

**Vincent Manet**

# **Méthode des éléments finis**

*Vulgarisation des aspects mathématiques  
et illustration de la méthode*

Vincent Manet — 2013 (Ceci est la version « livre » de ce document)

Ce document est sous licence Creative Commons 3.0 France :

- paternité ;
- pas d'utilisation commerciale ;
- partage des conditions initiales à l'identique ;

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr>



# Introduction

Dans ce (de moins en moins court) document, plutôt à destination d'ingénieurs mécaniciens connaissant déjà la méthode des éléments finis, nous allons essayer de faire une présentation un peu plus théorique que ce qui leur est généralement proposé (et qui est quand même souvent de type « preuve par les mains », ce qui occulte trop de points).

Nous ne ferons appel qu'à des notions mathématiques de bases généralement déjà vues pour la plupart en taupe (ou en tout début de cycle d'ingé)... bien que des compléments que l'on peut qualifier d'élémentaires nous aient été demandés et aient été inclus.

Nous espérons, grâce à cette présentation théorique montrer toute la souplesse et la puissance de la méthode, afin de permettre au lecteur d'envisager d'autres simulations que celles qu'il a pu déjà réaliser par le passé.

## But du document

Le but initial était de *présenter brièvement la théorie mathématique* derrière les éléments finis afin que les ingénieurs utilisant cette méthode puisse en envisager toutes les applications, ainsi que de *couvrir les aspects qui, selon nous, devraient être connus de tout ingénieur mécanicien impliqué ou intéressé par le calcul numérique.*

Toutefois, il s'envisage comme support de référence à plusieurs cours, cours qui ne portent pas sur tous les aspects traités dans ce document, et pendant lesquels les aspects pratiques sont plus développés (avec mise en situation sur machine).

Même si nous avons voulu rester le plus succinct possible, l'introduction de notions de proche en proche a conduit à un document fait aujourd'hui une certaine taille (par exemple, nous avons besoins des espaces de Sobolev, mais comment les introduire sans parler des espaces de Lebesgue, mais comment les introduire sans parler...).

Aussi le document a-t-il finalement été découpé en plusieurs parties : un survol des notions mathématiques, puis le traitement du problème continu constituent l'ossature théorique nécessaire à asseoir la MEF sur un socle solide. La discrétisation par éléments finis à proprement parler n'est abordé qu'ensuite, et d'ailleurs un seul chapitre suffirait à en faire le tour... sauf à entrer plus dans le détail concernant « ce qui fâche » : homogénéisation, non linéarité, dynamique, ce qui est fait dans des chapitres séparés.

Enfin, d'autres méthodes sont abordées car également très employées aujourd'hui. Aussi est-il indispensable selon nous d'en avoir entendu parlé et d'en connaître les principales notions (BEM, FEEC...).

En annexes, se trouve un petit fourre-tout comprenant des choses censées être maîtrisées depuis la taupe (mais qui parfois nous sont demandées) et les compléments qui alourdiraient encore les propos précédents.

Certaines notions (essentiellement de topologie) ne sont pas présentées dans ce document. Il nous a semblé que le lecteur devait avoir quelques souvenirs de ce qu'est un ouvert, un fermé, l'adhérence, la densité... Par ailleurs, leur nom peut être suffisamment évocateur pour se passer d'une définition formelle dans le contexte de ce document.

Attention, ce document n'est pas un document de mathématiques, il ne contient d'ailleurs aucune preuve. C'est, dans ces deux premières parties, un document de vulgarisation de notions mathématiques nécessaires à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Nous avons voulu réaliser un survol des notions importantes, mais malgré tout, afin de ne pas être parfois trop laconique, nous avons un peu débordé.

En fin de document, un petit index des noms propres permettra au lecteur de replacer les divers développements mentionnés dans l'histoire... Il se peut qu'il subsistent quelques erreurs, notamment au niveau des nationalités mentionnées, car il n'est pas toujours aisé de déterminer rapidement cette information (et nous ne connaissons pas toutes les biographies des personnes citées).

*Ce document a été réalisé très rapidement, et de manière extrêmement hachée. Il comporte forcément encore beaucoup de fautes : merci de m'en faire part.*

## Démarche de l'ingénieur numéricien

En préambule à ce document, nous tenions à synthétiser la démarche complète de l'ingénieur numéricien :

- Modélisation / mise en équations – Construction du problème continu (système d'EDP).
- Analyse mathématique du problème posé – Existence, unicité, propriétés des solutions.
- Conception d'une méthode numérique – Construction d'un problème discrétisé.
- Analyse numérique – Questions de stabilité, convergence, précision.
- Algorithmique – Choix de méthodes de résolution en dimension finie.
- Mise en œuvre sur ordinateur – Programmation.
- Pre et Post Traitement (maillages / visualisation) – Interpolation, extrapolation, outils de la CAO.

Tous ces points ne seront évidemment pas abordés dans ce document !

### Remerciements :

Nous n'avions pas prévu de réaliser une deuxième version aussi rapidement. Celle-ci existe suite aux sollicitations de Mathias Legrand. C'est lui qui a développé les macros nécessaires à l'amélioration très très nette de la qualité typographique (environnements pour les notes historiques, les théorèmes, lemmes...).

C'est également pourquoi coexistent aujourd'hui deux versions (mais issues du même code source) : l'une que nous appelons « version cours » (plus en accord avec ce que nous proposons en cours), et l'autre « version livre », plus proche d'un ouvrage.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
But du document	3
Démarche de l'ingénieur numéricien	4
<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>1 Quelques méthodes dérivées</b>	<b>7</b>
1.1 Méthode des éléments frontières	7
1.2 Méthodes sans maillage	7
1.3 Partition de l'unité	8
1.4 Méthode des éléments finis étendue	9
1.5 Méthodes particulières	9
1.5.1 Méthodes de treillis de Boltzmann	9
1.6 FEEC	10
1.7 Systèmes multi-corps	11



# Chapitre 1

## Quelques méthodes dérivées

Résumé — Dans ce court chapitre, nous survolons quelques méthodes également utilisées en simulation numérique. Nous n’entrons pas dans le détail, mais si les notions d’éléments finis, de formulations mixtes et hybrides et les multiplicateurs de Lagrange ont été comprises, alors nos courtes explications doivent suffire.

### 1.1 Méthode des éléments frontières

La méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontière peuvent être considérées comme issues des méthodes de Ritz et de Trefftz respectivement. Dans les deux cas, il s’agit de résoudre un problème décrit par des équations aux dérivées partielles dans un domaine  $\Omega$  et sur sa frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  en remplaçant le problème continu par un nombre fini de paramètres inconnus dans la résolution numérique.

La méthode de Ritz, et donc la méthode des éléments finis, se base sur l’existence d’un principe variationnel pour lequel la fonction inconnue sera recherchée comme une combinaison de fonctions de base définies dans tout le domaine  $\Omega$ .

La méthode de Trefftz a été proposée en 1926 dans un article intitulé « une alternative à la méthode de Ritz ». Le passage domaine/frontière se fait en appliquant Green à la formulation variationnelle considérée et en proposant des fonctions d’interpolation linéairement indépendantes qui satisfont les équations aux dérivées partielles d’intérieur de domaine *a priori*. Trefftz montre que l’intégrale d’intérieur de domaine du principe variationnel disparaît et que seules subsistent des intégrations aux frontières. Cependant, cette méthode discrétisant la frontière seule peut être employée uniquement si le problème physique considéré est gouverné par des équations différentielles linéaires et homogènes. On obtient encore un système de type  $\mathbf{Kq} = \mathbf{F}$ , mais les intégrales se font uniquement sur  $\Gamma$ .

La méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontières sont toutes deux des méthodes très robustes pour de nombreuses applications industrielles, ce qui en fait des outils de choix pour les simulations numériques. Cependant, leur utilisation pose des problèmes lorsque l’on a évolution des surfaces internes à cause du « maillage » de ces surfaces : description correcte, évolution de ces surfaces, fissures, front de sollicitation, interfaces... Une des motivations pour les méthodes sans maillage est de s’affranchir de ces difficultés.

### 1.2 Méthodes sans maillage

Depuis le début des années 90, de nombreuses méthodes sont apparues où la discrétisation ne repose plus sur un maillage mais sur un ensemble de points<sup>1</sup>. Chaque point possède un domaine

1. On peut par exemple nommer la méthode des éléments diffus, la méthode de Galerkin sans éléments (Element Free Galerkin Method, EFGM), Reproducing Kernel Particle Method (RKPM),  $h - p$  Cloud Method...

d'influence de forme simple, comme un cercle, sur lequel les fonctions d'approximation sont construites. Les différentes approches se distinguent, entre autres, par les techniques utilisées pour la construction des fonctions d'approximation. Ces fonctions sont construites de manière à pouvoir représenter tous les modes rigides et de déformation sur le domaine d'influence (c'est une condition nécessaire à la convergence de ces méthodes), et sont nulles en dehors. On écrira alors :

$$u(x) = \sum_{i \in N_s(x)} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} a_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) \quad (1.1)$$

où  $N_s(x)$  est l'ensemble des points  $i$  dont le support contient le point  $x$  et  $N_f(i)$  est le nombre de fonctions d'interpolation définies sur le support associé au point  $i$ .

Une fois les fonctions d'interpolation construites, il est possible d'en ajouter d'autres par *enrichissement*. L'enrichissement de l'approximation permet ainsi de représenter un mode de déplacement donné  $F(x)e_x e_x \text{ ???} :$

$$u(x) = \sum_{i \in N_s(x)} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} a_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) + \sum_{i \in N_s(x) \cap N_f} \sum_{\alpha=1}^{N_f(i)} b_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) F(x) \quad (1.2)$$

L'enrichissement des fonctions d'interpolation a par exemple permis de résoudre des problèmes de propagation de fissure en deux et trois dimension sans remaillage : la fissure se propage à travers un nuage de points et est modélisée par enrichissement, à savoir des fonctions  $F(x)$  discontinues sur la fissure ou représentant la singularité en fond de fissure.

Les méthodes sans maillage (Meshless Methods) sont flexibles dans le choix de l'approximation et de l'enrichissement. En revanche, le choix du nombre de points d'intégration et de la taille du domaine d'influence dans un nuage arbitraire de points d'approximation n'est pas trivial : alors que dans le cas de la méthode des éléments finis, la matrice de rigidité est obtenue par assemblage des contributions élémentaires, pour les méthodes sans maillage, l'assemblage se fait en couvrant le domaine de points d'intégration et en ajoutant leur contribution. Qui plus est, les conditions aux limites de type Dirichlet sont délicates à imposer.

### 1.3 Partition de l'unité

La base des éléments finis classiques peut elle-aussi être enrichie (afin de ne pas recourir aux méthodes sans maillage) de manière à représenter une fonction donnée sur un domaine donné. Melenk et Babuška, en 1996, ont appelé cette technique : la Partition de l'Unité (PU). Ils ont remarqué en fait que si  $N_s(x)$ , autrement dit l'ensemble des points  $i$  dont le support contient le point  $x$ , était remplacé par  $N_n(x)$ , c'est-à-dire l'ensemble des nœuds contenant  $x$ , alors on retombait sur la formulation éléments finis usuelle, qui, sous forme « assemblée » s'écrivait bien alors :

$$u(x) = \sum_{i \in N_n(x)} \sum_{\alpha} a_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) \quad (1.3)$$

Cela veut simplement dire que, dans le cas des éléments finis, on considère les supports comme liés à des nœuds, alors que dans le cas sans maillage, ils sont liés à des points. En d'autres termes, si l'on considère un nœud à chaque point, la méthode des éléments finis est un cas particulier de la méthode sans maillage. On peut alors également écrire l'approximation de partition de l'unité par :

$$u(x) = \sum_{i \in N_n(x)} \sum_{\alpha} a_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) + \sum_{i \in N_n(x) \cap N_f} \sum_{\alpha} b_i^\alpha \phi_i^\alpha(x) F(x) \quad (1.4)$$



## 1.4 Méthode des éléments finis étendue

Dans le cas particulier où la méthode de partition de l'unité est appliquée à la modélisation de discontinuités ou de vides au sein même des éléments, on obtient alors la méthode des éléments finis étendue (X-FEM) :

$$u(x) = \sum_{i \in I} u_i \phi_i(x) + \sum_{i \in L} a_i \phi_i(x) H(x) + \sum_{i \in K_1} \phi_i(x) \left( \sum_{j=1}^4 b_{i,1}^j F_1^j(x) \right) + \sum_{i \in K_2} \phi_i(x) \left( \sum_{j=1}^4 b_{i,2}^j F_2^j(x) \right) \quad (1.5)$$

où  $I$  est l'ensemble des nœuds du maillage,  $L$  l'ensemble des nœuds enrichis pour modéliser la fissure coupant de part en part un élément,  $K_1$  et  $K_2$  les nœuds enrichis pour modéliser le fond de fissure.

L'avantage en X-FEM est qu'il n'est plus demandé au maillage de se conformer à des surfaces, qu'elles soient intérieures ou extérieures, et qu'il peut alors être conservé lors de leur évolution. Les surfaces ne sont plus maillées et sont localisées sur le maillage grâce à la notion de fonction de niveau. À chaque nœud au voisinage de cette surface, on associe la distance signée à cette surface. Cette fonction « distance » peut être interpolée sur chaque élément avec les fonctions classiques de premier ordre. Les surfaces sont ainsi stockées par un champ élément fini défini au voisinage de la surface qui participe au calcul au même titre que les autres champs physiques. En particulier, la X-FEM permet la modélisation des trous, sans avoir à forcer le maillage à se conformer à ceux-ci. Un nœud dont le support est complètement à l'intérieur du trou ne donne pas lieu à la création de ddl. Pour un nœud dont le support coupe la frontière du trou, la fonction d'interpolation classique est multipliée par une fonction valant 1 dans la matière et 0 dans le trou.

## 1.5 Méthodes particulières

La dénomination « méthodes particulières » recouvre deux types différents de modèles pour la mécanique du solide et pour la mécanique des fluides. D'un côté, on trouve des concepts de discrétisation dans lequel la réponse d'un continuum est projetée sur les « particules » véhiculant l'information mécanique au cours de leurs déformations : ce sont typiquement les méthodes sans maillage, Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), Moving Particle Simulation (MPS), Particle Finite Element Method (PFEM), Material Point Method (MPM) et Lattice-Boltzmann-Method (LBM). Lissé Hydrodynamique Particules (SPH), Simulation particule en mouvement (MPS), méthode des éléments finis de particules (PFEM), Méthode point matériel (MPM) et le Réseau-Boltzmann-Méthode (LBM). De l'autre côté, cette notion exprime la représentation de calcul de particules physiques existantes à différentes échelles : ce sont typiquement les méthodes Molecular Dynamics (MD) et Discrete (Distinct) Element Method (DEM). ou la méthode des éléments discrets (Distinct) (DEM). On peut alors considérer les cas où les particules existent physiquement (comme pour les matières granulaires) ainsi que les cas où elles évoluent au cours du processus de chargement ; ces deux cas pouvant même éventuellement être couplés.

Comme nous ne pouvons tout présenter, nous proposons de survoler la méthode de Lattice-Boltzmann, notamment parce qu'elle est utilisée en acoustique.

### 1.5.1 Méthodes de treillis de Boltzmann

Dans les méthodes de treillis de Boltzmann (lattice Boltzmann Methods = LBM), on ne cherche plus à simuler un problème de dynamique des fluides par les équations de Navier-Stokes (nous avons déjà évoqué certains problèmes que l'on rencontre alors), mais en se servant de l'équation de Boltzmann discrète pour un fluide newtonien avec modèle de collision (par exemple Bhatnagar-Gross-Krook). L'idée est de simuler l'écoulement ainsi que les processus de collision entre un

nombre limité de particules. Les interactions entre particules conduisent à un comportement de l'écoulement visqueux applicables à une échelle plus grande. On peut donc les voir également comme des méthodes de décomposition de domaine ou d'homogénéisation [paragraphe ?? et chapitre ??].

Les LBM sont particulièrement bien adaptées à la simulation de fluides autour de géométries complexes et ont l'avantage de pouvoir être implémentées sur des machines parallèles. Bien qu'historiquement développées pour les gaz en treillis, elles s'obtiennent également directement à partir des équations simplifiées de Boltzmann BGK (Bhatnagar-Gross-Krook).

On considère un treillis discret dont les nœuds portent des particules. Ces particules sautent d'un nœud au suivant selon leur vitesse : c'est la phase de propagation. Puis les particules se choquent et acquièrent une nouvelle vitesse : c'est la phase de collision. La simulation procède en alternant les phases de propagations et de collisions des particules. On montre que de tels gaz suivent les équations des fluides de Navier-Stokes. L'inconvénient majeur de cette méthode appliquée à la dynamique des fluides est l'apparition de « bruit ». Si l'on ne cherche qu'un champ relativement calme (peu de variations, en tous cas, pas de variations brutales), il est nécessaire de pouvoir prendre la moyenne sur un treillis relativement grand et sur une grande période de temps. Dans ce cas, les LBM contournent le problème en pré-moyennant le gaz : on considère la distribution des particules sur le treillis plutôt que les particules elles-mêmes.

La forme générale de l'équation de treillis de Boltzmann est :

$$f_i(x + \Delta_t \mathbf{c}_i, t + \Delta_t) = f_i(x, t) + \Omega_i \quad (1.6)$$

où  $f_i$  est la concentration de particules se déplaçant avec la vitesse  $\mathbf{c}_i$  jusqu'au nœud suivant pendant un temps  $\Delta_t$ .  $\Omega_i$  représente l'opérateur de collision, et c'est lui qui change d'une méthode à l'autre. Dans le modèle BGK (Bhatnagar-Gross-Krook), la distribution des particules après propagation est relaxée vers la distribution à l'équilibre  $f_i^{eq}$ , et on a :

$$\Omega_i = \frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad (1.7)$$

avec  $\tau$  le paramètre de relaxation, qui détermine la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide selon la relation  $\nu = (2\tau - 1)/6$ . La distribution à l'équilibre est une fonction de la densité locale  $\rho$  et de la vitesse locale  $\mathbf{u}$ , qui sont les moments d'ordre 1 et 2 de la distribution des particules :

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(x, t) = \frac{\sum_i f_i(x, t) \mathbf{c}_i}{\rho(x, t)} \quad (1.8)$$

Cette distribution à l'équilibre est calculée par la relation :

$$f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = t_p \rho \left( 1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c_s^2} \right) \quad (1.9)$$

où  $c_s$  est la vitesse du son,  $p = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_i$  et  $t_p$  est la densité à l'équilibre pour  $\mathbf{u} = 0$ .

## 1.6 FEED

Le Finite element exterior calculus, introduit par Douglas N. Arnold, Richard S. Falk et Ragnar Winther en 2006, est une approche visant à expliquer (et à développer) des solutions éléments finis pour une grande variété d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit de mettre à profit les outils de la géométrie différentielle, de la topologie algébrique et de l'algèbre homologique afin de développer des discrétisations compatibles avec les structures géométriques, topologiques et algébriques nécessaires pour que le problème aux équations aux dérivées partielles considéré soit bien posé.

Dans cette version de ce document, nous n'entrons pas plus avant dans cette méthode, qui reste sans doute trop mathématique dans sa présentation pour le public visé. Néanmoins, les articles, notamment de 2006 et de 2010, sont extrêmement pédagogiques et leur lecture ne peut qu'être un plus.

## 1.7 Systèmes multi-corps

Le concept de système multicorps est utilisé en mécanique du solide, plus particulièrement dans les domaines de la robotique, de l'automobile, de la biomécanique... pour modéliser le comportement dynamique de corps rigides et/ou flexibles connectés les uns aux autres par des liaisons mécaniques, chacun de ses corps décrivant de grands déplacements à la fois en translation et en rotation. Une analyse peut inclure plusieurs milliers de corps rigides. Dans une telle approche, ce n'est plus le comportement local qui est visé mais plutôt le comportement de plusieurs corps formant un « mécanisme ».

Un corps représente donc une partie rigide ou flexible d'un système mécanique. Un lien désigne une connection entre au moins deux corps ou entre un corps et le sol : on retrouve donc les liaisons mécaniques classiques comme l'appui ponctuel, la rotule, le glissière, le cardan...

Dans cette approche, le terme de degré de liberté désigne le nombre de mouvements cinématiques possibles, autrement dit le nombre de rotations ou déplacements qu'il reste à fixer pour définir complètement la position dans l'espace. De manière complémentaire, une condition de contrainte désigne une restriction des libertés de mouvement du corps. Ce terme désigne également les contraintes pouvant porter sur les vitesses ou les accélérations de ces mouvements. Enfin, pour parfaire l'analyse, des contraintes supplémentaires peuvent être introduites comme des contraintes de glissement et de contact, entre autres. La dynamique d'un système multicorps est décrite par les

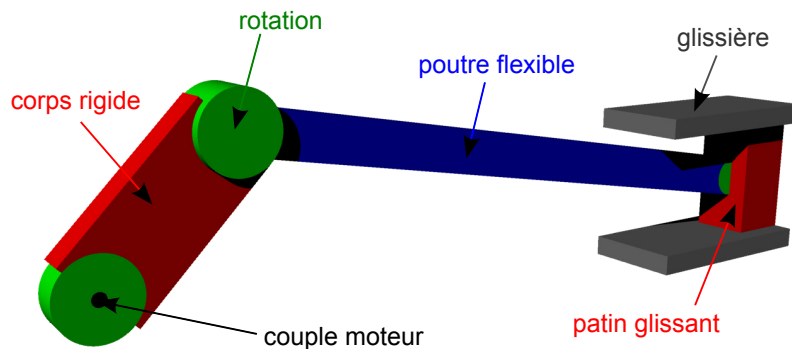


FIGURE 1.1: Exemple de système multi-corps

équations du mouvement. On obtient alors un système de la forme **attention  $q$  et  $u$**  :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}_{\ddot{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}_q\lambda = \mathbf{f} \\ \mathbf{C}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{C}$ , la matrice des conditions de contraintes,  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}}$  la matrice jacobienne (dérivée de  $\mathbf{C}$  par rapport à  $\mathbf{u}$ ) permettant d'appliquer les forces  $\lambda$  correspondant à des multipliateurs de Lagrange et  $\mathbf{Q}_{\ddot{\mathbf{u}}}$ , le vecteur de vitesse quadratique utilisé pour introduire les termes de Coriolis et les termes centrifuges.

Nous n'entrons pas plus en avant, car le système à résoudre doit sembler suffisamment simple pour le lecteur à ce niveau du document et parce que cette méthode est d'application très particulière.