

Vincent Manet

Méthode des éléments finis

*Vulgarisation des aspects mathématiques
et illustration de la méthode*

Vincent Manet — 2013 (Ceci est la version « livre » de ce document)

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France :

- paternité ;
- pas d'utilisation commerciale ;
- partage des conditions initiales à l'identique ;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



Introduction

Dans ce (de moins en moins court) document, plutôt à destination d'ingénieurs mécaniciens connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons essayer de faire une présentation un peu plus théorique que ce qui leur est généralement proposé (et qui est quand même souvent de type « preuve par les mains », ce qui occulte trop de points).

Nous ne ferons appel qu'à des notions mathématiques de bases généralement déjà vues pour la plupart en taupe (ou en tout début de cycle d'ingé)... bien que des compléments que l'on peut qualifier d'élémentaires nous aient été demandés et aient été inclus.

Nous espérons, grâce à cette présentation théorique montrer toute la souplesse et la puissance de la méthode, afin de permettre au lecteur d'envisager d'autres simulations que celles qu'il a pu déjà réaliser par le passé.

But du document

Le but initial était de *présenter brièvement la théorie mathématique* derrière les éléments finis afin que les ingénieurs utilisant cette méthode puisse en envisager toutes les applications, ainsi que de *couvrir les aspects qui, selon nous, devraient être connus de tout ingénieur mécanicien impliqué ou intéressé par le calcul numérique.*

Toutefois, il s'envisage comme support de référence à plusieurs cours, cours qui ne portent pas sur tous les aspects traités dans ce document, et pendant lesquels les aspects pratiques sont plus développés (avec mise en situation sur machine).

Même si nous avons voulu rester le plus succinct possible, l'introduction de notions de proche en proche a conduit à un document fait aujourd'hui une certaine taille (par exemple, nous avons besoins des espaces de Sobolev, mais comment les introduire sans parler des espaces de Lebesgue, mais comment les introduire sans parler...).

Aussi le document a-t-il finalement été découpé en plusieurs parties : un survol des notions mathématiques, puis le traitement du problème continu constituent l'ossature théorique nécessaire à asseoir la MEF sur un socle solide. La discrétisation par éléments finis à proprement parler n'est abordé qu'ensuite, et d'ailleurs un seul chapitre suffirait à en faire le tour... sauf à entrer plus dans le détail concernant « ce qui fâche » : homogénéisation, non linéarité, dynamique, ce qui est fait dans des chapitres séparés.

Enfin, d'autres méthodes sont abordées car également très employées aujourd'hui. Aussi est-il indispensable selon nous d'en avoir entendu parlé et d'en connaître les principales notions (BEM, FEEC...).

En annexes, se trouve un petit fourre-tout comprenant des choses censées être maîtrisées depuis la taupe (mais qui parfois nous sont demandées) et les compléments qui alourdiraient encore les propos précédents.

Certaines notions (essentiellement de topologie) ne sont pas présentées dans ce document. Il nous a semblé que le lecteur devait avoir quelques souvenirs de ce qu'est un ouvert, un fermé, l'adhérence, la densité... Par ailleurs, leur nom peut être suffisamment évocateur pour se passer d'une définition formelle dans le contexte de ce document.

Attention, ce document n'est pas un document de mathématiques, il ne contient d'ailleurs aucune preuve. C'est, dans ces deux premières parties, un document de vulgarisation de notions mathématiques nécessaires à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Nous avons voulu réaliser un survol des notions importantes, mais malgré tout, afin de ne pas être parfois trop laconique, nous avons un peu débordé.

En fin de document, un petit index des noms propres permettra au lecteur de replacer les divers développements mentionnés dans l'histoire... Il se peut qu'il subsistent quelques erreurs, notamment au niveau des nationalités mentionnées, car il n'est pas toujours aisé de déterminer rapidement cette information (et nous ne connaissons pas toutes les biographies des personnes citées).

Ce document a été réalisé très rapidement, et de manière extrêmement hachée. Il comporte forcément encore beaucoup de fautes : merci de m'en faire part.

Démarche de l'ingénieur numéricien

En préambule à ce document, nous tenions à synthétiser la démarche complète de l'ingénieur numéricien :

- Modélisation / mise en équations – Construction du problème continu (système d'EDP).
- Analyse mathématique du problème posé – Existence, unicité, propriétés des solutions.
- Conception d'une méthode numérique – Construction d'un problème discrétisé.
- Analyse numérique – Questions de stabilité, convergence, précision.
- Algorithmique – Choix de méthodes de résolution en dimension finie.
- Mise en œuvre sur ordinateur – Programmation.
- Pre et Post Traitement (maillages / visualisation) – Interpolation, extrapolation, outils de la CAO.

Tous ces points ne seront évidemment pas abordés dans ce document !

Remerciements :

Nous n'avions pas prévu de réaliser une deuxième version aussi rapidement. Celle-ci existe suite aux sollicitations de Mathias Legrand. C'est lui qui a développé les macros nécessaires à l'amélioration très très nette de la qualité typographique (environnements pour les notes historiques, les théorèmes, lemmes...).

C'est également pourquoi coexistent aujourd'hui deux versions (mais issues du même code source) : l'un que nous appelons « version cours » (plus en accord avec ce que nous proposons en cours), et l'autre « version livre », plus proche d'un ouvrage.

Table des matières

Introduction	3
But du document	3
Démarche de l'ingénieur numéricien	4
Table des matières	5

I	ÉLÉMENTS FINIS
1	Homogénéisation
1.1	Méthodes d'homogénéisation
1.1.1	Méthode de développement régulier
1.1.2	Méthode de la couche limite
1.1.3	Méthode de développement asymptotique infini
1.1.4	Cas des coefficients discontinus
1.2	Homogénéisation simplifiée pour les matériaux composites
1.2.1	Introduction
1.2.2	Loi des mélanges, bornes de Voigt et de Reuss
1.3	Homogénéisation des matériaux poreux
1.4	Homogénéisation des problèmes non stationnaires
1.5	Changement de dimension, raccord de maillage

Chapitre 1

Homogénéisation

Résumé — L'idée bien connue de l'homogénéisation est de remplacer un milieu « compliqué » par un milieu équivalent simple afin de simplifier le modèle numérique à résoudre. L'intérêt de ces techniques est donc évident.

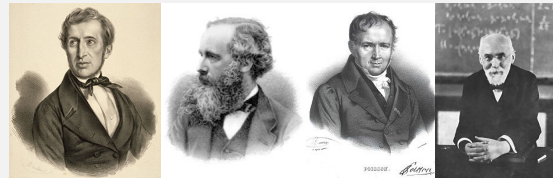
Par exemple, un matériau composite composé de plusieurs plis (couches) constituées chacune de fibres noyées dans une matrice et dont l'orientation diffère d'une couche à l'autre peut être représenté avantageusement par un matériau « homogénéisé » ou « équivalent ».

Nous allons présenter les méthodes d'homogénéisation ainsi que leurs applications en mécanique et acoustique, mais également en modélisation.

Histoire

Les *théories des milieux effectifs* visent à estimer les propriétés *effectives* (i.e. macroscopiques) d'un milieu en fonction des propriétés locales de chacun des constituants ainsi que d'un certain nombre d'informations sur la microstructure.

Les premières théories remontent au XIX^e siècle et sont dues à Mossotti, Maxwell, Poisson ou encore Lorentz. Le but de ces modèles est de fournir soit des bornes pour le comportement effectif, soit des approximations du comportement effectif. Les bornes sont optimales lorsqu'il existe une microstructure particulière qui réalise exactement le modèle physique. On évalue les « bonnes » propriétés de ces théories en les confrontant à d'autres résultats théoriques, calculs analytiques et numériques...



Mossotti

Maxwell

Poisson

Lorentz

Ces théories sont utilisées pour les problèmes de conductivité (milieux diélectriques), en mécanique, magnétique, thermique... lorsque l'on a des phases de conductivité, d'élasticité, des coefficients thermiques... variables. Ces problèmes sont en général très difficiles à résoudre (non-linéaires et anisotropes) alors qu'en même temps, du point de vue des applications pratiques, il n'est pas forcément nécessaire de tenir compte de l'ensemble des degrés de liberté de ces systèmes.

L'existence d'un *comportement effectif* n'est nullement assurée. On montre que, sous certaines hypothèses (en particulier l'existence d'un *volume élémentaire représentatif*), on peut effectivement remplacer un matériau hétérogène par un milieu homogène équivalent.

Enfin, d'un point de vue purement numérique, ces méthodes peuvent être utilisées pour « simplifier » un système à résoudre, que cela ait un sens physique ou non.

Notons que les techniques d'homogénéisation ne sont pas que des artefacts, des trucs et astuces.

Certaines des grandeurs physiques que nous utilisons tous les jours ne sont que des moyennes. Le meilleur exemple en est la pression. Bien qu'en un point donné d'un gaz on voit passer des particules allant en tous sens, on constate également, à une échelle plus macroscopique, un schéma d'ensemble qui permet de définir par exemple la pression qu'exerce ledit gaz sur une paroi... pourtant rien de « cohérent » ne se dégage à l'échelle microscopique.

Le but de ce chapitre est donc d'effectuer le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique (historiquement les premières homogénéisations, appelées alors moyennisations, utilisaient les moyennes arithmétique et harmonique) en fournissant la justification de ce passage (existence et unicité) ainsi que la formule (l'algorithme) de calcul des coefficients efficaces.

Les méthodes que nous présenterons seront les méthodes de développement régulier, de la couche limite, et de développement asymptotique.

Le cas des milieux poreux sera ensuite considéré.

Enfin, nous mentionnerons une application de ces méthodes pour réduire la dimension de certains problèmes.

1.1 Méthodes d'homogénéisation

Nous allons considérer le problème de conductivité linéaire donné par l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet. Nous rappelons qu'il s'agit du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

On rappelle également que si Ω est un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^n , et $H_0^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions qui s'annulent sur Γ , alors la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème précédent est également la solution du problème faible :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad - \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f(x) v \quad (1.2)$$

où $f \in L^2(\Omega)$. Pour que ces deux formulations soient équivalentes, on a supposé que $A(x)$ est régulière : i.e. que pour chaque x de Ω , $A(x)$ est une matrice $n \times n$, dont les éléments sont mesurables et qui est symétrique, définie-positive, bornée, i.e. qu'il existe deux constantes K_1 et $K_2 > 0$ telles que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad K_1 v \cdot v \leq A(x) v \cdot v \leq K_2 v \cdot v \quad (1.3)$$

Mentionnons le cas particulier où $A(x)$ est régulier dans Ω mais pas sur Γ , alors on a deux conditions d'interface :

$$[u] = 0 \quad \text{et} \quad [n \cdot A(x) \nabla u] = 0 \quad (1.4)$$

Nous savons également que la solution existe et est unique (d'après le théorème de Lax-Milgram, i.e. d'après le théorème de Riesz-Fréchet en remarquant le produit scalaire qui va bien...)

Intéressons nous maintenant d'un peu plus près à $A(x)$. Supposons que $A(x)$ possède une certaine périodicité ε , par exemple, que le matériau constituant le domaine soit constitué de couches successives de deux matériaux différents, mais avec une périodicité, comme illustré sur la figure 1.1. Dans un tel cas, nous dirons que les coefficients A dépendent de x/ε . Cette écriture sous forme normalisée permet de dire que A est périodique de période 1.

Dans le cas unidimensionnel, le problème devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du}{dx} \right) = f(x) & \text{pour } x \in [0, l] \\ u = 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } x = l \end{cases} \quad (1.5)$$

A est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de période 1, et nous la supposons régulière par morceaux et telle qu'il existe K_1 et $K_2 > 0$ telles que $K_1 \leq A(v) \leq K_2$.

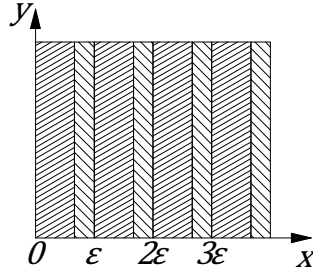


FIGURE 1.1 – Matériau périodique

La solution du problème est alors :

$$u(x) = \int_0^x A^{-1}(y/\varepsilon) \left(\int_0^y f(v) dv + c_1 \right) dy + c_2 \quad (1.6)$$

avec $c_2 = 0$ et

$$c_1 = \frac{\int_0^l A^{-1}(y/\varepsilon) \int_0^y f(v) dv dy}{\int_0^l A^{-1}(y/\varepsilon) dy} \quad (1.7)$$

Le nombre d'intervalles pour le calcul approché de c_1 est très grand (i.e. très supérieur à l/ε).

Exprimé autrement, ce résultat devient : le coefficient homogénéisé est $\frac{1}{\langle \frac{1}{A} \rangle}$ et non pas $\langle A \rangle$ (où $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne).

1.1.1 Méthode de développement régulier

Dans la méthode de développement régulier, on se propose de chercher la solution asymptotique $u^{(\infty)}$ sous la forme :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x) \quad (1.8)$$

où $u_i(x)$ ne dépend pas de ε .

La solution asymptotique $u^{(\infty)}$ est bien de la forme précédente si en injectant cette expression dans celle du problème alors on obtient une petite erreur au second membre.

Pour le calcul on procède donc comme suit :

- on injecte la forme souhaitée (cette forme s'appelle l'ansatz) ;
- pour avoir un second membre avec un terme d'erreur petit, on obtient la forme des $u_i(x)$;
- on vérifie que les $u_i(x)$ trouvés conviennent bien.

1.1.2 Méthode de la couche limite

Considérons le problème unidimensionnel :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' - p(x)u = f(x) & \text{pour } x \in [0, 1] \\ u(0) = A \text{ et } u(1) = B \end{cases} \quad (1.9)$$

où $p \in C([0, 1])$; $p(x) \geq 0, x \in [0, 1]$; $f \in C([0, 1])$; $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ le petit paramètre. En négligeant le terme $\varepsilon^2 u''$, nous arrivons à l'équation $-p(x)u_r = f(x)$. En d'autres termes, et comme montré sur la figure 1.2, nous disposons de la courbe correspondant à $y = u_r = -f(x)/p(x)$ (en noir) qui approche la solution du problème donnée par la courbe rouge.

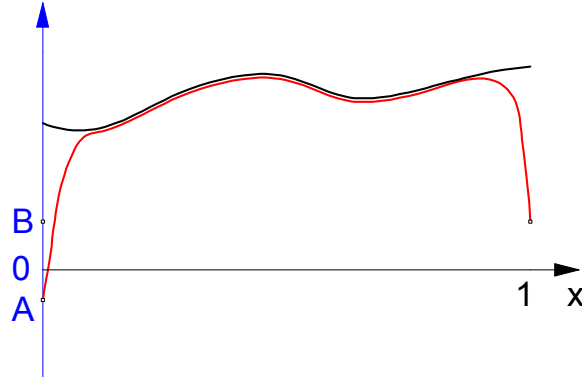


FIGURE 1.2 – Méthode de la couche limite

La solution exacte se confond avec u_r sur la plus grande partie de l'intervalle $[0, 1]$, mais u et u_r sont fortement différents dans un voisinage des extrémités.

Cherchons une solution asymptotique sous la forme de l'ansatz :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (u_i^r(x) + u_i^0(x/\varepsilon) + u_i^1((x-1)/\varepsilon)) \quad (1.10)$$

où les $u_i^r(x)$ sont les termes réguliers, et $u_i^0(x/\varepsilon)$ et $u_i^1((x-1)/\varepsilon)$ les termes de couche limite correspondant aux extrémités $x=0$ et $x=l$.

Pour le calcul on procède donc comme suit :

- on injecte les termes réguliers de l'ansatz dans la formulation du problème ;
- on traite les extrémités pour vérifier les conditions aux limites, ce qui donne les termes de couche limite ;
- on vérifie que la solution trouvée conviennent bien (i.e. que l'erreur commise est négligeable).

1.1.3 Méthode de développement asymptotique infini

À ce niveau du texte, on a dû s'apercevoir que la démarche était la même pour les deux méthodes précédentes, sauf évidemment la forme de l'ansatz.

Dans la méthode de développement asymptotique infini, on va encore procéder de la même manière, mais on cherchera une solution sous la forme d'ansatz :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, x/\varepsilon) \quad (1.11)$$

où chaque $u_i(x, x/\varepsilon)$ est de la forme $u_i(x, x/\varepsilon) = N_i(x/\varepsilon)v_\varepsilon^{(i)}(x)$, $\forall i > 0$ et $u_0(x, x/\varepsilon) = v_\varepsilon(x)$, i.e. :

$$u^{(\infty)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i N_i(x/\varepsilon)v_\varepsilon^{(i)}(x) \quad (1.12)$$

et où les $N_i(x/\varepsilon)$ sont 1-périodiques et $N_0 = 1$.

1.1.4 Cas des coefficients discontinus

Il est possible d'appliquer la même approche que lorsque les coefficients sont continus avec quelques modifications : il « suffit » d'ajouter les conditions d'interfaces présentées en début de paragraphe et rappelées ci-dessous :

$$[u] = 0 \quad \text{et} \quad [n \cdot A(x/\varepsilon) \nabla u] = 0 \quad (1.13)$$

partout où cela est nécessaire.

On retrouve les mêmes conditions d'existence de la solution que dans le cas continu et la périodicité de la solution homogénéisée reste inchangée.

1.2 Homogénéisation simplifiée pour les matériaux composites

Après ce petit tour « mathématique » des méthodes d'homogénéisation, nous proposons un petit complément très mécanique, et très « pratique ».

Pour information, la modélisation du muscle cardiaque s'inspire des techniques d'homogénéisation des matériaux composites.

1.2.1 Introduction

D'une manière générale, tous les matériaux, mêmes isotropes, sont hétérogènes en dessous d'une certaine échelle. Il peut sembler naturel d'utiliser des propriétés homogènes équivalentes correspondant à des propriétés mécaniques effectives. Toutefois, comme nous l'avons déjà vu, ces propriétés effectives ne s'obtiennent pas par une simple moyenne des propriétés des constituants, mêmes pondérées par les fractions volumiques.

Les propriétés effectives du milieu homogène équivalent cherché peuvent être obtenues en résolvant un problème aux limites sur un volume élémentaire dV , à condition que celui-ci soit suffisamment grand pour être représentatif de la microstructure du matériau hétérogène. Dans le cas où les constituants présentent une structure périodique, le volume dV peut se réduire à un volume élémentaire.

Une fois le volume élémentaire déterminé, on le soumet à des sollicitations élémentaires pour déterminer la réponse résultante. La difficulté réside en fait dans le choix des conditions aux limites à appliquer au volume élémentaire considéré pour imposer une déformation ou contrainte globale moyenne donnée.

Dans le cas linéaire, on peut prouver l'existence et l'unicité pour les différents cas de conditions aux limites existants.

Principalement pour les composites stratifiés ou sandwichs, il y a 2 niveaux d'homogénéisation :

- du niveau micromécanique au niveau mésoscopique : Les hétérogénéités de base sont les fibres et la matrice. On effectue ici une étape d'homogénéisation locale.
- du niveau mésoscopique au niveau macroscopique : Les hétérogénéités de base sont les différentes couches du stratifié. Ces couches sont considérées comme « homogènes » (étape précédente). Cette fois, il s'agit d'une homogénéisation dans l'épaisseur du stratifié.

1.2.2 Loi des mélanges, bornes de Voigt et de Reuss

On considère un composite UD de repère d'orthotropie (l, t) , constitué de fibres noyées dans une matrice polymère. Soit une cellule élémentaire de fraction volumique $V = 1$ constituée de fibres et de matrice. On note V_m la fraction volumique de matrice, V_f la fraction volumique de fibre, et on a :

$$V = V_m + V_f = 1 \quad (1.14)$$

À l'échelle locale, on fait les hypothèses suivantes :

- Fibres : comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients E_f et ν_f ;
- Matrice : comportement élastique non-linéaire, isotrope de coefficients E_m et ν_m .

On souhaite déterminer les relations existant entre E_l , E_t , E_f , E_m , V_m et V_f . Pour cela, on fait également les hypothèses suivantes :

- On travaille en élasticité linéaire.
- La liaison fibres/matrice est parfaite.
- Localement, on a : $\sigma_f = E_f \varepsilon_f$ et $\sigma_m = E_m \varepsilon_m$.

Loi des mélanges (ou modèles à bornes ou de Reuss et de Voigt) :

- 1er essai : Il s'effectue dans la direction parallèle aux fibres (compression longitudinale)

$$E_{longitudinal} = E_l = E_f V_f + E_m V_m \quad (1.15)$$

C'est la loi des mélanges, qui est bien vérifiée dans la direction des fibres. Il s'agit de la borne supérieure de Voigt (1887).

- 2ème essai : Il s'effectue dans la direction perpendiculaire aux fibres (compression transversale)

$$\frac{1}{E_{transverse}} = \frac{1}{E_t} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (1.16)$$

C'est la loi des mélanges en souplesse. Cette relation n'est pas très bien vérifiée transversalement mais donne une indication sur la borne inférieure, dit de Reuss (1929).

- Module de cisaillement et coefficient de Poisson d'un UD par la loi des mélanges :

$$\nu_{lt} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad \text{et} \quad \frac{1}{G_{lt}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (1.17)$$

Les modèles à bornes fournissent un encadrement du comportement mécanique du matériau composite par des comportements mécaniques limites (bornes). Ils sont obtenus par la résolution du problème de l'élasticité linéaire sous forme faible. La minimisation de l'énergie potentielle conduit à la borne supérieure de Voigt. la résolution en contrainte conduit à la borne inférieure de Reuss.

Pour gagner un peu en généralité, on peut remplacer les termes fibres et matrice par des phases, car ces modèles sont applicables à des mélanges de polymères (matériaux composés) et à des composites chargés par des particules diverses.

Les bornes correspondent aux associations série des deux phases (borne inférieure de Reuss, équivalent au modèle du module transverse équivalent de la loi des mélanges) et parallèle (borne supérieure de Voigt, équivalent au modèle du module longitudinal équivalent de la loi des mélanges).

Aucune hypothèse n'est faite sur la morphologie du matériau. Il est simplement admis que pour le modèle de Reuss, la contrainte est homogène dans les deux phases (continuité de la contrainte) et, pour le modèle de Voigt, la déformation est constante (continuité de la déformation) dans tout le composite.

L'intérêt est limité dès que l'écart des caractéristiques des deux phases est important.

Évidemment, d'autres modèles existent :

- Hashin et Shtrikman (1963) : resserre les bornes de Reuss et Voigt
- Takayanagi (combinaison de Reuss et Voigt)
- Halpin - Tsai : pour le renforcement par des fibres courtes alignées
- Tsai - Pagano : fibres courtes
- Halpin - Kardos : extension de la précédente

1.3 Homogénéisation des matériaux poreux

Considérons à nouveau notre problème de Poisson avec conditions de Dirichlet pour un milieu poreux. Ω est le domaine (borné) de \mathbb{R}^n qui contient Ω_ε l'ensemble des trous périodiques. Nous avons donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f(x) & \text{pour } x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & \text{sur le contour extérieur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1.18)$$

Sur le bord des trous, on peut imposer, soit des conditions de Dirichlet :

$$u = 0 \text{ sur le bord des trous} \quad (1.19)$$

soit des conditions de Neumann :

$$n \cdot A(x/\varepsilon)\nabla u = 0 \text{ sur le bord des trous} \quad (1.20)$$

On supposera encore que les coefficients sont 1-périodiques. Cherchons des solutions dans le cas où l'on a des conditions de Neumann sur les bords des trous.

La forme choisie pour l'ansatz est le développement au second ordre suivant :

$$u^{(2)} = u_0(x, x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x, x/\varepsilon) \quad (1.21)$$

où les $u_i(x, x/\varepsilon)$ sont 1-périodiques en x/ε qui sera noté ξ .

On obtient un système du type :

$$\begin{cases} L_{\xi\xi} u_0 & = 0 \\ L_{\xi\xi} u_1 + L_{\xi x} u_0 + L_{x\xi} u_0 & = 0 \\ L_{\xi\xi} u_2 + L_{\xi x} u_1 + L_{x\xi} u_1 + L_{xx} u_0 & = f(x) \end{cases} \quad (1.22)$$

et les conditions de Neumann :

$$n \cdot A(\xi) [\varepsilon^{-1} \nabla_{\xi} u_0 + \varepsilon^0 (\nabla_{\xi} u_1 + \nabla_x u_0) + \varepsilon (\nabla_{\xi} u_2 + \nabla_x u_1) + \varepsilon^2 \nabla_x u_2] = 0 \quad (1.23)$$

d'où :

$$\begin{cases} n \cdot A(\xi) \nabla_{\xi} u_0 & = 0 \\ n \cdot A(\xi) (\nabla_{\xi} u_1 + \nabla_x u_0) & = 0 \\ n \cdot A(\xi) (\nabla_{\xi} u_2 + \nabla_x u_1) & = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

On peut prouver que si v_0 est solution du problème, alors $v_0 + cte$ aussi. Des conditions d'existence de la solution il vient, tous calculs faits, la matrice des coefficients homogénéisés \hat{A} :

$$\hat{A} = [\hat{a}_{i,j}] \quad \text{avec} \quad \hat{a}_{i,j} = \int_{Q \setminus G_0} \sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_k} + a_{ij} \right) d\xi \quad (1.25)$$

où G_0 est un trou de la cellule élémentaire Q . Le même type de calcul pourrait être mené avec les conditions de Dirichlet sur le bord des trous. Cette homogénéisation des milieux poreux est valable pour l'acoustique comme pour la mécanique.

1.4 Homogénéisation des problèmes non stationnaires

Nous n'avons pas encore abordé de manière pratique les problèmes non stationnaires dans ce document, puisqu'ils se trouvent au chapitre ??.

Il est tout à fait possible d'utiliser les méthodes présentées dans ce chapitre aux problèmes dépendant du temps.

Il n'y a pas vraiment de précautions supplémentaires à prendre, mais il faut adapter la forme de l'ansatz. Par exemple, l'ansatz du paragraphe précédent, pour le même type de problème non stationnaire serait :

$$u^{(2)} = u_0(x, \xi, t) + \varepsilon u_1(x, \xi, t) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi, t) \quad (1.26)$$

avec $u_i(x, \xi, t)$ 1-périodique en ξ .

1.5 Changement de dimension, raccord de maillage

Les méthodes d'homogénéisation peuvent également être utilisées pour « changer (réduire) » la dimension d'un problème.

Considérons un problème qui se pose dans un domaine plan de longueur 1 et de largeur $\pm \varepsilon/2$. Alors, on peut considérer le comportement asymptotique de la solution lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Une fois

cette solution asymptotique trouvée, le problème initial posé sur le pavé $[0, 1] \times [-\varepsilon/2, +\varepsilon/2]$ est remplacé par le problème homogénéisé posé sur le segment $[0, 1]$.

On a donc bien réduit la dimension du problème.

Ce genre de chose correspond typiquement à un modèle plaque ou coque (2D) utilisé à la place d'un modèle tridimensionnel (3D), ou encore mieux à un modèle barre ou poutre (1D).

Cela permet également de développer des éléments finis permettant de raccorder des maillages 3D à des maillages 2D ou à des maillages 1D, afin d'alléger les modèles numériques là où ils peuvent l'être.

En mécanique, de nombreuses théories de plaques ou poutres existent (voir la paragraphe ??). Elles sont généralement présentées de manières « physique », mais ne sont rien d'autre que des méthodes d'homogénéisation.

Libre à chacun de préférer une présentation plutôt mécanicienne ou plutôt mathématicienne, le résultat est finalement le même. Mais il nous semble, et c'est la motivation même à l'origine de ce document, que le fait de connaître les deux aide à mieux cerner à la fois les hypothèses sur lesquelles ces développements sont faits (et que l'on oublie parfois, ayant pour conséquence des résultats que l'on peut qualifier de surprenants) ainsi que les potentialités qui s'offrent à nous.