

Vincent Manet

Méthode des éléments finis

*Vulgarisation des aspects mathématiques
et illustration de la méthode*

Vincent Manet — 2013 (Ceci est la version « livre » de ce document)

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France :

- paternité ;
- pas d'utilisation commerciale ;
- partage des conditions initiales à l'identique ;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



Introduction

Dans ce (de moins en moins court) document, plutôt à destination d'ingénieurs mécaniciens connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons essayer de faire une présentation un peu plus théorique que ce qui leur est généralement proposé (et qui est quand même souvent de type « preuve par les mains », ce qui occulte trop de points).

Nous ne ferons appel qu'à des notions mathématiques de bases généralement déjà vues pour la plupart en taupe (ou en tout début de cycle d'ingé)... bien que des compléments que l'on peut qualifier d'élémentaires nous aient été demandés et aient été inclus.

Nous espérons, grâce à cette présentation théorique montrer toute la souplesse et la puissance de la méthode, afin de permettre au lecteur d'envisager d'autres simulations que celles qu'il a pu déjà réaliser par le passé.

But du document

Le but initial était de *présenter brièvement la théorie mathématique* derrière les éléments finis afin que les ingénieurs utilisant cette méthode puisse en envisager toutes les applications, ainsi que de *couvrir les aspects qui, selon nous, devraient être connus de tout ingénieur mécanicien impliqué ou intéressé par le calcul numérique.*

Toutefois, il s'envisage comme support de référence à plusieurs cours, cours qui ne portent pas sur tous les aspects traités dans ce document, et pendant lesquels les aspects pratiques sont plus développés (avec mise en situation sur machine).

Même si nous avons voulu rester le plus succinct possible, l'introduction de notions de proche en proche a conduit à un document fait aujourd'hui une certaine taille (par exemple, nous avons besoins des espaces de Sobolev, mais comment les introduire sans parler des espaces de Lebesgue, mais comment les introduire sans parler...).

Aussi le document a-t-il finalement été découpé en plusieurs parties : un survol des notions mathématiques, puis le traitement du problème continu constituent l'ossature théorique nécessaire à asseoir la MEF sur un socle solide. La discrétisation par éléments finis à proprement parler n'est abordé qu'ensuite, et d'ailleurs un seul chapitre suffirait à en faire le tour... sauf à entrer plus dans le détail concernant « ce qui fâche » : homogénéisation, non linéarité, dynamique, ce qui est fait dans des chapitres séparés.

Enfin, d'autres méthodes sont abordées car également très employées aujourd'hui. Aussi est-il indispensable selon nous d'en avoir entendu parlé et d'en connaître les principales notions (BEM, FEEC...).

En annexes, se trouve un petit fourre-tout comprenant des choses censées être maîtrisées depuis la taupe (mais qui parfois nous sont demandées) et les compléments qui alourdiraient encore les propos précédents.

Certaines notions (essentiellement de topologie) ne sont pas présentées dans ce document. Il nous a semblé que le lecteur devait avoir quelques souvenirs de ce qu'est un ouvert, un fermé, l'adhérence, la densité... Par ailleurs, leur nom peut être suffisamment évocateur pour se passer d'une définition formelle dans le contexte de ce document.

Attention, ce document n'est pas un document de mathématiques, il ne contient d'ailleurs aucune preuve. C'est, dans ces deux premières parties, un document de vulgarisation de notions mathématiques nécessaires à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Nous avons voulu réaliser un survol des notions importantes, mais malgré tout, afin de ne pas être parfois trop laconique, nous avons un peu débordé.

En fin de document, un petit index des noms propres permettra au lecteur de replacer les divers développements mentionnés dans l'histoire... Il se peut qu'il subsistent quelques erreurs, notamment au niveau des nationalités mentionnées, car il n'est pas toujours aisé de déterminer rapidement cette information (et nous ne connaissons pas toutes les biographies des personnes citées).

Ce document a été réalisé très rapidement, et de manière extrêmement hachée. Il comporte forcément encore beaucoup de fautes : merci de m'en faire part.

Démarche de l'ingénieur numéricien

En préambule à ce document, nous tenions à synthétiser la démarche complète de l'ingénieur numéricien :

- Modélisation / mise en équations – Construction du problème continu (système d'EDP).
- Analyse mathématique du problème posé – Existence, unicité, propriétés des solutions.
- Conception d'une méthode numérique – Construction d'un problème discrétisé.
- Analyse numérique – Questions de stabilité, convergence, précision.
- Algorithmique – Choix de méthodes de résolution en dimension finie.
- Mise en œuvre sur ordinateur – Programmation.
- Pre et Post Traitement (maillages / visualisation) – Interpolation, extrapolation, outils de la CAO.

Tous ces points ne seront évidemment pas abordés dans ce document !

Remerciements :

Nous n'avions pas prévu de réaliser une deuxième version aussi rapidement. Celle-ci existe suite aux sollicitations de Mathias Legrand. C'est lui qui a développé les macros nécessaires à l'amélioration très très nette de la qualité typographique (environnements pour les notes historiques, les théorèmes, lemmes...).

C'est également pourquoi coexistent aujourd'hui deux versions (mais issues du même code source) : l'une que nous appelons « version cours » (plus en accord avec ce que nous proposons en cours), et l'autre « version livre », plus proche d'un ouvrage.

Table des matières

Introduction	3
But du document	3
Démarche de l'ingénieur numérique	4
Table des matières	5
1 Les non linéarités	7
1.1 Tenseurs, décomposition des tenseurs	7
1.1.1 Tenseur des contraintes	8
1.1.2 Tenseur des déformations	11
1.2 Non linéarité géométrique	12
1.3 Non linéarité matérielle	13
1.3.1 Modèles rhéologiques	13
1.3.2 Visoélasticité	15
1.3.3 Visoplasticité	15
1.3.4 Plasticité	16
1.3.5 Les élastomères	19
1.3.6 Les composites, l'anisotropie	21
1.4 Le contact	23
1.4.1 Lois de contact et de frottement	24
1.4.2 Algorithme local	25
1.4.3 Algorithme global	26
1.5 Exemple : une toute première approche du contact avec CAST3M	26
1.5.1 Contact sur une surface infiniment rigide	27
1.5.2 Contact entre deux solides	28
1.5.3 Résolution pas à pas	29

Chapitre 1

Les non linéarités

Résumé — Jusqu'à présent, nous avons évité, autant que faire se peut, d'aborder les problèmes de non linéarité...

Beaucoup de cas de non-linéarité s'imposent par la nature du problème à traiter : grands déplacements, loi de comportement choisie, contact... Ils sont donc facilement identifiables, et face à des tels cas, l'utilisateur sera par conséquent précautionneux et ne se laissera donc pas surprendre.

Toutefois, dans le cas de la dynamique, la non-linéarité existe de manière implicite, même si tout le reste est « linéaire » par ailleurs. Cela peut constituer un écueil si l'on n'en est pas conscient.

Plusieurs types de non-linéarités peuvent être considérées. En mécanique des structures, on distinguera :

- les non-linéarités géométriques qui se manifestent dans les problèmes des grands déplacements, des grandes rotations et/ou de grandes déformations. La notion de « grands » déplacements signifie tout simplement que l'hypothèse des petites perturbations n'est plus vérifiable. Or celle-ci stipule que géométrie déformée et initiale doivent rester relativement proches. La notion de grandes déformations, déjà mentionnée dans ce document, fait que la linéarité des relations entre déplacements et déformations n'est plus conservée.
- les non-linéarités matérielles dues à la loi de comportement du solide (ou plus généralement à la loi de comportement dans le milieu Ω). Le plus souvent, cette loi peut s'exprimer sous la forme d'ED non-linéaires du premier ordre.
Nous avons déjà évoqué ce phénomène à plusieurs endroits dans ce document, et le chapitre précédent sur l'homogénéisation est une illustration du cas où l'on peut substituer un milieu homogénéisé simple à un milieu compliqué. Toutefois, nous irons un peu plus loin dans ce chapitre et présenterons les principales lois de comportement rencontrées en mécanique.
- les non-linéarités liées à l'évolution des conditions aux limites. Ce type de non-linéarité apparaît en particulier dans les problèmes de contact et de frottement entre solides. Ces phénomènes sont décrits par des inéquations et des opérations de projection.
- les non-linéarités liées aux instabilités du comportement qui se présentent dans l'analyse des problèmes dynamiques.

1.1 Tenseurs, décomposition des tenseurs

Le déviateur est un opérateur matriciel utilisé en mécanique des milieux continus, plus précisément en plasticité.

Soit \mathcal{M} une matrice (ou tenseur d'ordre 2) de dimension n . Le déviateur de \mathcal{M} , noté $\text{dev } \mathcal{M}$, vaut :

$$\text{dev } \mathcal{M} = \mathcal{M} - \frac{\text{tr}(\mathcal{M})}{n} I_n \quad (1.1)$$

où $\text{tr}(\mathcal{M})$ est la trace de la matrice, i.e. la somme de ses termes diagonaux.

Le déviateur est un tenseur de trace nulle.

1.1.1 Tenseur des contraintes

Histoire

Le tenseur des contraintes, ou tenseur de Cauchy, n'est pas forcément introduit par la loi de Hooke généralisée qui le lie au tenseur des déformations ($\sigma = H\varepsilon$).

D'ailleurs, lorsque Cauchy l'introduit vers 1822, il le fait pour représenter les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées du milieu, via l'équilibre des efforts pour toute coupure dans un matériau (i.e. définition sous forme de forces surfaciques).

En tout point M il existe une infinité de facettes d'orientation différentes. Le théorème de Cauchy permet de définir l'état de contrainte sur une facette d'orientation quelconque à partir de la connaissance de l'état de contrainte selon trois directions différentes. L'énoncé de ce théorème est le suivant :

Théorème 1 — Théorème de Cauchy. [un des nombreux -] : Les composantes du vecteur contrainte en un point M sur une facette de normale \mathbf{n} dépendent linéairement des composantes de cette normale. Les coefficients linéaires sont les composantes du tenseur des contraintes.

Ce théorème conduit à formuler la contrainte s'exerçant sur une facette d'orientation quelconque comme :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{T}(M, \mathbf{e}_j) \quad (1.2)$$

et, comme dans ce repère orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ chacune des trois contraintes de base a trois composantes, on a :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \quad (1.3)$$

soit au final :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i \quad (1.4)$$

Les coefficients linéaires σ_{ij} apparaissent donc comme les éléments d'un tenseur de rang 2 : il s'agit du tenseur des contraintes de Cauchy.

De manière encore plus explicite, on écrit :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \sigma \mathbf{n} \quad (1.5)$$

D'un point de vue pratique, chacun des éléments σ_{ij} du tenseur des contraintes de Cauchy rend compte d'une contribution clairement identifiable : le premier indice i est l'indice de projection (direction selon laquelle s'exerce la contribution) ; le second indice j repère l'orientation de la surface sur laquelle s'exerce la contribution. Par exemple σ_{12} correspond à la composante suivant \mathbf{e}_1 de la contrainte qui s'exerce sur la facette de normale \mathbf{e}_2 .

En exploitant la condition d'équilibre appliquée au moment résultant, il est possible de démontrer que, en statique, le tenseur des contraintes est nécessairement symétrique. D'ailleurs, en se servant de cette symétrie, on introduit la notation de Voigt ou notation de l'ingénieur. On pose $\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}$, puis $\sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}$, et l'on peut présenter le tenseur des contraintes sous forme de vecteur : $\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \rangle$. Cela facilite l'écriture de la loi

de Hooke généralisée et montre en même temps que l'espace des contraintes est un espace vectoriel à six dimensions.

Il existe (au moins) une base orthonormée dans laquelle le tenseur des contraintes est diagonal. Pour trouver ce repère, il faut résoudre le problème aux valeurs propres $\det(\sigma - \lambda I) = 0$. Les trois racines de ce polynôme de degré 3 sont les valeurs propres encore appelées contraintes principales σ_I , σ_{II} et σ_{III} . Les vecteurs propres associés sont les directions principales qui forment le repère principal. Dans la mesure où le tenseur des contraintes est symétrique, il existe bien trois valeurs propres réelles, et les vecteurs propres associés sont orthogonaux.

Par convention, on ordonnera toujours les contraintes principales de sorte que $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Ces contraintes principales permettent de définir les invariants du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{tr}(\sigma) \quad (1.6)$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \quad (1.7)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \det(\sigma) \quad (1.8)$$

Comme pour les déformations, il est souvent utile (bien que la signification physique nous en échappe encore) de décomposer le tenseur des contraintes en partie sphérique et déviateur :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_I \delta_{ij} + s_{ij} \quad (1.9)$$

ou encore :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

où $p = \frac{1}{3} \sigma_I \delta_{ij}$ est la partie sphérique (et $\sigma_I = \sigma_{kk}$) et s_{ij} la partie déviatorique. La partie sphérique correspond à une pression isostatique, i.e. un vecteur contrainte normal à la facette pour toute direction (généralisation de la notion de pression hydrostatique dans les liquides). Physiquement, le déviateur du tenseur des contraintes correspond donc aux contributions des contraintes autres que surfaciques (cas $n = 3$) ou linéiques (cas $n = 2$). Le déviateur est un tenseur de trace nulle, i.e. $s_{ii} = 0$. Le déviateur a les mêmes directions principales que le tenseur des contraintes, on a alors dans le repère principal :

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

On peut définir les invariants du déviateur des contraintes de Cauchy :

$$\begin{cases} J_1 = s_1 + s_2 + s_3 = \text{tr}(s_{ij}) = 0 \\ J_2 = -s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_1 s_3 \\ J_3 = s_1 s_2 s_3 = \det(s_{ij}) \end{cases} \quad (1.12)$$

Ces invariants sont utiles pour définir la contrainte de comparaison, ou contrainte effective $\sigma_e = f(\sigma_{ij})$: cette valeur est ensuite comparée à la limite élastique pour savoir si l'on est dans le domaine élastique ou plastique. Le second invariant du déviateur des contraintes est la contrainte de von Mises. On appelle triaxialité des contraintes η le rapport entre la contrainte isostatique et la contrainte équivalente de von Mises :

$$\eta = \frac{p}{\sigma_{evm}} = \frac{\sigma_{ii}}{3\sigma_{evm}} \quad (1.13)$$

Ce paramètre est important dans l'étude de l'endommagement et de la mécanique de la rupture. Notons qu'il caractérise certains cas simples de sollicitation tels que le cisaillement pur ($\eta = 0$), ou la traction uniaxiale ($\eta = 1/3$). Lorsque l'on parle de contraintes, on se réfère toujours au tenseur de Cauchy. Toutefois, plusieurs autres mesures des contraintes ont été développées :

- Les tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff : ils permettent d'exprimer les contraintes par rapport à une configuration de référence (alors que le tenseur des contraintes de Cauchy les exprime relativement à la configuration actuelle). Pour des déformations infinitésimales, les tenseurs de Piola-Kirchhoff et de Cauchy sont identiques.
On voit alors que, si le domaine étudié venait à varier, ces tenseurs seraient bien appropriés (voir paragraphe 1.2 par exemple)
- Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff P relie les forces dans la configuration actuelle au domaine (aires) dans une configuration de référence. Pour l'exprimer, nous aurons donc besoin du tenseur gradient de déformation F et de son jacobien J (voir ci-dessous).

$$P = J\sigma F^T \quad \text{de coordonnées} \quad P_{ij} = J\sigma_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (1.14)$$

- Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff S , de manière duale, relie les forces de la configuration de référence avec le domaine actuel. Avec les mêmes notations qu'au dessus, on a :

$$S = JF^{-1}\sigma F^{-T} \quad \text{de coordonnées} \quad S_{ij} = J \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \sigma_{km} \quad (1.15)$$

- Le tenseur de contraintes de Kirchhoff $\tau = J\sigma$: il est utilisé dans des algorithmes numériques en plasticité des métaux (où il n'y a pas de changement de volume pendant la déformation plastique).
- ...

Pour exprimer les tenseurs de Piola-Kirchhoff nous avons eu besoin du tenseur gradient de déformation F . Ce dernier est défini comme suit :

$$F_{ij}(X, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \text{ou} \quad F = I + \nabla u \quad (1.16)$$

où X est la position de référence à l'instant t_0 (configuration Ω_0) et x , la position courante à l'instant t (configuration actuelle Ω). Localement les formules de transport s'écrivent :

- Pour un vecteur : $dx = F dX$
- Pour un volume : $dv = J dV$ avec $J = J(F) = \det(F)$ le jacobien du tenseur gradient de déformation
- Pour une surface orientée : $ds = JF^{-1} dS$

Pour caractériser les changements de forme, on introduit le tenseur $C = F^T F$, symétrique, qui est le tenseur des dilatations ou encore le tenseur de Cauchy-Green droite. Le tenseur $E = (C - I)/2$, symétrique, est le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Il a les mêmes directions principales que le tenseur C . Ces deux tenseurs sont lagrangiens¹ et ils opèrent sur des quantités définies sur la configuration de référence Ω_0 . Nous venons d'évoquer des tenseurs de déformation... c'est qu'il est temps de changer de paragraphe.

1. la description lagrangienne consiste à suivre dans le temps les particules le long de leurs trajectoires : c'est une description intuitive de leur mouvement. En représentation lagrangienne, la position d'un point M à l'instant t qui se trouvait en M_0 à l'instant t_0 est donnée par une relation du type $M = f(M_0, t)$. Cette méthode présente un inconvénient : le référentiel se déplace avec le fluide. Il est donc difficile de connaître l'état du fluide en un point donné de l'espace et du temps.

La description eulérienne décrit le champ de vitesses qui associe à chaque point un vecteur vitesse. La photographie avec un temps de pose assez court d'un écoulement muni de particules colorées permet de visualiser des éléments de ce champ de vitesses à un instant donné. Au contraire un temps de pose plus long permet de visualiser des trajectoires de la description lagrangienne. Le champ de vitesses est décrit en donnant à tout instant t le vecteur vitesse V en tout point M par une relation de type $V(M, t)$.

1.1.2 Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations, ou tenseur de Green-Lagrange, est obtenu directement à partir des déplacements par la relation :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \text{ soit pour chaque composante : } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.17)$$

Cette écriture provient directement du fait d'écrire l'accroissement de déplacement à partir du déplacement du point M en M' que l'on formule en fonction du déplacement du point M , et d'un accroissement de déplacement, caractérisant le fait que chaque point du solide est susceptible de subir un déplacement différent à l'origine de la déformation.

On peut alors distinguer deux grands types de contribution à la déformation en décomposant ce tenseur ε comme la somme d'un tenseur symétrique E et d'un tenseur antisymétrique G :

$$E = \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon^T) \quad \text{et} \quad G = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^T) \quad (1.18)$$

On obtient alors le tenseur des déformations pures :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.19)$$

et le tenseur des rotations pures :

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.20)$$

(on note souvent γ_{ij} au lieu de G_{ij}). Lorsque l'on parle de tenseur des déformations, on fait souvent référence au tenseur linéarisé des déformations, obtenu en négligeant les termes d'ordre 2 du tenseur de Green-Lagrange, ou encore tenseur des déformations dans le cas des petits déplacements :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ que l'on note } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.21)$$

En mécanique des milieux continus, le tenseur des déformations pour les petites déformations (ou tenseur de Green) est la partie symétrique de la matrice jacobienne du vecteur déplacement de chaque point du solide. Si l'on décompose le tenseur des déformations en une somme d'une partie déviatorique (ou déviateur) et d'une partie sphérique :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_I \delta_{ij} + e_{ij} \quad (1.22)$$

avec $\varepsilon_I = \varepsilon_{kk}$ et $e_{ii} = 0$; on a une signification physique claire de chacun des termes. On vérifie en effet facilement que ε_I caractérise la variation de volume :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_I = \text{tr } \varepsilon \quad (1.23)$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de partir d'un cube unité ($V = 1$) dans les axes principaux, et de calculer le volume du parallélépipède rectangle déformé :

$$\begin{aligned} 1 + \Delta V &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \\ &= 1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \varepsilon_I \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ainsi la partie sphérique représente une dilatation (si elle est positive, une contraction sinon) uniforme dans toutes les directions, tandis que le déviateur correspond à une déformation isochore

(sans variation de volume). Il existe une base orthonormée dans laquelle le tenseur des déformation est diagonal :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Les directions propres sont appelées directions principales de déformation, et les déformations ε_I , ε_{II} et ε_{III} les déformations principales. Les déformations principales sont les valeurs propres du tenseur, et les direction propres, ses vecteurs propres. Les valeurs propres λ vérifient l'équation $\det(\varepsilon - \lambda I) = 0$. La trace étant invariante par changement de base, on a $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$ et et ainsi en petites déformations, la variation relative de volume vaut :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} \quad (1.26)$$

Contrairement aux contraintes principales, la notion de déformation principale est assez peu utilisée pour le calcul. Elle permet par contre d'exprimer de manière simple l'énergie élastique, et est utile pour dépouiller les résultats d'extensométrie. Par ailleurs, les directions principales sont les mêmes pour le tenseur des déformations et pour le tenseur des contraintes.

En vue de prendre en compte les cas les plus généraux, le tenseur des déformations ε se décompose en quatre parties :

- une partie élastique : directement proportionnelle à la variation du tenseur des contraintes (contraintes actuelles moins tenseur des contraintes initiales, généralement nul, mais pas forcément) ;
- une partie de dilatation thermique : directement proportionnel à la variation de température (température actuelle moins température initiale). Cette partie s'écrit à l'aide d'un tenseur α , dépendant éventuellement de la température également, et qui est sphérique dans la cas des matériaux isotropes ;
- une partie plastique ;
- une partie viscoélastique.

chaque mécanisme responsable du comportement inélastique est caractérisé par un certain nombre de variables, appelées variables d'écrouissage, caractéristique de l'état du matériau à un instant donné ainsi que de l'influence de chargement thermomécanique passé.

Les lois d'écrouissage définissent l'évolution du domaine élastique. Elles complètent le modèle pour le cas d'un matériau dont la résistance à la déformation évolue avec celle-ci. Sans écrouissage, le domaine d'élasticité est défini uniquement en fonction de l'état de contrainte.

1.2 Non linéarité géométrique

Nous avons exposé en introduction qu'il s'agit du cas où l'hypothèse des petites perturbations n'est plus vérifiée. Cela se traduit par le fait que le domaine considéré Ω varie et doit donc être introduit comme une inconnue dans le problème.

Si l'on se place dans le cas de grands déplacements, mais en conservant l'hypothèse de petites déformations, on est amené à effectuer la formulation variationnelle sur un domaine inconnu Ω_0 par l'introduction des tenseurs non linéaires de Piola-Kirchhoff (contraintes) et de Green-Lagrange (déformations) tels que :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma = \int_{\Omega_0} \delta \varepsilon_{GL} : \sigma_{PK} \quad (1.27)$$

On obtient la formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega_0} \delta \varepsilon_{GL} : \sigma_{PK} - \int_{\Gamma_0} \delta u \cdot f_{\Gamma_0} - \int_{\Omega_0} \delta u \cdot F_{\Omega_0} \quad (1.28)$$

avec $\Gamma_0 = \delta\Omega_0$

Au niveau discret, le système non linéaire nécessite alors de recourir à une technique de linéarisation, comme la méthode de Newton-Raphson, permettant de manière itérative, d'obtenir une solution convergée. La méthode de Newton-Raphson est présentée en annexe au chapitre ??.

1.3 Non linéarité matérielle

Jusqu'à présent, nous nous sommes placés, de manière implicite, dans le cadre d'un comportement élastique linéaire. On parle encore de loi de Hooke. Cela a été illustré au paragraphe ??.

Lorsque l'on ne considère que le cas de la traction/compression, alors on a proportionnalité entre contrainte dans cette direction de chargement σ_{11} et déformation dans cette direction ε_{11} via le module d'Young E : $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$.

La même loi se retrouve pour une sollicitation en cisaillement, et la contrainte de cisaillement τ_{12} est proportionnelle à l'angle de déformation relative γ_{12} via le module de Coulomb G : $\tau_{12} = G\varepsilon_{12}$.

Lorsque l'on synthétise tout cela pour toutes les directions, on parle alors de loi de Hooke généralisée, que l'on note sous la forme $\sigma = H\varepsilon$ (i.e. $\sigma_{ij} = H_{ijkl}\varepsilon_{kl}$) : il y a proportionnalité entre les tenseurs des contraintes et des déformations (On note également souvent C ou D au lieu de H).

Nous rappelons que, pour un matériau isotrope, tous les coefficients H_{ijkl} sont définis à l'aide du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν , ou de manière équivalente par les coefficients de Lamé λ et μ .

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)I \quad \text{i.e.} \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1.29)$$

avec :

$$\lambda = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (1.30)$$

ou :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1.31)$$

Dans ce paragraphe, nous proposons d'exposer brièvement quelques lois de comportement qui vont au delà de la simple élasticité linéaire.

1.3.1 Modèles rhéologiques

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples (traction, compression, écoulement, fluage, relaxation, triaxial, flexion, torsion...) permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements « de base », qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité :

- *Le ressort* symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation.
- *L'amortisseur* schématise la viscosité, linéaire ou non. La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.
- *Le patin* symbolise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante. Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique.

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques. La réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents, qui permettent d'illustrer le comportement lors d'essais de type :

- *Écrouissage*, ou augmentation monotone de la charge ou de la déformation (plan $\varepsilon - \sigma$) ;
- *Fluage*, ou maintien de la charge (plan $t - \varepsilon$) ;
- *Relaxation*, ou maintien de la déformation (plan $t - \sigma$).

Les réponses de modèles classiques selon ces trois plans précédents sont présentées ci-dessous :

- *modèle du solide élastique* : $\sigma = H\varepsilon$, loi de Hooke ;
- *modèle du solide viscoélastique* comportant un ressort et un amortisseur en parallèle : $\sigma = \eta \dot{\varepsilon} + H\varepsilon$, modèle de Voigt ;
- *modèle du solide élastique-parfaitement plastique*, constitué par un ressort linéaire et un patin en série : modèle de Saint-Venant.
Lorsque le module E tend vers l'infini, le modèle devient rigide-parfaitement plastique.
- *modèle du solide élastique-plastique écrouissable*, qui donne une courbe de traction linéaire par morceaux : modèle de Saint-Venant généralisé ;
- *modèle du solide élastique-parfaitement viscoplastique*, formé par un amortisseur non linéaire : modèle de Norton-Hoff.
- *modèle du solide élastique-parfaitement viscoplastique*, qui comporte un ressort linéaire en série avec un amortisseur et un patin situés en parallèle : modèle de Bingham-Norton ;
Lorsque le seuil du patin tend vers zéro, et que l'amortisseur est choisi linéaire, ce dernier modèle dégénère en un *modèle de fluide visqueux*, comportant un ressort et un amortisseur en série : $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \sigma/\eta$, modèle de Maxwell.
- *modèle du solide élastique-viscoplastique écrouissable*, qui représente le schéma le plus complexe.

Excepté le cas de l'élasticité (déjà traité), l'ensemble des modèles présentés ci-dessus s'expriment sous forme *différentielle*, si bien que la réponse actuelle dépend de la sollicitation actuelle et de son histoire (propriété d'hérédité).

Il y a deux manières de prendre en compte cette histoire, *la première* consiste à la décrire par une dépendance fonctionnelle entre les variables ; *la seconde* fait l'hypothèse qu'il est possible de représenter l'effet de l'histoire dans des variables internes, qui « concentrent » les informations importantes définissant l'état du matériau. Sauf quelques cas exceptionnels comme celui de la viscoélasticité linéaire, la seconde méthode de travail produit des modèles dont la modélisation numérique est plus simple. Les autres hypothèses importantes qui sont classiquement utilisées pour l'écriture de modèles de comportement sont :

- Le principe de l'état local, qui considère que le comportement en un point ne dépend que des variables définies en ce point, et non pas du voisinage ;
- Le principe de simplicité matérielle, qui suppose que seul intervient dans les équations de comportement le premier gradient de la transformation ;
- Le principe d'objectivité, qui traduit l'indépendance de la loi de comportement vis-à-vis de l'observateur, et qui implique que le temps ne peut pas intervenir explicitement dans les relations de comportement.

Mentionnons enfin quelques cas type d'utilisation des modèles mentionnés :

- Comportements viscoélastique : pour les polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion, pour les verres au voisinage de la température de transition, pour les bétons frais...
- Comportements rigides-parfaitement plastiques : pour l'étude des sols, pour l'analyse limite, pour la mise en forme des métaux...
- Comportements plastiques : pour les métaux à des températures inférieures au quart de la température de fusion, pour les sols et roches...
- Comportements viscoplastiques : pour les métaux à moyenne et haute température, pour le bois, les sols (dont le sel), pour les céramiques à très haute température...

Un acier à température ambiante peut être considéré comme élastique linéaire pour le calcul des flèches d'une structure mécanique, viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations, rigide-parfaitement plastique pour un calcul de charge limite, élasto-viscoplastique pour l'étude de contraintes résiduelles,

Un polymère peut être considéré comme un solide pour un problème de choc, et comme un fluide pour l'étude de sa stabilité sur de longues durées...

1.3.2 Visoélasticité

Un comportement viscoélastique correspond à la superposition d'un comportement élastique, traduit par une relation de type $\sigma = H\varepsilon$ (loi de Hooke), et un comportement visqueux, dont le plus simple est le modèle linéaire dit de Newton, traduit par une relation de type $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$ (η étant la viscosité du matériau).

Un échelon de contrainte appliqué à partir d'un instant t_0 produit une déformation instantanée suivie d'une déformation différée (fluage). Si, au-delà d'un instant t_1 , la charge est ramenée à zéro, il apparaît, après une nouvelle déformation instantanée, le phénomène de recouvrance, qui tend à ramener la déformation à zéro. Si une déformation est appliquée à partir de l'instant t_0 , on obtient une contrainte instantanée puis une diminution de la contrainte à partir de cette valeur instantanée (relaxation). Si, au-delà d'un instant t_1 , la déformation est ramenée à zéro, il apparaît, après une nouvelle contrainte instantanée, le phénomène d'effacement, qui tend à ramener la contrainte à zéro. Le comportement viscoélastique se caractérise par le fait que le phénomène d'effacement est total, i.e. que la contrainte revient effectivement à zéro.

De manière générale, une loi viscoélastique s'exprime comme une correspondance entre l'histoire des déformations et des contraintes par une fonction, ce que l'on note :

$$\varepsilon(t) = \Gamma_{\tau < t}(\sigma(t)) \quad (1.32)$$

De plus, le comportement sera dit viscoélastique linéaire si le comportement vérifie le principe de superposition de Boltzman : la réponse à la somme de deux sollicitations est la somme des réponses à chaque sollicitation. Cela se traduit par :

$$\varepsilon(t) = \Gamma_{\tau < t}(\sigma_1 + \sigma_2) = \Gamma_{\tau < t}(\sigma_1) + \Gamma_{\tau < t}(\sigma_2) \quad (1.33)$$

1.3.3 Visoplasticité

Plusieurs modèles viscoplastiques existent. Nous avons mentionné, le modèle de Maxwell ou *modèle de fluide visqueux*, comportant un ressort et un amortisseur linéaire en série, et dont la loi s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (1.34)$$

Nous avons également mentionné le modèle de Voigt ou *modèle du solide viscoélastique*, comportant un ressort et un amortisseur en parallèle, et dont la loi s'écrit :

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} + H\varepsilon \quad (1.35)$$

La figure 1.1 illustre les réponses des modèles de Maxwell et Voigt.

Le modèle de Voigt ne présente pas d'élasticité instantanée. L'application d'un saut de déformation en $t = 0$ produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort pour effectuer des calculs de structure (modèle de Kelvin-Voigt).

De plus, sous l'effet d'une contrainte σ_0 constante en fonction du temps, la déformation dans ce modèle de Voigt tend vers la valeur asymptotique σ_0/H : le fluage est donc limité. Si, après une

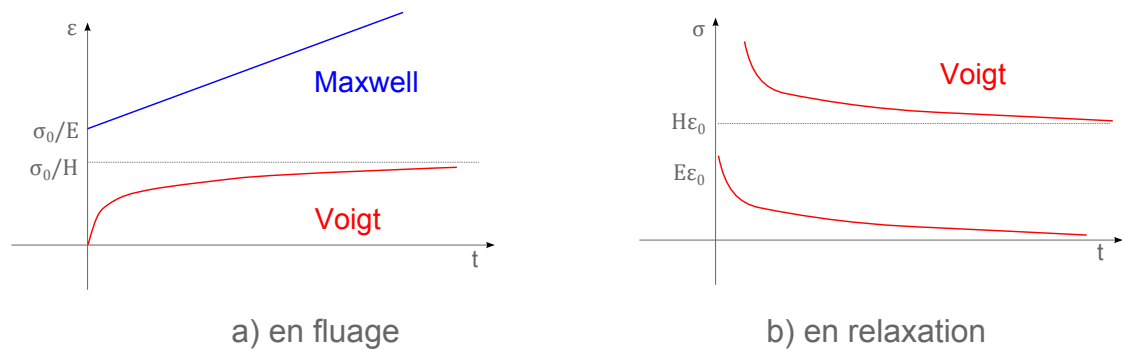


FIGURE 1.1 – Modèles de Maxwell et Voigt

mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur ε_0 , la contrainte asymptotique sera $H\varepsilon_0$: il n'y a donc pas disparition complète de la contrainte.

Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante, et la disparition de contrainte au cours de la relaxation est totale.

1.3.4 Plasticité

Les modèles présentés jusqu'à présent étaient des modèles unidimensionnels, ou plus exactement des modèles correspondant à un chargement uniaxial. Pourtant, l'étude de ces modèles uniaxiaux (simples) met en évidence la détermination de seuils ou de limites correspondant à des modifications de comportement. Afin de pouvoir aborder l'étude des chargements multiaxiaux, il est nécessaire de se donner les moyens de définir de telles limites dans le cas tridimensionnel. C'est ce que nous allons maintenant aborder.

Considérons le cas du chargement uniaxial d'un matériau isotrope. Celui-ci fait apparaître un domaine d'élasticité au travers de deux valeurs de contrainte, l'une en traction, l'autre en compression, pour lesquelles se produit l'écoulement plastique. On a donc élasticité dans un domaine $[-\sigma_y, \sigma_y]$, puis plasticité au delà, i.e. par exemple pour une contrainte supérieure à $\sigma_y + x$, où $x = H\varepsilon_p$.

En fait, la limite du domaine de plasticité est défini par une fonction de charge f de sorte que si $f(\sigma, x) < 0$ l'état de contrainte est élastique, et si $f(\sigma, x) > 0$ l'état de contrainte est plastique.

Dans le cas général, l'ensemble des paramètres de départ A_I contiendra les contraintes et toutes les variables d'écrouissage, scalaires ou tensorielles, il faut donc définir $f(\sigma, A_I)$. On va dans un premier temps limiter la présentation à la définition du domaine d'élasticité initial, pour lequel on supposera que les variables A_I sont nulles, si bien qu'on se contentera d'écrire les restrictions des fonctions f dans l'espace des contraintes.

L'expérience montre que, pour la plupart des matériaux, le domaine d'élasticité initial est convexe (c'est en particulier vrai pour les métaux qui se déforment par glissement cristallographique). La fonction de charge doit donc elle-même être convexe en σ , ce qui implique, pour tout réel λ compris entre 0 et 1, et pour un couple (σ_1, σ_2) quelconque de la frontière :

$$f(\lambda \sigma_1 + (1 - \lambda) \sigma_2) \leq \lambda f(\sigma_1) + (1 - \lambda) f(\sigma_2) \quad (1.36)$$

Il faut également respecter les symétries matérielles. Ceci implique en particulier dans le cas d'un matériau isotrope que f soit une fonction symétrique des seules contraintes principales, ou bien encore, ce qui est équivalent, des invariants du tenseur des contraintes présentés au paragraphe 1.1.1 (il s'agit de I_1 , I_2 et I_3).

Dans les matériaux métalliques on observe généralement l'incompressibilité plastique ($\varepsilon_{ii}^p = 0$) et l'indépendance du comportement vis-à-vis de la pression isostatique. Ceci amène à considérer comme variable critique à faire figurer dans la définition du critère non plus le tenseur de contraintes lui-même, mais son déviateur s (et donc ses invariants J_1 , J_2 et J_3).

En vue de réaliser les comparaisons avec les résultats expérimentaux, il est pratique de disposer d'expressions des critères dans lesquelles les valeurs de f sont homogènes à des contraintes. On peut alors remplacer J_2 par l'invariant J (contrainte équivalente au sens de von Mises en cisaillement : $J(\sigma) = \sigma_e = \sqrt{3J_2}$), qui peut également s'exprimer en fonction des contraintes principales, ou de la contrainte appliquée dans le cas d'un état de traction simple.

Nous allons maintenant présenter quelques critères classiques de plasticité : von Mises et Trasca, ne faisant pas intervenir la pression isostatique, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Hill et Tsai, faisant intervenir la pression isostatique.

Introduire la pression isostatique permet d'exprimer le fait qu'une contrainte isostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique, ce qui conduit à une dissymétrie des critères en traction/compression.

Histoire

Un critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou si elle reste dans le domaine élastique. De nombreux essais ont montré que l'on pouvait utiliser deux critères principaux : le critère de von Mises (critère de l'énergie de distorsion élastique) ou le critère de Tresca (critère de la contrainte de cisaillement maximal). En résistance des matériaux, on désire parfois rester dans le domaine élastique, on parle alors de critère de résistance.

La contrainte de comparaison n'est pas une contrainte réelle existant à un instant donné à l'intérieur d'un solide, mais est utilisée en mécanique pour prédire la rupture. Néanmoins, la plupart des ingénieurs l'utilisent pour déterminer si un champ de contrainte donné dans une pièce est acceptable ou non. On parle aussi de contrainte équivalente ou de contrainte effective. Elle découle des critères de plasticité.

Cette contrainte est comparée à la limite d'élasticité ou encore la contrainte de rupture obtenue par essai de traction.

Le critère dit de von Mises a été formulé initialement par Maxwell en 1865. En 1904, Huber le développa partiellement dans un article en polonais. Cependant, sa paternité est généralement attribuée à von Mises (1913). On parle aussi parfois de la théorie de Maxwell-Huber-Hencky-von Mises, ou de critère de Prandtl-Reuss, ou encore de critère de l'énergie de distorsion élastique.

La renommée de Tresca était si grande à son époque que Gustave Eiffel mit son nom en troisième position sur la Liste des soixante-douze noms de savants inscrits sur la tour Eiffel, et plus précisément sur le pilier face au Trocadéro.

Sur ce même pilier (comportant 18 noms), en plus des mathématiciens Lagrange, Laplace, Legendre et Chasles, se trouve également Navier. Celui-ci n'apparaît pas pour ses contributions aux mathématiques et à la physique^a, mais parce qu'il était considéré lui-aussi comme l'un des plus grands ingénieurs français et comme personnage public important : de 1830 à sa mort en 1836, il fut employé par le gouvernement français comme consultant afin de permettre à la France de progresser grâce aux sciences et aux technologies.

^a. Lorsque, en 1822, il modifia les équations d'Euler pour décrire un fluide en incluant la viscosité, son raisonnement mathématique était erroné, mais par chance, ou grâce à son intuition, il obtint malgré tout les bonnes équations. Le raisonnement rigoureux fut trouvé quelques années plus tard par le mathématicien irlandais Stokes

Critère de von Mises

Dans le critère de von Mises, on considère que le seuil de plasticité est lié à l'énergie élastique de cisaillement. Cela revient à négliger l'influence du troisième invariant. Si σ_y est la limite d'élasticité en traction, la fonction de charge est définie par :

$$f(\sigma) = J(\sigma) - \sigma_y \quad (1.37)$$

La direction d'écoulement est donnée par le déviateur du tenseur des contraintes.

Critère de Tresca

Le critère de Tresca, ou critère de Tresca-Guest, ou critère de la contrainte de cisaillement maximal, s'exprime en fonction des cisaillements maxima dans chaque plan principal, représentés par les quantités $(\sigma_i - \sigma_j)$ (et non plus à l'énergie élastique de cisaillement).

La spécificité du critère de Tresca est de ne retenir que le plus grand d'entre eux. Le fait de rajouter une pression à chaque terme de la diagonale ne modifie pas, comme prévu, la valeur du critère. Contrairement au critère de von Mises, l'expression du critère de Tresca ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux) :

$$f(\sigma) = \max(\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_y \quad (1.38)$$

En d'autres termes, la loi d'écoulement se définit par secteurs dans l'espace des contraintes principales.

Critère de Drucker-Prager

On trouve parfois « Drücker » au lieu de « Drucker » dans la littérature.

La fonction de charge s'écrit $f(\sigma) = (1 - \alpha)J(\sigma) + \alpha tr(\sigma)$, si bien que la normale possède une composante sphérique. La déformation plastique évaluée avec un tel critère est accompagnée d'une augmentation de volume quel que soit le chargement appliqué.

De manière générale, tout critère qui fait apparaître la pression isostatique produit un terme de changement de volume accompagnant la déformation plastique (mais pas forcément positif, comme dans le cas du modèle de Drucker-Prager qui comporte donc un défaut).

On l'écrit aussi sous une forme où il est plus facile de le voir comme une extension du critère de von Mises :

$$f(\sigma) = J(\sigma) - \frac{\sigma_y - \alpha I_1}{1 - \alpha} \quad (1.39)$$

où le coefficient α dépend du matériau et est compris entre 0 et 1/2. Pour $\alpha = 0$, on retrouve le critère de von Mises.

Critère de Mohr-Coulomb

Ce critère est apparenté à celui de Tresca, car il fait intervenir comme lui le cisaillement maximum, mais, contrairement à lui, il ajoute en même temps la contrainte « moyenne », représentée par le centre du cercle de Mohr correspondant au cisaillement maximum, soit :

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - 2C \cos \varphi \quad \text{avec} \quad \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad (1.40)$$

Ce critère est sous-tendu par la notion de frottement, et suppose que le cisaillement maximal que peut subir le matériau est d'autant plus grand que la contrainte normale de compression est élevée.

Critères anisotropes

La méthode généralement utilisée pour faire apparaître de l'anisotropie consiste à faire intervenir un tenseur du quatrième ordre dans l'expression du critère, qui vient multiplier le déviateur, ou directement le tenseur des contraintes.

Une solution couramment adoptée généralise le critère de von Mises, en utilisant à la place de $J(\sigma)$ l'expression : $J_H(\sigma) = \sqrt{\sigma : H : \sigma}$.

Le critère de Hill correspond à une anisotropie particulière qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écrouissage du matériau.

Le critère de Tsai est obtenu à partir de celui de Hill afin de représenter la dissymétrie entre traction et compression.

1.3.5 Les élastomères

Dans ce paragraphe, nous faisons une présentation sommaire des élastomères de manière générale.

Le comportement des élastomères est fortement non linéaire. Il faut prendre en compte par exemple la précharge, la fréquence et l'amplitude d'excitation comme paramètres sur :

- en statique : très grandes déformations et retour à la configuration initiale sans déformation permanente : lois hyperélastiques.
- en dynamique : propriétés amortissantes, dont rigidification en fréquence sous excitation harmonique : loi viscoélastique non linéaire.

Concernant leur fabrication, l'opération de vulcanisation est la suivante : on malaxe du caoutchouc brut, on ajoute du soufre et on chauffe le mélange afin d'obtenir un matériau élastique, stable dans une gamme de température beaucoup plus large que le caoutchouc naturel et résistant au fluage sous contrainte (découverte de Goodyear en 1839).

Le premier brevet sur la fabrication d'un élastomère synthétique a été déposé le 12 septembre 1909 par le chimiste allemand Fritz Hofmann.

Les élastomères sont quasi incompressibles. le module de compressibilité du caoutchouc se situe entre 1000 et 2000 MPa alors que l'ordre du grandeur de son module de cisaillement est de 1 MPa : cette différence signifie que le caoutchouc ne change quasiment pas de volume, même sous de fortes contraintes.

Les déformations de cisaillement peuvent être considérées comme linéaires : le coefficient de cisaillement est relativement indépendant du taux de cisaillement, au moins jusqu'à des niveaux de déformation modérés.

Enfin, notons également un comportement particulier, connu sous le nom d'effet Mullins (publications en 1966 et 1969) : si l'on applique un chargement cyclique sur un matériau initialement non précontraint, on observe une diminution de la raideur lors des premiers cycles. Si on impose ensuite une déformation cyclique jusqu'à un niveau de déformation plus élevé, on observe à nouveau une diminution de la contrainte et de l'hystérésis jusqu'à un nouvel équilibre. Ce comportement provient d'une rupture progressive des liaisons moléculaires.

Les élastomères sont connus pour leur grande élasticité. Une hystérésis est toujours présente, mais augmente avec l'ajout de charges (qui sont nécessaires pour améliorer d'autres propriétés).

Rappelons ce qu'est l'hystérésis en quelques mots : l'amortissement correspond à l'énergie dissipée au cours d'un cycle. Il est caractérisé par un angle de perte et un module complexe. Si le système est soumis à des déformations sinusoïdales cycliques : $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ et que l'on estime que la contrainte transmise répond également de façon sinusoïdale, alors cette dernière est déphasée d'un angle δ , l'angle de perte, et on a : $\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta)$. Généralement cette hypothèse de première harmonique n'est pas vérifiée et la réponse contient plusieurs harmoniques : $\sigma(t) = \sum_k \sigma_k \sin(k\omega t + \delta_k)$.

Le module complexe est défini par : $E^* = \sigma/\varepsilon$. Il se calcule comme :

$$E^* = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos \delta + i \sin \delta) \quad (1.41)$$

ou encore :

$$E^* = E' + iE'' = E'(1 + i \tan \delta) \quad (1.42)$$

et on appelle :

- module dynamique = $|E^*| = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$;
- module de stockage = $E' = |E^*| \cos \delta$, car il mesure l'énergie emmagasinée puis restituée au cours d'un cycle ;
- module de perte = $E'' = |E^*| \sin \delta$, car il mesure l'énergie dissipée sous forme de chaleur au cours d'un cycle.

Le module d'Young complexe E^* ou le module de Coulomb complexe G^* évoluent de manière significative avec la température, la fréquence et l'amplitude de l'excitation.

Notons également que l'effet mémoire (expériences de fluage et relaxation) est présent pour ces matériaux : Le niveau des contraintes à un instant dépend non seulement du niveau de sollicitation à cet instant, mais également des sollicitations auxquelles le matériau a été soumis précédemment.

Grandes déformations

En grandes déformations, il est nécessaire de bien distinguer l'état initial de l'état déformé.

On utilisera alors les tenseurs adaptés (Piola-Kirchhoff), comme exposé au paragraphe 1.2.

Incompressibilité

Aux lois de comportement précédentes, on ajoute la contrainte de variation nulle de volume entre les configurations.

Pour un matériau incompressible, on a $J = 1$ (J est le jacobien du gradient de la déformation).

Hyperélasticité

Un matériau est dit élastique si le tenseur des contraintes de Cauchy à l'instant t dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant : la contrainte ne dépend pas du chemin suivi par la déformation, alors que le travail fourni par cette contrainte en dépend.

Un matériau élastique est dit hyperélastique si le tenseur des contraintes dérive d'une fonction d'énergie de ce matériau : cela implique que le travail fourni pour aller d'un état à un autre ne dépend pas du chemin suivi.

Si on postule l'existence d'une énergie libre Ψ , on peut la relier, pour les matériaux hyperélastiques, aux invariants des tenseurs. Cette énergie est également appelée énergie de déformation. De là on peut déduire les lois de comportement.

Approximation numérique

De nombreuses formes de l'énergie de déformation ont été proposées, s'exprimant à partir :

- des invariants ;
- des fonctions d'élongations principales ;
- des coefficients intervenant sous forme linéaire : Mooney-Rivlin et Rivlin généralisé ;
- des coefficients intervenant sous forme de puissances : Ogden (1972)
- sous forme polynomiale...

Le modèle de Rivlin généralisé, implémenté dans la plupart des codes de calcul, est donné par le développement polynomial suivant :

$$\Psi = \sum_{i,j=0}^N C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^M D_i(J - 1)^{2i} \quad (1.43)$$

ou plus simplement, si le matériau est bien incompressible :

$$\Psi = \sum_{i,j=0}^N C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (1.44)$$

où l'énergie de déformation est développée à un ordre proportionnel à la plage de déformation souhaitée (pour $N = 3$ on a généralement une bonne corrélation avec les mesures expérimentales). $C_{00} = 0$ et les coefficients C_{ij} sont des constantes du matériau liées à sa réponse en terme de distortion, et les coefficients D_i sont des constantes du matériau liées à sa réponse en terme de volume.

Pour les matériaux faiblement compressibles, il est commode d'introduire la décomposition des déformations. On en arrive alors à la forme :

$$\Psi(J) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J-1)^{2i} \quad (1.45)$$

le module de compressibilité étant donné par $k_0 = 2/D_1$.

Notons qu'une manière également simple de prendre en compte les élastomères a déjà été donnée : il s'agit de l'utilisation d'éléments hybrides faisant intervenir la matrice de souplesse $[S]$ au lieu de la matrice de Hooke $[H]$.

1.3.6 Les composites, l'anisotropie

Dans ce paragraphe, nous faisons une présentation sommaire des matériaux composites de manière générale.

Ceux-ci ont fait des apparitions en divers endroits de ce document, et quelques problèmes se rapportant à eux ont été discutés.

Définition 1 — Matériau composite. On appelle matériau composite l'association d'au moins deux matériaux non miscibles. On obtient un matériau hétérogène.

On en profite donc pour rappeler qu'un matériau peut être :

- *Homogène* : mêmes propriétés en tout point du matériau.
- *Hétérogène* : en deux points différents, propriétés différentes.
- *Isotrope* : mêmes propriétés dans toutes les directions.
- *Isotrope transverse* : il existe un axe de symétrie. Symétrie par rapport à une droite.
- *Orthotrope* : propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- *Anisotrope* : les propriétés sont différentes selon les différentes directions.

Composants

Un matériau composite plastique correspond à l'association de deux constituants .

- Le renfort (ou armature, ou squelette) : assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).
- La matrice : lie les fibres renforts, répartit les efforts (résistance à la compression ou à la flexion), assure la protection chimique. Par définition, c'est un polymère ou une résine organique.

En plus de ces deux constituants de base, il faut ajouter l'interphase, qui est l'interface assurant la compatibilité renfort-matrice, et qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif.

Des produits chimiques entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de structure composite.

Remarque : on conçoit un composite en fonction du type d'application, de chargement... ce qui est différent des matériaux classiques où on adapte la conception d'une structure en fonction du matériau constitutif. On cherchera donc toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise.

Avantages des matériaux composites :

- grande résistance à la fatigue ;
- faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu-carbone) ;
- insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole ;

Mais attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes !

Les matériaux composites structuraux

- Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.
- Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.
- Un matériau sandwich est un matériau composé de deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande rigidité en flexion et est un excellent isolant thermique.

On pourra avoir des stratifiés de type :

- *Equilibré* : stratifié comportant autant de couches orientée suivant la direction $+\theta$ que de couches orientée suivant la direction $-\theta$.
- *Symétrique* : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- *Orthogonal* : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
- Notation « composite » : On porte, entre crochets, un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres de chaque couche avec l'axe de référence. les couches sont nommées successivement en allant de la face inférieure à la face supérieure, les couches étant séparées par le symbole « / » (ou une virgule parfois) : $[0/+45/+90/-45]$

Les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice : $[0/45/45/90/-45/-45/0]$ s'écrit $[0/45_2/90/-45_2/0]$.

Si le stratifié est symétrique, seule la moitié est codifiée et le symbole « s » indique la symétrie : $[-45/45/-45/-45/45/-45]$ s'écrit $[-45/45/-45]_s$.

En cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche.

Approximation numérique

L'ingénieur mécanicien est souvent bien au fait des diverses approximations possibles d'un matériau composite. Nous serons par conséquent assez brefs sur le sujet.

Par ailleurs le chapitre ?? sur l'homogénéisation permet, dans certains cas, de remplacer un matériau composite compliqué par un matériau homogénéisé plus simple.

La loi de Hooke, telle qu'elle a été écrite jusqu'à présent $\sigma = H\varepsilon$ ne s'oppose aucunement à l'anisotropie.

L'isotropie se traduit juste par le fait que plus de coefficients sont nuls, et que ceux qui sont non nuls ne dépendent que de deux paramètres, comme rappelé en introduction au paragraphe 1.3.

Lorsque le matériau est anisotrope, alors H peut être pleine, ce qui correspond à 21 coefficients non nuls, dépendant des paramètres : E_i : modules de tensions, G_{ij} : modules de cisaillement, ν_{ij} : coefficients de contraction, $\eta_{ij,k}$: coefficients d'influence de 1ère espèce, $\eta_{i,kl}$: coefficients d'influence de 2ème espèce, et $\nu_{ij,kl}$: coefficients de Chentsov.

L'orthotropie (orthogonal et anisotrope, i.e. 2 plans orthogonaux de symétrie) fait descendre ce nombre de coefficients non nuls à 9, dépendant des paramètres : E_1, E_2, E_3 : modules d'élasticité longitudinaux, G_{23}, G_{13}, G_{12} : modules de cisaillement, $\nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}$: coefficients de Poisson.

L'isotropie transverse (1 axe de symétrie) fait encore descendre ce nombre de coefficients non nuls à 6 (on n'a plus besoin de E_2, G_{23} et G_{12} par exemple)

On peut également faire des hypothèses sur l'épaisseur des plis (faible) et la répartition des contraintes ou déformations pour obtenir des théories de plaques équivalentes. Ces plaques équivalentes pouvant ensuite être assemblées en une nouvelle plaque équivalente.

Chaque coefficient non nul peut lui-même être constant (élasticité anisotrope) ou non, permettant de prendre en compte autant de comportements que nécessaire (viscoélasticité, plasticité...). En sus, il est également nécessaire de judicieusement modéliser l'interphase, i.e. de bien décrire comment les couches peuvent ou non bouger entre elles. Par défaut, l'hypothèse utilisée dans les codes de calcul est une adhésion parfaite. Cela n'est pas forcément compatible avec le but recherché par le calcul, notamment si celui-ci vise à appréhender les modes de rupture (qui sont plus complexes pour les composites...).

Tous les codes de calcul actuels permettent de prendre en compte l'anisotropie matérielle et les matériaux composites (avec des interfaces plus ou moins sympathiques). Nous n'entrerons donc pas plus dans le détail dans ce document.

1.4 Le contact

Histoire

Les premiers calculs de Joseph Boussinesq, auteur en 1876 d'un *Essai théorique de l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui des massifs solides, sur la poussée des terres sans cohésion*, reprenant des études de Coulomb sur ce sujet, reposent sur un ensemble d'hypothèses très restrictives : 1) les corps en présence sont supposés semi-infinis (cela n'est vrai que si les zones de contact sont vraiment très petites par rapport aux autres dimensions) ; 2) au voisinage de la future zone de contact, leurs surfaces peuvent être représentées par des quadriques dont les courbures sont connues (Or la rugosité, qui rend la répartition des pressions de contact très irrégulière, est généralement très éloignée du modèle théorique) ; 3) ces corps sont parfaitement élastiques, homogènes et isotropes (ce qui est très restrictif, et souvent réellement faux) ; 4) l'aire de contact est assimilée à un très petit élément plan qui ne reçoit que des efforts normaux, donc parallèles entre eux (dans beaucoup de contacts, la zone d'application des pressions est loin d'être plane et surtout, le fait de ne considérer que des charges normales suppose que l'on fasse abstraction du frottement).

En 1881, Heinrich Hertz, jeune ingénieur et docteur ès sciences de 24 ans, publie dans le célèbre *Journal de Crelle* (XVII, p. 156) sous le titre *Über die Berührung fester elastischer Körper* (Sur le contact des corps solides élastiques), un mémoire qui fera date, puisqu'il s'agit de la première théorie cohérente des contacts ponctuels.

Le fait de rester dans le domaine des déformations élastiques permet d'appliquer le principe de superposition : aux contraintes issues de 1) l'application des efforts normaux se superposent celles 2) provoquées par les efforts tangentiels résultant du frottement ou de l'adhérence, puis celles 3) dues aux contraintes résiduelles dont on favorise l'apparition par des traitements mécaniques ou thermochimiques appropriés, et enfin celles 4) qui correspondent aux autres sollicitations des pièces, tension, compression, flexion, torsion... Ces quatre groupes de contraintes peuvent être définis séparément puis combinés pour aboutir à l'état de charge complet des zones de contact.

Le calcul des contraintes supplémentaires dues au frottement a été conduit de diverses manières par des chercheurs comme Liu (1950), Poritzky (1966) et quelques autres. Il est extrêmement compliqué, au point d'être pratiquement inutilisable dans les situations concrètes.



Boussinesq

Depuis que Hertz a introduit une théorie du contact en 1881, de nombreux problèmes d'ingénieur faisant intervenir le contact ont été résolus. L'outil de calcul basé sur une approche analytique, est limité à la résolution des problèmes simples de contact : en effet la plupart des solutions analytiques supposent un contact sans frottement et des zones de contact connues, à priori, et des formes géométriques simples.

Le développement des techniques numériques de résolution a permis de traiter des problèmes de contact plus complexes. La MEF, en permettant la discrétisation des solides de formes quelconques

et la prise en compte aisée de conditions aux limites diverses, offre un outil puissant de calcul pour étudier les problèmes de contact.

Aujourd'hui l'analyse des problèmes de contact avec frottement est très importante pour beaucoup d'applications industrielles. La modélisation des procédés industriels de mise en forme, et plus généralement des phénomènes complexes où le contact et le frottement s'ajoutent à des non-linéarités du matériau et de la géométrie, nécessite des algorithmes supplémentaires dans les logiciels généraux d'éléments finis.

Malgré la linéarité de la loi élastique, le problème de contact est intrinsèquement non-linéaire. En effet, la surface de contact et les forces de contact sont, à priori, inconnues et elles changent progressivement lorsqu'on applique le chargement externe.

Dans la littérature, de nombreuses méthodes ont été développées pour résoudre les problèmes de contact par des méthodes numériques comme la MEF, parmi lesquels la méthode de pénalisation, la méthode de flexibilité, la méthode de programmation mathématique, la méthode des multiplicateurs de Lagrange (voir le paragraphe ?? sur les multiplicateurs de Lagrange et le paragraphe ?? sur les diverses manières de traiter une interface, qui est un contact rigide). Une grande partie de ces articles traitent d'algorithmes numériques. Dans les codes EF industriels (Ansys, Pamcrash...), les problèmes de contact avec frottement dans le contexte des grandes déformations sont presque exclusivement traités par des méthodes de pénalisation ou de régularisation. Ces méthodes présentent des inconvénients en ce qui concerne la stabilité et la précision numérique, en particulier pour tout ce qui touche à la simulation des phénomènes de frottement.

Pour pallier ces insuffisances, une méthode du Lagrangien Augmenté a été développée par Curnier et Alart (1988). Cette méthode consiste à déterminer les inconnues (déplacement et réaction) simultanément en utilisant un algorithme de Newton généralisé. Simo et Laursen ont également proposé une méthode similaire (1992). De Saxcé et Feng ont proposé une méthode bipotentielle fondée sur la théorie du Matériau Standard Implicite, dans laquelle une nouvelle formulation du lagrangien augmenté est développée.

Pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement, la méthode bipotentielle n'utilise qu'un seul principe variationnel sur le déplacement et une seule inégalité. Ainsi, le contact unilatéral et le frottement sont couplés. Cette nouvelle approche étend également la notion de loi normale aux comportements dissipatifs non associés, en tenant compte du frottement. Cette approche variationnelle est plus simple que l'approche classique qui inclue deux principes variationnels et deux inégalités respectivement pour le contact unilatéral et le frottement. Dans la méthode bipotentielle, le problème de contact avec frottement est traité dans un système réduit par un algorithme d'Uzawa à une seule phase de prédiction-correction sur le cône de frottement. L'extension de cette méthode dans le contexte de grandes déformations a été réalisé. Pour être capable de traiter des problèmes industriels qui font intervenir le contact, il est important de disposer d'un éventail d'algorithmes afin de pouvoir moduler l'utilisation de chaque méthode selon leurs avantages et inconvénients dans chaque cas concret.

1.4.1 Lois de contact et de frottement

Considérons deux solides déformables Ω_1 et Ω_2 en contact en certains points de leurs frontières. Soient v la vitesse relative locale en un point P de Ω_1 par rapport à Ω_2 , et r la réaction que subit Ω_1 de la part de Ω_2 . Supposons défini n le vecteur unitaire normal dirigé vers Ω_1 . La projection orthogonale du point P sur la surface de Ω_2 définit un point P' , dit « point projeté de P », qui sera l'origine du repère local du contact (t_1, t_2, n) , comme illustré à la figure 1.2.

Les vecteurs v et r peuvent être décomposés en partie tangente v_t et r_t et partie normale v_n et r_n .

Compte tenu de la distance initiale au contact g et pour un pas de temps Δt , la distance PP' exprimée dans le repère local est alors définie par : $x_n = g + \Delta t v_n$. Par conséquent, les conditions de contact unilatéral pour chaque point en contact, peuvent être exprimées comme suit :

- Impénétrabilité : $x_n \geq 0$

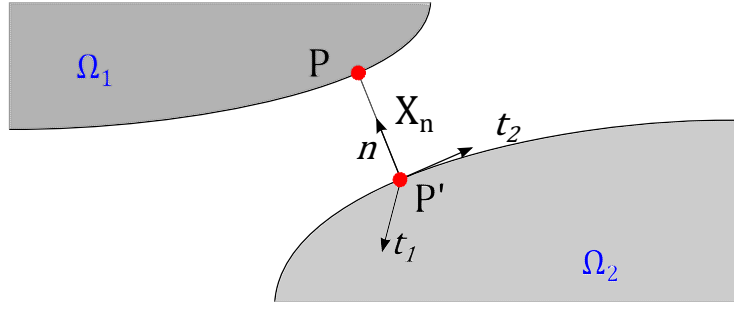


FIGURE 1.2 – Contact entre deux solides déformables : notations

- Quand la particule est en contact avec l'obstacle, elle n'est pas attirée par lui : $x_n = 0 \rightarrow r_n \geq 0$
- Quand la particule n'est pas en contact avec l'obstacle, la réaction normale est nulle : $x_n > 0 \rightarrow r_n = 0$

Ces trois conditions peuvent être condensées sous une forme complémentaire (conditions de Signorini) :

$$x_n \geq 0; \quad r_n \geq 0; \quad x_n r_n = 0 \quad (1.46)$$

ou sous la forme équivalente :

$$\forall \rho_n > 0, \quad r_n = \text{proj}_{R+}(r_n - \rho_n x_n) \quad (1.47)$$

où $R+$ représente un ensemble de valeurs positives.

En ce qui concerne le frottement, parmi les nombreux modèles existants, nous avons choisi le modèle de Coulomb, qui est le plus utilisé dans les problèmes de contact avec frottement sec. Dans le cas du contact-frottement isotrope, le modèle de Coulomb s'écrit :

$$\begin{cases} \|r_t\| < \mu r_n & \text{si } \|v_t\| = 0 \\ r_t = -\mu r_n \frac{v_t}{\|v_t\|} & \text{si } \|v_t\| \neq 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

avec μ le coefficient de frottement.

On peut également utiliser la forme équivalente :

$$\forall \rho_t > 0, \quad r_t = \text{proj}_C(r_t - \rho_t u_t) \quad (1.49)$$

où C est un ensemble qui représente l'intervalle $[-\mu r_n, \mu r_n]$ dans le cas bidimensionnel, ou le disque de centre 0 et de rayon $R = \mu r_n$ dans le cas tridimensionnel. On rappelle que u_t désigne la composante tangentielle du déplacement relatif, qui est aussi le glissement.

1.4.2 Algorithme local

De manière usuelle, on définit le cône de frottement isotrope de Coulomb pour chaque point en contact :

$$K_\mu = \{(r_n, r_t) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \|r_t\| \leq \mu r_n\} \quad (1.50)$$

À l'aide de la théorie du Matériau Standard Implicite, les conditions de contact unilatéral et la loi de frottement s'expriment par une seule inégalité variationnelle :

Trouver $(r_n, r_t) \in K_\mu$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall (r_n^*, r_t^*) \in K_\mu, (x_n - \mu \|v_t\|)(r_n^* - r_n) + v_t \cdot (r_t^* - r_t) &\leq 0 \\ \text{où } \exists \lambda > 0, -v_t &= \lambda \frac{r_t}{\|r_t\|} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Afin d'éviter des potentiels non différentiables qui apparaissent dans la représentation du contact, on peut utiliser la méthode du lagrangien augmenté. Cette méthode, appliquée à l'inégalité variationnelle, conduit à une équation implicite :

$$r = \text{proj}_{K_\mu}(r_n + \rho_n(x_n - \mu \|v_t\|), \quad r_t + \rho_t v_t) \quad (1.52)$$

où ρ_n et ρ_t sont des coefficients positifs qui dépendent de la matrice de flexibilité de contact.

Pour résoudre l'équation implicite, on utilise l'algorithme d'Uzawa (algorithme de gradient à pas fixe pour l'optimisation sous contraintes) qui conduit à une procédure itérative comportant les deux étapes suivantes :

— prédiction :

$$\begin{cases} \tau_n^{i+1} = \tau_n^i + \rho_n^i(x_n^i - \mu \|v_t^i\|) \\ \tau_t^{i+1} = \tau_t^i = \rho_t^i v_t^i \end{cases} \quad (1.53)$$

— correction :

$$(r_n^{i+1}, r_t^{i+1}) = \text{proj}_{K_\mu}(\tau_n^{i+1}, \tau_t^{i+1}) \quad (1.54)$$

contact avec adhérence ($\tau \in K_\mu$), non contact ($\tau \in K_\mu^*$) et contact avec glissement ($\tau \in \mathbb{R}^3 - (K_\mu \cup K_\mu^*)$), où K_μ^* est le cône dual de K_μ .

1.4.3 Algorithme global

Dans le contexte de la MEF, après discrétisation des solides en contact, on résout généralement un système d'équations d'équilibre au niveau global, obtenu par la méthode des résidus pondérés (exposée au paragraphe ??), de type :

$$\mathbf{R}^* = -\mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{reac}} = \mathbf{0} \quad (1.55)$$

où les vecteurs \mathbf{R}^* des résidus, \mathbf{F}_{int} des forces internes, \mathbf{F}_{ext} des forces extérieures et \mathbf{F}_{reac} des forces de contact et de frottement dans le repère global dépendent tous du vecteur des inconnues nodales de la structure \mathbf{q} .

Pour résoudre ce système d'équations non linéaires, on utilise une méthode itérative de type Newton-Raphson qui consiste à linéariser le système précédent en :

$$\mathbf{K}_T^i \mathbf{d}^{i+1} = -\mathbf{F}_{\text{int}}^i + \mathbf{F}_{\text{ext}}^i + \mathbf{F}_{\text{reac}}^i \quad (1.56)$$

$$\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i + \mathbf{d}^{i+1} \quad (1.57)$$

où \mathbf{K}_T^i est la matrice tangente de rigidité à l'itération i .

Insistons que le caractère fortement non-linéaire de ce système : en effet, celui-ci prend en compte des multiples non-linéarités mécaniques telles que les non-linéarités matérielles et les non-linéarités géométriques qui se manifestent lorsqu'apparaissent des grands déplacements ou des grandes déformations. De plus, les lois relatives au contact et au frottement sont exprimées par des inégalités, le potentiel du contact étant même non différentiable. Par conséquent, des difficultés numériques se manifestent à plusieurs niveaux au cours de :

- la résolution des équations non linéaires d'équilibre (niveau global) ;
- l'intégration des lois de comportement (niveau local) ;
- la résolution des inéquations de contact et de frottement couplées avec les équations d'équilibre (niveaux local et global).

1.5 Exemple : une toute première approche du contact avec CAST3M

Dans ce chapitre, nous présentons un petit exemple simple de contact unidirectionnel sans frottement sous CAST3M.

1.5.1 Contact sur une surface infiniment rigide

Dans ce premier exemple, nous proposons d'étudier un carré soumis sur sa face supérieure à un déplacement imposé et reposant, sur sa face inférieure, sur une surface infiniment rigide, comme illustré à la figure 1.3.

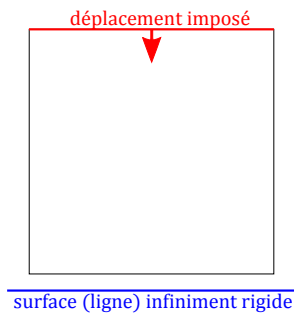


FIGURE 1.3 – Problème de contact

```

1 OPTION ECHO 0 ;
2 OPTION DIME 2 ELEM QUA4 MODE PLAN CONT;
3 *
4 * Donnees
5 long1=10.;
6 nlong1=7;
7 uy0=-0.5;
8 haut1=long1;
9 nhaut1=nlong1;
10 jeu1=0.0;
11 *
12 * droite sur laquelle le carre viendra buter :
13 k1 = (-1.*long1) 0.;
14 k2 = long1 0.;
15 l1 = DROI (nlong1-2) k2 k1;
16 *
17 * carre :
18 k3 = (-0.5*long1) jeu1;
19 k4 = (0.5*long1) jeu1;
20 l2 = DROI nlong1 k3 k4;
21 s1 = l2 TRAN nhaut1 (0. haut1);

```

On remarquera les choses suivantes :

- la ligne l_2 correspondant à la face inférieure du carré « repose », sans jeu, sur la ligne l_1 définissant la surface rigide sur laquelle le carré va venir buter (on aurait pu mettre un jeu initial non nul, mais ce n'est pas nécessaire) ;
- les orientations des lignes l_1 et l_2 sont inversées car les deux lignes en contact doivent se « tourner le dos » au sens des normales. Cela est obligatoire ;
- La surface de contact l_1 est modélisée en utilisant $nlong_1 - 2$ éléments pour le maillage, alors que le carré (ligne l_2) n'en a que $nlong_1$, afin que les maillages ne soient pas « compatibles » (i.e. que les nœuds ne tombent pas en face les uns des autres).

```

22 * Modele :
23 ModM1 = MODEL s1 MECANIQUE ELASTIQUE;
24 MatM1 = MATER ModM1 'YOUN' 1.E3 'NU' 0.3 ;
25 *
26 * CL en déplacements (Rigidites) :
27 * 1) il faut une condition selon UX, on prend le point 1(0,0)
28 k5 = s1 POIN PROC (0. jeu1);
29 CLk5 = BLOQ k5 UX;
30 * 2) ligne de contact : rigidites
31 Depl1 Rigid1 = IMPO l2 l1;
32 Rigid2 = BLOQ DEPL l1;
33 * 2) ligne sur laquelle on va imposer le déplacement
34 l3 = s1 'COTE' 3;
35 CLl3 = BLOQ l3 UY ;
36 CLl1(0,0)DEPI CLl3 UY0;
37 * Totalite des CL
38 CLO = CLk5 ET CLl3 ET Rigid1 ET Rigid2;

```

Nous sommes en élasticité linéaire... forces et déplacements sont proportionnels et il n'y a aucun problème de convergence.

La résolution se fait le plus simplement du monde.

```

39 * RESOLUTION
40 MR1=RIGID ModM1 MatM1;
41 dep1 = RESO (MR1 ET CLO) DCLl3;

```

Puis on fait un peu d'affichage des résultats... ce qui est illustré figure 1.4.

```

42 * Post-Traitement
43 *
44 * deformee:
45 defo0 = DEFO (s1 ET l1) dep1 0. 'BLEU' ;
46 defo1 = DEFO (s1 ET l1) dep1 1. 'ROUG' ;
47 TITR 'Maillages non deforme (bleu) et deforme (rouge)';
48 TRAC (defo0 ET defo1) ;
49 *
50 * Deplacement selon Uy
51 TITR 'Champ de déplacements.' ;
52 DeplY1 = EXCO Dep1 UY;
53 TRAC DeplY1 s1;
54 *TRAC DeplY1 defo1;
55 *
56 * Contraintes :
57 sig1 = SIGM ModM1 MatM1 Dep1;
58 TITR 'Champ de contraintes' ;
59 TRAC sig1 ModM1;
60 *
61 fin;

```

On pourra ensuite mettre jeu_1 a une valeur différente de zéro et refaire le calcul. On s'apercevra que cela fonctionne toujours. La visualisation de la déformée permettra de bien comprendre comment s'effectue le calcul (on rappelle que dans CAST3M, toutes les conditions aux limites sont introduites par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange : voir paragraphe ??).

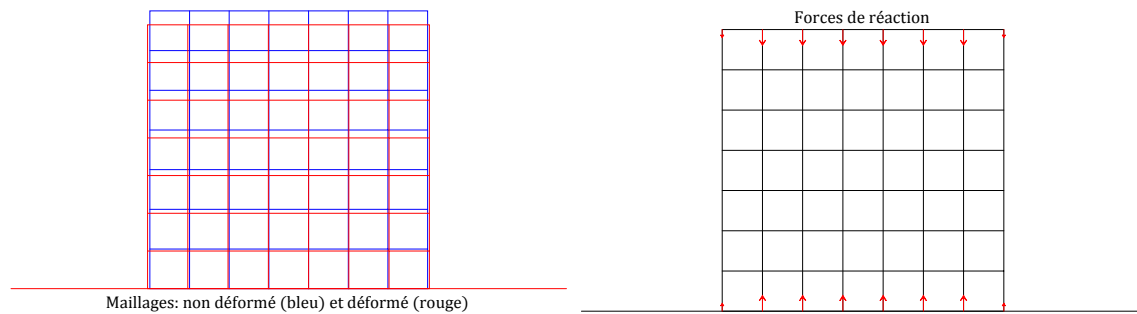


FIGURE 1.4 – a) déformée b) forces de réactions

1.5.2 Contact entre deux solides

On peut faire une remarque sur le calcul précédent : que se passe-t-il si la surface sur laquelle on s'appuie n'est plus infiniment rigide ?

On pourrait modéliser la partie inférieure et lui appliquer les forces de réactions qui ont été calculées précédemment.

Nous n'allons évidemment pas procéder ainsi et laisser CAST3M tout calculer pour nous...

```

1 OPTION ECHO 0 ;
2 OPTION DIME 2 ELEM QUA4 MODE PLAN CONT;
3 *
4 * Donnees
5 long1=10.;
6 nlong1=7;
7 uy0=-0.5;
8 haut1=long1;
9 nhaut1=nlong1;
10 jeu1=1.0;
11 *
12 * pave sur lequel le carre viendra buter :
13 k1 = (-1.*long1) 0.;
14 k2 = long1 0.;
15 l1 = DROI (2*nlong1-1) k2 k1;
16 s2 = l1 TRAN nhaut1 (0. (-1.0*haut1));
17 *
18 * carre
19 k3 = (-0.5*long1) jeu1;
20 k4 = (0.5*long1) jeu1;
21 l2 = DROI nlong1 k3 k4;
22 s1 = l2 TRAN nhaut1 (0. haut1);
23 trac (s1 et s2);
24 *
25 * Modele
26 ModM1 = MODEL s1 MECANIQUE ELASTIQUE;
27 MatM1 = MATER ModM1 'YOUN' 1.E3 'NU' 0.3 ;
28 ModM2 = MODEL s2 MECANIQUE ELASTIQUE;
29 MatM2 = MATER ModM2 'YOUN' 5.E3 'NU' 0.3 ;
30 *
31 * CL (Rigidites)
32 * 1) il faut une condition selon UX
33 k5 = s1 POIN PROC (0. jeu1);
34 CLk5 = BLOQ k5 UX;
35 * 2) ligne sur laquelle on impose le deplacement
36 l3 = s1 'COTE' 3;
37 CLl3 = BLOQ l3 UY ;
38 DCLl3 = DEPI CLl3 UY0;
39 * 3) encastrement sous la partie basse
40 l4 = s2 'COTE' 3;
41 CLl4 = BLOQ l4 DEPL;
42 * Totalite des CL
43 CLO = CLk5 ET CLl3 ET CLl4;
44 *
45 * RESOLUTION
46 Dep11 Rigid1 = IMPO l2 l1;
47 MR1=RIGID ModM1 MatM1;
48 MR2=RIGID ModM2 MatM2;
49 dep1 = RESO (MR1 ET MR2 ET CLO ET Rigid1) DCLl3;
50 *
51 * Post-Traitement
52 *
53 * deformee:
54 defo0 = DEFO (s1 ET s2) dep1 0. 'BLEU' ;

```

```

55 defo1 = DEFO (s1 ET s2) dep1 1. 'ROUG' ;
56 TITR 'Maillages non deforme (bleu) et deforme (rouge)' Comparaison des champs de contraintes :
57 TRAC (defo0 ET defo1) ;
58 *
59 TITR 'Champ de déplacements.' ;
60 Deply1 = EXCO Dep1 UY ;
61 TRAC Deply1 (s1 et s2) ;
62 *
64 Sig1 = SIGM (ModM1 ET ModM2) (MatM1 ET MatM2) Dep1 ;
65 TITR 'Champ de contraintes.' ;
66 TRAC sig1 (ModM1 ET ModM2) ;
67 *
68 fin ;

```

Cette fois-ci, nous avons mis jeu_1 a une valeur non nulle pour bien comprendre comment se fait la résolution de ce système numérique.

On obtient les résultats illustrés à la figure 1.5 pour la déformée et les forces de réactions et à la figure 1.6 pour les déplacements et contraintes.

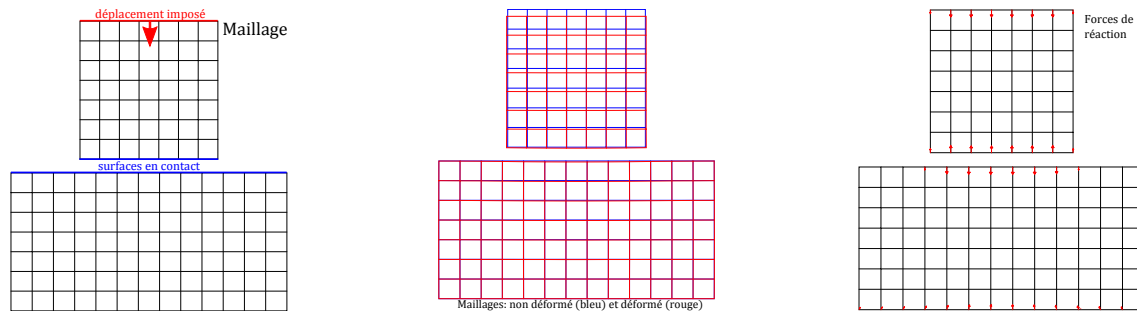


FIGURE 1.5 – a) maillage, b) déformée c) forces de réaction

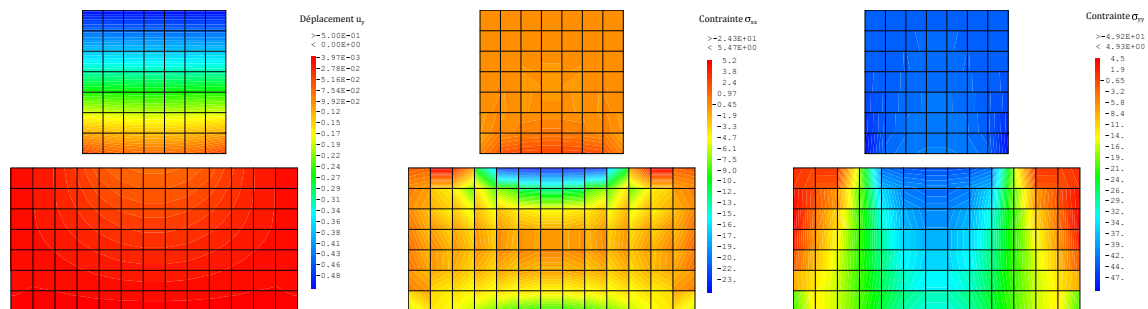


FIGURE 1.6 – a) déplacement u_y b) σ_{xx} et c) σ_{yy}

1.5.3 Résolution pas à pas

Les résolutions présentées ci-dessus étaient finalement de type classique, i.e. inversion d'un système comprenant les conditions aux limites et le chargement.

Cela fonctionnait particulièrement bien car nous étions en élasticité linéaire... mais que se passerait-il si le carré considéré avait un comportement non linéaire, en particulier s'il devait être le siège de déformations permanentes ?

On se doute aisément que le modèle rudimentaire ne fonctionnerait pas. C'est pourquoi nous allons le modifier afin d'introduire une résolution pas à pas, qui permet d'appliquer un chargement (ou un déplacement imposé) de manière progressive.

Nous ne présentons pas ici de comportement non linéaire pour les matériaux, cela se fait en TD. Toutefois, nous présentons le même calcul que précédemment, mais codé pour une résolution pas à pas.

Afin de définir le chargement dans le temps, nous commençons par construire la liste de réels $Ltemp_1$ qui contient les pas de temps, à savoir 0.0 et 1.0 (2 pas de temps suffisent, puisque nous restons sur une analyse élastique linéaire dans cet exemple).

À partir de cette discrétisation du temps (vraiment sommaire pour le coup), nous définissons l'objet evo_1 de type évolution pour chacun des pas de temps. evo_1 est donc une fonction du temps,

qui va nous servir à affecter le déplacement imposé : $CharU_1$ est de type chargement, nécessaire pour la résolution par PASAPAS. Avec l'option DIMP, on signifie qu'il s'agit d'un déplacement imposé. Ainsi $CharU_1$ contient l'évolution des déplacements imposés sur la condition DCL13 au cours du temps.

Les résultats sont présentés à la figure 1.4, après le listing.

```

1 OPTION ECHO 0 ;
2 OPTION DIME 2 ELEM QUA4 MODE PLAN CONT;
3 *
4 * Donnees
5 long1=10.;
6 nlong1=7;
7 uy0=-0.5;
8 haut1=long1;
9 nhaut1=nlong1;
10 jeu1=0.0;
11 *
12 * pave sur lequel le carre viendra buter :
13 k1 = (-1.*long1) 0.;
14 k2 = long1 0.;
15 l1 = DROI (2*nlong1-1) k2 k1;
16 s2 = l1 TRAN nhaut1 (0. (-1.0*haut1));
17 *
18 * carre
19 k3 = (-0.5*long1) jeu1;
20 k4 = (0.5*long1) jeu1;
21 l2 = DROI nlong1 k3 k4;
22 s1 = l2 TRAN nhaut1 (0. haut1);
23 trac (s1 et s2);
24 *
25 *
26 * Modele
27 ModM1 = MODEL s1 MECANIQUE ELASTIQUE;
28 MatM1 = MATER ModM1 'YOUN' 1.E3 'NU' 0.3 ;
29 ModM2 = MODEL s2 MECANIQUE ELASTIQUE;
30 MatM2 = MATER ModM2 'YOUN' 5.E3 'NU' 0.3 ;
31 *ModM1 = ModM1 ET ModM2;
32 *
33 * CL (Rigidites)
34 * 1) il faut une condition selon UX, on prend le point de
35 k5 = s1 POIN PROC (0. jeu1);
36 CLk5 = BLOQ k5 UX;
37 * 2) ligne sur laquelle on va imposer le déplacement
38 l3 = s1 'COTE' 3;
39 CLl3 = BLOQ l3 UY ;
40 DCLl3 = DEPI CLl3 UY0;
41 * 3) encastrement sous la partie basse
42 l4 = s2 'COTE' 3;
43 CLl4 = BLOQ l4 DEPL;
44 * 4) ligne de contact :
45 Depl1 Rigid1 = IMPO l2 l1;
46 *
47 * Totalite des CL
48 CLO = CLk5 ET CLl3 ET CLl4 ET Rigid1;
49 *
50 * Chargement
51 Ltemps1 = PROG 0. 1.;
52 evo1 = EVOL 'MANU' 'TEMPS' Ltemps1 (PROG 0. 1.) ;
53 CharU1 = CHAR DIMP DCLl3 evo1 ;
54 Char0 = CharU1 ;
55 *
56 * RESOLUTION
57 *
58 * Construction de la table PASAPAS :
59 TAB1 = TABL;
60 TAB1.'TEMPS_CALCULES' = Ltemps1;
61 TAB1.'MODELE' = (ModM1 ET ModM2);
62 TAB1.'CARACTERISTIQUES' = (MatM1 ET MatM2);
63 TAB1.'BLOCAGES_MECANIQUES' = CLO;
64 TAB1.'CHARGEMENT' = Char0;
65 *
66 * Resolution :
67 TAB2 = PASAPAS TAB1 ;
68 *
69 * Post-Traitement
70 *
71 dep1 = TAB2 . 'DEPLACEMENTS' . 1;
72 *
73 * deformee:
74 defo0 = DEFO (s1 ET s2) dep1 0. 'BLEU' ;
75 defo1 = DEFO (s1 ET s2) dep1 1. 'ROUG' ;
76 TITR 'Maillages non deforme (bleu) et deforme (rouge).';
77 TRAC (defo0 ET defo1) ;
78 *
79 TITR 'Champ de deplacements.' ;
80 DeplY1 = EXCO Dep1 UY;
81 TRAC (DeplY1 (s1 et s2));
82 *
83 * Comparaison des champs de contraintes :
84 sig1 = TAB2 . 'CONSTRAINTES' . 1 ;
85 TITR 'Champ de contraintes.' ;
86 TRAC sig1 (ModM1 ET ModM2);
87 *
88 * Visualisations des reactions :
89 reac1 = TAB2 . 'REACTIONS' . 1 ;
90 vr1 = VECT reac1 0.8E-2 'FX' 'FY' 'ROUG' ;
91 TITR 'Forces de reaction.' ;
92 TRAC vr1 (s1 ET s2) ;
93 *
94 fin;

```

On obtient les mêmes résultats que ceux déjà présentés (voir figure 1.5 et figure 1.6).

Nous pouvons mentionner également que ce type de calcul permet de calculer la géométrie de pièces réalisées en thermocompression. Considérons un matelas de matière souple placé entre le plateau supérieur d'une presse et un outil comportant un logement, comme illustré à la figure 1.7a. Une fois que le plateau de presse est descendu, on obtient la pièce en forme donnée à la figure 1.7b.

À partir des listings précédents, il est aisé d'obtenir les résultats de la figure 1.7b... et nous vous invitons à le faire.

Une fois ce premier calcul réalisé (et donc pleins de fierté et de confiance en nous), nous vous proposons d'utiliser un matelas de matière plus épais, vraiment plus épais. Le but est que lors du process, lorsque le plateau de la presse descend (situation réelle ou simulée), la matière vienne suffisamment remplir la cavité du moule pour qu'il y ait contact entre la pièce déformée et le fond de la cavité.

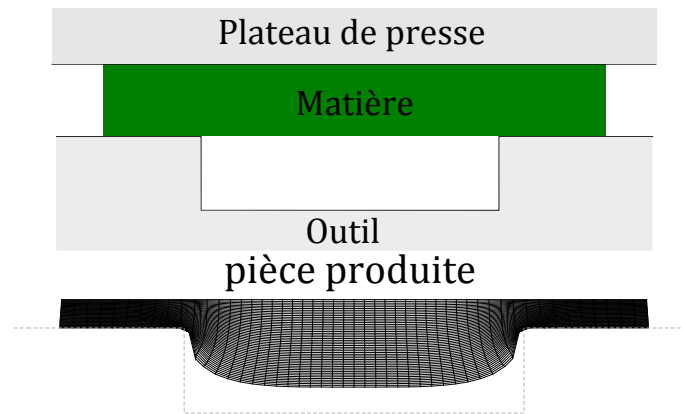


FIGURE 1.7 – Thermocompression : a) problème, b) forme de la pièce après production

Nous allons alors constater que le contact n'est pris en compte que dans la partie supérieure du moule, mais pas sur les côtés de la cavité, ni au fond de celle-ci...

En TP, nous travaillerons à comprendre pourquoi (qu'est-ce que le code de calcul a compris de ce que nous lui avons proposé comme modélisation ?) et à réaliser un modèle correspondant à ce que nous souhaitons.