Lomonosov Moscow State University

Механико-математический факультет

Линейная алгебра и геометрия, 2 семестр, 2 поток

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва

Последняя компиляция: 25 марта 2025 г.

Содержание

1 Векторное пространство

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F, если заданы операции "$+$" и "$\cdot$" : $V\times V\to V$, $F\times V\to V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1,v_2,v_3\in V\ :\ (v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$
2. $\exists\,\vec{0}\in V:\ \forall v\in V\ :\ v+\vec{0}=v$
3. $\forall v\in V\ \ \exists-v\in V$: $v+(-v)=\vec{0}$
4. $\forall v_1,v_2\in V\ :\ v_1+v_2=v_2+v_1$
5. $\forall\alpha,\beta\in F, v\in V\ :\ (\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$
6. $\forall v\in V\ \exists\,1\in F\ :\ 1\cdot v=v$
7. $\forall\alpha,\beta\in F, v\in V\ :\ (\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$
8. $\forall\alpha\in F, v_1,v_2\in V\ :\ \alpha(v_1+v_2)=\alpha v_1+\alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая?

Доказательство. Сначала докажем два свойства.

1. $0\cdot\overline{a}=0\cdot\overline{a}+\overline{0}=0\cdot\overline{a}+(0\cdot\overline{a}+(-0\cdot\overline{a}))=(0\cdot\overline{a}+0\cdot\overline{a})+(-0\cdot\overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $=0\cdot\overline{a}+(-0\cdot\overline{a})=\overline{0}$
2. $(-1)\overline{a}+\overline{0}=(-1)\overline{a}+(\overline{a}+(-\overline{a}))=((-1)\overline{a}+\overline{a})+(-\overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $=0\cdot\overline{a}+(-\overline{a})=-\overline{a}$.

Теперь докажем первую аксиому (аксиому коммутативности).

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{0}=(\overline{a}+\overline{b})+(-(\overline{b}+\overline{a})+(-(-(\overline{b}+\overline{a})))=$$

(по второму свойству)

$$=(\overline{a}+\overline{b})+(-(\overline{b}+\overline{a})+(\overline{b}+\overline{a}))=$$

(по аксиоме ассоциативности)

$$=(\overline{a}+\overline{b}+(-(\overline{b}+\overline{a})))+(\overline{b}+\overline{a})=(((\overline{a}+\overline{b})+(-(\overline{b})))+(-\overline{a}))+(\overline{b}+\overline{a})=$$
$$=((\overline{a}+(\overline{b}+(-(\overline{b})))))+(-\overline{a}))+(\overline{b}+\overline{a})=((\overline{a}+\overline{0})+(-\overline{a}))+(\overline{b}+\overline{a})=$$
$$(\overline{a}+(-\overline{a}))+(\overline{b}+\overline{a})=\overline{0}+(\overline{b}+\overline{a})=\overline{b}+\overline{a}$$

□

Определение. $U \subset V$ - *векторное подпространство* пространства V, если оно само является пространством относительно тех же операций в V.

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $\forall U \neq \emptyset$
2. $\forall u_1, u_2 \in U \ \ : \ u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \ \lambda \in F \ \ : \ \lambda u \in U$

Определение. Векторы $v_1, ..., v_n \in V$ называются линейно зависимыми, если $\exists \ \lambda_1, ..., \lambda_n$ (не все равные 0) $: \ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$

Утверждение. *Определение 3* $\iff$ *(*$m \geq 2$*) хотя бы один вектор из векторов* v_i *выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение. Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, ..., e_n), e_k \in V$ называется базисом V, если e - максимальный ЛНЗ набор веторов из V.

Утверждение. e *- базис в* $V \iff$

1. $e_1, ..., e_n$ *- ЛНЗ*
2. $\forall x \in V \ \exists \ x_1, ..., x_n \in F \ \ : \ x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

Следствие. *Разложение любого вектора в базисе единственно.*

Доказательство. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) e_i$
Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

$$\text{Обозначаем: } X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n, \text{ тогда } x = eX_e = e_1 x_1 + ... + e_n x_n$$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

Теорема. *Если в* V $\exists$ *базис из* k *векторов, то любой базис* V *содержит* k *векторов.*

Доказательство.
Если $\exists$ базис $e'_1, ..., e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ $e'_1, ..., e'_m$ - ЛЗ, т.е. не базис.
Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) $e_1, ..., e_n$ - ЛЗ $\Longrightarrow$ не базис. □

Свойства. *матриц перехода*

1. $\det C \neq 0$

2. $C_{e' \to e} = (C_{e \to e'})^{-1}$

3. $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, ..., e'_n \Longrightarrow rkC = n \Longrightarrow \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.
По определению:

$$e' = (e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)C_{e \to e'}, \text{ т.е. } e' = eC_{e \to e'}$$

$$\boxed{e' = eC_{e \to e'}} \tag{2}$$

С другой стороны

$$e = e'C_{e' \to e} = eC_{e \to e'}C_{e' \to e} \Longrightarrow C_{e \to e'}C_{e' \to e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \to e'} = (C_{e' \to e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e'C_{e' \to e''} = e(C_{e \to e'}C_{e' \to e''}) = eC_{e \to e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e \to e''} = C_{e \to e'}C_{e' \to e''}$

□

Алгоритм. *Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов* e_i *и* e'_j *в некотором универсальном базисе?*
$e' = eC_{e \to e'}$ *можно рассмотреть как матричное уравнение:*

$$(e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow})C = (e_1'^{\uparrow}, ..., e_n'^{\uparrow})$$

$$[e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow} \mid e_1'^{\uparrow}, ..., e_n'^{\uparrow}] \overset{строк}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \to e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. *Формула изменения координат вектора при замене базиса:*

$$\boxed{X_e = C_{e\to e'}X_{e'}} \tag{3}$$

Доказательство.

$$\forall x \in V \ : \ x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e\to e'}X_{e'}$$

$$\Longrightarrow X_e = C_{e\to e'}X_{e'}$$

□

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

1. Геометрические векторы

2. F^n - пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot\lambda)$

   Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой невырожденной матрицы порядка n)

   Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из **(2)**)

   Упражнение. Пусть $|F| = q, \ \dim_F V = n \Longrightarrow |V| = q^n$
   $\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij-ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F : \underset{(X\subseteq\mathbb{R})}{X} \to \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и λF
   Оно бесконечномерно, если X бесконечно.
   Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ
   Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1y_1 + ... + C_ny_n \equiv 0 \\ C_1y_1' + ... + C_ny_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1e^{\lambda_1 x} + ... + C_ne^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1C_1e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda_nC_ne^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1}C_1e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda_n^{n-1}C_ne^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0 \Longrightarrow C_1 = ... = C_n = 0$$

4. $F[t]$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0 : \; 1, t, t^2, ...$ - линейно независимы. $F[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \mid a_k \in F, \; k = 0, ..., n; \; n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, ..., t^n$
   Тейлоровский базис: $1, t - t_0, ..., (t - t_0)^n$; $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq 0, \; V = 2^{\Omega}$ с операциями вместо сложения:

$$A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \; \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2, \; 0 \cdot A = \emptyset, \; 1 \cdot A = A$$

   Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \{\sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, ..., a_m \rangle = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F\} = U$$

Утверждение. $\langle a_1, ..., a_m \rangle \subseteq V \Longrightarrow \dim \langle a_1, ..., a_m \rangle = rk\{a_1, ..., a_m\}$

Доказательство.

$$\mu \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu \lambda_i) a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U$$

Если $r = rk\langle a_1, ..., a_m \rangle$, то $a_{j1}, ..., a_{jr}$ - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \Longrightarrow \{a_{j1}, ..., a_{jr}\} - \text{базис } U$$

□

Алгоритм. *Алгоритм вычисления* $\dim\langle a_1, ..., a_m\rangle$ *и базиса, если известны координаты этих векторов:*

1) Составить матрицу:

$$(a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow}) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \begin{array}{c} \overbrace{\quad j_1 \ \cdots \ j_r \quad} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

2) Столбцы с номерами $j_1, ..., j_r$ *- базис в* U*, разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы*

2. ($\dim V = n$, известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = eX,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x = eX \mid x \in V,\ AX = 0\} - \text{ задание с помощью ОСЛУ}$$

Утверждение. W *- подпространство в* V*,* $\dim W = n - rkA$*, базис - любая ФСР (это переход от* ***2.*** *к* ***1.*** *способу задания подпространства).*

Теорема. *Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве* V *можно задать с помощью ОСЛУ.*

Доказательство. Два способа:

1) Вектор x (со столбцами координат $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, ..., a_m\rangle = U$$

$$\iff \exists\ \alpha_1, ..., \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = x,\ \text{или в координатах: } \sum_{i=1}^{m} \alpha_1 a_i^{\uparrow} = x$$

т.е. СЛУ с $\widetilde{A} = (a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})$ совместна $\iff$ после алгоритма Гаусса:

$$\widetilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} K & \sum\limits_j C_{kj} x_j \\ \hline 0 & \begin{array}{c} \sum C_{r+1,j} x_j = 0 \\ \sum C_{nj} x_j = 0 \end{array} \end{array}\right)$$

$\left(K\right)$ имеет ступенчатый вид, а $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1,j}x_j = 0 \\ \sum C_{nj}x_j = 0 \end{pmatrix}$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\underset{(r\times n)}{C} X = 0,\ rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(E_r \ \middle|\ D\right) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + ... + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + ... + d_{kn}x_n) \end{cases} \qquad k = 1, ..., r$$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \left(\dfrac{-D}{E_{n-r}}\right)$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов $a_1, ..., a_r$:

$$\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_r} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} \left(M \ \middle|\ E_r\right) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \left(\dfrac{M^T}{E_r}\right) = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = \left(E_{n-r} \ \middle|\ -M^T\right)$
Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность $n - (n - r) = r$

□

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

1. *Если U_i $(i \in I)$ - подпространство V, то $W = \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ - тоже подпространство в V*

2. *Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств. (РИСУНОК)*

Доказательство. 1. $\overline{0} \in W$, т.к. $\overline{0} \in U_i,\ \forall i \in I$.

Если $x, y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$

Если $x \in U_i,\ \forall i \in I,\ \forall \lambda \in F \Longrightarrow \lambda x \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow \lambda x \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ □

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2, то оно содержит и сумму u_1+u_2, если $u_i \in U_i,\ i = 1, 2$

Определение. Суммой подпространств $U_1, ..., U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + ... + U_m = \{x_1 + ... + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. *$U_1 + ... + U_m$ - подпространство в V*

Теорема. *(Формула Грассмана)*
Если U_1, U_2 - подпространства в V, $\dim U_1 < \infty$, $\dim U_2 < \infty$, то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i$, $\dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем $c_1, ..., c_s$ - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами $a_1, ..., a_{n_1-s}$ и до базиса в U_2 векторами $b_1, ..., b_{n_2-s}$.
Тогда векторы $c_1, ..., c_s, a_1, ..., a_{n_1-s}, b_1, ..., b_{n_2-s}$ - образуют базис в $U_1 + U_2$

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = (\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i) + (\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^{s} \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = -\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^{s} \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\} \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow a_i$ - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i:\ \alpha_i = 0$
Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum\limits_{j=1}^{s} \gamma_j c_j = 0 \Longrightarrow \{b_k, \gamma_j\}$ - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall k, j:\ \beta_k = \gamma_j = 0$

Алгоритм. *Пусть $U_1 = \langle a_1, ..., a_{n_1} \rangle$, $U_2 = \langle b_1, ..., b_{n_2} \rangle$ известны координаты. Составим матрицу:*

$$\begin{pmatrix} A & \Big| & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} & \Big| & b_1^{\uparrow}, ..., b_{n_2}^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$

$$\begin{pmatrix} A & \Big| & B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \begin{pmatrix} a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} & \Bigg| & \underbrace{b_1^{\uparrow}, ..., b_m^{\uparrow}}_{\text{попало в базис}}, b_{m+1}^{\uparrow}, ..., b_{n_2-m}^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

Можно записать:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_j} b_k \Longrightarrow b_j - \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

$\square$

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение. Сумма $U_1 + ... + U_m$ подпространств $U_i \subset V,\ 1 \le i \le m$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + ... + U_m$ представим в виде:
$u = u_1 + ... + u_m$ $(u_i \in U_i)$ единственным образом

Пусть $m = 2, V$ - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. $U = U_1 + U_2$ *- прямая сумма*
2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. *Базис* $U_1 + U_2$ *- объединение базисов слогаемых*

Доказательство.

1. $\to$ 2. Допустим $v \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow v = \underset{\in U_1}{v} + 0 = 0 + \underset{\in U_2}{v} \Longrightarrow v = 0$

2. $\to$ 3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{0}$$

3. $\to$ 4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \Longrightarrow \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$\Longrightarrow \text{все } \alpha_i \text{ и } \beta_i \text{ равны нулю}$$

4. $\to$ 1. $\forall u \in U_1 + U_2:$

$$u = (\sum_i \alpha_i a_i) + (\sum_j \beta_j b_j)$$

- разложение по базису единственно

$\square$

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. $U = U_1 + U_2 + ... + U_n$ *- прямая сумма*

2. $\forall i,\ 1 \le i \le m,\ U_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} U_j) = \{0\}$

3. $\dim(U_1 + U_2 + ... + U_n) = \dim U_1 + \dim U_2 + ... + \dim U_n$

4. *Базис* $U_1 + U_2 + ... + U_n$ *- объединение базисов слогаемых*

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\},\ i \neq j$ недостаточно для прямой суммы: (РИСУНОК)
v_1, v_2, v_3 - ЛЗ $\Longrightarrow$ представление не единственным образом

Лемма. *Любой ЛНЗ набор векторов* $a_1, ..., a_m$ *в* n*-мерном векторном пространстве* V $(m < n)$ *можно дополнить до базиса в* V*.*

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, ..., e_n \Longrightarrow rk\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(a_1^{\uparrow} \ \cdots a_m^{\uparrow} \ \Big| \ E_n\right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left(a_1^{\uparrow} \ \cdots a_m^{\uparrow} \ \Big| \ e_{i,1}^{\uparrow} \ \Big| \ e_{j,n-m}^{\uparrow} \ \cdots\right)$$

Тогда к векторам $a_1, ..., a_m$ надо добавить $e_{j,1}, ..., e_{j,n-m}$

$\square$

Определение. Если U - подпр-во в V $(0 \neq U \neq V)$ и $\exists\ W \subset V\ :\ V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U.

Следствие. *Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве* $\exists$ *прямые дополнения.*

Доказательство. $U = \langle a_1, ..., a_m \rangle \Longrightarrow \exists\ a_{m+1}, ..., a_n\ :\ \langle a_1, ..., a_n \rangle$ - базис в V, тогда $W = \langle a_{m+1}, ..., a_n \rangle$ $\square$

Определение. Пусть $V_1, ..., V_k$ $(k \ge 2)$ - векторы пространства над одним и тем же полем $\mathbb{F}$, тогда:

$$V = V_1 \times ... \times V_k = \{(v_1, ..., v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \le i \le k\} - \text{ внешняя прямая сумма}$$

Обозначение: $\overset{\oplus}{\circ}$

Замечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \overset{\oplus}{\circ} ... \overset{\oplus}{\circ} V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V_i' = \{0, ..., .v_i, ..., 0\} - \text{ подпространство в } V$$

Запись $v_1, ..., v_k \overset{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, ..., 0) + (0, v_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, 0, ..., v_k)$ показывает, что $V = V_1' \oplus ... \oplus V_k'$ - единственно.
В частности $\dim(V_1 \overset{\oplus}{\circ} ... \overset{\oplus}{\circ} V_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim V_i$

Фактор пространства

Определение. Пусть $U \subset V$ - подпространство. Скажем, что $V_1 \sim V_2$ по модулю U, если $v_1 - v_2 \in U$ $(v_1, v_2 \in V)$. Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U, где v - представитель
$* \; V/U = \{\underbrace{v + U}_{\overline{v}} \mid u \in U\}$

Утверждение. $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

Доказательство.

$\underline{\Rightarrow}$: Если $v_1 \sim v_2$, то $\exists \; u_0 \in V : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Longrightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \; \forall u \in U \; v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Longrightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

$\underline{\Leftarrow}$: Если $v_1 + U = v_2 + U$, то $\exists u_1 \in U : \; v_1 = v_2 + u_1 \Longrightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

Определение. $v + U$ - смежный класс элемента v по U : $\bar{v} := v + U$

Определение. $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ - факторпространство V по U.

Определение. Структура векторного пространства на V/U:

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda \overline{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

Определение. $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V
Обозначается: $\mathrm{Codim}_V U$

Пример. Пусть $V = C[a,b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0,\ x_0 \in [a,b]\} \Longrightarrow \mathrm{Codim}_V U = 1$$

Теорема.

1. *Данные операции задают на V/U векторное пр-во;*
2. *Если $\dim V < \infty$, то $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$*

Доказательство.

1) Проверим корректность определений.
Если $v_1' = v_1 + \overline{\overline{U_1}},\ v_2' = v_2 + \overline{U_2},\ \overline{\overline{u_i}} \in U,\ i = 1,2\ :$

$$v_1' + v_2' = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v_1' + v_2' \sim v_1 + v_2,\ \text{т.е. } v_1' + v_2' + \underline{\underline{U}} = v_1 + v_2 + \underline{\underline{U}}$$
$$\overline{v_1'} + \overline{v_2'} = \overline{v_1' + v_2'} = \overline{v_1 + v_2}$$

т.е. определение не зависит от выбора элемента в классе.
Если

$$v' = v + u,\ u \in U \Longrightarrow \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \Longrightarrow \lambda v \sim \lambda v';\ \overline{0} \in U;\ -\overline{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполенены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис $a_1, ..., a_m$ в U
Если $U = V$, т.е. $m = n = \dim V$, то $V \backslash U = \{0\} \Longrightarrow \dim(V \backslash U) = n - n = 0$
Пусть $m < n$, можно дополнить базис U до базиса $a_{m+1}, ..., a_n$ в V, тогда классы $\overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ образуют базис в $V \setminus U$

$$\forall v \in V\ :\ v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j$$

$$\overline{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{a_j}$$

$\Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ порождают $V \setminus U$
Проверим ЛНЗ:

$$\exists\ \lambda_j \in \mathbb{F}\ :\ \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{a_j} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j \in U$$

$$\exists\ \mu_i \in \mathbb{F}\ :\ \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i = 0$$

Т.к. $\{a_1, ..., a_n\}$ ЛНЗ, то $\lambda_j = 0,\ \mu_i = 0,\ \forall i, j \Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ - ЛНЗ

□

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется линейным отображением V_1 в V_2, если:

1. $\forall v_1, v_1' \in V_1\ :\ \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1');$
2. $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F}\ :\ \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v);$

Из курса I семестра известно, что $\varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$
Обозначается: $\mathrm{Ker}(\varphi)$ - ядро φ

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\},\ \mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$$

5 Линейные функции

Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{F}$

Определение. Отображение $f:\ V \to \mathbb{F}$ - линейная функция со значениями в $\mathbb{F}$, если:

1. $\forall v_1,\ v_2 \in V:\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) = f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \forall \lambda:\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается: $V^* = \{f:\ V \to \mathbb{F}\}$ - множество линейных функций на V

Замечание. $V_2 = \mathbb{F},\ \dim V_2 = 1$

Лемма. *Если $f \not\equiv 0$, то Ker(f) имеет в V коразмерность = 1*

Доказательство. Пусть $\exists v_1 \in V,\ f(v_1) \neq 0$. Пусть $v \in V$, либо $v \in \mathrm{Ker}(f)$, либо $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Longrightarrow f(\frac{v_1}{\beta}) = 1,\ f(\alpha - \frac{v_1}{\beta}) = \alpha$$

Рассмотрим выражение $r - \frac{\alpha}{\beta}v_1$:

$$f(r - \frac{\alpha}{\beta}v_1) = f(v) - f(\frac{\alpha}{\beta}v_1) = \alpha - \alpha = 0$$

$\Longrightarrow r - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ и $v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u,\ u \in \mathrm{Ker}(f)$ □

Замечание. $\forall x \in V: \ (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Лемма. *Множество V^* с введенными операциями - векторное пространство.*

Определение. V^* - векторное пространство, сопряженное с V (двойственное для V)

Зафиксируем базис $e = (e_1, ..., e_n)$ в V и линейную функцию $f: V \to F$

$$\forall x \in V: \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \text{ где } a_i = f(e_i)$$

Удобно записывать это так: $f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Определение. Координатные функции - функции вида:

$$f_i: \ f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение: $e^i = f_i$

В частности: $f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$

Утверждение. *Функции e^i - базис в V^**

Доказательство.

Докажем ЛНЗ: Пусть $\exists \ \lambda_1, ..., \lambda_n: \ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e^i \equiv 0$. Подставим e_j:

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех $e_1, ..., e_n$ получим, что $\forall i = 1, ..., n: \ \lambda_i = 0$. Разложим произвольную функцию $f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i e^i)(x) \ \ \forall x \in V \ f \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i e^i$$

□

Следствие. *Если* $\dim V < \infty$, *то* $V^* \cong V$, *т.к.* $\dim V^* = \dim V$.

Определение. Базис $e^* = (e^1, ..., e^n)$ называется базисом V^*, сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису e в V.

Посмотрим, как изменится строка координат функции $f \in V^*$ при замене базиса e в V.
Пусть $e' = (e'_1, ..., e'_n) = e \cdot C_{e\to e'}$ - новый базис в V. Как известно, $X = C_{e\to e'} \cdot X'$. Отсюда если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, то

$$\forall f \in V: \ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i$$

$$f(x) = (a_1, ..., a_n)X = (a_1, ..., a_n)(C_{e\to e'}X') = ((a_1, ..., a_n)C_{e\to e'})X'$$

$$((a_1, ..., a_n)C_{e\to e'})X' = ((a'_1, ..., a'_n))X' \ \ \forall X' \in \mathbb{F}^n$$

Беря по очереди $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, покоординатно получим равенство

$$(a_1, ..., a_n)C_{e\to e'} = (a'_1, ..., a'_n)$$

Пример. Возьмём $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$
Выберем в нём базис $\{1, (t - t_0), ..., (t - t_0)^n\} \Longrightarrow p(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}(t - t_0)^i$
Если $e_i = (t - t_0)^i, \ 0 \leqslant i \leqslant n$, то $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

Определение. Вторым сопряжённым пространством к V (обозначается V^{**}) называется пространство, сопряженное к V^* - пространство линейных функций от линейных функций над V.

$$V^{**} = \{\varphi : \ V^* \to \mathbb{F}\}$$

Теорема. *Если* $\dim V < \infty$, *то* $V^{**} \cong V$, *причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).*

Доказательство. Рассмотрим отображение:

$$\varphi : V \to V^{**} : \ \forall x \in V : \ \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**}$$

$$\Longrightarrow \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

- $\forall f \in V^*, \ \varphi_{x_1+x_2}(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Longrightarrow \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$;
- $\forall f \in V^*, \ \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\varphi_x(f) \Longrightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;

Чтобы проверить, что φ - изоморфизм, достаточно проверить, что $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ (так как $\dim V^{**} = \dim V$).
Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, т.е. $\varphi_x \equiv 0$. Значит, $\forall f \in V^* : \ f(x) = 0$
Если $x \neq 0$, то его можно дополнить до базиса: $x, e_2, ..., e_n$, где $n = \dim V$.
Тогда $e^1(x) = 1 \neq 0$ - противоречие с условием $\forall f \in V^* : \ f(x) = 0$. $\square$

Задача. Доказать, что $a_1, ..., a_n \in V$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ лин. ф-ции $f^1, ..., f^n \in V^*$ такие, что $\det(f^i(a_j)) \neq 0$.

Замечание. Если $dimV = \infty$, то $V^* \ncong V$ в общем случае.

Пример. $V = \mathbb{Q}[t]$ - V счётно. Зафиксируем число $t \in \mathbb{Q}$ и рассмотрим произвольную $f \in V^*$:
$f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, ..., b_k, ...) \Rightarrow V^*$ континуально.
Отсюда мощность V^* больше мощности V, и они, очевидно, не изоморфны.

6 Линейные отображения и их матрицы

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства, $\varphi : V_1 \to V_2$ - линейное отображение.

Пример.
$V_1 = D(a, b)$ - множество дифиренцированных функций над полем $\mathbb{R}$
$V_2 = F(a, b)$ - функции на (a, b) над полем $\mathbb{R}$
$\varphi(f) = \frac{df}{dt}, \ \varphi : \ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$
Частный случай: $V_1 = \mathbb{R}[t]_n, \ V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$
$\varphi(f) = f'$ - линейное отображение (взяли производную)
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$. Является ли φ сюрьекцией?
$\forall p(t) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} t^{n-1}$
$f'(t) = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + ... + a_{n-1} \frac{t^n}{n} \Longrightarrow \varphi$ - сюрьекция

Теорема. *Если* $\varphi : \ V_1 \to V_2$ *- линейное отображение,* $\dim V_1 < \infty$*, то*

$$\dim(Im\,\varphi) = \dim V_1 - \dim(Ker\,\varphi)$$

Доказательство. Пусть $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = m$ $(m \leq n = \dim V_1)$
Выберем $c_1, ..., c_m$ - базис в $\mathrm{Im}\,\varphi \Longrightarrow \exists\ a_1, ..., a_m \in V_1 : \ \varphi(a_i) = c_i, \ i = \overline{1, m}$
Так же выберем базис $b_1, ..., b_k$ в $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (если $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, то $\mathrm{Im}\,\varphi \cong V_1$)
Покажем, что $\{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_k\}$ - базис в V_1:

Пусть $\alpha_i,\ \beta_j:\ \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{k}\beta_j b_j = 0_{V_1}$, тогда:

$$\varphi(\sum_i + \sum_j) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(a_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\beta_j\varphi(b_j)}_{0_{V_2}} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i c_i = \varphi(0_{V_1}) = 0_{V_2}$$

Т.к. c_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i = \overline{1,m}:\ \alpha_i = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{k} b_j\beta_j = 0$

Т.к. b_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall j = \overline{1,k}:\ \beta_j = 0$

$$\forall v \in V_1:\ \varphi(v) = \sum_{l=1}^{m}\gamma_l c_l = \varphi(\sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l) \Longrightarrow v - \sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l \in \operatorname{Ker}\varphi$$

$$\Longrightarrow \exists\beta_j \in \mathbb{F}:\ v = \sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l + \sum_{j=1}^{k}\beta_j b_j$$

$\square$

7 Матрицы линейного отображения

Пусть: $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ - базис в V_1; $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ - базис в V_2

$$\forall x \in V_1:\ x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Longrightarrow \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j\varphi(e_j) =$$

$$= \{\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} f_i$$

Определение. Назовем $A = (a_{ij}) = A_{\varphi,e,f}$ - матрицей φ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Обозначается: $Y_f = A_{\varphi,e,f}\cdot X_e$ (где $Y = \varphi(x)$).

Замечание. Для линейного оператора $\varphi:\ V \to V,\ A_{\varphi,e} \equiv A_{\varphi,e,e}$

Алгоритм. *Вычисление* (a_{ij}) *с помощью матрицы* A_φ :

1. $Ker\,\varphi = \{x = \mathcal{E}\cdot x_{\mathcal{E}}\ :\ A_\varphi \cdot x_{\mathcal{E}} = 0\};\ \dim(Ker\,\varphi) = n - rkA_\varphi$
2. $Im\,\varphi = \langle\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)\rangle = \{y = f\cdot Y_f\ :\ Y_f = A_\varphi\cdot x_{\mathcal{E}}\}$
   $Y \in Im\,\varphi \Longleftrightarrow$ *СЛУ* $A_\varphi\cdot x_{\mathcal{E}} = Y$ *совместна* $\Longrightarrow \dim(Im\,\varphi) = rkA_\varphi$
   (т.е. не зависит от базиса);
3. $\dim Im\,\varphi + \dim\,[Ker\,(Ker\,\varphi)] = \dim V_1$

7.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат

Пусть в $V_1: \ \mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ - старый базис, а $\mathcal{E}' = (e_1', ..., e_n')$ - новый. В $V_2: \ \mathcal{F} = (f_1, ..., n)$ - старый базис, а $\mathcal{F}' = (f_1', ..., f_n')$ - новый.

Утверждение.

$$A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C$$

Доказательство. Воспользуемся формулами связи координат векторов:

$$\forall x \in V_1: \ x_{\mathcal{E}} = \underbrace{C_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}}_{C} \cdot x_{\mathcal{E}'} \text{ и } \ \forall y \in V_2: \ y_{\mathcal{F}} = \underbrace{C_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'}}_{D} \cdot x_{\mathcal{F}'}$$

Тогда формулы имеют вид:

$$Y_{\mathcal{F}} = \underset{(*)}{A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}}} \cdot x_{\mathcal{E}} \text{ и } \ Y_{\mathcal{F}'} = \underset{(**)}{A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'}} \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Умножим $(*)$ слева на D^{-1}, а также запишем выражение $x_{\mathcal{E}}$ через $x_{\mathcal{E}'}$:
$\forall x_{\mathcal{E}'} \in F^n$:

$$D^{-1} \cdot Y_{\mathcal{F}} = D^{-1} \cdot (A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'} \Longleftrightarrow Y_{\mathcal{F}'} = (D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Возьмем $x_{\mathcal{E}'} = E_j, \ j = 1, ..., n$ □

Замечание. Для линейного оператора $\varphi: \ V \to V$:

$$A_{\varphi,\mathcal{E}'} = C^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$$

Следствие.

1. $rk\, A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = rk\, A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}}$;
2. $\det(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = \det(A_{\varphi,\mathcal{E}})$
3. $tr\,(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = tr\,(A_{\varphi,\mathcal{E}})$

Доказательство.

1. Т.к. матрицы C и D невырожденные, то при умножении на них ранг матрицы не изменяется.

$$\begin{cases} B = A \cdot C \Longrightarrow \operatorname{rk} B \leq \operatorname{rk} A \\ A = (A \cdot C) \cdot C^{-1} \Longrightarrow \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk}(AC) \end{cases} \quad \Longrightarrow \underbrace{\operatorname{rk}(AC) \leq \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk}(AC)}_{\operatorname{rk}(AC) = \operatorname{rk} A}$$

2. Произведение определителей

3. $\mathrm{tr}\,(AC) = \mathrm{tr}\,(CA) \Longrightarrow \mathrm{tr}\,\left[C^{-1}\cdot(AC)\right] = \mathrm{tr}\,\left[(AC)\cdot C^{-1}\right] = \mathrm{tr}\,A$

$\square$

Теорема. *Пусть* $a_1, ..., a_n$ *- ЛНЗ векторы в* V_1 $(\dim V_1 = n)$, $b_1, ..., b_n$ *- случайные векторы в* V_2 $(\dim V_2 = m)$. *Тогда* $\exists!$ *линейное отображение* $\varphi:\ V_1 \to V_2:$ $\varphi(a_j) = b_j,\ j = 1, ..., n$

Доказательство.
Пусть в некотором базисе $\mathcal{E}$ пространства V_1 вектор $a_j \sim a_j^{\uparrow}$ - столбец координат, в базисе f пространства V_2 вектор $b_j \sim b_j^{\uparrow}$
По условию, $\forall j = 1, ..., n:\ \ A_\varphi \cdot a_j^{\uparrow} = b_j^{\uparrow} \Longrightarrow A_\varphi(a_1^{\uparrow}, ..., a_n^{\uparrow}) = (b_a^{\uparrow}, ..., b_n^{\uparrow})$ или $A_\varphi \cdot A = B$, где A_φ - искомая матрица.
Отсюда получаем, что $A_\varphi = B \cdot A^{-1}$ (т.к. $a_1, ..., a_n$ ЛНЗ).

$$\left(\frac{A}{B}\right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\frac{E}{A_\varphi}\right),\ \left(\frac{A}{B}\right) \to \left(\frac{A}{B}\right)\cdot C_{\text{эл}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)$$

Если $AC = E$, то $C = A^{-1}$ и $BC = BA^{-1} = A_\varphi$ $\square$

Теорема. *Если* $\dim V_1 < \infty$, $\varphi:\ V_1 \to V_2$ *- линейное отображение, то*

$$Im\,\varphi \cong V_1/Ker\,\varphi$$

Доказательство. Базис ядра дополним до базиса пространства V_1 векторами $e_1, ..., e_s$. Тогда любой $v \in V_1$ можно записать в виде:

$$v = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i + u, \text{где } u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$$

По этому в факторпространстве базис составляет классы $\overline{v} + u = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i\overline{e_i}$
Рассмотрим отношение $\overline{\varphi}:\ V_1/u \to V_2$, где $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(v+u) := \varphi(v)$
Отсюда $w = \overline{\varphi}(\overline{v})$. Получаем, что φ - сюръективное линейное отображение (т.к. $\forall w \in V_2\ \exists\ v \in V_1:\ \varphi(v) = w$). Также $\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} = \{0\} = \{\mathrm{Ker}\,\varphi\}$, потому что если $\overline{\varphi}(\overline{v}) = 0$, то $\varphi(v) = 0$, т.е. $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi = u \Longrightarrow v \in U \Longrightarrow \overline{v} = u = \{0\}$ $\square$

8 Линейные операторы

Определение. Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ - подпространства в V. Ясно, что, если $U \subset V$, то $\varphi(U)$ - подпространство в V. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно φ (φ - инвариантным), если:

$$\forall u \in U: \ \varphi(u) \in U, \text{ т.е. } \varphi(U) \subseteq U$$

Примеры.

1. Пусть $V = U \oplus W$. Рассмотрим $\varphi: V \to W$. Пусть $\varphi(u+w) = u$ - проекция V на U вдоль W. Тогда U и W - φ инвариантные продрпостранства и $\forall u \in U: \ \varphi(u) = u$, а также $\forall w \in W: \ \varphi(w) = w$. Итак: $U \cong V/W$
2. Пусть $V = \mathbb{R}[t]$, $\varphi = \frac{d(...)}{dt}$ и $p(t) \to p'(t)$. Здесь инвариантным является подпространство $\mathbb{R}[t]_n \supset \mathbb{R}[t]_{n-1}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Теорема. *Если* $\varphi: V \to W$ *- линейный оператор,* $\dim V = n$, $U \subset V$ *- инвариантное подпространство, то в* V $\exists$ *базис, в котором* A_φ *имеет блочный вид:*

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Где B *и* C *- квадратные:* $B_{m\times m}, \ m = \dim U$

Доказательство. Выберем базис $e_1, ..., e_m$ в U и дополним до базиса в V. Тогда в полученном базисе A_φ имеет нужный вид. $\square$

Замечание. Пусть $U \in V$ - инвариантное подпространство для линейного оператора $\varphi: V \to V$

Ограничение φ на подпространство U:

$$\varphi|_u: \ U \to U; \ \ \forall u \in U: \ \varphi|_u(u) = \varphi(u)$$

Рассмоттрим факторпространтсво:

$$\overline{V} = V/U: \ \{v + u \mid u \in U\}$$

и фактор-оператор:

$$\overline{\varphi}(\overline{v}) := \overline{\varphi(v)}$$

$\forall v' \in \overline{V}: \ v' = v + u, \ u \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v) + \varphi(u) \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v)$

Т.о. $\overline{\varphi}: \ \overline{V} \to \overline{V}$ - линейный оператор.

Теорема.

1. *Если* $\exists\ \{0\} \neq U \subset V,\ \varphi(U) \subseteq U$, *то в подходящем базисе:*
$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad (I)$$
Где $B_{m\times m},\ m = \dim U$, *а точнее:* B *- матрица оператора* $\varphi|_u$, C *- матрица оператора* $\overline{\varphi}$

2. *Если* $V = U \oplus W,\ U$ *и* W *- инвариантные для* φ, *то в подходящем базисе:*
$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad (II)$$
Причем $B = A_{\varphi|_u},\ C =_{\varphi|_w}$.
Верно и обратное, если в некотором базисе матрица A_φ *имеет вид* (I), *то для* $\varphi\ \exists$ *инвариантное подпространство, а если* A_φ *имеет вид* (II), *то* V *- прямая сумма двух инвариантных продрпостранств.*

Доказательство. Обозначим $\dim V = n,\ \dim U = m,\ 0 < m < n$

1. Выберем базис в $U:\ e_1, ..., e_m$ и дополним его произвольно до базиса а V векторами $e_{m+1}, ..., e_n$.
$$\forall u \in U:\ u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i \Longrightarrow \varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi(e_i)$$
В частности, столбцы $\varphi(e_1)^\uparrow, ..., \varphi(e_m)^\uparrow$ имеют вид: $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \Longrightarrow$ они составляют матрицу $\left(\frac{B}{0}\right)$. ??? матрицы $\varphi(e_{m+1}^\uparrow, ..., e_n^\uparrow)$ соответствуют номерам координат. Видно, что:
$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_u}$$
$\overline{e_j} = e_j + U,\ j = m+1, ..., n$ - базис в фактор-пространстве.
$$\overline{V} = V/U;\ \overline{\varphi(e_j)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i + \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj} e_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj} \overline{e_k}$$
$$\Longrightarrow C = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \overline{\varphi}$$

2. Если $V = U \oplus W$, векторы $e_{m+1}, ..., e_n$ надо выбирать в W. Остальное аналогично.

$\square$

Теорема. *(Обратная)*
Для второго случия, если в базисе $e_1, ..., e_n$ матрица имеет вид (II), то положим $U := \langle e_1, ..., e_m \rangle,\ W := \langle e_{m+1}, ..., e_n \rangle$
Из определения матрицы $A_{\varphi,e}$ следует, что U, W - инвариантные относительно φ, $\varphi|_u$ имеет матрицу B, $\varphi|_w$ - матрицу C.

Замечание. В общем случае, если $V = U_1 \oplus ... \oplus U_s,\ U_i$ - инвариантны относительно $\varphi :\ V \to V$, то в базисе, согласованным с этим разложением:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B_i & 0 \\ \hline 0 & B_s \end{array}\right), \text{ где } B_i - \text{матрица } \varphi|_{U_i},\ 1 \leq i \leq s$$

Примеры. $\varphi :\ V \to V$

1. $\operatorname{Ker} \varphi,\ \operatorname{Im} \varphi$, любое подпространство $U \supseteq \operatorname{Im} \varphi$ - инвариантное.
2. Если $U_1, U_2 - \varphi$-инвариантные подпространства, то $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$ - инвариантны

9 Действия над линейными отображениями

Пусть $\varphi :\ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\forall x \in V_1$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{F} :\ (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$
2. Если $\psi :\ V_1 \to V_2$, то $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

Утверждение. ***(1)*** *Относительно этих операций множество $Z(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 является векторным пространством.*

Утверждение. ***(2)*** *Если $\dim V_1 = n,\ \dim V_2 = m$, то $Z(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$*

Доказательство. Зафиксируем базисы в V_1 и V_2: e и f соответственно, тогда $\forall \varphi$ взаимооднозначно соответствует его матрица $A_{\varphi,e,f}$ относительно базисов e и f. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi\ \forall \lambda \in \mathbb{F}\ (\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \Longrightarrow$ все столбцы A_φ умножаются на $\lambda \Longrightarrow A_\varphi$ умножается на λ.

$$\forall j = 1, ..., m :\ (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j)$$

$\Longrightarrow$ столбцы $A_{\varphi+\psi}$ имеют вид $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$. $\square$

Обозначение: $L(V_1, V_2) = \mathfrak{T}(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.
$\mathfrak{T}(V)$ - множество линейных операторов на V.

Определение. Произведением линейных операторов $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ называется их композиция:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x)), \text{ где } x \in V_1$$

Утверждение. *(3) Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.*

Утверждение. *(4) Пусть V_1, V_2, V_3 - конечномерные векторные пространства, $\psi : V_1 \to V_2$, $\varphi : V_2 \to V_3$ - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции:*

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi$$

Доказательство.
Утверждение (3) - упражнение.
Утверждение (4): Пусть e - базис в V_1, f - базис в V_2, g - базис в V_3.

$$A_\varphi = (\varphi(e_1)^\uparrow \dots \varphi(e_n)^\uparrow) \text{ в базисе } f$$

$$A_\psi = (\psi(f_1)^\uparrow \dots \psi(f_m)^\uparrow) \text{ в базисе } g$$

$\forall x = eX$, обозначим $y = \varphi(x)$, $z = \psi(y)$ со столбцами координат Y и Z соответственно. Тогда:

$$Y = A_\varphi X,\ Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi\circ\varphi}X$$

□

Теорема. *Множество $L(V)$ с операциями $+$, $\cdot\lambda$, $\cdot$ является ассоциативной алгеброй с единицей, равной* $\mathrm{id}\, V$. *Если* $\dim V = n$, *то* $L(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Следует из утверждений (1) - (4). □

Утверждение. *Если φ - линейный оператор на V, то $\forall k \in \mathbb{N}$ подпространства $Ker\,\varphi^k$ и $Im\,\varphi^k$ - инварианты. При этом:*

$$\{0\} \subseteq Ker\,\varphi \subseteq Ker\,\varphi^2 \subseteq \dots$$

$$V \supseteq Im\,\varphi \supseteq Im\,\varphi^2 \dots$$

10 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$

Определение. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ, если $x \neq 0$ и

$$\exists \lambda \in \mathbb{F} : \ \varphi(x) = \lambda \cdot x \tag{1}$$

Где λ - называется собственным значением оператора φ, соответствующим вектору x.

Пусть $\dim V = n$, e - базис в V, в нём $\forall x = e \cdot X$, тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно:

$$A_\varphi X = \lambda X \Longleftrightarrow (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \tag{2}$$

- это СЛУ для нахождения вектора x, если известна λ. Система (2) имеет ненулевое решение, только если:

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

Равенство (3) называется характеристическим уравненением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

Примеры.

1. $V = D^\infty(\mathbb{R})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций.

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \ \forall f(x) : \ \varphi(f) = f'(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \ (e^{\lambda x})' = \lambda e^x$$

Доказательство. Если $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$, то $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, где $C \neq 0$. Рассмотрим $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow f(x)e^{-\lambda x} = C$. $\square$

2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Упражнение. Какие существуют собственные векторы и собственные значения у φ во втором примере?

Определение.

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$= (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{11}-\lambda)+\cdots = (-\lambda)^n+(a_{11}+...+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+...+\det A$

$\chi_A(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A

Утверждение. ***(1)*** *$\chi_A(\lambda)$ - не зависит от базиса.*

Доказательство. В новом базисе: $A'_\varphi = C^{-1} \cdot A_\varphi \cdot C$

$$\chi_{A'_\varphi}(\lambda) = \det(C^{-1}A_\varphi C - \lambda E) = \det(C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C) = \det(A_\varphi - \lambda E)$$

□

Определение. Вместо $\chi_{A_\varphi}(\lambda) = \chi_\varphi(\lambda)$ и называется характеристическим многочленом оператора φ

11 Диагонализируемость

Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор

Лемма. *Если $a_1, ..., a_m \in V$ - собственные векторы оператора φ с собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_m$, причем $\forall i \neq j: \lambda_i \neq \lambda_j$, то $a_1, ..., a_m$ - ЛНЗ.*

Доказательство.

$m = 1:$ Один вектор $a_1 \neq 0$ ЛНЗ

$m > 1:$ Предположение индукции: Любые $m-1$ вектор, отвечающих попарно различным собственным значениям - ЛНЗ

Запишем: $a_1\alpha_1 + ... + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m = 0$

Подействуем оператором $\varphi: a_1\lambda_1\alpha_1+...+a_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+a_m\lambda_m\alpha_m = 0 \Longrightarrow$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$$

По предположению индукции $\forall i = 1, ..., m_1: \alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0$

Остается $\alpha_m a_m = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$

□

Следствие. *Если φ имеет n попарно различных совственных значений ($\dim V = n$), то соответствующее собственные векторы, взятые по одному для каждого собственного значения, образуют базис в V (Базис из собственных векторов или собственный базис).*

Вид матрицы A_φ в базисе из собственных векторов:
Обозначаем базис $\{e_1, ..., e_n\} \in V,\ \ \varphi(e_j) = \lambda_j e_j,\ j = \overline{1, n}$
$\forall x \in V:\ \ \varphi(x) = A_{\varphi, e} \cdot X_e$. Столбец вектора $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,...

$$A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- диагональная, причем на диагонали находятся собственные значения с учетом нумерации векторов

11.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданного собственным значением

Фиксируем собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ так, что $\exists\ v \in V, v \neq 0:\ \ \varphi(v) = \lambda_0 v$
Обозначается: $V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 V\}$

Утверждение. *(1) V_{λ_0} - подпространство в V, $V_{\lambda_0} = Ker\,(\varphi - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})$*

Если A_φ - матрица оператора φ, то в координатах V_{λ_0} - множество всех решений СЛУ.

$$(A_\varphi - \lambda_0 E) \cdot X = 0 \Longrightarrow \dim V_{\lambda_0} = n - \mathrm{rk}\,(A_\varphi - \lambda_0 E)$$

Определение.
$\dim V_{\lambda_0}$ - геометрическая кратность характеристического корня $\lambda = \lambda_0$. Имеет смысл и алгебраическая кратность λ_0 характеристического корня $\chi_\varphi(\lambda)$:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p(\lambda_0),\ P(\lambda_0) \neq 0,\ k - \text{алгебраическая кратность}$$

Лемма. *Для любого собственного значения λ_0 оператора φ :*
$\dim V_{\lambda_0} \leq$ *алгебраическая кратность корня $\lambda = \lambda_0$ в $\chi_\varphi(\lambda)$*

Доказательство. Пусть $\dim V_{\lambda_0} = m \leq n$, выберем базис в $V_{\lambda_0}: \ \{e_1, ..., e_m\}$ и произвольно дополним его до базиса в V (при m<n) векторами $e_{m+1}, ..., e_n \Longrightarrow$

$$A_{\varphi,e} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & C \\ 0 & & \lambda_m & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A_{\varphi,e} - \lambda E| = \left(\begin{array}{ccc|c} (\lambda_1 - \lambda) & & 0 & \\ & \ddots & & C \\ 0 & & (\lambda_m - \lambda) & \\ \hline & 0 & & B - \lambda E \end{array}\right) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot |B - \lambda E| = 0$$

Не исключено, что $\lambda = \lambda_0$ - корень уравнения $|B - \lambda E| = 0$ □

Замечание. Любое собственное подпространство V_{λ_0} является φ - инвариантным:

$$\forall v \in V_{\lambda_0}: \ \varphi(v) = w: \ \varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = \lambda_0 \varphi(v) = \lambda_0 w$$

Либо $w = 0$, либо является собственным вектором.

Следствие. ***2 из Леммы о ЛНЗ:***
Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_r$ - все попарно различные собственные значения оператора φ, тогда $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_r}$ - является прямой суммой, т.е.:

$$\forall i = 1, ..., n: \ V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \{0\}$$

Доказательство. Допустим, что $\exists \ w \in V_{\lambda_i} \cap (\sum\limits_{j \neq i} V_{\lambda_j})$, тогда:

$$w = v_i = \sum_{j \neq i} v_j \Longrightarrow (\sum_{j \neq i} v_j) - v_i = 0$$

Где $(\sum\limits_{j \neq i} v_j)$ - попарно различные собственные значения, т.е. либо 0, либо противоречие с ЛНЗ $\Longrightarrow v_i = w = 0$ □

Скажем, что φ (или его матрица) приводится к диагональному виду (т.е. диагонализируема), если в V $\exists$ базис, в котором A_φ диагональна.

Теорема. *Для линейного оператора $\varphi: \ V \rightarrow V (\dim V < \infty)$ следующие условия эквивалентны:*

1. *A_φ - диагонализируема*

2. В V $\exists$ базис из собственных векторов

3. Вся характеристические корни принадлежат $\mathbb{F}$ и $\forall i = 1, ..., r$:

$$\dim V_{\lambda_i} = \textit{алгебраической кратности корня } \lambda_i$$

4. $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$

Доказательство.

$\underline{1 \Rightarrow 2}$: Если $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, это значит, что:

$$\varphi(e_j)^\uparrow = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \varphi(e_j) = \lambda_j e_j$, т.е. e_j - собственный вектор с собственным значеним λ_j

$\underline{2 \Rightarrow 1}$: В базисе из собственных векторов марица A_φ диагональна

$\underline{1 \cup 2 \Rightarrow 3}$: Выберем базис из собственных векторов $\{f_1, ..., f_n\}$ так, чтобы:

$$\{f_1, ..., f_{m_1}, f_{m_1+1}, ..., f_{m_1+m_2}, ...\}$$

В этом базисе матрица $A_{\varphi,f}$ выглядит:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\qquad}_{m_1} \qquad \underbrace{\qquad}_{m_2} \qquad \underbrace{\qquad}_{m_r}$$

$\Longrightarrow m_1 + ... + m_r = n$. С другой стороны, если k_i - алгебраическая кратность корня λ_i, то:

$$n = \sum_{i=1}^{n} m_i \leq \sum_{i=1}^{r} k_i = \deg[\chi_\varphi(\lambda)] = n$$

$\underline{3 \Rightarrow 4}$: $\sum\limits_{i=1}^{r} \dim V_{\lambda_i} = n \Longrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$

$\underline{4 \Rightarrow 1}$: Базис в V - объединение базисов слагаемых

$\square$

Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над $\mathbb{R}$, отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.

Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, тогда в некотором базисе V, φ действует матрицей $Y = A_\varphi \cdot X$, где $X \in \mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора ($y = \varphi(x)$). Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем $\mathbb{C}$, действующий при той же матрице:

$$A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n,\ Z \to A_\varphi \cdot Z$$

Соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то $\exists$ собственный вектор Z_0, отвечающий выбранному λ. Это значит, что:

$$A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0,\ Z_0 = X_0 + iY_0,\ \text{где } X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longrightarrow A_\varphi Z_0 = A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = \\ = (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases}$$

Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \Longrightarrow \text{ подпространство } U := \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$$

$\Longrightarrow U$ является инвариантным подпространством для φ.
Теперь докажем, что $\dim U = 2$

Доказательство. Предположим, что $\dim U = 1$, то есть $y_0 = \mu x_0$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \Longrightarrow$ если $x_0 \neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ.

$$A_{\varphi|_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{имеет корни} \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R} - \text{противоречие}$$

$\square$

Теорема. *Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное подпространство.*

Доказательство. Если $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характерического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V,\ \ u_i \neq 0, \Longrightarrow \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.
Если $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $\exists\ U$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Вместо диагонализируемости можно использовать следующее утверждение:

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R},\ \ i = \overline{1, r},\ $ а $\beta_j \neq 0,\ \ j = \overline{1, m}$

12 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi :\ V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Линейный оператор $\varphi :\ V \to V$ такой, что $\forall v \in V :\ \varphi(v) = v$, называется тождественным оператором и обозначается id.

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ

$$f(\varphi) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m = 0 \Longrightarrow f(A_\varphi) = 0$$

$\Longrightarrow A_{f(\varphi)} = f \cdot A_\varphi = a_0 E + a_1 A_\varphi + \ldots + a_m A_\varphi^m.$

Пример. $V = \mathbb{R}[t]_n,\ \ \varphi = \frac{d}{dt}$

$$\varphi^n(t^n) = n!,\ \varphi^{n+1} \equiv 0 \Longrightarrow \text{для } \varphi = \frac{d}{dt} t^{n+1} - \text{анулирующий многочлен}$$

Утверждение. *Если* $\dim V = n \Longrightarrow \exists$ *многочлен* $\deg \leq n^2$, *анулирующий* φ.

Доказательство. $\dim L(V) = n^2,\ L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \Longrightarrow$ операторы
$\{Id,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^{n^2}\}$ - линейно зависимы, так как их больше $n^2 \Longrightarrow$

$$\exists\ a_0, ..., a_{n^2} \in \mathbb{F} :\ a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1\varphi + \ldots + a_{n^2}\varphi^{n^2} = 0$$

$\Longrightarrow a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n^2} t^{n^2}$ - анулирующий многочлен для φ □

Определение. Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица $P = (P_{ij}(\lambda))$, где $P_{ij}(\lambda)$ - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

Пример.

$$P = \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 2\lambda+1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2+\lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2$$

- многочлен от λ с матричными коэффициентами.

Определение. Оператор $\varphi: \ V \to V$ называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

Определение. Для матрицы $A = (a_{ij})$ присоединённой матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})$, то есть $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$.

Свойство.

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

Теорема. ***Гамильтона-Кэли***
Характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ является анулирующим многочленом для линейного оператора φ, то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$, где 0 - нулевой оператор.
В матричной форме:

$$\forall A \in M_n(\mathbb{F}): \ \chi_A(A) = 0$$

Доказательство. Пусть A - данная матрица, тогда:

$$\chi_A(\lambda)|A - \lambda E| = \sum_{i=0}^{n} p_i \lambda^i$$

$$p_i \in \mathbb{F}, \ p_n = (-1)^n, \ \chi_A(A) = \sum_{i=0}^{n} p_i A^i (\text{считаем, что} A^0 = E)$$

Составим матрицу:

$$\widehat{A - \lambda E} = \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j, \ \text{где } D_j \in M_n(\mathbb{F})$$

Рассмотрим равенство:

$$(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda) E$$

$$(A-\lambda E)\cdot\sum_{j=0}^{n-1} D_j\lambda^j = \sum_{j=0}^{n-1}(AD_j\lambda^j) - \sum_{j=0}^{n-1} D_j\lambda^{j+1} =$$

$$= AD_0 + \sum_{j=1}^{n-1}(AD_j - D_{j-1})\lambda^j - D_{n-1}\lambda^n = \chi_A(\lambda)E = (\sum_{j=0}^{n} p_j\lambda^j)E$$

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях λ:

$$\begin{array}{r|rc} E\cdot & \lambda^0: & AD_0 = P_0E \\ A\cdot & \lambda^1: & AD_1 - D_0 = P_1E \\ \vdots & & \\ A^j\cdot & \lambda^j: & AD_j - D_{j-1} = P_jE \\ \vdots & & \\ A^n\cdot & \lambda^n: & AD_n - D_{n-1} = P_nE \end{array}$$

Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени A и сложим:

$$\Longrightarrow \chi_A(A)E = 0$$

$\square$

12.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора

Определение. Минимальным анулирующим многочленом линейного оператора $\varphi: V \to V$ - это анулирующий многочлен минимальной степени, анулирующий φ

Обозначается: $\mu_\varphi(\lambda)$ (Зачастую его выбирают со старшим коэффициентом $= 1$)

Ясно, что:

$$m = \deg\mu_\varphi(\lambda) \leq n \leq \deg\chi_\varphi(\lambda)$$

Теорема.

1. *$\mu_\varphi(\lambda)$ делит анулирующий многочлен оператора φ (в частности $\chi_\varphi(\lambda)$)*

2. *Если $\mu_\varphi(\lambda)$ - тоже минимальный многочлен φ, то:*

$$\mu'_\varphi(\lambda) = \alpha\mu_\varphi(\lambda),\ \alpha \neq 0$$

Он определен единственным образом с условием, что страший коэффициент $= 1$

3. *Если все корни λ_i характеристического многочлена принадлежат $\mathbb{F}$, то они являются и корнями минимального многочлена*

Доказательство.

1. Пусть $p(\varphi) = 0$, для некоторого $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$
   Разделим p с остатком на μ_φ:
   $$p(\lambda) = \mu_\varphi(\lambda) \cdot p(\varphi) + r(\varphi) \Longrightarrow r(\varphi) = 0$$
   $\Longrightarrow \deg \mu_\varphi(\lambda) = min \Longrightarrow r(\lambda) = 0$
2. Т.к. $\mu_\varphi(\lambda) \mid \mu'_\varphi(\lambda)$ и $\mu'_\varphi(\lambda) \mid \mu_\varphi(\lambda) \Longrightarrow \frac{\mu'_\varphi}{\mu_\varphi} = \alpha \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$
   Если $\mu_\varphi(\lambda) = \lambda^m + ...$ и $\mu'_\varphi(\lambda) = \lambda^m + ... \Longrightarrow \alpha = 1$
3. Допустим, что $\exists j: \ \mu_\varphi(\lambda_j) \neq 0$, т.е. в разложение μ_φ не входит $(\lambda - \lambda_j)$
   $\Longrightarrow \exists$ вектор $v \in V: \ \varphi(v) = \lambda_j r$
   $$0 = \mu_\varphi(\lambda)(v) = \prod_{i \neq j} (\varphi - \lambda_i)(v) \neq 0$$
   - противоречие

$\square$

Примеры.

1. $$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \chi_\varphi(\lambda) = (2 - \lambda)^3$$
   $$A_\varphi - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (A - 2E)^2 \neq 0, \ (A - 2E)^3 = 0 \Longrightarrow \mu_\varphi = -\chi_\varphi$$
2. $$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \chi_\varphi = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$
   $$(A_\varphi - 2E)(A_\varphi - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \mu_\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Вопросы:

1. Для каких операторов φ (или A_φ) $\chi_\varphi(\lambda) = \pm\mu_\varphi(\lambda)$?
2. Для каких φ корни $\mu_\varphi(\lambda)$ простые?

Определение. Оператор φ нильпотентный, если:

$$\exists\ L \in \mathbb{N}:\ \varphi^L = 0$$

Если L - минимальный с этим условием, то L - индекс нильпотентности

Пример. $D = \frac{d}{dt}$ в пространстве $\mathbb{R}[t]_n$, то $D^{n+1} = 0$

Утверждение. *Все собственные значения нильпотельного оператора* $= 0$

Доказательство. Если $v \neq 0,\ \varphi(v) = \lambda v$:

$$\Longrightarrow \varphi^L = \lambda^L v \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = \pm\lambda^n$$

$\square$

13 Корневые подпространства

$\varphi:\ V \to V$ - линейный оператор над $\mathbb{F},\ \dim V = n$
Все корни характеристического многочлена для φ принадлежат F так, что:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1}\cdots(\psi - \psi_s),\ (\lambda - \lambda^{k_s}_),\ \forall i \neq j:\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ \sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + ... + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}}\ \ | \cdot \chi_\varphi(\lambda)$$

$$\Longrightarrow 1 = f_1(\lambda)\prod_{i\neq 1}(\lambda - \lambda_i)^{k_i} + ... + f_s(\lambda)\prod_{i \neq s}(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

$$1 = q_1(\lambda) + ... + q_s(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{id} = q_1(\lambda) + ... + q_s(\lambda) = Q_1 + ... + Q_s$$

$$\forall x \in V:\ Q_1(x) + ... + Q_s(x) \Longrightarrow V = \mathrm{id}Q_1 + ... + Q_s$$

Обратим внимание, что:

$$\forall i \neq j:\ Q_iQ_j = Q_jQ_i = 0$$

Т.к. в $q_i(\lambda)q_j(\lambda)$ входят все множители, входящие в разложение $\chi_\varphi(\lambda) \Longrightarrow$ по теореме Гамильтона-Кэли:

$$q_i(\varphi)q_j(\varphi) = 0$$

Умножим равентсво $\mathrm{id} = Q_1 + ... + Q_i + ... + Q_s$ на Q_i :

$$\Longrightarrow \mathrm{id}Q_i = Q_i = Q_iQ_1 + ... + Q_iQ_i + ... = Q_iQ_s \Longrightarrow Q_i^2 = Q_i$$

Определение. $Q_i^2 = Q_i$ - идемпотентный оператор

Разложение $\forall$ вектора x в сумму: $Q_1(x) + ... + Q_s(x)$ - единственно
Докажем равенство: $x = y_1 + ... + y_s$, надо доказать, что $y_i = x_i$ Из равенства $x = Q_1(x_1) + ... + Q_s(x_s) \Longrightarrow Q_i(x) = Q_i(Q_i(x)) = Q_i(x_i) \Longrightarrow x_i = y_i$, где $y_i \in \mathrm{Im}Q_i$

Введем обозначение $K_i = \mathrm{Im}Q_i$

Докажем, что $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s$

Определение. Подпространство $K_i = \mathrm{Im}Q_i$ назовем корневым подпространством, отвечающим корню λ_i

$q_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda)\cdot\chi_\varphi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}}$

Утверждение.

1. *Корневые подпространства инвариантны*

2. $K_i = Ker(\varphi - \lambda_i \cdot id)^{k_i},\ 1 \le i \le s$

Доказательство.

1. Для линейного оператора φ и линейного $q(\lambda)$ подпространство $q(\varphi)(V)$ инвариантно

$$q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_m\lambda^m, \ \ q(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + ... + a_m\varphi^m$$

Возьмем $v = \mathrm{Im}q(v) \Longrightarrow \exists\ u \in V:\ v = q(\varphi)(u) \Longrightarrow \varphi(v) = (\varphi \cdot q(\varphi))(u) = q(\varphi)(\varphi(u)) \in \mathrm{Im}q(u)$ Оператор φ и любой $q(\varphi)$ перестановочны

2. $\forall x_i \in \mathrm{Im}Q_i \Longrightarrow x_i = Q_i(u_i)$

$$(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i} = \underbrace{(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i} \cdot \prod_{j \neq i}(\varphi - \lambda_j E)^{k_j}}_{\chi_\varphi(\varphi)}(u_i) = 0$$

$\Longrightarrow K_i \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i}$

□

14 Теорема Жордана

Основное условие: $\varphi:\ V \to V$ - линейный оператор, все его корни $\in \mathbb{F}$

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_s)^{k_s}\ (\forall i\neq j:\ \lambda_i\neq\lambda_j \text{ и } \sum_{i=1}^{s} k_i = \dim V)$$

$$V = K_1\oplus\ldots\oplus K_s,\ \text{где } K_i = \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_{\text{id}}d)^{k_i} - \text{корневое подпространство}$$

$$V_{\lambda_i} = \{x\in V|\varphi(x)=\lambda_i x\},\ \dim V_{\lambda_i}\leqslant k_i = \dim K_i$$

Так как K_i - инвариантное подпространство относительно оператора φ, можно рассмотреть ограничение:

$$(\varphi-\lambda_i\ \text{id})|_{K_i} := B_i$$

Из определения k_i следует, что $B_i^{k_i}=0$, то есть B_i - нильпотентный оператор. Обозначим h_i - показатель нильпотентности оператора, т.е. $B_i^{h_i}=0$,
но $B_i^k\neq 0\ \forall k<h_i$
В базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

где $A_i = A_{\varphi_{k_i}}$ - марица порядка $k_i,\ A_i-\lambda_i E_{k_i} = B_i,\ B_i^{k_i}=0$
Обозначим $K_i := K$, $B_i := B$, $k_i := k$, тогда:

$$\forall\bar{x}\in K:\ B^k(x)=0$$

если $x\neq 0$, то $\exists$ наименьшее значение m:

$$B^m(x)=0,\ B^{m-1}(x)\neq_0\ (m\leqslant h)$$

Назовём это высотой вектора x.
Для фиксированного вектора $x\neq 0$ (высоты m) рассмотрим векторы:

$$x,\ B^0x,\ Bx,\ldots,B^{m-1}x,\ B^mx=0$$

Определение. Векторы $\{x,\ B^0x,\ Bx,\ \ldots,\ B^{m-1}x=0\}$ называются жордановой цепочкой.

Лемма. *Вышеуказанные векторы являются линейно независимыми.*

Доказательство. Предположим, что:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 B^0 x + \ldots + \alpha_{m-1} B^{m-1} x = 0$$

Подействуем на это равенство оператором B^{m-1}:

$$\alpha_0 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

На оставшиеся векторы подействуем оператором B^{m-2}:

$$\alpha_1 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

и т.д. Получим, что $\forall i = \overline{0, m-1} : \ \alpha_i = 0 \implies$ векторы являются линейно независимыми. $\square$

Определение. Подпространство, натянутое на эти векторы:

$$\langle x, \ B^0 x, \ Bx, \ \ldots, \ B^{m-1} x \rangle$$

называется циклическим подпространством, порождённым жордановой цепочкой. Данное подпространство обозначим U, $\dim U_x = m$.

Обычно векторы жордановой цепочки нумеруют с конца, то есть:

$$a_1 = B^{m-1} x, \ a_2 = B^{m-2} x, \ldots, a_m = x$$

Тогда a_1 - собственный вектор для B, и для $\forall j = \overline{2, m} : \ a_{j-1} = B a_j$

Векторы a_j называются присоединёнными к вектору a_{j-1}

К вектору a_1: a_2 - присоединённый, a_3 - второй присоединённый и т.д.

Определение.

Матрица ограничения оператора B на подпространство $U_x = \langle a_1 \ldots a_m \rangle$:

$$B|_{U_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

называется жордановой клекткой с собственным значением $\lambda = 0$

$$\lambda = \lambda_i : \ A_{\varphi|_{U_x}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = J_k(\lambda_i)$$

- жорданова клектка с собственным значением $\lambda = \lambda_i$, где:

$$\varphi(a_2) = a_1 + \lambda_i a_2, \ \varphi(a_{j+1}) = a_j + \lambda_i a_{j+1}$$

Теорема. ***Жордана***

Если все характеристические корни опертора $\varphi: V \to V$ принадлежат полю $\mathbb{F}$, то V является прямой суммой циклических подпространств для оператора φ. Это равносильно тому, что в V существует базис, составленный из жордановых цепочек. Такой базис называется жордановым базисом.

Если жордановыйй бадис уже построен: Пусть имеются r жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, необязательно различным, длины которых $m_1, \dots, m_r$ соответственно, тогда в этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{m_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{r} m_i = n = \dim V$$

- жорданова матрица - жорданова нормальная форма (ЖНФ) матрицы A_φ.

Теорема. ***Жордана (матричная формулировка)***

Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$, все характеристические корни которой $\in \mathbb{F}$, $\exists$ матрица C $(\det C \neq 0)$ такая, что:

$$C^{-1}AC = J$$

- жорданова матрица. При этом жордановы клетки определены для матрицы A единственным образом с точностью до расположения клеток на диагонали жордановой матрицы.

Замечание. Матрицу A можно интерпретировать как матрицу линейного оператора φ, для него верна теорема Жордана.

Доказательство. (См. Шафаревич И.Р. "Линейная алгебра")
Доказательство достаточно провести для ограничения оператора на каждое корневое подпространство K_i, в этом случае обозначаем $B = (\varphi - \lambda_i \mathrm{id})$,
где B - нильпотентный оператор

Лемма. *Если B - такой оператор в пространстве V, что:*

$$ImB = B(V) \subset V$$

то V обладает $(n-1)$-мерным инвариантным подпространством.

Пусть $e_1, ..., e_m$ - базис в $\mathrm{Im}B$, $m < n = \dim V$
Дополним его до базиса в V векторами $e_{m+1}, ..., e_n$, тогда:

$$\langle e_1, ..., e_{n-1} \rangle - \text{инвариантное подпространство:}$$

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i \Longrightarrow B_w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i B e_i \in \mathrm{Im} B \subseteq W$$

$\Longrightarrow$ W - инвариантное подпространство
Ниже будем считать, что $B: \ V \to V$ - нильпотентный оператор,
$\dim V = n, \ W - (n-1)$-мерное инвариантное подпространство в V
Будем проводить индукцию по n:
Если $n = 1$, то $B = 0$ и любой базис - жорданов
Пусть $n > 1$, предположение индукции: в W $\exists$ базис для $B|_w$
Выберем вектора $a \in V \setminus W$. По предположению индукции:

$$W = U_1 \oplus ... \oplus U_r$$

Если вектор a - собственные для B, а т.к. он ЛНЗ с векторами из W, то:

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_r \oplus \langle a \rangle$$

- нужное разложение пространства V
Если a - не собственный, то он порождает жорданову цепочку некоторой длины m, которая не содержится в W. $\square$

Лемма. *Путсь U - циклическое подпространство, порожденное корневым вектором e высоты m. Тогда $\forall y \in U$ представляется в виде:*

$$y = f(B)e, \ \textit{где } f(t) - \textit{минимальной степени } \le n-1$$

Лемма. *Если $U = \langle e, \ Be, \ ..., B^{m-1}e \rangle$, то:*

$$\forall y \in U \ \exists \ f(t) \in F[t]: \ y = f(B)e, \ \deg f \le m-1$$

Если $f(0) \neq 0$, то высота $y = m$, то есть y пораждает то же самое циклическое подпространство.

Доказательство. Пусть $B: \ V \to V$ - нильпотентный оператор,
$\dim V = n, \ W - (n-1)$-мерное подпространство, содержащее $\mathrm{Im} B$.
Предположение индукции: $W = U_1 \oplus ... \oplus U_r$, т.е. $\forall w \in W$:

$$w = u_1 + ... + u_r, \ U_i = \langle e_1, \ Be_i, ... \rangle$$

Выбераем вектор $e \in V \setminus W$, тогда e ЛНЗ с векторами из W.
Рассмотрим $Be \in W$ так, что $(*) Be = u_1 + ... + u_r, \ u_i \in U_i$.
Если $Be = 0$, то:

$$V = \langle e \rangle \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_r - \text{то, что нам и надо}$$

Если $Be \neq 0$, то найдется i, что $u_i \neq 0$. Тогда $h(e) = m + 1$, т.к. $h(Be) = m$ (это значит, что $B^{m-1}e = 0, \ B^m e \neq 0$)
Если в разложении $(*)$ $u_i \in B(U_i) \Longrightarrow \exists \ v_i : \ u_i = Bv_i$
Рассмотрим вместо e вектор $e - v_i : \ B(e - v_i) = u_1 + ... + \cancel{u_i} + ... + u_r - \cancel{u_i} \Longrightarrow$ в разложение такого вектора u_i не входит.
Заменяя e на нужные разности $e - v_i$, можно считать либо $u_i \notin B(U_i)$, либо $u_i = 0$
Хотя бы один из векторов $u_i \neq 0$, выберем из них вектор, имеющий максимальную высоту m $(m = \max(\dim U_i))$
Скажем, пусть это будет вектор u_1, тогда $h(e) = m + 1$
Докажем, что:

$$V = \langle e, \ Be, \ ..., \ B^m e\rangle \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$$

Сумма размерностей подпространств в правой части:

$$(m_1 + 1) + ... + m_r = n = \dim V$$

Достаточно доказать, что:

$$\langle e, \ Be, \ ..., \ B^m e\rangle \cap (U_2 \oplus ... \oplus U_r) = \{0\}$$

Пусть $v = \lambda_1 e + ... + \lambda_{m+1} B^m e \in U_2 \oplus ... \oplus U_r$
Т.к. $e \notin W$, то $\lambda_1 = 0$, но $Be_i = u_1 + ... + u_r$ - проекция разложения на $U_1 \Longrightarrow$

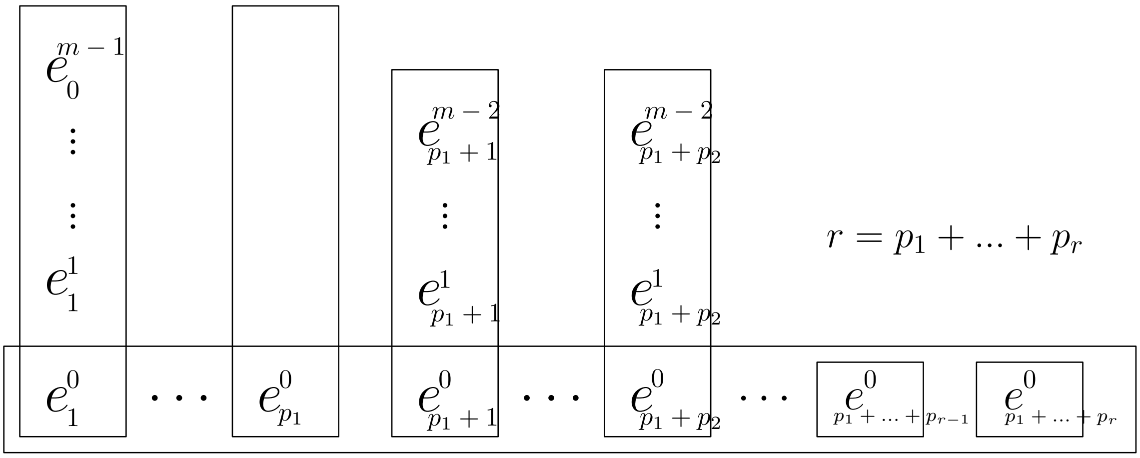
$$\lambda_2 u_1 + \lambda_3 B u_1 + ... + \lambda_{n+1} B^{n-1} u_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = ... = \lambda_{n+1} = 0 \Longrightarrow v_i = 0$$

□

Замечание. r - количество векторов циклического подпространства в разложении корневого подпространства K, отвечающего корню λ_0, равно геометрической кратности корня λ_0 характеристического многочлена.

14.1 Изображение разложения корневых подпространств

Обозначим: $r = \dim \mathrm{Ker} B$ - размерность собственного подпространства
Занумеруем собственные векторы, входящии в цепочки, располагая цепочки по убыванию высоты. m - максимальная высота цепочки, 1 - минимальная
Также введем обозначение для последовательных присоединённых векторов: есть P_1 цепочек высоты $m, \ P_2$ - высоты $m - 1$,..., $r - (P_1 + ... + p_{r-1})$ - высоты 1



$V = U_1 \oplus U_r,\ \dim U_{i+1} \le \dim U_i$

$$BV = BU_1 \oplus ... \oplus BU_r$$
$$\vdots$$
$$B^k V = B^k U_1 \oplus ... \oplus B^k U_r$$

Если $\dim U_i = m_i,\ \dim(B_k U_i) = \left[\begin{array}{c} m_i - k,\ \text{если } k < m_i \\ 0,\ \text{если } k \ge m_i \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\dim(B^k V) = \sum_{i=1}^{r} \dim B^k U_i = q_{k+1} + 2q_{k^2} + ... + (m-1)q_m$$

Пусть q_i - число циклических подпространств размерности $i,\ \ 1 \le i \le r$
Обозначим $r_k = \mathrm{rk} B^k$
Для $k = 0$ до $m-1$ получим равенства:

$$k = 0:\ \ q_1 + 2q_2 + ... + mq_m = n$$
$$k = 1:\ \ q_2 + 2q_3 + ... + (m-1)q_m = r_1 = \mathrm{rk} B$$
$$\cdots$$
$$q_m = r_{m-1} = \mathrm{rk} B^{m-1} \ne 0$$
$$B^m = 0 \text{ на корневом подпространстве}$$

Вычитая их каждого уравнения слудующее, получим систему:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + ... + q_m = n - r_1 \Longrightarrow q_1 = n - 2r_1 + r_2 \\ q_2 + ... + q_m = r_1 - r_2 \Longrightarrow q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 \\ \cdots \\ q_m = r_{m-1} - r_m\ (r_m = 0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}\ (i = 1, ..., m-1)$$

Вывод: количество и порядок (высоты цепочек) однозначно определяется по матрице $B = A|_{\varphi-\lambda\mathrm{id}}$ - эти ранги не зависят от конкретного разложения $\Longrightarrow$ определяются единственным образом.

Следствие. *Пусть:*

$$\chi_\varphi = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

- характеристический многочлен

$$\mu_\varphi = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

- минимальный многочлен
Тогда $\forall i = \overline{1, s}:\ m_i$ *равна* max *размерности жордановой клетки, отвечающей корню* λ_i

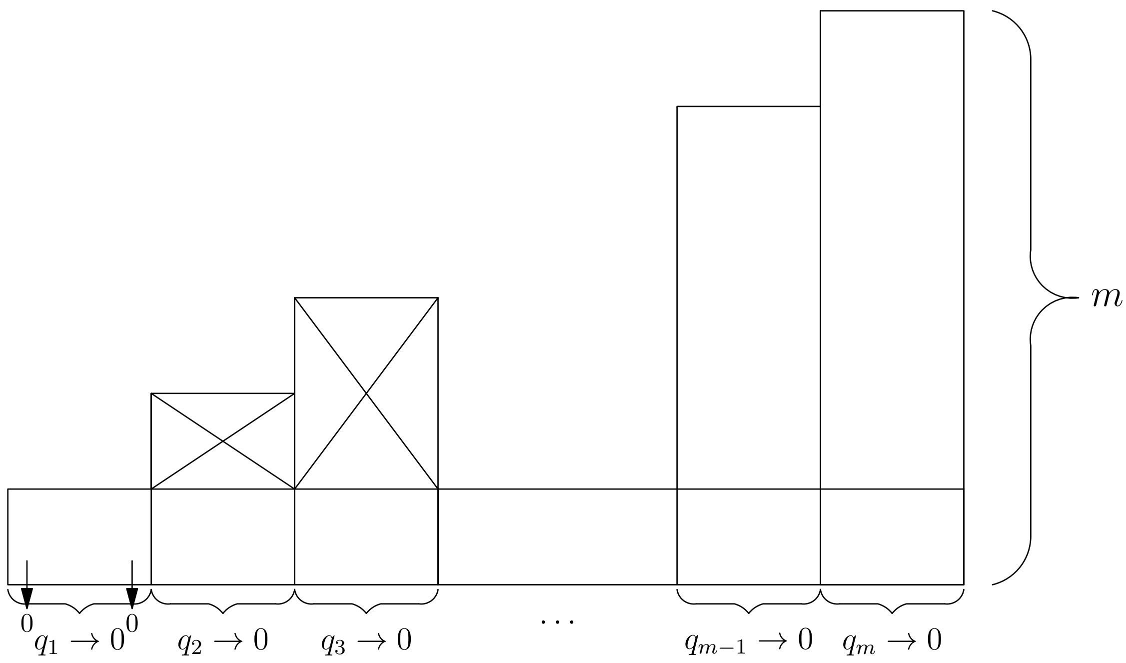
Следствие. ***Критерий диагонализируемости в терминах min многочлена:***
Оператор φ *диагонализируем* $\Longleftrightarrow m_1 = ... = m_s = 1$

Доказательство. Достаточно доказать для каждого корневого подпространства k_i

$$B = A_{\varphi-\lambda_i\mathrm{id}}|_{k_i}$$

- блочно-диагональная матрица с клетками размера m_j $\square$

Переделываем:



Применим оператор B:

$$\begin{cases} \dim V = q_1 + 2q_2 + ... + (m-1)q_{m-1} + mq_m = n \\ \dim \mathrm{Im} B = q_2 + ... + (m-2)q_{m-1} + (m-1)q_m = r_1 \\ \vdots \\ \dim \mathrm{Im} B^{m-1} = q_m = r_{m-1} \end{cases}$$

Некоторые применения приведут матрицу к жордановой форме (в частности, диагонализируемости)

14.2 Решение СЛАУ

Пусть дана система $AX = B$ с квадратной матрицей A, все характеристические корни которой $\in \mathbb{R}$.
Сделаем замену:

$$X = CY \Longrightarrow (AC)Y = B \Longleftrightarrow (\underbrace{C^{-1}AC}_{y})Y = C^{-1}b = b'$$

Можно взять C - матрицу перехода к жорданову базису

$$y = \begin{pmatrix} \boxed{Y_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{Y_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Если y жорданова клетка, то уравнения:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = b'_1 \\ \lambda x_2 + x_3 = b'_2 \\ \vdots \end{cases} \qquad \text{легко решить}$$

14.3 Решение СЛДУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$\dot{X} = AX$, где A - квадратная

$$X = CY \Longrightarrow \dot{X} = C\dot{Y}$$

$$C\dot{Y} = (AC)Y \Longrightarrow \dot{Y} = (C^{-1}AC)Y$$

Если матрица $C^{-1}AC$ диагональная: $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0$ получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y_n} = \lambda_n y_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Тогда $X = CY$

Если

$$C^{-1}AC = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \lambda_0 y_{n-1} + y_n \\ \dot{y}_n = \lambda_0 y_n \end{cases}$$

решаем снизу вверх

14.4 Функции от матриц

$\underset{n\in\mathbb{N}}{A^n}$

$$(C_{-1}AC) = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix} \Longrightarrow A = CYC^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^n = (CYC^{-1})(CYC^{-1})...(CYC^{-1}) = CY^nC^{-1}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} \boxed{J^n_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J^n_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \left(\lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 + ... = \begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1}C_n^1 & \lambda^{n-2}C_n^2 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda^n & \lambda^{n-1}C_n^1 & \lambda^{n-2}C_n^2 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda^n & \end{pmatrix}$$

Упражнение. Пусть $f(t)$ - многочлен, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

Доказать, что:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

14.5 Вычисление корня и экспоненты

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + ... + \frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + ... + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Для $J_n(\lambda) = \lambda E + B \Longrightarrow$

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^{t\lambda E} \cdot e^{tB} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & & \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{A+B} = e^a \cdot e^b \Longleftrightarrow AB = Ba)$$

Примеры.

1.

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)t^2 + ...$$

2.
$$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = E + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2!}C^2_{\frac{1}{2}}B^2 = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\lambda}\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2\lambda}\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \lambda \neq 0$$

15 Биленейные и квадратичные формы

Определение. Функция $b:\ V \times V \to \mathbb{F}$ называется билинейной функцией, если:

1. аддитивность:

$$\forall x_1, x_2, y:\ b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2:\ b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$$

2. однородность:

$$\forall x, y \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}:\ b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$$

Определение. $b(x, y)$ - называется симметрической, если:

$$\forall x, y \in V:\ b(y, x) = b(x, y)$$

Примеры.

1. Симметрическая билинейная функция - скалярное произведение
2. $V = Mn(\mathbb{F}):\ b(X, Y) = tr(XY)$
3. $\beta(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(y)dx$

15.1 Запись билинейной функции в координатах

Пусть в V задан базис $e_1, ..., e_n$, тогда:

$$b(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{m} b(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{m} x_i y_j (e_i, e_j)$$

Определение. Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, тогда $B_e = b_{ij}$ - матрица билинейной функции $b(x, y)$ в базисе e

Тогда:

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T BY \quad (1)$$

15.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть $e' = Ce$, C - матрица перехода от e к e'

Тогда:

$$X = CX',\ Y = CY' \quad (2)$$

По определению матрицы билинейной функции, в новом базисе:

$$b(x,y) = X'^T B' Y' \ \ (B' = Be')$$

Подставим в формулу (1) выраженеие (2):

$$b(x,y) = X'^T C^T BCY' = X'^T (C^T BC) Y' = X'^T B' Y' \ \ (\forall X', Y' \in \mathbb{F}^n)$$

$$\Longrightarrow B' = C^T BC \ \ (\forall i, j :\ X' := E_i,\ Y' := E_j)$$

Следствие.

1. $rkB' = rkB$

2. $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{sgn}(\det B') = \operatorname{sgn}(\det B)$