



Механико-математический факультет

**АЛГЕБРА, 1 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Студент: Молчанов Вячеслав

Группа: 108

Москва  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Система линейных уравнений</b>	<b>2</b>
1.1	Матрица. Основные понятия . . . . .	2
1.2	Система линейных (алгебраических) уравнений . . . . .	3
1.3	Элементарные преобразования над СЛУ . . . . .	4
1.4	Элементарные преобразования над матрицами . . . . .	5
1.5	Решение СЛУ методом Гауса . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Векторные пространства</b>	<b>10</b>
2.1	Аксиомы элементов векторного пространства . . . . .	10
2.2	Следствия . . . . .	11
2.3	Векторные подпространства . . . . .	12
2.4	Линейная зависимость системы векторов . . . . .	13
2.5	Линейная оболочка множества $S$ . . . . .	16
2.6	Базис . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Ранг</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Мораль в том, что я не успел....</b>	<b>19</b>

# 1 Система линейных уравнений

## 1.1 Матрица. Основные понятия

**Определение.** Матрица  $A$  размера  $m \times n$  это прямоугольная таблица с  $m$  строками и  $n$  столбцами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  - элемент матрицы и индексы:

- $i$  - номер строки
- $j$  - номер столбца

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$  - Множество всех матриц размера  $m \times n$  с элементами из  $\mathbb{R}$

Матрица  $m \times 1$  называется столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Если  $A = (a_{ij})$  - квадратная,  $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ , то  $A$  называется диагональной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если  $A$  - диагональная и  $a_{ij} = 1$ , то  $A$  называется единичной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Если  $A$  - квадратная, то

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$  главная диагональ
- $A = \begin{pmatrix} & & a_{n1} \\ & \dots & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix}$  побочная диагональ

**Определение.** Если  $A$  - размера  $m \times n$ ,  $a_{ij} = 0 \forall i, j$ , то  $A$  называется нулевой.

## 1.2 Система линейных (алгебраических) уравнений

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где  $a_{ij}, b \in \mathbb{R}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  - неизвестные.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A$  - матрица коэффициентов,  $a_{ij}$  называется коэффициентом СЛУ.

$B$  - столбец свободных членов,  $b_j$  - свободный член.

**Определение.** Расширенная матрица  $(A|B)$ . Набор чисел  $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$  называется решением системы  $(*)$ , если подстановка этих чисел вместо неизвестных в  $(*)$  дает тождество в каждом уравнении.  $(x_i^0 \longleftrightarrow x)$

Решить систему - это найти все решения системы. Любое конкретное решение называется частным.

**Определение.** Если СЛУ имеет решение, то она называется совместной, иначе несовместной.

**Определение.** Совместная система, имеющая одно решение, называется определенной, иначе неопределенной (более одного решения).

### 1.3 Элементарные преобразования над СЛУ

1. Прибавить к одному уравнению другое уравнение, умноженное на число  $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Поменять местами два уравнения
3. Умножить уравнение на ненулевое число  $\mu \in \mathbb{R}$

**Утверждение.** Эти преобразования обратимы.

**Определение.** Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если их множества решений совпадают.

**Утверждение.** Если одна СЛУ получена из другой СЛУ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  (Не Куликова)  $AX = B$  - сходная система,  $\tilde{A}X = \tilde{B}$  преобразованная система.

Пусть  $z_1, \dots, z_n$  некоторое решение  $AX = B$ . Будем рассматривать  $\tilde{A}X = \tilde{B}$ , в ней ЭП II типа умножают строку на  $\mu$ , имеем:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \text{ в } AX = B$$

$$\mu a_{i1}x_1 + \dots + \mu a_{in}x_n = \mu b_i \text{ в } \tilde{A}X = \tilde{B}$$

Выносим  $\mu$  из второго уравнения:

$$\mu(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = \mu b_i$$

Получаем, что  $z_1, \dots, z_n$  решение для  $\tilde{A}X = \tilde{B}$ . Для III типа ЭП очевидно. Теперь рассмотрим I тип, будем к  $i$ -ой строчке прибавлять  $j$ -ую к коэффициентом  $\lambda$ , получаем:

$$\begin{aligned} (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n &= \\ &= a_{i1}x_1 + \lambda a_{j1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda a_{jn}x_n = \\ &= a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j \end{aligned}$$

Таким образом, любое решение старой СЛУ - это и решение новой, то есть множество решений не уменьшилось. (со столбцами все тоже самое)

$\Leftarrow$  В обратную сторону аналогично (для доказательства эквивалентности), используя обратимость элементарных преобразований.  $\square$

Мораль в том, что мы можем работать с расширенной матрицей  $(A|B)$ .

## 1.4 Элементарные преобразования над матрицами

Элементарные преобразования над строками:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_i} \end{pmatrix}, \text{ где } \overline{a_i} - \text{строка}$$

- ЭП1:  $\overline{a_i} \rightarrow \overline{a_i} + \lambda \overline{a_i}$
- ЭП2:  $\overline{a_i} \longleftrightarrow \overline{a_j}$
- ЭП3:  $\overline{a_i} \rightarrow \mu \overline{a_i}, \mu \neq 0$

**Определение.** Лидер строки (ведущий элемент) - это 1-й ненулевой элемент слева.

**Пример:**  $(0, 0, \underbrace{3}_{\text{лидер}}, 4, 5, 0, 0, 7)$

**Определение.** Матрица  $A$  размера  $m \times n$  называется ступенчатой, если

1. Номера лидеров ненулевых строк строго возрастают с увеличением номера строки.
2. Все нулевые строки стоят внизу (в конце).

**Теорема.** Любую матрицу  $A$  размера  $m \times n$  за конечное число элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ :

Если  $A$  - нулевая, то  $A$  - ступенчатого вида. Если  $A \neq 0$ : найдем первый ненулевой столбец (начиная слева). Пусть  $j$  - номер первого ненулевого столбца. Пусть  $a_{ij} \neq 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Меняем 1-ю и  $i$ -ю строку местами и получаем, что  $a_{ij}$  стал лидером первой строки. Считаем, что сразу  $a_{1j} \neq 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{ij} & * \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Вычитаем из каждой  $k$ -й строки, начиная со 2-ой, 1-ю строку, умноженную на число  $\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$ . Получает вид:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{array} \right)$$

К правой части матрицы применяем индукцию и проводим матрицу к ступенчатому виду.  $\square$

**Замечание.** Этот метод называется методом Гауса.

## 1.5 Решение СЛУ методом Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Элементарные преобразования над  $AX = B \iff$  элементарные преобразования над  $(A|B)$ .

СЛУ  $AX = B$  ступенчатая  $\implies (A|B)$  имеет ступенчатый вид.

**Утверждение.** Решение СЛУ ступенчатого вида.

Пусть  $AX = B$  - ступенчатая

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{\tilde{s}} \end{array} \right)$$

$\tilde{s}$  - ненулевые строки расширенной матрицы

$s$  - число ненулевых строк

$$\tilde{s} = \begin{cases} s \\ s+1 \end{cases}$$

1 случай:  $\tilde{s} \neq s$  ( $\tilde{s} = s+1$ )

Рассмотрим последнюю ненулевую строку:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{s+1} \end{array} \right)$$

$0x_1 + \dots + 0x_n = b_{s+1} \implies$  решение у этого уравнения нет  $\implies$  СЛУ не имеет решения, т.е. несовместна.

Далее  $\tilde{s} = s$

Заметим, что  $\tilde{s} = s \leq n$  ( $n$ -количество столбцов)

2 случай:  $\tilde{s} = s = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Такая СЛУ называется строго треугольной

Из  $n$ -го уравнения однозначно находится  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ . Подставляем во все оставшиеся уравнения  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \implies$  исключаем  $x_n$ . Получаем строго треугольную систему с меньшим количеством неизвестных.



Далее из (n-1)-го уравнения находим  $x_{n-1}$  и т.д.  $\implies$  СЛУ имеет единственное решение т.е. является определенной.

3 случай:  $\tilde{s} < n$

$$\left( \begin{array}{cc|ccccc|c} 0 & 0 & \underline{a_{1k_1}} & * & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \underline{a_{2k_2}} & * & \cdots & * & * \\ & & & \ddots & & & & \vdots \end{array} \right)$$

$a_{1k_1}, \dots, a_{sk_s}$  - лидеры;

$x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$  - главные неизвестные (неизвестные соответствуют лидерам)

Оставшиеся неизвестные назовем свободными.

Перекинем в правую часть СЛУ слагаемые, соответствующие свободным неизвестным  $\implies$  получаем относительно главных неизвестных строго треугольную СЛУ.

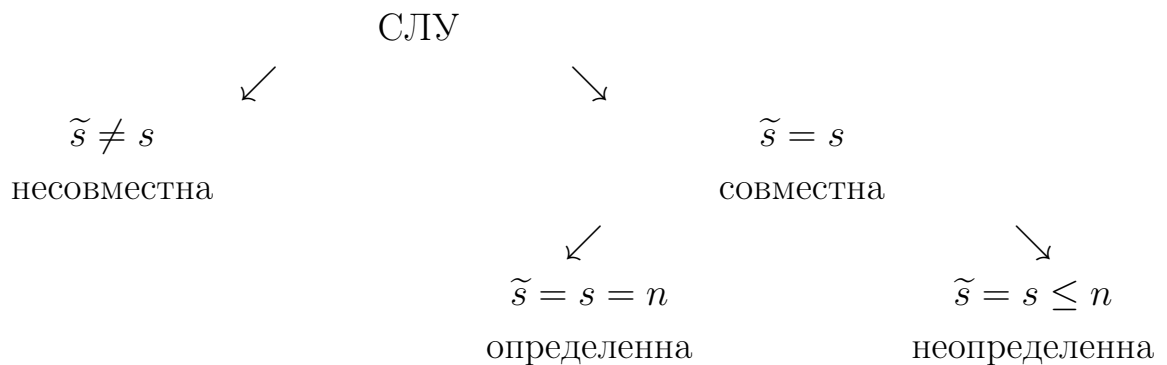
Как в случае 2 однозначно выражаются главные неизвестные через свободные  $\implies$  с точностью до нумерации получаем:

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ \vdots \\ x_s = c_{s,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{sn}x_n + d_s \end{cases}$$

Это выражение называется общим решением системы. Подставляя вместо свободных неизвестных конкретное число из  $\mathbb{R}$ , получаем значение для главных.

$\implies$  получаем все решения СЛУ

Если СЛУ имеет  $> 1$  решения - такая СЛУ называется неопределенной.



**Алгоритм.**  $AX = B \mapsto (A|B) \sim (A_c|B_c) \mapsto A_cX = B_c$

**Определение.** Матрица  $A$  имеет улучшенный ступенчатый вид, если выполнены следующие условия:

1.  $A$  - ступенчатого вида
2. Все лидеры равны 1
3. В каждом столбце, где есть лидер  $\neq 0$ , все элементы равны 0

**Утверждение.** Любую матрицу  $A$  можно привести к улучшенному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

*Доказательство.* Т.к. любую матрицу можно привести к ступенчатому виду  $\implies$  будем считать, что  $A$  - ступенчатая.

Рассмотрим последний лидер  $a_{sk_s}$ . Если  $a_{sk_s} \neq 1$ , то  $s$ -ю строку делим на  $a_{sk_s}$  и получаем, что  $\widetilde{a_{sk_s}} = 1$ .

Далее из всех строк вычитаем первую, умноженную на  $a_{ik_s} \implies \widetilde{a_{ik_s}} = 0$  и т.д.  $\square$

**Определение.** СЛУ  $AX = B$  называется однородной, если  $B = 0$ , т.е. все свободные члены нулевые.

**Утверждение.** Однородная система всегда совместна.

*Доказательство.*  $AX = 0$  всегда имеет решение  $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$  (тривиальное решение)  $\square$

**Следствие.** Однородная СЛУ, в которой число уравнений  $<$  числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

*Доказательство.* (в обозначениях из метода Гаусса)

Т.к. система совместна (т.к.  $B = 0$ ), то  $s = \widetilde{s}$

С другой стороны  $s = \bar{s} \leq$  число исходных уравнений  $< n \implies s = \widetilde{s} < n \implies$  СЛУ неопределенна  $\implies \exists$  более одного решения  $\implies \exists$  нетривиальное решение.  $\square$

## 2 Векторные пространства

### 2.1 Аксиомы элементов векторного пространства

Мы рассматриваем векторные пространства над полем  $\mathbb{R}$ .

**Определение.** Векторным пространством над  $\mathbb{R}$  называют множество элементов  $V$ , на котором введены операции сложения и умножения на числа из  $\mathbb{R}$ :

1.  $\forall x, y \in V \implies x + y = z \in V$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V \implies \lambda x = w \in V$

Удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $x+y = y+x$  (коммутативность)
2.  $(x+y)+z = x+(y+z)$  (ассоциативность)
3.  $\exists 0 \in V : \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$  (нейтральный элемент относительно сложения)
4.  $\forall x \in V : \exists x' : x + x' = 0$  (противоположный элемент)
5.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  (дистрибутивность умножения относительно сложения)
6.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  (дистрибутивность сложения относительно умножения)
7.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$  (ассоциативность умножения)
8.  $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$  (нейтральный элемент относительно умножения)

**Определение.** Любой элемент векторного пространства называется вектором.

#### Примеры векторных пространств:

1.  $V^2$  - Геометрические векторы на плоскости.
2.  $V^3$  - Геометрические векторы в пространстве.
3.  $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$  - арифметические векторы.

$$"+": (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$"\times": (a_1, \dots, a_n) \times \lambda = (a_1\lambda, \dots, a_n\lambda)$$

**Упражнение.** Проверьте, что  $\mathbb{R}^n$  (арифметическое пространство строк) с этими операциями является векторным пространством.

## 2.2 Следствия

1. нулевой вектор единственный

*Доказательство.* Пусть существует два  $\bar{0}_1, \bar{0}_2 \in V$ , тогда:

$$\bar{0}_2 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2 + \bar{0}_1 = \bar{0}_1$$

□

2.  $\forall x \in V$  противоположный вектор единственный

*Доказательство.* Пусть существует два  $x_1, x_2$  - различные противоположные к вектору  $x$ , тогда:

$$\bar{0} + x_2 = (x_1 + x) + x_2 = x_1 + (x + x_2) = x_1 + \bar{0}$$

□

3.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$

*Доказательство.*

$$\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$$

Прибавим к обеим частям уравнения  $\lambda \cdot \bar{0} = \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0}$  противоположный к  $\lambda \cdot \bar{0}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \bar{0} + (-\lambda \cdot \bar{0}) &= \lambda \cdot \bar{0} + \lambda \cdot \bar{0} + (-\lambda \cdot \bar{0}) \\ \bar{0} &= \lambda \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

□

4.  $\lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$

5.  $\lambda \cdot (x - y) = \lambda x - \lambda y$

6.  $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$

7.  $(-1) \cdot x = -x$

8.  $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda x - \mu x$

## 2.3 Векторные подпространства

**Определение.** Подмножество  $U \subseteq V$  над векторным подпространством, если:

1.  $x, y \in U \implies x + y \in U$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in U \implies \lambda \cdot x \in U$
3.  $U \neq \emptyset$

**Замечание.** 3 условие заменить на условие:  $0 \in U$

$\Leftarrow$  очевидно.

$\implies$  если  $U \neq \emptyset$ , то  $\exists x \in U \implies$  по 2. :  $(-1) \cdot x \in U \implies -x \in U \implies x + (-x) \in U \implies 0 \in U$

**Утверждение.** Любой вектор подпространства векторного пространства  $V$  сам является векторным пространством относительно операций векторного пространства

*Доказательство.* Надо проверить определение. 1 и 2 свойство из операций векторного пространства означают, что в  $U$  заданы операции сложения и умножения на вещественное число. Проверка аксиом векторного пространства: 1,2,5,6,7,8 выполнены для всех векторов из  $V$ , а значит и для всех векторов из  $U$ .

3,4 доказательство как в замечании.

$$\forall x \in U, \exists (-x) = (-1) \cdot x \in U, \bar{0} \in U, \text{ т.к. } U \neq \emptyset$$

□

**Примеры.**

1.  $V^3, U$  - множество всех векторов из  $V^3$ , параллельные фиксированной плоскости.
2.  $\mathbb{R}^n, U = \{(a_1, \dots, a_n) | a_{2i} = 0\}$  - векторное подпространство  
 $\tilde{U} = \{(a_1, \dots, a_n) | a_{2i} = 1\}$  - не векторное подпространство, т.к. множество не замкнуто относительно сложения и умножения.
3. В любом векторном пространстве  $V$  есть такие подпространства, состоящие только из нулевого вектора. (тривиальное или несобственное подпространство) (Остальное называется собственными)

## 2.4 Линейная зависимость системы векторов

$V$  - векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$

**Определение.** Линейной комбинацией векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$  с коэффициентами  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  называется выражение вида:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Говорят, что вектора  $w \in V$  линейно выражается через  $(v_1, \dots, v_n)$ , если  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$

**Определение.** Линейной комбинацией  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  называется тривиальной, если  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ . Иначе нетривиальной.

**Определение.** Система векторов  $v_1, \dots, v_n$  называется линейно зависимой (ЛЗ), если  $\exists$  нетривиальная линейная комбинация равная 0, (т.е.  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  не все равные 0) такая что  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Иначе система называется линейно независимой (ЛНЗ), т.е. из любого такого равенства  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ .

**Примеры.**  $V^2, v_1 = i + j, v_2 = 2i, v_3 = 3i$  -линейно зависима система, т.к.

$$1 \cdot (i + j) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (3i) = 0$$

$$1 \cdot v_1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot v_2 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot v_3 = 0$$

**Свойства.**

1. Система из одного вектора  $V_1$  ЛЗ  $\iff V_1 = 0$
2. Система из 2-х векторов  $v_1, v_2$  ЛЗ  $\iff$  противоположные, т.е.  $v_1 = \lambda v_2$   
 $v_2 = \mu v_1$ .

**Пример.**  $\mathbb{R}^n$

Система  $\underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, 0, \dots, 0)}_{e_2}, \dots, \underbrace{(0, 0, 0, \dots, 1)}_{e_n}$  линейно независимая  
 $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (0, \dots, 0) \iff (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \iff \text{ЛНЗ}$

**Лемма 1.** (Критерий линейной зависимости) Система векторов  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $n > 1$  - линейно зависимы  $\iff$  хотя бы один вектор линейно выражается через оставшиеся.

*Доказательство.*

$\implies$  По определению ЛЗ  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  не все нулевые:  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ . Без ограничения общности можем считать, что  $\lambda_1 \neq 0$ , тогда  $v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_n v_n)$

$\Leftarrow$  Пусть один из этих векторов выражается через оставшиеся. Без ограничения общности можем считать, что  $v_1$  выражается через оставшиеся

$$v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$$

$1 \cdot v_1 - \mu_2 v_2 - \dots - \mu_n v_n = 0$  - нетривиальная линейная комбинация,

т.к.  $\mu_1$  (коэф. перед  $v_1$ )  $\neq 0 \implies v_1, \dots, v_n$  - линейно зависима.

□

**Замечание.** В лемме 1 нельзя «хотя бы один» заменить на «любой»!

Пусть  $v_1 \neq 0, v_2 = 0$  и  $v_1, v_2$  - ЛЗ, т.к.  $0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$

**Лемма 2.** Пусть  $v_1, \dots, v_n \in V$  - ЛНЗ, тогда  $w \in V$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_n \iff (w, v_1, \dots, v_n)$  - ЛЗ.

*Доказательство.*

$\implies \exists \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R} : w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \implies$  по критерию ЛЗ система  $\{w, v_1, \dots, v_n\}$  - ЛЗ.

$\Leftarrow$  Пусть система ЛЗ  $\implies \exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  - не все нули, так что  $\lambda_0 w + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ , тогда:

1.  $\lambda_0 = 0$ , то  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  - нетривиальная линейная комбинация

2.  $\lambda_0 \neq 0 \implies w = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_0})v_1 + \dots + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_0})v_n$

□

**Лемма 3.** Пусть вектор  $w$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_k$ . Тогда это выражение единственное.

*Доказательство.*

$\implies$  Пусть выражается единственно. Допустим,  $v_1, \dots, v_k$  - ЛЗ  $\implies \exists \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  не все нулевые, т.ч.  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

Тогда если  $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$ , то  $w + 0 = (\mu_1 + \lambda_1)v_1 + \dots + (\mu_k + \lambda_k)v_k$  другое разложение, противоречие.

$\Leftarrow$  Пусть  $v_1, \dots, v_k$  - ЛНЗ. Допустим, что существует два разложения:

$$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$$

$$w = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\mu}_k v_k$$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k\}$  - ЛЗ  $\Rightarrow$  противоречие.

□

#### Лемма 4.

1. Если какая-то подсистема векторов ЛЗ, то вся система ЛЗ.
2. Если система векторов ЛНЗ, то любая подсистема ЛНЗ.

*Доказательство.*

1. Пусть подсистема  $v_1, \dots, v_k$  системы  $v_1, \dots, v_k, \dots, v_m$  - ЛЗ  $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$  не все равные нулю, т.ч.  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ . Положим  $\lambda_{k+1} = 0, \dots, \lambda_m = 0$ . Тогда  $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k, \dots, \lambda_m v_m = 0$  - нетривиальная ЛК  $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$  - ЛЗ.
2. Следует из 1.

□

#### Лемма 5. (ОЛЛЗ)

Пусть  $v_1, \dots, v_k \in V, w_1, \dots, w_m \in V$ , причем каждый  $w_i$  линейно выражается через  $v_1, \dots, v_k$ , тогда, если  $m > k$ , то  $\{w_1, \dots, w_m\}$  - ЛЗ.

*Доказательство.* Пусть

$$\begin{cases} w_1 = c_{11}v_1 + \dots + c_{1k}v_k \\ w_2 = c_{21}v_1 + \dots + c_{2k}v_k \\ \vdots \\ w_m = c_{m1}v_1 + \dots + c_{mk}v_k \end{cases} \quad \text{где } c_{ij} \in \mathbb{R}$$

Докажем, что  $\exists$  нетривиальная ЛК  $w_1, \dots, w_m = 0$

Для произвольных  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m &= \\ &= \lambda_1(c_{11}v_1 + \dots + c_{1k}v_k) + \dots + \lambda_m(c_{m1}v_1 + \dots + c_{mk}v_k) = \\ &= (\lambda_1 c_{11} + \dots + \lambda_m c_{m1})v_1 + \dots + (\lambda_1 c_{1k} + \dots + \lambda_m c_{mk})v_k \end{aligned}$$



Рассмотрим СЛУ с неизвестными  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  из  $k$  уравнений:

$$\begin{cases} c_{11}\lambda_1 + \dots + c_{m1}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ c_{1k}\lambda_1 + \dots + c_{mk}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

Т.к.  $m > k$  и это ОСЛУ в которой число уравнений  $<$  числа неизвестных, то эта система имеет нетривиальное решение

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \implies \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0$  - это нетривиальная ЛК

$\implies w_1, \dots, w_m$  - ЛЗ. □

## 2.5 Линейная оболочка множества $S$

$V$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$

$S \subseteq V, S \neq \emptyset$

**Утверждение.** Множество всех ЛК  $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $s_i \in S$  образует векторное подпространство в пространстве  $V$ .

*Доказательство.* Д/з. □

**Определение.** Такое векторное подпространство называется линейная оболочка множества  $S$ , обозначается  $\langle S \rangle$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ ;  $\langle S \rangle = \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

2.  $V^3$ ,  $S = \{i, j, i + j\}$



$$\tilde{S} = \{i + j\}$$

**Определение.** Если  $V = \langle S \rangle$ , то  $S$  называется порождающим множеством векторного пространства  $V$ . Говорят векторное пространство  $V$  порождается множеством  $S$ .

**Определение.** Если  $\exists$  конечное множество  $S$ , т.ч.  $V = \langle S \rangle$ , то  $V$  называется конечномерным (конечнопорожденным), иначе бесконечномерным.

**Пример.**  $\mathbb{R}^n = \langle (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \rangle$

**Лемма.** (Переформулировка ОЛЛЗ) Пусть векторное пространство  $V$  порождается  $k$  векторами. Тогда любые  $m > k$  векторов из  $V$  - ЛЗ.

## 2.6 Базис

$V$ - конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$

**Определение. 1** Система векторов  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$  называется базисом векторного пространства  $V$ , если:

1.  $\{e_1, \dots, e_n\}$  - ЛНЗ
2.  $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ , т.е.  $\forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Эти числа  $x_1, \dots, x_n$  - называются координатами вектора  $x$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$

**Определение. 2** Система векторов  $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$  называется базисом векторного пространства  $V$ , если любой вектор  $x \in V$  выражается через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  единственным образом.

**Утверждение.** (Опр 1)  $\iff$  (Опр 2)

*Доказательство.* По лемме (3). □

**Теорема.** Всякое конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$  обладает базисом. Более того, из любого конечного порожденного множества можно выбрать базис.

*Доказательство.* Пусть  $S$ - какое-то порожденное множество векторного пространства  $V$ .

Если  $S$  - ЛНЗ, то  $S$  - базис

Если  $S$  - ЛЗ, то по критерию о ЛЗ один из векторов  $S_1$  множества  $S$  линейно выражается через остальные.

Тогда  $S_1 = S \setminus \{s_1\}$  - конечное порождающее множество. ч.т.д.

Т.к.  $S$  - конечное, это процесс прервется и мы получим ЛНЗ порожденную систему. □

**Теорема.** В любом базисе конечномерного векторного пространства  $V$  над  $\mathbb{R}$  одно и тоже число векторов.

*Доказательство.* Пусть есть два базиса  $\{e_1, \dots, e_m\}$  и  $\{f_1, \dots, f_m\}$  векторного пространства  $V$ . Тогда каждый вектор  $f_i$  выражается через  $e_1, \dots, e_m$ .

По ОЛЛЗ:  $\{f_1, \dots, f_m\}$  - ЛЗ  $\implies \{f_1, \dots, f_m\}$  - не базис  $\implies$  противоречие. □

**Определение.** Число векторов в базисе конечномерного векторного пространства  $V$ , называется размерностью векторного пространства и обозначается:  $\dim V$

**Примеры.**

1.  $\dim V^2 = 2$

2.  $\dim \mathbb{R}^n = n$

**Замечание.** Если  $V = 0$ , то  $\dim V = 0$  (базис состоит из  $\emptyset$ )

Пусть  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $\dim V = n$ ,  $S \subseteq V$  Любые  $m > n$  векторов в  $S$  - ЛЗ. (из ОЛЛЗ)

$\implies$  в  $S$   $\exists$  максимальная ЛНЗ подсистема (т.е. ничего нельзя добавить к этой подсистеме без нарушения ЛНЗ)

**Лемма 6.** Пусть  $V$  -  $n$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ ,  $S \subseteq V$ . Тогда максимальная ЛНЗ система векторов из  $S$  образует базис в лин. оболочке  $\langle S \rangle$

*Доказательство.* Пусть  $\{s_1, \dots, s_k\}$  максимальная (по включению) ЛНЗ система в  $S \implies \forall s \in S \setminus \{s_1, \dots, s_k\} \implies \{s, s_1, \dots, s_k\}$  - ЛЗ.

По Лемме (2).  $\implies s = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$

Докажем, что  $\{s_1, \dots, s_k\}$  базис в  $\langle S \rangle$ .

1. ЛНЗ (очевидно)

2.  $\forall x \in \langle S \rangle: x = x_1 s_1 + \dots + x_k s_k$

По определению линейной оболочки  $x$  линейно выражается через вектора из  $S$   
А каждый вектор из  $S$  линейно выражается через  $\{s_1, \dots, s_k\}$   $\square$

**Теорема.** Пусть  $V$  конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , тогда:

1. Любая максимальная ЛНЗ система векторов из  $V$  - базис  $V$ .
2. Любую ЛНЗ систему векторов из  $V$  можно дополнить до базиса векторного пространства  $V$ .

*Доказательство.*

1. По лемме (6).  $S = V$

2. Пусть  $S$  - ЛНЗ система векторов из  $V$

Если  $V = \langle S \rangle$ , тогда  $S$ - базис.

Если  $V \neq \langle S \rangle$ , то  $\exists s_1 \in V \setminus \langle S \rangle$

$\Rightarrow s_1$  линейно не выражается через  $S \Rightarrow$  (По лемме 2.)  $S_1 = S \cup \{s_1\}$  - ЛНЗ.

$\Rightarrow$  Если  $V = \langle S \rangle$ , то  $S_1$  базис, иначе  $\exists S_2 \in V \setminus \langle S_1 \rangle$ , и т.д.

Этот процесс прервется на конечном шаге, т.к. пространство  $V$ - конечное. (Если  $\dim V \neq n$ , то  $\nexists$  ЛНЗ системы с числом векторов  $> n$ )  $\square$

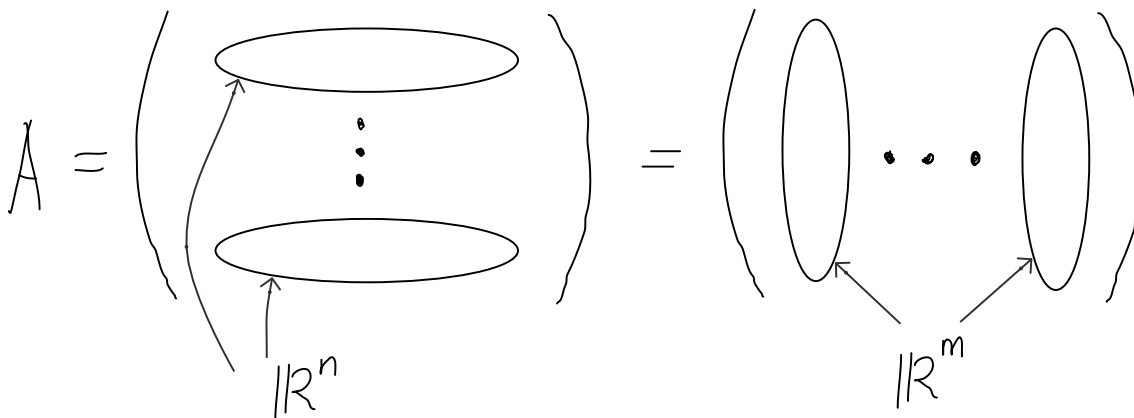
**Следствие.** Пусть  $V$  конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$

1. Любой ненулевой вектор можно дополнить до базиса.
2. Любые  $n$  ЛНЗ вектора в  $n$ -мерном пространстве  $V$  образуют базис.

### 3 Ранг

**Определение.** Рангом системы векторного пространства  $S \subseteq V$  называется  $\dim \langle S \rangle$

$A$  - матрица  $m \times n$



**Определение.** Рангом матрицы  $A$  называется ранг системы ее строк, т.е. максимальное число ЛНЗ строк матрицы.

### 4 Мораль в том, что я не успел....