9460	-0,0067001
ANSYS	5	-61,335	-2,3813	2,1535	-0,0186210
Ref	3	-56,823	-1,9080	2,6611	-0,0022154
Reiss	3	-57,072	-1,9756	2,5888	-0,0045050
ANSYS	3	-57,072	-1,9756	2,7738	-0,0176540
Ref	2	-54,772	-1,6200	3,2396	-0,0021234
Reiss	2	-55,026	-1,6902	3,1612	-0,0036124
ANSYS	2	-55,026	-1,6902	3,3438	-0,0172760
Ref	1	-52,491	-1,1687	4,2871	-0,0020797
Reiss	1	-52,777	-1,2391	4,1625	-0,0031088
ANSYS	1	-52,777	-1,2391	4,3710	-0,0174200

TABLE 13.2 – Résultats au point *B*

sollicitée par son environnement extérieur, doivent correspondre à l'état de contraintes ou de déformations macro.

Le modèle macro ayant une résolution beaucoup plus grossière, la cohérence des deux modèles ne peut donc pas se traduire par une correspondance exacte, point par point, des conditions aux limites ou du comportement. Pour cette raison, la plupart des approches multi-échelles postulent que les quantités macroscopiques doivent correspondre à des « moyennes » des quantités micro correspondantes, la définition mathématique exacte de cette moyenne variant fortement d'une approche à l'autre.

On peut donc dire que :

- *Le modèle de comportement macroscopique d'un élément de volume est choisi égal au comportement moyen de la cellule micro correspondante, calculé en utilisant une technique d'homogénéisation ;*
- *Les conditions aux limites micro sont appliquées en moyenne, car les champs de contraintes ou de déplacements macro sont beaucoup trop grossiers.*

Le problème est donc d'échanger des données pertinentes entre les différentes échelles, compte tenu des différentes résolutions des modèles.

Dans le sens micro vers macro, on utilisera les techniques d'homogénéisation dont il sera l'objet au chapitre suivant.

Dans le sens macro vers micro, il s'agit donc de spécifier des conditions aux limites à appliquer sur le bord des cellules micro, à partir d'une solution macro.

Les méthodes les plus simples se contentent d'imposer directement le champ de déplacements (ou de contraintes) macro comme condition aux limites. Le modèle macro ayant par définition une résolution beaucoup plus grossière que le modèle micro, il est incapable de capturer l'allure microscopique des déplacements ou des contraintes. Ces CL sont donc souvent trop imprécises par rapport aux finalités du modèle micro. Cela peut dégrader fortement la qualité des résultats et donc restreindre le domaine de validité de ces approches.

Pour palier ce problème, on écrit les CL micro de manière plus subtile en les décomposant en la somme d'un terme moyen et d'un terme de moyenne nulle. Ainsi, le champ micro u^m sera écrit $u^m = u^M + v^m$ où u^M est le champ macro (i.e. la moyenne du champ micro), et v^m est le reste (à

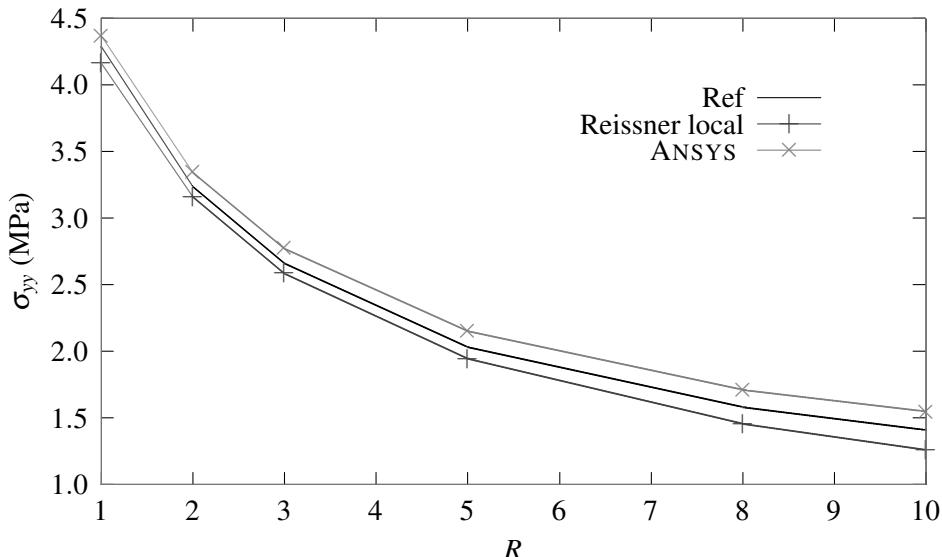


FIGURE 13.6 – σ_{yy} en B

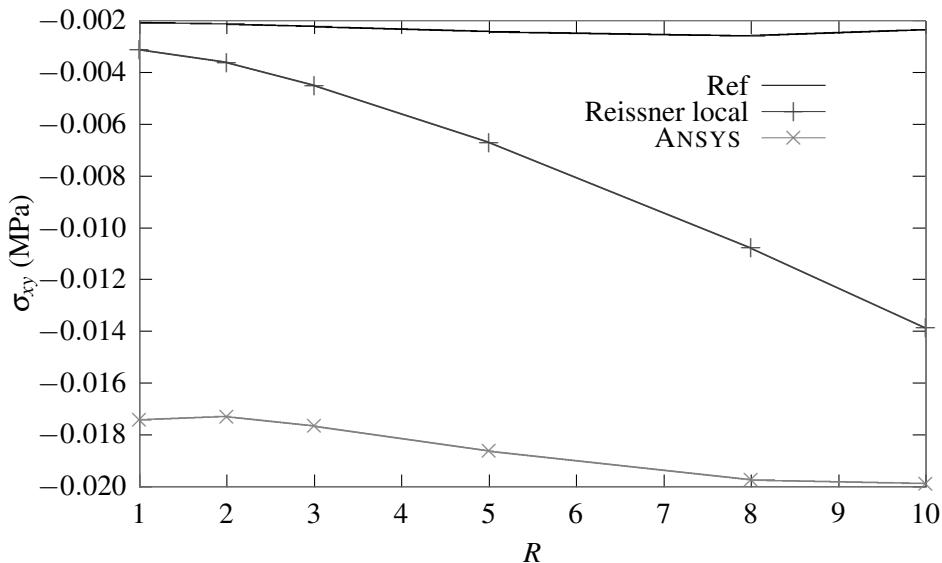


FIGURE 13.7 – σ_{xy} en B

moyenne nulle). Notre problème devient donc de déterminer le reste v^m , et c'est là que les méthodes divergent le plus. On distingue néanmoins deux grosses familles :

- Condition de périodicité

On postule que l'on connaît l'allure du reste. On peut alors enchaîner un calcul macro avec un solveur spécifique puis un calcul micro avec un solveur classique ;

- Couplage des cellules micro

Lorsqu'il n'est pas si simple de « séparer » les échelles, alors il faut résoudre en même temps les deux problèmes micro et macro avec échange de données.

Ces deux approches vont être un peu plus détaillées maintenant.

13.4.1 Condition de périodicité – méthodes multi-niveaux

Souvent, les méthodes multi-niveaux sont basées sur des conditions de périodicité inspirées de l'homogénéisation périodique. Ces conditions supposent que la partie micro du champ de déplacement, v^m , est périodique, i.e. est égale sur chaque paire de faces opposées de la cellule type considérée. La

Méthode	R (mm)	σ_{yy} peau (MPa)	σ_{yy} âme (MPa)	σ_{xx} (MPa)	σ_{xy} (MPa)
ref	10	46,0340	2,410200	0,57548	0,77518
Reiss	10	46,0265	2,397450	0,48986	0,71342
ANSYS	10	46,0265	2,397450	0,62529	0,80572
ref	8	45,8625	2,443000	0,68465	0,83563
Reiss	8	45,8505	2,421450	0,62992	0,76781
ANSYS	8	45,8505	2,421450	0,71910	0,90760
ref	5	45,4490	2,539450	1,00620	1,00390
Reiss	5	45,5025	2,499550	1,00810	0,91559
ANSYS	5	45,5025	2,499550	0,94099	1,19800
ref	3	44,5760	2,694400	1,56820	1,25790
Reiss	3	45,0015	2,644550	1,62260	1,10690
ANSYS	3	45,0015	2,644550	1,30760	1,64980
ref	2	43,1510	2,856600	2,23920	1,50420
Reiss	2	44,1375	2,805000	2,32600	1,25870
ANSYS	2	44,1375	2,805000	1,77080	2,12250
ref	1	37,6330	3,184100	4,02110	1,90380
Reiss	1	40,1735	3,143850	4,04390	1,41220
ANSYS	1	40,1735	3,143850	3,04360	3,15350

TABLE 13.3 – Résultats au point E

même hypothèse est formulée sur les contraintes. On obtient ainsi un ensemble de CL permettant de déterminer entièrement la solution micro à partir d'une déformation (ou d'une contrainte) macro imposée.

Le résultat micro ainsi obtenu est pertinent à deux conditions : 1) il faut que la microstructure soit effectivement périodique, et 2) que le principe de Saint-Venant s'applique, i.e. que l'on se trouve suffisamment loin de la surface de la pièce (y compris des détails géométriques tels que des trous, des fissures...). Dans le cas contraire, des effets de bord peuvent affecter l'allure de la solution, qui n'est alors plus périodique : il faut donc recourir à d'autres modélisations.

La simulation multi-niveaux fait appel à deux types de modèles, chacun équipé de son solveur :

- un modèle macro ne possédant pas de relation de comportement du matériau prédéfinie, équipé d'un solveur EF modifié ;
- un ensemble de modèles micro ne possédant pas de CL prédéfinies, équipés de solveurs EF classiques.

En fait, le solveur EF modifié est un solveur EF classique avec une petite différence : à chaque fois que le solveur macro a besoin du comportement d'un élément de volume quelconque, il envoie l'état de déformation macro de cet élément au solveur micro. Ce dernier a alors toutes les données nécessaires pour simuler numériquement son comportement à l'échelle microscopique. Il renvoie alors l'état de contraintes macro, selon la décomposition mentionnée ci-dessus. Les cellules micro étant pour ainsi dire « indépendantes », il est possible de recourir à des calculateurs parallèles.

Le domaine de validité de ces méthodes est bon dès que l'on sait faire des hypothèses réalistes sur l'allure de la solution micro. Ce n'est pas toujours le cas : par exemple, la fissuration, lorsqu'elle sort d'un cadre microscopique pour atteindre un cadre macroscopique, se prête très mal à cet exercice. Le cas de la fissuration sera traitée dans un chapitre ultérieur de ce document.

En résumé :

Les méthodes multi-niveaux abordent la simulation à l'échelle macro et se « nourrissent » du comportement simulé à l'échelle microscopique.

Dans les méthodes multi-niveaux, l'emploi d'hypothèses de périodicité se traduit par des « sauts » de contraintes et de déplacements d'une cellule à l'autre ; si les échelles sont mal séparées, ces sauts sont non négligeables. Ne correspondant à priori pas à la physique, ils traduisent un

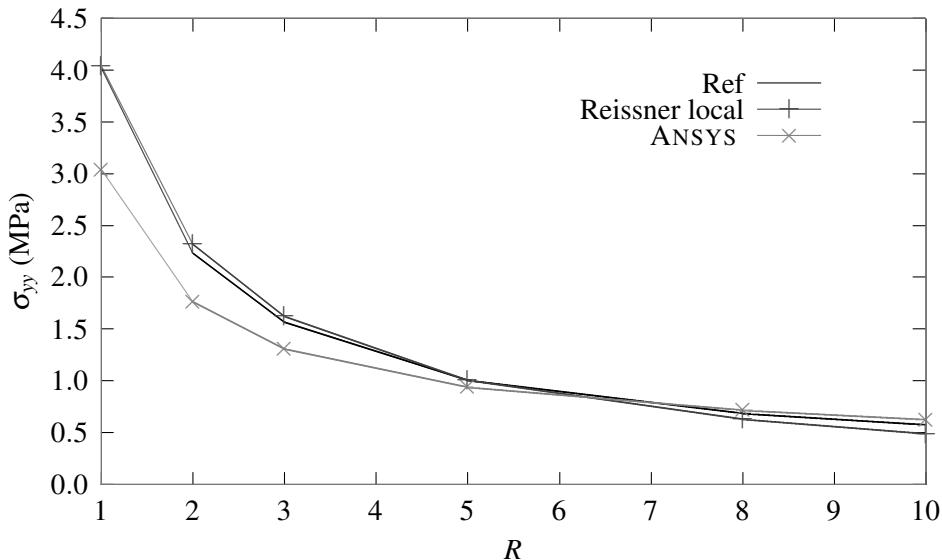


FIGURE 13.8 – σ_{yy} en E

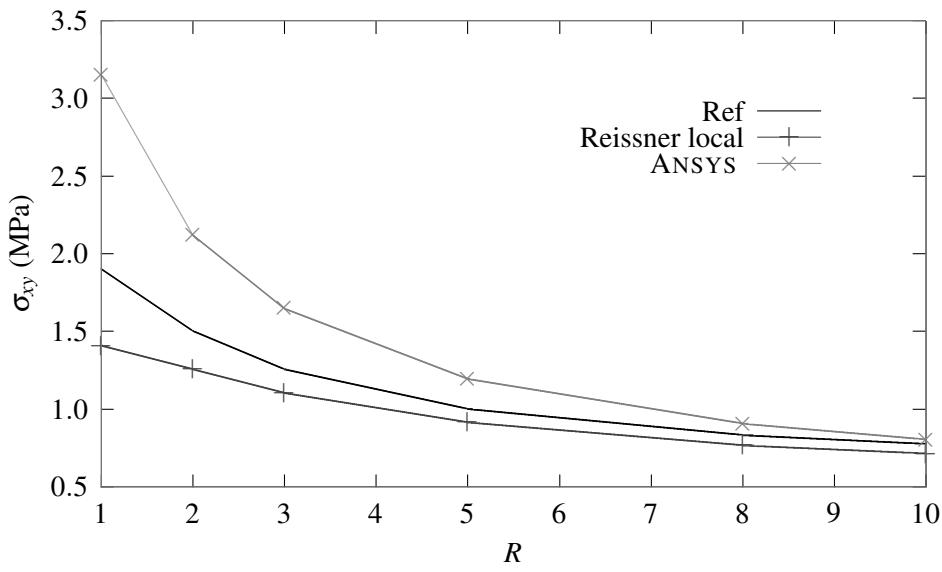


FIGURE 13.9 – σ_{xy} en E

écart avec la réalité.

13.4.2 Couplage des cellules micro – méthodes de décomposition de domaine

Les méthodes multi-niveaux présentées au paragraphe précédent sont mises à mal lorsque le comportement micro « déborde » un peu sur le comportement macro, i.e. lorsque les échelles ne sont pas suffisamment bien séparées. On recourt alors aux méthodes de décomposition de domaines, dont la validité est plus large, mais qui sont plus complexes.

Puisque nous ne pouvons plus supposer une allure de la solution micro, nous n'allons utiliser que les seules connaissances disponibles à priori : la continuité du champ de déplacements ainsi que la vérification par les contraintes du principe d'action-réaction. Il « suffit » donc d'écrire qu'à l'interface entre deux cellules micro, il y a égalité des déplacements et nullité de la somme des traces des contraintes (on retrouve ce que nous avons déjà plusieurs fois évoqué avec l'état des contraintes à l'interface entre deux matériaux différents).

La présence de couplages entre les cellules micro (qui en quelque sorte correspond à une

Méthode	R (mm)	σ_{yy} peau (MPa)	σ_{yy} âme (MPa)	σ_{xx} (MPa)	σ_{xy} (MPa)
ref	10	-47,438	-2,1425	0,54431	0,30073
Reiss	10	-47,510	-2,1533	0,39416	0,38936
ANSYS	10	-47,510	-2,1533	0,65814	0,30000
ref	8	-47,4555	-2,11415	0,62480	0,24743
Reiss	8	-47,5605	-2,12825	0,50447	0,33138
ANSYS	8	-47,5605	-2,12825	0,72921	0,21663
ref	5	-47,415	-2,03645	0,83167	0,10558
Reiss	5	-47,5335	-2,05940	0,76054	0,18360
ANSYS	5	-47,5335	-2,05940	0,87666	0,00251
ref	3	-47,223	-1,92305	1,11940	-0,10042
Reiss	3	-47,1885	-1,95170	1,07760	-0,01314
ANSYS	3	-47,1885	-1,95170	1,05090	-0,28747
ref	2	-46,940	-1,81445	1,38480	-0,29901
Reiss	2	-46,6760	-1,84130	1,35230	-0,18934
ANSYS	2	-46,6760	-1,84130	1,21420	-0,55238
ref	1	-46,1935	-1,61030	1,85860	-0,67358
Reiss	1	-45,4620	-1,62185	1,81270	-0,50497
ANSYS	1	-45,4620	-1,62185	1,52280	-1,03400

TABLE 13.4 – Résultats au point F

généralisation de la condition de périodicité du paragraphe précédent) change complètement le déroulement de la simulation par rapport aux méthodes multi-niveaux vues au paragraphe précédent. En effet, la prise en compte de ces couplages implique d'échanger directement des données entre les différents solveurs micro, qui ne sont plus « indépendants ». En contrepartie, cela permet de propager une information fine sur l'ensemble de la pièce et, ainsi, de se passer de l'hypothèse de séparation des échelles : il n'est plus nécessaire de modéliser séparément les phénomènes micro et macro.

Concrètement, les méthodes de décomposition de domaine sont des solveurs, qui ont généralement un fonctionnement multi-échelles. Elles partent d'un modèle micro du produit décomposé en sous-structures, et consistent à coupler les sous-structures en échangeant des contraintes et des déplacements sur les interfaces. Des versions plus ou moins simples existent. Notons bien qu'il n'y a pas de modèle macro dans une telle approche.

En résumé :

Dans la décomposition de domaine, la simulation est abordée à l'échelle la plus fine : la sous-structuration et le problème grossier ne sont utilisés que pour améliorer l'efficacité de la résolution.

Une simulation par décomposition de domaine conduit toujours à un champ de déplacement micro continu sur toute la structure, et un champ de contraintes micro équilibré (au sens des EF) sur toute la structure.

Actuellement, la simulation multi-échelles est encore relativement peu répandue dans le monde de l'ingénierie. Elle représente en effet un changement considérable par rapport aux pratiques usuelles de simulation ; de plus, la plupart des logiciels de calcul multi-échelles sont des outils développés par des chercheurs, qui n'ont pas encore l'ergonomie et la robustesse des solveurs utilisés dans l'industrie. Les industriels attendent donc l'apparition d'outils mieux adaptés à leurs problématiques avant d'envisager une utilisation plus fréquente de ces méthodes.

Cependant, à plus long terme, la simulation multi-échelles suscite un intérêt considérable dans l'industrie : en rendant accessibles à la simulation des phénomènes qui ne peuvent actuellement être étudiés qu'expérimentalement, elle constitue un pas important en direction du « virtual testing ». Pour cette raison, elle fait toujours l'objet de nombreux projets de recherche. Ceux-ci concernent

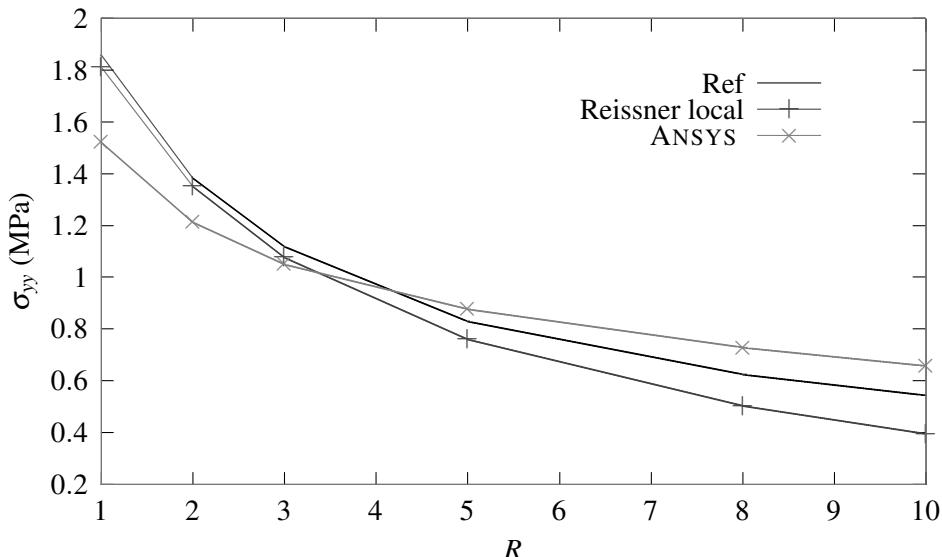


FIGURE 13.10 – σ_{yy} en F

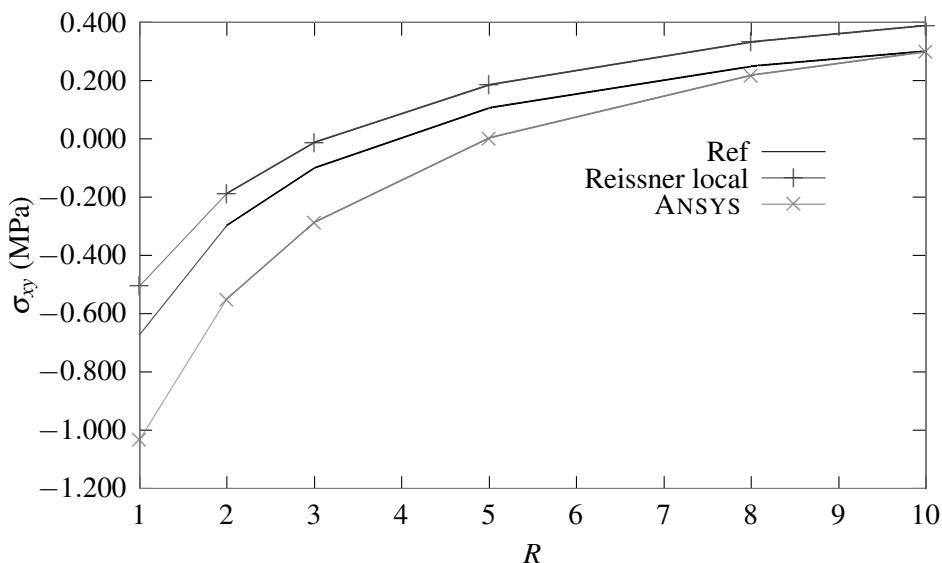


FIGURE 13.11 – σ_{xy} en F

aussi bien la modélisation, avec notamment la mise au point de « matériaux virtuels » (qui ne sont rien d'autre que des modèles multi-échelles, notamment pour les matériaux composites), que les solveurs qui sont en constante évolution.

13.5 Super-éléments

Dans ce paragraphe, nous allons parler du concept de super-élément, qui n'est qu'une application de ce qui a été présenté au paragraphe précédent.

Un super-élément est un groupement d'éléments qui, après assemblage, peuvent être vus comme un élément individuel du point de vue du calcul. Cet assemblage peut être requis pour des raisons de modélisation ou de calcul.

Pour constituer un super-élément, les éléments groupés ne peuvent être pris au hasard. Ils doivent au moins constituer une « structure » en eux-mêmes, mais d'autres conditions sont nécessaires qui seront détaillées plus loin.

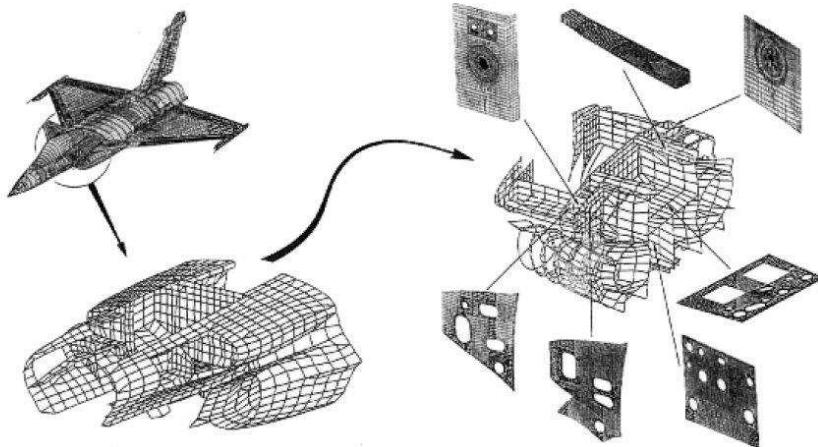


FIGURE 13.12 – Sous-structuration en aéronautique

Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, il y a deux voies duales pour considérer ce processus.

L'approche descendante consiste à considérer un super-élément comme constitué d'un ensemble d'éléments. On parle alors de macro-élément. L'approche ascendante consiste à considérer un super-élément comme un sous-ensemble d'une structure complète. On parle alors de sous-structure.

Finalement, quand parle-t-on de sous-structure ou de macro-élément ? En fait, il n'y a pas de règle, et le terme générique de super-élément couvre tout le spectre depuis l'élément individuel jusqu'à la structure complète.

Histoire

Originellement introduit dans l'aéronautique dans les années 60 (d'où le schéma au paragraphe précédent), le concept de sous-structuration répondait à trois motivations :

- faciliter la division du travail : des sous-structures avec des fonctions différentes (fuselage, ailes, train d'atterrissage...) pouvaient être traitées par des groupes d'experts différents. Chaque groupe pouvait à loisir améliorer, raffiner... sa partie tant que l'interface avec les autres parties restait inchangée.
- profiter de la répétition : en remarquant qu'une même structure peut contenir plusieurs sous-structures identiques, il est possible de diminuer le temps d'étude (par exemple symétrie des ailes...)
- contourner les limitations des ordinateurs : les ordinateurs de l'époque atteignaient vite leurs limites (par exemple en terme de taille mémoire). Diviser une structure complexe, que l'on était incapable de calculer en une seule fois, permettait de sauvegarder des résultats sous-structure par sous-structure puis d'effectuer « l'assemblage » des résultats.

Si les deux premiers points sont toujours d'actualité, le troisième l'est moins, surtout depuis le recourt aux algorithmes parallèles.

C'est d'ailleurs le développement de procédures pour le calcul parallèle qui a conduit les mathématiciens appliqués au concept de sous-domaines, alors qu'ils devaient grouper des éléments pour des raisons de calcul.

13.5.1 Condensation statique

En tant qu'assemblage de plusieurs éléments, un super-élément possède :

- des degrés de liberté internes : qui ne sont pas connectés à des éléments n'appartenant pas au super-élément considéré. Les noeuds ayant des ddl internes sont dits noeuds internes.
- des degrés de liberté aux frontières : qui sont connectés à au moins une entité (élément, super-élément) n'appartenant pas au super-élément considéré.

L'opération consistant à éliminer tous les ddl internes est appelée condensation statique ou condensation. Regardons ce qui se passe d'un point de vue matriciel. Pour cela, considérons que

nous ayons à résoudre le système :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (13.1)$$

Le vecteur \mathbf{q} se compose des composantes internes \mathbf{q}_i et des composantes de frontière \mathbf{q}_b , de sorte que le système, une fois réordonné s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

Si la matrice \mathbf{K}_{ii} n'est pas singulière, alors la seconde équation peut être résolue en terme de variables internes en :

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{f}_i - \mathbf{K}_{ib}\mathbf{q}_b) \quad (13.3)$$

En reportant cela dans la première équation, on obtient le système avec matrice de rigidité condensée :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{bb}\mathbf{q}_b = \tilde{\mathbf{f}}_b \quad (13.4)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{bb} = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bi}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{f}}_b = \mathbf{f}_b - \mathbf{K}_{bi}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{f}_i \quad (13.5)$$

Après condensation, on peut donc bien considérer le super-élément, d'un point de vue calculatoire, comme un élément individuel.

Notons que la matrice \mathbf{K}_{ii} n'est pas singulière si elle possède la condition de rang suffisant, i.e. si elle ne contient que des modes à énergie nulle correspondant aux modes rigides (cette condition a déjà été évoquée à propos de la validation des éléments). Si cela n'est pas le cas, le super-élément est dit flottant, et peut quand même être traité (en utilisant les projecteurs et inverses généralisés, mais c'est un peu plus compliqué).

La condensation statique est une opération matricielle appelée inversion partielle ou élimination partielle ou pseudo-inversion.

13.5.2 Remonter aux ddl internes

Une fois le système condensé résolu, on obtient les valeurs aux noeuds internes en réutilisant la formule :

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{f}_i - \mathbf{K}_{ib}\mathbf{q}_b) \quad (13.6)$$

13.6 Pseudo-inversion et réanalyse

On peut être amené, notamment lors de phases de conceptions, à devoir considérer plusieurs problèmes « relativement proches » les uns des autres (i.e. tester plusieurs configurations). On est alors tenté d'utiliser tout ou partie de la première modélisation afin de réaliser les suivantes.

L'idée de la méthode de réanalyse est d'analyser le comportement d'une structure élastique par EF sans particulariser le système d'équations final par la prise en compte de conditions cinématiques.

On obtient alors une solution générale de ce système faisant intervenir une matrice de rigidité régularisée. La nature de cette matrice (somme d'une matrice bande et d'une matrice pleine) ne permet pas d'utiliser les méthodes les plus classiques et optimales de résolution, mais il est possible d'en développer d'autres permettant d'accéder à la quasi-inverse d'une matrice singulière semi-définie positive (tout en profitant de son caractère bande).

Il est alors possible, tout en modifiant les conditions cinématiques et les chargements appliqués, de procéder à des réanalyses qui consistent alors simplement à résoudre des systèmes dits secondaires de tailles très inférieures au système global (mais un surcoût a été « payé » initialement pour calculer la pseudo-inverse).

Des problèmes de contact avec ou sans frottement entre solides élastiques peuvent bénéficier de cette méthode, ainsi que la modélisation du comportement élastique incompressible.

Dans ce paragraphe sur la réanalyse, nous n'utiliserons pas la notation avec les crochets et les accolades pour les matrices et les vecteurs afin d'alléger l'écriture.

13.6.1 Modification du chargement uniquement

Restons sur le problème structurel correspondant au système matriciel :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (13.7)$$

où \mathbf{K} est de dimension $n \times n$.

Si l'on souhaite considérer plusieurs cas de chargement $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_k$, on peut soit résoudre k fois le système précédent, soit résoudre le système :

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (13.8)$$

où $\bar{\mathbf{F}}$ est la matrice $n \times k$ des k vecteurs de chargement, et $\bar{\mathbf{q}}$ est la matrice $n \times k$ des k vecteurs solutions correspondants.

Cette méthode, la plus simple des méthodes de réanalyse, permet malgré tout d'économiser des opérations.

13.6.2 Modification de la matrice

Considérons maintenant le cas où ce n'est plus le chargement \mathbf{F} qui peut varier d'une analyse à l'autre, mais la matrice \mathbf{K} .

On est amené à chercher une solution du système :

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (13.9)$$

en fonction de la solution du système non perturbé, i.e. à calculer $(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})^{-1}$ en fonction des autres matrices. On rappelle que $\Delta\mathbf{K}$ est appelé perturbation de la matrice \mathbf{K} .

Certaines formules existent pour des modifications mineures de la matrice \mathbf{K} , mais nous ne les présenterons pas.

13.6.3 Modification des conditions cinématiques

Nous ne considérons ici que des modifications des conditions cinématiques. Généralement, les conditions cinématiques sont prises en compte en supprimant ou en modifiant les équations de l'équilibre avant résolution, ce qui rend le système régulier. Nous avons vu que le système à résoudre (incluant les conditions cinématiques) revient à chercher le minimum de la forme quadratique :

$$M = \frac{1}{2}^T \mathbf{q} \mathbf{K} \mathbf{q} - ^T \mathbf{q} \mathbf{F} \quad (13.10)$$

Notons que l'on peut écrire les p conditions cinématiques sous la forme : $\mathbf{C}\mathbf{q} = \delta$ avec \mathbf{C} une matrice $p \times n$, et \mathbf{q} et δ des vecteurs.

Nous avons également déjà vu que ces conditions peuvent être prises en compte par l'intermédiaire de p multiplicateurs de Lagrange λ dans la fonctionnelle précédente qui devient alors :

$$M^* = \frac{1}{2}^T \mathbf{q} \mathbf{K} \mathbf{q} - ^T \mathbf{q} \mathbf{F} - ^T \lambda (\mathbf{C}\mathbf{q} - \delta) \quad (13.11)$$

Le système à résoudre est symétrique, régulier, mais non défini-positif.

Pour pallier la lenteur des algorithmes disponibles pour la résolution numérique d'un tel système (méthode de Gauss ou de décomposition avec pivotage), il est préférable de régulariser le système.

Pour cela, on s'appuie sur la connaissance de la matrice \mathbf{K} : celle-ci est singulière d'ordre r , où r correspond aux mouvements de corps rigide, ou modes rigides. Cela veut également dire qu'elle possède $(n - r)$ valeurs propres strictement positives (et r valeurs propres nulles).

Il est évident qu'il faut au moins disposer de $p \geq n$ conditions aux limites cinématiques pour que le système puisse admettre une solution. C'est évidemment l'hypothèse que nous ferons (sinon le problème est mal posé).

Nous considérons la matrice \mathbf{R} de dimension $n \times r$ des r vecteurs propres de \mathbf{K} correspondant à la valeur propre nulle. Quitte à construire ces vecteurs (qui sont orthogonaux), nous les choisirons normés. On a alors :

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{R} = \mathbf{0} \\ {}^T\mathbf{R}\mathbf{R} = \mathbf{I}_r \end{cases} \quad (13.12)$$

On introduit la matrice :

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (13.13)$$

qui, pour $\alpha > 0$ est régulière car symétrique et définie-positive. Les colonnes de \mathbf{R} sont vecteurs propres de \mathbf{K}_α pour la valeur propre α .

Dans le système $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$, on remplace \mathbf{K} par $\mathbf{K}_\alpha - \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, et en introduisant le fait que $\mathbf{K}_\alpha \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \alpha \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, on obtient finalement :

$$\mathbf{K}_\alpha (\mathbf{I}_n - \mathbf{R}^T \mathbf{R}) \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (13.14)$$

Si l'on change de variable en posant $\mathbf{v} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{R}^T \mathbf{R}) \mathbf{q}$ (\mathbf{v} est la projection de \mathbf{q} sur l'orthogonal du noyau de \mathbf{K}), \mathbf{v} devient l'inconnue du système régularisé :

$$\mathbf{K}_\alpha \mathbf{v} = \mathbf{F} \quad (13.15)$$

et l'on retrouvera la solution du système initial \mathbf{q} par :

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} + \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{q} = \mathbf{K}_\alpha^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{q} \quad (13.16)$$

On peut remarquer que \mathbf{K}_α^{-1} , que l'on note \mathbf{S}_α possède les mêmes valeurs propres que \mathbf{K}_α (et donc les mêmes que \mathbf{K} et $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$). On est donc naturellement amené à décomposer \mathbf{S}_α comme :

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathbf{S} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (13.17)$$

avec $\mathbf{S}\mathbf{R} = 0$ et ${}^T\mathbf{R}\mathbf{S} = 0$.

C'est cette matrice \mathbf{S} que l'on appelle quasi-inverse de \mathbf{K} , car :

$$\mathbf{SK} = \mathbf{KS} = \mathbf{I} - \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (13.18)$$

Elle est de dimension $n \times n$, symétrique, semi-définie positive (ses valeurs propres sont de même signe), admet les mêmes valeurs propres que \mathbf{K} et en particulier ceux de la valeur propre nulle dont \mathbf{R} est une base, mais elle ne possède pas de caractère bande.

Voici brossé, en quelques lignes, les idées principales de la méthode. Nous n'irons pas plus loin dans sa présentation.

On rappelle que l'intérêt de la méthode est qu'une fois une première étape consistant à intégrer les données relatives à la structure (géométrie, discréétisation, matériaux) réalisée, on peut alors effectuer autant de fois que nécessaire la seconde étape qui porte sur la prise en compte des chargements et conditions aux limites.

Notons qu'il est possible de modifier un peu la forme du système secondaire afin de pouvoir prendre en compte, lors de la seconde étape, des conditions plus complexes, comme des conditions mixtes par exemple...

13.7 Dérivées d'ordre supérieur

Au paragraphe précédent, nous avons vu comment, sur une structure donnée, il était possible de prendre en compte plusieurs chargements et conditions aux limites cinématiques sans avoir à refaire tout le calcul.

Dans le même état d'esprit, nous allons voir maintenant comment optimiser la forme d'une structure, sans refaire tous les calculs.

Considérons le cas d'une conception ayant pour but de déterminer la forme la plus adaptée selon certains critères (rigidité, déformée, contraintes, énergie transmise...). Chaque évaluation d'une fonction coût conduit à une analyse par EF. L'utilisation de dérivées par rapport à la géométrie, ou plus généralement par rapport à la fonction coût, permet de réduire ce nombre d'analyse.

En fait, peut-être contrairement à l'intuition, le calcul de ces dérivées est relativement peu coûteux ; il n'est pas difficile et peut être fait automatiquement. Les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction coût peuvent en fait être calculées avec autant de précision que la fonction elle-même. Ainsi, en un seul calcul, il est possible d'obtenir un développement de Taylor de la fonction coût, et donc d'éviter de nombreuses analyses.

13.7.1 Dérivées par rapport à la géométrie

En plus de considérer un domaine borné Ω de \mathbb{R}^n , nous allons considérer une perturbation V de Ω , et nous noterons :

$$\Omega + V = (I + V)(\Omega); \quad V \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad (13.19)$$

Nous considérons la fonction coût $\mathbf{J}(\Omega, u_\Omega)$ choisie pour décrire le problème d'optimisation. Cette fonction dépend donc naturellement du domaine Ω et de la solution du problème sur ce domaine u_Ω . Nous allons donner un sens à la dérivée de la fonction coût par rapport aux variations du domaine.

Si l'on considère le cas simple $\mathbf{J}(\Omega, u) = \int_{\Omega} u$, alors il vient :

$$\frac{d\mathbf{J}}{d\Omega}(\Omega, u_v, V) = \int_{\Gamma} u_\Omega V \cdot n + \int_{\Omega} u'_{\Omega;v} \quad (13.20)$$

avec une fois encore n la normale extérieure de $\Gamma = \partial\Omega$, et :

$$u'_{\Omega;v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{\Omega+tV}(x) - u_\Omega(x)}{t}, \quad \forall x \in \Omega \quad (13.21)$$

La méthode de dérivation par transport conduit à :

$$\frac{d\mathbf{J}}{d\Omega}(\Omega, u_v, V) = \int_{\Gamma} u_\Omega \operatorname{div} V + \int_{\Omega} \dot{u}_{\Omega;v} \quad \text{avec } \dot{u}_{\Omega;v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_{\Omega+tV} \circ (I+tV)(x) - u_\Omega(x)}{t}, \quad \forall x \in \Omega \quad (13.22)$$

On définit alors la dérivée de la fonction coût par rapport aux variations du domaine par :

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \Omega}(\Omega, u, V) = \int_{\Gamma} u V \cdot n \quad (13.23)$$

La difficulté tient à ce que l'ensemble des domaines Ω ne constitue pas un espace vectoriel (les perturbations ne s'ajoutent pas, ou au moins ne sont pas associatives : $(\Omega + V) + W \neq (\Omega + W) + V$).

Toutefois, si l'on utilise un paramétrage du domaine, il est alors possible d'utiliser les outils classiques du calcul différentiel dans les espaces normés. On introduit alors le paramètre F par :

$$J(F, u) = \mathbf{J}(F(\Omega), u \circ F^{-1}), \quad F \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad (13.24)$$

et l'on a alors $(F + V) + W = (F + W) + V$.

La dérivée partielle de J par rapport au paramètre F est définie sans ambiguïté. Dans notre exemple, cette dérivée, prise au point $F = I$ est :

$$\frac{\partial J}{\partial F}(I, u) \cdot V = \int_{\Omega} u \operatorname{div} V \quad (13.25)$$

On pourra alors nous faire remarquer que :

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \Omega}(\Omega, u, V) \neq \frac{\partial J}{\partial F}(I, u) \cdot V \quad (13.26)$$

ce à quoi nous répondrons que c'est le prix à payer pour se ramener à un espace vectoriel. Cette démarche peut alors être généralisée aux ordres supérieurs.

13.7.2 Calcul des dérivées

Nous n'entrons pas dans le détail, mais en cours de calcul se pose la question intéressante : obtient-on le même résultat si l'on discrétise d'abord et dérive ensuite ? En fait, la réponse est oui, sous certaines conditions de régularité que nous ne mentionnerons pas dans le cadre de ce document.

Encore une fois, nous n'avons fait qu'effleurer le problème, juste pour « faire connaître » la méthode. Il nous semblait intéressant de présenter la notion de dérivée par rapport à la géométrie.

De telles méthodes sont d'ores et déjà implémentées dans certains codes de calculs. Leur intérêt devrait apparaître clairement au lecteur (nous l'espérons).

Chapitre 14

Homogénéisation

Résumé — L'idée bien connue de l'homogénéisation est de remplacer un milieu « compliqué » par un milieu équivalent simple afin de simplifier le modèle numérique à résoudre. L'intérêt de ces techniques est donc évident.

Par exemple, un matériau composite composé de plusieurs plis (couches) constituées chacune de fibres noyées dans une matrice et dont l'orientation diffère d'une couche à l'autre peut être représenté avantageusement par un matériau « homogénéisé » ou « équivalent ».

Nous allons présenter les méthodes d'homogénéisation ainsi que leurs applications en mécanique et acoustique, mais également en modélisation.

Histoire

Les théories des milieux effectifs visent à estimer les propriétés *effectives* (i.e. macroscopiques) d'un milieu en fonction des propriétés locales de chacun des constituants ainsi que d'un certain nombre d'informations sur la microstructure.

Les premières théories remontent au XIXe siècle et sont dues à Mossotti, Maxwell, Poisson ou encore Lorentz. Le but de ces modèles est de fournir soit des bornes pour le comportement effectif, soit des approximations du comportement effectif. Les bornes sont optimales lorsqu'il existe une microstructure particulière qui réalise exactement le modèle physique. On évalue les « bonnes » propriétés de ces théories en les confrontant à d'autres résultats théoriques, calculs analytiques et numériques...



Mossotti Maxwell Poisson Lorentz

Ces théories sont utilisées pour les problèmes de conductivité (milieux diélectriques), en mécanique, magnétique, thermique... lorsque l'on a des phases de conductivité, d'élasticité, des coefficients thermiques... variables. Ces problèmes sont en général très difficiles à résoudre (non-linéaires et anisotropes) alors qu'en même temps, du point de vue des applications pratiques, il n'est pas forcément nécessaire de tenir compte de l'ensemble des degrés de liberté de ces systèmes.

L'existence d'un *comportement effectif* n'est nullement assurée. On montre que, sous certaines hypothèses (en particulier l'existence d'un *volume élémentaire représentatif*), on peut effectivement remplacer un matériau hétérogène par un milieu homogène équivalent.

Enfin, d'un point de vue purement numérique, ces méthodes peuvent être utilisées pour « simplifier » un système à résoudre, que cela ait un sens physique ou non.

Notons que les techniques d'homogénéisation ne sont pas que des artefacts, des trucs et astuces.

Certaines des grandeurs physiques que nous utilisons tous les jours ne sont que des moyennes.

Le meilleur exemple en est la pression. Bien qu'en un point donné d'un gaz on voit passer des particules allant en tous sens, on constate également, à une échelle plus macroscopique, un schéma d'ensemble qui permet de définir par exemple la pression qu'exerce ledit gaz sur une paroi... pourtant rien de « cohérent » ne se dégage à l'échelle microscopique.

Le but de ce chapitre est donc d'effectuer le passage du niveau microscopique au niveau

macroscopique (historiquement les premières homogénéisations, appelées alors moyennisations, utilisaient les moyennes arithmétique et harmonique) en fournissant la justification de ce passage (existence et unicité) ainsi que la formule (l'algorithme) de calcul des coefficients efficaces.

Les méthodes que nous présenterons seront les méthodes de développement régulier, de la couche limite, et de développement asymptotique.

Le cas des milieux poreux sera ensuite considéré.

Enfin, nous mentionnerons une application de ces méthodes pour réduire la dimension de certains problèmes.

14.1 Méthodes d'homogénéisation

Nous allons considérer le problème de conductivité linéaire donné par l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet. Nous rappelons qu'il s'agit du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (14.1)$$

On rappelle également que si Ω est un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^n , et $H_0^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions qui s'annulent sur Γ , alors la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème précédent est également la solution du problème faible :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad -\int_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x)v \quad (14.2)$$

où $f \in L^2(\Omega)$. Pour que ces deux formulation soient équivalentes, on a supposé que $A(x)$ est régulière : i.e. que pour chaque x de Ω , $A(x)$ est une matrice $n \times n$, dont les éléments sont mesurables et qui est symétrique, définie-positive, bornée, i.e. qu'il existe deux constantes K_1 et $K_2 > 0$ telles que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad K_1 v \cdot v \leq A(x)v \cdot v \leq K_2 v \cdot v \quad (14.3)$$

Mentionnons le cas particulier où $A(x)$ est régulier dans Ω mais pas sur Γ , alors on a deux conditions d'interface :

$$[u] = 0 \quad \text{et} \quad [n \cdot A(x)\nabla u] = 0 \quad (14.4)$$

Nous savons également que la solution existe et est unique (d'après le théorème de Lax-Milgram, i.e. d'après le théorème de Riesz-Fréchet en remarquant le produit scalaire qui va bien...)

Intéressons nous maintenant d'un peu plus près à $A(x)$. Supposons que $A(x)$ possède une certaine périodicité ε , par exemple, que le matériau constituant le domaine soit constitué de couches successives de deux matériaux différents, mais avec une périodicité, comme illustré sur la figure 14.1. Dans un tel cas, nous dirons que les coefficients A dépendent de x/ε . Cette écriture sous forme

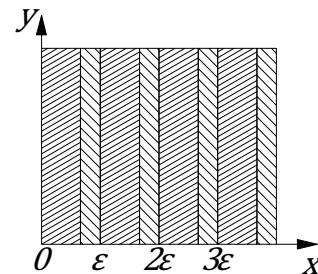


FIGURE 14.1 – Matériau périodique

normalisée permet de dire que A est périodique de période 1.

Dans le cas unidimensionnel, le problème devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \frac{du}{dx} = f(x) & \text{pour } x \in [0, l] \\ u = 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } x = l \end{cases} \quad (14.5)$$

A est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de période 1, et nous la supposerons régulière par morceaux et telle qu'il existe K_1 et $K_2 > 0$ telles que $K_1 \leq A(v) \leq K_2$.

La solution du problème est alors :

$$u(x) = \int_0^x A^{-1}(y/\varepsilon) \left(\int_0^y f(v) dv + c_1 \right) dy + c_2 \quad (14.6)$$

avec $c_2 = 0$ et

$$c_1 = \frac{\int_0^l A^{-1}(y/\varepsilon) \int_0^y f(v) dv dy}{\int_0^l A^{-1}(y/\varepsilon) dy} \quad (14.7)$$

Le nombre d'intervalles pour le calcul approché de c_1 est très grand (i.e. très supérieur à l/ε).

Exprimé autrement, ce résultat devient : le coefficient homogénéisé est $\frac{1}{\langle A \rangle}$ et non pas $\langle A \rangle$ (où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne).

14.1.1 Méthode de développement régulier

Dans la méthode de développement régulier, on se propose de chercher la solution asymptotique $u^{(\infty)}$ sous la forme :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x) \quad (14.8)$$

où $u_i(x)$ ne dépend pas de ε .

La solution asymptotique $u^{(\infty)}$ est bien de la forme précédente si en injectant cette expression dans celle du problème alors on obtient une petite erreur au second membre.

Pour le calcul on procède donc comme suit :

- on injecte la forme souhaitée (cette forme s'appelle l'ansatz) ;
- pour avoir un second membre avec un terme d'erreur petit, on obtient la forme des $u_i(x)$;
- on vérifie que les $u_i(x)$ trouvés conviennent bien.

14.1.2 Méthode de la couche limite

Considérons le problème unidimensionnel :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' - p(x)u = f(x) & \text{pour } x \in [0, 1] \\ u(0) = A \text{ et } u(1) = B \end{cases} \quad (14.9)$$

où $p \in C([0, 1])$; $p(x) \geq 0$, $x \in [0, 1]$; $f \in C([0, 1])$; $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ le petit paramètre. En négligeant le terme $\varepsilon^2 u''$, nous arrivons à l'équation $-p(x)u_r = f(x)$. En d'autres termes, et comme montré sur la figure 14.2, nous disposons de la courbe correspondant à $y = u_r = -f(x)/p(x)$ (en noir) qui approche la solution du problème donnée par la courbe rouge.

La solution exacte se confond avec u_r sur la plus grande partie de l'intervalle $[0, 1]$, mais u et u_r sont fortement différents dans un voisinage des extrémités.

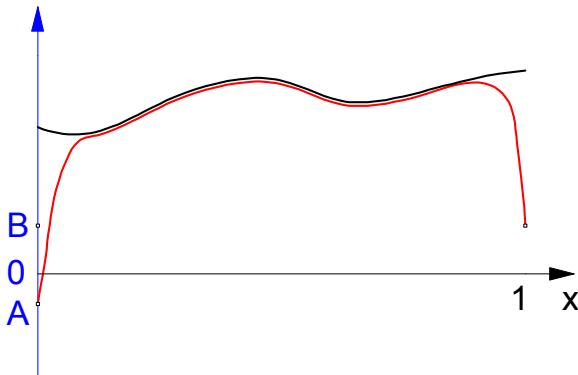


FIGURE 14.2 – Méthode de la couche limite

Cherchons une solution asymptotique sous la forme de l'ansatz :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (u_i^r(x) + u_i^0(x/\varepsilon) + u_i^1((x-1)/\varepsilon)) \quad (14.10)$$

où les $u_i^r(x)$ sont les termes réguliers, et $u_i^0(x/\varepsilon)$ et $u_i^1((x-1)/\varepsilon)$ les termes de couche limite correspondant aux extrémités $x = 0$ et $x = l$.

Pour le calcul on procède donc comme suit :

- on injecte les termes réguliers de l'ansatz dans la formulation du problème ;
- on traite les extrémités pour vérifier les conditions aux limites, ce qui donne les termes de couche limite ;
- on vérifie que la solution trouvée convient bien (i.e. que l'erreur commise est négligeable).

14.1.3 Méthode de développement asymptotique infini

À ce niveau du texte, on a dû s'apercevoir que la démarche était la même pour les deux méthodes précédentes, sauf évidemment la forme de l'ansatz.

Dans la méthode de développement asymptotique infini, on va encore procéder de la même manière, mais on cherchera une solution sous la forme d'ansatz :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, x\varepsilon) \quad (14.11)$$

où chaque $u_i(x, x/\varepsilon)$ est de la forme $u_i(x, x/\varepsilon) = N_i(x/\varepsilon)v_\varepsilon^{(i)}(x)$, $\forall i > 0$ et $u_0(x, x/\varepsilon) = v_\varepsilon(x)$, i.e. :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i N_i(x/\varepsilon)v_\varepsilon^{(i)}(x) \quad (14.12)$$

et où les $N_i(x/\varepsilon)$ sont 1-périodiques et $N_0 = 1$.

14.1.4 Cas des coefficients discontinus

Il est possible d'appliquer la même approche que lorsque les coefficients sont continus avec quelques modifications : il « suffit » d'ajouter les conditions d'interfaces présentées en début de paragraphe et rappelées ci-dessous :

$$[u] = 0 \quad \text{et} \quad [n \cdot A(x/\varepsilon) \nabla u] = 0 \quad (14.13)$$

partout où cela est nécessaire.

On retrouve les mêmes conditions d'existence de la solution que dans le cas continu et la périodicité de la solution homogénéisée reste inchangée.

14.2 Homogénéisation simplifiée pour les matériaux composites

Après ce petit tour « mathématique » des méthodes d’homogénéisation, nous proposons un petit complément très mécanique, et très « pratique ».

Pour information, la modélisation du muscle cardiaque s’inspire des techniques d’homogénéisation des matériaux composites.

14.2.1 Introduction

D’une manière générale, tous les matériaux, mêmes isotropes, sont hétérogènes en dessous d’une certaine échelle. Il peut sembler naturel d’utiliser des propriétés homogènes équivalentes correspondant à des propriétés mécaniques effectives. Toutefois, comme nous l’avons déjà vu, ces propriétés effectives ne s’obtiennent pas par une simple moyenne des propriétés des constituants, mêmes pondérées par les fractions volumiques.

Les propriétés effectives du milieu homogène équivalent cherché peuvent être obtenues en résolvant un problème aux limites sur un volume élémentaire dV , à condition que celui-ci soit suffisamment grand pour être représentatif de la microstructure du matériau hétérogène. Dans le cas où les constituants présentent une structure périodique, le volume dV peut se réduire à un volume élémentaire.

Une fois le volume élémentaire déterminé, on le soumet à des sollicitations élémentaires pour déterminer la réponse résultante. La difficulté réside en fait dans le choix des conditions aux limites à appliquer au volume élémentaire considéré pour imposer une déformation ou contrainte globale moyenne donnée.

Dans le cas linéaire, on peut prouver l’existence et l’unicité pour les différents cas de conditions aux limites existants.

Principalement pour les composites stratifiés ou sandwichs, il y a 2 niveaux d’homogénéisation :

- du niveau micromécanique au niveau mésoscopique : Les hétérogénéités de base sont les fibres et la matrice. On effectue ici une étape d’homogénéisation locale.
- du niveau mésoscopique au niveau macroscopique : Les hétérogénéités de base sont les différentes couches du stratifié. Ces couches sont considérées comme « homogènes » (étape précédente). Cette fois, il s’agit d’une homogénéisation dans l’épaisseur du stratifié.

14.2.2 Loi des mélanges, bornes de Voigt et de Reuss

On considère un composite UD de repère d’orthotropie (l, t), constitué de fibres noyées dans une matrice polymère. Soit une cellule élémentaire de fraction volumique $V = 1$ constituée de fibres et de matrice. On note V_m la fraction volumique de matrice, V_f la fraction volumique de fibre, et on a :

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (14.14)$$

À l’échelle locale, on fait les hypothèses suivantes :

- Fibres : comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients E_f et v_f ;
- Matrice : comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients E_m et v_m .

On souhaite déterminer les relations existant entre E_l , E_t , E_f , E_m , V_m et V_f . Pour cela, on fait également les hypothèses suivantes :

- On travaille en élasticité linéaire.
- La liaison fibres/matrice est parfaite.
- Localement, on a : $\sigma_f = E_f \varepsilon_f$ et $\sigma_m = E_m \varepsilon_m$.

Loi des mélanges (ou modèles à bornes ou de Reuss et de Voigt) :

- 1er essai : Il s’effectue dans la direction parallèle aux fibres (compression longitudinale)

$$E_{longitudinal} = E_l = E_f V_f + E_m V_m \quad (14.15)$$

C'est la loi des mélanges, qui est bien vérifiée dans la direction des fibres. Il s'agit de la borne supérieure de Voigt (1887).

- 2ème essai : Il s'effectue dans la direction perpendiculaire aux fibres (compression transversale)

$$\frac{1}{E_{transverse}} = \frac{1}{E_t} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (14.16)$$

C'est la loi des mélanges en souplesse. Cette relation n'est pas très bien vérifiée transversalement mais donne une indication sur la borne inférieure, dit de Reuss (1929).

- Module de cisaillement et coefficient de Poisson d'un UD par la loi des mélanges :

$$v_{lt} = v_f V_f + v_m V_m \quad \text{et} \quad \frac{1}{G_{lt}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (14.17)$$

Les modèles à bornes fournissent un encadrement du comportement mécanique du matériau composite par des comportements mécaniques limites (bornes). Ils sont obtenus par la résolution du problème de l'élasticité linéaire sous forme faible. La minimisation de l'énergie potentielle conduit à la borne supérieure de Voigt. la résolution en contrainte conduit à la borne inférieure de Reuss.

Pour gagner un peu en généralité, on peut remplacer les termes fibres et matrice par des phases, car ces modèles sont applicables à des mélanges de polymères (matériaux composés) et à des composites chargés par des particules diverses.

Les bornes correspondent aux associations série des deux phases (borne inférieure de Reuss, équivalent au modèle du module transverse équivalent de la loi des mélanges) et parallèle (borne supérieure de Voigt, équivalent au modèle du module longitudinal équivalent de la loi des mélanges).

Aucune hypothèse n'est faite sur la morphologie du matériau. Il est simplement admis que pour le modèle de Reuss, la contrainte est homogène dans les deux phases (continuité de la contrainte) et, pour le modèle de Voigt, la déformation est constante (continuité de la déformation) dans tout le composite. L'intérêt est limité dès que l'écart des caractéristiques des deux phases est important. Évidemment, d'autres modèles existent :

- Hashin et Shtrikman (1963) : resserre les bornes de Reuss et Voigt
- Takayanagi (combinaison de Reuss et Voigt)
- Halpin - Tsai : pour le renforcement par des fibres courtes alignées
- Tsai - Pagano : fibres courtes
- Halpin - Kardos : extension de la précédente

14.3 Homogénéisation des matériaux poreux

Considérons à nouveau notre problème de Poisson avec conditions de Dirichlet pour un milieu poreux. Ω est le domaine (borné) de \mathbb{R}^n qui contient Ω_ϵ l'ensemble des trous périodiques. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon \\ u = 0 & \text{sur le contour extérieur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (14.18)$$

Sur le bord des trous, on peut imposer, soit des conditions de Dirichlet :

$$u = 0 \quad (14.19)$$

soit des conditions de Neumann :

$$n \cdot A(x/\epsilon) \nabla u = 0 \quad (14.20)$$

On supposera encore que les coefficients sont 1-périodiques. Cherchons des solutions dans le cas où l'on a des conditions de Neumann sur le bords des trous.

La forme choisie pour l'ansatz est le développement au second ordre suivant :

$$u^{(2)} = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, x/\varepsilon) \quad (14.21)$$

où les $u_i(x, x/\varepsilon)$ sont 1-périodiques en x/ε qui sera noté ξ .

On obtient un système du type :

$$\begin{cases} L_{\xi\xi} u_0 &= 0 \\ L_{\xi\xi} u_1 + L_{\xi x} u_0 + L_{x\xi} u_0 &= 0 \\ L_{\xi\xi} u_2 + L_{\xi x} u_1 + L_{x\xi} u_1 + L_{xx} u_0 &= f(x) \end{cases} \quad (14.22)$$

et les conditions de Neumann :

$$n \cdot A(\xi) [\varepsilon^{-1} \nabla_\xi u_0 + \varepsilon^0 (\nabla_\xi u_1 + \nabla_x u_0) + \varepsilon (\nabla_\xi u_2 + \nabla_x u_1) + \varepsilon^2 \nabla_x u_2] = 0 \quad (14.23)$$

d'où :

$$\begin{cases} n \cdot A(\xi) \nabla_\xi u_0 &= 0 \\ n \cdot A(\xi) (\nabla_\xi u_1 + \nabla_x u_0) &= 0 \\ n \cdot A(\xi) (\nabla_\xi u_2 + \nabla_x u_1) &= 0 \end{cases} \quad (14.24)$$

On peut prouver que si v_0 est solution du problème, alors $v_0 + cte$ aussi. Des conditions d'existence de la solution il vient, tous calculs faits, la matrice des coefficients homogénéisés \hat{A} :

$$\hat{A} = [\hat{a}_{i,j}] \quad \text{avec} \quad \hat{a}_{i,j} = \int_{Q \setminus G_0} \sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_k} + a_{ij} \right) d\xi \quad (14.25)$$

où G_0 est un trou de la cellule élémentaire Q . Le même type de calcul pourrait être mené avec les conditions de Dirichlet sur le bord des trous. Cette homogénéisation des milieux poreux est valable pour l'acoustique comme pour la mécanique.

14.4 Homogénéisation des problèmes non stationnaires

Nous n'avons pas encore abordé de manière pratique les problèmes non stationnaires dans ce document, puisqu'ils se trouvent au chapitre 15.

Il est tout à fait possible d'utiliser les méthodes présentées dans ce chapitre aux problèmes dépendant du temps.

Il n'y a pas vraiment de précautions supplémentaires à prendre, mais il faut adapter la forme de l'ansatz. Par exemple, l'ansatz du paragraphe précédent, pour le même type de problème non stationnaire serait :

$$u^{(2)} = u_0(x, \xi, t) + \varepsilon u_1(x, \xi, t) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi, t) \quad (14.26)$$

avec $u_i(x, \xi, t)$ 1-périodique en ξ .

14.5 Changement de dimension, raccord de maillage

Les méthodes d'homogénéisation peuvent également être utilisées pour « changer (réduire) » la dimension d'un problème.

Considérons un problème qui se pose dans un domaine plan de longueur 1 et de largeur $\pm\varepsilon/2$. Alors, on peut considérer le comportement asymptotique de la solution lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Une fois cette solution asymptotique trouvée, le problème initial posé sur le pavé $[0, 1] \times [-\varepsilon/2, +\varepsilon/2]$ est remplacé par le problème homogénéisé posé sur le segment $[0, 1]$.

On a donc bien réduit la dimension du problème.

Ce genre de chose correspond typiquement à un modèle plaque ou coque (2D) utilisé à la place d'un modèle tridimensionnel (3D), ou encore mieux à un modèle barre ou poutre (1D).

Cela permet également de développer des éléments finis permettant de raccorder des maillages 3D à des maillages 2D ou à des maillages 1D, afin d'alléger les modèles numériques là où ils peuvent l'être.

En mécanique, de nombreuses théories de plaques ou poutres existent (voir la paragraphe 11.2). Elles sont généralement présentées de manières « physique », mais ne sont rien d'autre que des méthodes d'homogénéisation.

Libre à chacun de préférer une présentation plutôt mécanicienne ou plutôt mathématicienne, le résultat est finalement le même. Mais il nous semble, et c'est la motivation même à l'origine de ce document, que le fait de connaître les deux aide à mieux cerner à la fois les hypothèses sur lesquelles ces développements sont faits (et que l'on oublie parfois, ayant pour conséquence des résultats que l'on peut qualifier de surprenants) ainsi que les potentialités qui s'offrent à nous.

Chapitre 15

Problèmes non stationnaires

Résumé — Dans ce chapitre, nous nous intéresserons (brièvement) au cas non stationnaire. Toutefois, nous n'aborderons pas les EF espace-temps, car il s'agit d'une formulation gourmande en ressources, d'où sa très faible utilisation (bien que la méthode soit en elle-même intéressante).

Dans ce chapitre, nous aurons besoin de « dériver numériquement », i.e. de construire des schémas numériques approchant des dérivées. Le chapitre ?? en annexe permettra à certains de se rafraîchir la mémoire en regardant comment on résoud les ED et EDP directement... puis numériquement. Nous utiliserons en effet la méthode de Newmark décrite au paragraphe ??.

15.1 Équation non stationnaire de la dynamique

Considérons l'équation de la dynamique, sous forme non stationnaire (i.e. dépendant du temps) :

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (15.1)$$

qui sous forme discrétisée par éléments finis sera réécrite :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (15.2)$$

avec les conditions initiales $\mathbf{q}(t = 0) = \mathbf{q}_0$ et $\dot{\mathbf{q}}(t = 0) = \dot{\mathbf{q}}_0$.

On cherche à obtenir la discrétisation \mathbf{q} du champ u et ses dérivées temporelles $\dot{\mathbf{q}}$ et $\ddot{\mathbf{q}}$ à différents instants t et vérifiant l'équation de la dynamique.

Pour résoudre un tel problème, on se propose de réaliser une discrétisation temporelle qui pourra être explicite ou implicite.

Le schéma généralement utilisé pour la discrétisation temporelle est celui de Newmark, (qui est présent dans le cas de la résolution des ED au paragraphe ??, ce complément nous ayant été demandé). Le schéma le plus général est, Δ_t représentant le pas de temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{t+\Delta_t} &= \mathbf{q}_t + \Delta_t \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\Delta_t^2}{2} ((1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_t + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta_t}) \\ \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta_t} &= \dot{\mathbf{q}}_t + \Delta_t ((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_t + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta_t}) \end{aligned} \quad (15.3)$$

que nous avons écrit sous la forme discrétisée, mais qui serait valable pour l'approximation continue (comme présenté au chapitre au paragraphe ??).

Les différents schémas de Newmark correspondent à des valeurs particulières de β et γ .

15.2 Schéma explicite : différences finies centrées

Dans le cas $\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$, on retombe sur le schéma des différences finies centrées.

Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_t &= \frac{1}{\Delta_t^2} (\mathbf{q}_{t+\Delta_t} - 2\mathbf{q}_t + \mathbf{q}_{t-\Delta_t}) \\ \dot{\mathbf{q}}_t &= \frac{1}{2\Delta_t} (\mathbf{q}_{t+\Delta_t} - \mathbf{q}_{t-\Delta_t})\end{aligned}\quad (15.4)$$

et l'équation de la dynamique discrétisée s'écrit sous la forme d'une équation modifiée :

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{t+\Delta_t} = \mathbf{R} \quad (15.5)$$

avec :

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{\Delta_t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta_t} \mathbf{C} \quad (15.6)$$

et :

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_t - \mathbf{K}\mathbf{q}_t + \frac{1}{\Delta_t^2} \mathbf{M} (2\mathbf{q}_t - \mathbf{q}_{t-\Delta_t}) + \frac{1}{2\Delta_t} \mathbf{C} \mathbf{q}_{t-\Delta_t} \quad (15.7)$$

qui ne dépendent bien que de données disponibles. Le calcul se déroule donc comme suit :

- Solution initiale à $t = 0$:
- connaissant \mathbf{q}_0 et $\dot{\mathbf{q}}_0$, on calcule $\ddot{\mathbf{q}}_0$ en résolvant l'équation « classique » de la dynamique ;
- on calcule ensuite $\mathbf{q}_{-\Delta_t} = \mathbf{q}_0 - \Delta_t \dot{\mathbf{q}}_0 + \frac{\Delta_t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_0$.
- On dispose alors de tous les éléments pour, à chaque pas de temps $t + \Delta_t$:
- résoudre l'équation modifiée, qui nous fournit $\mathbf{q}_{t+\Delta_t}$;
- puis obtenir $\dot{\mathbf{q}}_t$ et $\ddot{\mathbf{q}}_t$ par le schéma de Newmark adopté, ici celui des différences finies centrées.

On peut faire les remarques suivantes sur ce type de calcul :

- Pour un pas de temps donné, \mathbf{q}_t ne dépend que des données du temps passé, on a donc une résolution vectorielle rapide.
- Si les matrices \mathbf{M} et \mathbf{C} sont diagonales, alors cette méthode est très efficace même pour les problèmes de grande taille.
- Ce schéma est inconditionnellement stable si $\Delta_t \leq T_{\min}/\pi$, avec T_{\min} la plus petite période du système correspondant à l'équation de la dynamique (classique).
- la précision est de l'ordre de Δ_t^2 .
- L'amortissement numérique est nul.
- Il est possible d'introduire un amortissement numérique pour contrôler les hautes fréquences. Dans ce cas, il faut considérer le schéma avec $\beta = 0$ et $\gamma > 1/2$. Il n'y a pas automatiquement stabilité du schéma, celle-ci est à calculer pour chaque schéma.

15.3 Schéma implicite : schéma de Newmark classique

Dans le cas $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$, on obtient le schéma implicite de Newmark, qui est celui qui est utilisé généralement pour l'analyse dynamique des structures.

Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta_t} &= \frac{4}{\Delta_t^2} (\mathbf{q}_{t+\Delta_t} - \mathbf{q}_t) - \frac{4}{\Delta_t} (\dot{\mathbf{q}}_t - \ddot{\mathbf{q}}_t) \\ \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta_t} &= \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\Delta_t}{2} (\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta_t} + \ddot{\mathbf{q}}_t)\end{aligned}\quad (15.8)$$

et l'équation de la dynamique discrétisée s'écrit encore sous la forme d'une équation modifiée :

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{t+\Delta_t} = \mathbf{R} \quad (15.9)$$

mais cette fois avec :

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta_t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta_t} \mathbf{C} \quad (15.10)$$

et :

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{t+\Delta_t} + \mathbf{M} \left(\frac{4}{\Delta_t^2} \mathbf{q}_t + \frac{4}{\Delta_t} \dot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_t \right) + \mathbf{C} \left(\frac{2}{\Delta_t} \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t \right) \quad (15.11)$$

qui dépendent également des données au même pas de temps. Le calcul se déroule donc comme suit :

- Solution initiale à $t = 0$:
- connaissant \mathbf{q}_0 et $\dot{\mathbf{q}}_0$, on calcule $\ddot{\mathbf{q}}_0$ en résolvant l'équation « classique » de la dynamique ;
- on construit $\bar{\mathbf{K}}$ et, si \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} et Δ_t sont constants (ce qui est généralement le cas), la triangulariser.
- À chaque pas de temps $t + \Delta_t$:
 - calculer \mathbf{R} (que l'on appelle le résidu, d'où le choix de la notation) ;
 - calculer $\bar{\mathbf{K}}$ et triangulariser si nécessaire ;
 - résoudre l'équation modifiée, qui nous fournit $\mathbf{q}_{t+\Delta_t}$;
 - puis obtenir $\dot{\mathbf{q}}_t$ et $\ddot{\mathbf{q}}_t$ par le schéma de Newmark adopté, ici celui de Newmark implicite.

On peut faire les remarques suivantes sur ce type de calcul :

- Pour un pas de temps donné, \mathbf{q}_t dépend également des données du même pas de temps, on a donc une résolution matricielle coûteuse.
- Ce schéma est inconditionnellement stable, et donc comme on peut utiliser de plus grands pas de temps, on réduit le coût mentionné à la ligne précédente.
- la précision est de l'ordre de Δ_t^2 , et donc comme on ne peut pas utiliser de trop grands pas de temps sans réduire la précision...
- L'amortissement numérique est nul.
- Il est possible d'introduire un amortissement numérique pour contrôler les hautes fréquences. Dans ce cas, il faut considérer le schéma avec $\gamma > 1/2$ et $\beta = (\gamma + \frac{1}{2})^2$. On obtient encore un schéma stable.

15.4 Comparaison des méthodes explicite et implicite

Concernant la méthode implicite, on retiendra d'abord que cette méthode nécessite moins de mémoire, est donc plus rapide et mieux adaptée aux problèmes de grandes tailles. Comme cette méthode nécessite moins de mémoire et des petits pas de temps (pour la stabilité), elle est bien adaptée au cas des chocs. Comme elle n'est que conditionnellement stable, elle est plutôt adaptée à la résolution élément par élément, donc au traitement local. Enfin, cette méthode est très robuste numériquement et permet de traiter le cas de non linéarités couplées.

Concernant la méthode implicite, on retiendra que puisque cette méthode est inconditionnellement stable, elle est bien adaptée à la résolution de problèmes globaux (qui nécessitent qu'il y ait convergence). De plus, cette méthode est bien moins robuste numériquement que la précédente (pivots nuls, divergence)... Enfin et surtout, on se souviendra que c'est une méthode coûteuse en mémoire et en temps...

La figure 15.1 donne, de manière imagée, les domaines d'utilisation des méthodes implicite et explicite.

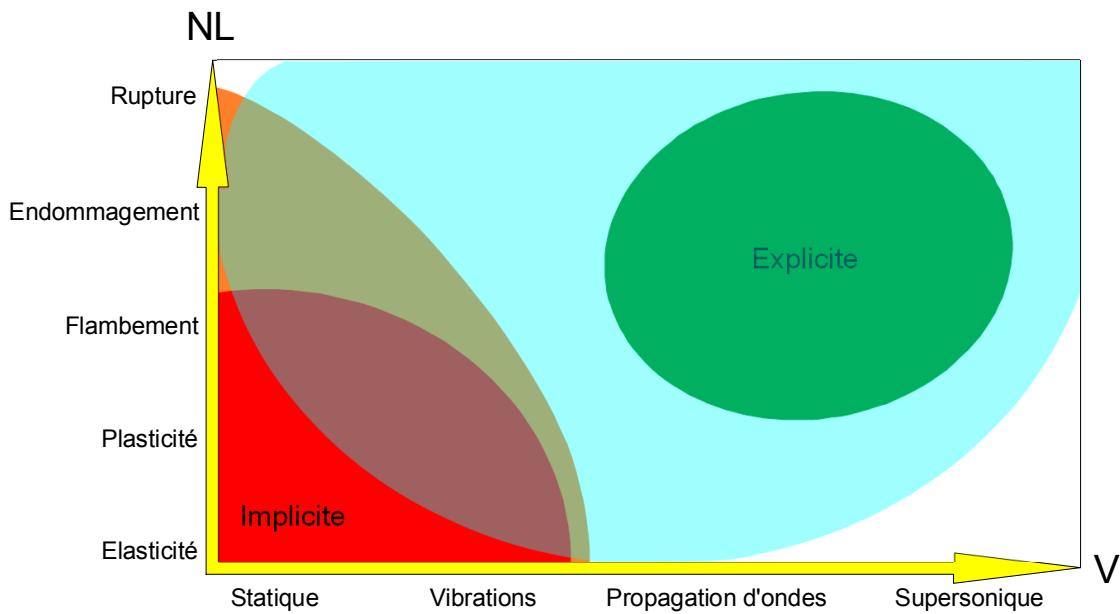


FIGURE 15.1 – Domaines d'utilisation des méthodes implicite et explicite

15.5 Exemple : un calcul de propagation avec FREEFEM++

Quelque soit le logiciel utilisé¹, il y a toujours un gros pavé d'exemple fourni avec, sans compter le nombre d'ouvrages disponibles.

Nous avons souhaité néanmoins présenter un listing (qui sera discuté oralement) correspondant à un calcul réalisé sous FREEFEM++.

Ce logiciel gratuit vous permettra de faire vos calculs EF... mais c'est également un outil pédagogique sans équivalent : sa manipulation se fait en des termes proches de la formulation mathématique, et en cela, il est une passerelle parfaite entre la théorie et la pratique de codes plus « industriels ».

Le fait de pouvoir discréteriser à loisir une formulation variationnelle que l'on rentre soi-même est également un argument qui nous semble un vrai plus, même si cela commence à exister dans des codes commerciaux (mais reste confidentiel).

Voici donc un petit listing sur lequel nous pourrons revenir de vive voix.

Commençons donc, comme il se doit, par définir la géométrie du problème, paramétrée par a et b , que nous maillons :

```

1 real mu=1. ;
2 real rog=0. , ro=1. ;
3 // taille du maillage
4 int ncuts = 20;
5
6 // construction du domaine
7 real a=pi*0.8, b=1.2*pi ;
8
9 border gam1(t=0.,a){x=t;y=0; label =1;};
10 border gam2(t=0.,b){x=a;y=t; label =2;};
11 border gam3(t=a,0.){x=t;y=b; label =3;};
12 border gam4(t=b,0.){x=0.;y=t; label =4;};
13
14 //Maillage
15 mesh Th=buildmesh(gam1(ncuts)+gam2(ncuts)+gam3(ncuts)+gam4(ncuts));

```

1. Lorsque l'on parle de codes EF, on cite les grands noms du domaine... et ils correspondent à des codes extraordinairement puissants, mais souvent chers.

Or un certain nombre de codes EF professionnels sont disponibles gratuitement (au téléchargement et à l'utilisation). Les deux plus connus sont CAST3M (anciennement castem) et CODE ASTER développés et maintenus par le CEA et par EDF respectivement.

```

16 //plot(Th, ps="mesh.eps") ;
17 //plot(Th, wait=1) ;

```

Nous définissons quelques valeurs afin de pouvoir définir le chargement (dont l'un des chargement, défini par la fonction w_1 ne sera pas utilisée dans la suite). Notons comme il est aisément de définir des fonctions :

```

18 // conditions aux limites essentielles
19 real r0=a/10., r, xc=a/3., yc=3.*b/4. ;
20
21 // chargement initial sinusoïdal
22 func real pertb(real r)
23     { if(r<r0) {return (1.+cos(pi*r/r0));}
24     else return 0.; }
25
26 //func real w1( real x, real y)
27 func real w11( real x, real y)
28 {
29     return pertb(sqrt((x-xc)^2+(y-yc)^2));
30 }
31
32 // chargement constant sur un carre
33 // pas utilise sur cet exemple
34 func real w1( real c, real d)
35 {
36     if(c>(0.8*xc))
37         {if (c<(1.2*xc))
38             {if (d>(0.8*yc))
39                 {if (d<(1.2*yc)) {return 0.8;}
40                 else return 0.;}
41             else return 0.;}
42         else return 0.;}
43     else return 0.;
44 }
45
46 func real w0( real x, real y)
47 {
48     return 0.*sin(x)*sin(y) ;
49 }

```

Ensuite, nous définissons l'espace des EF utilisés, et les variables appartenant à ces espaces. L'analogie avec la « formulation mathématique » saute au yeux... et c'est pourquoi cet outil nous semble particulièrement intéressant sur le plan pédagogique.

```

50 // Espaces éléments finis
51 fespace Vh(Th,P2);
52 fespace Wh(Th,P1dc);
53
54 Vh w, wa, wd, wda, wdd, wdda, fi ;
55 Wh sxz, syz ;

```

Il s'agit d'un exemple non stationnaire, nous allons donc faire une boucle sur le temps. Dans FREEFEM++, nous entrons directement la formulation variationnelle du problème sous forme « mathématique »... le lien entre pratique des EF et théorie est beaucoup plus clair. La boucle de temps est basée sur un schéma de Newmark implicite. Le temps « courant » est le temps $t + \Delta_t$ et le temps précédent est le temps t pour rester cohérent avec les notations du chapitre 15.

Il s'agit d'un problème de déplacement hors plan, dont le champ inconnu est traditionnellement noté w . Ainsi, dans le listing, w représente $q_{t+\Delta_t}$, $wa \equiv q_t$, $wd \equiv \dot{q}_{t+\Delta_t}$, $wda \equiv \ddot{q}_t$, $wdd \equiv \dddot{q}_{t+\Delta_t}$ et $wdda \equiv \ddot{\dot{q}}_t$. $fi \equiv \varphi$ est la fonction test. La formulation variationnelle, en n'indiquant pas le temps actuel et en utilisant l'indice a pour le pas de temps précédent (a comme avant), est :

$$\begin{aligned}
\text{antiplane}(\dot{w}, \varphi) = & \int_{Th} \rho \dot{w} \varphi + \frac{\Delta_t^2}{4} \int_{Th} \mu \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
& - \frac{\Delta_t}{2} \int_{Th} \rho_g \varphi - \int_{Th} \rho \left(\dot{w}_a + \frac{\Delta_t}{2} \ddot{w}_a \right) \varphi \\
& + \frac{\Delta_t}{2} \int_{Th} \mu \left(\frac{\partial w_a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w_a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
& + \frac{\Delta_t^2}{4} \int_{Th} \mu \left(\frac{\partial \dot{w}_a}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
& + \text{Condition}(\dot{w} = 0 \text{ sur les lignes } 1, 2, 3, 4)
\end{aligned} \tag{15.12}$$

```

56 int n, k, Ntemps=100;
57 real T=2.*pi/sqrt(2.), pastemps=T/Ntemps
58 real dpt=0.5*pastemps;
59
60 problem antiplane(wd,fi, init=1)=int2d(Th)(ro*wd*fi)+  

61           int2d(Th)(dpt^2*mu*(dx(wd)*dx(fi)+dy(wd)*dy(fi))) +  

62           int2d(Th)(-dpt*rog*fi)+  

63           int2d(Th)(ro*(-wda-dpt*wdda)*fi)+  

64           int2d(Th)(dpt*mu*(dx(wa)*dx(fi)+dpt*dx(wda)*dx(fi)+  

65           dy(wa)*dy(fi)+dpt*dy(wda)*dy(fi)))+
66           on(1,2,3,4,wd=0.);
67
68 // formulation du probleme en temps
69 // conditions initiales en temps
70 w=w0(x,y);
71 wd=w11(x,y);
72 wdd=0.;
73
74 real errorw, errorwd, temps, enerC, enerP, enerT;
75 real[int] visoS(20);
76 int ivi;
77 for (ivi=0;ivi<10;ivi++){
78     visoS[ivi]=-1+0.1*ivi;
79     visoS[ivi+10]=(ivi+1)*0.1;
80 }

```

Enfin, pour tester la qualité des résultats, il nous faut quelques indicateurs... Sans entrer dans le détail, des noms comme E_c , E_p et E_T doivent vous mettre sur la piste.

```

81 real[int] Ec(Ntemps), Ep(Ntemps), Et(Ntemps), tt(Ntemps);
82
83 for (n=0;n<Ntemps;n++){
84     wa=w; wda=wd; wdda=wdd;
85     temps=n*pastemps;
86
87     enerC=0.5*int2d(Th)(ro*wd^2);
88     enerP=0.5*int2d(Th)(mu*(dx(w)*dx(w)+ dy(w)*dy(w)));
89     enerT=enerC+enerP;
90     Ec(n)=enerC; Ep(n)=enerP; Et(n)=enerT; tt(n)=temps;
91
92     cout << " iteration n= " << n << " enerP= " << enerP <<
93     "enerC= " << enerC << " enerTotale= " << enerT
94     << endl;
95
96     temps=(n+1.)*pastemps;
97
98 // resolution du probleme
99     antiplane;
100
101    w=wa+dpt*(wda+wd);
102    wdd=(wd-wda)/dpt-wdda;
103
104    sxz=mu*dx(w);
105    syz=mu*dy(w);
106    plot(Th,wd,fill=true, value=1, viso=visoS, nbiso=visoS.n,
107      ps=n, wait=0);
108 }
109
110 // Energie
111 //plot([tt,Ec], [tt,Ep],[tt,Et], ps="energie.eps");

```

À la figure 15.2 se trouve une illustration de ce que nous venons de calculer.

15.6 Décomposition modale

Pour le public visé, le lecteur devrait, à ce moment du document, se demander pourquoi il n'a pas encore été question de projection sur les modes propres.

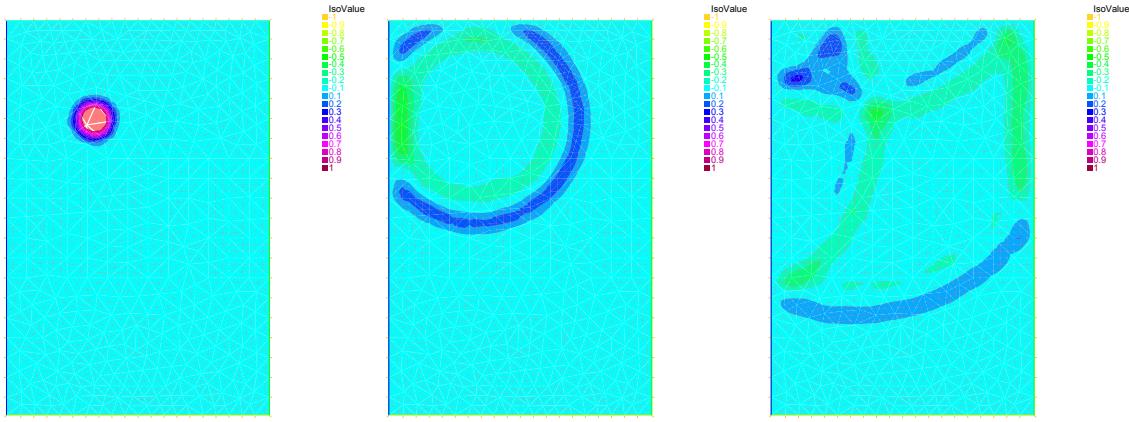


FIGURE 15.2 – Propagation : pas de temps 0, 20 et 40

On peut montrer que les modes de vibration de la structure forment une base. Il peut paraître intéressant de chercher la solution en temps du problème sous forme d'une approximation par projection sur la base des quelques N premiers modes propres, i.e. de rechercher N fonctions scalaires du temps.

Lorsque l'on dispose déjà des N premiers modes et lorsque le nombre n de ddl est important, cette approche peut s'avérer particulièrement efficace. Par ailleurs, lorsque les modes sont associés à des mouvements simples de la structure, il peut être facile pour un ingénieur un peu expérimenté d'imaginer le nombre de modes à utiliser pour représenter le phénomène.

La méthode de la décomposition modale sera exposée au paragraphe ??, lorsque nous aurons fait quelques rappels sur les modes propres.