

Vincent Manet

Méthode des éléments finis

*Vulgarisation des aspects mathématiques
et illustration de la méthode*

Vincent Manet — 2013 (Ceci est la version « livre » de ce document)

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France :

- paternité ;
- pas d'utilisation commerciale ;
- partage des conditions initiales à l'identique ;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



Introduction

Dans ce (de moins en moins court) document, plutôt à destination d'ingénieurs mécaniciens connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons essayer de faire une présentation un peu plus théorique que ce qui leur est généralement proposé (et qui est quand même souvent de type « preuve par les mains », ce qui occulte trop de points).

Nous ne ferons appel qu'à des notions mathématiques de bases généralement déjà vues pour la plupart en taupe (ou en tout début de cycle d'ingé)... bien que des compléments que l'on peut qualifier d'élémentaires nous aient été demandés et aient été inclus.

Nous espérons, grâce à cette présentation théorique montrer toute la souplesse et la puissance de la méthode, afin de permettre au lecteur d'envisager d'autres simulations que celles qu'il a pu déjà réaliser par le passé.

But du document

Le but initial était de *présenter brièvement la théorie mathématique* derrière les éléments finis afin que les ingénieurs utilisant cette méthode puisse en envisager toutes les applications, ainsi que de *couvrir les aspects qui, selon nous, devraient être connus de tout ingénieur mécanicien impliqué ou intéressé par le calcul numérique.*

Toutefois, il s'envisage comme support de référence à plusieurs cours, cours qui ne portent pas sur tous les aspects traités dans ce document, et pendant lesquels les aspects pratiques sont plus développés (avec mise en situation sur machine).

Même si nous avons voulu rester le plus succinct possible, l'introduction de notions de proche en proche a conduit à un document fait aujourd'hui une certaine taille (par exemple, nous avons besoins des espaces de Sobolev, mais comment les introduire sans parler des espaces de Lebesgue, mais comment les introduire sans parler...).

Aussi le document a-t-il finalement été découpé en plusieurs parties : un survol des notions mathématiques, puis le traitement du problème continu constituent l'ossature théorique nécessaire à assoir la MEF sur un socle solide. La discrétisation par éléments finis à proprement parler n'est aborder qu'ensuite, et d'ailleurs un seul chapitre suffirait à en faire le tour... sauf à entrer plus dans le détail concernant « ce qui fâche » : homogénéisation, non linéarité, dynamique, ce qui est fait dans des chapitres séparés.

Enfin, d'autres méthodes sont abordées car également très employées aujourd'hui. Aussi est-il indispensable selon nous d'en avoir entendu parlé et d'en connaître les principales notions (BEM, FEEC...).

En annexes, se trouve un petit fourre-tout comprenant des choses censées être maîtrisées depuis la taupe (mais qui parfois nous sont demandées) et les compléments qui alourdiraient encore les propos précédents.

Certaines notions (essentiellement de topologie) ne sont pas présentées dans ce document. Il nous a semblé que le lecteur devait avoir quelques souvenirs de ce qu'est un ouvert, un fermé, l'adhérence, la densité... Par ailleurs, leur nom peut être suffisamment évocateur pour se passer d'une définition formelle dans le contexte de ce document.

Attention, ce document n'est pas un document de mathématiques, il ne contient d'ailleurs aucune preuve. C'est, dans ces deux premières parties, un document de vulgarisation de notions mathématiques nécessaires à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Nous avons voulu réaliser un survol des notions importantes, mais malgré tout, afin de ne pas être parfois trop laconique, nous avons un peu débordé.

En fin de document, un petit index des noms propres permettra au lecteur de replacer les divers développements mentionnés dans l'histoire... Il se peut qu'il subsistent quelques erreurs, notamment au niveau des nationalités mentionnées, car il n'est pas toujours aisé de déterminer rapidement cette information (et nous ne connaissons pas toutes les biographies des personnes citées).

Ce document a été réalisé très rapidement, et de manière extrêmement hachée. Il comporte forcément encore beaucoup de fautes : merci de m'en faire part.

Démarche de l'ingénieur numéricien

En préambule à ce document, nous tenions à synthétiser la démarche complète de l'ingénieur numéricien :

- Modélisation / mise en équations – Construction du problème continu (système d'EDP).
- Analyse mathématique du problème posé – Existence, unicité, propriétés des solutions.
- Conception d'une méthode numérique – Construction d'un problème discrétisé.
- Analyse numérique – Questions de stabilité, convergence, précision.
- Algorithmique – Choix de méthodes de résolution en dimension finie.
- Mise en œuvre sur ordinateur – Programmation.
- Pre et Post Traitement (maillages / visualisation) – Interpolation, extrapolation, outils de la CAO.

Tous ces points ne seront évidemment pas abordés dans ce document !

Remerciements :

Nous n'avions pas prévu de réaliser une deuxième version aussi rapidement. Celle-ci existe suite aux sollicitations de Mathias Legrand. C'est lui qui a développé les macros nécessaires à l'amélioration très très nette de la qualité typographique (environnements pour les notes historiques, les théorèmes, lemmes...).

C'est également pourquoi coexistent aujourd'hui deux versions (mais issues du même code source) : l'un que nous appelons « version cours » (plus en accord avec ce que nous proposons en cours), et l'autre « version livre », plus proche d'un ouvrage.

Table des matières

Introduction	3
But du document	3
Démarche de l'ingénieur numéricien	4
Table des matières	5
1 Formulation pratique d'éléments finis	7
1.1 Éléments de Lagrange	7
1.1.1 Unisolvance	7
1.1.2 Éléments finis de Lagrange	8
1.1.3 Famille affine d'éléments finis et élément de référence	9
1.1.4 Construction de la base globale	10
1.2 Éléments d'Hermite	11
1.2.1 Classe d'un éléments finis	11
1.2.2 Éléments finis d'Hermite	11
1.2.3 Éléments uni- et bidimensionnels	12
1.3 Traitement de plusieurs champs	12
1.4 Validation pratique et indicateurs d'erreur	15
1.4.1 Modes rigides et parasites	15
1.4.2 Modes associés aux déformations constantes	16
1.4.3 Patch-tests	16
1.4.4 Test de précision d'un élément	16
1.5 Exemple : quelques variations sur le thème des éléments unidimensionnels	17
1.5.1 Éléments de référence unidimensionnels linéaire à deux nœuds	17
1.5.2 Rappels sur la jacobienne et le jacobien d'une transformation	18
1.5.3 Éléments de référence unidimensionnels linéaires à n nœuds	19
1.5.4 Éléments de référence unidimensionnel infini	19
1.5.5 Éléments finis de barre unidimensionnel	20
1.5.6 Assemblage de trois éléments unidimensionnels linéaires à deux nœuds	21
1.5.7 Éléments de barre unidimensionnel de type Hermite (élément subparamétrique)	22
1.5.8 Éléments mixtes unidimensionnels	22
1.6 Sur les déplacements imposés	23
1.6.1 Problème considéré	23
1.6.2 Retour sur la résolution de systèmes linéaires	24
1.6.3 Complément de Schur et déplacements imposés	24
1.6.4 Multiplicateurs de Lagrange et déplacements imposés	25
1.6.5 Actions extérieures et déplacements imposés	25
1.6.6 Retour sur notre exemple	25
1.6.7 Relations linéaires entre ddl	27

Chapitre 1

Formulation pratique d'éléments finis

Résumé — L'intégralité de la méthode des éléments finis a été présentée au chapitre ??.

Dans ce chapitre et dans les suivants, nous allons détailler certains aspects. Nous proposons dans ce chapitre d'exposer un peu plus complètement les notions d'interpolation sur un élément, ainsi que le lien entre approximation locale (sur un élément) et approximation globale (construction de la base de V_h).

Nous avons dit vouloir interpoler le problème sur chaque élément. Pour ce faire, il faut prendre une base sur chaque élément. Plusieurs choix sont possibles, mais en général, les fonctions de base utilisées pour les éléments finis sont dites interpolantes, c'est-à-dire que les valeurs nodales sont les valeurs des grandeurs inconnues aux nœuds, et que c'est à partir de ces valeurs que l'on effectue l'interpolation.

La méthode la plus simple consiste à utiliser les polynômes de Lagrange. Dans cette méthode les fonctions de base valent 1 à un nœud du maillage et 0 à tous les autres. La fonction de base i est alors la fonction valant 1 au nœud i et 0 sur les autres nœuds et qui est polynomiale sur chaque élément. Il y a autant de fonctions de base par élément que de nombre de nœuds. On appelle élément la donnée d'une géométrie (souvent polygonale en deux dimensions, polyédrique en trois dimensions) et de fonctions de base associées à cette géométrie.

D'autres solutions peuvent exister pour les fonctions de base. Par exemple, les éléments finis d'Hermite ont la particularité d'avoir deux fonctions de base associées à chaque nœud. La valeur de la solution est alors ajustée avec la première fonction alors que la deuxième permet d'ajuster la valeur de la dérivée. Ce type de fonctions de base peut avoir un intérêt pour la résolution de certaines EDP (telle que l'équation des plaques en Mécanique des Milieux Continus), même si elle nécessite d'avoir deux fois plus de fonctions pour un maillage donné.

1.1 Éléments de Lagrange

Les éléments de Lagrange sont les éléments finis les plus simples.

1.1.1 Unisolvance

Définition 1 — Unisolvance. Soit $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n . Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que Σ est P -unisolvant ssi pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, il existe un unique élément p de P tel que $\forall i = 1, \dots, N, p(a_i) = \alpha_i$. (ce qui revient à dire que la fonction de P dans \mathbb{R}^N qui à p fait correspondre $(p(a_i), \dots, p(a_N)) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ est bijective).

1.1.2 Éléments finis de Lagrange

Définition 2 — Éléments finis de Lagrange. Un élément fini de Lagrange est un triplet (K, Σ, P) tel que :

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n , compact, connexe, et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n ;
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant (donc $\dim P = N$).

Les fonctions de bases locales de l'élément fini de Lagrange (K, Σ, P) sont les N fonctions de P telles que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq N$.

Remarque (p_1, \dots, p_N) est une base de P .

Définition 3 — Opérateur de P -interpolation. Un opérateur de P -interpolation sur Σ est un opérateur π_K qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction $\pi_K v$ de P définie par :

$$\pi_K v = \sum_{i=1}^N v(a_i) p_i.$$

Théorème 1 $\pi_K v$ est l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ .

On notera P_k l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à k .

- sur \mathbb{R} , $P_k = \text{vect}\{1, X, \dots, X^k\}$ et $\dim P_k = k + 1$;
- sur \mathbb{R}^2 , $P_k = \text{vect}\{X^i Y^j, 0 \leq i + j \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$;
- sur \mathbb{R}^3 , $P_k = \text{vect}\{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i + j + l \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.

On notera Q_k l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable.

- sur \mathbb{R} , $Q_k = P_k$;
- sur \mathbb{R}^2 , $Q_k = \text{vect}\{X^i Y^j, 0 \leq i, j \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k + 1)^2$;
- sur \mathbb{R}^3 , $Q_k = \text{vect}\{X^i Y^j Z^l, 0 \leq i, j, l \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k + 1)^3$.

Éléments finis unidimensionnels

On discrétise le segment $[a, b]$ avec des polynômes de degrés 1 à m . On obtient les éléments du tableau 1.1.

Élément	P_1	P_2	...	P_m
K	$[a, b]$	$[a, b]$...	$[a, b]$
Σ	$\{a, b\}$	$\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$...	$\{a + i \frac{b-a}{m}, i = 0, \dots, m\}$
P	P_1	P_2	...	P_m

TABLE 1.1 – Éléments de Lagrange unidimensionnels de degrés 1 à m

Éléments finis bidimensionnels triangulaires

On discrétise le triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$ avec, le long de chaque arête une interpolation polynomiale de degré 1 à m . On obtient les éléments du tableau 1.2.

Élément	P_1	P_2
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}, 1 \leq i, j \leq 3\}$
P	P_1	P_2

TABLE 1.2 – Éléments de Lagrange bidimensionnels triangulaires de degrés 1 et 2

Remarque Les fonctions de base pour l'élément P_1 sont définies par $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. Ce sont les coordonnées barycentriques : $p_i = \lambda_i$.

Éléments finis bidimensionnels rectangulaires

On discrétise le rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes. La formulation est décrite dans le tableau 1.3.

Élément	Q_1
K	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes.
Σ	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
P	Q_1

TABLE 1.3 – Élément de Lagrange bidimensionnel rectangulaire de degré 1

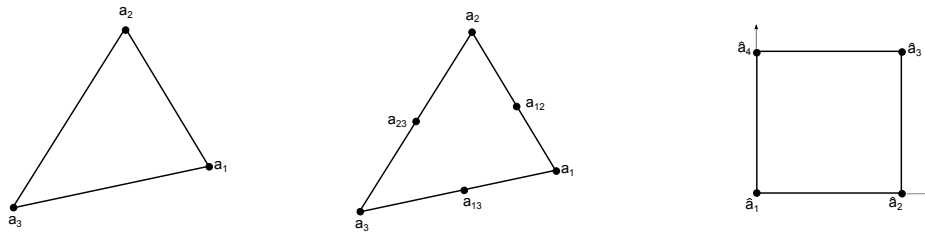


FIGURE 1.1 – Éléments finis de Lagrange 2D : triangulaire P_1 , triangulaire P_2 et rectangulaire Q_1

Éléments finis tridimensionnels

On distingue les éléments finis tridimensionnels suivants, qui seront illustrés à la figure 1.2 :

- les éléments tétraédriques, définis dans le tableau 1.4 ;
- les élément parallélépipédique, définis au tableau 1.5 ;
- et les élément prismatique, définis selon le tableau 1.6.

1.1.3 Famille affine d'éléments finis et élément de référence

En fait, la notion de transformation affine entre un élément K d'un maillage \mathcal{T}_h et un élément de référence a déjà été utilisée en calcul de majoration d'erreur, mais la transformation elle-même n'a pas été détaillée.

Deux éléments finis $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$ et (K, Σ, P) sont affine-équivalents ssi il existe une fonction affine F inversible telle que $K = F(\hat{K})$, $a_i = F(\hat{a}_i)$, $i=1, \dots, N$, et $P = \{\hat{p} \circ F^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}$.

Définition 4 — Famille affine d'éléments finis. On appelle famille affine d'éléments finis une famille d'éléments finis tous affine-équivalents à un même élément fini appelé élément de référence.

D'un point de vue pratique, le fait de travailler avec une famille affine d'éléments finis permet de ramener tous les calculs d'intégrales à des calculs sur l'élément de référence. Voir figure 1.3 pour une illustration d'une transformation affine. Les éléments finis de références sont ceux obtenus,

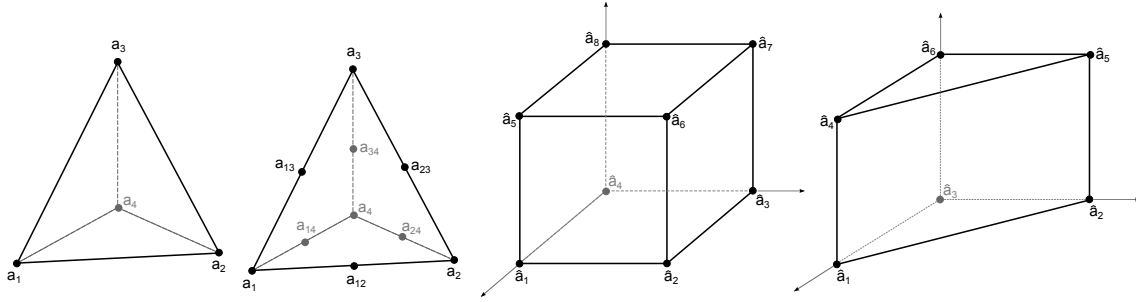


FIGURE 1.2 – Éléments finis de Lagrange tridimensionnels : tétraédriques P_1 et P_2 , parallélépipédique Q_1 et prismatique

Élément	P_1	P_2
K	tétraèdre de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	tétraèdre de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
Σ	$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	$\{a_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 4}$
P	P_1	P_2

TABLE 1.4 – Éléments de Lagrange tridimensionnels tétraédriques de degrés 1 et 2

dans les cas présentés ci-dessus avec :

- le segment $[0, 1]$ en une dimension ;
- le triangle unité de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$,
- et le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ en deux dimensions ;
- le tétraèdre unité de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$,
- le cube unité $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$,
- le prisme unité de sommets $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.

1.1.4 Construction de la base globale

Revenons à notre problème décrit par une EDP sous forme faible dans un domaine Ω sur lequel on réalise un maillage \mathcal{T}_h à partir d'une famille affine de N_e éléments finis $(K_i, \Sigma_i, P_i)_{i=1, \dots, N_e}$. Par unisolvance, la solution approchée u_h sera entièrement définie sur chaque élément fini par ses valeurs sur les points de Σ_i , nommés nœuds du maillage. Notons (a_1, \dots, a_{N_h}) les nœuds du maillage ($N_h < N_e \cdot \text{card}_i$). Le problème approché revient à déterminer les valeurs de u_h aux points a_i : ce sont les degrés de liberté du problème approché. On va construire une base de V_h en associant à chaque ddl a_i un vecteur de la base. On définit ainsi les fonctions de base globales φ_i ($i = 1, \dots, N_h$) par :

$$\varphi_i|_{K_j} \in P_j, j = 1, \dots, N_e \quad \text{et} \quad \varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq N_h \quad (1.1)$$

et l'espace d'approximation interne est $V_h = \text{vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$. On remarquera qu'une telle fonction φ_i est nulle partout sauf sur les éléments dont a_i est un nœud.

De plus, sur un élément K dont a_i est un nœud, φ_i vaut 1 en a_i et 0 aux autres nœuds de K . Donc $\varphi_i|_K$ est une fonction de base locale de K . On voit donc que la fonction de base globale φ_i est construite comme réunion des fonctions de base locales sur les éléments du maillage dont a_i est un nœud.

Remarque ce qui précède est vrai dans le cas d'un maillage conforme, i.e si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un sommet ou une arête en dimension 2, ou à un sommet, une arête ou une face en dimension 3.

Élément	Q_1
K	parallélépipède de sommets $\{a_1, \dots, a_8\}$ de côtés parallèles aux axes.
Σ	$\{a_i\}_{1 \leq i \leq 8}$
P	Q_1

TABLE 1.5 – Élément de Lagrange tridimensionnel parallélépipédique de degré 1

Élément	Q_1
K	prisme droit de sommets $\{a_1, \dots, a_6\}$
Σ	$\{a_i\}_{1 \leq i \leq 6}$
P	$\{p(X, Y, Z) = (a + bX + cY) + Z(d + eX + fY), a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$

TABLE 1.6 – Élément de Lagrange tridimensionnel prismatique

1.2 Éléments d'Hermite

1.2.1 Classe d'un éléments finis

Une question naturelle est de savoir quelle est la régularité de la solution approchée u_h . En particulier, u_h est-elle continue ? dérivable ?

u_h est obtenue par combinaison linéaire des fonctions de base globales φ , la question revient donc à déterminer la régularité de celles-ci. Par construction, on voit que la régularité de φ_i sera donnée par sa régularité au niveau des interfaces entre les éléments adjacents formant son support.

Dans les éléments finis de Lagrange, φ_i est construite pour être continue d'un élément à l'autre, mais pas sa dérivée... c'est cette contrainte que nous allons introduire maintenant.

1.2.2 Éléments finis d'Hermite

Définition 5 — Élément fini d'Hermite. Un élément fini d'Hermite ou élément fini général est un triplet (K, Σ, P) tel que :

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n , compact, connexe, et d'intérieur non vide ;
- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ un ensemble de N formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur K , ou sur un sous-espace plus régulier contenant P ;
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant.

Définition 6 — Opérateur de P -interpolation. Un opérateur de P -interpolation sur Σ est un opérateur π_K qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction $\pi_K v$ de P définie par :

$$\pi_K v = \sum_{i=1}^N \sigma_i(v) p_i.$$

$\pi_K v$ est l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ . On remarque immédiatement que si $\sigma_i(p) = p(ai), i = 1, \dots, N$, on retrouve les éléments finis de Lagrange. Cette généralisation permet d'introduire des opérations de dérivation dans Σ , et donc d'améliorer la régularité des fonctions de V_h . Les fonctions de base globales φ_i , ($i = 1, \dots, N_h$) sont définies par :

$$\varphi_i|_{K_j} \in P_j, j = 1, \dots, N_e \quad \text{et} \quad \sigma_j(\varphi_i) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq N_h \quad (1.2)$$

Suivant les éléments utilisés, ces fonctions de base pourront être de classe C^1 ou même plus, et il en sera donc de même pour la solution approchée u_h .

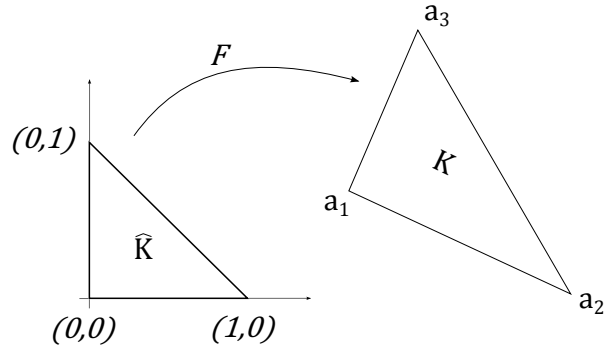


FIGURE 1.3 – Transformation affine sur un triangle

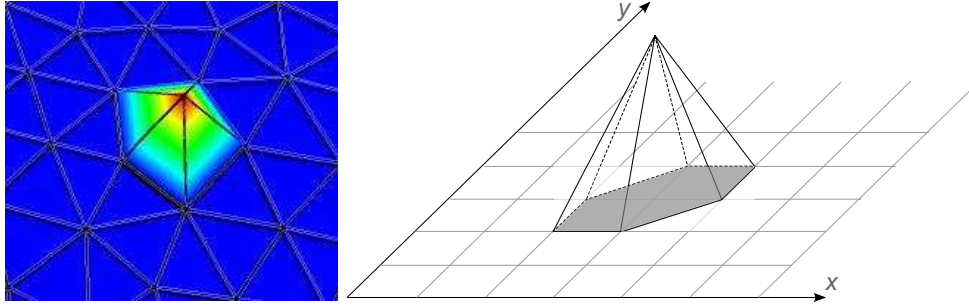


FIGURE 1.4 – Base de V_h : exemple de fonction de base globale φ_i sur un maillage avec des éléments triangulaires P_1 .

1.2.3 Éléments uni- et bidimensionnels

Nous présentons quelques éléments finis d'Hermite utilisés classiquement, dont certains seront illustrés à la figure 1.6 :

- les éléments finis unidimensionnels cubiques et quintiques sont définis au tableau 1.7 ;

Élément	cubique	quintique
K	segment $[a, b]$	segment $[a, b]$
Σ	$\{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$	$\{p(a), p'(a), p''(a), p(b), p'(b), p''(b)\}$
P	P_3	P_5
Régularité	C^1 et H^2	C^2 et H^3

TABLE 1.7 – Éléments d'Hermite unidimensionnels de degrés 3 et 5

- les éléments finis bidimensionnels triangulaires : on distingue l'élément cubique d'Hermite, qui est C^0 , et l'éléments d'Argyris, qui est C^1 . Ils sont présentés dans les tableaux 1.8 et 1.9 ;
- l'élément fini bidimensionnel rectangulaire défini au tableau 1.10 ;

1.3 Traitement de plusieurs champs

Dans ce qui précède, le lecteur aura noté que l'on interpole un seul champ, en imposant ou non certaines régularités (dérivées partielles).

Une question naturelle consiste à se demander comment traiter les problèmes ayant plusieurs champs inconnus (cela à déjà été abordé, et certaines stratégies on déjà été présentées : formulation mixte (Brezzi), utilisation de multiplicateurs de Lagrange).

On pourrait imaginer, si ces champs sont « dissociés » (sans lien les uns avec les autres), de modéliser chaque champ séparément, i.e. de traiter un problème par champ (avec pour chaque champ un choix de maillage et d'élément qui lui est propre).

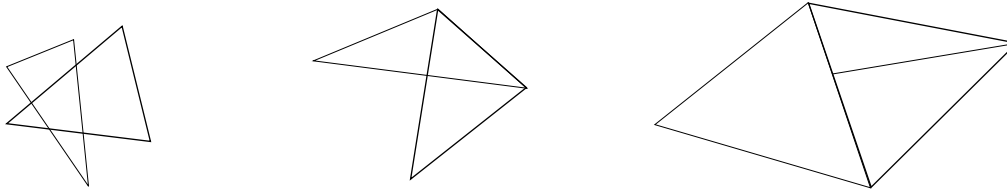


FIGURE 1.5 – Maillage non conforme : situations interdites

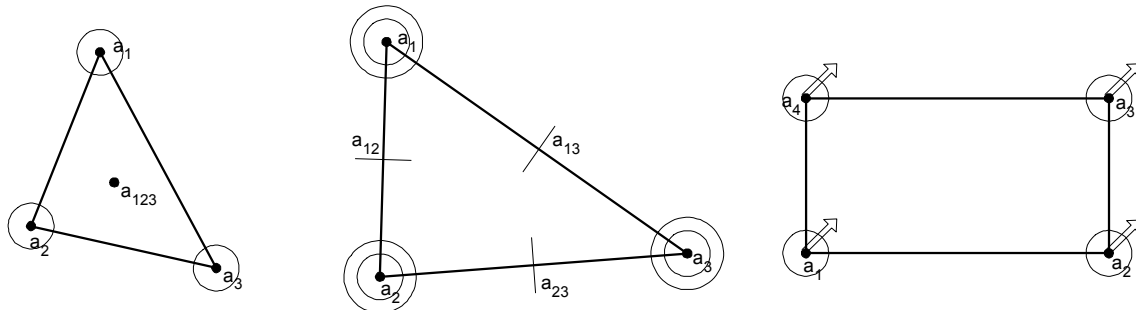


FIGURE 1.6 – Éléments finis d'Hermite triangulaire cubique, élément d'Argyris et élément rectangulaire Q_3

En fait, les problèmes à plusieurs champs ne concernent généralement pas des champs indépendants. Lorsque l'on a plusieurs champs interdépendants, alors on dispose de relations entre ces champs, qui doivent elles-aussi être satisfaites.

Nous avons exposé au chapitre précédent pourquoi la mécanique reste un cas compliqué. Cela provient de ce que les champs inconnus sont les déplacements, déformations et contraintes. De plus, le chapitre précédent a permis une illustration du choix d'un modèle, même lorsque l'on ne recourt qu'à une théorie à un champ (déplacements).

Nous ne construirons pas ici un élément à plusieurs champs, mais nous allons donner une motivation pour le faire : celui du calcul des contraintes à l'interface entre deux matériaux différents que nous supposons parfaitement collés.

Considérons donc le problème décrit à la figure 1.7. Deux domaines Ω_1 et Ω_2 , consitués

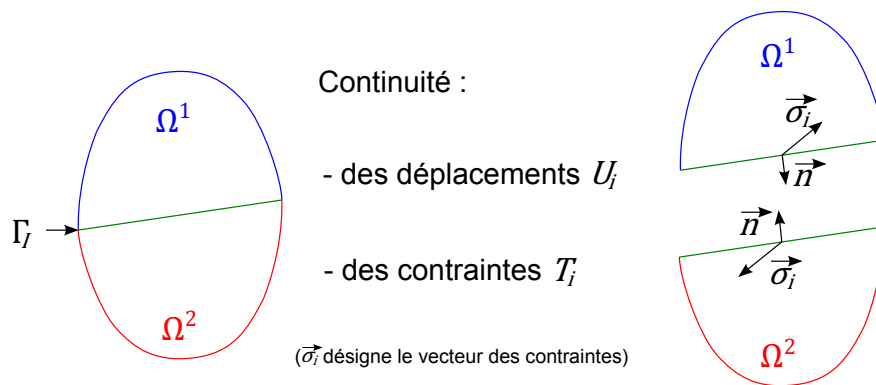


FIGURE 1.7 – Interface et continuités

chacun de leur propre loi de comportement, ont une interface commune Γ_I . On supposera que le champ de déplacement est continu le long de Γ_I . La continuité de la composante normale du déplacement à l'interface traduit le fait qu'il n'y a pas décollement entre les deux domaines ; celle de la composante tangentielle qu'il n'y a pas glissement entre eux.

On peut donc dire qu'en tout point de Γ_I le déplacement est continu, ce que l'on peut noter $u_i^1 = u_i^2$.

L'état d'équilibre des forces doit lui-aussi être vérifié le long de l'interface. Cela implique

Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), i = 1, 2, 3\right\} \cup \{p(a_0)\}$
P	P_3
Régularité	C^0 , mais pas C^1

TABLE 1.8 – Élément bidimensionnel triangulaire d’Hermite

Élément	
K	triangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$
Σ	$\left\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, 2, 3\right\} \cup \left\{\frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3\right\}$
P	P_5
Régularité	C^1

TABLE 1.9 – Élément bidimensionnel triangulaire d’Argyris

que les composantes normales des contraintes doivent être également continues le long de cette interface, i.e. que la trace du tenseur des contraintes doit être continue le long de l’interface. Par contre, les autres composantes peuvent (et doivent selon les cas) être discontinues.

Plusieurs stratégies sont envisageables :

Post-traitement : Dans cette méthode, on effectue le calcul en déplacements, de manière classique.

On obtient les contraintes de manière toute aussi classique, mais celles-ci n’ont évidemment pas les continuités et discontinuités souhaitées.

On utilise une méthode de post-traitement qui va modifier le calcul des contraintes sur les éléments situés de part et d’autre de l’interface, par exemple en imposant la vérification des équations d’équilibre (voir par exemple la méthode de Reissner locale, qui applique la fonctionnelle de Reissner uniquement le long de l’interface).

Élément mixte : La fonctionnelle d’Hellinger-Reissner possède les champs de déplacement et de contrainte comme inconnues. Elle conduit à un système de type mixte (équation (??)) avec une matrice qui n’est plus définie-positve.

Il s’en suit que ces deux champs sont continus, et notamment que toutes les composantes des contraintes le sont, ce qui ne satisfait pas les conditions d’équilibre.

Si l’on souhaite utiliser ce type d’élément, il faudra par exemple, faire une condensation statique des composantes devant être discontinues, ou utiliser une méthode de post-traitement.

Élément hybride : La fonctionnelle de Pian et Tong (mixte hybride) présentée précédemment a l’avantage de ne pas faire intervenir de dérivée. Elle conduit elle-aussi à un système de type mixte, mais la matrice de rigidité n’est même plus symétrique (dans une discrétisation « brutale »). On sait la retraiter.

Toutes les composantes des contraintes sont là aussi continues, et il faudra appliquer les mêmes remèdes que ci-dessus.

Notons qu’un avantage de cette formulation c’est qu’elle nécessite la matrice de souplesse $[S]$ au lieu de la matrice de Hooke $[H]$, ce qui permet de traiter le cas des matériaux incompressibles.

Multiplicateurs de Lagrange : D’une manière évidente, la continuité du champ de déplacements à l’interface Γ_I entre deux éléments ¹ et ² peut être imposée par l’ajout à la fonctionnelle de la condition :

$$- \int_{\Gamma_I} \lambda_i (U_i^1 - U_i^2) d\Gamma \quad (1.3)$$

Cette condition est facile à écrire et facile à implémenter (mais on perd la définie-positivité de la matrice de rigidité).

De plus, l’interprétation physique de ces multiplicateurs de Lagrange montre que ceux-ci sont égaux aux composantes normales des contraintes.

Élément	Q_3
K	rectangle de sommets $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de côtés parallèles aux axes
Σ	$\left\{ p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, \dots, 4 \right\}$
P	P_3
Régularité	C^1

TABLE 1.10 – Élément bidimensionnel rectangulaire d’Hermite Q_3

Voilà quelques stratégies. D’autres peuvent exister, surtout si en plus on veut passer sur des modèles poutre ou plaque.

Le but était de montrer que non seulement il est possible de développer de nombreux éléments finis, mais que même à partir d’éléments existants, il est toujours possible de construire une méthode numérique permettant d’obtenir les résultats souhaités.

Les méthodes de post-traitement, que nous n’aborderons pas dans ce document, sont très riches et permettent de faire beaucoup de choses. Elles ont en outre l’avantage d’être parfois plus faciles à implémenter dans des codes industriels que de nouveaux éléments.

1.4 Validation pratique et indicateurs d’erreur

Les tests numériques des éléments et au delà des codes de calcul sont indispensables. Non seulement ils permettent de vérifier la satisfaction de critères de convergence et d’évaluer la précision des éléments finis développés, ce qui peut être réalisé par une analyse mathématique, mais ils permettent également de s’assurer de la bonne programmation. Plusieurs types de tests peuvent et doivent être faits, sur plusieurs problèmes types. Ces tests concernent aussi bien un seul élément, que plusieurs (patch-test), et même différents maillages. En mécanique, on distingue les cas listés dans le tableau 1.11.

Problème / solution de référence	Maillage	Vérification	Importance
Mouvement rigide et déformations constantes	1 élément	base polynomiale complète / modes parasites	convergence du modèle élément fini vers la solution théorique lorsque le nombre d’élément tend vers l’infini.
Mouvement rigide et déformations constantes	plusieurs éléments : patch-test cinématique ou mécanique	base complète, conformité, indépendance par rapport au maillage (vérification de l’assemblage), absence de modes parasites	Test particulièrement pour les non standard ou non conformes.
Champ de déformations générales	différents maillages	précision et influence de la distorsion sur les déplacements et la contrainte	qualité de l’élément par rapport à d’autres éléments existants.

TABLE 1.11 – Test de validation

1.4.1 Modes rigides et parasites

Le problème consiste à savoir si un élément fini, que l’on définira ici par sa matrice \mathbf{K} , peut présenter l’état de déformation nulle ou d’énergie interne nulle (mode ou mouvement de corps rigide).

Une méthode consiste à déterminer le nombre de valeurs propres nulles de \mathbf{K} . Ce nombre doit être égal au nombre de modes rigides : soit 3 en deux dimensions (2 translations, 1 rotation), 6 en trois dimensions et 1 en axisymétrique. On notera m_r le nombre de modes rigides. S’il y a plus de valeurs propres nulles que de modes rigides, alors c’est qu’il y a des modes parasites à énergie nulle. Ces modes parasites doivent disparaître après assemblage de plusieurs éléments afin d’éviter que la matrice de rigidité soit singulière (d’où le test sur plusieurs éléments). Le schéma d’intégration

choisi pour la définition de l'élément (par exemple intégration complète, réduite ou sélective) peut influencer sur les modes parasites. C'est pourquoi, il n'est pas toujours aussi simple de déterminer mathématiquement ce facteur.

Dans ce cas, il est possible d'introduire un champ de déplacement représentant le mouvement rigide. Pour chaque mode rigide i , le vecteur \mathbf{u}_n^i associé à la matrice \mathbf{K} doit vérifier :

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_n^i = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Un mode rigide quelconque étant une combinaison linéaire des modes \mathbf{u}_n^i , on construit un problème éléments finis dans lequel on impose m_r valeurs du vecteur \mathbf{u}_n^i et on détermine numériquement les $n - m_r$ composantes (non imposées) de \mathbf{u}_n^i . Celles-ci doivent être identiques aux valeurs théoriques associées au mode rigide i . Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il existe des modes rigides.

1.4.2 Modes associés aux déformations constantes

Pour converger correctement l'élément doit également représenter exactement l'état de déformations ou contraintes constantes (ou plus généralement la représentation « constante » de tous les termes de la forme variationnelle).

Dans un premier temps, on calcule les efforts nodaux correspondant à une contrainte fixée. Dans un second temps, on introduit les efforts nodaux comme condition aux limites dans le modèle élément fini et on vérifie si l'on retrouve bien l'état de contrainte initialement choisi.

1.4.3 Patch-tests

Le domaine choisi doit posséder au moins un nœud à l'intérieur du domaine. On définit un champ de déplacement conduisant à un état de déformation désiré (constant ou non), que l'on introduit comme condition aux limites dans le modèle élément fini. On vérifie qu'au point intérieur, l'état de déformation obtenu est bien celui désiré.

1.4.4 Test de précision d'un élément

On confronte le modèle élément fini à un ou des cas tests représentatifs de ce pour quoi l'élément a été développé (élasticité tridimensionnelle, bidimensionnelle, problème de torsion, problème avec concentrations locales de déformations ou de contraintes, prise en compte des frontières courbes...).

Sur les composantes d'« intérêt », on regardera s'il y a bien convergence du modèle et sa vitesse de convergence en fonction du nombre d'éléments, de la distorsion de ceux-ci...

La « mesure » de l'écart peut demander une « jauge » particulière. C'est ce que l'on appelle un estimateur d'erreur. Nous n'avons abordé jusqu'à présent que la mesure de l'erreur due à la MEF elle-même, mais chaque problème particulier peut demander un estimateur particulier. Pour la mécanique, les estimateurs sont souvent liés à la qualité des contraintes ou à des estimateurs d'énergie.

Un indicateur local d'erreur pourra par exemple être basé sur l'écart entre les contraintes aux nœuds et aux frontières après extrapolation des points d'intégration de chaque élément. On rappelle que certaines contraintes doivent être nulles sur les frontières libres.

On trouve par exemple l'écart sur les contraintes équivalentes (selon un sens à définir en fonction du type de matériau : par exemple von Mises pour un matériau isotrope, Hill, Tsai-Hill, Tsai-Wu... pour les matériaux anisotropes, les mousses, les os, les composites...); l'écart sur la contrainte moyenne...

On peut également utiliser la densité d'énergie interne de déformation sur chaque élément, l'idéal étant que tous les éléments contribuent de manière identique à l'estimation de l'énergie interne totale.

Un indicateur global d'erreur pourra être par exemple la valeur de l'énergie potentielle totale. Plus sa valeur sera petite, meilleur sera le modèle.

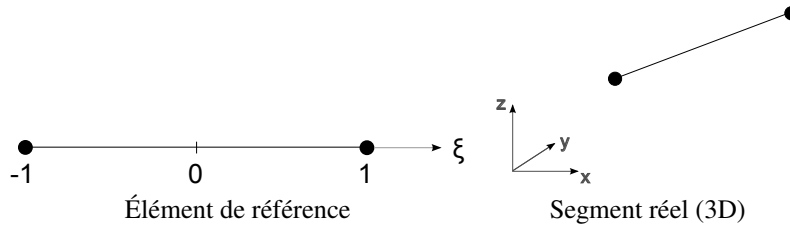
On peut également vérifier que certaines équations d'équilibre sont vérifiées à l'intérieur d'un élément ou le long d'une frontière entre éléments (par exemple à l'interface entre deux domaines, un problème évoqué un peu avant au paragraphe 1.3)...

1.5 Exemple : quelques variations sur le thème des éléments unidimensionnels

Dans ce paragraphe, nous appliquons ce que nous venons de voir sur quelques cas simples d'éléments unidimensionnels.

1.5.1 Élément de référence unidimensionnels linéaire à deux nœuds

Considérons un segment reliant deux points dans l'espace. Ce segment est défini par un point courant dont les coordonnées sont le vecteur \mathbf{x} . On peut paramétrer ce segment par le paramètre $\xi \in [-1, 1]$, et le vecteur position s'exprime par ${}^T\mathbf{x} = {}^T\mathbf{x}(\xi), y(\xi), z(\xi)$. Cet élément (segment) est défini par



ses seules extrémités. Nous avons donc deux nœuds de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) . Un point courant de cet élément sera obtenu par interpolation linéaire entre les deux nœuds, paramétrée par ξ . On cherche cette interpolation sous la forme $x(\xi) = {}^T\mathbf{N}(\xi)\mathbf{x}_n$, $y(\xi) = {}^T\mathbf{N}(\xi)\mathbf{y}_n$ et $z(\xi) = {}^T\mathbf{N}(\xi)\mathbf{z}_n$, avec ${}^T\mathbf{N}(\xi) = {}^T(N_1(\xi), N_2(\xi))$ et $N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$, $N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$. De manière plus « compacte », on peut écrire :

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi), \quad i = 1, 2, \quad \xi_i = \pm 1 \quad (\text{et } \xi \in [-1, 1]) \quad (1.5)$$

Dans cette interpolation (comme dans toutes interpolation), on a une relation entre $d\mathbf{x}$ et $d\xi$. Notons $d\mathbf{x} = \mathbf{a}d\xi$. Alors :

$${}^T\mathbf{a} = {}^T(x_{,\xi}, y_{,\xi}, z_{,\xi}) = \frac{1}{2} {}^T(x_{21}, y_{21}, z_{21}) \quad (1.6)$$

avec ici $x_{21} = x_2 - x_1$, $y_{21} = y_2 - y_1$ et $z_{21} = z_2 - z_1$. On voit ainsi comment passer d'une intégrale sur le segment réel à une intégrale sur l'élément de référence.

De même, on peut chercher la relation entre $ds = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$. Nous notons $ds = m d\xi$. On a alors :

$$m = |\mathbf{a}| = \frac{1}{2} \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2} = \frac{L_e}{2} \quad (1.7)$$

On voit alors l'égalité des intégrations :

$$\int_{L_e} \dots ds = \int_{-1}^{+1} \dots m d\xi \quad (1.8)$$

Par ailleurs, on a la relation :

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{ds}{d\xi} \frac{d}{ds} = m \frac{d}{ds} \quad (1.9)$$

1.5.2 Rappels sur la jacobienne et le jacobien d'une transformation

Nous considérons une transformation de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m donnée par la fonction $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_{y_1}, \dots, f_{y_m})$. La matrice jacobienne (d'après Carl Jacobi) associée à f est définie par :

$$J_f = \begin{pmatrix} {}^T \nabla \mathbf{f}_{y_1} \\ \vdots \\ {}^T \nabla \mathbf{f}_{y_m} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

i.e., sous forme complètement développée la jacobienne de f s'écrit :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{y_1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{y_m}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{y_m}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Au voisinage d'un point M , l'approximation linéaire de la fonction f est donnée par :

$$f(X) \approx f(M) + J_f(M) \mathbf{MX} \quad (1.12)$$

La composée $f \circ g$ de fonctions différentiables est différentiable, et sa matrice jacobienne s'obtient par la formule :

$$J_{f \circ g} = (J_f \circ g) \cdot J_g \quad (1.13)$$

Dans le cas où $m = n$, on appelle j_f le jacobien de f , défini comme le déterminant de sa matrice jacobienne :

$$j_f = \det(J_f) \quad (1.14)$$

Dire que le jacobien est non nul revient donc à dire que la matrice jacobienne est inversible. Si le jacobien est positif au point M , l'orientation de l'espace est conservée au voisinage de ce point. À l'inverse, l'orientation est inversée si le jacobien est négatif. Le jacobien d'une composée de fonctions est le produit des jacobiens individuels. Le jacobien de la réciproque d'une fonction est l'inverse du jacobien de la fonction. Cette dernière propriété est liée au théorème d'inversion locale (qui peut être vu entre autre comme une extension du théorème des fonctions implicite en dimension supérieure à 1 dans le cas réel). Une fonction F de classe C^1 est inversible au voisinage de M avec une réciproque F^{-1} de classe C^1 si et seulement si son jacobien en M est non nul (théorème d'inversion locale). De plus, la matrice jacobienne de F^{-1} se déduit de l'inverse de la matrice jacobienne de F au moyen de la formule :

$$J_{F^{-1}} = (J_F \circ F^{-1})^{-1} \quad (1.15)$$

Théorème 2 — Théorème d'inversion locale. Soit f une application de U dans F , où U est un ouvert d'un espace de Banach réel et F un espace de Banach et soit x un point de U . Si f est de classe C^p , avec p un entier strictement positif et si la différentielle de f au point x est un isomorphisme bicontinu, alors il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert W de $f(x)$ tels que f se restreigne en une bijection de V dans W dont la réciproque est de classe C^p .

Comme illustré au paragraphe précédent, le jacobien sert surtout pour effectuer des changement de variables dans les calculs des intégrales.

Théorème 3 — Théorème de changement de variables dans les intégrales multiples. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , F une injection de classe C^1 de U dans \mathbb{R}^n et $V = F(U)$.

Si g est une fonction mesurable de V dans $[0, +\infty[$, on a égalité des intégrales pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n :

$$\int_V g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_U g(F(x_1, \dots, x_n)) |\det J_F(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n. \quad (1.16)$$

Si l'on considère un « petit » domaine, le volume de l'image de ce domaine par la fonction f sera celui du domaine de départ multiplié par la valeur absolue du jacobien.

1.5.3 Éléments de référence unidimensionnels linéaires à n nœuds

Il est possible de généraliser en considérant un segment ayant plusieurs nœuds intermédiaires comme indiqué sur la figure 1.8. Si l'on considère le cas général à n nœuds de la figure 1.9 alors il

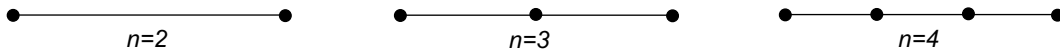


FIGURE 1.8 – Nœuds intermédiaires



FIGURE 1.9 – Cas général

vient :

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \frac{\xi_r - \xi}{\xi_r - \xi_i} \quad (1.17)$$

Si de plus, les n nœuds sont régulièrement espacés :

$$\xi_i = -1 + 2 \frac{i-1}{n-1} \quad N_i(\xi) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n \frac{(2r-n-1) - \xi(n-1)}{2(r-i)} \quad (1.18)$$

1.5.4 Éléments de référence unidimensionnel infini

Dans certains cas, il peut être nécessaire de prendre en compte des conditions aux limites situées à l'infini : problèmes de fondations, d'acoustique, de couplage fluide-structure.

Il est possible, comme aux paragraphes précédents, de proposer une transformation entre un élément de référence de longueur 2 et un élément réel infini, transformation illustrée sur la figure 1.10. Nous ne considérerons que le cas de l'élément unidimensionnel linéaire à 2 nœuds dans

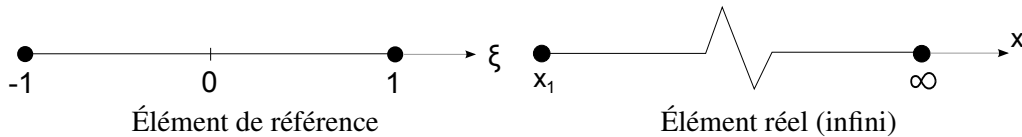


FIGURE 1.10 – Transformation

ce paragraphe, mais on pourrait étudier le cas de l'élément linéaire unidimensionnel à n nœuds, ou des éléments bidimensionnels par exemple. Nous allons toujours avoir une interpolation de la fonction solution sous la forme :

$$u = \frac{1-\xi}{2} u_1 + \frac{1+\xi}{2} u_2 \quad (1.19)$$

car concrètement u_2 est connu (et fini) : c'est le « lieu » où l'on situe l'infini dans le modèle éléments finis. Par contre, l'interpolation du point courant sera donnée par :

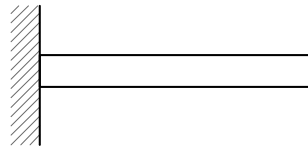
$$x = x_1 + \frac{1+\xi}{1-\xi} \alpha \quad (1.20)$$

où α est une constante. On aura également :

$$u_{,x} = \frac{u_2 - u_1}{4\alpha} (1 - \xi)^2 \quad (1.21)$$

1.5.5 Élément fini de barre unidimensionnel

On considère la barre donnée ci-dessous, de section A , de longueur L , et constituée d'un matériau homogène isotrope de module d'Young E et densité ρ et soumise uniquement à son poids propre. On souhaite discrétiser ce problème à l'aide d'un éléments unidimensionnels linéaires tel que



présenté au paragraphe 1.5.1. La forme variationnelle de ce problème d'élasticité linéaire unidimensionnel (théorie des poutres) est :

$$W = \int_0^L EA v_{,x} u_{,x} dx - \int_0^L \rho g A v = 0, \quad \forall v \quad (1.22)$$

avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ et $v(0) = 0$. Cette forme variationnelle, s'écrit pour l'élément (ou pour chaque élément si on en avait plusieurs) :

$$W = {}^T \mathbf{v} (\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \quad (1.23)$$

Nous avons vu que la géométrie, représentée par un élément, est approximée par :

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2, \quad \xi \in [-1; 1] \quad (1.24)$$

La représentation de la fonction solution, est :

$$u = \frac{1-\xi}{2} u_1 + \frac{1+\xi}{2} u_2, \quad \xi \in [-1; 1] \quad (1.25)$$

Nous obtenons la matrice de rigidité élémentaire :

$$\mathbf{K} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

et le vecteur des forces nodales élémentaires :

$$\mathbf{f} = \rho g A \frac{L}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

En prenant en compte les conditions aux limites $u_1 = 0$ et $v_1 = 0$, l'expression $W = 0$ donne :

$$u_2 = \frac{\rho g L^2}{8E} \quad (1.28)$$

La déformation est donnée par $\varepsilon = u_{,x} = {}^T\mathbf{B}\mathbf{u}_n$ avec ${}^T\mathbf{B} = \frac{1}{L}(-1, 1)$. On obtient :

$$\varepsilon = \frac{\rho g L}{8E} \quad (1.29)$$

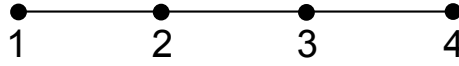
Elle est constante sur l'élément. Quant à la contrainte, elle est obtenue par $\sigma = E\varepsilon$, soit :

$$\sigma = \frac{\rho g L}{8} \quad (1.30)$$

Elle est également constante sur l'élément.

1.5.6 Assemblage de trois éléments unidimensionnels linéaires à deux nœuds

Poursuivons le cas de la poutre du paragraphe précédent, mais considérons une discrétisation de la barre à l'aide de trois éléments : Chaque élément e (de longueur L_e) possède une matrice de rigidité



élémentaire \mathbf{k}_e et un vecteur des forces nodales élémentaires \mathbf{f}_e définis par :

$$\mathbf{K}_e = \frac{2EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_e = \rho g A \frac{L_e}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Les variables nodales sont ${}^T\mathbf{q} = {}^T\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, et, les matrices élémentaires redonnées ci-dessus s'écrivent, en fonction de ces variables nodales :

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2EA}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \frac{2EA}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_3 = \frac{2EA}{L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et les forces nodales :

$$\mathbf{f}_1 = \rho g A \frac{L_1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_2 = \rho g A \frac{L_2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_3 = \rho g A \frac{L_3}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

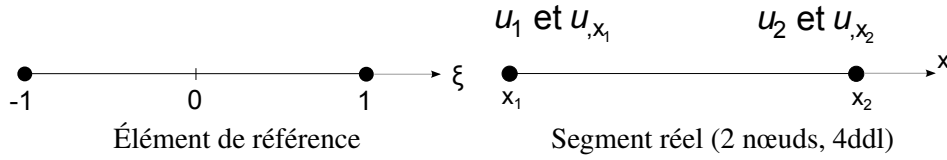
L'assemblage permettant de constituer le système complet est simplement obtenu par :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \quad (1.32)$$

On résoud alors $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$ avec la condition aux limites $u_1 = 0$.

Remarque La matrice \mathbf{K} obtenue sur cet exemple a un caractère bande (la matrice est vide en dehors d'une zone centrée sur la diagonale). Ceci est dû à la numérotation des nœuds. Une autre numérotation pourrait faire perdre ce caractère important (stockage et résolution).

C'est pourquoi, dans les programmes éléments finis, une étape de renumérotation automatique des nœuds est généralement faite.



1.5.7 Élément de barre unidimensionnel de type Hermite (élément subparamétrique)

En restant encore sur notre élément linéaire unidimensionnel, nous allons voir comment ajouter des contraintes sur les dérivées aux nœuds : La géométrie est encore une fois approximée par :

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2, \quad \xi \in [-1; 1] \quad (1.33)$$

Mais cette fois, l'approximation de la fonction solution est voulue sous la forme :

$$u = {}^T(N_1, N_2, N_3, N_4) \mathbf{u}_n \quad \text{avec les ddl} \quad {}^T\mathbf{u}_n = {}^T(u_1, u_{,x_1}, u_2, u_{,x_2}) \quad (1.34)$$

Les fonctions N_i choisies sont des fonctions cubiques de type Hermite assurant une continuité de u et $u_{,x}$ aux nœuds 1 et 2. On a :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi); \quad N_2 = \frac{L}{8}(\xi^2-1)(1-\xi); \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi); \quad N_4 = \frac{L}{8}(\xi^2-1)(1+\xi) \quad (1.35)$$

Le champ $u_{,x}$, qui est la déformation ε est donné par : $\varepsilon = {}^T\mathbf{B}\{u_n\}$ avec :

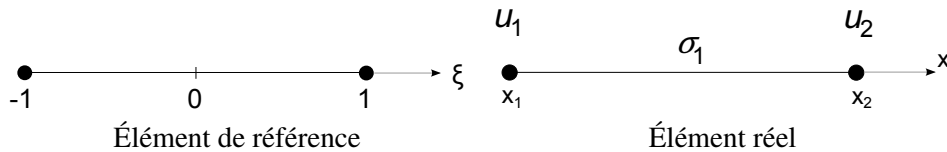
$${}^T\mathbf{B} = {}^T\left(\frac{3}{2L}(\xi^2-1), \quad \frac{1}{4}(3\xi^2-2\xi-1), \quad \frac{3}{2L}(1-\xi^2), \quad \frac{1}{4}(3\xi^2+2\xi-1)\right) \quad (1.36)$$

La contrainte, dans le cas où le coefficient d'élasticité H est constant est donnée par :

$$\sigma_x = H {}^T\mathbf{B} \mathbf{u}_n \quad (1.37)$$

1.5.8 Élément mixte unidimensionnel

Continuons avec notre élément de référence linéaire unidimensionnel. Cette fois-ci nous souhaitons le mettre en relation avec un segment réel dont les inconnues nodales sont les déplacements u_1 et u_2 , mais qui possède en plus une approximation constante de la contrainte par élément : Nous



cherchons donc une approximation C^0 du déplacement et C^{-1} de la contrainte. Pour la géométrie, nous avons une fois encore :

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2, \quad \xi \in [-1; 1] \quad (1.38)$$

Pour la contrainte, nous avons :

$$\sigma_x(x) = \sigma_1 \text{ (constante)} \quad (1.39)$$

La formulation variationnelle mixte de l'élasticité linéaire unidimensionnel est (voir fonctionnelle d'Hellinger-Reissner sous sa deuxième forme ou fonctionnelle mixte) :

$$W = \int_0^L A \left(-\sigma_x^* \frac{1}{H} \sigma_x + \sigma_x^* u_{,x} + v_{,x} \sigma_x \right) dx - \int_0^L A v f_x dx - (v f_S)_{S_f} = 0 \quad \forall v, \sigma^* \quad (1.40)$$

avec les conditions aux limites $u = \bar{u}$ et $u^* = 0$ sur S_u . De manière discrétisée, il vient :

$$W = {}^T(v_1, v_2, \sigma_1^*) \left(\begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbf{b} \\ {}^T\mathbf{b} & -a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}_n \end{pmatrix} \right) \quad (1.41)$$

avec :

$$\mathbf{b} = \int_0^L \frac{A}{L} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad a = \int_0^L \frac{A}{H} dx; \quad \mathbf{f}_n = \int_{-1}^{+1} A \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \frac{L}{2} f_x d\xi = A f_x \frac{L}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

On pourrait s'arrêter là avec le système précédent à résoudre. Toutefois, σ_1 est une variable locale sans couplage avec les autres éléments. On peut donc l'exprimer en fonction des autres ddl de l'élément u_1 et u_2 . La dernière ligne du système donne : $\sigma_1^* = ({}^T\mathbf{b}\mathbf{u}_n - a\sigma_1) = 0, \forall \sigma_1^*$, d'où :

$$\sigma_1 = \frac{1}{a} {}^T\mathbf{b}\mathbf{u}_n \quad (1.43)$$

Et le système devient alors :

$$W = {}^T\mathbf{v}_n (\mathbf{b}\sigma_1 - \mathbf{f}_n) = {}^T\mathbf{v}_n (\mathbf{K}\mathbf{u}_n - \mathbf{f}_n) \quad (1.44)$$

avec :

$$\mathbf{K} = \mathbf{b} \frac{1}{a} {}^T\mathbf{b} \quad (1.45)$$

Dans le cas où H est constant, la matrice de rigidité obtenue est identique à celle du modèle en déplacements du paragraphe 1.5.5.

1.6 Sur les déplacements imposés

1.6.1 Problème considéré

Nous repartons de l'élément de barre 1D défini au paragraphe 1.5.5.

Rappelons que la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des forces nodales élémentaires sont :

$$\mathbf{K} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \rho g A \frac{L}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

L'assemblage de trois éléments, décrit au paragraphe 1.5.6, conduit à :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \quad (1.47)$$

On traitera le cas où les trois éléments ont la même longueur ($L_1 = L_2 = L_3 = L$) et où seul le nœud 4 est soumis à une force. On obtient alors un système de type $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$ à résoudre, avec la condition aux limites $u_1 = 0$, qui s'écrit explicitement dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

(avec $F' = \rho g L^2 / (8E)$).

1.6.2 Retour sur la résolution de systèmes linéaires

Soit à résoudre un système linéaire de type :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1.49)$$

Ce système peut être réécrit par blocs sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Si A_{11} est inversible, alors on peut écrire la première ligne :

$$x_1 = A_{11}^{-1} (b_1 - A_{12}x_2) \quad (1.51)$$

ce qui donne, dans la deuxième ligne :

$$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \quad \text{que l'on note : } Sx_2 = c \quad (1.52)$$

La matrice S est appelée complément de Schur (présenté au paragraphe ??), ou matrice condensée sur les degrés de liberté x_2 . Ce calcul est également identique à celui présenté à propos de la condensation statique au paragraphe ??. Dans ce cas, la matrice S est la matrice de rigidité du super-élément considéré.

Le système initial (1.49) est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbb{O} & S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ c \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

qui peut être réécrit :

$$\begin{bmatrix} I & \mathbb{O} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbb{O} & S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbb{O} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

1.6.3 Complément de Schur et déplacements imposés

Nous cherchons toujours à résoudre notre système :

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{f} \quad (1.55)$$

Considérons la matrice \mathbf{D} , matrice booléenne, permettant d'extraire de l'ensemble des inconnues nodales \mathbf{q} le sous-ensemble $\mathbf{q}_2 = \mathbf{Dq}$ sur lesquels portent les conditions de déplacements imposés \mathbf{q}_d (ici on traite le cas général, i.e. les déplacements imposés peuvent être nuls ou non). La matrice \mathbf{D} n'est pas rectangulaire : si on souhaite imposer d déplacements parmi les n ddl du système, alors \mathbf{D} est de dimension $d \times n$, et donc \mathbf{q}_2 est bien un vecteur à d composantes, comme \mathbf{u}_d .

Le système $\mathbf{Kq} = \mathbf{F}$ peut alors s'écrire, par blocs, en utilisant le complément de Schur (1.53) sous une forme triangulaire d'où l'on tire le sous-système correspondant aux déplacements non imposés :

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_d \quad (1.56)$$

Ce système est réduit, i.e. possède moins d'inconnues que le problème initial, mais il est nécessaire de modifier le chargement extérieur.

Son inconvénient est qu'il est nécessaire d'effectuer un tri explicite au sein des ddl, ce qui a pour conséquence de «remplir» le terme \mathbf{K}_{12} , et par suite peut générer un surcoût de calcul lorsque le nombre de ddl bloqué est grand.

C'est ainsi que procède le code ABAQUS pour imposer les déplacements.

1.6.4 Multiplicateurs de Lagrange et déplacements imposés

Une autre technique, pour imposer des déplacements, consiste à utiliser les multiplicateurs de Lagrange : les contraintes sont relaxées, puis réintroduites via des multiplicateurs de Lagrange.

Dans ce cas, il n'est plus nécessaire de séparer explicitement les ddl, mais la taille du problème augmente puisqu'il faut lui adjoindre les multiplicateurs.

Le système à résoudre s'écrit très simplement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{u}_d \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Il est intéressant de remarquer que la première ligne montre que les multiplicateurs de Lagrange sont bien les réactions aux appuis.

Par contre, la matrice du système (1.57), \mathbf{A} , si elle reste bien symétrique, n'est plus définie positive. Elle possède des valeurs propres négatives. Toutefois, on dispose du résultat suivant :

Théorème 4 si \mathbf{K} est symétrique définie positive, alors :

$$\mathbf{A} \text{ inversible} \iff \mathbf{D} \text{ injective} \iff \ker \mathbf{D} = \emptyset \quad (1.58)$$

ce qui correspond aux cas où toutes les liaisons sont indépendantes.

Afin de ne pas détruire la structure bande de \mathbf{K} (ce que ferait une factorisation de Gauss), et d'éviter des pivotages (que ferait une factorisation de Crout, i.e. \mathbf{LDL}^T), on peut développer une autre technique, dite technique de double multiplicateur, qui est celle employée dans CAST3M :

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} - \mathbf{D}^T(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{u}_d \end{cases} \quad (1.59)$$

L'inconvénient reste l'augmentation de la taille du système lorsque l'on a de nombreux blocages.

1.6.5 Actions extérieures et déplacements imposés

L'interprétation physique des multiplicateurs de Lagrange conduit naturellement à une autre méthode : il est possible de considérer un déplacement imposé comme une action extérieure, par exemple comme la réaction d'un ressort ayant une raideur k très grande et un déplacement imposé à sa base.

On se retrouve alors avec un système du type :

$$(\mathbf{K} + \mathbf{D}^T \mathbf{k} \mathbf{D}) \mathbf{q} = \mathbf{F} + \mathbf{D}^T \mathbf{k} \mathbf{D} \mathbf{u}_d \quad (1.60)$$

dans lequel on n'a fait qu'ajouter des termes à la matrice de rigidité sur les ddl correspondant à ces déplacements et au vecteur des forces généralisées sur les efforts duaux.

Le problème réside dans le choix de la valeur de k : trop petite, la condition est mal imposée ; trop grande, le système devient très mal conditionné, voire numériquement singulier.

1.6.6 Retour sur notre exemple

Nous devons toujours résoudre :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

avec la condition aux limites $u_1 = 0$. Tout d'abord, on pourra essayer de résoudre sans introduire de conditions aux limites afin de voir que le système est alors singulier. On obtient $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ et $F' = 0$. La méthode la plus rudimentaire consiste à prendre en compte directement et explicitement la condition aux limites. On supprime donc du système matriciel la ligne et la colonne correspondant à u_1 , et on résoud :

$$u_1 = 0 \text{ et } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \end{cases} \quad (1.62)$$

Séparons maintenant les déplacements imposés des autres ddl, par une matrice booléenne \mathbf{D} : \mathbf{D} est une matrice 1×4 , et seul le terme $D_{11} = 1$ est non nul : $\mathbf{q}_2 = \mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{u}_1$, et le déplacement imposé est $\mathbf{u}_d = \mathbf{0}$.

Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{22} = [1] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \\ \mathbf{f}_2 = (u_d = 0) \end{pmatrix}$$

Par la méthode du complément de Schur, on est encore ramené à la résolution du système (1.62). On pourra s'amuser à calculer \mathbf{K}_{11}^{-1} , (S)... Par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ u_d = 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \\ \lambda = -F' \end{cases} \quad (1.64)$$

Par la technique du double multiplicateur, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ 0 \\ u_d = 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \\ \lambda_1 = -F' \\ \lambda_2 = -F' \end{cases} \quad (1.65)$$

En considérant une action extérieure, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} 1+k & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+k \cdot u_d = 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = 2F' \\ u_4 = 3F' \end{cases} \quad (1.66)$$

Dans tous les exemples présentés, nous avons résolu les systèmes à la main, ce qui masque d'éventuels problèmes numériques (notamment dans le dernier cas).

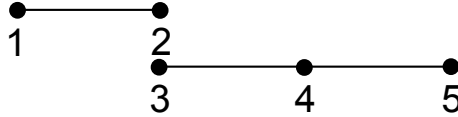
1.6.7 Relations linéaires entre ddl

Cette situation se présente par exemple lors de la prise en compte de conditions de symétrie, de conditions aux limites périodiques... Il s'agit à chaque fois de conditions de type :

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{u}_d \quad (1.67)$$

où \mathbf{D} n'est plus forcément booléenne.

Nous allons l'appliquer ici, à titre d'exemple simple, au cas où la poutre considérée est maintenant constituée de deux poutres, que l'on va « coller » par une telle relation. La poutre est constituée



de la poutre 1 – 2 et de la poutre 3 – 4 – 5, les points 2 et 3 étant astreints à rester collés ensemble. En ajoutant la relation $u_2 = u_3$ par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange (i.e. en ajoutant $\lambda_1(u_2 - u_3)$, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ 0 \\ u_d = 0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

auquel il faut également ajouter la condition aux limites $u_1=0$.

Si cette condition aux limites est imposée par un multiplicateur de Lagrange λ_2 , alors finalement, il faut résoudre :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où : } \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = F' \\ u_3 = F' \\ u_4 = 2F' \\ u_5 = 3F' \\ \lambda_1 = -F' \\ \lambda_2 = -F' \end{cases} \quad (1.69)$$