

Vincent Manet

Méthode des éléments finis

*Vulgarisation des aspects mathématiques
et illustration de la méthode*

Vincent Manet — 2013 (Ceci est la version « livre » de ce document)

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France :

- paternité ;
- pas d'utilisation commerciale ;
- partage des conditions initiales à l'identique ;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



Introduction

Dans ce (de moins en moins court) document, plutôt à destination d'ingénieurs mécaniciens connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons essayer de faire une présentation un peu plus théorique que ce qui leur est généralement proposé (et qui est quand même souvent de type « preuve par les mains », ce qui occulte trop de points).

Nous ne ferons appel qu'à des notions mathématiques de bases généralement déjà vues pour la plupart en taupe (ou en tout début de cycle d'ingé)... bien que des compléments que l'on peut qualifier d'élémentaires nous aient été demandés et aient été inclus.

Nous espérons, grâce à cette présentation théorique montrer toute la souplesse et la puissance de la méthode, afin de permettre au lecteur d'envisager d'autres simulations que celles qu'il a pu déjà réaliser par le passé.

But du document

Le but initial était de *présenter brièvement la théorie mathématique* derrière les éléments finis afin que les ingénieurs utilisant cette méthode puisse en envisager toutes les applications, ainsi que de *couvrir les aspects qui, selon nous, devraient être connus de tout ingénieur mécanicien impliqué ou intéressé par le calcul numérique.*

Toutefois, il s'envisage comme support de référence à plusieurs cours, cours qui ne portent pas sur tous les aspects traités dans ce document, et pendant lesquels les aspects pratiques sont plus développés (avec mise en situation sur machine).

Même si nous avons voulu rester le plus succinct possible, l'introduction de notions de proche en proche a conduit à un document fait aujourd'hui une certaine taille (par exemple, nous avons besoins des espaces de Sobolev, mais comment les introduire sans parler des espaces de Lebesgue, mais comment les introduire sans parler...).

Aussi le document a-t-il finalement été découpé en plusieurs parties : un survol des notions mathématiques, puis le traitement du problème continu constituent l'ossature théorique nécessaire à asseoir la MEF sur un socle solide. La discrétisation par éléments finis à proprement parler n'est abordé qu'ensuite, et d'ailleurs un seul chapitre suffirait à en faire le tour... sauf à entrer plus dans le détail concernant « ce qui fâche » : homogénéisation, non linéarité, dynamique, ce qui est fait dans des chapitres séparés.

Enfin, d'autres méthodes sont abordées car également très employées aujourd'hui. Aussi est-il indispensable selon nous d'en avoir entendu parlé et d'en connaître les principales notions (BEM, FEEC...).

En annexes, se trouve un petit fourre-tout comprenant des choses censées être maîtrisées depuis la taupe (mais qui parfois nous sont demandées) et les compléments qui alourdiraient encore les propos précédents.

Certaines notions (essentiellement de topologie) ne sont pas présentées dans ce document. Il nous a semblé que le lecteur devait avoir quelques souvenirs de ce qu'est un ouvert, un fermé, l'adhérence, la densité... Par ailleurs, leur nom peut être suffisamment évocateur pour se passer d'une définition formelle dans le contexte de ce document.

Attention, ce document n'est pas un document de mathématiques, il ne contient d'ailleurs aucune preuve. C'est, dans ces deux premières parties, un document de vulgarisation de notions mathématiques nécessaires à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Nous avons voulu réaliser un survol des notions importantes, mais malgré tout, afin de ne pas être parfois trop laconique, nous avons un peu débordé.

En fin de document, un petit index des noms propres permettra au lecteur de replacer les divers développements mentionnés dans l'histoire... Il se peut qu'il subsistent quelques erreurs, notamment au niveau des nationalités mentionnées, car il n'est pas toujours aisé de déterminer rapidement cette information (et nous ne connaissons pas toutes les biographies des personnes citées).

Ce document a été réalisé très rapidement, et de manière extrêmement hachée. Il comporte forcément encore beaucoup de fautes : merci de m'en faire part.

Démarche de l'ingénieur numéricien

En préambule à ce document, nous tenions à synthétiser la démarche complète de l'ingénieur numéricien :

- Modélisation / mise en équations – Construction du problème continu (système d'EDP).
- Analyse mathématique du problème posé – Existence, unicité, propriétés des solutions.
- Conception d'une méthode numérique – Construction d'un problème discrétisé.
- Analyse numérique – Questions de stabilité, convergence, précision.
- Algorithmique – Choix de méthodes de résolution en dimension finie.
- Mise en œuvre sur ordinateur – Programmation.
- Pre et Post Traitement (maillages / visualisation) – Interpolation, extrapolation, outils de la CAO.

Tous ces points ne seront évidemment pas abordés dans ce document !

Remerciements :

Nous n'avions pas prévu de réaliser une deuxième version aussi rapidement. Celle-ci existe suite aux sollicitations de Mathias Legrand. C'est lui qui a développé les macros nécessaires à l'amélioration très très nette de la qualité typographique (environnements pour les notes historiques, les théorèmes, lemmes...).

C'est également pourquoi coexistent aujourd'hui deux versions (mais issues du même code source) : l'un que nous appelons « version cours » (plus en accord avec ce que nous proposons en cours), et l'autre « version livre », plus proche d'un ouvrage.

Table des matières

Introduction	3
But du document	3
Démarche de l'ingénieur numéricien	4
Table des matières	5
1 Les ondes	7
1.1 Introduction	7
1.2 Notions de valeur, vecteur, mode et fréquence propres	9
1.3 Vibration des structures	10
1.3.1 Vibrations libres non amorties	10
1.3.2 Vibrations libres amorties	11
1.3.3 Vibrations périodiques forcées	13
1.3.4 Régimes transitoires	14
1.3.5 Calcul des modes propres et méthodes de réduction modale	15
1.4 Pour aller plus loin : cas des chocs large bande	17
1.4.1 Approches temporelles	18
1.4.2 Approches fréquentielles	19
1.4.3 Remarques	22

Chapitre 1

Les ondes

Résumé — Jusqu'ici, nous n'avons quasiment pas parlé de mode propre cela est plus ou moins évoqué à travers, par exemple, « la plus petite période du système » au chapitre précédent... mais cela a été fait à dessein.

En effet, nous avons voulu, dans ce chapitre, regrouper les approches modales, car cela nous a semblé plus en cohérence.

1.1 Introduction

Dans la mesure où ce document s'adresse à des ingénieurs en mécanique (ou en acoustique), la notion de mode propre est une notion relativement maîtrisée.

Un système mécanique atteint un mode propre de vibration lorsque tous les points de ce système sont à une fréquence donnée appelée fréquence propre du système. Une fréquence propre est fondamentale si elle n'est pas le multiple d'une autre fréquence propre ; dans le cas contraire, c'est une harmonique.

On appelle résonance le phénomène selon lequel certains systèmes physiques sont particulièrement sensibles à certaines fréquences. Un système résonant peut accumuler une énergie, si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence propre. Soumis à une telle excitation, le système est alors le siège d'oscillations de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre un régime d'équilibre qui dépend des éléments dissipatifs du système, ou bien jusqu'à rupture d'un composant du système.

Si l'on soumet un système résonant à une percussion (pour les systèmes mécaniques) ou à une impulsion (pour les systèmes électriques), et non plus à une excitation périodique, alors le système sera le siège d'oscillations amorties, sur des fréquences proches de ses fréquences propres et retournera progressivement à son état stable. Physiquement, c'est le coup de marteau de choc donné sur une structure pour en déterminer les modes.

Un système susceptible d'entrer en résonance, i.e. susceptible d'être le siège d'oscillations amorties, est un oscillateur. Un tel système a la particularité de pouvoir emmagasiner temporairement de l'énergie sous deux formes : potentielle ou cinétique. L'oscillation est le phénomène par lequel l'énergie du système passe d'une forme à l'autre, de façon périodique.

Si l'on injecte une énergie potentielle au moment où l'énergie potentielle déjà emmagasinée est maximale, l'énergie ainsi injectée s'ajoute à l'énergie déjà emmagasinée et l'amplitude de l'oscillation va augmenter, ainsi que l'énergie totale. Idem pour l'énergie cinétique. Ainsi, si l'on apporte de l'énergie avec une périodicité égale (ou proche) de la périodicité propre du système, l'énergie totale va augmenter régulièrement et l'amplitude des oscillations du système va ainsi croître. L'exemple le plus simple est celui d'une balançoire : l'énergie de chaque poussée s'ajoute à l'énergie totale, à condition de pousser au bon moment...

Le phénomène de résonance n'est rien d'autre que cet effet d'accumulation de l'énergie en injectant celle-ci au moment où elle peut s'ajouter à l'énergie déjà accumulée, i.e. « en phase » avec cette dernière.

Quand l'excitation aura cessé, le système résonant sera le siège d'oscillations amorties : il va revenir plus ou moins vite à son état d'équilibre stable. En effet, l'énergie de départ sera peu à peu absorbée par les éléments dissipatifs du système (amortisseur visqueux en mécanique, résistances en électricité...). Un système peu amorti sera le siège d'un grand nombre d'oscillations qui diminueront lentement avant de disparaître complètement.

La représentation modale est pertinente dans le domaine des basses fréquences, i.e. pour les premiers modes propres. Dans les domaines moyenne et haute fréquences, on utilise des méthodes adaptées à la densité spectrale élevée.

Les domaines moyenne fréquence et haute fréquence sont définis par la densité spectrale. En effet, l'expression en fréquences n'a pas de sens pour définir ces domaines, une similitude sur un système physique modifie les fréquences propres mais le spectre reste semblable, à un facteur près. Dans le cas de fréquences multiples, il existe un sous-espace propre donc les modes propres sont arbitraires dans ce sous espace. Dans le cas de fréquences voisines (densité spectrale élevée), la représentation modale n'est pas robuste car de faibles perturbations du domaine physique vont entraîner un changement important des modes propres associés à ces fréquences. Donc la représentation modale n'est pertinente que pour le domaine des basses fréquences, domaine défini par la densité spectrale. Le domaine basse fréquence s'étendra jusqu'à quelques Hz en génie civil, jusqu'à des milliers de Hz pour de petites structures mécaniques

Le phénomène de synchronisation, ou accrochage de fréquences est un phénomène par lequel deux systèmes excités chacun selon une fréquences se mettent à osciller selon la même fréquence. On trouve de nombreux exemples de ce phénomène dans la nature :

- Le plus connu et observable est la Lune : la Lune présente toujours la même face à la Terre. Cela signifie que la période de rotation de la Lune sur elle-même T_0 est égale à la période de rotation de la lune autour de la Terre $T \cong 28$ jours. C'est une résonance 1 : 1. L'analyse montre que ce n'est pas une coïncidence : cela est dû à un faible couplage gravitationnel entre ces deux mouvements.
- Un exemple tout aussi connu est celui de la synchronisation des balanciers de deux pendules accrochées au même mur d'une pièce. Un faible couplage par les vibrations transmises dans le mur, et une légère dissipation, expliquent cet accrochage de fréquences et cette résonance 1 : 1.

C'est Huygens qui a remarqué et expliqué ce phénomène : Le système composé des deux balanciers et du mur a deux fréquences voisines faiblement couplées, il possède par le couplage deux modes propres correspondant aux mouvements en phase et en opposition de phase des deux pendules. C'est sur le premier mode que se produit la synchronisation.

- L'escalier de Cantor, ou escalier du diable est un exemple mathématique incontournable en analyse. Il correspond au graphe d'une fonction continue f , sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, qui est dérivable presque partout, la dérivée étant presque partout nulle. L'escalier de Cantor peut également être vu comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue qui n'est pas à densité, et qui est même étrangère à la mesure de Lebesgue.

Enfin, l'escalier du diable peut aussi être vu comme résultant d'un phénomène de synchronisation. Si on change un paramètre extérieur du système de façon lente et continue, par exemple l'amplitude $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, alors la valeur de l'accrochage $a = p/q$ va dépendre de ce paramètre. On obtient alors une fonction $a(\alpha_0)$ de \mathbb{R} dans les rationnels \mathbb{Q} . Cette fonction très étrange comporte une multitude de paliers plus ou moins larges... et correspond à l'escalier du diable.

- On retrouve la synchronisation dans de nombreux phénomènes naturels : vols d'oiseau, clignotement des lucioles...

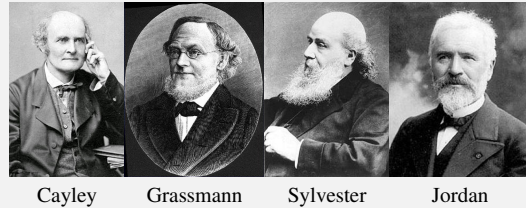
En mathématiques, le concept de vecteur propre est une notion portant sur une application linéaire d'un espace dans lui-même. Il correspond à l'étude des axes privilégiés, selon lesquels l'application se comporte comme une dilatation, multipliant les vecteurs par une même constante. Ce rapport de dilatation est appelé valeur propre ; les vecteurs auxquels il s'applique s'appellent vecteurs propres, réunis en un espace propre.

Histoire

Bien qu'existant sous une forme non formalisée depuis longtemps, il aura fallu attendre l'invention des structures algébriques nécessaires pour vraiment pouvoir parler des valeurs propres (issues par exemple de la clôture algébrique de \mathbb{C} démontrée par Gauß).

L'exemple immédiat qui vient à l'esprit est le traitement de l'équation de la chaleur par Fourier qui utilise déjà une base de vecteurs propres, bien que le concept n'ait pas encore été défini. Hamilton introduira la notion de polynôme caractéristique, ce qui permet de déterminer ce que l'on appelle maintenant les valeurs propres associées à l'endomorphisme d'une ED linéaire.

Plusieurs aller-retour permettront de définir les notions d'espace vectoriel (Cayley, Grassmann, Cauchy), de matrice (Sylvester, Cayley) et de valeurs propres (Sylvester, Jordan). Hilbert finalement fera prendre conscience de la profondeur de la notion de valeur propre. L'analyse fonctionnelle naît dans la foulée, et elle est l'objet de la première partie de ce document.



Cayley

Grassmann

Sylvester

Jordan

1.2 Notions de valeur, vecteur, mode et fréquence propres

Étant donné une matrice carrée \mathbf{A} d'ordre n (à coefficients dans un anneau commutatif), on cherche un polynôme dont les racines sont précisément les valeurs propres de \mathbf{A} . Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de \mathbf{A} et est défini par :

$$p_A(X) := \det(X\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \quad (1.1)$$

avec X l'indéterminée du polynôme et \mathbf{I}_n la matrice identité d'ordre n . Si λ est une valeur propre de \mathbf{A} , alors il existe un vecteur propre \mathbf{V} non nul tel que $\mathbf{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}$, i.e. tel que l'on ait $(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Puisque \mathbf{V} est non nul, cela implique que la matrice $\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ est singulière, donc de déterminant nul. Cela montre que les valeurs propres de \mathbf{A} sont des zéros de la fonction $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ i.e. des racines du polynôme $\det(X\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$. La propriété la plus importante des polynômes caractéristiques est que les valeurs propres de \mathbf{A} sont exactement les racines du polynôme $p_A(X)$.

Quelques propriétés importantes :

- $p_A(X)$ est un polynôme unitaire (coefficient dominant égal à 1) et son degré est égal à n .
- \mathbf{A} et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. (\mathbf{A} et \mathbf{B} sont semblables s'il existe une matrice inversible \mathbf{P} telle que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$). Attention, la réciproque n'est pas vraie en général.
- Si $p_A(X)$ peut être décomposé en produit de facteurs de degré 1, alors \mathbf{A} est semblable à une matrice triangulaire (et même à une matrice de Jordan).

Pour aller un peu plus loin Le théorème de Cayley-Hamilton (dont la première démonstration est due à Frobenius) affirme que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif quelconque annule son propre polynôme caractéristique.

En termes de matrice, cela signifie que : si \mathbf{A} est une matrice carrée d'ordre n et si $p_A(X)$ est son polynôme caractéristique, alors en remplaçant formellement X par la matrice \mathbf{A} dans le polynôme, le résultat est la matrice nulle, i.e. :

$$p_A(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + p_1\mathbf{A} + p_0\mathbf{I}_n = \mathbf{0}_n \quad (1.2)$$

Cela signifie que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de \mathbf{A} . Les applications sont importantes car le polynôme minimal (qui est l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal annulateur de l'ensemble des polynômes qui annulent l'endomorphisme dont \mathbf{A} est la représentation) cache une décomposition en somme directe de sous-espaces stables.

1.3 Vibration des structures

Revenons sur l'équation de la dynamique sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1.3)$$

qui peut être vue comme l'équation de la statique $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$ à laquelle on ajoute des forces *extérieures* d'inertie $-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}$ et des forces *extérieures* visqueuses $-\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$. D'un point de vue pratique, on distingue 3 types de problèmes :

- détermination d'une réponse libre : dans ce cas, la sollicitation est nulle $\mathbf{F} = \mathbf{0}$;
- détermination d'une réponse périodique : dans ce cas, la sollicitation \mathbf{F} est périodique ;
- détermination d'une réponse transitoire : dans ce cas, la sollicitation \mathbf{F} est quelconque.

Dans les deux premiers cas, les conditions initiales du système n'ont aucune importance. On cherche à déterminer une solution générale. On pourrait considérer que le chapitre précédent ?? répond à ces trois types de problèmes, ce qui n'est pas fondamentalement faux. Toutefois, il est plus judicieux de considérer que seul le cas de la dynamique transitoire y a été explicité, et encore uniquement pour l'aspect non modal (qui sera développé dans ce chapitre un peu plus loin).

En effet, dans les cas des vibrations libres (amorties ou non) ou périodique forcées, il est possible d'utiliser la notion de mode, qui n'avait pas été abordée dans les chapitres précédents.

1.3.1 Vibrations libres non amorties

En l'absence de sollicitation et d'amortissement, l'équation de la dynamique devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

dont la solution générale est harmonique et s'écrit :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

En injectant la forme de la solution générale dans l'équation de la dynamique, on voit que la pulsation ω est solution du problème de valeurs propres suivant :

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} = \omega^2\mathbf{M}\bar{\mathbf{q}} \quad (1.6)$$

ce qui conduit à :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (1.7)$$

On obtient ainsi les n valeurs propres $\omega_1, \dots, \omega_n$, où n est la taille du système (i.e. les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont $n \times n$). On trouve également les n vecteurs $\bar{\mathbf{q}}_i$ appelés modes propres du système et que l'on norme par rapport à la masse, i.e. tels que :

$${}^T\bar{\mathbf{q}}_i\mathbf{M}\bar{\mathbf{q}}_i = 1 \quad (\forall i \in [1, n]) \quad (1.8)$$

La détermination des valeurs propres ω_i se fait rarement en cherchant les zéros de l'équation du déterminant en raison de la très grande taille du système dans le cas général, et des considérables différences d'ordre de grandeur entre les valeurs propres.

De toutes façons, ce sont les premières fréquences qui déterminent le comportement du système.

Rappel du cas unidimensionnel L'équation différentielle à résoudre est $M\ddot{u} + Ku = 0$, dont la solution s'écrit :

$$u = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (1.9)$$

La pulsation propre du système ω_0 , sa fréquence propre f_0 et sa période propre T_0 sont définies et reliées par les relations :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad T_0 = \frac{1}{f_0} \quad (1.10)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des CL sur le déplacement u_0 et la vitesse \dot{u}_0 . Il vient :

$$A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \quad \text{et} \quad B = u_0 \quad (1.11)$$

Des méthodes permettant de trouver les premiers zéros d'un polynôme de degré n ont donc été mises au point. La majeure partie de ces méthodes consiste à écrire la relation du déterminant sous la forme suivante :

$$\mathbf{H}\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad (1.12)$$

où \mathbf{H} est une matrice définie positive. On se sert pour cela de la décomposition de Cholesky de \mathbf{K} , i.e. en l'écrivant à partir d'une matrice triangulaire inférieure \mathbf{L} sous la forme $\mathbf{K} = {}^T\mathbf{L}\mathbf{L}$. L'équation du déterminant conduit alors à :

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{L}^{-1T}\mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{\omega^2} {}^T\mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} \quad (1.13)$$

et l'on obtient la forme cherchée en posant $\lambda = \omega^{-2}$, $\mathbf{X} = {}^T\mathbf{L}\bar{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{L}^{-1}$, où \mathbf{H} est bien symétrique.

Si \mathbf{M} et \mathbf{K} sont définies positives (ce qui est le cas habituel des problèmes en dynamique des structures), il existe n valeurs propres réelles positives. Ces solutions sont appelées pulsations propres du système.

Si \mathbf{K} est singulière (elle ne possède pas d'inverse), alors, afin de pouvoir utiliser les méthodes précédentes, on utilise un artifice qui consiste à introduire un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ du même ordre de grandeur que ω^2 . On doit alors résoudre :

$$(\mathbf{K} + \alpha\mathbf{M})\bar{\mathbf{q}} = (\omega^2 + \alpha)\mathbf{M}\bar{\mathbf{q}} \quad (1.14)$$

La nouvelle matrice $\mathbf{K} + \alpha\mathbf{M}$ est alors inversible et la solution cherchée est $\omega^2 + \alpha$.

1.3.2 Vibrations libres amorties

Problèmes du premier ordre

Si $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, l'équation de la dynamique se transforme en celle de la chaleur :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1.15)$$

dont on cherche une solution générale sous la forme :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}e^{-\omega t} \quad (1.16)$$

ce qui conduit au problème de valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega\mathbf{C})\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

Les matrices \mathbf{C} et \mathbf{K} sont généralement définies positives, donc ω est réelle positive. La solution présente un terme de décroissance exponentielle qui ne correspond pas réellement à un état de régime permanent.

Problèmes du second ordre

Dans le cas général ($\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$), on doit donc résoudre l'équation de la dynamique sans sollicitation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

dont on cherche une solution générale sous la forme :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}e^{-\alpha t} \quad (1.19)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Cela conduit au problème de valeurs propres :

$$(\alpha^2 \mathbf{M} + \alpha \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

où $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}$.

La partie réelle de la solution représente une vibration amortie. Ce problème est plus délicat à résoudre que les précédents si bien que la résolution explicite est peu courante.

Rappel du cas unidimensionnel L'équation différentielle à résoudre est : $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$, que l'on réécrit, en introduisant le coefficient d'amortissement ξ :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (1.21)$$

La solution s'écrit :

$$u = [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] e^{-\xi\omega_0 t} \quad (1.22)$$

où ω_D , la pseudo-pulsation, est définie par :

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.23)$$

On remarquera que ω_D n'est défini que pour $\xi < 1$, i.e. dans le cas des systèmes sous-critiques ou sous-amortis.

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites sur le déplacement u_0 et la vitesse \dot{u}_0 . Il vient :

$$A = \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\omega_0} \quad \text{et} \quad B = u_0 \quad (1.24)$$

Le système amorti oscille à une pulsation ω_D (légèrement) inférieure à la pulsation du système non amorti ω_0 . Si l'amortissement est positif (ce qui n'est parfois pas le cas pour des systèmes instables), l'amplitude du mouvement décroît dans le temps de façon exponentielle (en atteignant une amplitude nulle mais pour un temps infini).

Dans le cas d'un système sur-amorti ($\xi > 1$), alors, en posant $\omega'_D = \sqrt{\xi^2 - 1}$, la solution est du type :

$$u = [Ae^{\omega'_D t} + Be^{-\omega'_D t}] e^{-\xi\omega_0 t} \quad (1.25)$$

avec les constantes d'intégration :

$$A = \frac{\dot{u}_0 + (\omega'_D + \xi\omega_0)u_0}{2\omega'_D} \quad \text{et} \quad B = \frac{-\dot{u}_0 + (\omega'_D - \xi\omega_0)u_0}{2\omega'_D} \quad (1.26)$$

Un système sur-amorti n'est pas un oscillateur...

Dans le cas d'un système critique ($\xi = 1$), alors la solution s'écrit :

$$u = (u_0 + \omega_0 u_0 t + \dot{u}_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad (1.27)$$

Ce système n'est pas lui non plus un oscillateur...

1.3.3 Vibrations périodiques forcées

Il s'agit du cas où la sollicitation est périodique. Nous l'écrivons sous la forme :

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}e^{\alpha t} \quad (1.28)$$

avec $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$.

La solution générale s'écrit :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}e^{\alpha t} \quad (1.29)$$

En substituant cette forme de solution dans l'équation de la dynamique, il vient :

$$(\alpha^2 \mathbf{M} + \alpha \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{q}} = -\bar{\mathbf{F}} \quad (1.30)$$

qui n'est pas un problème de valeurs propres, mais ce système peut être résolu comme un problème statique, i.e. en inversant la matrice \mathbf{D} . Attention, la solution appartient à \mathbb{C} .

On sépare alors les parties réelle et imaginaire en notant : $e^{\alpha t} = e^{\alpha_1 t} (\cos(\alpha_2 t) + i \sin(\alpha_2 t))$, $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_1 + i\bar{\mathbf{F}}_2$ et $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}_1 + i\bar{\mathbf{q}}_2$.

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C} + \mathbf{K} & -2\alpha_1 \alpha_2 \mathbf{M} - \alpha_2 \mathbf{C} \\ 2\alpha_1 \alpha_2 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{C} & (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2 \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

dans lequel toutes les quantités sont réelles.

Il est ainsi possible de déterminer la réponse à toute excitation périodique par résolution directe.

Pour une excitation périodique, la réponse après une phase transitoire initiale n'est plus influencée par les conditions initiales. La solution obtenue représente la réponse qui s'établit. Ceci est valable aussi bien pour les problèmes en dynamique des structures que pour les problèmes de conduction de chaleur.

Rappel du cas unidimensionnel L'équation différentielle à résoudre est : $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$, que l'on réécrit :

$$\ddot{u} + 2\xi \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = F_0/M \cos(\omega t) \quad (1.32)$$

en supposant que $F(t)$ est un chargement monofréquentiel.

La solution est somme d'une solution particulière, appelée régime permanent ou forcé, et d'une combinaison linéaire de l'équation sans second membre, dit régime transitoire.

On voit alors, de manière intuitive, que :

- La fréquence du régime permanent (ou forcé) est celle de la fréquence d'excitation (qui « force » le système) ;
- La fréquence du régime transitoire est la fréquence propre du système (puisque'il n'y a pas de second membre).

La solution s'écrit :

$$u = \frac{F_0}{M} \frac{\cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} + [A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)] e^{-\xi \omega_0 t} \quad (1.33)$$

En présence d'amortissement, le régime transitoire disparaît après quelques périodes d'oscillation.

1.3.4 Régimes transitoires

Le lecteur aura sans doute remarqué que dans les méthodes présentées ci-dessus, les conditions initiales du problème ne sont pas prises en compte. Par exemple le comportement sismique des structures ou l'évolution transitoire d'un problème de conduction de chaleur nécessitent de prendre en compte à la fois les conditions initiales et le caractère non périodique des sollicitations.

L'obtention d'une solution à ce genre de problème nécessite soit l'utilisation d'une discrétisation dans le domaine temporel (voir chapitre ??), soit l'utilisation de méthodes adaptées. Dans ce dernier cas, il existe deux approches :

- la méthode de réponse en fréquence ;
- la méthode d'analyse modale.

Nous allons maintenant présenter cette dernière méthode.

Décomposition modale

La méthode de décomposition modale est sans doute l'une des plus importantes et des plus employées. Nous partons toujours de notre équation de la dynamique sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

Nous avons vu qu'en réponse libre ($\mathbf{F} = \{0\}$), la solution s'écrit :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}e^{-\alpha t} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{q}}_i e^{-\alpha_i t} \quad (1.35)$$

où α_i sont les valeurs propres et $\bar{\mathbf{q}}_i$ les vecteurs propres. Pour la réponse forcée, l'idée consiste à chercher la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres, i.e. sous la forme :

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{q}}_i y_i(t) \quad (1.36)$$

où la quantité $y_i(t)$ représente la contribution de chaque mode. En injectant cette forme de solution dans l'équation de la dynamique (puis en composant à gauche par ${}^T\bar{\mathbf{q}}_i$), on obtient un ensemble d'équations scalaires indépendantes :

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + F_i = 0 \quad (1.37)$$

dont les paramètres sont, grâce à l'orthogonalité des modes :

$$\begin{cases} m_i = {}^T\bar{\mathbf{q}}_i \mathbf{M} \bar{\mathbf{q}}_i \\ c_i = {}^T\bar{\mathbf{q}}_i \mathbf{C} \bar{\mathbf{q}}_i \\ k_i = {}^T\bar{\mathbf{q}}_i \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}}_i \\ F_i = {}^T\bar{\mathbf{q}}_i \mathbf{F} \end{cases} \quad (1.38)$$

Les équations scalaires se résolvent ensuite par des méthodes élémentaires indépendamment les unes des autres. Le vecteur total est ensuite obtenu par superposition. Toutefois, pour effectuer cette superposition, il n'aura pas échappé au lecteur qu'il faut avoir résolu les problèmes des valeurs propres. Dans le cas général, le calcul des valeurs et des vecteurs propres complexes est loin d'être facile. La méthode habituelle consiste à déterminer les valeurs propres réelles du problème vu précédemment :

$$\omega^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} \quad (1.39)$$

On montre que le problème est découplé en y seulement si on a la propriété d'orthogonalité de \mathbf{C} :

$${}^T\bar{\mathbf{q}}_i \mathbf{C} \bar{\mathbf{q}}_i = 0 \quad (1.40)$$

Or ceci n'est pas vrai en général car les vecteurs propres assurent uniquement l'orthogonalité de \mathbf{M} et \mathbf{K} . En revanche, si la matrice d'amortissement \mathbf{C} est une combinaison linéaire des matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} , la propriété d'orthogonalité est alors évidemment satisfaite. C'est l'hypothèse de Basile.

Dans la suite on suppose que la propriété d'orthogonalité de \mathbf{C} est satisfaite. L'équation sur ω devient alors :

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{q}}_i = \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}}_i \quad (1.41)$$

et par suite :

$$\omega_i^2 m_i = k_i \quad (1.42)$$

En supposant que les modes sont normalisés de telle sorte que $m_i = 1$ et en posant $c_i = 2\omega_i^2 c'_i$ (où c'_i correspond au pourcentage d'amortissement par rapport à sa valeur critique), on montre que les équations scalaires se mettent sous forme d'une ED du second ordre :

$$\ddot{y}_i + 2\omega_i^2 c'_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i + F_i = 0 \quad (1.43)$$

dont la solution générale est :

$$y_i = \int_0^t F_i e^{-c'_i \omega_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (1.44)$$

Une intégration numérique permet de déterminer une réponse, puis la superposition de ces termes donne la réponse transitoire totale (en principe !). On rappelle que la méthode de décomposition modale nécessiterait la détermination de l'ensemble des valeurs et modes propres, ce qui représenterait des calculs considérables. D'un point de vue pratique, on ne prend en compte qu'un nombre limité de modes étant donné que les réponses à des fréquences élevées sont souvent très amorties et prennent par conséquent des valeurs négligeables. Par ailleurs le problème des hautes fréquences n'est souvent abordé que de manière statistique.

1.3.5 Calcul des modes propres et méthodes de réduction modale

Les méthodes de réduction modale, ont pour but d'effectuer un changement de base dans l'étude d'une structure : on souhaite remplacer l'espace vectoriel initial, dont la dimension est égale au nombre de ddl, par un autre, dont la taille sera inférieure. En d'autres termes, on cherche une base plus optimale afin de diminuer la taille de cet espace vectoriel, tout en s'assurant que ce qui n'est pas pris en compte est bien négligeable. Or, physiquement, on s'aperçoit que les modes propres (et surtout les premiers modes propres) réalisent cet optimal.

Il existe deux principaux types de méthodes :

- les méthodes à interfaces libres (Craig...);
- et les méthodes à interfaces fixes (Craig-Bampton).

Dans ce document, nous ne présenterons que cette dernière, qui, de plus, est particulièrement adaptée au cas de sous-structuration, i.e. lorsque le système considéré est scindé en sous-structures. Mais tout d'abord, commençons par présenter succinctement quelques méthodes de calcul des modes propres, ce qui n'est pas si aisé que cela, et peut s'avérer coûteux selon les méthodes et le nombre de modes calculés.

Quotient de Rayleigh

Définition 1 — Matrice hermitienne. Une matrice hermitienne, ou auto-adjointe, est une matrice \mathbf{A} carrée à éléments complexes telle que cette matrice est égale à la transposée de sa conjuguée, i.e. :

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T \quad (1.45)$$

En particulier, une matrice à éléments réels est hermitienne si et seulement si elle est symétrique. Une matrice hermitienne est orthogonalement diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Définition 2 — Quotient de Rayleigh. Soit \mathbf{A} matrice hermitienne et \mathbf{x} un vecteur non nul, on appelle quotient de Rayleigh $R(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ le scalaire :

$$R(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}. \quad (1.46)$$

où \mathbf{x}^* désigne le vecteur adjoint de \mathbf{x} , c'est-à-dire le conjugué du vecteur transposé.

Dans le cas où \mathbf{A} et \mathbf{x} sont à coefficients réels, alors \mathbf{x}^* se réduit au vecteur transposé de \mathbf{x} . Le quotient de Rayleigh atteint un minimum λ_{\min} (qui n'est autre que la plus petite valeur propre de \mathbf{A}) lorsque \mathbf{x} est un vecteur propre \mathbf{v}_{\min} associé à cette valeur. De plus, $\forall \mathbf{x}, R(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max}$ (où λ_{\max} est la plus grande valeur propre de \mathbf{A} de vecteur propre associé \mathbf{v}_{\max}) et $R(\mathbf{A}, \mathbf{v}_{\max}) = \lambda_{\max}$. Ainsi, le quotient de Rayleigh, combiné au théorème du minimax de von Neumann, permet de déterminer une à une toutes les valeurs propres d'une matrice.

On peut également l'employer pour calculer une valeur approchée d'une valeur propre à partir d'une approximation d'un vecteur propre. Ces idées forment d'ailleurs la base de l'algorithme d'itération de Rayleigh.

Méthode itérative de Rayleigh

On utilise l'algorithme suivant :

1. choix d'un vecteur initial \mathbf{x}_i ;
2. résolution de $\mathbf{K}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_i$;
3. test de convergence :
 - si $|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| < \varepsilon$, alors aller au point 4 ;
 - sinon retourner au point 1 pour choisir un nouveau vecteur ;
4. $\varphi = \mathbf{x}_{i+1}$ et $\omega^2 = \frac{\langle \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{K} \mathbf{x}_{i+1} \rangle}{\langle \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{M} \mathbf{x}_{i+1} \rangle}$

Ce processus converge vers le mode propre fondamental. Lorsque l'on veut déterminer le mode le plus proche d'une pulsation donnée ϖ , il suffit de remplacer la matrice de rigidité par $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \varpi^2 \mathbf{M}$. Le processus converge alors vers le mode de pulsation $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - \varpi^2$.

Itérations des sous-espaces

La méthode précédente peut être étendue en prenant plusieurs vecteurs initiaux et en se plaçant dans le sous-espace qu'ils définissent. Les pulsations propres doivent alors être calculées à chaque itération en calculant tous les modes propres du système réduit au sous-espace étudié.

Sous-structuration : méthode de Craig et Bampton

Considérons une structure comportant n ddl et ayant une matrice masse \mathbf{M} et une matrice rigidité \mathbf{K} . L'utilisation de la méthode de Craig-Bampton impose de décomposer les ddl de la structure en deux parties :

- les ddl « frontière » : on considère que ces ddl sont ceux pouvant potentiellement être chargés au cours du temps et ceux sur lesquels s'appliquent des conditions limites (encastrement, appui simple...). Les chargements volumiques (tel le poids) n'influent pas sur la détermination des degrés de liberté frontière, sans quoi cette décomposition n'aurait pas de sens, ces ddl \mathbf{q}_L (L comme liaison).

Dans le cas de la sous-structuration, les ddl frontières correspondent trivialement aux ddl aux interfaces entre les différentes sous-structures.

- les ddl « intérieurs » : il s'agit de tous les autres degrés de liberté (un chargement volumique peut éventuellement s'appliquer sur ces ddl), ces degrés de liberté seront notés \mathbf{q}_I .

La base de réduction se compose de deux types de modes.

- Les modes encastres : il s'agit des modes propres de la structure calculés en considérant les ddl frontière encastres.
- Les modes statiques : ces modes sont obtenus en calculant la déformée statique de la structure lorsqu'un ddl frontière est imposé à 1, tous les autres étant imposés à 0.

Avantages de la méthode :

- elle est facile à programmer
- sa stabilité est connue.
- elle apporte de bons résultats pour des structures de taille raisonnable.
- elle permet d'obtenir les ddl frontière dans le vecteur réduit ce qui peut s'avérer très utile dans le cas de problèmes de contacts par exemple.

Inconvénients de la méthode :

- cette méthode n'est pas celle qui permet d'obtenir la meilleure réduction du système et peut donc s'avérer coûteuse en temps de calcul.
- sans amortissement structural, la méthode peut diverger au voisinage des fréquences propres de la structure (à cause du gain infini à la résonance sans amortissement).

1.4 Pour aller plus loin : cas des chocs large bande

On s'intéresse au cas des chocs, car il constitue un cas plus compliqué que de la « dynamique lente », sans rien enlever en généralité aux méthodes.

En dynamique transitoire, lorsque le contenu fréquentiel de la sollicitation est large, on montre que les erreurs numériques faites sur chaque longueur d'onde se cumulent, d'où une dégradation de la qualité attendue du résultat plus rapide que prévue. De plus, une erreur sur la périodicité des oscillations due à un trop faible nombre de pas de temps et un déphasage des oscillations à cause de cette accumulation des erreurs numériques au cours des pas de temps peuvent être observées.

Dans de tels cas, il est possible de se placer dans le domaine fréquentiel (à l'aide de la FFT), ce qui conduit à résoudre un problème de vibrations forcées sur une très large bande de fréquences incluant à la fois les basses et les moyennes fréquences pour l'étude des chocs. La solution temporelle est ensuite reconstruite par transformée de Fourier inverse.

Les deux domaines fréquents ayant des propriétés différentes, on recourt à des outils de résolution différents.

Dans le domaine des **basses fréquences**, les phénomènes vibratoires générés par l'excitation ont une longueur d'onde grande face à la structure donc uniquement quelques oscillations sont observables. De plus la structure présente un comportement modal (modes bien distincts les uns des autres). La modélisation est maîtrisée : éléments finis sur base modale, complété si besoin de modes statiques.

Pour les **hautes fréquences**, les longueurs d'ondes sont petites et une centaine d'oscillations est présente sur une dimension de la structure. Il n'est pas approprié de regarder les grandeurs locales, mais plutôt les grandeurs moyennées en espace et en fréquence. On utilise généralement la SEA qui donne un niveau énergétique vibratoire moyen par sous-structure. Cette méthode ne

permet pas d'obtenir une solution prédictive car elle requiert la connaissance à priori de facteurs de couplages mesurés.

En **moyennes fréquences**, plusieurs dizaines d'oscillations apparaissent sur une dimension de la structure, et la déformée est très sensible aux conditions aux limites et aux paramètres matériaux de la structure. Si un comportement modal est encore visible, les modes sont moins bien séparés (par exemple plusieurs modes présents par Hertz, ces modes étant couplés par l'amortissement) : la MEF est mal adaptée à cause du raffinement de maillage nécessaire, et le calcul de la base modal est également hors de portée. Les méthodes énergétiques quant à elles sont trop globales et ne permettent pas une description satisfaisante de la solution.

Si la structure est divisible en sous-structures homogènes, on peut utiliser la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC) introduite par Ladevèze en 1996 : les conditions de continuité en déplacements et en efforts aux interfaces entre sous-structures n'ont pas besoin d'être vérifiées à priori, mais uniquement au sens faible par une formulation variationnelle.

La TVRC permet l'utilisation d'approximations indépendantes par sous-structure. La solution est supposée bien décrite par la superposition d'un nombre infini de modes locaux, appelés rayons, issus de la vérification des équations d'équilibre dynamique et des relations de comportement par sous-structure. Ces rayons sont à deux échelles : une lente et une rapide. L'échelle rapide est traitée analytiquement (sinon coût numérique élevé), et l'échelle lente numériquement, car elle conduit à un problème à faible nombre d'inconnues.

On profitera de la rapide dispersion des modes moyennes fréquences dans les milieux dispersifs amortis ainsi que de la version large bande de la TVRC développée en 2004 et 2005 [Lit-Chevreuil]

1.4.1 Approches temporelles

Discretisation spatiale

Une discrétisation par la MEF est mal adaptée aux phénomènes à fort gradient tels que les chocs, car il faut soit un maillage très fin, soit une interpolation par des polynômes de degré élevé, ce qui dans les deux cas augmente considérablement l'effort de calcul.

Étant donné le caractère très localisé des ondes propagatives en dynamique transitoire, la méthode des éléments finis adaptatifs répond au besoin d'enrichir le modèle localement en raffinant le maillage uniquement sur les fronts d'onde de manière contrôlée et automatique.

Ces méthodes recourent à un estimateur d'erreur à priori :

- estimateur construit sur les résidus d'équilibre pour l'adaptation de maillage dans le cadre de la propagation d'ondes ;
- estimateur utilisant le lissage des contraintes ;
- estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement.

Décomposition de domaine en dynamique transitoire

Le domaine est décomposé en sous-domaines plus petits à calculer. On pourra se servir de la parallélisation du problème. Le problème est donc condensé sur les quantités d'interface entre sous-domaines, ce qui conduit à un problème de taille réduite.

La plupart des méthodes utilisées sont des méthodes sans recouvrement ; elles peuvent être primales, duales ou mixtes. Le problème d'interface est résolu de façon itérative, ce qui évite la construction explicite du complément de Schur¹, mais nécessite un taux de convergence élevé pour

1. En algèbre linéaire et plus précisément en théorie des matrices, le complément de Schur est défini comme suit. Soit :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

une matrice de dimension $(p+q) \times (p+q)$, où les blocs **A**, **B**, **C**, **D** sont des matrices de dimensions respectives $p \times p$,

être efficace.

Dans la méthode duale, les efforts sont privilégiés : la méthode propose à priori des efforts en équilibre aux interfaces et cherche à écrire la continuité en déplacements. L'inconnue principale, i.e. les inter-efforts entre sous-structures, sont les multiplicateurs de Lagrange aux interfaces.

Discrétisation temporelle

Les méthodes d'intégration directe sont nombreuses et mieux adaptées que les techniques de bases réduites pour les chocs relativement rapides qui mettent en jeu des fréquences élevées.

Notons qu'il existe des méthodes qui s'affranchissent de la discrétisation temporelle et s'appuient sur une méthode asymptotique numérique pour déterminer la réponse transitoire de la structure ; ces méthodes demandent encore à être développées pour les variations temporelles rapides comme les chocs.

Parmi les méthodes d'intégration directes, on utilise classiquement :

- les schémas de Newmark (voir chapitre précédent) pour une intégration d'ordre 2 : les schémas précis au second ordre des différences centrées et de l'accélération moyenne sont privilégiés pour les faibles erreurs d'amplitude et de périodicité qu'ils engendrent.

Le schéma des différences centrées est explicite et adapté pour les chargements de dynamique rapide et les problèmes non linéaires (car la matrice dynamique à inverser est diagonale), mais nécessite de vérifier que le signal ne se propage pas de plus d'un élément pendant un pas de temps (condition de Courant).

Le schéma de l'accélération moyenne est implicite mais inconditionnellement stable, bien adapté pour les chargement peu rapides.

- la méthode de Galerkin discontinue : Elle autorise les variables du problème déplacement et vitesse à être discontinues en temps. À l'ordre zéro (champs constants sur chaque intervalle de temps), elle permet de s'affranchir des oscillations numériques occasionnées lors du traitement d'un front d'onde. Toutefois, ce schéma dissipe énormément et demande une discrétisation très fine pour bien représenter les irrégularités.
- la TXFEM (Time eXtended FEM) : Elle utilise une base de fonctions de forme en temps enrichie formant une partition de l'unité. Le schéma est équivalent à certaines méthodes de Galerkin discontinues, le nombre de pas de temps inférieur à Newmark, et les oscillations numériques atténuées. Elle est bien adaptée pour le traitement des discontinuités en temps et notamment les chocs. Voir le paragraphe ?? pour une courte description.

1.4.2 Approches fréquentielles

Afin de s'affranchir de l'intégration temporelle et des soucis numériques associés, il est possible de réécrire le problème temporelle en un problème fréquentiel (grâce à la FFT).

L'approche fréquentielle est également plus adaptée dans les situations pour lesquelles des paramètres physiques dépendent de la fréquence.

En appliquant la transformée de Fourier à toutes les quantités dépendant du temps, on obtient des quantités qui dépendent de la fréquence. Ce faisant, le problème à résoudre devient un problème de vibration forcée sur une bande de fréquence. Il faut alors calculer des fonctions de réponse en fréquence (FRF) sur une large plage de fréquences.

$p \times q$, $q \times p$ et $q \times q$, avec \mathbf{D} inversible. Alors, le complément de Schur du bloc \mathbf{D} de la matrice \mathbf{M} est constitué par la matrice de dimension $p \times p$ suivante :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{C} \quad (1.48)$$

Lorsque \mathbf{B} est la transposée de \mathbf{C} , la matrice \mathbf{M} est symétrique définie-positive si et seulement si \mathbf{D} et son complément de Schur dans \mathbf{M} le sont.

Cas des basses fréquences

Compte tenu de la grande taille des longueurs d'ondes et du fait que l'on a peu de modes, bien séparés, les méthodes utilisées sont basées sur les éléments finis.

En réécrivant le problème dynamique dans le cas d'une sollicitation harmonique de pulsation ω , il vient (comme nous venons de le présenter avant) :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1.49)$$

En utilisant l'hypothèse de Basile² sur l'amortissement, il est possible de calculer les premiers modes propres associés aux plus petites fréquences propre du système. La solution approchée est alors projetée sur les sous-espaces propres associés. On résout alors un système diagonale de petite taille.

Cas des moyennes fréquences

En moyennes fréquences, l'approche précédente (EF) nécessiterait d'utiliser une grande quantité de polynômes à cause du caractère très oscillant, ou à augmenter le degré d'interpolation. De plus, il faut prendre en compte plus de modes, qui sont de moins en moins bien séparés.

Notons que l'on peut minimiser l'influence du raffinement du maillage en localisant celui-ci uniquement où la dynamique locale le demande. Pour cela, des estimateurs d'erreur à posteriori ont été développés pour les structures, mais également pour l'acoustique.

La dispersion numérique est moindre avec les éléments finis stabilisés : tels que les Galerkin Least Squares et Galerkin Gradient Least Squares... qui n'intervienne pas sur la forme variationnelle mais sur les matrices issues de celle-ci.

On peut également essayer de diminuer la taille de la base modale à prendre en compte en ne retenant que les modes propres qui maximisent l'opérateur d'excitabilité ; mais pour cela il faut d'abord calculer la base complète...

On peut également utiliser un autre espace de projection que les modes propres classiques : par exemple les premiers modes d'un opérateur d'énergie relatif à une bande de fréquence (Soize 1998). Cette approche peut être couplée à la théorie des structures floues (Soize 86) pour prendre en compte la complexité de la structure de manière probabiliste.

On peut également sous-structurer le domaine. Dans la Component Modal Synthesis, les modes propres de chaque sous-structures servent de base pour la solution de la structure entière.

Une « deuxième » approche consiste à utiliser des éléments enrichis (voir encore une fois le chapitre ??). Ces éléments sont développés pour pouvoir prendre en compte le caractère oscillant de la solution en enrichissant les fonctions de base utilisées afin de pouvoir mieux reproduire la solution.

Les éléments finis hiérarchiques, issus des méthodes p (voir le paragraphe ?? : l'augmentation du degré polynomial des fonctions de forme peut se voir comme une substitution à un raffinement de maillage, mais les estimateurs d'erreur des p-methods sont meilleurs que ceux des h-methods), permettent une réutilisation à l'ordre $p+1$ des matrices de masse et de raideur élémentaires issues de l'ordre p .

Les éléments finis multiéchelles (voir paragraphe ??) où la solution est recherchée comme somme d'une composante calculable à l'échelle grossière en espace et d'une composante non calculable associée à l'échelle fine.

La Méthode de partition de l'unité (PUM) (voir paragraphe ??) utilise un recouvrement du domaine initial en un ensemble de maillages, chacun étant enrichi et vérifiant la partition de

2. Si le seul amortissement entrant en jeu est un amortissement structurel (dissipation interne du matériau pour une structure homogène), il est alors licite de faire l'hypothèse d'un amortissement proportionnel, encore appelé hypothèse de Basile. Dans ce cas \mathbf{C} s'exprime comme combinaison linéaire de \mathbf{M} et \mathbf{K} , et sa projection sur les modes propres est diagonale.

l'unité. La FEM associée à la PUM donne naissance à deux grandes familles d'approches : la G-FEM (Generalized FEM) et la X-FEM (eXtended FEM), voir paragraphe ???. Si les fonctions d'enrichissement ne sont pas activées, on se retrouve avec la FEM.

la Méthode d'enrichissement discontinu (Discontinuous Enrichment Method) est une méthode de Galerkin éléments finis discontinue avec multiplicateurs de Lagrange dédiée aux application de forts gradients ou oscillations rapides.

La BEM (voir paragraphe ??) est encore une « troisième » approche. Seuls les bords sont maillés afin de réduire le nombre de ddl. La formulation intégrale de la frontière établit un lien entre les champs intérieurs et les quantités sur les bords. La matrice obtenue est petite, mais pleine et non symétrique.

Les méthodes sans maillage (voir paragraphe ??) : Dans la EFGM (Element Free Galerkin Method ou méthode de Galerkin sans maillage), on n'a plus qu'un nuage de points sans connectivité entre eux. On utilise des fonctions de formes construites selon la méthode des moindres carrés mobiles et formant une partition de l'unité, qui peuvent être polynomiales ou sinusoïdales. Néanmoins, comme elle est basée sur une discrétisation nodale, elle nécessite également un grand nombre de nœuds aux fréquences plus élevées.

Les méthodes des éléments discontinus : Pour des géométries simples (utilisation en construction navale), on utilise des solutions analytiques ou semi-analytiques sur des sous-domaines simples (poutres, plaques rectangulaires...) pour construire la structure complète. Lorsque cette méthode est applicable elle donne de bon résultats aussi bien en basses fréquences, en moyennes fréquences et en hautes fréquences.

Les méthodes de Trefftz : Elles utilisent des fonctions de base définies sur tout le domaine de la sous-structure considérée et vérifiant exactement l'équation dynamique et la loi de comportement : la solution est représentée par la superposition de ces fonctions ; mais il faut encore vérifier les conditions aux limites et de transmission. Les matrices sont de petite taille mais très mal conditionnées.

Les T-éléments lient la démarche Trefftz et la FEM : Trefftz au sein de chaque élément..

Pour les problèmes de vibroacoustique la WBT (Wave Based Technique) a été développée : la structure n'est pas discrétisée comme pour les T-éléments mais est décomposée en éléments de grande taille par rapport à la dimension de la structure. les fonctions de base particulières utilisées améliorent le conditionnement des matrices, ce qui conduit à des matrices de petite taille pleines et non symétriques. L'intégration sur les bords coûte cher en moyennes fréquences et le conditionnement de la matrice en hautes fréquences se dégrade du fait de la discrétisation des amplitudes (seules certaines directions de propagation sont prises en compte).

Cas de hautes fréquences

Comme dit précédemment, on ne représente pas la solution localement mais on ne s'intéresse qu'à des grandeurs moyennées.

La SEA (Statistical Energy Analysis) est la méthode de référence pour les hautes fréquences. La structure est découpée en sous-structures. Ensuite des regroupements de modes sont construits tels que statistiquement le niveau de chacun des groupes de modes soit semblable : la méthode repose donc sur l'hypothèse d'une forte densité modale dans la bande de fréquence étudiée. Chaque groupe de mode est associé à un ddl : le problème à résoudre issu de l'équilibre énergétique est par conséquent à faible nombre de ddl. Cet équilibre se traduit par un bilan de puissance dans lequel la puissance injectée à une sous-structure par des forces extérieures, aléatoires et stationnaires sur de larges bandes de fréquences, est égale à la somme de la puissance dissipée dans cette sous-structure par amortissement et la puissance transmise à l'ensemble des sous-structures voisines avec lesquelles elle est connectée, appelée puissance de couplage. L'hypothèse forte de la SEA concerne cette puissance de couplage entre deux sous-structures qui est supposée proportionnelle à la différence de leurs énergies par mode, le facteur de proportionnalité étant le coefficient de

couplage.

La SEA est parfaitement adaptée aux hautes fréquences, mais trop globale et trop imprécise pour décrire finement le comportement en moyennes fréquences.

De plus les coefficients de couplages ne sont connus explicitement à priori que pour des géométries très particulières et nécessitent donc en général de recourir à des expériences, ce qui fait de la SEA une méthode non prédictive.

Des stratégies de calcul de ces coefficients de couplage existent, mais pour certains régimes d'excitation la notion même de coefficient de couplage n'est plus réaliste.

La méthode de diffusion d'énergie : Elle apporte un effet local à la SEA en décrivant de manière continue les variables énergétiques. Elle a été appliquée à des cas simples et l'analogie avec la thermique n'est pas démontrée pour des sollicitations et des géométries quelconques.

L'analyse ondulatoire de l'énergie : Elle généralise la SEA en ce qu'elle considère le champ d'ondes non plus diffus mais directionnel en introduisant un champ d'ondes aléatoires propagatives dans les sous-structures et des coefficients de couplages qui varient selon les angles d'incidence aux interfaces.

Les MES (Méthodes Énergétiques Simplifiées) : Elles se proposent de pallier les insuffisances de la méthode de diffusion de l'énergie en donnant une représentation locale des phénomènes. Le bilan de puissance est écrit aussi bien à l'intérieur des sous-structures que de leurs couplages. La connaissance des coefficients de couplages à priori demeure un problème.

D'autres méthodes existent encore : développements asymptotiques, méthode de l'enveloppe, méthode des chemins structuraux.

La méthode des rayons : consiste à suivre les rayons vibratoires le long de leur parcours par l'étude de leur propagation, réflexion et transmission entre sous-structures par les lois de Snell-Descartes de l'optique géométrique jusqu'à l'amortissement des ondes. La RTM permet de connaître la direction privilégiée de transfert et de répartition spatiale de l'énergie, mais à un coût numérique très élevé. De plus, les coefficients de transmissions ne sont pas connus à priori...

1.4.3 Remarques

Dans l'approche fréquentielle, il faut déterminer les fréquences déterminant la jonction BF/MF et MF/HF.

La fréquence BF/MF agit sur le coût de calcul : elle doit être la plus grande possible, mais telle qu'à partir de cette fréquence, les modes de la structure deviennent locaux, tout en conservant la séparation des modes (en pratique entre 300 et 600 Hz).

Le choix de la fréquence MF/HF joue sur la qualité de la vitesse calculée et donc sur l'énergie cinétique qui sert pour restaurer la réponse temporelle. Cette fréquence doit être au moins égale à $1/T$ où T est la durée du choc d'entrée (si $T = 1\text{ms}$, alors $\text{MF/HF} = 2000\text{Hz}$ mini).

la MEF utilisée en basses fréquences doit utiliser les n premiers modes pour la base réduite avec n tel que la fréquence de ce mode soit de $2 \times$ la fréquence BF/MF. On utilisera également la règle classique d'au moins 10 éléments linéaires par longueur d'onde pour le maillage.

La FFT requiert par ailleurs que le chargement soit périodique. Le temps correspondant à cette période, T_0 , doit être choisi judicieusement. Dans le cas d'un choc, on a donc $T_0 > T$, mais il faut également le choisir tel que la réponse transitoire de la structure s'éteigne avant la fin de cet intervalle de temps. De plus, ce temps influe sur l'échantillonnage fréquentiel du calcul de la FRF. Les pulsations pour lesquelles la FRF est calculée doivent être telles que $\omega_n = 2\pi n f_0$ avec $f_0 = 1/T_0$. Il faut également que le nombre de pas de fréquences N soit une puissance de 2 pour utiliser la FFT et son efficacité, et N soit être tel que $N/T_0 \geq 2f_{\text{max}}$ avec f_{max} la fréquence maximale contenue dans le signal.

Le choix judicieux de T_0 influe directement sur la reconstruction temporelle de la réponse. Pour les structures peu amorties ou pour des chargements longs, T_0 est grand, et donc la FFT

coûteuse. Dans ces cas, des méthodes ont été développées : les fonctions de Green ; la Implicit Fourier Transform ; et l'amortissement artificiel.