



Механико-математический факультет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, 2 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 18 февраля 2025 г.

Содержание

1	Векторное пространство	2
1.1	Изменение координат вектора при замене базиса	4
2	Векторные подпространства	4
2.1	Примеры	4
2.2	Два основных способа задания подпространства в V	5
3	Пересечение и сумма подпространств	8
4	Прямая сумма подпространств и пространств	9
5	Фактор пространства	11

1 Векторное пространство

Определение 1. Множество V называется *векторным пространством* над полем F , если заданы операции " + " и " · " : $V \times V \rightarrow V$, $F \times V \rightarrow V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V : v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V \exists 1 \in F : 1 \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая?

Определение 2. $U \subset V$ - *векторное подпространство* пространства V , если оно само является пространством относительно тех же операций в V .

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $\forall U \neq \emptyset$
2. $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \lambda \in F : \lambda u \in U$

Определение 3. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно независимыми*, если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ (не все равные 0) : $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$

Утверждение. *Определение 3 $\iff (n \geq 2)$ хотя бы один вектор из векторов v_i выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение 4. *Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, \dots, e_n), e_k \in V$, если это максимальный ЛНЗ набор векторов из V .*

Утверждение. *e - базис в $V \iff$*

1. e_1, \dots, e_n - ЛНЗ

2. $\forall x \in V \exists x_1, \dots, x_n \in F : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Следствие. Разложение любого вектора в базисе единственно.

Доказательство. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) e_i$

Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем: $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда $x = eX_e = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \quad (1)$$

Теорема. Если в $V \exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.

Доказательство.

Если \exists базис $e'_1, \dots, e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ e'_1, \dots, e'_m - ЛЗ, т.е. не базис.

Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) e_1, \dots, e_n - ЛЗ \implies не базис. □

Свойства. матриц перехода

1. $\det C \neq 0$

2. $C_{e' \rightarrow e} = (C_{e \rightarrow e'})^{-1}$

3. $C_{e'' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, \dots, e'_n \implies rk C = n \implies \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.

По определению:

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C_{e \rightarrow e'}, \text{ т.е. } e' = e C_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{e' = e C_{e \rightarrow e'}} \quad (2)$$

С другой стороны

$$C = e' C_{e' \rightarrow e} = e C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} \implies C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \rightarrow e'} = (C_{e' \rightarrow e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e' C_{e' \rightarrow e''} = e(C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}) = e C_{e \rightarrow e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}$

□

Алгоритм. Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном?

$e' = e C_{e \rightarrow e'}$ можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow) C = (e_1'^\uparrow, \dots, e_n'^\uparrow)$$

$$[e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow \mid e_1'^\uparrow, \dots, e_n'^\uparrow] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \rightarrow e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$\boxed{X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}} \quad (3)$$

Доказательство.

$$\forall x \in V : x = e X_e = e' X_{e'} = e C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

$$\implies X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

□

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

1. Геометрические векторы
2. F^n - пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot \lambda)$

Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой

невыврожденной матрицы порядка n)

Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из (2))

Упражнение. Пусть $|F| = q$, $\dim_F V = n \implies |V| = q^n$
 $\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij -ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и λF

Оно бесконечномерно, если X бесконечно.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ
 Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y'_1 + \dots + C_n y'_n \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 y'_1 + \dots + \lambda_n C_n y'_n \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \implies C_1 = \dots = C_n = 0$$

4. $F[t]$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0 : 1, t, t^2, \dots$ - линейно независимы.
 $F[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \mid a_k \in F, k = 0, \dots, n; n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, \dots, t^n$
 Тейлоровский базис: $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n; \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq \emptyset, V = 2^\Omega$ с операциями вместо сложения:

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2, 0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$$

Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над \mathbb{Z}_2

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F \right\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F \right\} = U$$

Утверждение. $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \subseteq V \implies \dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle = rk\{a_1, \dots, a_m\}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu \lambda_i) a_i \\ \sum_{i=1}^m \mu_i a_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U \end{aligned}$$

Если $r = rk\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, то a_{j_1}, \dots, a_{j_r} - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \implies \{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\} - \text{базис } U$$

□

Алгоритм. Алгоритм вычисления $\dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и базиса, если известны координаты этих векторов:

1) Составить матрицу:

$$(a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\begin{array}{ccc|c} & \overbrace{j_1 \dots j_r} & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

2) Столбцы с номерами j_1, \dots, j_r - базис в U , разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы

2. ($\dim V = n$, известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^n X_i e_i = eX, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x = eX \mid AX = 0\} - \text{задание с помощью ОСЛУ}$$

Утверждение. W - подпространство в V , $\dim W = n - rkA$, базис - любая ФСР (это переход от **2.** к **1.** способу задания подпространства).

Теорема. Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве V можно задать с помощью ОСЛУ.

Доказательство. Два способа:

1) Вектор x (со столбцами координат $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, \dots, a_m \rangle = U$$

$$\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i^\uparrow = X$$

т.е. СЛУ с $\tilde{A} = (a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow \mid \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix})$ совместна \iff после алгоритма Гаусса:

$$\tilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} K & \sum_j C_{kj} X_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ & \sum C_{nj} X_j = 0 \end{array} \right)$$

(K) имеет ступенчатый вид, а $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ \sum C_{nj} X_j = 0 \end{pmatrix}$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\begin{matrix} C & X = 0, & rkC = r \\ (r \times n) \end{matrix}$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (E_r \mid D) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + \dots + d_{kn}x_n) \end{cases} \quad k = 1, \dots, r$$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов a_1, \dots, a_r :

$$\begin{pmatrix} a_1^\rightarrow \\ \vdots \\ a_r^\rightarrow \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} (M \mid E_r) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = (E_{n-r} \mid -M^T)$
Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность $n - (n - r) = r$

□

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

1. Если U_i ($i \in I$) - подпространство V , то $W = \bigcap_{i \in I} U_i$ - тоже подпространство в V
2. Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств. (РИСУНОК)

Доказательство. 1. $\overline{Q} \in W$, т.к. $\overline{Q} \in U_i, \forall i \in I$.

Если $x, y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Если $x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \implies \lambda x \in U_i, \forall i \in I \implies x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ □

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2 , то оно содержит и сумму $u_1 + u_2$, если $u_i \in U_i, i = 1, 2$

Замечание. Суммой подпространств $U_1, \dots, U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + \dots + U_m = \{x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. $U_1 + \dots + U_m$ - подпространство в V

Теорема. (Формула Грассмана)

Если U_1, U_2 - подпространства в $V, \dim U_1 < \infty, \dim U_2 < \infty$, то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i, \dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем c_1, \dots, c_s - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами a_1, \dots, a_{n_1-s} и до базиса в U_2 векторами b_1, \dots, b_{n_2-s} .

Тогда векторы $c_1, \dots, c_s, a_1, \dots, a_{n_1-s}, b_1, \dots, b_{n_2-s}$ - образуют базис в $U_1 + U_2$

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = (\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i) + (\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = - \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow a_i$ - ЛНЗ

$\Rightarrow \forall i : \alpha_i = 0$

Тогда $\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0 \Rightarrow \{b_k, \gamma_j\}$ - ЛНЗ $\Rightarrow \forall k, j : \beta_k = \gamma_j = 0$

Алгоритм. Пусть $U_1 = \langle a_1, \dots, a_{n_1} \rangle$, $U_2 = \langle b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$ известны координаты. Составим матрицу:

$$\left(A \mid B \right) = \left(a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_{n_2}^\uparrow \right)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$$

$$\left(A \mid B \right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{n_2-m}^\uparrow \right)$$

Можно записать:

$$b_i = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k \Rightarrow b_j - \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

□

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение 5. Сумма $U_1 + \dots + U_m$ подпространств $U_i \subset V$, $1 \leq i \leq m$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$ представим в виде:

$u = u_1 + \dots + u_m$ ($u_i \in U_i$) единственным образом

Пусть $m = 2$, V - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U = U_1 + U_2$ - прямая сумма
2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис $U_1 + U_2$ - объединение базисов слагаемых

Доказательство.

1. \rightarrow 2. Допустим $u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow v = v + 0 = 0 + v \Rightarrow v = 0$

2. \rightarrow 3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_0$$

3. \rightarrow 4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \Rightarrow \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$
$$\Rightarrow \text{все } a_i \text{ и } b_i \text{ равны нулю}$$

4. \rightarrow 1. $\forall u \in U_1 + U_2$:

$$u = \left(\sum_i \alpha_i a_i \right) + \left(\sum_j \beta_j b_j \right)$$

- разложение по базису единственно

□

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U = U_1 + U_2$ - прямая сумма
2. $\forall i, 1 \leq i \leq m, U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис $U_1 + U_2$ - объединение базисов слагаемых

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\}, i \neq j$ недостаточно для прямой суммы: (РИСУНОК)

v_1, v_2, v_3 - ЛЗ \Rightarrow представление не единственным образом

Лемма. Любой ЛНЗ набор векторов a_1, \dots, a_m в n -мерном векторном пространстве V ($m < n$) можно дополнить до базиса в V .

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, \dots, e_n \Rightarrow rk\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & E_n \end{array} \right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left(\begin{array}{ccc|c|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & e_{i,1}^\uparrow & e_{j,n-m}^\uparrow & \cdots \end{array} \right)$$

Тогда к векторам a_1, \dots, a_m надо добавить $e_{j,1}, \dots, e_{j,n-m}$

□

Определение 6. Если U - подпр-во в V ($0 \neq U \neq V$) и $\exists W \subset V : V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U .

Следствие. Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве \exists прямые дополнения.

Доказательство. $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \implies \exists a_{m+1}, \dots, a_n : \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ - базис в V , тогда $W = \langle a_{m+1}, \dots, a_n \rangle$ □

Определение 7. Пусть V_1, \dots, V_k ($k \geq 2$) - векторы пространства над одним и тем же полем F , тогда:

$$V = V_1 \times \dots \times V_k = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{внешняя прямая сумма}$$

Обозначение: \oplus

Замечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V'_i = \{0, \dots, v_i, \dots, 0\} - \text{подпространство в } V$$

Запись $v_1, \dots, v_k \stackrel{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, v_k)$ показывает, что $V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_k$ - единственно.

$$\text{В частности } \dim(V_1) \oplus \dots \oplus V_k = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

Фактор пространства \mathbb{Z}

5 Фактор пространства

Определение 8. Пусть $U \subset V$ - подпространство. Скажем, что $V_1 \sim V_2$ по модулю U , если $v_1 - v_2 \in U$ ($v_1, v_2 \in V$). Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U , где v - представитель

$$* V/U = \{\underbrace{v + U}_{\bar{v}} \mid u \in U\}$$