



Механико-математический факультет

АЛГЕБРА, 1 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Студент: Молчанов Вячеслав

Группа: 108

Москва
2024

Содержание

1	Система линейных уравнений	2
1.1	Матрица. Основные понятия	2
1.2	Система линейных (алгебраических) уравнений	3
1.3	Элементарные преобразования над СЛУ	4
1.4	Элементарные преобразования над матрицами	5
1.5	Решение СЛУ методом Гауса	6
2	Векторные пространства	10

1 Система линейных уравнений

1.1 Матрица. Основные понятия

Определение. Матрица A размера $m \times n$ это прямоугольная таблица с m строками и n столбцами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} - элемент матрицы и индексы:

- i - номер строками
- j - номер столбца

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ - Множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из \mathbb{R}

Матрица $m \times 1$ называется столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Если $A = (a_{ij})$ - квадратная, $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$, то A называется диагональной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если A - диагональная и $a_{ij} = 1$, то A называется единичной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Если A - квадратная, то

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ главная диагональ}$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} & & a_{n1} \\ & \dots & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix} \text{ побочная диагональ}$$

Определение. Если A - размера $m \times n$, $a_{ij} = 0 \forall i, j$, то A называется нулевой.

1.2 Система линейных (алгебраических) уравнений

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $a_{ij}, b \in \mathbb{R}$, x_1, \dots, x_n - неизвестные.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A - матрица коэффициентов, a_{ij} называется коэффициентом СЛУ.

B - столбец свободных членов, b_j - свободный член.

Определение. Расширенная матрица $(A|B)$. Набор чисел $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$ называется решением системы $(*)$, если подстановка этих чисел вместо неизвестных в $(*)$ дает тождество в каждом уравнении. $(x_i^0 \longleftrightarrow x)$

Решить систему - это найти все решения системы. Любое конкретное решение называется частным.

Определение. Если СЛУ имеет решение, то она называется совместной, иначе несовместной.

Определение. Совместная система, имеющая одно решение, называется определенной, иначе неопределенной (более одного решения).

1.3 Элементарные преобразования над СЛУ

1. Прибавить к одному уравнению другое уравнение, умноженное на число $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Поменять местами два уравнения
3. Умножить уравнение на ненулевое число $\mu \in \mathbb{R}$

Утверждение. Эти преобразования обратимы.

Определение. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если их множества решений совпадают.

Утверждение. Если одна СЛУ получена из другой СЛУ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.

Доказательство.

\Rightarrow (Не Куликова) $AX = B$ - сходная система, $\tilde{A}X = \tilde{B}$ преобразованная система.

Пусть z_1, \dots, z_n некоторое решение $AX = B$. Будем рассматривать $\tilde{A}X = \tilde{B}$, в ней ЭП II типа умножают строку на μ , имеем:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \text{ в } AX = B$$

$$\mu a_{i1}x_1 + \dots + \mu a_{in}x_n = \mu b_i \text{ в } \tilde{A}X = \tilde{B}$$

Выносим μ из второго уравнения:

$$\mu(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = \mu b_i$$

Получаем, что z_1, \dots, z_n решение для $\tilde{A}X = \tilde{B}$. Для III типа ЭП очевидно. Теперь рассмотрим I тип, будем к i -ой строчке прибавлять j -ую к коэффициентом λ , получаем:

$$\begin{aligned} (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n &= \\ &= a_{i1}x_1 + \lambda a_{j1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda a_{jn}x_n = \\ &= a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j \end{aligned}$$

Таким образом, любое решение старой СЛУ - это и решение новой, то есть множество решений не уменьшилось. (со столбцами все тоже самое)

\Leftarrow В обратную сторону аналогично (для доказательства эквивалентности), используя обратимость элементарных преобразований. \square

Мораль в том, что мы можем работать с расширенной матрицей $(A|B)$.

1.4 Элементарные преобразования над матрицами

Элементарные преобразования над строками:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_i} \end{pmatrix}, \text{ где } \overline{a_i} - \text{строка}$$

- ЭП1: $\overline{a_i} \rightarrow \overline{a_i} + \lambda \overline{a_i}$
- ЭП2: $\overline{a_i} \longleftrightarrow \overline{a_j}$
- ЭП3: $\overline{a_i} \rightarrow \mu \overline{a_i}, \mu \neq 0$

Определение. Лидер строки (ведущий элемент) - это 1-й ненулевой элемент слева.

Пример: $(0, 0, \underbrace{3}_{\text{лидер}}, 4, 5, 0, 0, 7)$

Определение. Матрица A размера $m \times n$ называется ступенчатой, если

1. Номера лидеров ненулевых строк строго возрастают с увеличением номера строки.
2. Все нулевые строки стоят внизу (в конце).

Теорема. Любую матрицу A размера $m \times n$ за конечное число элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство. Индукция по n :

Если A - нулевая, то A - ступенчатого вида. Если $A \neq 0$: найдем первый ненулевой столбец (начиная слева). Пусть j - номер первого ненулевого столбца. Пусть $a_{ij} \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Меняем 1-ю и i -ю строку местами и получаем, что a_{ij} стал лидером первой строки. Считаем, что сразу $a_{1j} \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{ij} & * \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Вычитаем из каждой k -й строки, начиная со 2-ой, 1-ю строку, умноженную на число $\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$. Получает вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{array} \right)$$

К правой части матрицы применяем индукцию и проводим матрицу к ступенчатому виду. \square

Замечание. Этот метод называется методом Гауса.

1.5 Решение СЛУ методом Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Элементарные преобразования над $AX = B \iff$ элементарные преобразования над $(A|B)$.

СЛУ $AX = B$ ступенчатая $\implies (A|B)$ имеет ступенчатый вид.

Утверждение. Решение СЛУ ступенчатого вида.

Пусть $AX = B$ - ступенчатая

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{\tilde{s}} \end{array} \right)$$

\tilde{s} - ненулевые строки расширенной матрицы

s - число ненулевых строк

$$\tilde{s} = \begin{cases} s \\ s+1 \end{cases}$$

1 случай: $\tilde{s} \neq s$ ($\tilde{s} = s+1$)

Рассмотрим последнюю ненулевую строку:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{s+1} \end{array} \right)$$

$0x_1 + \dots + 0x_n = b_s + 1 \implies$ решение у этого уравнения нет \implies СЛУ не имеет решения, т.е. несовместна.

Далее $\tilde{s} = s$

Заметим, что $\tilde{s} = s \leq n$ (n -количество столбцов)

2 случай: $\tilde{s} = s = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Такая СЛУ называется строго треугольной

Из n -го уравнения однозначно находится $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. Подставляем во все оставшиеся уравнения $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \implies$ исключаем x_n . Получаем строго треугольную систему с меньшим количеством неизвестных.

Далее из (n-1)-го уравнения находим x_{n-1} и т.д. \implies СЛУ имеет единственное решение т.е. является определенной.

3 случай: $\tilde{s} < n$

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc|c} 0 & 0 & \underline{a_{1k_1}} & * & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \underline{a_{2k_2}} & * & \cdots & * & * \\ & & & & \ddots & & & \vdots \end{array} \right)$$

$a_{1k_1}, \dots, a_{sk_s}$ - лидеры;

x_{k_1}, \dots, x_{k_s} - главные неизвестные (неизвестные соответствуют лидерам)

Оставшиеся неизвестные назовем свободными.

Перекинем в правую часть СЛУ слагаемые, соответствующие свободным неизвестным \implies получаем относительно главных неизвестных строго треугольную СЛУ.

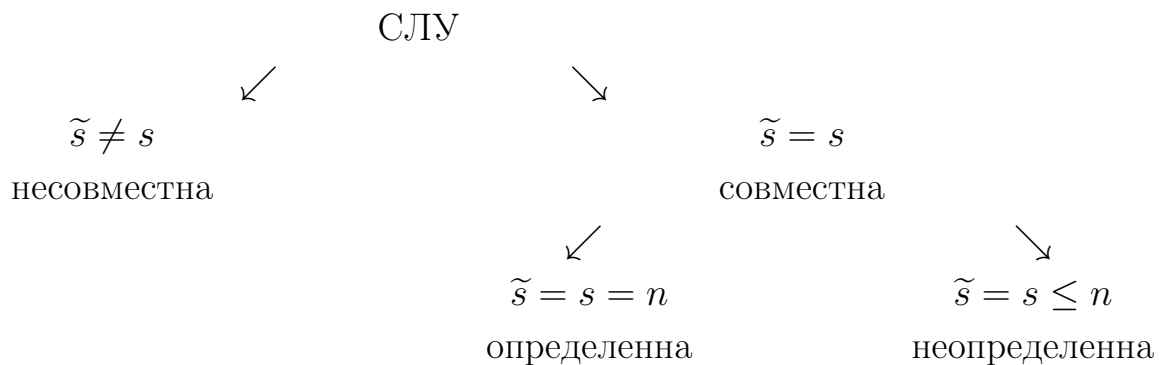
Как в случае 2 однозначно выражаются главные неизвестные через свободные \implies с точностью до нумерации получаем:

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ \vdots \\ x_s = c_{s,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{sn}x_n + d_s \end{cases}$$

Это выражение называется общим решением системы. Подставляя вместо свободных неизвестных конкретное число из \mathbb{R} , получаем значение для главных.

\implies получаем все решения СЛУ

Если СЛУ имеет > 1 решения - такое СЛУ называется неопределенным.



Алгоритм. $AX = B \mapsto (A|B) \sim (A_c|B_c) \mapsto A_cX = B_c$

Определение. Матрица A имеет улучшенный ступенчатый вид, если выполнены следующие условия:

1. A - ступенчатого вида
2. Все лидеры равны 1
3. В каждом столбце, где есть лидер $\neq 0$, все элементы равны 0

Утверждение. Любую матрицу A можно привести к улучшенному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

Доказательство. Т.к. любую матрицу можно привести к ступенчатому виду \implies будем считать, что A - ступенчатая.

Рассмотрим последний лидер a_{sk_s} . Если $a_{sk_s} \neq 1$, то s -ю строку делим на a_{sk_s} и получаем, что $\widetilde{a_{sk_s}} = 1$.

Далее из всех строк вычитаем первую, умноженную на $a_{ik_s} \implies \widetilde{a_{ik_s}} = 0$ и т.д. \square

Определение. СЛУ $AX = B$ называется однородной, если $B = 0$, т.е. все свободные члены нулевые.

Утверждение. Однородная система всегда совместна.

Доказательство. $AX = 0$ всегда имеет решение $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ (тривиальное решение) \square

Следствие. Однородная СЛУ, в которой число уравнений $<$ числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

Доказательство. (в обозначениях из метода Гаусса)

Т.к. система совместна (т.к. $B = 0$), то $s = \widetilde{s}$

С другой стороны $s = \bar{s} \leq$ число исходных уравнений $< n \implies s = \widetilde{s} < n \implies$ СЛУ неопределенна $\implies \exists$ более одного решения $\implies \exists$ нетривиальное решение. \square

2 Векторные пространства

Мы рассматриваем векторные пространства над полем \mathbb{R} .

Определение. Векторным пространством над \mathbb{R} называют множество элементов V , на котором введены операции сложения и умножения на числа из \mathbb{R} :

1. $\forall x, y \in V \implies x + y = z \in V$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V \implies \lambda x = w \in V$

Удовлетворяет следующими свойствами:

1. $x+y = y+x$ (коммутативность)
2. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (ассоциативность)
3. $\exists 0 \in V : \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$ (нейтральный элемент относительно сложения)
4. $\forall x \in V : \exists x' : x + x' = 0$ (противоположный элемент)
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивность умножения относительно сложения)
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивность сложения относительно умножения)
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$ (ассоциативность умножения)
8. $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$ (нейтральный элемент относительно умножения)

Определение. Любой элемент векторного пространства называется вектором

Примеры векторных пространств:

1. V^2 - Геометрические векторы на плоскости
2. $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$ - арифметические векторы

"+": $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

"×": $(a_1, \dots, a_n) \times \lambda = (a_1 \lambda, \dots, a_n \lambda)$

Упражнение. Проверьте, что \mathbb{R}^n (арифметическое пространство строк) с этими операциями является векторным пространством.