Алгебра. 1 семестр, О.В.Куликова

Вячеслав Молчанов, 108 группа

11 сентября 2024 г.

Содержание

1 Система линейных уравнений

1.1 Матрица. Основные понятия

Определение. Матрица A размера $m \times n$ прямоугольная таблица с m строками и n столбцами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} - элемент матрицы и индыксы:

- i - номер строками
- j - номер столбца

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ - Множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$

Матрица $m \times 1$ называется столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Если $A = (a_{ij})$ - крадратная, $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$, то A называется диальнольной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если A - диальнольная и $a_{ij} = 1$, то A называется единичной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Если A - квадратная, то

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ главная диагональ

- $A = \begin{pmatrix} & & a_{n1} \\ & \dots & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix}$ побочная диагональ

Определение. Если A - размера $m \times n$, $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$, то A называется нулевой.

1.2 Система линейных (алгебрачеких) уравнений

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $a_{ij}, b \in \mathbb{R}, x_1, ..., x_n$ - неизвестные.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A - матрица коэфициентов, a_{ij} называется коэфициентом СЛУ.
B - столбец свобоных членов, b_j - свободный член.

Определение. Расширенная матрица $\underset{m \times (n+1)}{(A|B)}$. Набор чисел $x_1^0, ..., x_n^0 \in \mathbb{R}$ называется решением системы $(*)$, если подстановка этих чисел вместо неизвестных в $(*)$ дает тождество в каждом уравнении. $(x_i^0 \longleftrightarrow x)$

Решить систему - это найит все решения системы. Любое конткретное решение называется частным.

Определение. Если СЛУ имеет решение, то она называется совместной, иначе несовместной.

Определение. Совместная система, имеющая одно решение, называется определенной, иначе неопределенной (более одного решения).

1.3 Элементарные преобразования над СЛУ

1. Прибавить к одному уравнению другое уравнение, умноженное на число $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Поменять местами два уравнения

3. Умножить уравнение на ненулевое число $\mu \in \mathbb{R}$

Утверждение. Эти преобразования обратимы.

Определение. Две системы линеных уравнений называются эквивалентными, если их множества решений совпадают.

Утверждение. Если одна СЛУ получена из другой СЛУ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.

Доказательство.
$\Longrightarrow$ Достаточно доказать, что если $AX = B$ и $\tilde{A}X = \tilde{B}$ получены с помощью одного элементарного преобразования, то она эквивалентны. Пусть $x_1^0, ..., x_n^0$ - произвольное решение $AX = B$. Докажем, что $x_1^0, ..., x_n^0$ является решением системы $\tilde{A}X = \tilde{B}$. Для 2 пункта очевидно. Для 3: предположим, что

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in} = b_i \text{ в } AX = B$$

$$(\mu a_{i1})x_1 + ... + (\mu a_{in}) = x_1 n = \mu b_i \text{ в } \tilde{A}X = \tilde{B}$$

Если $a_{i1}x_1 + ... + a_{in} = b_i$, то $(\mu a_{i1})x_1 + ... + (\mu a_{in}) = x_1 n = \mu b_i$
Остальные уравнения такие жн $\mu(a_{i1}x_1 + ... + a_{in}) = (\mu)b_i$
1 пункт: Д/З
Т.о. множество решений $AX = B$ включено в множество решений $\tilde{A}X = \tilde{B}$.
$\Longleftarrow$ В обратную сторону аналогично (для доказательства эквивалентности), используя обратимость элементарных преобразований. $\square$

Мораль в том, что мы можем работать с расширенной матрицей $(A|B)$.

1.4 Элементарные преобразования над матрицами

Элементарные преобразования над строками:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_i} \end{pmatrix}, \text{ где } \overline{a_i} - \text{строка}$$

- ЭП1: $\overline{a_i} \to \overline{a_i} + \lambda \overline{a_i}$
- ЭП2: $\overline{a_i} \longleftrightarrow \overline{a_j}$
- ЭП3: $\overline{a_i} \to \mu \overline{a_i},\ \mu \neq 0$

Определение. Лидер строки (ведущий элемент) - это 1-й ненулевой элемент слева.

Пример: $(0, 0, \underbrace{3}_{\text{лидер}}, 4, 5, 0, 0, 7)$

Определение. Матрица A размера $m \times n$ называется ступенчатой, если

1. Номера лидеров ненулевых строк строго возрастают с увеличением номера строки.
2. Все нулевые строки стоят внизу (в конце).

Теорема. Любую матрица A размера $m \times n$ за конечное число элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство. Индукция по n:
Если A - нелувая, то A - ступенчатого вида. Если $A \neq 0$: найдем первый ненулевой столбец (начиная слева). Пусть j - номер первого ненулевого столбца. Пусть $a_{ij} \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Меняем 1-ю и i-ю строку местами и получаем, что a_{ij} стал лидером первой строки. Считаем, что сразу $a_{1j} \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{ij} & * \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Вычитаем из кажкой k-й строки, начиная со 2-ой, 1-ю строку, умноженную на число $\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$. Получает вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{array}\right)$$

К правой части матрицы применяем индукцию и проводим матрицу к ступенчатому виду. $\square$

Замечание. Этот метод называется методом Гауса.

1.5 Решение СЛУ методом Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Элементарные преобразования над $AX = B \iff$ элементарные преобразования над $(A|B)$.

СЛУ $AX = B$ ступенчатая $\Longrightarrow (A|B)$ имеет ступенчатый вид.

Утверждение. Решение СЛУ ступенчаного вида.

Пусть $AX = B$ - ступенчатая

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{\widetilde{s}} \end{array}\right)$$

$\widetilde{s}$ - ненулевые строки расширенной матрицы

s - число ненулевых строк

$$\widetilde{s} = \left[\begin{array}{c} s \\ s+1 \end{array}\right.$$

1 случай: $\widetilde{s} \neq s$ ($\widetilde{s} = s + 1$)

Рассмотрим последнюю ненулевую строку:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{s+1} \end{array}\right)$$

$0x_1 + ... + 0x_n = b_s + 1 \Longrightarrow$ решение у этого уравнения нет $\Longrightarrow$ СЛУ не имеет решения, т.е. несовместнаю.

Далее $\widetilde{s} = s$

Заметим, что $\widetilde{s} = s \leq n$ (n-колличество столбов)

2 случай: $\widetilde{s} = s = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Такая СЛУ называются строго треугольной

Из n-го уравнения однозначно находится $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ Подставляем во все оставшиеся уравнения $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \Longrightarrow$ исключаем x_n. Получаем строго треугольную систему с меньшим колличество неизвестных.
Далее из (n-1)-го уравнения находим x_{n-1} и т.д. $\Longrightarrow$ СЛУ имеет единственное решение т.е. является определенной.

3 случай: $\widetilde{s} < n$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & |\underline{a_{1k_1}} & * & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & |\underline{a_{2k_2}} & * & \cdots & * & * \\ & & & & \ddots & & & \vdots \end{array}\right)$$

$a_{1k_1}, ..., a_{sk_s}$ - лидеры;
$x_{k_1}, ..., x_{k_s}$ - главные неизвестные (неизвестные соответствуют лидерам)
Оставшиеся неизвестные назовем свободными.
Перекинем в правую часть СЛУ слагаемые, соответствующие свободным неизвестным $\Longrightarrow$ получаем относительно главных неизвестных строго треугольную СЛУ.
Как в случае 2 однозначно выражается главнае неизвестные через свободные $\Longrightarrow$ с точностью до нумерации получаем:

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ \vdots \\ x_s = c_{s,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{sn}x_n + d_s \end{cases}$$

Это выражение называется общим решение системы. Подставляя вместо свободных неизвестных конткретное число из $\mathbb{R}$, получаем значение для главных.
$\Longrightarrow$ получаем все решения СЛУ
Если СЛУ имеет > 1 решения - такое СЛУ называется неопределенным.

СЛУ

$\swarrow$ $\searrow$

$\widetilde{s} \neq s$ — несовместна

$\widetilde{s} = s$ — совместна

$\swarrow$ $\searrow$

$\widetilde{s} = s = n$ — определенна

$\widetilde{s} = s \leq n$ — неопределенна

Алгоритм. $AX = B \longmapsto (A|B) \sim (A_c|B_c) \longmapsto A_cX = B_c$

Определение. Матрица A имеет улучшенный ступенчатый вид, если выполнены следующие условия:

1. A - ступенчатого вида
2. Все лидеры равны 1
3. В каждом столбце, где есть лидер $\neq 0$, все элементы равны 0

Утверждение. Любую матрицу A можно привести к улучшенному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

Доказательство. Т.к. любую матрицу можно привести к ступенчатому виду $\Longrightarrow$ будем считать, что A - ступенчатая.
Рассмотрим последний лидер a_{sk_s}. Если $a_{sk_s} \neq 1$, то s-ю строку делим на a_{sk_s} и получаем, что $\widetilde{a_{sk_s}} = 1$.
Далее из всех строк вычитаем первую, умноженную на $a_{ik_s} \Longrightarrow \widetilde{a_{ik_s}} = 0$ и т.д. $\square$

Определение. СЛУ $AX = B$ называется однородной, если $B = 0$, т.е. все свободные члены ненулевые.

Утверждение. Однородная система всегда совместна.

Доказательство. $AX = 0$ всегда имеет решение $x_1 = 0, ..., x_n = 0$ (тривиальное решение) $\square$

Следствие. Однородная СЛУ, в которой число уравнений < числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

Доказательство. (в обозначениях из метода Гаусса)
Т.к. система совместна (т.к. $B = 0$), то $s = \widetilde{s}$
С другой стороны $s = \overline{s} \leq$ число исходных уравнений < n $\Longrightarrow s = \widetilde{s} < n \Longrightarrow$ СЛУ неопределенна $\Longrightarrow \exists$ более одного решения $\Longrightarrow \exists$ нетривиальное решение. $\square$

2 Векторные пространства

Мы рассматриваем векторные пространства над полем $\mathbb{R}$.

Определение. Векторным пространством над $\mathbb{R}$ называют множество элементов V, на котором введены операции сложения и умножения на числа из $\mathbb{R}$:

1. $\forall x, y \in V \Longrightarrow x + y = z \in V$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V \Longrightarrow \lambda x = w \in V$

Удовлетворяет следующими свойствами:

1. x+y = y+x (коммутативность)

2. (x+y)+z = x+(y+z) (ассоциативность)

3. $\exists 0 \in V : \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$ (нейтральный элемент относильно сложения)

4. $\forall x \in V : \exists x' : x + x' = 0$ (противоположный элемент)

5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивность сложения отностильно умножения)

6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивность умножения отностильно сложения)

7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения)

8. $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$ (нейтральный элемент относильно умножения)

Определение. Любой элемент векторного пространства называется вектором

Примеры векторных пространств:

1. V^2 Геометрические векторы на плоскости

2. $\mathbb{R}^n = \{(a_1, ..., a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$ - арифметические векторы

"+": $(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$
"×": $(a_1, ..., a_n) \times \lambda = (a_1\lambda, ..., a_n\lambda)$

Упражнение. Проверьте, что $\mathbb{R}^n$ (арифметическое пространство строк) с этими операцияими является векторным пространством.