



Механико-математический факультет

**АЛГЕБРА, 1 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Студент: Молчанов Вячеслав

Группа: 108

Москва  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Система линейных уравнений</b>	<b>2</b>
1.1	Матрица. Основные понятия . . . . .	2
1.2	Система линейных (алгебраических) уравнений . . . . .	3
1.3	Элементарные преобразования над СЛУ . . . . .	4
1.4	Элементарные преобразования над матрицами . . . . .	5
1.5	Решение СЛУ методом Гауса . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Векторные пространства</b>	<b>10</b>
2.1	Аксиомы элементов векторного пространства . . . . .	10
2.2	Следствия . . . . .	11
2.3	Векторные подпространства . . . . .	12
2.4	Линейная зависимость системы векторов . . . . .	13
2.5	Линейная оболочка множества $S$ . . . . .	16
2.6	Базис . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Ранг</b>	<b>19</b>
3.1	Рангом системы векторного пространства . . . . .	19
3.2	Ранг матрицы . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Возвращаемся к системе линейных уравнений</b>	<b>22</b>
4.1	Фундаментальная система решений . . . . .	23
4.2	Неоднородная СЛУ . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Операции над матрицами</b>	<b>27</b>
<b>6</b>	<b>Линейные отображения</b>	<b>29</b>
6.1	Изоморфизм . . . . .	29
6.2	Линейное отображение и матрицы . . . . .	31
6.3	Операции над линейными отображениями . . . . .	32
6.4	Свойства операций над матрицами . . . . .	35
6.5	Свойства операции транспонирования . . . . .	36
6.6	О ранге и операциях над матрицами . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Перестановки</b>	<b>38</b>
<b>8</b>	<b>Определители <math>n</math>-го порядка</b>	<b>39</b>
8.1	Свойства определителей . . . . .	40

# 1 Система линейных уравнений

## 1.1 Матрица. Основные понятия

**Определение.** Матрица  $A$  размера  $m \times n$  это прямоугольная таблица с  $m$  строками и  $n$  столбцами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  - элемент матрицы и индексы:

- $i$  - номер строки
- $j$  - номер столбца

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$  - Множество всех матриц размера  $m \times n$  с элементами из  $\mathbb{R}$

Матрица  $m \times 1$  называется столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Если  $A = (a_{ij})$  - квадратная,  $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ , то  $A$  называется диагональной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если  $A$  - диагональная и  $a_{ij} = 1$ , то  $A$  называется единичной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Если  $A$  - квадратная, то

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ главная диагональ}$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} & & a_{n1} \\ & \dots & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix} \text{ побочная диагональ}$$

**Определение.** Если  $A$  - размера  $m \times n$ ,  $a_{ij} = 0 \forall i, j$ , то  $A$  называется нулевой.

## 1.2 Система линейных (алгебраических) уравнений

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где  $a_{ij}, b \in \mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  - неизвестные.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A$  - матрица коэффициентов,  $a_{ij}$  называется коэффициентом СЛУ.

$B$  - столбец свободных членов,  $b_j$  - свободный член.

**Определение.** Расширенная матрица  $(A|B)$ . Набор чисел  $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$  называется решением системы  $(*)$ , если подстановка этих чисел вместо неизвестных в  $(*)$  дает тождество в каждом уравнении.  $(x_i^0 \longleftrightarrow x)$

Решить систему - это найти все решения системы. Любое конкретное решение называется частным.

**Определение.** Если СЛУ имеет решение, то она называется совместной, иначе несовместной.

**Определение.** Совместная система, имеющая одно решение, называется определенной, иначе неопределенной (более одного решения).

### 1.3 Элементарные преобразования над СЛУ

1. Прибавить к одному уравнению другое уравнение, умноженное на число  $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Поменять местами два уравнения
3. Умножить уравнение на ненулевое число  $\mu \in \mathbb{R}$

**Утверждение.** Эти преобразования обратимы.

**Определение.** Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если их множества решений совпадают.

**Утверждение.** Если одна СЛУ получена из другой СЛУ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  (Не Куликова)  $AX = B$  - исходная система,  $\tilde{A}X = \tilde{B}$  преобразованная система.

Пусть  $z_1, \dots, z_n$  некоторое решение  $AX = B$ . Будем рассматривать  $\tilde{A}X = \tilde{B}$ , в ней ЭП II типа умножают строку на  $\mu$ , имеем:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \text{ в } AX = B$$

$$\mu a_{i1}x_1 + \dots + \mu a_{in}x_n = \mu b_i \text{ в } \tilde{A}X = \tilde{B}$$

Выносим  $\mu$  из второго уравнения:

$$\mu(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = \mu b_i$$

Получаем, что  $z_1, \dots, z_n$  решение для  $\tilde{A}X = \tilde{B}$ . Для III типа ЭП очевидно. Теперь рассмотрим I тип, будем к  $i$ -ой строчке прибавлять  $j$ -ую к коэффициентом  $\lambda$ , получаем:

$$\begin{aligned} (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n &= \\ &= a_{i1}x_1 + \lambda a_{j1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda a_{jn}x_n = \\ &= a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j \end{aligned}$$

Таким образом, любое решение старой СЛУ - это и решение новой, то есть множество решений не уменьшилось. (со столбцами все тоже самое)

$\Leftarrow$  В обратную сторону аналогично (для доказательства эквивалентности), используя обратимость элементарных преобразований.  $\square$

Мораль в том, что мы можем работать с расширенной матрицей  $(A|B)$ .

## 1.4 Элементарные преобразования над матрицами

Элементарные преобразования над строками:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_i} \end{pmatrix}, \text{ где } \overline{a_i} - \text{строка}$$

- ЭП1:  $\overline{a_i} \rightarrow \overline{a_i} + \lambda \overline{a_i}$
- ЭП2:  $\overline{a_i} \longleftrightarrow \overline{a_j}$
- ЭП3:  $\overline{a_i} \rightarrow \mu \overline{a_i}, \mu \neq 0$

**Определение.** Лидер строки (ведущий элемент) - это 1-й ненулевой элемент слева.

**Пример:**  $(0, 0, \underbrace{3}_{\text{лидер}}, 4, 5, 0, 0, 7)$

**Определение.** Матрица  $A$  размера  $m \times n$  называется ступенчатой, если

1. Номера лидеров ненулевых строк строго возрастают с увеличением номера строки.
2. Все нулевые строки стоят внизу (в конце).

**Теорема.** Любую матрицу  $A$  размера  $m \times n$  за конечное число элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ :

Если  $A$  - нулевая, то  $A$  - ступенчатого вида. Если  $A \neq 0$ : найдем первый ненулевой столбец (начиная слева). Пусть  $j$  - номер первого ненулевого столбца. Пусть  $a_{ij} \neq 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Меняем 1-ю и  $i$ -ю строку местами и получаем, что  $a_{ij}$  стал лидером первой строки. Считаем, что сразу  $a_{1j} \neq 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{ij} & * \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Вычитаем из каждой  $k$ -й строки, начиная со 2-ой, 1-ю строку, умноженную на число  $\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$ . Получает вид:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{array} \right)$$

К правой части матрицы применяем индукцию и проводим матрицу к ступенчатому виду.  $\square$

**Замечание.** Этот метод называется методом Гауса.

## 1.5 Решение СЛУ методом Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Элементарные преобразования над  $AX = B \iff$  элементарные преобразования над  $(A|B)$ .

СЛУ  $AX = B$  ступенчатая  $\implies (A|B)$  имеет ступенчатый вид.

**Утверждение.** Решение СЛУ ступенчатого вида.

Пусть  $AX = B$  - ступенчатая

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{\tilde{s}} \end{array} \right)$$

$\tilde{s}$  - ненулевые строки расширенной матрицы

$s$  - число ненулевых строк

$$\tilde{s} = \begin{cases} s \\ s+1 \end{cases}$$

1 случай:  $\tilde{s} \neq s$  ( $\tilde{s} = s+1$ )

Рассмотрим последнюю ненулевую строку:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{s+1} \end{array} \right)$$

$0x_1 + \dots + 0x_n = b_{s+1} \implies$  решение у этого уравнения нет  $\implies$  СЛУ не имеет решения, т.е. несовместна.

Далее  $\tilde{s} = s$

Заметим, что  $\tilde{s} = s \leq n$  ( $n$ -количество столбцов)

2 случай:  $\tilde{s} = s = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Такая СЛУ называется строго треугольной

Из  $n$ -го уравнения однозначно находится  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ . Подставляем во все оставшиеся уравнения  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \implies$  исключаем  $x_n$ . Получаем строго треугольную систему с меньшим количеством неизвестных.



Далее из (n-1)-го уравнения находим  $x_{n-1}$  и т.д.  $\implies$  СЛУ имеет единственное решение т.е. является определенной.

3 случай:  $\tilde{s} < n$

$$\left( \begin{array}{cc|ccccc|c} 0 & 0 & \underline{a_{1k_1}} & * & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \underline{a_{2k_2}} & * & \cdots & * & * \\ & & & \ddots & & & & \vdots \end{array} \right)$$

$a_{1k_1}, \dots, a_{sk_s}$  - лидеры;

$x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$  - главные неизвестные (неизвестные соответствуют лидерам)

Оставшиеся неизвестные назовем свободными.

Перекинем в правую часть СЛУ слагаемые, соответствующие свободным неизвестным  $\implies$  получаем относительно главных неизвестных строго треугольную СЛУ.

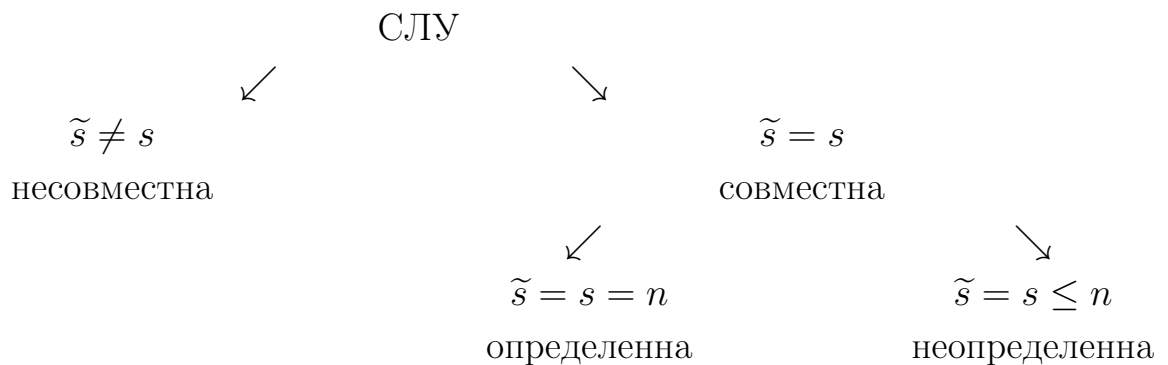
Как в случае 2 однозначно выражаются главные неизвестные через свободные  $\implies$  с точностью до нумерации получаем:

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ \vdots \\ x_s = c_{s,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{sn}x_n + d_s \end{cases}$$

Это выражение называется общим решением системы. Подставляя вместо свободных неизвестных конкретное число из  $\mathbb{R}$ , получаем значение для главных.

$\implies$  получаем все решения СЛУ

Если СЛУ имеет  $> 1$  решения - такая СЛУ называется неопределенной.



**Алгоритм.**  $AX = B \mapsto (A|B) \sim (A_c|B_c) \mapsto A_cX = B_c$

**Определение.** Матрица  $A$  имеет улучшенный ступенчатый вид, если выполнены следующие условия:

1.  $A$  - ступенчатого вида
2. Все лидеры равны 1
3. В каждом столбце, где есть лидер  $\neq 0$ , все элементы равны 0

**Утверждение.** Любую матрицу  $A$  можно привести к улучшенному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

*Доказательство.* Т.к. любую матрицу можно привести к ступенчатому виду  $\implies$  будем считать, что  $A$  - ступенчатая.

Рассмотрим последний лидер  $a_{sk_s}$ . Если  $a_{sk_s} \neq 1$ , то  $s$ -ю строку делим на  $a_{sk_s}$  и получаем, что  $\widetilde{a_{sk_s}} = 1$ .

Далее из всех строк вычитаем первую, умноженную на  $a_{ik_s} \implies \widetilde{a_{ik_s}} = 0$  и т.д.  $\square$

**Определение.** СЛУ  $AX = B$  называется однородной, если  $B = 0$ , т.е. все свободные члены нулевые.

**Утверждение.** Однородная система всегда совместна.

*Доказательство.*  $AX = 0$  всегда имеет решение  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  (тривиальное решение)  $\square$

**Следствие.** Однородная СЛУ, в которой число уравнений  $<$  числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

*Доказательство.* (в обозначениях из метода Гаусса)

Т.к. система совместна (т.к.  $B = 0$ ), то  $s = \widetilde{s}$

С другой стороны  $s = \bar{s} \leq$  число исходных уравнений  $< n \implies s = \widetilde{s} < n \implies$  СЛУ неопределенна  $\implies \exists$  более одного решения  $\implies \exists$  нетривиальное решение.  $\square$

## 2 Векторные пространства

### 2.1 Аксиомы элементов векторного пространства

Мы рассматриваем векторные пространства над полем  $\mathbb{R}$ .

**Определение.** Векторным пространством над  $\mathbb{R}$  называют множество элементов  $V$ , на котором введены операции сложения и умножения на числа из  $\mathbb{R}$ :

1.  $\forall x, y \in V \implies x + y = z \in V$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V \implies \lambda x = w \in V$

Удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $x + y = y + x$  (коммутативность)
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (ассоциативность)
3.  $\exists 0 \in V : \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$  (нейтральный элемент относительно сложения)
4.  $\forall x \in V : \exists x' : x + x' = 0$  (противоположный элемент)
5.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  (дистрибутивность умножения относительно сложения)
6.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  (дистрибутивность сложения относительно умножения)
7.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$  (ассоциативность умножения)
8.  $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$  (нейтральный элемент относительно умножения)

**Определение.** Любой элемент векторного пространства называется вектором.

#### Примеры векторных пространств:

1.  $V^2$  - Геометрические векторы на плоскости.
2.  $V^3$  - Геометрические векторы в пространстве.
3.  $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$  - арифметические векторы.

$$"+": (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$"\times": (a_1, \dots, a_n) \times \lambda = (a_1\lambda, \dots, a_n\lambda)$$

**Упражнение.** Проверьте, что  $\mathbb{R}^n$  (арифметическое пространство строк) с этими операциями является векторным пространством.

## 2.2 Следствия

1. нулевой вектор единственный

*Доказательство.* Пусть существует два  $\bar{0}_1, \bar{0}_2 \in V$ , тогда:

$$\bar{0}_2 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_1$$

□

2.  $\forall x \in V$  противоположный вектор единственный

*Доказательство.* Пусть существует два  $x_1, x_2$  - различные противоположные к вектору  $x$ , тогда:

$$\bar{0} + x_2 = (x_1 + x) + x_2 = x_1 + (x + x_2) = x_1 + \bar{0}$$

□

3.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$

*Доказательство.*

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Прибавим к обеим частям уравнения  $\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$  противоположный к  $\lambda \cdot \bar{0}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \bar{0} + (-\lambda \cdot \bar{0}) &= \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0} + (-\lambda \cdot \bar{0}) \\ \bar{0} &= \lambda \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

□

4.  $\lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$

5.  $\lambda \cdot (x - y) = \lambda x - \lambda y$

6.  $(-1) \cdot x = -x$

7.  $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda x - \mu x$

## 2.3 Векторные подпространства

**Определение.** Подмножество  $U \subseteq V$  называется векторным подпространством, если:

1.  $x, y \in U \implies x + y \in U$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in U \implies \lambda \cdot x \in U$
3.  $U \neq \emptyset$

**Замечание.** 3 условие заменить на условие:  $0 \in U$

$\Leftarrow$  очевидно.

$\implies$  если  $U \neq \emptyset$ , то  $\exists x \in U \implies$  по 2. :  $(-1) \cdot x \in U \implies -x \in U \implies x + (-x) \in U \implies 0 \in U$

**Утверждение.** Любой вектор подпространства векторного пространства  $V$  сам является векторным пространством относительно операций векторного пространства

*Доказательство.* Надо проверить определение. 1 и 2 свойство из операций векторного пространства означают, что в  $U$  заданы операции сложения и умножения на вещественное число. Проверка аксиом векторного пространства: 1,2,5,6,7,8 - выполнены для всех векторов из  $V$ , а значит и для всех векторов из  $U$ .

3,4 доказательство как в замечании:

$$\forall x \in U, \exists (-x) = (-1) \cdot x \in U, \bar{0} \in U, \text{ т.к. } U \neq \emptyset$$

□

**Примеры.**

1.  $V^3, U$  - множество всех векторов из  $V^3$ , параллельные фиксированной плоскости.
2.  $\mathbb{R}^n, U = \{(a_1, \dots, a_n) | a_{2i} = 0\}$  - векторное подпространство  
 $\tilde{U} = \{(a_1, \dots, a_n) | a_{2i} = 1\}$  - не векторное подпространство, т.к. множество не замкнуто относительно сложения и умножения.
3. В любом векторном пространстве  $V$  есть такие подпространства, состоящие только из нулевого вектора. (тривиальное или несобственное подпространство) (Остальное называется собственными)

## 2.4 Линейная зависимость системы векторов

$V$  - векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$

**Определение.** Линейной комбинацией векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$  с коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  называется выражение вида:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Говорят, что вектора  $w \in V$  линейно выражаются через  $(v_1, \dots, v_n)$ , если  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$

**Определение.** Линейная комбинация  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  называется тривиальной, если  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ . Иначе нетривиальной.

**Определение.** Система векторов  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно зависимой (ЛЗ), если  $\exists$  нетривиальная линейная комбинация равная 0, (т.е.  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  не все равные 0) такая что  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Иначе система называется линейно независимой (ЛНЗ), т.е. из любого такого равенства  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ .

**Примеры.**  $V^2, v_1 = i + j, v_2 = 2i, v_3 = 3i$  -линейно зависима система, т.к.

$$1 \cdot (i + j) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (3i) = 0$$

$$1 \cdot v_1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot v_2 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot v_3 = 0$$

**Свойства.**

1. Система из одного вектора  $V_1$  ЛЗ  $\iff V_1 = 0$
2. Система из 2-х векторов  $v_1$  и  $v_2$  ЛЗ  $\iff$  противоположные, т.е.  $v_1 = \lambda v_2$   
 $v_2 = \mu v_1$ .

**Пример.**  $\mathbb{R}^n$

Система  $\underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{e_2}, \dots, \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 1)}_{e_n}$  линейно независимая  
 $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (0, \dots, 0) \iff (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \iff \text{ЛНЗ}$

**Лемма 1.** (Критерий линейной зависимости) Система векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $n > 1$  - линейно зависимы  $\iff$  хотя бы один вектор линейно выражается через оставшиеся.

*Доказательство.*

$\implies$  По определению ЛЗ  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  не все нулевые:  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ . Без ограничения общности можем считать, что  $\lambda_1 \neq 0$ , тогда  $v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n)$

$\Leftarrow$  Пусть один из этих векторов выражается через оставшиеся. Без ограничения общности можем считать, что  $v_1$  выражается через оставшиеся

$$v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

$1 \cdot v_1 - \mu_2 v_2 - \dots - \mu_n v_n = 0$  - нетривиальная линейная комбинация,

т.к.  $\mu_1$  (коэф. перед  $v_1$ )  $\neq 0 \implies v_1, \dots, v_n$  - линейно зависима.

□

**Замечание.** В лемме 1 нельзя «хотя бы один» заменить на «любой»!

Пусть  $v_1 \neq 0, v_2 = 0$  и  $v_1, v_2$  - ЛЗ, т.к.  $0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$

**Лемма 2.** Пусть  $v_1, \dots, v_n \in V$  - ЛНЗ, тогда  $w \in V$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_n \iff (w, v_1, \dots, v_n)$  - ЛЗ.

*Доказательство.*

$\implies \exists \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R} : w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \implies$  по критерию ЛЗ система  $\{w, v_1, \dots, v_n\}$  - ЛЗ.

$\Leftarrow$  Пусть система ЛЗ  $\implies \exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  - не все нули, так что  $\lambda_0 w + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , тогда:

1.  $\lambda_0 = 0$ , то  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  - нетривиальная линейная комбинация

2.  $\lambda_0 \neq 0 \implies w = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_0})v_1 + \dots + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_0})v_n$

□

**Лемма 3.** Пусть вектор  $w$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_k$ . Тогда это выражение единственное.

*Доказательство.*

1. Пусть выражается единственно. Допустим,  $v_1, \dots, v_k$  - ЛЗ  $\implies \exists \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  не все нулевые, т.ч.  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

Тогда если  $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$ , то  $w + 0 = (\mu_1 + \lambda_1)v_1 + \dots + (\mu_k + \lambda_k)v_k$  другое разложение, противоречие.

2. Пусть  $v_1, \dots, v_k$  - ЛНЗ. Допустим, что существует два разложения:

$$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$$

$$w = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\mu}_k v_k$$

$\implies \{v_1, \dots, v_k\}$  - ЛЗ  $\implies$  противоречие.

□

#### Лемма 4.

1. Если какая-то подсистема векторов ЛЗ, то вся система ЛЗ.
2. Если система векторов ЛНЗ, то любая подсистема ЛНЗ.

*Доказательство.*

1. Пусть подсистема  $v_1, \dots, v_k$  системы  $v_1, \dots, v_k, \dots, v_m$  - ЛЗ  $\implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$  не все равные нулю, т.ч.  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ . Положим  $\lambda_{k+1} = 0, \dots, \lambda_m = 0$ . Тогда  $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k, \dots, \lambda_m v_m = 0$  - нетривиальная ЛК  $\implies \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$  - ЛЗ.
2. Следует из 1.

□

#### Лемма 5. (ОЛЛЗ)

Пусть  $v_1, \dots, v_k \in V, w_1, \dots, w_m \in V$ , причем каждый  $w_i$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_k$ , тогда, если  $m > k$ , то  $\{w_1, \dots, w_m\}$  - ЛЗ.

*Доказательство.* Пусть

$$\begin{cases} w_1 = c_{11}v_1 + \dots + c_{1k}v_k \\ w_2 = c_{21}v_1 + \dots + c_{2k}v_k \\ \vdots \\ w_m = c_{m1}v_1 + \dots + c_{mk}v_k \end{cases} \quad \text{где } c_{ij} \in \mathbb{R}$$

Докажем, что  $\exists$  нетривиальная ЛК  $w_1, \dots, w_m = 0$

Для произвольных  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m &= \\ &= \lambda_1(c_{11}v_1 + \dots + c_{1k}v_k) + \dots + \lambda_m(c_{m1}v_1 + \dots + c_{mk}v_k) = \\ &= (\lambda_1 c_{11} + \dots + \lambda_m c_{m1})v_1 + \dots + (\lambda_1 c_{1k} + \dots + \lambda_m c_{mk})v_k \end{aligned}$$



Рассмотрим СЛУ с неизвестными  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  из  $k$  уравнений:

$$\begin{cases} c_{11}\lambda_1 + \dots + c_{m1}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ c_{1k}\lambda_1 + \dots + c_{mk}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

Т.к.  $m > k$  и это ОСЛУ в которой число уравнений  $<$  числа неизвестных, то эта система имеет нетривиальное решение

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \implies \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0$  - это нетривиальная ЛК

$\implies w_1, \dots, w_m$  - ЛЗ. □

## 2.5 Линейная оболочка множества $S$

$V$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$

$S \subseteq V, S \neq \emptyset$

**Утверждение.** Множество всех ЛК  $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $s_i \in S$  образует векторное подпространство в пространстве  $V$ .

*Доказательство.* Д/з. □

**Определение.** Такое векторное подпространство называется линейная оболочка множества  $S$ , обозначается  $\langle S \rangle$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ ;  $\langle S \rangle = \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

2.  $V^3$ ,  $S = \{i, j, i + j\}$



$$\tilde{S} = \{i + j\}$$

**Определение.** Если  $V = \langle S \rangle$ , то  $S$  называется порождающим множеством векторного пространства  $V$ . Говорят векторное пространство  $V$  порождается множеством  $S$ .

**Определение.** Если  $\exists$  конечное множество  $S$ , т.ч.  $V = \langle S \rangle$ , то  $V$  называется конечномерным (конечнопорожденным), иначе бесконечномерным.

**Пример.**  $\mathbb{R}^n = \langle (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \rangle$

**Лемма.** (Переформулировка ОЛЛЗ) Пусть векторное пространство  $V$  порождается  $k$  векторами. Тогда любые  $m > k$  векторов из  $V$  - ЛЗ.

## 2.6 Базис

$V$ - конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$

**Определение. 1** Система векторов  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$  называется базисом векторного пространства  $V$ , если:

1.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  - ЛНЗ
2.  $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ , т.е.  $\forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Эти числа  $x_1, \dots, x_n$  - называются координатами вектора  $x$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$

**Определение. 2** Система векторов  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$  называется базисом векторного пространства  $V$ , если любой вектор  $x \in V$  выражается через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  единственным образом.

**Утверждение.** (Опр 1)  $\iff$  (Опр 2)

*Доказательство.* По лемме (3). □

**Теорема.** Всякое конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$  обладает базисом. Более того, из любого конечного порожденного множества можно выбрать базис.

*Доказательство.* Пусть  $S$ - какое-то порожденное множество векторного пространства  $V$ .

Если  $S$  - ЛНЗ, то  $S$  - базис

Если  $S$  - ЛЗ, то по критерию о ЛЗ один из векторов  $S_1$  множества  $S$  линейно выражается через остальные.

Тогда  $S_1 = S \setminus \{s_1\}$  - конечное порождающее множество. ч.т.д.

Т.к.  $S$  - конечное, это процесс прервется и мы получим ЛНЗ порожденную систему. □

**Теорема.** В любом базисе конечномерного векторного пространства  $V$  над  $\mathbb{R}$  одно и тоже число векторов.

*Доказательство.* Пусть есть два базиса  $\{e_1, \dots, e_m\}$  и  $\{f_1, \dots, f_m\}$  векторного пространства  $V$ . Тогда каждый вектор  $f_i$  выражается через  $e_1, \dots, e_m$ .

По ОЛЛЗ:  $\{f_1, \dots, f_m\}$  - ЛЗ  $\implies \{f_1, \dots, f_m\}$  - не базис  $\implies$  противоречие. □

**Определение.** Число векторов в базисе конечномерного векторного пространства  $V$ , называется размерностью векторного пространства и обозначается:  $\dim V$

**Примеры.**

1.  $\dim V^2 = 2$

2.  $\dim \mathbb{R}^n = n$

**Замечание.** Если  $V = 0$ , то  $\dim V = 0$  (базис состоит из  $\emptyset$ )

Пусть  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,  $S \subseteq V$  Любые  $m > n$  векторов в  $S$  - ЛЗ. (из ОЛЛЗ)

$\implies$  в  $S$   $\exists$  максимальная ЛНЗ подсистема (т.е. ничего нельзя добавить к этой подсистеме без нарушения ЛНЗ)

**Лемма 6.** Пусть  $V$  -  $n$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $S \subseteq V$ . Тогда максимальная ЛНЗ система векторов из  $S$  образует базис в лин. оболочке  $\langle S \rangle$

*Доказательство.* Пусть  $\{s_1, \dots, s_k\}$  максимальная (по включению) ЛНЗ система в  $S \implies \forall s \in S \setminus \{s_1, \dots, s_k\} \implies \{s, s_1, \dots, s_k\}$  - ЛЗ.

По Лемме (2).  $\implies s = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$

Докажем, что  $\{s_1, \dots, s_k\}$  базис в  $\langle S \rangle$ .

1. ЛНЗ (очевидно)

2.  $\forall x \in \langle S \rangle: x = x_1 s_1 + \dots + x_k s_k$

По определению линейной оболочки  $x$  линейно выражается через вектора из  $S$   
А каждый вектор из  $S$  линейно выражается через  $\{s_1, \dots, s_k\}$  □

**Теорема.** Пусть  $V$  конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , тогда:

1. Любая максимальная ЛНЗ система векторов из  $V$  - базис  $V$ .
2. Любую ЛНЗ систему векторов из  $V$  можно дополнить до базиса векторного пространства  $V$ .

*Доказательство.*

1. По лемме (6).  $S = V$

2. Пусть  $S$  - ЛНЗ система векторов из  $V$

Если  $V = \langle S \rangle$ , тогда  $S$ - базис.

Если  $V \neq \langle S \rangle$ , то  $\exists s_1 \in V \setminus \langle S \rangle$

$\implies s_1$  линейно не выражается через  $S \implies$  (По лемме 2.)  $S_1 = S \cup \{s_1\}$  - ЛНЗ.

$\implies$  Если  $V = \langle S \rangle$ , то  $S_1$  базис, иначе  $\exists S_2 \in V \setminus \langle S_1 \rangle$ , и т.д.

Этот процесс прервется на конечном шаге, т.к. пространство  $V$ - конечное. (Если  $\dim V \neq n$ , то  $\nexists$  ЛНЗ системы с числом векторов  $> n$ )  $\square$

**Следствие.** Пусть  $V$  конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$

1. Любой ненулевой вектор можно дополнить до базиса.
2. Любые  $n$  ЛНЗ вектора в  $n$ -мерном пространстве  $V$  образуют базис.

## 3 Ранг

### 3.1 Рангом системы векторного пространства

**Определение.** Рангом системы векторного пространства  $S \subseteq V$  называется  $\dim \langle S \rangle$

$A$  - матрица  $m \times n$

The diagram illustrates the equivalence between two ways of viewing a matrix  $A$ . On the left,  $A$  is represented as a system of rows, shown as a large pair of parentheses containing two horizontal ellipses representing rows, with a vertical ellipsis between them. An arrow labeled  $\mathbb{R}^n$  points to the bottom row. On the right,  $A$  is represented as a system of columns, shown as a large pair of parentheses containing two vertical ellipses representing columns, with a horizontal ellipsis between them. An arrow labeled  $\mathbb{R}^m$  points to the left column. The two representations are separated by an equals sign.

**Определение.** Рангом матрицы  $A$  называется ранг системы ее строк, т.е. максимальное число ЛНЗ строк матрицы.

### 3.2 Ранг матрицы

**Определение.** Ранг системы  $\{s_1, \dots, s_n\}$  - векторов называется  $\dim \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ .

**Определение.** Рангом матрица  $A$   $m \times n$  называется ранг системы её строк.

The diagram shows a matrix  $A$  as a system of rows. It consists of a large pair of parentheses containing two horizontal ellipses representing rows, with a vertical ellipsis between them. The top row is labeled  $A_1$  and the bottom row is labeled  $A_m$ .

**Определение.** Две системы векторов  $\{v_1, \dots, v_n\}$   $\{w_1, \dots, w_n\}$  называются эквивалентными, если каждый вектор  $v_i$  линейно выражается через  $\{w_1, \dots, w_n\}$ , а  $w_i$  через  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

Это условная эквивалентность:  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$

**Утверждение.** При элементарных преобразованиях над строками, ранг матрицы  $A$  не изменяется.

*Доказательство.*

$$A = \left( \begin{array}{c} \text{---} A_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} A_m \text{---} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{ЭП над строками}} \tilde{A} = \left( \begin{array}{c} \text{---} \tilde{A}_1 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \tilde{A}_m \text{---} \end{array} \right)$$

$$\langle A_1, \dots, A_m \rangle = \langle \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m \rangle$$

т.е. система строк  $A$  эквивалентна системы строк  $\tilde{A} \implies rk A = rk \tilde{A}$ . □

**Утверждение.** При элементарных преобразованиях над столбцами, ранг матрицы  $A$  не изменяется.

### Предложение 1.

Ранг матрицы  $A$  равен числу ненулевых строк матрицы ступенчатого вида, к которому можно привести матрицу  $A$  с помощью элементарных преобразований строк.

*Доказательство.*  $A \xrightarrow{\text{ЭП строк}} A_{CT} \implies rk A = rk A_{CT}$

$$A_{CT} = \left( \begin{array}{cccc} \boxed{a_{i_1 1}} & & & \\ & \boxed{a_{i_2 2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{a_{i_s s}} \end{array} \right) \quad a_{i_1 1}, \dots, a_{i_s s} - \text{лидеры строк в } A_{CT} \implies a_{i_1 1} \neq 0, \dots, a_{i_s s} \neq 0$$

Очевидно, что  $rk A_{CT} \leq s$ . Достаточно доказать, что ненулевые строки ЛНЗ.

Рассмотрим ЛК:

$$\lambda_1(0, \dots, 0, a_{i_1 1}, *, \dots, *) + \lambda_2(0, \dots, 0, a_{i_2 2}, *, \dots, *) + \dots + \lambda_s(0, \dots, 0, a_{i_s s}, *, \dots, *) = (0, \dots, 0)$$

$$(0, \dots, 0, \lambda_1 a_{i_1 1}, \dots, \lambda_1 a_{i_1 1} + \lambda_2 a_{i_2 2}, \dots) = (0, \dots, 0) \implies \lambda_1 \underbrace{a_{i_1 1}}_{\text{лидер}} = 0 \implies \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 a_{i_2 1} + \lambda_2 \underbrace{a_{i_2 2}}_{\text{лидер}} = 0 \implies \lambda_2 = 0 \text{ и т.д.}$$

Получаем, что  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_s = 0 \implies$  это ЛК - ЛНЗ. □

**Предложение 2.** Ранг системы столбцов не изменяется при элементарных преобразованиях над строками.

*Доказательство.*  $A \xrightarrow{\text{ЭП строк}} \tilde{A}$ . Пусть  $A = (a_{ij}) = (\underbrace{A_1, \dots, A_n}_{\text{столбцы } A})$   $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$ . Докажем, что если для некоторого числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  выполнено:  $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = 0$ , то для этих же чисел  $\lambda_1 \tilde{A}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{A}_n = 0$  (Верно и обратное, т.к. ЭП обратимы, т.е. если для каких-то чисел  $\lambda_i \in \mathbb{R} : \sum \lambda_i \tilde{A}_i = 0$ , то  $\sum \lambda_i A_i = 0$ ).

$$\text{Дано: } \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_m - \text{решение ОСЛУ } AX = 0.$$

Т.к. при ЭП над уравнениями множество решений не меняется, поэтому  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - это решение ОСЛУ  $\tilde{A}X = 0 \Rightarrow \lambda_1 \tilde{A}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{A}_n = 0$

Отсюда получаем, что если  $A_{i_1}, \dots, A_{i_s}$  - максимальная ЛНЗ система столбцов в  $A$ , то  $\tilde{A}_{i_1}, \dots, \tilde{A}_{i_s}$  - максимальная ЛНЗ система столбцов в  $\tilde{A} \Rightarrow rk\{\tilde{A}_{i_1}, \dots, \tilde{A}_{i_s}\} = rk\{A_{i_1}, \dots, A_{i_s}\}$ .  $\square$

**Определение.** Пусть  $A = (a_{ij})$  - матрица  $m \times n$ , тогда  $B = (b_{ij})$  матрица  $n \times m$  называется транспонированной к матрице  $A$ , если  $b_{ij} = a_{ji}$ , где  $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ . Обозначаем  $B = A^T$ .

**Пример.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

**Следствие.** Ранг системы строк матрицы  $A$  (=рангу матрицы  $A$ ) не изменяется при элементарных преобразованиях над столбцами.

*Доказательство.* Предложение 2 применяем к  $A^T$   $\square$

**Теорема 1.** Ранг системы строк матрицы  $A$  совпадает с рангом системы столбцов матрицы  $A$ .

*Доказательство.* Было доказанно, что ранг системы строк (столбцов) матрицы не изменяется при ЭП над строками и над столбцами. Приведем матрицу  $A$  к

ступенчатому виду с помощью ЭП над строками.  $A_{\text{ст}}$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{i_1 1}} & & & & \\ & \boxed{a_{i_2 1}} & & * & \\ & & \ddots & & * \\ 0 & & & \boxed{a_{i_s 1}} & \end{pmatrix}$$

$$a_{i_1 1} \neq 0, \dots, a_{i_s 1} \neq 0$$

Используем  $i_1$ -столбец, вычитая этот столбец из оставшихся с подходящими коэффициентами, получаем:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{i_1 1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \boxed{a_{i_2 1}} & & \boxed{** \dots *} & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \boxed{a_{i_s 1}} & \end{pmatrix}$$

Далее используем  $i_2$ -столбец, обнуляем все элементы правее  $a_{i_2 2}$ . В итоге получаем:

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{i_s s} \end{pmatrix}$$

Очев, что у такой матрицы ранг системы строк = рангу системы столбцов.  $\square$

## 4 Возвращаемся к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (AX = B)$$

**Теорема.** (Кронекера-Копелли)

1. (Критерий совместимости СЛУ)

$$\text{СЛУ } AX = B \text{ совместна} \iff rk(A|B) = rkA$$

2. (Критерий определенности СЛУ)

$$\text{Совместная СЛУ } AX = B \text{ - определена} \iff rk(A|B) = rkA = n$$

3. (Критерий существования нетривиального решения у однородной СЛУ)

$$\text{ОСЛУ } AX = 0 \text{ имеет нетривиальное решение} \iff rkA < n$$

### Однородная СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (AX = 0)$$

**Утверждение.** ОСЛУ всегда совместна, т.к. есть тривиальное решение.

**Свойства.**

1. Если  $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ ;  $\widetilde{X}^0 = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1^0 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n^0 \end{pmatrix}$  - решение ОСЛУ,

$$\text{тогда } X^0 + \widetilde{X}^0 = \begin{pmatrix} X_1^0 + \widetilde{X}_1^0 \\ \vdots \\ X_n^0 + \widetilde{X}_n^0 \end{pmatrix}$$

2. Если  $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$  - решение ОСЛУ  $AX = 0$ , то  $\lambda X^0 = \begin{pmatrix} \lambda x_1^0 \\ \vdots \\ \lambda x_n^0 \end{pmatrix}$  - решение.

*Доказательство.* Д/з

□

**Следствие.** Множество всех решений ОСЛУ является векторным подпространством в  $\mathbb{R}^n$ . Будем говорить, что это пространство над ОСЛУ.

**Замечание.** Если  $\exists$  решение ОСЛУ над  $\mathbb{R}$ , то  $\exists$  бесконечно много решений.

**Теорема 2.** Пространство решений ОСЛУ  $AX = 0$  имеет базис из  $n - r$  векторов, где  $n$  - число неизвестных, а  $r = rkA$ .

## 4.1 Фундаментальная система решений

**Определение.** Любой базис пространства решений ОСЛУ называется Фундаментальной Системой Решений ОСЛУ (ФСР).

*Доказательство.* (Теоремы 2.)

Решение СЛУ методом Гаусса: приводим её к ступенчатому виду (число ступенек  $r = rkA$ ), главные неизвестные выражаем через свободные.

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,1}x_{r+1} + \dots + c_{1,n-r}x_n \\ \vdots \\ x_r = c_{r,1}x_{r+1} + \dots + c_{r,n-r}x_n \end{cases}$$



Определим  $n - r$  частных решений приравнивая одно из  $x_1, \dots, x_n$  к 1, а остальные к 0.

$$F_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad F_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ \vdots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Докажем, что  $F_1, \dots, F_{n-r}$  - базис пространства решений ОСЛУ

1.  $F_1, \dots, F_{n-r}$  - ЛНЗ?

$$\text{Рассмотрим ЛК } \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_{n-r} F_{n-r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{n-r} = 0$$

2. Надо доказать, что любое решение выражено через  $F_1, \dots, F_{n-r}$

$$X^0 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ \mu_{r+1} \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \mu_{r+1} F_1 + \dots + \mu_n F_{n-r}$$

□

**Пример.** Найти ФСР ОСЛУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

где  $x_1, x_2$  - главные,  $x_3, x_4, x_5$  - свободные

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3 - 9x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 \end{cases} \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} - \text{произвольные}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \text{ три частных решения ОСЛУ}$$

Проверим, что  $\{F_1, F_2, F_3\}$ - базис пространства решений ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_{1,2,3} = 0 \implies F_1, F_2, F_3 - \text{ЛНЗ.}$$

Проверим, что  $\{F_1, F_2, F_3\}$  порождает пространство решений. Возьмем произвольные числа  $\mu_3, \mu_4, \mu_5$  и приравняем  $x_3 = \mu_3, x_4 = \mu_4, x_5 = \mu_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\mu_3 - 9\mu_4 + 3\mu_5 \\ 2\mu_3 + 4\mu_4 - 2\mu_5 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix} = \mu_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Такой базис называется нормальный ФСР.

## 4.2 Неоднородная СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (AX = B)$$

Рассмотрим соответствующую ОСЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (AX = 0)$$

**Теорема.** Пусть СЛУ  $AX = B$  - совместна.  $X_0$  - произвольное частное решение. Тогда множество  $M$  всех решений неоднородной СЛУ:  $AX = B$  равно сумме частного решения  $X_0$  и множество  $M_{\text{одн}}$  всех решений соответствующей однородной СЛУ:  $AX = 0$

$$M = X_0 + M_{\text{одн}} = \{X_0 + Y | Y \in M_{\text{одн}}\}$$

*Доказательство.*  $X_0 + M_{\text{одн}} \subseteq M$

Рассмотрим произвольное решение ОСЛУ.  $Y \in M_{\text{одн}}$

$$\text{Пусть } X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Докажем, что } X_0 + Y = \begin{pmatrix} x_1^0 + y_1 \\ \vdots \\ x_n^0 + y_n \end{pmatrix} - \text{решение СЛУ, т.е. } X_0 + Y \in M$$

$$AX = Ba_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$$AX = 0a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

где  $i = \overline{1, n}$ .

Проверим, что  $X_0 + Y \in M$

$$\begin{aligned} a_{i1}(x_1^0 + y_1) + \dots + a_{in}(x_{in} + y_n) &= b_i \\ \underbrace{(a_{i1}x_1^0 + \dots + a_{in}x_{in})}_{b_i(\text{т.к. } X_0 \in M)} + \underbrace{(a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n)}_{0(\text{т.к. } Y \in M_{\text{одн}})} &= b_i \end{aligned}$$

Обратное утверждение:  $M \subseteq X_0 + M_{\text{одн}}$

Рассмотрим произвольное решение  $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  - неоднородная СЛУ.

Докажем, что  $Z - X_0 = \begin{pmatrix} z_1 - x_1^0 \\ \vdots \\ z_n - x_n^0 \end{pmatrix}$  - решение однородной СЛУ.

Проверяем

$$\begin{aligned} a_{i1}(z_1 - x_1^0) + \dots + a_{in}(z_n - x_n^0) &= 0 \\ \underbrace{(a_{i1}z_1 + \dots + a_{in}z_n)}_{b_i(\text{т.к. } Z \in M)} - \underbrace{(a_{i1}x_1^0 + \dots + a_{in}x_n^0)}_{b_i(\text{т.к. } X_0 \in M)} &= 0 \end{aligned}$$

□

**Замечание.**

Общее решение ОСЛУ имеет вид:

$$X = \mu_1 F_1 + \dots + \mu_s F_s$$

где  $F_1, \dots, F_s$  - ФСР ОСЛУ,  $s = n - rkA$

Общее решение неоднородной СЛУ:

$$X = X_0 + \mu_1 F_1 + \dots + \mu_s F_s$$

$X_0$  - частное решение неоднородной СЛУ

## 5 Операции над матрицами

$Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$  - множество всех матриц размера  $m \times n$  с коэффициентами из  $\mathbb{R}$

$A, B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}), A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

### 1. Сложение матриц

Суммой матриц  $A$  и  $B$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размера  $m \times n$ , у которой  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Обозначается:  $C = A + B$

### 2. Умножение матриц на число $\lambda \in \mathbb{R}$

Произведение матрицы  $A = (a_{ij})$  на  $\lambda$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размера  $m \times n$ , у которой  $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ . Обозначается:  $C = \lambda A$

**Утверждение.** Множество  $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$  относительно этих операций сложения и умножения на число, образует векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.*  $A, B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}) \implies A + B, \lambda A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

Надо проверить 8 аксиом

1) коммутативность

$$C = A + B \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\widetilde{C} = B + A \quad \widetilde{c}_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

т.к. сложение вещественных чисел из  $\mathbb{R}$  - коммутативно, то  $c_{ij} = \widetilde{c}_{ij} \implies$

$$C = \widetilde{C}$$

$$\implies A + B = B + A$$

**Упражнение.** Аналогично доказать 2), 5)-8)

3)  $\exists 0 \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}) \forall A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}) : 0 + A = A$

В качестве 0 берем нулевую матрицу размера  $m \times n$

4)  $\forall A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}) \exists B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R}) : A + B = 0$

В качестве  $B$  берем  $b_{ij} = -a_{ij}$

□

**Упражнение.**  $\dim M_{m \times n} = m \cdot n$

*Доказательство.* Достаточно указать базис

$$\{E_{st}\}, s = \overline{1, m}, t = \overline{1, n}$$

$$E_{st} = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = s, j = t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Упражнение.** Проверить, что это базис.

□

**Определение.** Матрица  $E_{st}$  называется матричной единицей. Базис из всех матричных единиц называется стандартным базисом в пространстве  $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ .  $A = \sum a_{st} E_{st}$

3. Умножение матриц

$$A \in Mat_{m \times k}(\mathbb{R}), B \in Mat_{k \times n}(\mathbb{R})$$

Произведение матрицы  $A$  на матрицу  $B$  называется матрица  $C$  размера

$$m \times n, \text{ у которой } c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} b_{sj}. \text{ Обозначаем } C = AB.$$

**Свойство.** Произведение матриц не коммутативно.

**Пример.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies AB \neq BA$$

**Замечание.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Примеры.**

1. Проекция

$$\varphi : V^3 \rightarrow V^2, \varphi : x_1i + x_2j + x_3k \rightarrow x_1i + x_2j$$



2. Поворот

$$\varphi : V^2 \rightarrow V^2 \text{ Поворот на угол } \alpha \text{ вокруг точки } O$$



## 6 Линейные отображения

### 6.1 Изоморфизм

$V, W$ - векторные пространства над  $\mathbb{R}$

**Определение.** Отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  называется изоморфизмом векторных пространств, если:

1.  $\forall a, b \in V : \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall a \in V : \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$
3.  $\varphi$  является биекцией.

При этом  $V, W$  называется изоморфными. Обозначается  $V \cong W$

**Утверждение.** Любое векторное пространство над  $\mathbb{R}$  размерности  $n$  изоморфно  $\mathbb{R}^n$ .

*Доказательство.* Фиксируем базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$  - в  $V$ .

1.  $\forall x \in V$  однозначно раскладывается по базису  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Зададим отображение  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  по правилу:

$$\varphi : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

Т.к. координаты вектора определены однозначно, то  $\varphi$  инъективно, сюръективность очевидна  $\implies \varphi$  - биекция.

2.  $\forall x, y \in V$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \quad x + y = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) e_i$$

$$\varphi(x + y) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

3.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in V$

$$\varphi(\lambda x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda x_i e_i\right) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda \varphi(x)$$

□

**Примеры.**

1.  $V^2 \cong \mathbb{R}^2$   
 $V^3 \cong \mathbb{R}^3$
2.  $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$

**Упражнение.**  $V \cong W \iff \dim V = \dim W$ ;  $V, W$  - конечномерные пространства над  $\mathbb{R}$ .

## 6.2 Линейные отображение и матрицы

**Определение.** Отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  называется линейным, если

1.  $\forall a, b \in V \quad \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in V \quad \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$

**Утверждение.**  $V, W$ - векторные пространства над  $\mathbb{R}$ .

Если  $\{e_1, \dots, e_n\}$  - базис  $V$ ,  $(w_1, \dots, w_n)$  - набор векторов из  $W$ .

Тогда  $\exists!$  линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$ , которое  $\varphi : e_i \rightarrow w_i \quad \forall i = \overline{1, n}$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  - линейное отображение такое, что  $\varphi(e_i) = w_i \quad \forall i = \overline{1, n}$ . Тогда образ вектора  $x$  определяется однозначно по формуле:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$$

где  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$\implies$  линейное отображение определяется однозначно.

2. Докажем, что  $\exists$  линейное отображение, которое переводит  $e_i$  в  $w_i$ . Отображение зададим формулой:

$$\varphi : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \rightarrow x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$$

$$\varphi(a + b) = \varphi((a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n) = (a_1 + b_1)w_1 + \dots + (a_n + b_n)w_n$$

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) + \varphi(b_1 e_1 + \dots + b_n e_n) =$$

$$= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n = w_1(a_1 + b_1) + \dots + w_n(a_n + b_n)$$

$$\implies \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

Проверить, что  $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$  - ДЗ

□

Пусть  $\varphi : V \rightarrow W$  - линейное отображение  $V$ -  $n$ -мерное,  $W$  -  $m$ -мерное пространство.

Фиксируем базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  - базис в  $V$ ;  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  - базис в  $W$

$$\varphi(e_1) = w_1 = a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m$$

$\vdots$

$$\varphi(e_n) = w_n = a_{1n}f_1 + \dots + a_{mn}f_m$$



**Определение.** Матрица  $A$  размера  $m \times n$ , составленная из столбцов координат образов векторов  $e_i$  в образе  $\mathcal{F}$ , называется матрицей линейного отображения в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{a_{m1} \cdots a_{mn}}_{\varphi(e_1)} & & \underbrace{\phantom{a_{m1} \cdots a_{mn}}}_{\varphi(e_n)} \end{pmatrix}$$

**Утверждение.** Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  - базис в  $V$  над  $\mathbb{R}$  ;  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  - базис в  $W$  над  $\mathbb{R}$ . Тогда:

- Каждому линейному отображению  $\varphi : V \rightarrow W$  однозначно соответствуют матрица размера  $m \times n$  этого линейного отображения в базисах  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$
- Любой матрицы  $A$  размера  $m \times n$  однозначно соответствует линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow W$ , для которого  $A$  - матрица этого линейного отображения в  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ .

### 6.3 Операции над линейными отображениями

Пусть  $V, W$  - векторные пространства над  $\mathbb{R}$

1) Сложение линейных отображений.

$$\varphi_1 : V \rightarrow W \quad \varphi_2 : V \rightarrow W \text{ - два линейных отображения}$$

Зададим отображение по правилу

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad \forall x \in V$$

**Утверждение.** Отображение  $\varphi_1 + \varphi_2 : V \rightarrow W$  является линейным отображением.

*Доказательство.*  $\forall a, b \in V$ :

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(a + b) &= \varphi_1(a + b) + \varphi_2(a + b) = \\ &= \varphi_1(a) + \varphi_1(b) + \varphi_2(a) + \varphi_2(b) = (\varphi_1 + \varphi_2)(a) + (\varphi_1 + \varphi_2)(b) \end{aligned}$$

Аналогично для  $(\varphi_1 + \varphi_2)(\lambda a) = \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)(a)$

□

Фиксируем базисы  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  - в  $V$  и  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  - в  $W$

$A_1$  - матрица линейного отображения  $\varphi_1$  относительно  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ .

$A_2$  - матрица линейного отображения  $\varphi_2$  относительно  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ .

$B$  - матрица линейного отображения  $\varphi_1 + \varphi_2$  относительно  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ .

**Утверждение.**  $B = A_1 + A_2$

*Доказательство.* Размеры совпадают

$$\varphi_1(e_i) = a_{1i}f_1 + \dots + a_{mi}f_m$$

$$\varphi_2(e_i) = \widetilde{a}_{1i}f_1 + \dots + \widetilde{a}_{mi}f_m$$

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(e_i) = b_{1i}f_1 + \dots + b_{mi}f_m$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(e_i) &= \varphi_1(e_i) + \varphi_2(e_i) = (a_{1i}f_1 + \dots + a_{mi}f_m) + (\widetilde{a}_{1i}f_1 + \dots + \widetilde{a}_{mi}f_m) = \\ &= (a_{1i} + \widetilde{a}_{1i})f_1 + \dots + (a_{mi} + \widetilde{a}_{mi})f_m \end{aligned}$$

Т.к. разложение по базису единственное, то

$$b_{1i} = a_{1i} + \widetilde{a}_{1i}, \dots, b_{mi} = a_{mi} + \widetilde{a}_{mi} \implies b_{ij} = a_{ij} + \widetilde{a}_{ij} \implies B = A_1 + A_2$$

□

2) Умножение линейного отображения на число.

$\varphi : V \rightarrow W$  - линейное отображение,  $\mu \in \mathbb{R}$  - произвольное число.

Зададим отображение по правилу:  $(\mu\varphi)(x) = \mu\varphi(x) \quad \forall x \in V$

**Утверждение.** Отображение  $\mu\varphi : V \rightarrow W$  является линейным (Упражнение)

*Доказательство.* Аналогично.

□

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  - базис в  $V$  и  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  - базис в  $W$ .

$A$  - матрица линейного отображения  $\varphi$  относительно  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ .

$B$  - матрица линейного отображения  $\mu\varphi$  относительно  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ .

**Утверждение.**  $B = \mu A$

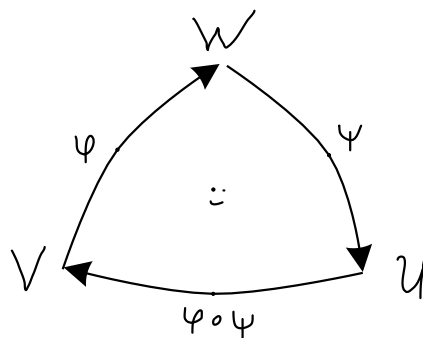
*Доказательство.* Видимо дз(

□

3) Композиция (произведение) линейных отображений.

Пусть  $V, W, U$  - векторные пространства над  $\mathbb{R}$

$$\varphi : V \rightarrow W \quad \psi : W \rightarrow U$$



Зададим отображение по правилу:

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) \quad \forall x \in V$$

**Утверждение.** Отображение  $\psi \circ \varphi : V \rightarrow U$  является линейным.

*Доказательство.*  $\forall a, b \in V$

1.  $(\psi \circ \varphi)(a + b) = \psi(\varphi(a + b)) = \psi(\varphi(a) + \varphi(b)) = \psi(\varphi(a)) + \psi(\varphi(b))$
2. Аналогично для  $(\psi \circ \varphi)(\lambda a) = \lambda(\psi \circ \varphi)(a)$

□

Фиксируем базис:  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  - базис в  $V$

$\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  - базис в  $W$

$\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_k\}$  - базис в  $U$

$A$  - матрица линейного отображения  $\varphi$  относительно  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ .

$B$  - матрица линейного отображения  $\psi$  относительно  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ .

$C$  - матрица линейного отображения  $\psi \circ \varphi$  относительно  $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ .

**Утверждение.**  $C = B \cdot A$

*Доказательство.*

$$\varphi(e_i) = \sum_{s=1}^k a_{si} f_s; \quad \psi(f_s) = \sum_{t=1}^k b_{ts} g_t$$

По определению матрицы линейного отображения:

$$(\psi \circ \varphi)(e_i) = \sum_{l=1}^k c_{li} g_l \quad (*)$$

По определению композиции:

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ \varphi)(e_i) &= \psi(\varphi(e_i)) = \psi\left(\sum_{s=1}^m a_{si} f_s\right) = \sum_{s=1}^m a_{si} \psi(f_s) = \\
 &= \sum_{s=1}^m a_{si} \left(\sum_{t=1}^k b_{ts} g_t\right) = \sum_{t=1}^k \left(\sum_{s=1}^m b_{ts} a_{si}\right) g_t \quad (\star) \\
 \implies (*) &= (\star).
 \end{aligned}$$

Т.к. координаты определены однозначно  $\Rightarrow c_t = \sum_{s=1}^m b_{ts} a_{si} \Rightarrow C = B \cdot C \quad \square$

## 6.4 Свойства операций над матрицами

Предположим, что все размеры матриц согласованы.

1.  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$
2. Ассоциативность  $A(BC) = (AB)C$

*Доказательство.*  $A_{m \times k}, B_{k \times n}, C_{n \times l}$

Пусть  $D_{m \times l} = A(BC)$ ,  $\tilde{D}_{m \times l} = (AB)C$ . Надо проверить, что  $\forall i, j : [D]_{ij} = [\tilde{D}]_{ij}$ .

$$\begin{aligned}
 [D]_{ij} &= [A(BC)]_{ij} = \sum_{s=1}^k [A]_{is} \cdot [BC]_{si} = \sum_{s=1}^k [A]_{is} \left(\sum_{t=1}^n [B]_{st} \cdot [C]_{ti}\right) = \\
 &= \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^n [A]_{is} ([B]_{st} \cdot [C]_{ti}) \\
 [\tilde{D}]_{ij} &= [(AB)C]_{ij} = \sum_{t=1}^n [AB]_{it} [C]_{tj} = \sum_{t=1}^n \left(\sum_{s=1}^k [A]_{is} \cdot [B]_{st}\right) [C]_{tj} = \\
 &= \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^k ([A]_{is} \cdot [B]_{st}) \cdot [C]_{tj}
 \end{aligned}$$

По свойствам операций над  $\mathbb{R}$ , результаты преобразований равны.  $\square$

3.  $A(B + C) = AB + AC$
4.  $(B + C)A = BA + CA$
5.  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B); \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

6.  $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \exists$  единичная матрица  $E \in M_{m \times m}(\mathbb{R}) : EA = A$
7.  $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) : 0 \cdot A = 0$
8. Нет коммутативности:  $AB \neq BA$  даже если размеры согласованы

*Доказательство.* Свойства 3. - 7. упражнение) □

## 6.5 Свойства операции транспонирования

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$

*Доказательство.* 4.  $A, B \xRightarrow{m \times k, k \times n} B^T, A^T \xRightarrow{n \times k, k \times m}$  (размеры совпадают)

Проверим  $D = (AB)^T$  и  $\tilde{D} = B^T A^T$  равны.

$$[D]_{ij} = [(AB)^T]_{ij} = [(AB)]_{ji} = \sum_{s=1}^k [A]_{js} [B]_{si}$$

$$[\tilde{D}]_{ij} = B^T A^T = \sum_{s=1}^k [B]_{is} [A]_{sj} = \sum_{s=1}^k [A]_{js} [B]_{si}$$

□

## 6.6 О ранге и операциях над матрицами

**Теорема.**

1.  $rk A^T = rk A$
2.  $rk(\lambda A) = \begin{cases} rk A, & \text{если } \lambda \neq 0 \\ 0, & \text{если } \lambda = 0 \end{cases}$
3.  $rk(A + B) \leq rk A + rk B$
4.  $rk(AB) \leq \min\{rk A, rk B\}$

*Доказательство.* 1. Следует из того, что ранг системы строк = рангу системы столбцов, и из определения ранга матрицы.

2. Очев.

3. Пусть  $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}$  - строки матрицы  $A$ .  $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}$  - строки матрицы  $B$ .  
 $\overline{a_1} + \overline{b_1}, \dots, \overline{a_m} + \overline{b_m}$  - строки матрицы  $A + B$ .

$$rkA = \dim\langle\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}\rangle, \quad rkB = \dim\langle\overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}\rangle$$

$$rk(A + B) = \dim\langle\overline{a_1} + \overline{b_1}, \dots, \overline{a_m} + \overline{b_m}\rangle$$

Заметим, что  $(\langle\overline{a_1} + \overline{b_1}, \dots, \overline{a_m} + \overline{b_m}\rangle) \subseteq (\langle\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}, \overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}\rangle)$

**Лемма.** Пусть  $V$  векторное пространство над  $\mathbb{R}$   $\dim V = n$

$U$  - произвольное подпространство в  $V$ . Тогда  $\dim U \leq n$

Более того, если  $U \neq V$ , то  $\dim U < n$ .

*Доказательство.* Пусть  $\{e_1, \dots, e_m\}$  - базис  $U \subseteq V$ , т.е.  $\dim U = m$

ЛНЗ система  $\{e_1, \dots, e_m\}$  можно дополнить до базиса в  $V \implies m \leq n$

Если  $m = n$ , то  $\{e_1, \dots, e_m\}$  - базис  $V \implies V = U$  □

Применяем лемму и получаем, что

$$\dim\langle\overline{a_1} + \overline{b_1}, \dots, \overline{a_m} + \overline{b_m}\rangle \leq \dim\langle\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}, \overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}\rangle$$

Т.к. объединение базисов линейной оболочки  $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}$  и  $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}$  является конечной порождающей системой линейной оболочки  $\langle\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}, \overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}\rangle$ , а из любой конечной порождающей системы можно выбрать базис, значит:

$$\dim\langle\overline{a_1} + \overline{b_1}, \dots, \overline{a_m} + \overline{b_m}\rangle \leq \dim\langle\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}\rangle + \dim\langle\overline{b_1}, \dots, \overline{b_m}\rangle \implies rk(A+B) \leq rkA + rkB$$

4. Докажем, что  $rkAB \leq rkA$ . Пусть  $C = AB$ ,  $A_{m \times k}, B_{k \times n}$

$A_1, \dots, A_n$  - столбцы матрицы  $A$

$B_1, \dots, B_n$  - столбцы матрицы  $B$

$C_1, \dots, C_n$  - столбцы матрицы  $C$

$$C_1 = AB_1 = A_1b_{11} + \dots + A_kb_{k1}$$

$$C_2 = AB_2 = A_1b_{12} + \dots + A_kb_{k2}$$

$\vdots$

$$C_n = AB_n = A_1b_{1n} + \dots + A_kb_{kn}$$

$$\implies \langle C_1, \dots, C_n \rangle \subseteq \langle A_1, \dots, A_k \rangle \implies \dim\langle C_1, \dots, C_n \rangle \leq \dim\langle A_1, \dots, A_k \rangle \implies rkC \leq rkA.$$

Докажем, что  $rkAB \leq rkB$ .

$$rk(AB) = rk(AB)^T = rk(B^T A^T) \leq rkB^T = rkB$$

□

## 7 Перестановки

**Определение.** Упорядоченная последовательность  $(k_1, \dots, k_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$  расположенных в некотором порядке называется перестановкой из  $n$  элементов.

**Пример.**  $(3, 1, 2)$  перестановка из 3-х элементов.

**Определение.** Перестановка  $(1, 2, \dots, n)$  называется тривиальной.

**Определение.** Говорят, что пара элементов  $k_i$  и  $k_j$  образуют инверсию, если  $i < j$ , то  $k_i > k_j$ .

**Определение.** Перестановка называется четной (нечетной), если число инверсий в ней четное (нечетное).

Знак переставки  $sgn(k_1, \dots, k_n) = (-1)^s$ , где  $s$  - число инверсий в перестановке.

**Определение.** Перемена двух элементов в перестановке называется транспозицией этих элементов.

**Утверждение.** При транспозиции любых двух элементов четность меняется на противоположную.

*Доказательство.*

1. Транспозиция двух соседних элементов.

При этом изменяется расположение только этих элементов относительно других  $\implies$  количество инверсий изменился на 1  $\implies$  четность поменяется.

2. Общий случай:

$$(\dots, k_i, \dots, k_j, \dots) \rightarrow (\dots, k_j, \dots, k_i, \dots)$$

Пусть между  $k_i$  и  $k_j$  ( $s$ ) элементов.

Перемену  $k_i$  и  $k_j$  произведем за  $2s + 1$  транспозиций соседних элементов.

Сначала  $k_i$  переставим последовательно с каждым из элементов, стоящих между  $k_i$  и  $k_j$  (это  $s$  транспозиций), потом  $k_i$  переставим с  $k_j$ , затем  $k_j$  поставим на  $i$  позицию (это еще  $s$  транспозиций).

Т.к. транспозиция соседних элементов меняет четность, то за  $2s + 1$  транспозиций четность изменится.

□

**Следствие.** Пусть  $n > 1$ . Тогда число четных перестановок из  $n$  элементов равно числу нечетных.

*Доказательство.* Перечислим все четные перестановки и в каждой поменяем местами первые 2 элемента. При этом получим различные нечетные перестановки  $\Rightarrow$  число четных перестановок  $\leq$  числа нечетных. Аналогично в обратную сторону.

$\Rightarrow$  число четных = число нечетных.  $\square$

**Утверждение.** Число перестановок из  $n$  элементов равно  $n!$

*Доказательство.*  $(k_1, \dots, k_n)$  для  $k_1$  вариантов -  $n$

Пусть выбрали  $k_1 \Rightarrow$  для  $k_2$  вариантов -  $n - 1$  и т.д. Получаем всего вариантов:  
 $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$   $\square$

## 8 Определители n-го порядка

**Определение.** Определителем квадратной матрицы  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  порядка  $n$  называется число, которое вычисляется по формуле:

$$|A| = \det A = \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \text{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

Где  $\sum_{(k_1, \dots, k_n)}$  - сумма по всем перестановкам из  $n$  элементов. Эта формула называется формулой полного разложения или полного разворачивания определителя.

**Пример.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{sgn}(1, 2) a_{11} a_{22} + \text{sgn}(2, 1) a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}$$

Пусть  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$  - строки матрицы  $A$ . Тогда определитель можно рассматривать как функцию от строк  $\det A = \det(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$

**Определение.** Функция  $f(v_1, \dots, v_n)$ , которая векторам  $v_1, \dots, v_n$  в векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{R}$  ставит в соответствие число из  $\mathbb{R}$ , то есть  $f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  называется полилинейной, если она линейна по каждому аргументу, т.е. для каждого  $i = \overline{1, n}$  выполнено:

$$1. f(v_1, \dots, v_i + \tilde{v}_i, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, \tilde{v}_i, \dots, v_n), \\ \forall v_i, \tilde{v}_i \in V.$$



$$2. f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall v_i \in V.$$

**Определение.** Полилинейная функция  $f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  называется косо-симметричной, если при перестановке любых двух аргументов значение функции умножается на  $(-1)$ . Кососимметричная функция с двумя одинаковыми аргументами равна нулю.

**Пример.** Если  $f$  - кососимметричная функция и  $v_1 = v_2$ , то  $f(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = -f(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) = a \implies a = -a \implies a = 0$ .

## 8.1 Свойства определителей

**Теорема.** Определитель  $n$ -го порядка является кососимметричной полилинейной функцией от строк матрицы.

*Доказательство.*

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad \overline{a_i} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

$$\det A = \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) = \sum_{(k_1, \dots, k_n)} \text{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{1k_1} \dots a_{nk_n}$$

Докажем, что  $\det A$  линеен по  $i$ -му аргументу.

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k$$

где  $u_k$  - число не зависящее от элементов строки  $\overline{a_i}$

$$\begin{aligned} 1. \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i} + \overline{a_i}', \dots, \overline{a_n}) &= \sum_{k=1}^n (a_{ik} + a_{ik}') u_k = \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k + \sum_{k=1}^n a_{ik}' u_k = \\ &= \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i}, \dots, \overline{a_n}) + \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i}', \dots, \overline{a_n}) \end{aligned}$$

$$2. \det(\overline{a_1}, \dots, \lambda \overline{a_i}, \dots, \overline{a_n}) = \sum_{k=1}^n (\lambda a_{ik}) u_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} u_k = \lambda \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i}, \dots, \overline{a_n})$$

Теперь докажем кососимметричность:

$$\begin{aligned}
\det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_j}, \dots, \overline{a_i}, \dots, \overline{a_n}) &= \\
&= \sum_{(k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{1k_1} \dots a_{jk_i} \dots a_{ik_j} \dots a_{nk_n} = \\
&= \sum_{(k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{1k_1} \dots a_{ik_j} \dots a_{jk_i} \dots a_{nk_n} = \\
&= - \sum_{(k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) a_{1k_1} \dots a_{ik_i} \dots a_{jk_j} \dots a_{nk_n} = \\
&= - \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i}, \dots, \overline{a_j}, \dots, \overline{a_n})
\end{aligned}$$

□

**Теорема.** Пусть  $f(A) = f(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$  - функция от строк,  $A \in M_n(\mathbb{R})$  такие, что:

1.  $f(E) = 1$
2.  $f$  - Полилинейная
3.  $f$  - кососимметричная

тогда  $f(A) = \det A$ .

*Доказательство.*  $\overline{e_1} = (1, 0, \dots, 0), \dots, \overline{e_n} = (0, \dots, 0, 1)$  - строки единичной матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\} - \text{базис в векторном пространстве } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \overline{e_i} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) = a_{i1}\overline{e_1} + \dots + a_{in}\overline{e_n}$$

$$\Rightarrow f(A) = f(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) = f\left(\sum_{k=1}^n a_{1k_1}\overline{e_{k_1}} + \dots + a_{nk_n}\overline{e_{k_n}}\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{1k_1} \dots a_{nk_n} \cdot f(\overline{e_{k_1}}, \dots, \overline{e_{k_n}}) =$$

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n)} f(\overline{e_{k_1}}, \dots, \overline{e_{k_n}}) \cdot a_{1k_1} \dots a_{nk_n}$$

Осталось доказать, что  $f(\overline{e_{k_1}}, \dots, \overline{e_{k_n}}) = \operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n)$ .

Т.к.  $f(E) = 1$ , то  $f(A) = f(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}) = \operatorname{sgn}(1, 2, \dots, n)(*)$

Меняя любые два аргумента местами,  $f$  меняет знак, т.к.  $f$  кососимметрична.

С другой стороны, меняя два любые числа перестановки местами, знак перестановки  $sgn$  тоже меняет знак.

Любую перестановку можно получить из тривиальной за конечное число транспозиций.

Т.к. (\*) верно, то, делая последовательно транспозицию в перестановке, и такую же перемену аргументов у функции  $f$ , получим  $f(\overline{e_{k_1}}, \dots, \overline{e_{k_n}}) = sgn(k_1, \dots, k_n)$ .

□

### Следствие.

1. Если в квадратной матрице  $A$  одна из строк равна линейной комбинации остальных, то  $\det A = 0$
2. Если к строке квадратной матрицы  $A$  применить ЭП1 (т.е. к строке прибавить другую, умноженную на число), то определитель не изменится.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 2) \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i} + \lambda \overline{a_j}, \dots, \overline{a_n}) &= \\ &= \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i}, \dots, \overline{a_j}, \dots, \overline{a_n}) + \lambda \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_j}, \dots, \overline{a_j}, \dots, \overline{a_n}) = \\ &= \det(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_i}, \dots, \overline{a_j}, \dots, \overline{a_n}) \end{aligned}$$

□

**Определение.** Квадратная матрица  $A = (a_{ij})$  называется (верхней) треугольной матрицей, если  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ .

**Пример.** 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Модно проследить, как влияют ЭП на определитель:

- ЭП1  $\overline{a_i} \rightarrow \overline{a_i} + \lambda \overline{a_j}$   $\det$  не изменится.
- ЭП2  $\overline{a_i} \rightarrow \overline{a_j}$   $\det$  не изменится.
- ЭП3  $\overline{a_i} \rightarrow \mu \overline{a_i}, \mu \neq 0$   $\det$  умножится на  $\mu$ .

**Утверждение.** Определитель верхней треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

$$\text{Доказательство.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Рассмотрим любую не тождественную перестановку  $(k_1, \dots, k_n)$ , где  $k_i \neq i$ . Тогда найдется такой множитель  $(i > j)$   $a_{ij} = 0$ ,  $\implies$  это слагаемое обнулится.  $\implies$  Во всей сумме останется только тождественная перестановка.

□