Lomonosov Moscow
State University

Механико-математический факультет

Алгебра, 1 семестр, 2 поток

Преподаватель:	Куликова Ольга Викторовна
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108

Москва
2024

Содержание

1 Система линейных уравнений

1.1 Матрица. Основные понятия

Определение. Матрица A размера $m \times n$ это прямоугольная таблица с m строками и n столбцами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} - элемент матрицы и индексы:

- i - номер строками
- j - номер столбца

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ - Множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$

Матрица $m \times 1$ называется столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Если $A = (a_{ij})$ - крадратная, $a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$, то A называется диальнольной.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если A - диальнольная и $a_{ij} = 1$, то A называется единичной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Если A - квадратная, то

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ главная диагональ
- $A = \begin{pmatrix} & & a_{n1} \\ & \dots & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix}$ побочная диагональ

Определение. Если A - размера $m \times n$, $a_{ij} = 0$ $\forall i, j$, то A называется нулевой.

1.2 Система линейных (алгебрачеcких) уравнений

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $a_{ij}, b \in \mathbb{R}, x_1, ..., x_n$ - неизвестные.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A - матрица коэфициентов, a_{ij} называется коэфициентом СЛУ.
B - столбец свобоных членов, b_j - свободный член.

Определение. Расширенная матрица $\underset{m \times (n+1)}{(A|B)}$. Набор чисел $x_1^0, ..., x_n^0 \in \mathbb{R}$ называется решением системы $(*)$, если подстановка этих чисел вместо неизвестных в $(*)$ дает тождество в каждом уравнении. $(x_i^0 \longleftrightarrow x)$

Решить систему - это найти все решения системы. Любое конткретное решение называется частным.

Определение. Если СЛУ имеет решение, то она называется совместной, иначе несовместной.

Определение. Совместная система, имеющая одно решение, называется определенной, иначе неопределенной (более одного решения).

1.3 Элементарные преобразования над СЛУ

1. Прибавить к одному уравнению другое уравнение, умноженное на число $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Поменять местами два уравнения

3. Умножить уравнение на ненулевое число $\mu \in \mathbb{R}$

Утверждение. Эти преобразования обратимы.

Определение. Две системы линеных уравнений называются эквивалентными, если их множества решений совпадают.

Утверждение. Если одна СЛУ получена из другой СЛУ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.

Доказательство.
$\Longrightarrow$ (Не Куликова) $AX = B$ - сходная система, $\tilde{A}X = \tilde{B}$ преобразованная система.
Пусть $z_1, ..., z_n$ некотороое решение $AX = B$. Будем рассматривать $\tilde{A}X = \tilde{B}$, в ней ЭП II типа умножают строку на μ, имеем:

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i \text{ в } AX = B$$

$$\mu a_{i1}x_1 + ... + \mu a_{in}x_n = \mu b_i \text{ в } \tilde{A}X = \tilde{B}$$

Выносим μ из второго уравнения:

$$\mu(a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n) = \mu b_i$$

Получаем, что $z_1, ..., z_n$ решение для $\tilde{A}X = \tilde{B}$. Для III типа ЭП очевидно. Теперь рассмотрим I тип, будем к i-ой строчке прибавлять j-ую к коэфициентом λ, получаем:

$$\begin{aligned}(a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + ... + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = \\ = a_{i1}x_1 + \lambda a_{j1}x_1 + ... + a_{in}x_n + \lambda a_{jn}x_n = \\ = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + \lambda(a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n) = b_i + \lambda b_j\end{aligned}$$

Таким образом, любое решение старой СЛУ - это и решение новой, то есть множество решений не уменьшилось. (со столбами все тоже самое)
$\Longleftarrow$ В обратную сторону аналогично (для доказательства эквивалентности), используя обратимость элементарных преобразований. $\square$

Мораль в том, что мы можем работать с расширенной матрицей $(A|B)$.

1.4 Элементарные преобразования над матрицами

Элементарные преобразования над строками:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_i} \end{pmatrix}, \text{ где } \overline{a_i} - \text{строка}$$

- ЭП1: $\overline{a_i} \to \overline{a_i} + \lambda\overline{a_i}$
- ЭП2: $\overline{a_i} \longleftrightarrow \overline{a_j}$
- ЭП3: $\overline{a_i} \to \mu\overline{a_i},\ \mu \neq 0$

Определение. Лидер строки (ведущий элемент) - это 1-й ненулевой элемент слева.
Пример: $(0, 0, \underbrace{3}_{\text{лидер}}, 4, 5, 0, 0, 7)$

Определение. Матрица A размера $m \times n$ называется ступенчатой, если

1. Номера лидеров ненулевых строк строго возрастают с увеличением номера строки.
2. Все нулевые строки стоят внизу (в конце).

Теорема. Любую матрица A размера $m \times n$ за конечное число элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство. Индукция по n:
Если A - нулевая, то A - ступенчатого вида. Если $A \neq 0$: найдем первый ненулевой столбец (начиная слева). Пусть j - номер первого ненулевого столбца. Пусть $a_{ij} \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Меняем 1-ю и i-ю строку местами и получаем, что a_{ij} стал лидером первой строки. Считаем, что сразу $a_{1j} \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{ij} & * \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

Вычитаем из кажкой k-й строки, начиная со 2-ой, 1-ю строку, умноженную на число $\frac{a_{kj}}{a_{1j}}$. Получает вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & * & \\ \vdots & \vdots & * & * \\ & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \vdots & \end{array}\right)$$

К правой части матрицы применяем индукцию и проводим матрицу к ступенчатому виду. □

Замечание. Этот метод называется методом Гауса.

1.5 Решение СЛУ методом Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Элементарные преобразования над $AX = B \iff$ элементарные преобразования над $(A|B)$.

СЛУ $AX = B$ ступенчатая $\Longrightarrow (A|B)$ имеет ступенчатый вид.

Утверждение. Решение СЛУ ступенчаного вида.

Пусть $AX = B$ - ступенчатая

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{\widetilde{s}} \end{array}\right)$$

$\widetilde{s}$ - ненулевые строки расширенной матрицы

s - число ненулевых строк

$$\widetilde{s} = \left[\begin{array}{c} s \\ s+1 \end{array}\right.$$

1 случай: $\widetilde{s} \neq s$ ($\widetilde{s} = s+1$)

Рассмотрим последнюю ненулевую строку:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{sn} & b_s \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{s+1} \end{array}\right)$$

$0x_1 + ... + 0x_n = b_{s+1} \Longrightarrow$ решение у этого уравнения нет $\Longrightarrow$ СЛУ не имеет решения, т.е. несовместнаю.

Далее $\widetilde{s} = s$

Заметим, что $\widetilde{s} = s \leq n$ (n-количество столбов)

2 случай: $\widetilde{s} = s = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Такая СЛУ называются строго треугольной

Из n-го уравнения однозначно находится $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ Подставляем во все оставшиеся уравнения $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \Longrightarrow$ исключаем x_n. Получаем строго треугольную систему с меньшим количество неизвестных.

Далее из (n-1)-го уравнения находим x_{n-1} и т.д. $\Longrightarrow$ СЛУ имеет единственное решение т.е. является определенной.

3 случай: $\widetilde{s} < n$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & |\underline{a_{1k_1}} & * & \cdots & \cdots & * & & * \\
0 & 0 & 0 & |\underline{a_{2k_2}} & * & \cdots & * & & * \\
 & & & & \ddots & & & & \vdots
\end{array}\right)$$

$a_{1k_1}, ..., a_{sk_s}$ - лидеры;

$x_{k_1}, ..., x_{k_s}$ - главные неизвестные (неизвестные соответствуют лидерам)

Оставшиеся неизвестные назовем свободными.

Перекинем в правую часть СЛУ слагаемые, соответствующие свободным неизвестным $\Longrightarrow$ получаем относительно главных неизвестных строго треугольную СЛУ.

Как в случае 2 однозначно выражается главные неизвестные через свободные $\Longrightarrow$ с точностью до нумерации получаем:

$$\begin{cases}
x_1 = c_{1,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\
\vdots \\
x_s = c_{s,s+1}x_{s+1} + \cdots + c_{sn}x_n + d_s
\end{cases}$$

Это выражение называется общим решением системы. Подставляя вместо свободных неизвестных конкретное число из $\mathbb{R}$, получаем значение для главных.

$\Longrightarrow$ получаем все решения СЛУ

Если СЛУ имеет >1 решения - такая СЛУ называется неопределенной.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{СЛУ} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\begin{array}{c}\widetilde{s} \neq s \\ \text{несовместна}\end{array} & & \begin{array}{c}\widetilde{s} = s \\ \text{совместна}\end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \begin{array}{c}\widetilde{s} = s = n \\ \text{определенна}\end{array} & & \begin{array}{c}\widetilde{s} = s \leq n \\ \text{неопределенна}\end{array}
\end{tikzcd}$$

Алгоритм. $AX = B \longmapsto (A|B) \sim (A_c|B_c) \longmapsto A_cX = B_c$

Определение. Матрица A имеет улучшенный ступенчатый вид, если выполнены следующие условия:

1. A - ступенчатого вида
2. Все лидеры равны 1
3. В каждом столбце, где есть лидер $\neq 0$, все элементы равны 0

Утверждение. Любую матрицу A можно привести к улучшенному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Доказательство. Т.к. любую матрицу можно привести к ступенчатому виду $\Longrightarrow$ будем считать, что A - ступенчатая.
Рассмотрим последний лидер a_{sk_s}. Если $a_{sk_s} \neq 1$, то s-ю строку делим на a_{sk_s} и получаем, что $\widetilde{a_{sk_s}} = 1$.
Далее из всех строк вычитаем первую, умноженную на $a_{ik_s} \Longrightarrow \widetilde{a_{ik_s}} = 0$ и т.д. □

Определение. СЛУ $AX = B$ называется однородной, если $B = 0$, т.е. все свободные члены нулевые.

Утверждение. Однородная система всегда совместна.

Доказательство. $AX = 0$ всегда имеет решение $x_1 = 0, ..., x_n = 0$ (тривиальное решение) □

Следствие. Однородная СЛУ, в которой число уравнений < числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

Доказательство. (в обозначениях из метода Гаусса)
Т.к. система совместна (т.к. $B = 0$), то $s = \widetilde{s}$
С другой стороны $s = \overline{s} \leq$ число исходных уравнений < n $\Longrightarrow s = \widetilde{s} < n \Longrightarrow$ СЛУ неопределенна $\Longrightarrow \exists$ более одного решения $\Longrightarrow \exists$ нетривиальное решение. □

2 Векторные пространства

2.1 Аксиомы элементов векторного пространства

Мы рассматриваем векторные пространства над полем $\mathbb{R}$.

Определение. Векторным пространством над $\mathbb{R}$ называют множество элементов V, на котором введены операции сложения и умножения на числа из $\mathbb{R}$:

1. $\forall x, y \in V \Longrightarrow x + y = z \in V$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V \Longrightarrow \lambda x = w \in V$

Удовлетворяет следующими свойствами:

1. x+y = y+x (коммутативность)
2. (x+y)+z = x+(y+z) (ассоциативность)
3. $\exists\, 0 \in V : \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$ (нейтральный элемент относильно сложения)
4. $\forall x \in V : \exists\, x' : x + x' = 0$ (противоположный элемент)
5. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивность умножения отностильно сложения)
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивность сложения отностильно умножения)
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения)
8. $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$ (нейтральный элемент относильно умножения)

Определение. Любой элемент векторного пространства называется вектором.

Примеры векторных пространств:

1. V^2 - Геометрические векторы на плоскости.
2. V^3 - Геометрические векторы в пространстве.
3. $\mathbb{R}^n = \{(a_1, ..., a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$ - арифметические векторы.

   "+": $(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$
   "×": $(a_1, ..., a_n) \times \lambda = (a_1\lambda, ..., a_n\lambda)$

Упражнение. Проверьте, что $\mathbb{R}^n$ (арифметическое пространство строк) с этими операциями является векторным пространством.

2.2 Следствия

1. нулевой вектор единственный

   Доказательство. Пусть существует два $\overline{0}_1, \overline{0}_2 \in V$, тогда:

   $$\overline{0}_2 = \overline{0}_1 + \overline{0}_2 = \overline{0}_2 + \overline{0}_1 = \overline{0}_1$$

   $\square$

2. $\forall x \in V$ противоположный вектор единственный

   Доказательство. Пусть существует два x_1, x_2 - различные противоположные к вектору x, тогда:

   $$\overline{0} + x_2 = (x_1 + x) + x_2 = x_1 + (x + x_2) = x_1 + \overline{0}$$

   $\square$

3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$

   Доказательство.

   $$\lambda \cdot \overline{0} = \lambda \cdot (\overline{0} + \overline{0}) = \lambda \cdot \overline{0} + \lambda \cdot \overline{0}$$

   Прибавим к обе им частям уравнения $\lambda \cdot \overline{0} = \lambda \cdot \overline{0} + \lambda \cdot \overline{0}$ противоположный к $\lambda \cdot \overline{0}$, тогда:

   $$\lambda \cdot \overline{0} + (-\lambda \cdot \overline{0}) = \lambda \cdot \overline{0} + \lambda \cdot \overline{0} + (-\lambda \cdot \overline{0})$$
   $$\overline{0} = \lambda \cdot \overline{0}$$

   $\square$

4. $\lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$

5. $\lambda \cdot (x - y) = \lambda x - \lambda y$

6. $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$

7. $(-1) \cdot x = -x$

8. $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda x - \mu x$

2.3 Векторные подпространства

Определение. Подмножество $U \subseteq V$ над векторным подпространством, если:

1. $x, y \in U \Longrightarrow x + y \in U$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in U \Longrightarrow \lambda \cdot x \in U$
3. $U \neq \varnothing$

Замечание. 3 условие заменить на условие: $0 \in U$

$\underline{\Longleftarrow}$ очевидно.

$\underline{\Longrightarrow}$ если $U \neq \varnothing$, то $\exists\, x \in U \Longrightarrow$ по 2. : $(-1) \cdot x \in U \Longrightarrow -x \in U \Longrightarrow$
$x + (-x) \in U \Longrightarrow 0 \in U$

Утверждение. Любой вектор подпространства векторного пространства V сам является векторным пространством относительно операций векторного пространства

Доказательство. Надо проверить определение. 1 и 2 свойство из операций векторного пространства означают, что в U заданы операции сложения и умножения на вещественное число. Проверка аксиом векторного пространства: 1,2,5,6,7,8 - выполнены для всех векторов из V, а значит и для всех векторов из U.
3,4 доказательство как в замечании:

$$\forall x \in U,\ \exists\, (-x) = (-1) \cdot x \in U,\ \overline{0} \in U,\ \text{т.к. } U \neq \varnothing$$

□

Примеры.

1. V^3, U - множество всех векторов из V^3, параллельные фиксированной плоскости.
2. $\mathbb{R}^n, U = \{(a_1, ..., a_n) | a_{2i} = 0\}$ - векторное подпространство
$\widetilde{U} = \{(a_1, ..., a_n) | a_{2i} = 1\}$ - не векторное подпространство, т.к. множество не замкнуто относительно сложения и умножения.
3. В любом векторном простанстве V есть такие подпространства, состоящие только из нулевого вектора. (тривиальное или несобственное подпространство) (Остальное называется собственными)

2.4 Линейная зависимость системы векторов

V - векторное пространство над полем $\mathbb{R}$

Определение. Линейной комбинацией векторов $v_1, ..., v_n \in V$ с коэфициентами $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ называется выражение вида:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Говорят, что вектора $w \in V$ линейно выражается через $(v_1, ..., v_n)$,
если $\exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} : w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$

Определение. Линейной комбинацией $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ називается тривиальной, если $\lambda_1 = 0, ..., \lambda_n = 0$. Иначе нетривиальной.

Определение. Система векторов $v_1, ..., v_n$ называется линейно зависимой (ЛЗ), если $\exists$ нетривиальная линейная комбинация равная 0, (т.е. $\exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ не все равные 0) такая что $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$. Иначе система называется линейно независимой (ЛНЗ), т.е. из любого такого равенства $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ $\implies (\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0$.

Примеры. $V^2, v_1 = i + j, v_2 = 2i, v_3 = 3i$ -линейно зависимая система, т.к.

$$1 \cdot (i + j) + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (3i) = 0$$

$$1 \cdot v_1 + (-\frac{1}{2}) \cdot v_2 + (-\frac{1}{3}) \cdot v_3 = 0$$

Свойства.

1. Система из одного вектора V_1 ЛЗ $\iff V_1 = 0$
2. Система из 2-х векторов v_1иv_2 ЛЗ $\iff$ противоположные, т.е. $v_1 = \lambda v_2$ $v_2 = \mu v_1$.

Пример. $\mathbb{R}^n$
Система $\underbrace{(1, 0, 0, ..., 0)}_{e_1}, \underbrace{(0, 1, 0, ..., 0)}_{e_2}, ..., \underbrace{(0, 0, 0, ..., 1)}_{e_n}$ линейно независимая

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (0, ..., 0) \iff (\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0 \iff$ ЛНЗ

Лемма 1. (Критерий линейной зависимости) Система векторов $v_1, ..., v_n \in V$, $n > 1$ - линейно зависимы $\iff$ хотя бы один вектор линейно выражается через оставшиеся.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ По определению ЛЗ $\exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ не все нулевые: $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\lambda_1 \neq 0$, тогда $v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n)$

$\Longleftarrow$ Пусть один из этих векторов выражается через оставшиеся. Без ограничения общности можем считать, что v_1 выражается через оставшиеся
$v_1 = \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$
$1 \cdot v_1 - \mu v_2 - \cdots - \mu_n v_n = 0$ - нетривиальная линейнвая комбинация,
т.к. μ_1(коэф. перед v_1) $\neq 0 \Longrightarrow v_1, ..., v_n$ - линейно зависима.

$\square$

Замечание. В лемме 1 нельзя «хотя бы один» заменить на «любой»!
Пусть $v_1 \neq 0, v_2 = 0$ и v_1, v_2 - ЛЗ, т.к. $0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = 0$

Лемма 2. Пусть $v_1, ..., v_n \in V$ - ЛНЗ, тогда $w \in V$ линейно выражается через $v_1, ..., v_n \Longleftrightarrow (w, v_1, ..., v_n)$ - ЛЗ.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $\exists\, \mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R} : w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \Longrightarrow$ по критерию ЛЗ система $\{w, v_1, ..., v_n\}$ - ЛЗ.

$\Longleftarrow$ Пусть система ЛЗ $\Longrightarrow \exists\, \lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ - не все нули, так что $\lambda_0 w + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, тогда:

1. $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ - нетривиальная линейная комбинация
2. $\lambda_0 \neq 0 \Longrightarrow w = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_0})v_1 + \cdots + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_0})v_n$

$\square$

Лемма 3. Пусть вектор w линейно выражается через $v_1, .., v_k$. Тогда это выражение единственное.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть выражается единственно. Допустим, $v_1, .., v_k$ - ЛЗ $\Longrightarrow \exists\{\lambda_1, .., \lambda_k\}$ не все нулевые, т.ч. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$
Тогда если $w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k$, то $w + 0 = (\mu_1 + \lambda_1)v_1 + \cdots + (\mu_k + \lambda_k)v_k$ другое разложение, противоречие.

$\Longleftarrow$ Пусть $v_1, .., v_k$ - ЛНЗ. Допустим, что существует два разложения:

$$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$$

$$w = \widetilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \widetilde{\mu_k} v_k$$

$\Longrightarrow \{v_1, .., v_k\}$ - ЛЗ $\Longrightarrow$ противоречие.

□

Лемма 4.

1. Если какая-то подсистема векторов ЛЗ, то вся система ЛЗ.
2. Если система векторов ЛНЗ, то любая подсистема ЛНЗ.

Доказательство.

1. Пусть подсистема $v_1, .., v_k$ системы $v_1, .., v_k, ..., v_m$ - ЛЗ $\Longrightarrow \exists \lambda_1, ..., \lambda_k$ не все равные нулю, т.ч. $\lambda_1 v_1 + \dots_+ \lambda_k v_k = 0$ Положим $\lambda_{k+1} = 0, ..., \lambda_m = 0$ Тогда $\lambda_1 v_1, .., \lambda_k v_k, ..., \lambda_m v_m = 0$ - нетривиальная ЛК $\Longrightarrow \{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m\}$ - ЛЗ.
2. Следует из 1.

□

Лемма 5. (ОЛЛЗ)
Пусть $v_1, ..., v_k \in V, w_1, ..., w_m \in V$, причем каждый w_i линейно выражается через $v_1, ..., v_k$, тогда, если $m > k$, то $\{w_1, ..., w_m\}$ - ЛЗ.

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} w_1 = c_{11} v_1 + \dots + c_{1k} v_k \\ w_2 = c_{21} v_1 + \dots + c_{2k} v_k \\ \vdots \\ w_m = c_{m1} v_1 + \dots + c_{mk} v_k \end{cases} \quad \text{где } c_{ij} \in \mathbb{R}$$

Докажем, что $\exists$ нетривиальная ЛК $w_1, ..., w_m = 0$
Для произвольных $\lambda_1, ..., \lambda_m$ рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = \\ &\qquad = \lambda_1 (c_{11} v_1 + \dots + c_{1k} v_k) + \dots + \lambda_m (c_{m1} v_1 + \dots + c_{mk} v_k) = \\ &\qquad\qquad = (\lambda_1 c_{11} + \dots + \lambda_m c_{m1}) v_1 + \dots + (\lambda_1 c_{1k} + \dots + \lambda_m c_{mk}) v_k \end{aligned}$$

Рассмотрим СЛУ с неизвестными $\lambda_1, ..., \lambda_m$ из k уравнений:

$$\begin{cases} c_{11}\lambda_1 + \dots + c_{m1}\lambda_m = 0 \\ \vdots \\ c_{1k}\lambda_1 + \dots + c_{mk}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

Т.к. $m > k$ и это ОСЛУ в которой число уравнений < числа неизвестных, то эта система имеет нетривиальное решение
$\lambda_1, ..., \lambda_m \Longrightarrow \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0$ - это нетривиальная ЛК
$\Longrightarrow w_1, ..., w_m$ - ЛЗ. □

2.5 Линейная оболочка множества S

V - векторное простанство над $\mathbb{R}$
$S \subseteq V, S \neq \varnothing$

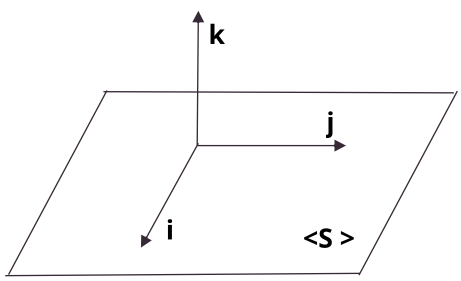
Утверждение. Множество всех ЛК $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in S$ образует векторное подпространство в пространстве V.

Доказательство. Д/з. □

Определение. Такое векторное подпространство называется линейная оболочка множества S, обозначается $\langle S \rangle$.

Примеры.

1. $\mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$; $\quad \langle S \rangle = \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
2. V^3, $S = \{i, j, i+j\}$



$\widetilde{s} = \{i + j\}$

Определение. Если $V = \langle S \rangle$, то S называется порождающим множеством векторного простанства V. Говорят векторное пространство V порождается множеством S.

Определение. Если $\exists$ конечное множество S, т.ч. $V = \langle S \rangle$, то V называется конечномерным (конечнопорожденным), иначе бесконечномерным.

Пример. $\mathbb{R}^n = \langle (1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) \rangle$

Лемма. (Переформулировка ОЛЛЗ) Пусть векторное пространство V порождается k векторами. Тогда любые $m > k$ векторов из V - ЛЗ.

2.6 Базис

V- конечномерное векторное простанство над $\mathbb{R}$

Определение. 1 Система векторов $\{e_1, ..., e_n\} \subseteq V$ называется бизисом векторного пространства V, если:

1. $\{e_1, ..., e_n\}$ - ЛНЗ
2. $V = \langle e_1, ..., e_n \rangle$, т.е. $\forall x \in V$, $\exists\, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} : x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

Эти числа $x_1, ..., x_n$ - называются координатами вектора x в базисе $\{e_1, ..., e_n\}$

Определение. 2 Система векторов $\{e_1, ..., e_n\} \subseteq V$ называется базисом векторного простанства V, если любой вектор $x \in V$ выражается через $\{e_1, ..., e_n\}$ единственным образом.

Утверждение. (Опр 1) $\Longleftrightarrow$ (Опр 2)

Доказательство. По лемме (3). □

Теорема. Всякое конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ обладает базисом. Более того, из любого конечного порожденного множества можно выбрать базис.

Доказательство. Пусть S- какое-то порожденное множество векторного пространства V.
Если S - ЛНЗ, то S - базис
Если S - ЛЗ, то по критерию о ЛЗ один из векторов S_1 множества S линейно выражается через остальные.
Тогда $S_1 = S \setminus \{s_1\}$ - конечное пораждащее множество. ч.т.д.
Т.к. S - конечное, это процесс прервется и мы получим ЛНЗ порожденную систему. □

Теорема. В любом базисе конечномерного векторного пространства V над $\mathbb{R}$ одно и тоже число векторов.

Доказательство. Пусть есть два базиса $\{e_1, ..., e_m\}$ и $\{f_1, ..., f_m\}$ векторного пространства V. Тогда каждый вектор f_i выражается через $e_1, ..., e_m$.
По ОЛЛЗ: $\{f_1, ..., f_m\}$ - ЛЗ $\Longrightarrow \{f_1, ..., f_m\}$ - не базис $\Longrightarrow$ противоречие. □

Определение. Число векторов в базисе конечномерного векторного пространства V, называется размерностью векторного простанства и обозначается: $dimV$

Примеры.

1. $dimV^2 = 2$
2. $dim\mathbb{R}^n = n$

Замечание. Если $V = 0$, то $dimV = 0$ (базис систоит из $\varnothing$)

Пусть V- векторное пространство над $\mathbb{R}$, $dimV = n$, $S \subseteq V$ Любые $m > n$ векторов в S - ЛЗ. (из ОЛЛЗ)
$\Longrightarrow$ в S $\exists$ максимальная ЛНЗ подсистема (т.е. ничего нельзя добавить к этой подсистеме без нарушения ЛНЗ)

Лемма 6. Пусть V - n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, $S \subseteq V$. Тогда максимальная ЛНЗ система векторов из S образует базис в лин. оболочке $\langle S \rangle$

Доказательство. Пусть $\{s_1, ..., s_k\}$ максимальная (по включению) ЛНЗ система в $S \Longrightarrow \forall s \in S \setminus \{s_1, ..., s_k\} \Longrightarrow \{s, s_1, ..., s_k\}$ – ЛЗ.
По Лемме (2). $\Longrightarrow s = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$
Докажем, что $\{s_1, ..., s_k\}$ базис в $\langle S \rangle$.

1. ЛНЗ (очевидно)
2. $\forall x \in \langle S \rangle$: $x = x_1 s_1 + \dots + x_k s_k$

По определению линейной оболочки x линейно выражается через вектора из S
А каждый вектор из S линейно выражается через $\{s_1, ..., s_k\}$ □

Теорема. Пусть V конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, тогда:

1. Любая максимальная ЛНЗ система векторов из V - базис V.
2. Любую ЛНЗ систему векторов из V можно дополнить до базиса векторного пространства V.

Доказательство.

1. По лемме (6). $S = V$
2. Пусть S - ЛНЗ система векторов из V

Если $V = \langle S \rangle$, тогда S- базис.
Если $V \neq \langle S \rangle$, то $\exists s_1 \in V \setminus \langle S \rangle$
$\Longrightarrow s_1$ линейно невыражается через $S \Longrightarrow$ (По лемме 2.) $S_1 = S \cup \{s_1\}$ - ЛНЗ.
$\Longrightarrow$ Если $V = \langle S \rangle$, то S_1 базис, иначе $\exists S_2 \in V \setminus \langle S_1 \rangle$, и т.д.
Этот процесс прервется на конечном шаге, т.к. пространство V- конечное. (Если $dimV \neq n,$ то $\nexists$ ЛНЗ системы с числом векторов $> n$) $\square$

Следствие. Пусть V конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$

1. Любой ненулевой вектор можно дополнить до базиса.

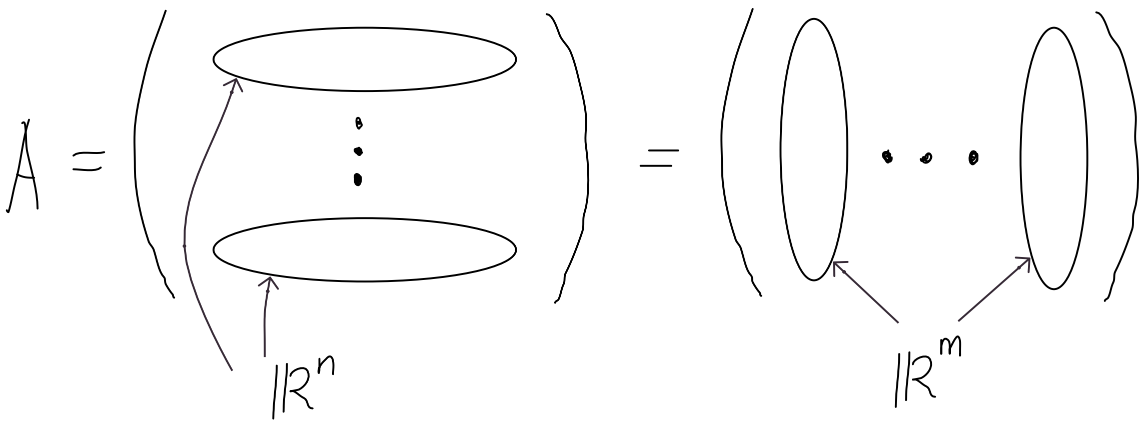
2. Любые n ЛНЗ вектора в n-мерном пространстве V образуют базис.

3 Ранг

3.1 Рангом системы векторного простанства

Определение. Рангом системы векторного простанства $S \subseteq V$ называется $dim\langle S \rangle$

A - матрица $m \times n$

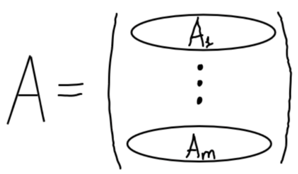


Определение. Рангом матрицы A называется ранг системы ее строк, т.е. максимальное число ЛНЗ строк матрицы.

3.2 Ранг матрицы

Определение. Ранг системы $\{s_1, ..., s_n\}$ - векторов называется $dim\langle s_1, ..., s_n \rangle$.

Определение. Рангом матрица A $m \times n$ называется ранг системы её строк.



Определение. Две системы векторов $\{v_1, ..., v_n\}$ $\{w_1, ..., w_n\}$ называются эквивалентными, если каждый вектор v_i линейно выражается через $\{w_1, ..., w_n\}$, а w_i через $\{v_1, ..., v_n\}$.
Это условная эквивалентность: $\langle v_1, ..., v_n\rangle = \langle w_1, ..., w_n\rangle$

Утверждение. При элементарных преобразованиях над строками, ранг матрицы A не изменяется.

Доказательство.

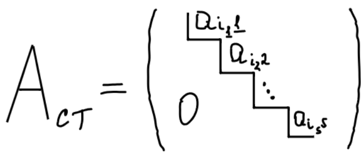
$$\langle A_1, ..., A_m\rangle = \langle \widetilde{A_1}, ..., \widetilde{A_m}\rangle$$

т.е. система строк A эквивалентна системы строк $\widetilde{A} \Longrightarrow rkA = rk\widetilde{A}$. ☐

Утверждение. При элементарных преобразованиях над столбцами, ранг матрицы A не изменяется.

Предложение 1.
Ранг матрицы A равен числу ненулевых строк матрицы струпенчатого вида, к которому можно привести матрицу A с помощью элементарных преобразований строк.

Доказательство. $A \stackrel{\text{ЭП строк}}{\longrightarrow} A_{\text{ст}} \Longrightarrow rkA = rkA_{\text{ст}}$



$a_{i_1 1}, ..., a_{i_s s}$ - лидеры строк в $A_{\text{ст}} \Longrightarrow a_{i_1 1} \neq 0, ..., a_{i_s s} \neq 0$
Очевидно, что $rkA_{\text{ст}} \leq s$. Достаточно доказать, что ненулевые строки ЛНЗ. Рассмотрим ЛК:
$\lambda_1(0, ..., 0, a_{i_1 1}, *, ..., *) + \lambda_2(0, ..., 0, a_{i_2 2}, *, ..., *) + \cdots + \lambda_s(0, ..., 0, a_{i_s s}, *, ..., *) = (0, ..., 0)$
$(0, ..., 0, \lambda_1 a_{i_1 1}, ..., \lambda_1 a_{i_2 1} + \lambda_2 a_{i_2 2}, ...) = (0, ..., 0) \Longrightarrow \lambda_1 \underbrace{a_{i_1 1}}_{\text{лидер}} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_1 a_{i_2 1} + \lambda_2 \underbrace{a_{i_2 2}}_{\text{лидер}} = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0$ и т.д.

Получаем, что $\lambda_1 = 0, ..., \lambda_s = 0 \Longrightarrow$ это ЛК - ЛНЗ. ☐

Предложение 2. Ранг системы столбцов не изменяется про элементарных преобразованиях над строками.

Доказательство. $A \overset{\text{ЭП строк}}{\longrightarrow} \widetilde{A}$. Пусть $A = (a_{ij}) = (\underbrace{A_1, ..., A_n}_{\text{столбцы } A})$ $\widetilde{A} = (\widetilde{a_{ij}}) = (\widetilde{A_1}, ..., \widetilde{A_n})$. Докажем, что если для некоторого числа $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ выполнено: $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = 0$, то для этих же чисел $\lambda_1 \widetilde{A_1} + \cdots + \lambda_n \widetilde{A_n} = 0$ (Верно и обратное, т.к. ЭП обратимы, т.е. если для каких-то чисел $\lambda_i \in \mathbb{R} : \sum \lambda_i \widetilde{A_1} = 0$, то $\sum \lambda_i A_i = 0$).

Дано: $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots + \lambda_n a_{mn} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1, ..., \lambda_m - \text{решение ОСЛУ } AX = 0.$$

Т.к. при ЭП над уравнениями множество решений не меняется, поэтому $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - это решение ОСЛУ $\widetilde{A}X = 0 \Longrightarrow \lambda_1 \widetilde{A_1} + \cdots + \lambda_n \widetilde{A_n} = 0$

Отсюда получаем, что если $A_{i_1}, ..., A_{i_s}$ - максимальная ЛНЗ система столбцов в A, то $\widetilde{A_{i_1}}, ..., \widetilde{A_{i_s}}$ - максимальная ЛНЗ система столбцов в $\widetilde{A} \Longrightarrow rk\{\widetilde{A_1}, ..., \widetilde{A_n}\}$ □

Определение. Пусть $A = (a_{ij})$ - матрица $m \times n$, тогда $B = (b_{ij})$ матрица $n \times m$ называется транспонированной к матрице A, если $b_{ij} = a_{ji}$, где $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$
Обозначаем $B = A^T$

Пример.

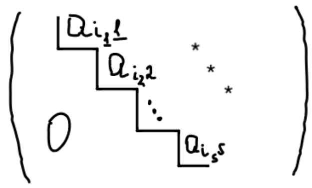
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Следствие. Ранг системы строк матрицы A (=рангу матрицы A) не изменяется при элементарных преобразованиях над столбцами.

Доказательство. Предложение 2 применяем к A^T □

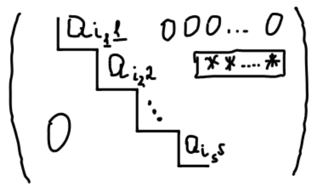
Теорема 1. Ранг системы строк матрицы A совпадает с рангом системы столбов матрицы A.

Доказательство. Было доказанно, что ранг системы строк (столбцов) матрицы не изменяется при ЭП над строками и над столбцами. Приведем матрицу A к ступенчатому виду с помощью ЭП над строками. $A_{\text{ст}}$ имеет вид:



$$a_{i_1 1} \neq 0, ..., a_{1_s s} \neq 0$$

Используем i_1-столбец, вычитая этот столбец из оставшихся с подхлодящими коэфициентами, получаем:



Далее используем i_2-столбец, обнуляем все элементы правее $a_{i_2 2}$. В итоге получаем:

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{i_s s} \end{pmatrix}$$

Очев, что у такой матрицы ранг системы строк = рангу системы столбцов. $\square$

Возвращаемся к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (AX = B)$$

Теорема. (Кронекера-Копелли)

1. (Критерий совместимости СЛУ)
   СЛУ $AX = B$ совместна $\iff rk(A|B) = rkA$

2. (Критерий определенности СЛУ)
   Совместная СЛУ $AX = B$ - определенна $\iff rk(A|B) = rkA = n$

3. (Критерий существования нетривиального решения у однородной СЛУ)
   ОСЛУ $AX = 0$ имеет нетривиальное решение $\iff rkA < n$

Однородная СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (AX = 0)$$

Утверждение. ОСЛУ всегда совместна, т.к. есть тривиальное решение.

Свойства.

1. Если $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$; $\quad \widetilde{X^0} = \begin{pmatrix} \widetilde{x_1^0} \\ \vdots \\ \widetilde{x_n^0} \end{pmatrix}$ - решение ОСЛУ,

   тогда $X^0 + \widetilde{X^0} = \begin{pmatrix} X_1^0 + \widetilde{X_1^0} \\ \vdots \\ X_n^0 + \widetilde{X_n^0} \end{pmatrix}$

2. Если $X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ - решение ОСЛУ $AX = 0$, то $\lambda X^0 = \begin{pmatrix} \lambda x_1^0 \\ \vdots \\ \lambda x_n^0 \end{pmatrix}$ - решение.

Доказательство. Д/з □

Следствие. Множество всех решений ОСЛУ является векторным подпространством в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что это пространство над ОСЛУ.

Замечание. Если $\exists$ решение ОСЛУ над $\mathbb{R}$, то $\exists$ бесконечно много решений.

Теорема 2. Пространство решений ОСЛУ $AX = 0$ имеет базис из $n - r$ векторов, где n - число неизвестных, а $r = rkA$.

Определение. Любой базис пространства решений ОСЛУ называется Фундаментальной Системой Решений (ФСР) ОСЛУ.

Доказательство. (Теоремы 2.)
Решение СЛУ методом Гаусса: приводим её к ступенчатому виду (число ступенек $r = rkA$), главные неизвестные выражаем через свободные.

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,1}x_{r+1} + \cdots + c_{1,n-r}x_n \\ \vdots \\ x_r = c_{r,1}x_{r+1} + \cdots + c_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

Определим $n-r$ частных решений приравнивая одно из $x_1, ..., x_n$ к 1, а остальные к 0.

$$F_1 = \left(\begin{array}{c} c_{11} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right), \quad F_2 = \left(\begin{array}{c} c_{12} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ \hline 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right), ..., \; F_{n-r} = \left(\begin{array}{c} c_{1,n-r} \\ \vdots \\ c_{r,n-r} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right)$$

Докажем, что $F_1, ..., F_{n-r}$ - базис пространства ренений ОСЛУ

1. $F_1, ..., F_{n-r}$ - ЛНЗ?

   Рассмотрим ЛК $\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{n-r} F_{n-r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \\ \hline \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 0, ..., \lambda_{n-r} = 0$$

2. Надо доказать, что любое решение выражено через $F_1, ..., F_{n-r}$

$$X^0 = \left(\begin{array}{c} c_{11} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ \hline \mu_{r+1} \\ \vdots \\ \mu_n \end{array}\right) = \mu_{r+1} F_1 + \cdots + \mu_n F_{n-r}$$

$\square$