

**Vincent Manet**

# **Méthode des éléments finis**

*Vulgarisation des aspects mathématiques  
et illustration de la méthode*

Vincent Manet — 2013 (Ceci est la version « livre » de ce document)

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France :

- paternité ;
- pas d'utilisation commerciale ;
- partage des conditions initiales à l'identique ;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



# Introduction

Dans ce (de moins en moins court) document, plutôt à destination d'ingénieurs mécaniciens connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons essayer de faire une présentation un peu plus théorique que ce qui leur est généralement proposé (et qui est quand même souvent de type « preuve par les mains », ce qui occulte trop de points).

Nous ne ferons appel qu'à des notions mathématiques de bases généralement déjà vues pour la plupart en taupe (ou en tout début de cycle d'ingé)... bien que des compléments que l'on peut qualifier d'élémentaires nous aient été demandés et aient été inclus.

Nous espérons, grâce à cette présentation théorique montrer toute la souplesse et la puissance de la méthode, afin de permettre au lecteur d'envisager d'autres simulations que celles qu'il a pu déjà réaliser par le passé.

## But du document

Le but initial était de *présenter brièvement la théorie mathématique* derrière les éléments finis afin que les ingénieurs utilisant cette méthode puisse en envisager toutes les applications, ainsi que de *couvrir les aspects qui, selon nous, devraient être connus de tout ingénieur mécanicien impliqué ou intéressé par le calcul numérique.*

Toutefois, il s'envisage comme support de référence à plusieurs cours, cours qui ne portent pas sur tous les aspects traités dans ce document, et pendant lesquels les aspects pratiques sont plus développés (avec mise en situation sur machine).

Même si nous avons voulu rester le plus succinct possible, l'introduction de notions de proche en proche a conduit à un document fait aujourd'hui une certaine taille (par exemple, nous avons besoins des espaces de Sobolev, mais comment les introduire sans parler des espaces de Lebesgue, mais comment les introduire sans parler...).

Aussi le document a-t-il finalement été découpé en plusieurs parties : un survol des notions mathématiques, puis le traitement du problème continu constituent l'ossature théorique nécessaire à asseoir la MEF sur un socle solide. La discrétisation par éléments finis à proprement parler n'est abordé qu'ensuite, et d'ailleurs un seul chapitre suffirait à en faire le tour... sauf à entrer plus dans le détail concernant « ce qui fâche » : homogénéisation, non linéarité, dynamique, ce qui est fait dans des chapitres séparés.

Enfin, d'autres méthodes sont abordées car également très employées aujourd'hui. Aussi est-il indispensable selon nous d'en avoir entendu parlé et d'en connaître les principales notions (BEM, FEEC...).

En annexes, se trouve un petit fourre-tout comprenant des choses censées être maîtrisées depuis la taupe (mais qui parfois nous sont demandées) et les compléments qui alourdiraient encore les propos précédents.

Certaines notions (essentiellement de topologie) ne sont pas présentées dans ce document. Il nous a semblé que le lecteur devait avoir quelques souvenirs de ce qu'est un ouvert, un fermé, l'adhérence, la densité... Par ailleurs, leur nom peut être suffisamment évocateur pour se passer d'une définition formelle dans le contexte de ce document.

Attention, ce document n'est pas un document de mathématiques, il ne contient d'ailleurs aucune preuve. C'est, dans ces deux premières parties, un document de vulgarisation de notions mathématiques nécessaires à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Nous avons voulu réaliser un survol des notions importantes, mais malgré tout, afin de ne pas être parfois trop laconique, nous avons un peu débordé.

En fin de document, un petit index des noms propres permettra au lecteur de replacer les divers développements mentionnés dans l'histoire... Il se peut qu'il subsistent quelques erreurs, notamment au niveau des nationalités mentionnées, car il n'est pas toujours aisé de déterminer rapidement cette information (et nous ne connaissons pas toutes les biographies des personnes citées).

*Ce document a été réalisé très rapidement, et de manière extrêmement hachée. Il comporte forcément encore beaucoup de fautes : merci de m'en faire part.*

## Démarche de l'ingénieur numéricien

En préambule à ce document, nous tenions à synthétiser la démarche complète de l'ingénieur numéricien :

- Modélisation / mise en équations – Construction du problème continu (système d'EDP).
- Analyse mathématique du problème posé – Existence, unicité, propriétés des solutions.
- Conception d'une méthode numérique – Construction d'un problème discrétisé.
- Analyse numérique – Questions de stabilité, convergence, précision.
- Algorithmique – Choix de méthodes de résolution en dimension finie.
- Mise en œuvre sur ordinateur – Programmation.
- Pre et Post Traitement (maillages / visualisation) – Interpolation, extrapolation, outils de la CAO.

Tous ces points ne seront évidemment pas abordés dans ce document !

### Remerciements :

Nous n'avions pas prévu de réaliser une deuxième version aussi rapidement. Celle-ci existe suite aux sollicitations de Mathias Legrand. C'est lui qui a développé les macros nécessaires à l'amélioration très très nette de la qualité typographique (environnements pour les notes historiques, les théorèmes, lemmes...).

C'est également pourquoi coexistent aujourd'hui deux versions (mais issues du même code source) : l'un que nous appelons « version cours » (plus en accord avec ce que nous proposons en cours), et l'autre « version livre », plus proche d'un ouvrage.

# Table des matières









# Introduction

En introduction à cette partie, il nous semblait important d'en exposer sa structure, car elle peut sembler un peu décousue à la simple lecture de la table des matières.

Après les pré-requis exposés dans les deux premières parties, la partie III va s'ouvrir « tout naturellement » sur une présentation générale de la méthode des éléments finis au chapitre ??.

Immédiatement après, compte tenu du public visé, le chapitre ?? essayera de mettre en avant les spécificités et surtout la complexité de la mécanique comme champ d'application de la méthode des éléments finis.

Cette mise en garde, au regard de l'expérience, nous semble importante : on a tendance souvent à considérer que la mécanique est quelque chose de très bien maîtrisé, et ce n'est pas le cas. Bien des sujets restent pointus, voire ouverts. Il convient donc de rester prudent, surtout pour ceux ayant une expérience de calcul importante qui les porte parfois à sous estimer les difficultés.

Le chapitre ??, qui fait suite logiquement en terme de présentation de la méthode des éléments finis, au chapitre ??, est souvent le mieux maîtrisé par le public d'ingénieurs, au moins concernant les éléments de Lagrange.

Nous l'avons complété de remarques sur les modèles à plusieurs champs (qui peut faire pour partie écho au chapitre ??).

Encore une fois, pour le public visé, c'est surtout le paragraphe ?? sur la validation pratique des éléments finis qui aura sans doute le plus de valeur ajoutée. Le contenu de ce paragraphe fait souvent partie des choses oubliées.

Comme nous en serons sur des choses un peu oubliées, nous en profiterons au chapitre ?? pour continuer dans le même sillon et rappeler quelques méthodes d'amélioration de la performance du calcul. Nous y présentons des choses qui sont utilisées plus ou moins fréquemment par notre public.

Seuls les paragraphes ?? et ?? (sur les méthodes de réanalyse et aux dérivées d'ordre élevé) sont généralement moins bien connus. Nous avons voulu les introduire ici plutôt qu'au chapitre ?? car ils sont vraiment en lien avec les préoccupations directes de notre public.

Pour continuer sur les choses pouvant avoir un réel intérêt pratique pour le public d'ingénieurs mécaniciens (ou acousticiens), nous aborderons au chapitre suivant ?? les méthodes d'homogénéisation.

Si les méthodes les plus « physiques » sont bien connues, l'approche mathématique (généralisante) est bien souvent quasi totalement inconnue.

À ce niveau du document, il nous semble que nous aurons parcouru bon nombre des applications typiques de la méthode des éléments finis, surtout dans le cadre de la mécanique... mais uniquement sous l'angle statique !

Il sera donc temps d'aborder « le temps », i.e. les problèmes non stationnaires, au chapitre ??. La propagation des ondes, quant à elle, ne sera traitée qu'au chapitre ??. C'est d'ailleurs dans ce chapitre que seront abordés également les modes propres, dont nous n'aurons pas parlé jusqu'alors (à quelques exception près lors de remarques diverses et variées... mais rien de sérieux).

Dès lors, on pourra considérer qu'une présentation assez complète de la méthode des éléments finis a été faite. Toutefois, ce qui était encore de l'ordre de la recherche il y a une décennie fait aujourd'hui partie des phénomènes que notre public doit prendre en compte de plus en plus souvent.

Ces phénomènes, un peu plus complexes, un peu plus exotiques, sont souvent liés à ce que l'on appelle la ou plutôt les non linéarités. C'est ce qui sera abordé au chapitre ??.

Parmi toutes les non linéarités, c'est celle des lois de comportement qu'il nous est demandé d'exposer en priorité. Les problèmes de contact ou de grands déplacements, qui seront abordés dans ce chapitre, nous sont bien moins demandés car souvent traités par des personnes très au fait des méthodes et même souvent en lien avec la recherche dans le domaine.

Enfin, un chapitre sera dédié au traitement de la modélisation de la rupture en mécanique au chapitre ??. Il s'agit néanmoins d'une affaire de spécialistes, et nous ne ferons qu'aborder le sujet.

Le chapitre ?? permet de mettre l'accent sur le fait que même si la méthode des éléments finis est une méthode extrêmement générale, performante et répandue, elle n'est qu'une méthode numérique parmi une multitude d'autres méthodes.

Ce chapitre n'a pas vocation bien évidemment à approfondir aucune des méthodes abordées, mais uniquement à fournir un petit complément culturel qui nous semblait indispensable dans le monde actuel.

Le chapitre ?? clôt cette partie sur un petit rappel lié aux singularités, juste comme une petite piqure de rappel sur des problèmes dont les ingénieurs pratiquant le calcul numérique restent assez conscients. Il nous a semblé que passer les singularités sous silence pouvait laisser à penser que ce problème n'était peut-être pas si important, ce qui n'est pas le cas bien évidemment.

Enfin, à notre grand regret (mais ce document est déjà suffisamment, voire même trop, volumineux) certaines méthodes n'ont pas été abordées et feront l'objet de fascicules séparés.

Nous pensons par exemple en acoustique aux méthodes de tir de rayons, les méthodes énergétiques simplifiées, les « Wave based methods »... i.e. les méthodes aussi bien temporelles que spectrales.

En mécanique, nous pensons notamment à toutes les méthodes probabilistes de la « mécanique aléatoire », incluant l'approche spectrale et reliées au calcul des l'indice de fiabilité d'une structure.

# Chapitre 1

## La méthode des éléments finis

Résumé — Une fois le travail précédent accompli, i.e. une fois que l'on dispose d'une formulation faible, « il n'y a plus qu'à » calculer la solution ! La méthode des éléments finis est l'un des outils numérique développé pour cela.

La méthode des éléments finis se propose de mettre en place, sur la base de formulations faibles, un algorithme discret (discrétisation) permettant de rechercher une solution approchée d'un problème aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du compact.

Il s'agit donc de répondre aux questions d'existence et d'unicité de la solution, de stabilité, convergence des méthodes numériques, ainsi que d'apprécier l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée (indicateurs et estimateurs d'erreur, à priori et à posteriori).

### 1.1 Introduction

Les chapitres des parties précédentes ont eu pour but de nous permettre de décrire un problème physique à partir d'EDP, mais à aucun moment nous n'avons encore parlé de la manière de résoudre ces équations (que ce soit la formulation forte ou la faible).

Ce sera le but de ce chapitre, dans lequel la mise en œuvre de la méthode des éléments finis va être exposée.

Nous avons vu dans la partie précédente, comment passer d'une formulation forte à une formulation faible. Dans de nombreux cas, nous avons montré qu'il y a équivalence (existence et unicité de la solution) entre l'étude des deux formulations.

Il faut toutefois bien garder en tête que dans certains cas, l'équivalence entre les deux formulations n'est pas évidente.

Une condition qui n'a pas été vraiment évoquée jusque là est le cas où le bord du domaine n'est pas suffisamment régulier, par exemple s'il possède des points singuliers (par exemple point d'inflexion ou de rebroussement, ou dans le cas des fissures en MMC).

Cela peut également se produire si l'on ne peut pas assurer que la fonction  $f$  (celle agissant dans tout le domaine) n'est pas suffisamment dérivable. Comme en général on suppose dans les problèmes physiques que la solution est  $C^\infty$ , on n'est pas confronté à ce genre de problème.

L'idée de la méthode des éléments finis est de décomposer (on dit discrétiser) le domaine  $\Omega$  en un certain nombre de sous-domaines (les éléments). Les éléments recouvrent l'intégralité du domaine (de la frontière pour les éléments de frontière qui est une autre méthode) et sans chevauchement entre eux (les éléments peuvent se chevaucher dans la méthode des volumes finis). De plus, on va chercher la fonction solution  $u$  comme étant interpolée par des « bouts » de solutions définis sur chaque élément.

Le problème étant interpolé sur les éléments, on se doute que le nombre d'éléments va jouer sur la qualité de cette approximation de la solution. On se doute également que, comme on résout

un problème comportant des dérivées, c'est plutôt dans les endroits où la solution va varier vite qu'il sera nécessaire de « resserrer » le maillage.

## Histoire

C'est l'ingénieur américain Ray William Clough qui, semble-t-il, a utilisé le terme de méthode des éléments finis (Finite Element Method) le premier dans un article de 1960. Dans le titre d'un autre de ses articles de 1956 apparaissait déjà le mot rigidité (Stiffness).

Si on veut replacer très brièvement cela dans un contexte plus global, on peut dire que l'analyse des structures est née vers 1850.

La RdM, recourant au calcul manuel, était développée par Maxwell, Castigliano, Mohr.

Le concept d'éléments finis est né vers 1940, avec des figures comme Newmark, Hrennikoff (1941), Mc Henry, Courant (1942)...

Son réel essor ne commence toutefois que dans les années 60 avec le développement du calcul numérique sur ordinateur.

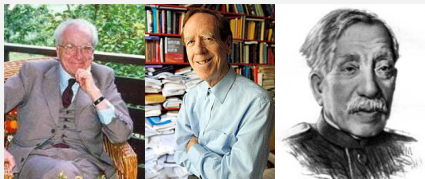
La méthode des éléments finis (MEF) prend ses origines dans le besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse de structures en ingénierie civile et aéronautique. Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942). Bien qu'utilisant des approches différentes, ces deux pionniers partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discrétisation par maillage du domaine continu en sous-domaines discrets, que l'on appelle éléments. C'est Olgierd Zienkiewicz de l'Imperial College qui synthétisa ces deux méthodes en ce que l'on peut appeler la méthode des éléments finis et qui fit la première formalisation mathématique de la méthode.



Clough

Courant

Zienkiewicz



Argyris

Strang

Galerkin

Dans ses travaux, Hrennikoff discrétise le domaine en utilisant une analogie avec les treillis, tandis que l'approche de Courant divise le domaine en sous-régions finies triangulaires pour résoudre les EDP elliptiques du second ordre issues du problème de la torsion d'un cylindre. On peut dire que la contribution de Courant était une évolution s'appuyant sur un vaste corpus de résultats antérieurs pour les EDP développés par Rayleigh, Ritz et Galerkin.

Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu de années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough dans le 1960 pour l'utilisation dans le génie civil.

À la fin des années 50, les concepts clés de matrice de rigidité et d'assemblage d'éléments existaient quasiment sous la forme actuelle. La NASA publia une demande de propositions pour le développement du logiciel d'éléments finis NASTRAN en 1965.

La base mathématique rigoureuse de la méthode des éléments finis a été consolidée en 1973 avec la publication de Strang et Fix de *An Analysis of The Finite Element Method*. Elle a depuis été intégrée comme une branche des mathématiques appliquées à la modélisation numérique des systèmes physiques dans une large variété de disciplines.

On veillera également à ce que les éléments ne soient pas trop distordus. Des critères dits « de forme » existent. Néanmoins, dans certains cas il est possible de violer allègrement ces critères tout en obtenant une très bonne approximation de la solution.

Bien que la méthode des éléments finis soit théoriquement généralisable à toutes les dimensions d'espace et à tous les ordres de dérivation, dans la pratique, l'augmentation de ces paramètres accroît de manière dramatique la difficulté et on se contente de résoudre des problèmes limités à trois dimensions en espace et deux ordres de dérivation.

Par exemple, un problème à trois dimensions d'espace et une dimension de temps, qui pourrait être discrétisé par une formulation à quatre dimensions (les éléments finis espace-temps existent), sera traité par une discrétisation EF à trois dimensions d'espace couplé à un schéma en différences finies en temps.

Pour des problèmes avec des ordres de dérivations supérieurs (des techniques dites d'ordres élevés existent), comme par exemple en statique des poutres où l'on a une dérivation partielle d'ordre 4, on introduit des variables supplémentaires afin de diminuer les ordres des dérivées (déformations, contraintes... cela a été évoqué en parlant du « choix des variables » en mécanique, nous détaillerons un peu plus loin la formulation EF de ces formulations mixtes).

## 1.2 Problèmes de la modélisation « réelle »

Pour faire suite aux dernières remarques faites au paragraphe précédent, il faut se rendre à l'évidence que les équations qui modélisent les principales théories de la physique ont été présentées (et développées) dans un cadre idéalisé. Dans les problèmes réels, il est souvent difficile de rester dans ce cadre à cause de nombreuses difficultés telles que les problèmes géométriques, d'échelle et du couplage de différents modèles.

Toutefois, cela ne signifie pas qu'il est alors impossible de simuler le problème, mais seulement qu'il est nécessaire d'ajouter encore un peu plus d'intelligence et d'astuce. En effet, ces difficultés peuvent souvent être découplées dans un calcul numérique par des algorithmes adéquats et l'on se ramène alors à la résolution itérée de problèmes standard (d'où la nécessité de disposer de méthodes sûres et performantes pour calculer des solutions numériques de ces problèmes standard).

Nous allons présenter quelques exemples de problèmes pouvant survenir dans une modélisation, sachant qu'un certain nombre seront traités dans des chapitres ultérieurs (mais pas tous).

### 1.2.1 Problèmes géométriques

Jusqu'à présent, nous avons supposé que le domaine  $\Omega$  dans lequel le problème était considéré était fixe. Or, dans de nombreux problèmes ce domaine est variable, on parle de problèmes à surface libre, dont voici quelques exemples :

- Le problème le plus évident pour le lecteur, et qui a déjà été évoqué, est celui de la grande déformation d'un solide.
- L'étude des mouvements d'un liquide, notamment les vagues ou le mouvement de l'eau dans un réservoir. Quand la variation de la forme du domaine n'est pas trop grande on peut définir le domaine inconnu comme l'image d'un domaine fixe par une certaine fonction. Cette fonction devient alors une inconnue du problème qui se ramène à une équation plus complexe que l'équation initiale mais sur un domaine fixe. Mais, parfois, le domaine peut être amené à se fragmenter comme dans le cas de la formation de gouttes...
- La fusion de la glace dans l'eau : la frontière entre la glace et l'eau est alors une inconnue du problème.

### 1.2.2 Problèmes d'échelle

La formulation d'un problème peut dépendre de l'échelle à laquelle on regarde ce problème, comme cela a été mentionné précédemment. Mais il se peut également que différentes échelles interagissent...

Quelques problèmes classiques d'échelle sont :

- Nous avons déjà évoqué un peu cela en mécanique des fluides : dans l'écoulement d'un fluide la turbulence est un phénomène qui fait apparaître des mouvements à très petite échelle. La complexité de ces mouvements rend nécessaire, dans un calcul numérique, le remplacement des valeurs exactes des champs inconnus par leur moyenne, en un sens à préciser. Cela conduit à des modèles de turbulence qui se différencient par les hypothèses supplémentaires qui sont faites.
- Dans un champ plus proche des considérations du lecteur, on pensera évidemment aux ondes. Une excitation à très haute fréquence crée une onde de longueur très petite. Or une

longueur d'onde très petite ne peut pas être prise en compte dans un calcul numérique à grande échelle. La prise en compte de ce phénomène dans l'équation des ondes conduit à des modèles asymptotiques dans lesquels l'étude des ondes se ramène à la théorie de l'optique géométrique plus ou moins enrichie pour tenir compte de phénomènes comme la diffraction. Mais si la longueur d'onde est proche des longueurs des variations géométriques du bord du domaine d'étude il faut revenir à l'équation des ondes pour étudier l'effet de ces variations géométriques. On peut donc être amené à coupler l'optique géométrique et une étude directe de l'équation des ondes.

- Un autre champ lui-aussi déjà mentionné est celui des hétérogénéités d'un milieu continu, qui, quand elles sont à très petite échelle, peuvent empêcher la prise en compte exacte de celles-ci, au moins dans une approximation numérique.

C'est le cas des solides formés de matériaux composites, des fluides comme l'air chargé de gouttelettes d'eau ou de l'eau contenant des bulles de vapeur. On est conduit à définir des modèles limites dits homogénéisés dans lesquels on remplace les grandeurs usuelles (vitesse, masse volumique), qui ont une forte variation locale, par leur valeur moyenne.

Les équations obtenues peuvent avoir la même forme que les équations initiales comme dans le cas de la théorie élastique des matériaux composites (le seul problème est de calculer les propriétés matérielles du matériau homogénéisé, mais nous présenterons cela plus loin) ou bien, quand les paramètres des hétérogénéités (la densité de bulles par exemple) dépendent de la solution, ces paramètres s'ajoutent aux grandeurs inconnues initiales et le nombre d'équations peut donc s'accroître.

### 1.2.3 Couplage géométrique

De nombreux problèmes impliquent la prise en compte de plusieurs modèles selon le point considéré.

C'est le cas de l'interaction d'un fluide et d'une structure (l'écoulement d'un fluide par exemple peut faire vibrer une structure qui en retour fait vibrer le fluide). Une des difficultés vient de ce que les inconnues utilisées dans la modélisation de chacun des milieux sont de natures différentes : les déplacements dans le solide et les vitesses dans le fluide.

Comme illustration de ce couplage, nous proposons le cas d'un poisson, issu de l'intéressante étude de San Martín et al. Le déplacement d'un poisson dans son milieu, illustré à la figure ??a, n'est pas imposé mais résulte de l'interaction entre la déformation propre du poisson (donnée à la figure ??b, et qui elle est imposée) et le fluide.

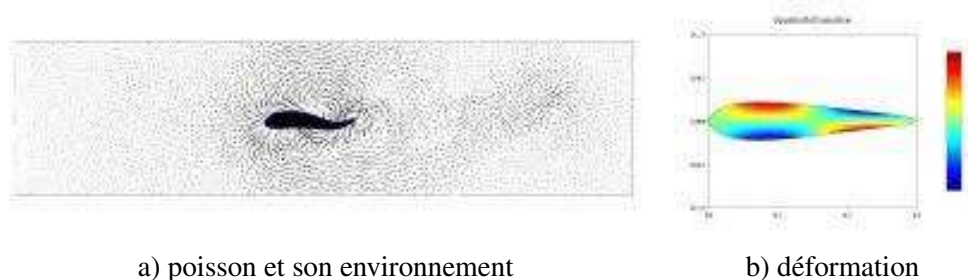


FIGURE 1.1 – Interaction fluide/structure : déplacement d'un poisson

On retrouve aussi les problèmes d'interaction fluide/structure dans la modélisation de la circulation sanguine : le sang est un liquide très faiblement compressible, alors que les vaisseaux sanguins sont déformables et susceptibles de grands déplacements

Le contact entre deux solides peut également être placé dans cette catégorie.



### 1.2.4 Couplage intrinsèque

L'étude de la convection naturelle d'un fluide, pour la météorologie par exemple, se modélise par le couplage des équations de la dynamique des fluides d'une part, de la diffusion et du transport de la chaleur d'autre part : ce sont en effet les variations de température qui créent les variations de densité responsables du mouvement de l'air, mais ce mouvement lui-même entraîne un transport de chaleur responsable de variations de la température. Même si l'on considère un modèle simplifié linéarisé pour modéliser l'écoulement du fluide, le couplage fait apparaître une non linéarité.

L'étude des plasmas oblige à coupler les équations de dynamiques des fluides et les équations de Maxwell puisque ce sont les forces électromagnétiques qui font se mouvoir les particules chargées mais leur mouvement est lui même la cause d'un champ électromagnétique induit.

## 1.3 Principe de la méthode : résolution d'un système matriciel

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$  ou  $3$  en pratique), de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  et sur lequel on cherche à résoudre une EDP munie de conditions aux limites.

Ce problème, mis sous forme variationnelle, est :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \quad (1.1)$$

où  $V$  est un espace de Hilbert. On supposera également que l'équation de départ a de bonnes propriétés, i.e. que l'on est dans les hypothèses vues précédemment permettant d'affirmer que le problème admet une solution unique  $u$ .

La méthode des éléments finis se propose de discrétiser le problème considéré. La discrétisation intervient à plusieurs niveaux :

- discrétisation : il est nécessaire de disposer d'une description du domaine  $\Omega$  sur lequel on souhaite travailler. Cette description va se faire en l'approchant par un maillage, qui sera constitué d'éléments.
- interpolation : il est ensuite nécessaire de disposer d'une manière de représenter le ou les champs inconnus. Ce que se propose de faire la MEF, c'est d'approcher ces champs par des fonctions plus simples (disons polynomiales de degré un ou deux) définies sur chacun des éléments du maillage (le champ est approché par des bouts de fonctions qui, elles, ne sont définies chacune que sur un seul élément).
- approximation : selon le type d'approximation, on remplace non seulement l'espace  $V$  (qui correspond, selon les notations utilisées au chapitre sur la formulation faible, aux espaces  $H, V, M$  ou même  $H \times M$ ), de dimension infinie, par des approximations  $V_h$  de dimension finie, mais parfois également les formes bilinéaires et linéaires définissant le problème (nous expliquerons plus tard les motivations).

De manière classique, on notera  $\mathcal{T}_h$  le maillage de  $\Omega$  considéré.

Il est caractérisé par les dimensions géométriques représentatives que sont le diamètre maximum des éléments,  $h$  et le facteur de forme du maillage,  $\sigma$  (qui caractérise l'aplatissement du maillage).

Le maillage est constitué d'éléments, généralement notés  $K$ . On note  $h_K$  le diamètre de l'élément  $K$ , i.e. le maximum des distances (euclidiennes) entre deux points de  $K$ , et  $\rho_K$  la rondeur de l'élément  $K$ , i.e. le diamètre maximum des sphères incluses dans  $K$ .

On a donc évidemment  $h_K \leq h, \forall K \in \mathcal{T}_h$  puisque par définition  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ , et  $\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in \mathcal{T}_h$ .

On notera  $\hat{K}$  l'élément de référence correspondant à l'élément  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$ , et d'une manière générale on ajoutera ce « chapeau » ^ sur toute quantité relative à un élément de référence (voir plus loin le chapitre sur la formulation pratique des EF).

Les types d'approximation du problème (??), qui seront détaillés un peu plus loin, sont : En fait, on expose généralement les méthodes à partir de la méthode dite conforme selon le tableau ci-dessus, alors qu'en pratique on travaille souvent dans le second cas, i.e. approximation conforme

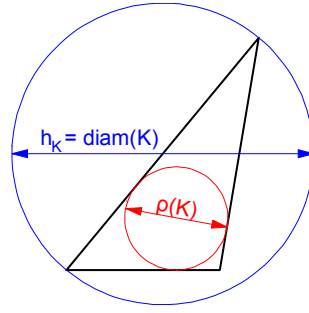


FIGURE 1.2 – Dimensions géométriques caractéristiques d'un élément.

type d'approximation	espaces	formes	problème $(P) \Rightarrow$ problème approché $(P_h)$
conforme	$V_h \subset V$	inchangées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a(u_h, v_h) = b(v_h), \forall v_h \in V_h$
non conforme	$V_h \subset V$	approchées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a_h(u_h, v_h) = b_h(v_h), \forall v_h \in V_h$
non conforme	$V_h \not\subset V$	approchées	Trouver $u_h \in V_h$ tq $a_h(u_h, v_h) = b_h(v_h), \forall v_h \in V_h$

TABLE 1.1 – Relations approximation et espaces

en espace (i.e.  $V_h \subset V$ ) mais non conforme concernant les formes, car au moins les intégrations sont réalisées numériquement.

Toujours est-il que dans tous les cas, l'espace  $V$  est remplacé par un espace  $V_h$ , de dimension finie  $N_h$ , dont  $(e_1, \dots, e_{N_h})$  en est une base. L'approximation  $u_h$  de  $u$  dans cette base s'écrit :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} q_i e_i \quad (1.2)$$

Le problème de la méthode des éléments finis devient donc :

$$\text{Trouver } q_1, \dots, q_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, v_h) = f_h(v_h) \quad , \forall v_h \in V_h \quad (1.3)$$

soit, en exploitant les linéarités de  $a_h(\cdot, \cdot)$  et  $f_h(\cdot)$  et en décomposant  $v_h$  :

$$\text{Trouver } q_1, \dots, q_{N_h} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{N_h} q_i a_h(e_i, e_j) = f_h(e_j) \quad , \forall j = 1, \dots, N_h \quad (1.4)$$

Il s'agit donc de résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} a_h(e_1, e_1) & \dots & a_h(e_{N_h}, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_h(e_1, e_{N_h}) & \dots & a_h(e_{N_h}, e_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h(e_1) \\ \vdots \\ f_h(e_{N_h}) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

que l'on note (dans la tradition mécanicienne) :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad \text{ou encore} \quad (\mathbf{K})(\mathbf{q}) = (\mathbf{F}) \quad (1.6)$$

Telle que formulée, la matrice  $\mathbf{K}$  semble pleine a priori. L'astuce consiste à choisir des fonctions de base  $e_i$  dont le support sera petit, i.e. chaque fonction  $e_i$  sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes  $a(e_i, e_j)$  seront le plus souvent nuls et la matrice  $\mathbf{A}$  sera creuse. De plus, on ordonnera les  $e_i$  de sorte que  $\mathbf{K}$  soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible. Il existe un moyen avantageux de stocker une matrice creuse qui s'appelle le stockage en ligne de ciel ou skyline.

Les difficultés majeures en pratique sont de trouver les  $e_i$  et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de  $\mathbf{K}$ . Indiquons d'ores et déjà que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales qui seront détaillées au chapitre sur la formulation pratique des EF :



**Principe d'unisolvance** On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de façon univoque toute fonction de  $V_h$ . Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points. Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.

**Définition des  $e_i$**  On définira les fonctions de base par  $e_i = 1$  sur le  $i$ ème ddl, et  $e_i = 0$  sur les autres ddl. La manipulation des  $e_i$  sera alors simplifiée, et les  $e_i$  auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

**Notion de « famille affine d'éléments »** Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille de référence, par un simple changement de variable.

Notons que la matrice  $\mathbf{K}$  est appelée matrice de rigidité par analogie avec la mécanique des solides.

Si la forme bilinéaire  $a$  est coercive, alors  $\mathbf{K}$  est symétrique, définie positive donc inversible. On obtient donc l'existence et l'unicité de  $\mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ .

De nombreuses méthodes permettent de résoudre le système matriciel (d'inverser la matrice de rigidité) : Gauss, mais également toutes sortes de décomposition de la matrice de rigidité comme LU, LDLT, LLT (Cholesky). Lorsque  $K$  est symétrique définie-positive, la méthode de Cholesky est la meilleure. Elle consiste à décomposer la matrice  $A$  en le produit  $L.L^T$ , où la matrice  $L$  est une matrice triangulaire inférieure.

## 1.4 Approximation conforme et lemme de C  a

Dans le cas d'une approximation conforme (dite aussi approximation interne), on se propose de construire un espace  $V_h$ , de dimension  $N_h$ , comme étant un sous-espace vectoriel de  $V$ .

### 1.4.1 Cas Lax-Milgram

On se place dans le cas d'une formulation relevant du théorème de Lax-Milgram.

$V_h$  étant de dimension finie, c'est un fermé de  $V$ .  $V$  étant un espace de Hilbert,  $V_h$  l'est donc aussi. D'où l'existence et l'unicité de  $u_h$ , à partir de Lax-Milgram.

L'espace  $V_h$  sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine  $\Omega$ , et l'indice  $h$  désignera la taille typique des mailles. Lorsque l'on construit des maillages de plus en plus fins, la suite de sous-espaces  $(V_h)_h$  formera une approximation interne de  $V$ , i.e. pour tout élément  $\phi$  de  $V$ , il existe une suite de  $\phi_h \in V_h$  telle que  $\|\phi - \phi_h\| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

Cette méthode d'approximation interne est appelée méthode de Galerkin (Galerkin ou Galerkin).

**Signification de  $u_h$**  On a  $a(u, v) = f(v)$ ,  $\forall v \in V$ , donc en particulier  $a(u, v_h) = f(v_h)$ ,  $\forall v_h \in V_h$ , car  $V_h \subset V$ . Par ailleurs,  $a(u_h, v_h) = f(v_h)$ ,  $\forall v_h \in V_h$ . Par différence, il vient  $a(u - u_h, v_h) = 0$ ,  $\forall v_h \in V_h$ .

Dans le cas où  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique, il s'agit d'un produit scalaire sur  $V$ .  $u_h$  peut alors être interprété comme la projection orthogonale de  $u$  sur  $V_h$  au sens de  $a(\cdot, \cdot)$ .

**Lemme 1 — Lemme de C  a.**  $a(\cdot, \cdot)$  étant continue (de constante de majoration  $M$ ) et coercitive (de constante de minoration  $\alpha$ ), il est aisé d'obtenir la majoration de l'erreur appelée lemme de C  a :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \forall v_h \in V_h \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h) \quad (1.7)$$

où  $d$  est la distance induite par la norme  $\|\cdot\|$ .

Cette majoration donnée par le lemme de Céa ramène l'étude de l'erreur d'approximation  $\|u - u_h\|$  à celle de l'erreur d'interpolation  $d(u, V_h)$ .

### 1.4.2 Cas Babuška

On se place cette fois dans le cas d'un problème relevant du théorème de Babuška. Le problème est ( $v$  est dans  $M$  et non plus  $V$ ) :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = f(v), \forall v \in M \quad (1.8)$$

L'approximation conforme du problème (??) est le problème approché :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = f(v_h), \forall v_h \in M_h \quad (1.9)$$

où  $V_h \subset V$  et  $M_h \subset M$ . Attention : rien ne garantit à priori que la condition inf-sup discrète sera vérifiée, même si la condition inf-sup est vérifiée.  $V_h$  et  $M_h$  étant de dimension finie, il faut nécessairement que  $\dim V_h = \dim M_h$ . Le problème (??) est bien posé, i.e. admet une unique solution, si :

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in M_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{M_h}} \geq \alpha_h \\ \forall w_h \in M_h, \quad (a(v_h, w_h) = 0) \Rightarrow (w_h = 0) \end{cases} \quad (1.10)$$

ce qui est équivalent aux conditions :

$$\begin{cases} \exists \alpha_h > 0 \text{ tel que } \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in M_h} \frac{a(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{V_h} \|w_h\|_{M_h}} \geq \alpha_h \\ \dim V_h = \dim M_h \end{cases} \quad (1.11)$$

Le première relation est appelée condition inf-sup discrète.

Attention : ces propriétés doivent être démontrées.

On dispose de plus de la majoration d'erreur suivante :

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_h}\right) \inf_{v_h \in V_h} \{\|u - v_h\|\} \quad (1.12)$$

### 1.4.3 Cas Brezzi

On se place cette fois dans le cas d'un problème relevant du théorème de Brezzi (problème mixte).

Le problème est de trouver  $(u, \lambda)$  dans  $H \times M$  tels que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H, \\ b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{cases} \quad (1.13)$$

Dans ce cas, on va faire une hypothèse forte d'injection continue... Le problème discrétisé correspondant à (??) est bien posé, si : le problème (??) vérifie les conditions de Brezzi, et si  $(H_h \hookrightarrow H, M_h \hookrightarrow M)$  vérifie les conditions de Brezzi (de constantes  $\alpha^*$  et  $\beta^*$ ). De plus, on dispose alors de la majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_H + \|\lambda - \lambda_h\|_M \leq C \left[ \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\| + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \right] \quad (1.14)$$

où la constante  $C$  ne dépend que de  $\|a\|$ ,  $\alpha^*$  et  $\beta^*$ .

## 1.5 Approximations non conformes et lemmes de Strang

Lorsque les formes linéaires et linéaires définissant le problèmes doivent être approchées, on se trouve alors en présence d'une approximation non conforme. Comme mentionné, il existe deux types d'approximations non conformes selon que  $V_h \subset V$  ou  $V_h \not\subset V$ .

### 1.5.1 Cas $V_h \subset V$

Le problème est donc :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \forall v_h \in V_h \quad (1.15)$$

où  $V_h \subset V$  est de dimension finie, et  $a_h$  et  $f_h$  sont des approximations de  $a$  et  $f$  définies sur  $V_h \times V_h$  et  $V_h$  resp. Dans le pratique,  $a_h$  et  $f_h$  sont définies sur un espace plus grand que  $V_h$ , mais pas sur  $V$ .

**Motivation** Considérons la forme :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (a \nabla u, \nabla v)(x) dx \quad (1.16)$$

Comme  $a = a(x)$ , le problème est : comment intégrer ? On prend des formules d'intégrations, donc on ne calcule par  $a(\cdot, \cdot)$ , mais  $a_h(\cdot, \cdot)$  et  $f_h(\cdot)$ . Une majoration de l'erreur est donnée par le lemme 1 de Strang.

**Lemme 2 — Lemme 1 de Strang.** S'il existe  $\alpha^* > 0$  tel que  $\forall h, a_h(v_h, v_h) \geq \alpha^* \|v_h\|^2, \forall v_h \in V_h$ , alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C \left[ \inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right\} + \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|} \right\} \right] \quad (1.17)$$

Le premier terme  $\|u - v_h\|$  est appelé erreur d'approximation, le reste erreur de consistance.

### 1.5.2 Cas $V_h \not\subset V$

Le problème est encore :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (1.18)$$

mais  $V_h \not\subset V$  est de dimension finie, et  $a_h$  et  $f_h$  sont des approximations de  $a$  et  $f$  définies sur  $V_h \times V_h$  et  $V_h$  resp.

**Motivation** Considérons le problème du Laplacien de Dirichlet. L'espace  $V$  est  $H_0^1(\Omega)$ .

On considère l'espace des éléments finis triangulaires engendrés par l'élément ayant une pression constante par élément et les nœuds au centre des arêtes du triangles. Nous notons cet espace  $V_h$  ; alors  $V_h \not\subset H^1(\Omega)$ . Nous prenons maintenant l'espace  $V_{h,0}$  qui tient compte des C.L. de Dirichlet. Si on prend :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad (1.19)$$

alors, dans  $\Omega$ , il y a des sauts et l'intégrale n'a pas de sens. Par contre, si l'on considère :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \quad (1.20)$$

l'intégrale sur chaque élément a un sens.

Une majoration de l'erreur est donnée par le lemme 2 de Strang.

**Lemme 3 — Lemme 2 de Strang.** Si la norme  $\|\cdot\|_h$  est définie sur  $V_h + V$ , et s'il existe deux constantes indépendantes de  $h$ ,  $\alpha^* > 0$  et  $M^* > 0$  tq :  $a_h(v, v) \geq \alpha^* \|v\|_h^2, \forall v \in V_h$  et  $|a_h(u, v)| \leq M^* \|u\|_h \|v\|_h, \forall u \in V_h + V, \forall v \in V_h$ , alors : il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C \left[ \inf_{v_h \in V_h} \{\|u - v_h\|\} + \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|a(u, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \right] \quad (1.21)$$

Le premier terme  $\|u - v_h\|_h$  est appelé erreur d'approximation, le second erreur de consistance.

## 1.6 Convergence de la méthode des éléments finis en approximation conforme ou non lorsque $V_h \subset V$

Reprenons un cadre général, i.e. considérons  $\Omega$  notre domaine de  $\mathbb{R}^n$ , et notre problème que nous résolvons de manière approchée par la MEF. Il s'agit maintenant de fournir une estimation de l'erreur  $\|u - u_h\|_m$  dans  $H^m$  (souvent  $m = 0, 1$  ou  $2$ ). La régularité de  $u$  et de  $u_h$  (et donc les valeurs possibles pour  $m$ ) dépendent du problème continu considéré ainsi que du type d'éléments finis choisis pour sa résolution.

On rappelle que  $\mathcal{T}_h$  est le maillage de  $\Omega$  considéré. On supposera de plus le domaine  $\Omega$  polygonal, ce qui permet de le recouvrir exactement par le maillage. Si ce n'est pas le cas, il faut prendre en compte de l'écart entre le domaine couvert par le maillage et le domaine réel.

### 1.6.1 Calcul de la majoration d'erreur

Les étapes du calcul de la majoration de l'erreur sont les suivantes :

- $\|u - u_h\|_m \leq C \|u - \pi_h u\|_m$  : l'erreur d'approximation est bornée par l'erreur d'interpolation ;
- $\|u - \pi_h u\|_m^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2$  : décomposition en majorations locales sur chaque élément ;
- $\|u - \pi_h u\|_{m,K} \leq C(K) \|\hat{u} - \hat{\pi} \hat{u}\|_{m,\hat{K}}$  : passage à l'élément de référence ;
- $\|\hat{u} - \hat{\pi} \hat{u}\|_{m,\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{u}|_{k+1,\hat{K}}$  : majoration sur l'élément de référence ;
- $\|u - \pi_h u\|_m \leq C' h^{k+1-m} |u|_{k+1}$  : assemblage des majorations locales.

### Majoration par l'erreur d'interpolation

En appliquant le lemme de Céa à  $v_h = \pi_h u$ , il vient :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \pi_h u\| \quad (1.22)$$

### Décomposition en majorations locales sur chaque élément

$$\|u - \pi_h u\|_m^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=0}^m |u - \pi_h u|_{l,K}^2 \quad (1.23)$$

et le calcul est ramené à un calcul sur chaque élément, pour toutes les semi-normes  $\|\cdot\|_{l,K}$  pour  $l = 0, \dots, m$ .

## Passage à l'élément de référence

On se sert du théorème suivant :

**Théorème 1** Soit  $K$  un élément quelconque de  $\mathcal{T}_h$ , et  $\hat{K}$  l'élément de référence. Soit  $F$  la transformation affine de  $\hat{K}$  vers  $K$  :  $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ , avec  $B$  inversible. On a :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |\hat{v}|_{l,K} \leq C(l,n) \|B\|_2^l |\det B|^{-1/2} |v|_{l,K} \quad (1.24)$$

Ce résultat n'est rien d'autre qu'un résultat de changement de variable dans une intégrale.

On a même :

$$\forall v \in H^l(K), \quad |\hat{v}|_{l,K} \leq C(l,n) \|B^{-1}\|_2^l |\det B|^{1/2} |v|_{l,\hat{K}} \quad (1.25)$$

Et avec les données géométriques de l'élément :

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\hat{\rho}} \quad \text{et} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K} \quad (1.26)$$

## Majoration sur l'élément de référence

On a le théorème suivant :

**Théorème 2** soient  $l$  et  $k$  deux entiers tels que  $0 \leq l \leq k+1$ . Si  $\hat{p}_i \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\hat{K}), J^l(\hat{K}))$  laisse  $P_k(\hat{K})$  invariant, i.e. si  $\forall \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \hat{\pi}\hat{p} = \hat{p}$ , alors :

$$\exists C(\hat{K}, \hat{\pi}), \forall \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{K}), |\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{j,\hat{K}} \leq C |\hat{v}|_{k+1,\hat{K}} \quad (1.27)$$

## Majoration sur un élément quelconque

De ce qui précède, il vient :

$$|v - \pi_K v|_{l,K} \leq \hat{C}(\hat{\pi}, \hat{K}, l, k, n) \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^l} |v|_{k+1,K} \quad (1.28)$$

où il faut remarquer que la constante  $\hat{C}$  est indépendante de l'élément  $K$ .

## Assemblage des majorations locales

Il ne reste plus qu'à assembler les résultats précédents pour tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  et pour toutes les valeurs des semi-normes, i.e. pour  $l = 0, \dots, m$ .

Par majoration et sommation sur les éléments, on obtient :

$$\|v - \pi_h v\|_m \leq C(\mathcal{T}_h, m, k, n) h^{k+1-m} |v|_{k+1} \quad (1.29)$$

## 1.6.2 Majoration de l'erreur

On obtient au final, le résultat classique de majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_m \leq Ch^{k+1-m} |u|_{k+1} \quad (1.30)$$

Quelques remarques :

- On rappelle que la formule précédente a été obtenue pour domaine  $\Omega$  polygonal. Si ce n'est pas le cas, elle n'est plus valable. Les éléments linéaires conduisent à une erreur en  $O(h)$ . Utiliser des éléments plus raffinés (de degré 2 au lieu d'éléments linéaires) permet, même si la géométrie n'est également ici pas décrite de manière exacte, d'obtenir une erreur asymptotique en  $O(h^2)$ . Quelque soit le degré de l'approximation, si le domaine  $\Omega$  n'est pas représenté de manière exact, alors cela revient à une modification des conditions aux limites.
- Les calculs, et plus précisément les intégrations, ont été réalisées sans erreur. Si celles-ci sont faites de manière numérique, il convient d'introduire encore un terme correctif supplémentaire, appelé erreur de consistance due au remplacement des formes par leur approximation ( $a(\cdot, \cdot)$  par  $a_h(\cdot, \cdot)$ ,  $f(\cdot)$  par  $f_h(\cdot)$ ...). Toutefois, cette erreur supplémentaire peut être estimée en  $O(h^k)$  selon la précision du schéma d'intégration utilisé.
- Le résultat de majoration d'erreur est souvent utilisé dans le cas  $m = 1$ . Comme l'espace des polynômes  $P_k(\hat{K}) \subset H^1(\hat{K})$ , alors si  $\hat{\pi}$  est bien défini sur  $H^{k+1}(\hat{K})$ , on a :

$$\text{si } u \in H^{k+1}(\Omega), \quad \|u - u_h\|_1 \leq Ch^k |u|_{k+1} \quad (1.31)$$

## Chapitre 2

# Choix d'un Modèle

Résumé — L'intégralité de la méthode des éléments finis a été présentée au chapitre précédent.

Avant de présenter plus en détail la formulation d'éléments finis, nous tenions à ajouter un court chapitre comme mise en garde en modélisation. Comme ce document étant essentiellement destiné à un public d'ingénieurs mécaniciens, nous allons illustrer notre propos en mécanique.

### Histoire

La mécanique est sans doute aussi vieille que l'homme. Aussi bien pour des aspects pratiques (faire des outils pour chasser...), que pour des aspects plus philosophiques et spirituels visant notamment à expliquer les mouvements des astres...

Archimède, outre ces travaux en mathématiques, pourrait sans conteste être considéré comme le saint patron de la mécanique. Il est tout au moins indubitablement le père de la mécanique statique.

Il s'intéressa aussi bien aux aspects « théoriques » portant sur le principe du levier et la recherche de centre de gravité dans *De l'équilibre des figures planes*, sur le principe d'Archimède sur les corps plongés dans un liquide dans *Des corps flottants* ; qu'aux aspects pratiques au travers de nombreuses inventions : machines de traction (où il démontre qu'à l'aide de poulies, de palans et de leviers, l'homme peut soulever bien plus que son poids), machines de guerre (principe de la meurtrière, catapultes, bras mécaniques utilisés dans le combat naval), l'odomètre (appareil à mesurer les distances), la vis sans fin et la vis d'Archimède, le principe de la roue dentée...

Le siège de Syracuse, les miroirs d'Archimède et sa mort ne font qu'ajouter à sa légende.

Bien qu'Aristote posa le premier (avant Archimède) les bases d'une véritable théorie mécanique (alors encore très imparfaite), les fondements de la mécanique, en tant que science et au sens moderne du terme, sont posés par Galilée en 1632 dans *les Dialogues* et en 1638 dans *les Discours*.

La mécanique n'est alors pas dissociée des arts mécaniques, i.e. des techniques de construction des machines. La distinction entre la mécanique en tant que science et la mécanique en tant que technique ne se fera qu'au XIXe siècle.

En 1677, Newton reprend ses travaux sur la mécanique, i.e. sur la gravitation et ses effets sur les orbites des planètes. En novembre 1684, il fit parvenir à Halley un petit traité de neuf pages avec le titre : *De motu corporum in gyrum* (Mouvement des corps en rotation), montrant la loi en carré inverse, la force centripète, ainsi que les prémices des lois du mouvement.

Son ouvrage *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (aujourd'hui connu sous le nom de *Principia* ou *Principia Mathematica*), écrit en 1686 et publié le 5 juillet 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire de la science. Il y décrit la gravitation universelle, formule les trois lois du mouvement et jette les bases de la mécanique classique ou mécanique newtonnienne. Ces trois lois universelles du mouvement resteront inchangées, sans aucune amélioration, durant plus de deux siècles, jusqu'à l'arrivée des mécaniques relativiste et quantique.



Aristote

Archimède

Galilée



Newton

Rappelons que ces trois lois sont : 1) le principe d'inertie ; 2) le principe fondamental de la dynamique ; et 3) le principe des actions réciproques.

La mécanique classique sera ensuite complétée et mathématisée pour devenir la mécanique analytique. Cette dernière, initiée dès le XVIII<sup>e</sup> siècle, regroupe, en plus de la mécanique newtonienne, les mécaniques de Hamilton et de Lagrange. Toutes ces mécaniques ont en commun l'application initiale d'un principe variationnel, et avec lui l'utilisation du calcul variationnel... ce qui fait le lien avec le présent document.

## 2.1 La mécanique, un problème à plusieurs champs

Dans ce paragraphe, nous reprenons les formulations présentées au paragraphe ??, mais en essayant de les éclaircir par un discours plus pragmatique. C'est pourquoi nous changerons quelque peu les notations, afin de retomber sur des choses peut-être plus familières pour des ingénieurs mécaniciens.

Bien qu'étant un sujet ancien, la mécanique n'en est pas pour autant un problème simple.

En mécanique, les champs inconnus sont les déplacements, déformations et contraintes (et d'autres si besoin, comme la température...). De plus, on dispose de relations entre ces champs.

Il est possible de n'exprimer le problème qu'à l'aide des seuls déplacements. Les déformations sont alors calculées à partir des déplacements (par combinaison linéaire des dérivées, obtenues de manière approchée), puis les contraintes sont obtenues à partir des déformations par la loi de comportement (linéaire ou non, isotrope ou non...).

Il est également tout à fait possible d'exprimer le problème en utilisant les déplacements et les contraintes comme inconnues. Cela permet de prendre en compte certaines continuités des contraintes en certains lieux (interface entre deux matériaux par exemple, voir paragraphe ?? pour une synthèse) de la structure, et d'imposer les CL de nullité des contraintes aux lieux le nécessitant (par exemple bord libre).

Par contre, le champ de contraintes peut également être « trop » continu en certains endroits selon le type de problème. Cette continuité étant liée à la constitution de l'élément fini choisi, on peut ne pas disposer d'éléments capables de modéliser correctement ce phénomène...

Notons qu'il serait tout aussi possible d'utiliser une formulation ayant les trois champs comme inconnues...

Enfin bref, tout est possible, mais il faut veiller à ce que la modélisation de chaque champ soit cohérente avec le phénomène physique à modéliser.

En d'autres termes, on ne choisit pas un élément au hasard, juste parce qu'il a le bon nombre d'inconnues, il est évidemment nécessaire de se demander comment ces inconnues sont interpolées, ce que cela implique sur la régularité des solutions et donc si cela est compatible avec le phénomène physique que l'on souhaite simuler.

Un autre exemple typique est le cas des éléments « déplacement-pression » utilisés par exemple pour la modélisation des solides incompressibles (nous avons évoqué le problème précédemment).

Ce document s'adressant à des personnes connaissant déjà la MEF, nous allons présenter très brièvement, sous forme d'aparte, la discrétisation multi-champs, de manière un peu découplée du reste du document, juste pour fixer les idées.

Si l'on note  $u$  le champ de déplacements, il peut être approximé à partir des déplacements nodaux (sous forme de vecteur)  $\mathbf{q}$  par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice  $\mathbf{N}_u$ .

Compte tenu des notations utilisées, les interpolations des différents champs se font, sur chaque élément, de la manière suivante :

$$u = \mathbf{N}_u \mathbf{q} \quad (2.1)$$

De la même manière, si les déformations  $\epsilon$  sont choisies comme champ inconnu, elles seront approximées à partir des déformations nodales (sous forme de vecteur avec la convention de



l'ingénieur)  $\gamma$  par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice  $\mathbf{N}_\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \mathbf{N}_\varepsilon \gamma \quad (2.2)$$

Cela vaut également pour les contraintes  $\sigma$  qui, si elles sont choisies comme champ inconnu, seront approximées à partir des contraintes nodales (sous forme de vecteur avec la convention de l'ingénieur)  $\tau$  par l'intermédiaire de fonctions de formes rangées dans la matrice  $\mathbf{N}_\sigma$ .

$$\sigma = \mathbf{N}_\sigma \tau \quad (2.3)$$

Notons que dans la pratique, rien n'empêche de prendre les mêmes fonctions de forme pour les différents champs.

De manière analogue, le vecteur  $\lambda$  de multiplicateurs de Lagrange sera interpolé de la façon suivante :

$$\lambda = \mathbf{N}_\lambda \mathbf{L} \quad (2.4)$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{N}_\varepsilon \gamma && \text{approximation en déformations} \\ &= \mathcal{L} u && \text{relation déformations déplacements} \\ &= \mathcal{L} \mathbf{N}_u \mathbf{q} && \text{approximation en déplacements} \\ &= \mathbf{S} \sigma && \text{loi de Hooke inverse} \\ &= \mathbf{S} \mathbf{N}_\sigma \tau && \text{approximation en contraintes} \end{aligned} \quad (2.5)$$

et, de façon inverse :

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{N}_\sigma \tau && \text{approximation en contraintes} \\ &= \mathbf{H} \varepsilon && \text{loi de Hooke généralisée} \\ &= \mathbf{H} \mathbf{N}_\varepsilon \gamma && \text{approximation en déformations} \\ &= \mathbf{H} \mathcal{L} u && \text{loi de Hooke en élasticité linéaire} \\ &= \mathbf{H} \mathcal{L} \mathbf{N}_u \mathbf{q} && \text{approximation en déplacements} \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec, en petites déformations :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ en 2D, et } \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \text{ en 3D} \quad (2.7)$$

La méthode des éléments finis *classique*, ou *en déplacements*, n'utilise que le champ de déplacements comme variable. Elle est basée sur le principe du travail virtuel :

$$\delta \Pi_{TV} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon(u) \mathbf{H} \varepsilon(u) - \delta u \bar{f}_{\Omega} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} \, d\Gamma \quad (2.8)$$

avec  $\bar{f}_{\Omega}$  les forces imposées dans  $\Omega$  et  $\bar{T}$  les forces imposées sur  $\Gamma_{\sigma}$ , où  $\Gamma_{\sigma}$  et  $\Gamma_u$  forment une partition de  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Ce principe est obtenu comme variation de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale exprimée en déplacements :

$$\Pi_{TV} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} {}^T \varepsilon(\mathbf{u}) \mathbf{H} \varepsilon(\mathbf{u}) - {}^T \mathbf{q} \bar{\mathbf{f}}_{\Omega} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} {}^T \mathbf{q} \bar{\mathbf{T}} \, d\Gamma \quad (2.9)$$

où les conditions subsidiaires sur les déplacements sont prises en compte directement par l'espace dans lequel les déplacements sont recherchés.

La fonctionnelle d'Hellinger-Reissner est sans doute la plus connue des fonctionnelles mixtes. Elle utilise les champs de déplacements et de contraintes comme variables indépendantes. Son expression est la suivante,  $\bar{U}$  désignant les déplacements imposés :

$$\Pi_{HR} = \int_{\Omega} -\frac{1}{2} \sigma S \sigma - \sigma_{ij,j} u + \bar{f}_{\Omega} u \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\bar{T} - T) u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{U} T \, d\Gamma \quad (2.10)$$

bien que l'on puisse la trouver sous une autre forme, obtenue par intégration par parties de celle-ci. Elle n'a à satisfaire à aucune condition subsidiaire.

La stationnarité de cette fonctionnelle conduit aux équations d'équilibre, à la loi de comportement, et aux conditions aux limites en forces et déplacements.

Cette fonctionnelle conduit à un élément ayant les champs de déplacements et de contraintes comme inconnues nodales. Il s'en suit que toutes les composantes de ces champs sont continues. Elle conduit à la résolution d'un système du type mixte (Brezzi) :

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

où la matrice de rigidité est symétrique et non définie-positive, et :

$$\mathbf{A} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} \mathbf{S} \mathbf{N}_{\sigma} \, d\Omega \quad \mathbf{B} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} \mathcal{L} \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad \mathbf{F} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{f}}_{\Omega} \, d\Omega \quad (2.12)$$

L'un des moyens pour obtenir une fonctionnelle hybride est d'introduire une condition sur une partie du contour par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange comme présenté un peu plus loin.

Tout comme la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner est associée à la méthode mixte, celle de Pian et Tong est indissociable de l'adjectif hybride, même si, en toute rigueur, elle est une méthode mixte (deux champs) hybride (différents domaines d'interpolation) :

$$\Pi_{PT} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma S \sigma \, d\Omega + \int_{\Gamma} T u \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{T} u \, d\Gamma \quad (2.13)$$

Sa variation est :

$$\delta \Pi_{PT} = - \int_{\Omega} \sigma S \delta \sigma \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta T u + \delta u T \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} \, d\Gamma \quad (2.14)$$

dont l'avantage principal est de ne pas comporter de dérivée.

Cette variation peut être transformée en :

$$\int_{\Omega} \delta \sigma (\varepsilon - S \sigma) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u T \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta u \bar{T} \, d\Gamma$$

La stationnarité de cette fonctionnelle conduit à la loi de comportement, et aux conditions aux limites en contraintes. Les conditions aux limites en déplacements seront imposées par l'espace dans lequel on cherche  $u$ .

Le système à résoudre est de la forme mixte donné précédemment à la relation (??) avec :

$$\mathbf{A} = + \int_{\Omega} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} \mathbf{S} \mathbf{N}_{\sigma} \, d\Omega \quad \mathbf{B} = + \int_{\Gamma} {}^T \mathbf{N}_{\sigma} {}^T \mathbf{M} \mathbf{N}_u \, d\Gamma \quad \mathbf{F} = + \int_{\Gamma_{\sigma}} {}^T \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{T}} \, d\Gamma \quad (2.15)$$

$\mathbf{M}$  étant la matrice des cosinus directeurs donnée par les relations :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{pmatrix} \text{ dans le plan, et } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans l'espace.}$$

(2.16)

Toutefois, le champ de contraintes n'étant défini que dans  $\Omega$ , il est possible d'effectuer une condensation statique du champ de contraintes, i.e. de transformer le système (??) en écrivant :

$$\tau = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (2.17)$$

et le champ de déplacements est solution d'un système de type classique  $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}$ , où la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  est remplacée par la matrice de rigidité équivalente suivante :

$$\mathbf{K}_{eq} = {}^T \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.18)$$

Sur le plan du déroulement du calcul, on commence par résoudre une « forme classique » mais en utilisant la matrice de rigidité équivalente  $\mathbf{K}_{eq}$ , puis le calcul des contraintes dans chaque élément se fait par la relation (??).

Les multiplicateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour introduire des conditions supplémentaires directement à la fonctionnelle. Ces conditions sont généralement imposées sur  $\Gamma_X$ , tout ou partie de  $\Gamma$ , contour de  $\Omega$ . Pour ce faire, il suffit d'ajouter à la fonctionnelle  $\Pi$  du problème le terme :

$$\pm \int_{\Gamma_X} {}^T \lambda_{condition} \quad (2.19)$$

où les  $\lambda_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange.

Les multiplicateurs de Lagrange sont généralement utilisés pour :

- introduire des variables physiques additionnelles comme inconnues ;
- obtenir des conditions de dérivabilité ou des conditions aux limites moins sévères sur les inconnues.

Notons qu'un autre de leurs avantages est de permettre l'utilisation d'une formulation différente dans chaque élément, en assurant les continuités nécessaires aux interfaces (voir synthèse de ce problème d'interface au paragraphe ??). Bien sûr, apparaissant comme inconnues, ils viennent grossir la taille du système à résoudre.

## 2.2 Plusieurs modélisations d'un même problème

La qualité de l'approximation des différents champs est non seulement liée au nombre de champs inconnus choisis, mais également au choix de l'élément. Ce dernier peut traduire une « simplification » du problème physique : il s'agit du problème du choix du type de modélisation, en 1, 2 ou 3D.

Selon le type d'information recherché, une modélisation « plus simple » qu'une autre peut fournir les résultats escomptés.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier un exemple où seul le champ de déplacement apparaît comme inconnue nodale. Toutefois, si ce n'est plus le nombre de champ qui peut modifier la formulation, nous allons voir que la mécanique offre moult théories qui toutes ont leurs avantages et inconvénients, mais qui surtout ne sont pas toutes équivalentes.

### Histoire

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put finaliser ses calculs car il n'avait pas imaginé la loi de Hooke<sup>1</sup>. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

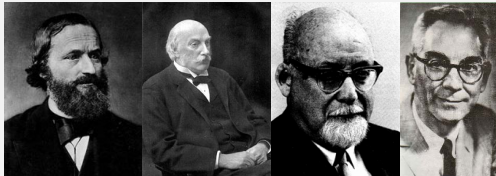
Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui é mirent la première théorie utile vers 1750, tandis que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent (et le fils de Jean Bernoulli), écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas considéré comme une science, et l'on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques... On continua donc à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, que l'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.



Euler J. Bernoulli D. Bernoulli Timoshenko

La théorie des poutres est une simplification unidimensionnelle. On distingue :

- la théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- la théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement.



Kirchhoff Rayleigh Reissner Mindlin

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces.

La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff, suppose que :

- le plan moyen (équivalent de la courbe moyenne des poutres) est initialement plan ;
- le feuillet moyen (équivalent de la fibre neutre des poutres) ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal  $w$  des points du feuillet moyen ;
- modèle de Kirchhoff : les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation ; en conséquence, on peut négliger le cisaillement ;
- l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ;
- on reste en petites déformations.

Notons que cette théorie permet de déterminer la propagation des ondes dans les plaques, ainsi que l'étude des ondes stationnaires et des modes vibratoires.

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. On ne peut donc plus négliger le cisaillement.

Robert Hooke, qui désirait obtenir une théorie des ressorts en soumettant ces derniers à des forces croissantes successives, énonça en 1778, à partir d'expériences datant de 1675, la loi de comportement suivante : « ut tensio sic vis » ce qui signifie « telle extension, telle force », ou bien en termes modernes « l'allongement est proportionnel à la force ».

La figure ?? propose trois modélisations d'un même problème. Il s'agit d'une poutre encastree à une extrémité et soumise à une force décentree à l'autre. Vaut-il mieux modéliser l'intégralité du volume de la poutre, la traiter comme une plaque, ou peut-on se contenter d'un modèle de poutre ?

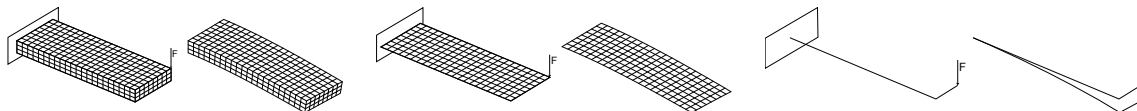


FIGURE 2.1 – Trois modélisations d'un même problème.

L'étude de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  est donnée à la figure ?? . Si les cartographies présentent bien la même répartition, seul le modèle 3D permet de mettre en évidence la concentration de contrainte due à la force ponctuelle.

Si on veut comparer les trois modèles sur cette même composante, alors on se reportera à la figure ?? . On y voit que loin des extrémités, les trois solutions concordent parfaitement,

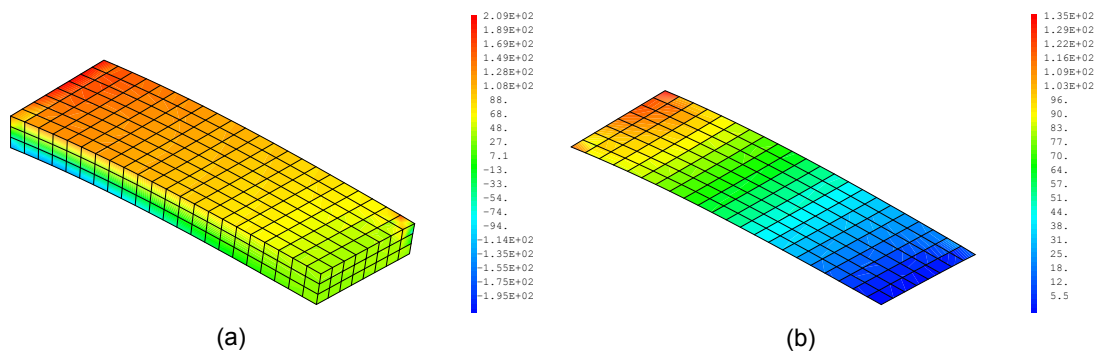


FIGURE 2.2 – Contrainte axiale sur la peau supérieure : (a) modèle 3D, (b) modèle 3D.

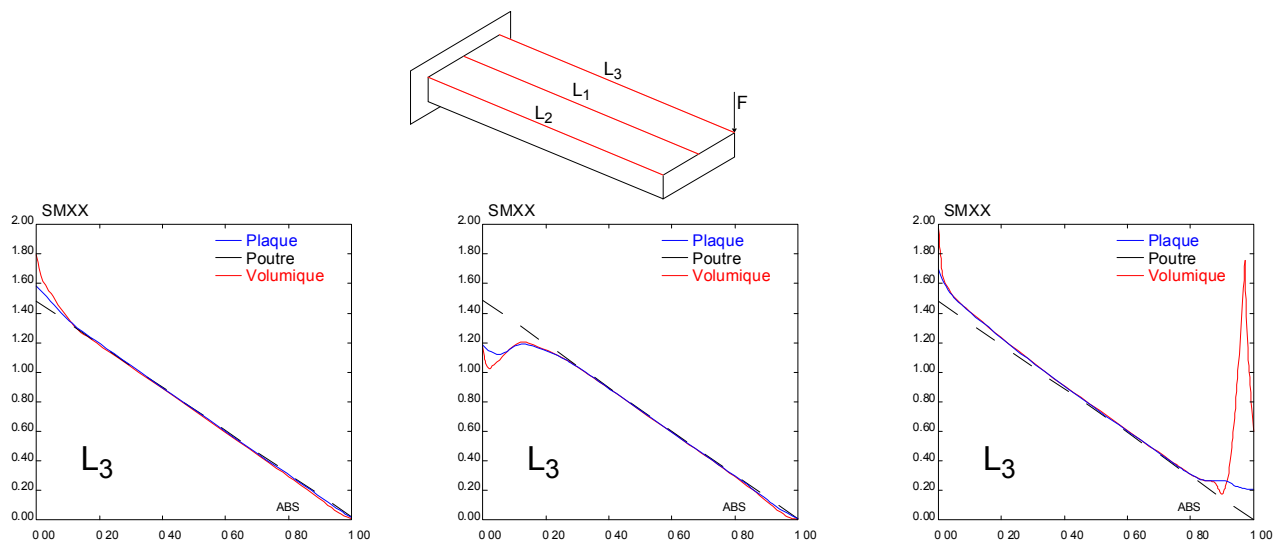


FIGURE 2.3 – Contrainte axiale sur la peau supérieure : (a) modèle 3D, (b) modèle ZD.

conformément au principe de Saint-Venant.<sup>2</sup> Les différences proviennent des effets de bord, i.e. des variations locales des contraintes et déformations au voisinage des conditions aux limites.

Une comparaison plus fine des trois modélisations concernant cette même contrainte normale le long de trois lignes est reportée à la figure ??.

Les différences de résultats proviennent des hypothèses cinématiques et des composantes accessibles dans les différentes théories utilisées.

Les hypothèses cinématiques sont :

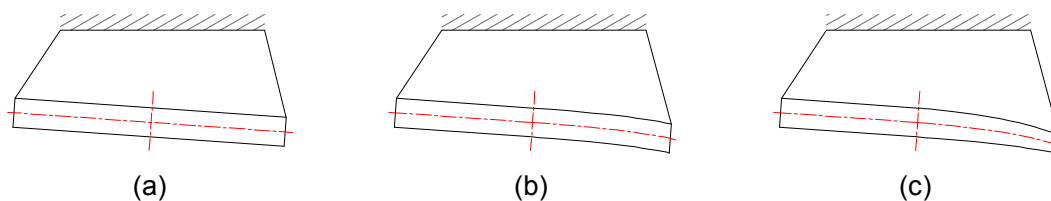


FIGURE 2.4 – Mouvements d'une section droite : (a) théorie des poutres, (b) théorie des plaques ou coques, (c) théorie volumique.

2. Le **principe de Saint-Venant** précise que le comportement en un point quelconque de la poutre, pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'applications des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons ; le comportement dépend alors uniquement du torseur des forces internes en ce point.

- la **théorie des poutres** (Figure ??a) suppose que chaque section droite suit un mouvement de solide rigide. Les sections ne peuvent donc pas se déformer, elles peuvent uniquement se translater et tourner dans l'espace (sans forcément rester perpendiculaires à la ligne moyenne, car dans ce cas on considère une théorie avec cisaillement transverse) ;
- la **théorie des plaques** (Figure ??b), moins restrictive, suppose que chaque segment perpendiculaire au plan moyen de la plaque suit un mouvement de solide rigide (là encore, sans forcément rester perpendiculaire au plan moyen). Elle permet donc de modéliser certaines formes de déformations des sections, planes (flexion et cisaillement dans le plan de la section, traction dans le sens de la largeur) ou hors plan (certains types de gauchissement). Cependant, les segments ne pouvant pas changer de longueur, elle ne permet pas de modéliser l'écrasement de l'épaisseur ;
- enfin, la **théorie 3D** (Figure ??c) ne comporte aucune de ces restrictions et peut modéliser n'importe quelle forme de gauchissement ou d'écrasement, à condition que le maillage employé soit suffisamment fin.

Ici, la comparaison des résultats « plaque » et « 3D » montre que la contribution de l'écrasement de la section à la flèche semble négligeable (0,7% d'écart). Ce n'est pas forcément vrai car l'écrasement est un phénomène localisé sous la charge et lié au contact, qui a été modélisé très grossièrement... Cette très forte concentration de contraintes sous la charge est caractéristique d'une singularité. La valeur obtenue est peu fiable. On peut même dire que physiquement, une force ponctuelle n'existe pas. Elle est forcément distribuée sur une petite surface...

De même, la comparaison des résultats « poutre » et « plaque » montre que la flexion et le cisaillement de la section contribuent davantage à la flèche que l'écrasement (6,4% d'écart) : la largeur de la pièce est visiblement suffisante pour que les déformations des sections droites provoquent un déplacement vertical non négligeable sous la charge.

Il est essentiel de noter que toutes les théories ne permettent pas d'accéder à toutes les composantes du champ des contraintes : de manière générale, seuls les efforts qui travaillent dans les déplacements permis par la théorie sont accessibles (les théories sont ainsi faites afin de pouvoir respecter le premier principe de la thermodynamique dont l'écriture nécessite de calculer le travail de tous les efforts permis par la théorie). Les composantes accessibles sont :

- la **théorie des poutres** ne permet pas de calculer les contraintes dans le plan transversal ( $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{yz}$ ) du fait de l'indéformabilité des sections droites. ;
- la **théorie des plaques** ne permet pas de calculer la contrainte normale au plan de la plaque  $\sigma_{zz}$ , du fait de l'indéformabilité des segments perpendiculaires à ce plan ;
- enfin, la **théorie 3D** permet de calculer les six composantes du tenseur des contraintes.

À ces limitations théoriques peuvent s'ajouter des limitations techniques propres à chaque logiciel, susceptibles de rendre d'autres grandeurs physiques inaccessibles. Avant d'effectuer une modélisation par éléments finis, il est donc indispensable de s'assurer que le logiciel utilisé et son cadre théorique permettent bien d'accéder au résultat voulu (en plus d'être pertinents vis-à-vis de la géométrie du produit, de son environnement et du comportement attendu).

De plus, si certains logiciels peuvent avoir des « limitations techniques », ils peuvent également disposer de méthodes de post-traitement susceptibles d'améliorer ou de permettre d'accéder à certaines composantes (sous certaines hypothèses). Cela aussi doit être pris en compte.

## 2.3 Exemple : retour sur le calcul de poutre du paragraphe ?? avec CAST3M

Nous allons reprendre pour partie l'exemple de la poutre encastree traitée au paragraphe précédent et présenter le listing CAST3M correspondant.

### 2.3.1 Modélisation 2D

Nous commençons par définir les données du problème : longueur, largeur, épaisseur, nombre d'éléments selon chacune de ces directions, et force appliquée :

```
1 * DONNEES
2 * geometrie
3 long1=22.0;
4 larg1=8.;
5 ep1=4;
6 * maillage
7 nlong1=22;
8 nlarg1=8;
9 * effort
10 Forc1=-41.;
```

Puis nous définissons la dimension du problème (modèle tridimensionnel), et le type de découpage :

```
11 OPTION DIME 3 ELEM QUA4;
```

Nous définissons les points  $k_i$  (dénommés ainsi pour rappel de la syntaxe Ansys des keypoints  $k, i, \dots$ ), puis les lignes  $L_i$ , et la surface  $S_1$ .

```
12 k1 = 0. 0. 0.;
13 k2 = long1 0. 0.;
14 k3 = long1 larg1 0.;
15 k4 = 0. larg1 0.;
16 *
17 L1 = DROI nlong1 k1 k2;
18 L2 = DROI nlarg1 k2 k3;
19 L3 = DROI nlong1 k3 k4;
20 L4 = DROI nlarg1 k4 k1;
21 *
22 S1 = DALLER L1 L2 L3 L4;
```

Le modèle est un modèle de mécanique élastique isotrope utilisant l'élément de coque COQ4 pour le maillage  $S_1$  :

```
23 Model1 = MODL S1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE COQ4;
```

Enfin on résoud le problème après avoir fourni les données matérielles et les conditions aux limites :

```
24 Mater1 = MATERIAU Model1 YOUNG 70000.0 NU 0.33 RHO 2700.0;
25 Carl = CARAC Model1 EPAI ep1;
26 Mater1 = Mater1 ET Carl;
27 MR1 = RIGIDITE Model1 Mater1;
28 CL1 = BLOQ DEPL L4;
29 CL2 = BLOQ ROTA L4;
30 FOR1 = FORCE(0. 0. Forc1) k3;
31 MTOT1 = MR1 ET CL1 ET CL2;
32 Depl1 = RESOUD MTOT1 FOR1 ;
```

On peut post-traiter les résultats et les afficher.

Les composantes de  $Sig_1$  dans le repère LOCAL sont :

- les efforts normaux : N11, N22 ;
- l'effort de cisaillement plan : N12 ;
- les moments de flexion : M11, M22 ;
- le moment de cisaillement plan : M12 ;
- les efforts tranchants V1, V2.

Les composantes de  $Eps_1$  dans le repère LOCAL sont :

- les elongations normales dans le plan : EPSS, EPTT ;
- les cisssions dans le plan et transverses : GAST, GASN, GATN ;
- les courbures : RTSS, RTTT, RTST.

```
33 * DEPLACEMENTS
34 UZ1 = EXCO 'UZ' depl1;
35 *TRAC UZ1 S1;
36 *
37 * DEFORMEE
38 def0 = DEFO S1 Depl1 0.0 BLEU;
39 def1 = DEFO S1 Depl1;
40 *TRAC (def0 ET def1);
41 *
42 * CONTRAINTES:
43 Sig1 = SIGM Modell1 Mater1 Depl1;
44 Siigg1 = EXCO M11 Sig1;
45 TRAC Siigg1 Modell1 def1;
46
47 * DEFORMATIONS
48 Eps1 = EPSI Modell1 Mater1 Depl1;
49 Eppss1 = EXCO RTSS Eps1;
50 *TRAC Eppss1 Modell1;
51
52 fin;
```

### 2.3.2 Modèle 3D

Nous allons maintenant construire le modèle tridimensionnel.

Comme nous voulons travailler à l'économie, nous repartons du fichier précédent que nous adaptons.

```
1 * DONNEES
2 * geometrie
3 long1=22.0;
4 larg1=8.;
5 ep1=2;
6 * maillage
7 nlong1=22;
8 nlarg1=8;
9 nep1=3;
10 * effort
11 Forc1=-41.;
```

Cette fois, nous nous servons de CUB8 au lieu de QUA4.



```

12 OPTION DIME 3 ELEM CUB8;
13 *
14 k1 = 0. 0. 0.;
15 k2 = long1 0. 0.;
16 k3 = long1 larg1 0.;
17 k4 = 0. larg1 0.;
18 *
19 L1 = DROI nlong1 k1 k2;
20 L2 = DROI nlarg1 k2 k3;
21 L3 = DROI nlong1 k3 k4;
22 L4 = DROI nlarg1 k4 k1;
23 *
24 S1 = DALLER L1 L2 L3 L4;

```

À partir de la surface  $S_1$ , qui est la même que précédemment, nous allons créer le volume  $V_1$  par translation selon le vecteur  $Vec_1$ .

Nous en profitons également pour créer  $Face_1$  sur laquelle porterons les conditions aux limites. Notons par exemple que la ligne  $L_4$  appartient bien au maillage  $V_1$ , puisque ce dernier est construit dessus. Par contre, la surface  $face_1$  n'appartient pas à  $V_1$ , il est donc nécessaire de la lier à  $V_1$  en utilisant la commande ELIM.

```

25 Vec1=0. 0. (-1.0*ep1);
26 V1=S1 VOLU nep1 TRAN Vec1;
27 Face1 = L4 TRAN nep1 Vec1;
28 ELIM 0.0000001 V1 Face1;

```

Cette fois, le modèle correspond au maillage  $V_1$  et utilise l'élément CUB8.

```

29 Modell = MODL V1 MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE CUB8;

```

On résoud, puis on post-traite.

```

30 Mater1 = MATERIAU Modell YOUNG 70000.0 NU 0.33 RHO 2700.0;
31 MR1 = RIGIDITE Modell Mater1;
32 CL1 = BLOQ DEPL Face1;
33 CL2 = BLOQ ROTA Face1;
34 FOR1 = FORCE(0. 0. Forc1) k3;
35 MR1 = MR1 ET CL1 ET CL2;
36 Depl1 = RESOUD MR1 FOR1 ;
37 *
38 * DEPLACEMENTS
39 UZ1 = EXCO 'UZ' depl1;
40 *TRAC CACH UZ1 V1;
41 * DEFORMEE
42 def0 = DEFO V1 Depl1 0.0 BLEU;
43 def1 = DEFO V1 Depl1;
44 *TRAC CACH (def0 ET def1);
45 *
46 * CONTRAINTES:
47 Sig1 = SIGM Modell Mater1 Depl1;
48 * Les composantes de Sig1 sont: VONMISES, SMXX, SMYY, SMZZ, SMXY, SMXZ, SMYZ
49 Siigg1 = EXCO SMXX Sig1;

```

```

50 * on trace sur la geometrie deformee, c'est plus beau
51 TRAC CACH Siiggl Modell defl;
52 *
53 * DEFORMATIONS
54 *Eps1 = EPSI Modell Mater1 Depl1;
55 *TRAC CACH Eps1 Modell;
56
57 fin;

```

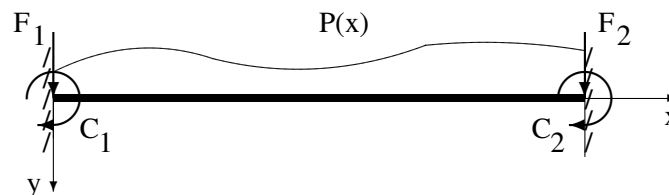
## 2.4 Exemple : calcul des efforts équivalents pour une poutre

Dans ce paragraphe, et pour poursuivre notre illustration des différentes modélisation d'un même problème, nous présentons un petit calcul de RdM traité selon l'approche mécanicienne.

Il permet de montrer comment sont calculés les efforts équivalents, dans un cas général, sur une poutre, mais le même type de calcul resterait valable pour tout type d'élément.

### 2.4.1 Problème

Considérons une poutre définie dans son système de coordonnées locales comme montré à la figure ci-dessous :



La première extrémité est  $(0, 0, 0)$  et la seconde  $(l, 0, 0)$ , où  $l$  est la longueur de la poutre.

Nous supposons la poutre encastres aux deux bouts, et soumise à une charge distribuée définie par la fonction  $P(x)$ .

Le problème est plan de sorte que  $\overrightarrow{P(x)} = P(x) \vec{y}$

Nous souhaitons déterminer les forces et moments équivalents  $F_1$ ,  $F_2$  et  $C_1$ ,  $C_2$  aux deux extrémités également appelées nœuds 1 et 2.

Une analyse statique conduit à :

$$F_1 + F_2 + \int_0^l P(x) dx = 0 \quad (2.20)$$

$$C_1 + C_2 + F_2 l + \int_0^l x P(x) dx = 0 \quad (2.21)$$

Le moment de flexion s'exprime :

$$M_z(x) = C_1 - F_1 x - \int_0^x x P(x) dx, \text{ ou}$$

$$M_z(x) = -C_2 - F_2(l - x) - \int_x^l (v - x) P(x) dv$$

L'énergie interne de la poutre s'exprime :

$$\delta J = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2(x)}{EI} dx$$

### 2.4.2 Théorème de Menabrea

Le théorème de Menabrea permet d'écrire :

$$\frac{\partial \delta J}{\partial C_1} = \frac{\partial \delta J}{\partial C_2} = \frac{\partial \delta J}{\partial F_1} = \frac{\partial \delta J}{\partial F_2} = 0$$

Ces calculs seront faits après avoir introduit les notations suivantes :

$$I_0(a, b) = \int_a^b P(x) dx$$

$$I_1(a, b) = \int_a^b xP(x) dx$$

$$\frac{\partial \delta J}{\partial C_1} = 0 :$$

$$\int_0^l M_z(x) dx = 0$$

$$\int_0^l C_1 - F_1 x - I_1(0, x) dx = 0$$

$$C_1 l - \frac{1}{2} F_1 l^2 - \int_0^l I_1(0, x) dx = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \delta J}{\partial F_1} = 0 :$$

$$\int_0^l x M_z(x) dx = 0$$

$$\int_0^l C_1 - F_1 x - I_1(0, x) dx = 0$$

$$C_1 l - \frac{1}{2} F_1 l^2 - \int_0^l I_1(0, x) dx = 0 \quad (2.23)$$

Nous utilisons les propriétés des intégrales précédemment définies :

$$I(a, b) = I(a, c) + I(c, b)$$

$$I(b, a) = -I(a, b)$$

for both  $I_0$  and  $I_1$ .

### 2.4.3 Résolution des équations

En utilisant (??) et (??), on trouve  $F_1$  and  $C_1$ , Puis, en utilisant (??) et (??) on obtient  $F_2$  and  $C_2$ .

Les efforts sont :

$$F_1 = \frac{6}{l^2} \left( \int_0^l I_1(0, x) dx - \frac{2}{l} \int_0^l x I_1(0, x) dx \right)$$

$$F_2 = -I_0(0, l) - F_1$$

$$C_1 = \frac{2}{l} \left( 2 \int_0^l I_1(0, x) dx - \frac{3}{l} \int_0^l x I_1(0, x) dx \right)$$

$$C_2 = \frac{2}{l} \left( \int_0^l I_1(0, x) dx - \frac{3}{l} \int_0^l x I_1(0, x) dx \right) + I_0(0, l) - I_1(0, l)$$

## 2.4.4 Conclusion

Ces forces et moments correspondent à des efforts de réactions. Les forces équivalentes utilisées en MEF correspondent aux efforts internes développés dans la poutre. Ce sont :

	Force	Moment
Au nœud 1	$-F_1$	$-C_1$
Au nœud 2	$-F_2$	$-C_2$

Analytiquement :

$$\begin{cases} F_1 = -\frac{6}{l^2} \left( \int_0^l I_1(0,x) dx - \frac{2}{l} \int_0^l x I_1(0,x) dx \right) \\ F_2 = I_0(0,l) - F_1 \\ C_1 = -\frac{2}{l} \left( 2 \int_0^l I_1(0,x) dx - \frac{3}{l} \int_0^l x I_1(0,x) dx \right) \\ C_2 = -\frac{2}{l} \left( \int_0^l I_1(0,x) dx - \frac{3}{l} \int_0^l x I_1(0,x) dx \right) - I_0(0,l) + I_1(0,l) \end{cases} \quad (2.24)$$

et sous forme vectorielle :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = F_1 \vec{y} \\ \vec{F}_2 = F_2 \vec{y} \\ \vec{C}_1 = C_1 \vec{z} \\ \vec{C}_2 = C_2 \vec{z} \end{cases}$$

## 2.5 Interpolation des champs et de la géométrie

Un élément est dit isoparamétrique si on prend les mêmes fonctions d'interpolation pour le déplacement et la géométrie.

De manière évidente, on définit également les éléments super et sous-paramétriques, comme illustré à la figure ??.

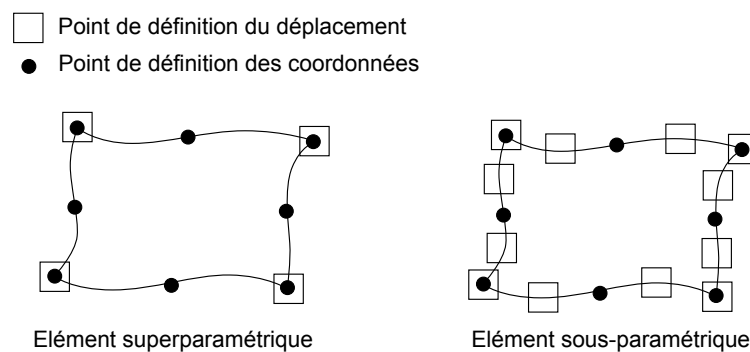


FIGURE 2.5 – éléments finis non isoparamétriques.

Ceci est juste une remarque en passant, pour définir le vocabulaire en somme, nous n'en reparlerons plus dans la suite du document.