第二&第四次作业

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

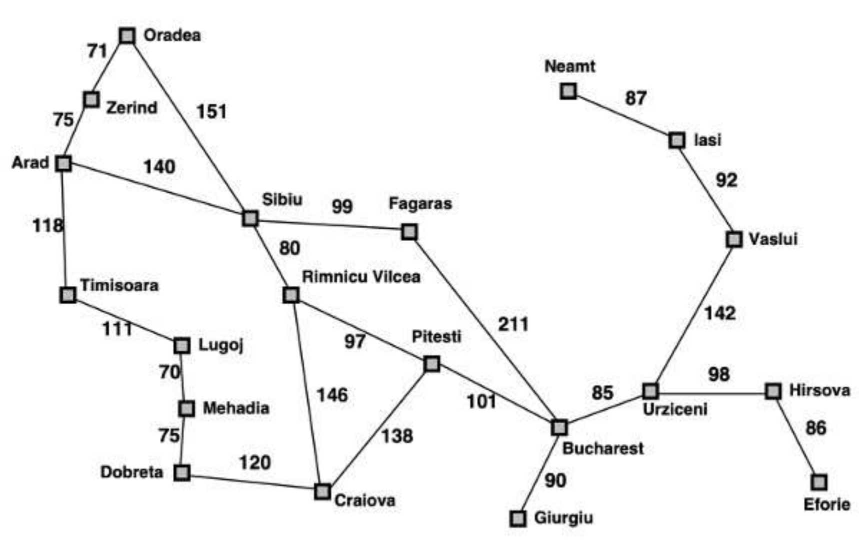
01

第二次作业

第二次作业

- 4.1

跟踪 A∗ 搜索算法用直线距离启发式求解从Lugoj到Bucharest问题的过程。按顺序列出算法扩展的节点和每个节点的 f, g, h 值。



Straight−line distance to Bucharest

Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

第二次作业

L[0+244=244]
M[70+241=311], T[111+329=440]
L[140+244=384], D[145+242=387], T[111+329=440]
D[145+242=387], T[111+329=440], M[210+241=451], T[251+329=580]
C[265+160=425], T[111+329=440], M[210+241=451], M[220+241=461], T[251+329=580]
T[111+329=440], M[210+241=451], M[220+241=461], P[403+100=503], T[251+329=580], R[411+193=604], D[385+242=627]
M[210+241=451], M[220+241=461], L[222+244=466], P[403+100=503], T[251+329=580], A[229+366=595], R[411+193=604], D[385+242=627]
M[220+241=461], L[222+244=466], P[403+100=503], L[280+244=524], D[285+242=527], T[251+329=580], A[229+366=595], R[411+193=604], D[385+242=627]
L[222+244=466], P[403+100=503], L[280+244=524], D[285+242=527], L[290+244=534], D[295+242=537], T[251+329=580], A[229+366=595], R[411+193=604], D[385+242=627]
P[403+100=503], L[280+244=524], D[285+242=527], M[292+241=533], L[290+244=534], D[295+242=537], T[251+329=580], A[229+366=595], R[411+193=604], D[385+242=627], T[333+329=662]
B[504+0=504], L[280+244=524], D[285+242=527], M[292+241=533], L[290+244=534], D[295+242=537], T[251+329=580], A[229+366=595], R[411+193=604], D[385+242=627], T[333+329=662], R[500+193=693], C[541+160=701]

第二次作业

- 4.2

启发式路径算法是一个最佳优先搜索，它的目标函数是 $f(n)=(2-\omega)g(n)+\omega h(n)$ 。

算法中ω取什么值能保证算法是最优的? 当ω=0 时，这个算法是什么搜索? ω=1 呢? ω=2 呢?

第二次作业

若ω=2，则是贪婪最佳搜索，不满足最优性，先考虑ω≠2的情形

$f(n) = (2-w)g(n) + wh(n)$ ⟶ $f(n) = (2-w)[g(n) + \frac{w}{2-w}h(n)]$

启发式路径算法是一个最佳优先搜索 ⟶ 说明h(n)可采纳

因此令 $\frac{w}{2-w}h(n) < h(n)$ ，则新的启发式函数可采纳，满足最优性

计算得到 $0 < w < 1$ 。

- $w = 0$时，$f(n) = 2g(n)$：一致代价搜索
- $w = 1$时，$f(n) = g(n) + h(n)$：Astar搜索
- $w = 2$时，$f(n) = 2h(n)$：贪婪最佳搜索

第二次作业

- 4.6

设计一个启发函数，使它在八数码游戏中有时会估计过高，并说明它在什么样的特殊问题下会导致次最优解。(可以借助计算机的帮助。)证明：如果h被高估的部分从来不超过 c，A*算法返回的解的耗散比最优解的耗散多出的部分也不超过 c。

第二次作业

启发式函数：$h = h_1 + h_2$，h_1是错位的数量，h_2是曼哈顿距离

第二次作业

假设 $h(n) \leq h^*(n) + c$ 并且令 G_2 为超过最优路径 c 的次优目标点，即 $g(G_2) > C^* + c$

令节点 n 为最优路径上的任意节点，则

$$
\begin{aligned}
f(n) &= g(n) + h(n) \\
&\leq g(n) + h^*(n) + c \\
&\leq C^* + c \\
&< g(G_2)
\end{aligned}
$$

第二次作业

- 4.7

证明如果一个启发式是一致的，它肯定是可采纳的。构造一个非一致的可采纳启发式。

第二次作业

n是任意一个节点，n' 是节点n的后继节点

如果h是一致的，则 $h(n) \leq c(n,a,n') + h(n')$

可以使用数学归纳法来证明：

k是从节点n到目标节点最优路径上的节点数

- 当$k=1$时，n'是目标节点，则 $h(n) \leq c(n,a,n')$，成立
- 假设n'是到目标节点最优路径为k步的节点并且$h(n')$是可采纳的
- 则：

$$h(n) \leq c(n,a,n') + h(n') \leq c(n,a,n') + h^*(n') = h^*(n)$$

故到目标节点最优路径为k+1步的n节点也是可采纳的

A->B->C, h(A)=20, h(B)=5, h(C)=0, c(A,B)=10, C(B,C)=10

01

第四次作业

第四次作业

- 5.9

本题以井字棋（圈与十字游戏）为例练习博弈中的基本概念。定义 X_n 为恰好有 n 个 X 而没有 O 的行、列或者对角线的数目。同样 O_n 为正好有 n 个 O 的行、列或者对角线的数目。效用函数给 $X_3=1$ 的棋局+1，给 $O_3=1$ 的棋局−1。所有其他终止状态效用值为 0。对于非终止状态，使用线性的评估函数定义为 $Eval(s)=3X_2(s)+X_1(s)-(3O_2(s)+O_1(s))$。

a. 估算可能的井字棋局数。

b. 考虑对称性，给出从空棋盘开始的深度为 2 的完整博弈树（即，在棋盘上一个 X 一个 O 的棋局）。

c. 标出深度为 2 的棋局的评估函数值。

d. 使用极小极大算法标出深度为 1 和 0 的棋局的倒推值，并根据这些值选出最佳的起

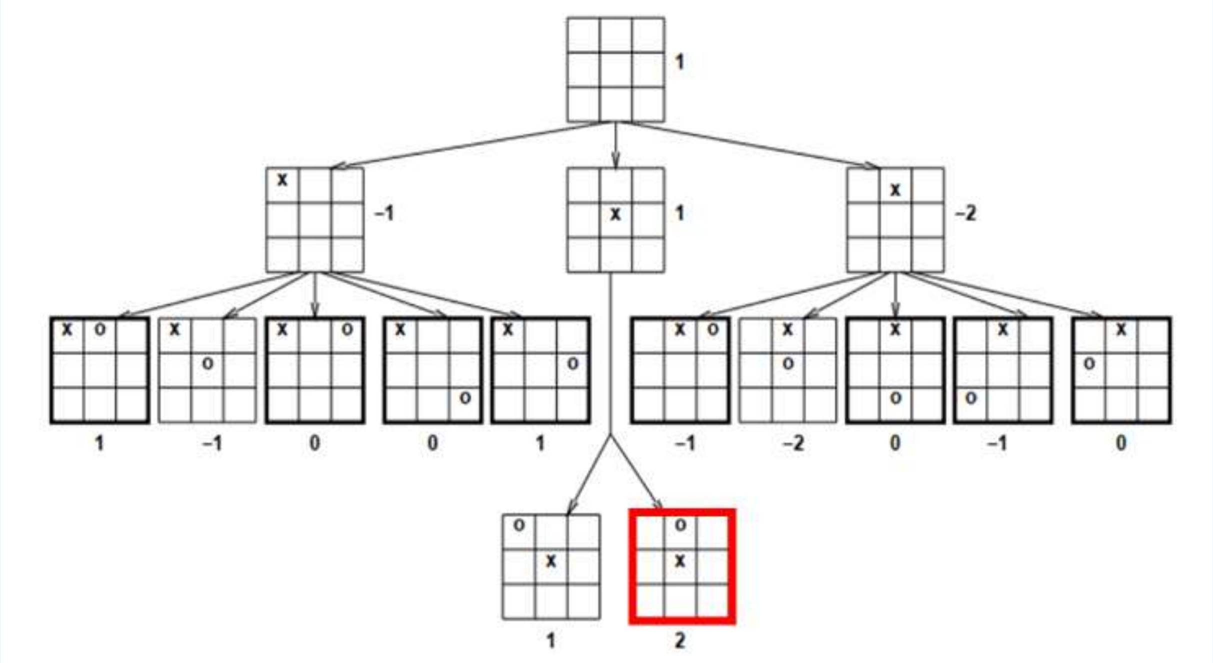
e. 假设结点按对α-β剪枝的最优顺序生成，圈出使用α-β剪枝将被剪掉的深度为 2 的结点。

第四次作业

a. 估算可能的井字棋局数。

最多一共九步，X和O交替下棋，所以最后一共9!种（没有考虑对称性和不合法的棋局）

b – e



第四次作业

- 5.8

考虑图 5.17 中描述的两人游戏。

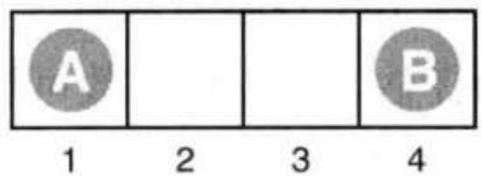


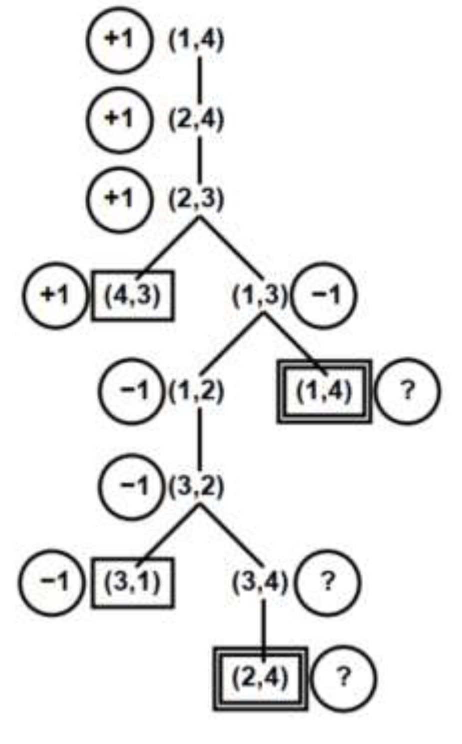
图 5.17 一个简单游戏的初始棋局

选手 *A* 先走。两个选手轮流走棋，每个人必须把自己的棋子移动到任一方向上的相邻空位中。如果对方的棋子占据着相邻的位置，你可以跳过对方的棋子到下一个空位。（例如，*A* 在位置 3，*B* 在位置 2，那么 A 可以移回 1。）当一方的棋子移动到对方的端点时游戏结束。如果 *A* 先到达位置 4，*A* 的值为+1；如果 *B* 先到位置 1，A 的值为–1。

第四次作业

a. 根据如下约定画出完整博弈树：

- 每个状态用(s_A, s_B)表示，其中 s_A 和 s_B 表示棋子的位置。
- 每个终止状态用方框画出，用圆圈写出它的博弈值。
- 把循环状态（在到根结点的路径上已经出现过的状态）画上双层方框。由于不清楚他们的值，在圆圈里标记一个“？”。



第四次作业

b. 给出每个结点倒推的极小极大值（也标记在圆圈里）。解释怎样处理“？”值和为什么这么处理。

Min(-1, ?) = -1, Max(-1, ?) = -1, Min(1, ?) = 1, Max(1, ?) = 1

可以确保在博弈树搜索中，如果一个节点的值是"?"， 那么其父节点的选择将不会受到该节点的影响，从而确保算法的正确性。

c. 解释标准的极小极大算法为什么在这棵博弈树中会失败，简要说明你将如何修正它，在（b）的图上画出你的答案。你修正后的算法对于所有包含循环的游戏都能给出最优决策吗？

标准的极小极大算法是深度优先的，会在遇到循环状态时陷入无限循环，导致死循环。

可以参考(b)的处理方法。显然不能给出最优决策，例如如果游戏持续的时间越长越好。

第四次作业

d. 这个 4-方格游戏可以推广到 n 个方格，其中 $n>2$。证明如果 n 是偶数 A 一定能赢，而 n 是奇数则 A 一定会输。

n为偶数：
A的策略是一直往前走。
A和B一开始的距离是n-2。每一回合距离的变化值要么是减小2，要么是不变。
所以最后A和B刚相遇时，下一步肯定是A先走。
A跨过B，这时候B有两种走法：
B也往前走。那么A肯定比B先到，因为A没走过回头路，即使B也没走过回头路，那么因为A是先动的，且A跨越B，这一步是相当于两步的，所以A肯定先到。
B反过来跨越A：回到A和B相遇的状态，区别在于A和B都往右去了两格。如果每次A和B遇到后B都选择反过来跨越A，那么会一直持续下去。只看最后三个格。若为“A|B|空”，那么A跨越B，结束；若为“空|A|B”，那么A往回走一格，此时B只能往前走，变为“A|B|空”，那么下一步A跨越B，结束。
综上，n为偶数时A一定能赢，策略如上。
n为奇数时同理。

第四次作业

- 5.13

请给出α-β剪枝正确性的形式化证明。要做到这一点需考虑图 5.18。问题为是否要剪掉结点 n_j，它是一个 MAX 结点，是 n_1 的一个后代。基本的思路是当且仅当 n_1 的极小极大值可以被证明独立于 n_j 的值时，会发生剪枝。

a. n_1 的值是所有后代结点的最小值：$n_1 = \min(n_2, n_{21}, \cdots, n_{2b_2})$。请为 n_2 找到类似的表达式，以得到用 n_j 表示的 n_1 的表达式。

b. 深度为 i 的结点 n_i 的极小极大值已知，l_i 是在结点 n_i 左侧结点的极小值（或者极大值）。同样，r_i 是在 n_i 右侧的未探索过的结点的极小值(或者极大值)。用 l_i 和 r_i 的值重写 n_1 的表达式。

c. 现在重新形式化表达式，来说明为了向 n_1 施加影响，n_j 不能超出由 l_i 值得到的某特定界限。

d. 假设 n_j 是 MIN 结点的情况，请重复上面的过程。

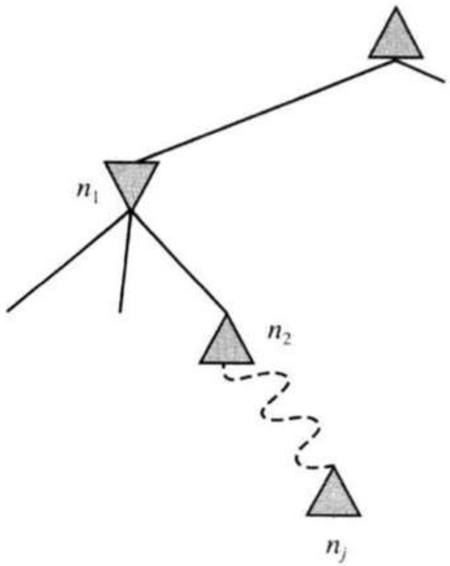


图 5.18 是否剪掉结点 n_j 时的情形

第四次作业

a. n_1 的值是所有后代结点的最小值: $n_1 = min(n_2, n_{21}, \ldots, n_2 b_2)$ 请为 n_2 找到类似的表达式，以得到用 n_j 表示的 n_1 的表达式。

$$n_2 = max(n_3, n_{31}, \ldots, n_{3b_3})$$

$$n_1 = min(max(min(\ldots(min(n_j, n_{j1}, \ldots, n_{jb_j}), \ldots)\ldots), n_{31}, n_{3b_3}), n_{21}, \ldots, n_{2b_2})$$

b. 深度为 i 的结点 n_i 的极小极大值已知， l_i 是在结点 n_i 左侧结点的极小值（或者极大值)。同样， r_i 是在 n_i 右侧的未探索过的结点的极小值(或者极大值)。用 l_i 和 r_i 的值重写 n_1 的表达式。

$$n_1 = \min(l_2, \max(l_3, n_3, r_3), r_2)$$

$$n_1 = min(l_2, max(l_3, min(\ldots max(l_{j-1}, min(l_j, n_j, r_j), r_{j-1})\ldots), r_3), r_2)$$

第四次作业

c. 现在重新形式化表达式，来说明为了向 n_1 施加影响， n_j 不能超出由 l_i 值得到的某特定界限。

如果$n_j > l_j, min(l_j, n_j, r_j)$与$n_j$无关，那么$n_1$也与$n_j$无关；

如果$n_j > l_{j-2}$，

$min(l_j, n_j, r_j) \neq n_j$时，$n_1$与$n_j$无关；

$min(l_j, n_j, r_j) = n_j$时，$max(l_{j-1}, min(l_j, n_j, r_j), r_{j-1}) \geq n_j > l_{j-2}$，

$min(l_{j-2}, max(l_{j-1}, min(l_j, n_j, r_j), r_{j-1}), r_{j-2})$与$n_j$无关

同理可以递推。

因此$n_j < \min(l_2, l_4, \dots)$时对$n_1$才能有影响。

d. 假设 n_j 是MIN结点的情况，请重复上面的过程。

$n_j > \max(l_3, l_5, \dots)$时对$n_1$才能有影响。

谢谢！