



Механико-математический факультет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, 2 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 14 апреля 2025 г.

Содержание

1	Векторное пространство	3
1.1	Изменение координат вектора при замене базиса	6
2	Векторные подпространства	6
2.1	Примеры	6
2.2	Два основных способа задания подпространства в V	7
3	Пересечение и сумма подпространств	9
4	Прямая сумма подпространств и пространств	11
5	Линейные отображения и функции	15
6	Линейные функции	16
7	Линейные отображения и их матрицы	19
8	Матрицы линейного отображения	20
8.1	Изменение матрицы линейного отображения при замене координат	20
9	Линейные операторы	22
10	Действия над линейными отображениями	25
11	Собственные векторы и собственные значения оператора	27
12	Диагонализируемость	28
12.1	Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением	29
13	Анулирующие многочлены линейных операторов	33
13.1	Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора	35
14	Корневые подпространства	37
15	Теорема Жордана	39
15.1	Изображение разложения корневых подпространств	44
15.2	Решение СЛАУ	46
15.3	Решение СЛДУ	47
15.4	Функции от матриц	47
15.5	Вычисление корня и экспоненты	48
16	Билинейные и квадратичные формы	49
16.1	Запись билинейной функции в координатах	50
16.2	Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса	50
16.3	Квадратичные формы	53
16.4	Знакоопределённые квадратичные формы	55
16.5	Кососимметрические билинейные формы	58
17	Евклидовы пространства и их обобщения	60
17.1	Основные понятия и утверждения	60

17.2	Линейные операторы в евклидовом пространстве	65
17.3	Самосопряжённые операторы	67
17.4	Ортогональные операторы	69

1 Векторное пространство

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F , если заданы операции $+$: $V \times V \rightarrow V$ и \cdot : $F \times V \rightarrow V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V : v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V : 1_F \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? *Ответ:* Аксиома коммутативности.

Доказательство. Сначала докажем два свойства.

1. $0 \cdot \bar{a} = 0 \cdot \bar{a} + \vec{0} = 0 \cdot \bar{a} + (0 \cdot \bar{a} + (-0 \cdot \bar{a})) = (0 \cdot \bar{a} + 0 \cdot \bar{a}) + (-0 \cdot \bar{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \bar{a} + (-0 \cdot \bar{a}) = \vec{0}$
2. $(-1)\bar{a} + \vec{0} = (-1)\bar{a} + (\bar{a} + (-\bar{a})) = ((-1)\bar{a} + \bar{a}) + (-\bar{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \bar{a} + (-\bar{a}) = -\bar{a}$.

Теперь докажем первую аксиому (аксиому коммутативности).

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \vec{0} = (\bar{a} + \bar{b}) + (-(\bar{b} + \bar{a}) + (-(-(\bar{b} + \bar{a})))) =$$

(по второму свойству)

$$= (\bar{a} + \bar{b}) + (-(\bar{b} + \bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a})) =$$

(по аксиоме ассоциативности)

$$\begin{aligned} &= (\bar{a} + \bar{b} + (-(\bar{b} + \bar{a}))) + (\bar{b} + \bar{a}) = (((\bar{a} + \bar{b}) + (-(\bar{b}))) + (-\bar{a})) + (\bar{b} + \bar{a}) = \\ &= ((\bar{a} + (\bar{b} + (-\bar{b})))) + (-\bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a}) = ((\bar{a} + \vec{0}) + (-\bar{a})) + (\bar{b} + \bar{a}) = \\ &= (\bar{a} + (-\bar{a})) + (\bar{b} + \bar{a}) = \vec{0} + (\bar{b} + \bar{a}) = \bar{b} + \bar{a} \end{aligned}$$

□

Замечание. Любое поле можно рассматривать как векторное пространство над собой - все аксиомы будут выполнены из аксиом поля.

Определение. $U \subset V$ - *векторное подпространство* пространства V , если оно само является пространством относительно тех же операций в V .

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $U \neq \emptyset$
2. $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \lambda \in F : \lambda u \in U$

Определение. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются линейно зависимыми, если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ (не все равные 0) : $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$. В противном случае векторы v_1, \dots, v_n называются линейно независимыми.

Утверждение. *Определение 3 $\iff (n \geq 2)$ хотя бы один вектор из векторов v_i выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение. Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, \dots, e_n), e_k \in V$ называется базисом V , если e - максимальный ЛНЗ набор векторов из V .

Утверждение. e - базис в $V \iff$

1. e_1, \dots, e_n - ЛНЗ
2. $\forall x \in V \exists x_1, \dots, x_n \in F : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Следствие. *Разложение любого вектора в базисе единственно.*

Доказательство. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) e_i$

Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем: $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда $x = eX_e = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

Теорема. *Если в $V \exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.*

Доказательство.

Если \exists базис $e'_1, \dots, e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ e'_1, \dots, e'_m - ЛЗ, т.е. не базис. Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) e_1, \dots, e_n - ЛЗ \implies не базис. \square

Свойства. матриц перехода

$$1. \det C \neq 0$$

$$2. C_{e' \rightarrow e} = (C_{e \rightarrow e'})^{-1}$$

$$3. C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, \dots, e'_n \implies rk C = n \implies \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.

По определению:

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C_{e \rightarrow e'}, \text{ т.е. } e' = e C_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{e' = e C_{e \rightarrow e'}} \quad (2)$$

С другой стороны

$$e = e' C_{e' \rightarrow e} = e C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} \implies C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \rightarrow e'} = (C_{e' \rightarrow e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e' C_{e' \rightarrow e''} = e (C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}) = e C_{e \rightarrow e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}$

\square

Алгоритм. Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном базисе?

$e' = e C_{e \rightarrow e'}$ можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow) C = (e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow)$$

$$[e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow \mid e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \rightarrow e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$\boxed{X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}} \quad (3)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \forall x \in V : x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e \rightarrow e'}X_{e'} \\ \implies X_e = C_{e \rightarrow e'}X_{e'} \end{aligned}$$

□

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

1. Геометрические векторы
2. F^n - пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot \lambda)$

Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой

невыврожденной матрицы порядка n)

Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из (2))

Упражнение. Пусть $|F| = q$, $\dim_F V = n \implies |V| = q^n$

$\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij -ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и умножения на скаляр

Оно бесконечномерно, если X бесконечно.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ

Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \implies C_1 = \dots = C_n = 0$$

4. $F[t]$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0 : 1, t, t^2, \dots$ - линейно независимы. $F[t]_n = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \mid a_k \in F, k = 0, \dots, n; n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, \dots, t^n$
Тейлоровский базис: $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n; \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq \emptyset, V = 2^\Omega$ с операциями вместо сложения:

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2, 0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$$

Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над \mathbb{Z}_2

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F \right\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F \right\} = U$$

Утверждение. $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \subseteq V \implies \dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle = rk\{a_1, \dots, a_m\}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu \lambda_i) a_i \\ \sum_{i=1}^m \mu_i a_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U \end{aligned}$$

Если $r = rk\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, то a_{j1}, \dots, a_{jr} - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \implies \{a_{j1}, \dots, a_{jr}\} - \text{базис } U$$

□

Алгоритм. Алгоритм вычисления $\dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и базиса, если известны координаты этих векторов:

1) Составить матрицу:

$$(a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\begin{array}{ccc|c} & \overbrace{j_1 \dots j_r} & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

2) Столбцы с номерами j_1, \dots, j_r - базис в U , разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы

2. ($\dim V = n$, известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^n x_i e_i = eX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$W = \{x \in V \mid x = eX : AX = 0\}$ - задание с помощью ОСЛУ

Утверждение. W - подпространство в V , $\dim W = n - rkA$, базис - любая ФСР (это переход от **2.** к **1.** способу задания подпространства).

Теорема. Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве V можно задать с помощью ОСЛУ.

Доказательство. Два способа:

1) Вектор x (со столбцом координат $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, \dots, a_m \rangle = U$$

$$\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i^\uparrow = x$$

т.е. СЛУ с $\tilde{A} = (a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix})$ совместна \iff после алгоритма Гаусса:

$$\tilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} K & \sum_j C_{kj} x_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1,j} x_j = 0 \\ & \sum C_{nj} x_j = 0 \end{array} \right)$$

(K) имеет ступенчатый вид, а $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1,j}x_j = 0 \\ \sum C_{nj}x_j = 0 \end{pmatrix}$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\underset{(r \times n)}{C} X = 0, rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (E_r \mid D) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + \dots + d_{kn}x_n) \end{cases} \quad k = 1, \dots, r$$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов a_1, \dots, a_r :

$$\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_r} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} (M \mid E_r) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = (E_{n-r} \mid -M^T)$
 Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность $n - (n - r) = r$

□

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

1. Если U_i ($i \in I$) - подпространство V , то $W = \bigcap_{i \in I} U_i$ тоже подпространство в V ;
2. Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств.



Доказательство. 1. $\bar{0} \in W$, т.к. $\bar{0} \in U_i, \forall i \in I$.

Если $x, y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Если $x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \implies \lambda x \in U_i, \forall i \in I \implies \lambda x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ □

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2 , то оно содержит и сумму $u_1 + u_2$, если $u_i \in U_i, i = 1, 2$

Определение. Суммой подпространств $U_1, \dots, U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + \dots + U_m = \{x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. $U_1 + \dots + U_m$ - подпространство в V

Теорема. (Формула Грассмана)

Если U_1, U_2 - подпространства в V , $\dim U_1 < \infty, \dim U_2 < \infty$, то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i, \dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем c_1, \dots, c_s - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами a_1, \dots, a_{n_1-s} и до базиса в U_2 векторами b_1, \dots, b_{n_2-s} .

Тогда векторы $c_1, \dots, c_s, a_1, \dots, a_{n_1-s}, b_1, \dots, b_{n_2-s}$ - образуют базис в $U_1 + U_2$

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = (\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i) + (\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = - \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow a_i$ - ЛНЗ

$$\Rightarrow \forall i : \alpha_i = 0$$

Тогда $\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0 \Rightarrow \{b_k, \gamma_j\}$ - ЛНЗ $\Rightarrow \forall k, j : \beta_k = \gamma_j = 0$

Алгоритм. Пусть $U_1 = \langle a_1, \dots, a_{n_1} \rangle$, $U_2 = \langle b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$, известны координаты всех этих векторов. Составим матрицу:

$$(A \mid B) = (a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_{n_2}^\uparrow)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid \underbrace{b_1^\uparrow, \dots, b_m^\uparrow}_{\text{попало в базис}}, b_{m+1}^\uparrow, \dots, b_{n_2-m}^\uparrow \right)$$

Можно записать:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^m \beta_{k,j} b_k \Rightarrow b_j - \sum_{k=1}^m \beta_{k,j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

□

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение. Сумма $U_1 + \dots + U_m$ подпространств $U_i \subset V$, $1 \leq i \leq m$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$ представим в виде:

$u = u_1 + \dots + u_m$ ($u_i \in U_i$) единственным образом

Пусть $m = 2$, V - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U = U_1 + U_2$ - прямая сумма

$$2. U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$3. \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

4. Базис $U_1 + U_2$ - объединение базисов слагаемых

Доказательство.

$$1. \rightarrow 2. \text{ Допустим } v \in U_1 \cap U_2 \implies v = \underset{\in U_1}{v} + 0 = 0 + \underset{\in U_2}{v} \implies v = 0$$

2. \rightarrow 3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_0$$

3. \rightarrow 4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \implies \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$\implies \text{все } \alpha_i \text{ и } \beta_i \text{ равны нулю}$$

4. \rightarrow 1. $\forall u \in U_1 + U_2$:

$$u = \left(\sum_i \alpha_i a_i \right) + \left(\sum_j \beta_j b_j \right)$$

- разложение по базису единственно

□

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ - прямая сумма

2. $\forall i, 1 \leq i \leq m, U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}$

3. $\dim(U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_n$

4. Базис $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ - объединение базисов слагаемых

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\}, i \neq j$ недостаточно для прямой суммы: (РИСУНОК)

v_1, v_2, v_3 - ЛЗ \implies представление не единственным образом

Лемма. Любой ЛНЗ набор векторов a_1, \dots, a_m в n -мерном векторном пространстве V ($m < n$) можно дополнить до базиса в V .

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, \dots, e_n \implies rk\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & E_n \end{array} \right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & e_{i,1}^\uparrow & e_{j,n-m}^\uparrow & \cdots \end{array} \right)$$

Тогда к векторам a_1, \dots, a_m надо добавить $e_{j,1}, \dots, e_{j,n-m}$

□

Определение. Если U - подпр-во в V ($0 \neq U \neq V$) и $\exists W \subset V : V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U .

Следствие. Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве \exists прямые дополнения.

Доказательство. $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \implies \exists a_{m+1}, \dots, a_n : \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ - базис в V , тогда $W = \langle a_{m+1}, \dots, a_n \rangle$ □

Определение. Пусть V_1, \dots, V_k ($k \geq 2$) - векторы пространства над одним и тем же полем \mathbb{F} , тогда:

$$V = V_1 \times \dots \times V_k = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{внешняя прямая сумма}$$

Обозначение: \bigoplus

Замечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \bigoplus \dots \bigoplus V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V'_i = \{0, \dots, v_i, \dots, 0\} - \text{подпространство в } V$$

Запись $v_1, \dots, v_k \overset{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, v_k)$ показывает, что $V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_k$ - единственно.

$$\text{В частности } \dim(V_1 \bigoplus \dots \bigoplus V_k) = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

Факторпространства

Определение. Пусть $U \subset V$ - подпространство, $v_1, v_2 \in V$. Говорят, что $v_1 \sim v_2$ по модулю U , если $v_1 - v_2 \in U$. Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U , где v - представитель

$$* V/U = \{\underbrace{v + U}_{\bar{v}} \mid u \in U\}$$

Утверждение. $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

Доказательство.

\Rightarrow : Если $v_1 \sim v_2$, то $\exists u_0 \in U : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Rightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \quad \forall u \in U \quad v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Rightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

\Leftarrow : Если $v_1 + U = v_2 + U$, то $\exists u_1 \in U : v_1 = v_2 + u_1 \Rightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

Определение. $v + U$ - смежный класс элемента v по U : $\bar{v} := v + U$

Определение. $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ - факторпространство V по U .

Определение. Структура векторного пространства на V/U :

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda \bar{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

Определение. $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V
Обозначается: $\text{Codim}_V U$

Пример. Пусть $V = C[a, b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]\} \Rightarrow \text{Codim}_V U = 1$$

Теорема.

1. Данные операции задают на V/U векторное пр-во;
2. Если $\dim V < \infty$, то $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

Доказательство.

1) Проверим корректность введённых операций:

Если $v'_1 = v_1 + u_1, v'_2 = v_2 + u_2, u_1, u_2 \in U$:

$$v'_1 + v'_2 = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v'_1 + v'_2 \sim v_1 + v_2, \text{ т.е. } v'_1 + v'_2 + U = v_1 + v_2 + U \Rightarrow \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2}$$

$$\overline{v'_1} + \overline{v'_2} = \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

т.е. сложение не зависит от выбора элементов в классах.

Если

$$v' = v + u, u \in U \implies \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \implies \lambda v \sim \lambda v'; \quad \overline{0} \in U; \quad -\overline{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполнены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис a_1, \dots, a_m в U

Если $U = V$, т.е. $m = n = \dim V$, то $V/U = \{0\} \implies \dim(V/U) = n - n = 0$

Если же $m < n$, то можно дополнить базис U векторами a_{m+1}, \dots, a_n до базиса в V , тогда классы $\overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$ образуют базис в V/U :

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j$$

$$\overline{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^n \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \overline{a_j}$$

$\implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$ порождают V/U

Проверим ЛНЗ:

$$\exists \lambda_j \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \lambda_j \overline{a_j} = \overline{0} \iff \sum_{j=m+1}^n \lambda_j a_j \in U$$

$$\exists \mu_i \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0$$

Т.к. $\{a_1, \dots, a_n\}$ ЛНЗ, то $\lambda_j = 0, \mu_i = 0, \forall i, j \implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$ - ЛНЗ

□

5 Линейные отображения и функции

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем \mathbb{F} .

Определение. Отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ называется линейным отображением V_1 в V_2 , если:

$$1. \forall v_1, v'_1 \in V_1 : \varphi(v_1 + v'_1) = \varphi(v_1) + \varphi(v'_1);$$

$$2. \forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v);$$

Из курса I семестра известно, что $\varphi(0_{v_1}) = 0_{V_2}$

Определение. Ядром φ называется множество $\text{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\}$. Образом φ называется множество $\text{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$.

6 Линейные функции

Пусть V - векторное пространство над \mathbb{F}

Определение. Отображение $f : V \rightarrow \mathbb{F}$ - линейная функция со значениями в \mathbb{F} , если:

1. $\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} : f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается: $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{F}\}$ - множество линейных функций на V

Лемма. Если $f \neq 0$, то $\dim(V/\text{Ker} f) = 1$.

Доказательство. $f \neq 0 \Rightarrow \exists v_1 \in V, f(v_1) \neq 0$. Пусть $v \in V$, тогда либо $v \in \text{Ker}(f)$, либо $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Rightarrow f\left(\frac{v_1}{\beta}\right) = 1, f\left(\frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = \alpha$$

Рассмотрим выражение $f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1)$:

$$f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1) = f(v) - f(\frac{\alpha}{\beta}v_1) = \alpha - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow v - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \text{Ker}(f) \text{ и } v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u, u \in \text{Ker}(f) \quad \square$$

Замечание. $\forall x \in V : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Лемма. Множество V^* с введенными операциями - векторное пространство.

Определение. V^* - векторное пространство, сопряженное с V (двойственное для V)

Зафиксируем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V и линейную функцию $f : V \rightarrow F$

$$\forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \text{ где } a_i = f(e_i)$$

$$\text{Удобно записывать это так: } f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Определение. Координатные функции - функции вида:

$$f_i : f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение: $e^i = f_i$

$$\text{В частности: } f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Утверждение. Функции e^i - базис в V^*

Доказательство.

Докажем ЛНЗ: Пусть $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i \equiv 0$. Подставим e_j :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i\right)(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех e_1, \dots, e_n получим, что $\forall i = 1, \dots, n : \lambda_i = 0$.

Разложим произвольную функцию $f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i e^i(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i e^i\right)(x) \Rightarrow f \equiv \sum_{i=1}^n a_i e^i$$

□

Следствие. Если $\dim V < \infty$, то $V^* \cong V$, т.к. $\dim V^* = \dim V$.

Определение. Базис $e^* = (e^1, \dots, e^n)$ называется базисом V^* , сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису e в V .

Посмотрим, как изменится строка координат функции $f \in V^*$ при замене базиса e в V .

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n) = e \cdot C_{e \rightarrow e'}$ - новый базис в V . Как известно, $X = C_{e \rightarrow e'} \cdot X'$.

Отсюда если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$, то $\forall f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a'_i x'_i = (a'_1, \dots, a'_n) X'$$

С другой стороны

$$f(x) = (a_1, \dots, a_n) X = (a_1, \dots, a_n) (C_{e \rightarrow e'} X') = ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X'$$

Отсюда

$$\forall X' \in \mathbb{F}^n \quad ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X' = ((a'_1, \dots, a'_n)) X'$$

Подставляя по очереди $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, в итоге получим равенство

$$(a_1, \dots, a_n)C_{e \rightarrow e'} = (a'_1, \dots, a'_n)$$

Пример. Возьмём $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$

Выберем в нём базис $\{1, (t - t_0), \dots, (t - t_0)^n\} \Rightarrow p(t) = \sum_{i=0}^n \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i$

Если $e_i = (t - t_0)^i$, $0 \leq i \leq n$, то $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

Определение. Вторым сопряжённым пространством к V (обозначается V^{**}) называется пространство, сопряженное к V^* - пространство линейных функций от линейных функций над V .

$$V^{**} = \{\varphi : V^* \rightarrow \mathbb{F}\}$$

Лемма. f - инъекция $\iff \text{Ker}(f) = \{0\}$

Теорема. Если $\dim V < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).

Доказательство. Рассмотрим отображение:

$$\varphi : V \rightarrow V^{**} : \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**} : \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

- $\forall f \in V^*, \varphi_{x_1+x_2}(f) = f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Rightarrow \varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$
- $\forall f \in V^*, \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f) \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x);$

Чтобы проверить, что φ - биекция, достаточно проверить, что $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ (так как сюръекцию имеем из $\dim V^{**} = \dim V$).

Пусть $x \in \text{Ker}(\varphi)$, т.е. $\varphi_x \equiv 0$. Значит, $\forall f \in V^* : f(x) = 0$

Если $x \neq 0$, то его можно дополнить до базиса: x, e_2, \dots, e_n , где $n = \dim V$.

Тогда $e^1(x) = 1 \neq 0$ - противоречие с условием $\forall f \in V^* : f(x) = 0$. \square

Задача. Доказать, что $a_1, \dots, a_n \in V$ ЛНЗ $\iff \exists$ лин. ф-ции $f^1, \dots, f^n \in V^*$ такие, что $\det(f^i(a_j)) \neq 0$.

Замечание. Если $\dim V = \infty$, то $V^* \not\cong V$ в общем случае.

Пример. $V = \mathbb{Q}[t]$ - V счётно. Зафиксируем число $t \in \mathbb{Q}$ и рассмотрим произвольную $f \in V^*$:

$$f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots) \Rightarrow V^* \text{ континуально.}$$

Отсюда мощность V^* больше мощности V , и они, очевидно, не изоморфны.

7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - линейное отображение.

Пример.

$V_1 = D(a, b)$ - множество функций над полем \mathbb{R} , дифференцируемых на (a, b) ;

$V_2 = F(a, b)$ - множество функций над полем \mathbb{R} , определенных на (a, b) ;

$\varphi(f) = \frac{df}{dt}$, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - линейное отображение, $\text{Ker}(\varphi) = \{\text{const}\}$

Частный случай: $V_1 = \mathbb{R}[t]_n$, $V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$

$\varphi(f) = f'$ - линейное отображение (взяли производную)

$\text{Ker}(\varphi) = \{\text{const}\}$. Является ли φ сюръекцией?

$\forall p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$

$\exists f(t) = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + \dots + a_{n-1} \frac{t^n}{n} : f'(t) = p(t) \implies \varphi$ - сюръекция

Теорема. Если $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - линейное отображение, $\dim V_1 < \infty$, то

$$\dim(\text{Im } \varphi) = \dim V_1 - \dim(\text{Ker } \varphi)$$

Доказательство. Пусть $\dim(\text{Im } \varphi) = m$ ($m \leq n = \dim V_1$)

Выберем c_1, \dots, c_m - базис в $\text{Im } \varphi \implies \exists a_1, \dots, a_m \in V_1 : \varphi(a_i) = c_i, i = \overline{1, m}$

Так же выберем базис b_1, \dots, b_k в $\text{Ker } \varphi$ (если $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, то $\text{Im } \varphi \cong V_1$)

Покажем, что $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k\}$ - базис в V_1 :

Пусть $\alpha_i, \beta_j : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j = 0_{v_1}$, тогда:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(a_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^k \beta_j \varphi(b_j)}_{0_{v_2}} = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i = \varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$$

Т.к. c_i - ЛНЗ $\implies \forall i = \overline{1, m} : \alpha_i = 0 \implies \sum_{j=1}^k \beta_j b_j = 0$

Т.к. b_i - ЛНЗ $\implies \forall j = \overline{1, k} : \beta_j = 0$

$$\begin{aligned} \forall v \in V_1 : \varphi(v) &= \sum_{l=1}^m \gamma_l c_l = \varphi\left(\sum_{l=1}^m \gamma_l a_l\right) \implies v - \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l \in \text{Ker } \varphi \\ &\implies \exists \beta_j \in \mathbb{F} : v = \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j \end{aligned}$$

□

8 Матрицы линейного отображения

Пусть: $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в V_1 ; $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ - базис в V_2

$$\begin{aligned} \forall x \in V_1 : x = \sum_{j=1}^n x_j e_j &\implies \varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \\ &= \{\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i\} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} f_i \end{aligned}$$

Определение. Назовем $A = (a_{ij}) = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}}$ - матрицей φ в базисах \mathcal{E} и \mathcal{F} .

Обозначается: $Y_f = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot X_e$ (где Y - столбец координат $\varphi(x)$).

Замечание. Для линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V$, $A_{\varphi, e} \equiv A_{\varphi, e, e}$

Алгоритм. Вычисление $\text{Ker } \varphi$ и $\text{Im } \varphi$ с помощью матрицы A_φ :

1. $\text{Ker } \varphi = \{x = \mathcal{E} \cdot x_\mathcal{E} : A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = 0\}$; $\dim(\text{Ker } \varphi) = n - \text{rk} A_\varphi$
2. $\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \{y = \mathcal{F} \cdot Y_f : Y_f = A_\varphi \cdot x_\mathcal{E}\}$
 $Y \in \text{Im } \varphi \iff \text{СЛУ } A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = Y \text{ совместна} \implies \dim(\text{Im } \varphi) = \text{rk} A_\varphi$
(т.е. не зависит от базиса);
3. $\dim(\text{Im } \varphi) + \dim(\text{Ker } \varphi) = \dim V_1$

8.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат

Утверждение. Пусть $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ - старый, а $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ - новый базисы в V_1 и $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ - старый, а $\mathcal{F}' = (f'_1, \dots, f'_m)$ - новый базисы в V_2 , C - матрица перехода из \mathcal{E} в \mathcal{E}' , а D - матрица перехода из \mathcal{F} в \mathcal{F}' . Тогда:

$$A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} = D^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C$$

Доказательство. Воспользуемся формулами связи координат векторов:

$$\forall x \in V_1 : x_\mathcal{E} = \underbrace{C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}}_C \cdot x_{\mathcal{E}'} \text{ и } \forall y \in V_2 : y_\mathcal{F} = \underbrace{C_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'}}_D \cdot y_{\mathcal{F}'}$$

Тогда формулы имеют вид:

$$Y_\mathcal{F} = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot x_\mathcal{E} \text{ и } Y_{\mathcal{F}'} = A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} \cdot x_{\mathcal{E}'} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

Умножим $(*)$ слева на D^{-1} , а также запишем выражение $x_{\mathcal{E}}$ через $x_{\mathcal{E}'}$:
 $\forall x_{\mathcal{E}'} \in F^n :$

$$D^{-1} \cdot Y_{\mathcal{F}} = D^{-1} \cdot (A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'} \iff Y_{\mathcal{F}'} = (D^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Возьмем $x_{\mathcal{E}'} = E_j, j = 1, \dots, n$ □

Замечание. Для линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V :$

$$A_{\varphi, \mathcal{E}'} = C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$$

Следствие.

1. Для любого линейного отображения ранг его матрицы инвариантен при замене базиса

$$\text{rk } A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} = \text{rk } A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}};$$

2. Для любого линейного оператора определитель и след его матрицы инвариантны при замене базиса

$$\det(A_{\varphi, \mathcal{E}'}) = \det(A_{\varphi, \mathcal{E}})$$

$$\text{tr}(A_{\varphi, \mathcal{E}'}) = \text{tr}(A_{\varphi, \mathcal{E}})$$

Доказательство.

1. Матрицы C и D невырождены, значит достаточно доказать, что $\text{rk } A = \text{rk } (AC)$, где C - невырождена.

$$\begin{cases} B = A \cdot C \implies \text{rk } B \leq \text{rk } A \\ A = (A \cdot C) \cdot C^{-1} \implies \text{rk } A \leq \text{rk } (AC) \end{cases} \implies \underbrace{\text{rk } (AC) \leq \text{rk } A \leq \text{rk } (AC)}_{\text{rk } (AC) = \text{rk } A}$$

$$2. \det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A$$

$$3. \text{tr}(AC) = \text{tr}(CA) \implies \text{tr}[C^{-1} \cdot (AC)] = \text{tr}[(AC) \cdot C^{-1}] = \text{tr } A$$

□

Теорема. Пусть a_1, \dots, a_n - ЛНЗ векторы в V_1 ($\dim V_1 = n$), b_1, \dots, b_n - случайные векторы в V_2 ($\dim V_2 = m$). Тогда $\exists!$ линейное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2 :$
 $\varphi(a_j) = b_j, j = 1, \dots, n$

Доказательство.

Пусть в некотором базисе \mathcal{E} пространства V_1 вектор $a_j \sim a_j^\uparrow$ - столбец координат, в базисе f пространства V_2 вектор $b_j \sim b_j^\uparrow$

По условию, $\forall j = 1, \dots, n : A_\varphi \cdot a_j^\uparrow = b_j^\uparrow \implies A_\varphi(a_1^\uparrow, \dots, a_n^\uparrow) = (b_1^\uparrow, \dots, b_n^\uparrow)$ или $A_\varphi \cdot A = B$, где A_φ - искомая матрица.

Отсюда получаем, что $A_\varphi = B \cdot A^{-1}$ (т.к. a_1, \dots, a_n ЛНЗ).

$$\left(\frac{A}{B} \right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эп}} \left(\frac{E}{A_\varphi} \right), \quad \left(\frac{A}{B} \right) \rightarrow \left(\frac{A}{B} \right) \cdot C_{\text{эл}} = \left(\frac{AC}{BC} \right)$$

Если $AC = E$, то $C = A^{-1}$ и $BC = BA^{-1} = A_\varphi$

□

Теорема. Если $\dim V_1 < \infty$, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - линейное отображение, то

$$\text{Im } \varphi \cong V_1 / \text{Ker } \varphi$$

Доказательство. Базис ядра дополним до базиса пространства V_1 векторами e_1, \dots, e_s . Тогда любой $v \in V_1$ можно записать в виде:

$$v = \sum_{i=1}^s x_i e_i + u, \text{ где } u \in \text{Ker } \varphi$$

По этому в факторпространстве базис составляет классы $\bar{v} + u = \sum_{i=1}^s x_i \bar{e}_i$

Рассмотрим отношение $\bar{\varphi} : V_1/u \rightarrow V_2$, где $\bar{\varphi}(\bar{v}) = \bar{\varphi}(v + u) := \varphi(v)$

Отсюда $w = \bar{\varphi}(\bar{v})$. Получаем, что $\bar{\varphi}$ - сюръективное линейное отображение (т.к. $\forall w \in V_2 \exists v \in V_1 : \varphi(v) = w$). Также $\text{Ker } \bar{\varphi} = \{0\} = \{\text{Ker } \varphi\}$, потому что если $\bar{\varphi}(\bar{v}) = 0$, то $\varphi(v) = 0$, т.е. $v \in \text{Ker } \varphi = u \implies v \in U \implies \bar{v} = u = \{0\}$ □

9 Линейные операторы

Определение. Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$ называется линейным оператором

Далее рассматриваем линейные операторы.

Утверждение.

1. $\text{Ker } \varphi$ - подпространство в V
2. $\text{Im } \varphi$ - подпространство в V

3. Если $U \subset V$, то $\varphi(U)$ - подпространство в V

Определение. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно φ (или φ - инвариантным), если:

$$\forall u \in U : \varphi(u) \in U, \text{ т.е. } \varphi(U) \subseteq U$$

Примеры.

1. Пусть $V = U \oplus W$. Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ такое, что $\varphi(v) = \varphi(u + w) = u$ - проекция V на U вдоль W . Тогда U и W - инвариантные подпространства относительно φ и $\forall u \in U : \varphi(u) = u$, а также $\forall w \in W : \varphi(w) = 0$. Отсюда $U \cong V/W$

2. Пусть $V = \mathbb{R}[t]$, $\varphi(f) = \frac{df}{dt} \Rightarrow p(t) \rightarrow p'(t)$. Здесь инвариантным является подпространство $\mathbb{R}[t]_n \supset \mathbb{R}[t]_{n-1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Теорема. Если $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, U - инвариантное подпространство, то существует базис, в котором A_φ имеет блочный вид:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Где B и C - квадратные: $B_{m \times m}$, $m = \dim U$

Доказательство. Выберем базис e_1, \dots, e_m в U и дополним до базиса в V . Тогда в полученном базисе A_φ имеет нужный вид. \square

Замечание. Пусть $U \subset V$ - инвариантное подпространство для линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V$

Ограничение φ на подпространство U :

$$\varphi|_U : U \rightarrow U; \quad \forall u \in U : \varphi|_U(u) = \varphi(u)$$

Рассмотрим факторпространство:

$$\bar{V} = V/U : \{v + u \mid u \in U\}$$

и фактор-оператор:

$$\bar{\varphi}(\bar{v}) := \overline{\varphi(v)}$$

$$\forall \bar{v} \in \bar{V} : v' = v + u, u \in U \Rightarrow \varphi(v') = \varphi(v) + \varphi(u) \in U \Rightarrow \varphi(\bar{v}) = \varphi(v)$$

Т.о. $\bar{\varphi} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ - линейный оператор.

Теорема.

1. Если существует инвариантное подпространство $U \subset V$, то в подходящем базисе:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad (I)$$

Где $B_{m \times m}$, $m = \dim U$, а точнее: B - матрица оператора $\varphi|_U$,
 C - матрица оператора $\bar{\varphi}$

2. Если $V = U \oplus W$, U и W - инвариантные для φ , то в подходящем базисе:

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad (II)$$

Причем $B = A_{\varphi|_U}$, $C = A_{\bar{\varphi}|_W}$.

Верно и обратное, если в некотором базисе матрица A_φ имеет вид (I), то для $\varphi \exists$ инвариантное подпространство, а если A_φ имеет вид (II), то V - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

Доказательство. Обозначим $\dim V = n$, $\dim U = m$, $0 < m < n$

1. Выберем базис в U : e_1, \dots, e_m и произвольно дополним его до базиса V векторами e_{m+1}, \dots, e_n .

$$\forall u \in U : u = \sum_{i=1}^m u_i e_i \implies \varphi(u) = \sum_{i=1}^m u_i \varphi(e_i)$$

В частности, столбцы $\varphi(e_1)^\uparrow, \dots, \varphi(e_m)^\uparrow$ имеют вид: $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \implies$ они составляют матрицу $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$. Столбцы матрицы $\varphi(e_{m+1}^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow)$ соответствуют номерам координат. Видно, что:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_U}$$

$\bar{e}_j = e_j + U$, $j = m+1, \dots, n$ - базис в факторпространстве $\bar{V} = V/U$.

$$\overline{\varphi(e_j)} = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i + \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj} \bar{e}_k$$

$$\implies C = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \bar{\varphi}$$

2. Если $V = U \oplus W$, векторы e_{m+1}, \dots, e_n надо выбирать в W . Остальное аналогично.

□

Теорема. (Обратная)

Для второго случая, если в базисе e_1, \dots, e_n матрица имеет вид (II), то положим $U := \langle e_1, \dots, e_m \rangle$, $W := \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$

Из определения матрицы $A_{\varphi, e}$ следует, что U, W - инвариантные относительно φ , $\varphi|_u$ имеет матрицу B , $\varphi|_w$ - матрицу C .

Замечание. В общем случае, если $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$, U_i - инвариантны относительно $\varphi : V \rightarrow V$, то в базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix}$$

где B_i - матрица $\varphi|_{u_i}$.

Примеры. $\varphi : V \rightarrow V$

1. $\text{Ker } \varphi$, $\text{Im } \varphi$, любое подпространство $U \supseteq \text{Im } \varphi$ - инвариантны.
2. Если U_1, U_2 - φ -инвариантные подпространства, то $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$ - инвариантны

10 Действия над линейными отображениями

Пусть $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - линейное отображение, $\forall x \in V_1$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{F} : (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$
2. Если $\psi : V_1 \rightarrow V_2$, то $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

Утверждение. (1) Относительно этих операций множество $Z(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 является векторным пространством.

Утверждение. (2) Если $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, то $Z(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$

Доказательство. Зафиксируем базисы в V_1 и V_2 : e и f соответственно, тогда $\forall \varphi$ взаимнооднозначно соответствует его матрица $A_{\varphi, e, f}$ относительно базисов e

и f . $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad (\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \implies$ все столбцы A_φ умножаются на $\lambda \implies A_\varphi$ умножается на λ .

$$\forall j = 1, \dots, m : (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j)$$

\implies столбцы $A_{\varphi+\psi}$ имеют вид $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$. □

Обозначение: $L(V_1, V_2) = \mathfrak{T}(V_1, V_2) = \text{Hom}(V_1, V_2)$.

$\mathfrak{T}(V)$ - множество линейных операторов на V .

Определение. Произведением линейных операторов $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ и $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ называется их композиция:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x)), \text{ где } x \in V_1$$

Утверждение. (3) *Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.*

Утверждение. (4) *Пусть V_1, V_2, V_3 - конечномерные векторные пространства, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, $\psi : V_2 \rightarrow V_3$ - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции:*

$$A_{\psi \circ \varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi$$

Доказательство.

Утверждение (3) - упражнение.

Утверждение (4): Пусть e - базис в V_1 , f - базис в V_2 , g - базис в V_3 .

$$A_\varphi = (\varphi(e_1)^\uparrow \dots \varphi(e_n)^\uparrow) \text{ в базисе } f$$

$$A_\psi = (\psi(f_1)^\uparrow \dots \psi(f_m)^\uparrow) \text{ в базисе } g$$

$\forall x = eX$, обозначим $y = \varphi(x)$, $z = \psi(y)$ со столбцами координат Y и Z соответственно. Тогда:

$$Y = A_\varphi X, \quad Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi \circ \varphi} X$$

□

Теорема. *Множество $L(V)$ с операциями $+$, $\cdot \lambda$, \cdot является ассоциативной алгеброй с единицей, равной $\text{id } V$. Если $\dim V = n$, то $L(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Следует из утверждений (1) - (4). □

Утверждение. *Если φ - линейный оператор на V , то $\forall k \in \mathbb{N}$ подпространства $\text{Ker } \varphi^k$ и $\text{Im } \varphi^k$ инвариантны. При этом:*

$$\{0\} \subseteq \text{Ker } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi^2 \subseteq \dots$$

$$V \supseteq \text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \dots$$

11 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор над полем \mathbb{F}

Определение. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ , если $x \neq 0$ и

$$\exists \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(x) = \lambda \cdot x \quad (1)$$

Где λ - называется собственным значением оператора φ , соответствующим вектору x .

Пусть $\dim V = n$, e - базис в V , в нём $\forall x = e \cdot X$, тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно:

$$A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \quad (2)$$

- это СЛУ для нахождения вектора x , если известна λ . Система (2) имеет ненулевое решение, только если:

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \quad (3)$$

Равенство (3) называется характеристическим уравнением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

Примеры.

1. $V = D^\infty(\mathbb{R})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций.

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \quad \forall f(x) : \varphi(f) = f'(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$$

Доказательство. Если $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$, то $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, где $C \neq 0$.

Рассмотрим $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \implies f(x)e^{-\lambda x} = C$. \square

- 2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Упражнение. Какие существуют собственные векторы и собственные значения у φ во втором примере?

Определение.

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{11} - \lambda) + \cdots = (-\lambda)^n + (a_{11} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det A$$

$\chi_A(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A

Утверждение. (1) $\chi_A(\lambda)$ - не зависит от базиса.

Доказательство. В новом базисе: $A'_\varphi = C^{-1} \cdot A_\varphi \cdot C$

$$\chi_{A'_\varphi}(\lambda) = \det(C^{-1}A_\varphi C - \lambda E) = \det(C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C) = \det(A_\varphi - \lambda E)$$

□

Определение. Вместо $\chi_{A_\varphi}(\lambda) = \chi_\varphi(\lambda)$ и называется характеристическим многочленом оператора φ

12 Диагонализированность

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор

Лемма. Если $a_1, \dots, a_m \in V$ - собственные векторы оператора φ с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, причем $\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j$, то a_1, \dots, a_m - ЛНЗ.

Доказательство.

$m = 1$: Один вектор $a_1 \neq 0$ ЛНЗ

$m > 1$: Предположение индукции: Любые $m - 1$ вектор, отвечающих попарно различным собственным значениям - ЛНЗ

Запишем:

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

Под действием оператором

$$\varphi : a_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

Домножим (1) на λ_m и вычтем его из (2):

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$$

По предположению индукции $\forall i = 1, \dots, m - 1 : \alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \implies \alpha_i = 0$

Остается $\alpha_m a_m = 0 \implies \alpha_m = 0$

□

Следствие. Если φ имеет n попарно различных собственных значений ($\dim V = n$), то соответствующие собственные векторы, взятые по одному для каждого собственного значения, образуют базис в V (Базис из собственных векторов или собственный базис).

Вид матрицы A_φ в базисе из собственных векторов:

Обозначаем базис $\{e_1, \dots, e_n\} \in V$, $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j$, $j = \overline{1, n}$
 $\forall x \in V : \varphi(x) = A_{\varphi, e} \cdot X_e$. Столбец вектора $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

$$A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- диагональная, причем на диагонали находятся собственные значения с учетом нумерации векторов

12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением

Фиксируем собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ так, что $\exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda_0 v$
 Обозначается: $V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$

Утверждение. (1) V_{λ_0} - подпространство в V , $V_{\lambda_0} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \cdot \text{id})$

Доказательство. Если A_φ - матрица оператора φ , то в координатах V_{λ_0} - множество всех решений СЛУ.

$$(A_\varphi - \lambda_0 E) \cdot X = 0 \implies \dim V_{\lambda_0} = n - \text{rk}(A_\varphi - \lambda_0 E)$$

□

Определение.

$\dim V_{\lambda_0}$ - геометрическая кратность характеристического корня $\lambda = \lambda_0$. Имеет смысл и алгебраическая кратность λ_0 характеристического корня $\chi_\varphi(\lambda)$:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p(\lambda_0), \quad P(\lambda_0) \neq 0, \quad k - \text{алгебраическая кратность}$$

Лемма. Для любого собственного значения λ_0 оператора φ :

$$\dim V_{\lambda_0} \leq \text{алгебраическая кратность корня } \lambda = \lambda_0 \text{ в } \chi_\varphi(\lambda)$$

Доказательство. Пусть $\dim V_{\lambda_0} = m \leq n$, выберем базис в $V_{\lambda_0} : \{e_1, \dots, e_m\}$ и произвольно дополним его до базиса в V (при $m < n$) векторами $e_{m+1}, \dots, e_n \Rightarrow$

$$A_{\varphi,e} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & C \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_0 & \\ \hline & & 0 & B \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$|A_{\varphi,e} - \lambda E| = \det \left(\begin{array}{ccc|c} (\lambda_0 - \lambda) & & 0 & C \\ & \ddots & & \\ 0 & & (\lambda_0 - \lambda) & \\ \hline & & 0 & B - \lambda E \end{array} \right) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot |B - \lambda E| = 0$$

Не исключено, что $\lambda = \lambda_0$ - корень уравнения $|B - \lambda E| = 0$ □

Замечание. Любое собственное подпространство V_{λ_0} является φ - инвариантным:

$$\forall v \in V_{\lambda_0} : \varphi(v) = w : \varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = \lambda_0 \varphi(v) = \lambda_0 w$$

Либо $w = 0$, либо является собственным вектором.

Следствие. 2 из Леммы о ЛНЗ:

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ - все попарно различные собственные значения оператора φ , тогда $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}$ - является прямой суммой, т.е.:

$$\forall i = 1, \dots, n : V_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right) = \{0\}$$

Доказательство. Допустим, что $\exists w \in V_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right)$, тогда:

$$w = v_i = \sum_{j \neq i} v_j \Rightarrow \left(\sum_{j \neq i} v_j \right) - v_i = 0$$

Где $\left(\sum_{j \neq i} v_j \right)$ - попарно различные собственные векторы, т.е. либо 0, либо противоречие с ЛНЗ $\Rightarrow v_i = w = 0$ □

Определение. Скажем, что φ (или его матрица) приводится к диагональному виду (т.е. диагонализируема), если в $V \exists$ базис, в котором A_φ диагональна.

Теорема. Для линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V$ ($\dim V < \infty$) следующие условия эквивалентны:

1. A_φ - диагонализируема

2. В $V \exists$ базис из собственных векторов

3. Все характеристические корни принадлежат \mathbb{F} и $\forall i = 1, \dots, r :$

$$\dim V_{\lambda_i} = \text{алгебраической кратности корня } \lambda_i$$

$$4. V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$$

Доказательство.

1 \Rightarrow 2 : Если $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, это значит, что:

$$\varphi(e_j)^\uparrow = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi(e_j) = \lambda_j e_j$, т.е. e_j - собственный вектор с собственным значением λ_j

2 \Rightarrow 1 : В базисе из собственных векторов матрица A_φ диагональна

1 \cup 2 \Rightarrow 3 : Выберем базис из собственных векторов $\{f_1, \dots, f_n\}$ так, чтобы:

$$\{f_1, \dots, f_{m_1}, f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+m_2}, \dots\}$$

В этом базисе матрица $A_{\varphi, f}$ выглядит:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_r \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m_1}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m_2}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m_r}$

$\Rightarrow m_1 + \dots + m_r = n$. С другой стороны, если k_i - алгебраическая кратность корня λ_i , то:

$$n = \sum_{i=1}^r m_i \leq \sum_{i=1}^r k_i = \deg[\chi_\varphi(\lambda)] = n$$

3 \Rightarrow 4 : $\sum_{i=1}^r \dim V_{\lambda_i} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

4 \Rightarrow 1 : Базис в V - объединение базисов слагаемых

□

Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над \mathbb{R} , отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, тогда в некотором базисе V , φ действует матрицей $Y = A_\varphi \cdot X$, где $X \in \mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора ($y = \varphi(x)$). Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем \mathbb{C} , действующий при той же матрице:

$$A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n, Z \rightarrow A_\varphi \cdot Z$$

Соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как \mathbb{C} алгебраически замкнуто, то \exists собственный вектор Z_0 , отвечающий выбранному λ . Это значит, что:

$$A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0, \quad Z_0 = X_0 + iY_0, \quad \text{где } X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \implies A_\varphi Z_0 &= A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = \\ &= (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \implies \\ &\implies \begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \implies \text{подпространство } U := \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$$

$\implies U$ является инвариантным подпространством для φ .

Теперь докажем, что $\dim U = 2$

Доказательство. Предположим, что $\dim U = 1$, то есть $y_0 = \mu x_0$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \implies$ если $x_0 \neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ .

$$A_{\varphi|_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ имеет корни } \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R} - \text{противоречие}$$

□

Теорема. Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Если $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характеристического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V$, $u_i \neq 0$, $\implies \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.

Если $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $\exists U$ - двумерное инвариантное подпространство. \square

Вместо диагонализированности можно использовать следующее утверждение:

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, r}$, а $\beta_j \neq 0$, $j = \overline{1, m}$

13 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор над полем \mathbb{F} .

Определение. Линейный оператор $\varphi : V \rightarrow V$ такой, что $\forall v \in V : \varphi(v) = v$, называется тождественным оператором и обозначается id .

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \dots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ

$$f(\varphi) = a_0 \cdot \text{id} + a_1 \varphi + \dots + a_m \varphi^m = 0 \implies f(A_\varphi) = 0$$

$$\implies A_{f(\varphi)} = f(A_\varphi) = a_0 E + a_1 A_\varphi + \dots + a_m A_\varphi^m.$$

Пример. $V = \mathbb{R}[t]_n$, $\varphi = \frac{d}{dt}$

$$\varphi^n(t^n) = n!, \quad \varphi^{n+1} \equiv 0 \implies \text{для } \varphi = \frac{d}{dt} \quad t^{n+1} - \text{анулирующий многочлен}$$

Утверждение. Если $\dim V = n \implies \exists$ многочлен $\deg \leq n^2$, анулирующий φ .

Доказательство. $\dim L(V) = n^2$, $L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \implies$ операторы $\{Id, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n^2}\}$ - линейно зависимы, так как их больше $n^2 \implies$

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{F} : a_0 \cdot \text{id} + a_1 \varphi + \dots + a_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$$

$$\implies a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2} - \text{анулирующий многочлен для } \varphi$$

\square

Определение. Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица $P = (P_{ij}(\lambda))$, где $P_{ij}(\lambda)$ - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

Пример.

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2$$

- многочлен от λ с матричными коэффициентами.

Определение. Оператор $\varphi : V \rightarrow V$ называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

Определение. Для матрицы $A = (a_{ij})$ присоединённой матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ji})$, то есть $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$.

Свойство.

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

Теорема. Гамильтона-Кэли

Характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ является анулирующим многочленом для линейного оператора φ , то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$, где 0 - нулевой оператор.

В матричной форме:

$$\forall A \in M_n(\mathbb{F}) : \chi_A(A) = 0$$

Доказательство. Пусть A - данная матрица, тогда:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \sum_{i=0}^n p_i \lambda^i$$

$$p_i \in \mathbb{F}, p_n = (-1)^n, \chi_A(A) = \sum_{i=0}^n p_i A^i \text{ (считаем, что } A^0 = E)$$

Составим матрицу:

$$\widehat{A - \lambda E} = \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j, \text{ где } D_j \in M_n(\mathbb{F})$$

Рассмотрим равенство:

$$(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda)E$$

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j &= \sum_{j=0}^{n-1} (AD_j \lambda^j) - \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^{j+1} = \\
&= AD_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (AD_j - D_{j-1}) \lambda^j - D_{n-1} \lambda^n = \chi_A(\lambda) E = \left(\sum_{j=0}^n p_j \lambda^j \right) E
\end{aligned}$$

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях λ :

$$\begin{array}{l|l}
E \cdot & \lambda^0 : \quad AD_0 = p_0 E \\
A \cdot & \lambda^1 : \quad AD_1 - D_0 = p_1 E \\
\vdots & \\
A^j \cdot & \lambda^j : \quad AD_j - D_{j-1} = p_j E \\
\vdots & \\
A^n \cdot & \lambda^n : \quad -D_{n-1} = p_n E
\end{array}$$

Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени A и сложим:

$$\implies \chi_A(A) E = 0$$

□

13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора

Определение. Минимальным анулирующим многочленом линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V$ называется анулирующий многочлен φ минимальной степени. Обозначается: $\mu_\varphi(\lambda)$ (Зачастую его выбирают со старшим коэффициентом = 1) Ясно, что:

$$m = \deg \mu_\varphi(\lambda) \leq n \leq \deg \chi_\varphi(\lambda)$$

Теорема.

1. $\mu_\varphi(\lambda)$ делит анулирующий многочлен оператора φ (в частности $\chi_\varphi(\lambda)$);
2. Если $\mu'_\varphi(\lambda)$ тоже минимальный многочлен φ , то:

$$\mu'_\varphi(\lambda) = \alpha \mu_\varphi(\lambda), \quad \alpha \neq 0$$

Он определен единственным образом с условием, что старший коэффициент = 1;

3. Если все корни λ_i характеристического многочлена принадлежат \mathbb{F} , то они являются и корнями минимального многочлена.

Доказательство.

1. Пусть $p(\varphi) = 0$, для некоторого $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$

Разделим p с остатком на μ_φ :

$$p(\lambda) = \mu_\varphi(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = \mu_\varphi(\varphi) \cdot q(\varphi) + r(\varphi) = 0 \Rightarrow r(\varphi) = 0$$

Т.к. $\deg r(\lambda) < \deg(\mu_\varphi(\lambda))$, $r(\lambda) \equiv 0$.

2. Т.к. $\mu_\varphi(\lambda) \mid \mu'_\varphi(\lambda)$ и $\mu'_\varphi(\lambda) \mid \mu_\varphi(\lambda) \Rightarrow \frac{\mu'_\varphi}{\mu_\varphi} = \alpha \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$

Если $\mu_\varphi(\lambda) = \lambda^m + \dots$ и $\mu'_\varphi(\lambda) = \lambda^m + \dots \Rightarrow \alpha = 1$

3. Допустим, что $\exists j : \mu_\varphi(\lambda_j) \neq 0$, т.е. в разложение μ_φ не входит $(\lambda - \lambda_j)$
 $\Rightarrow \exists$ вектор $v \in V : \varphi(v) = \lambda_j v$

$$0 = \mu_\varphi(\varphi)(v) = \mu_\varphi(\varphi(v)) = \mu_\varphi(\lambda_j v) = \mu_\varphi(\lambda_j) v \neq 0$$

- противоречие

□

Примеры.

1.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi_\varphi(\lambda) = (2 - \lambda)^3$$

$$A_\varphi - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2E)^2 \neq 0, \quad (A - 2E)^3 = 0 \Rightarrow \mu_\varphi = -\chi_\varphi$$

2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_\varphi = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

$$(A_\varphi - 2E)(A_\varphi - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Вопросы:

1. Для каких операторов φ (или A_φ) $\chi_\varphi(\lambda) = \pm \mu_\varphi(\lambda)$?

2. Для каких φ корни $\mu_\varphi(\lambda)$ простые?

Определение. Оператор φ нильпотентный, если:

$$\exists L \in \mathbb{N} : \varphi^L = 0$$

Если L - минимальный с этим условием, то L - индекс нильпотентности

Пример. $D = \frac{d}{dt}$ в пространстве $\mathbb{R}[t]_n$, то $D^{n+1} = 0$

Утверждение. Все собственные значения нильпотентного оператора $= 0$

Доказательство. Если $v \neq 0$, $\varphi(v) = \lambda v$:

$$\implies \varphi^L(v) = \lambda^L v = 0 \implies \lambda = 0 \implies \chi_\varphi(\lambda) = \pm \lambda^n$$

□

14 Корневые подпространства

$\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор над \mathbb{F} , $\dim V = n$

Все корни характеристического многочлена для φ принадлежат F так, что:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}, \quad \forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \sum_{i=1}^s k_i = n$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}} \mid \cdot \chi_\varphi(\lambda)$$

$$\implies 1 = f_1(\lambda) \prod_{i \neq 1} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} + \dots + f_s(\lambda) \prod_{i \neq s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

$$1 = q_1(\lambda) + \dots + q_s(\lambda) \implies \text{id} = q_1(\varphi) + \dots + q_s(\varphi) = Q_1 + \dots + Q_s$$

$$\forall x \in V : x = Q_1(x) + \dots + Q_s(x) \implies V = \text{Im}(Q_1) + \dots + \text{Im}(Q_s)$$

Обратим внимание, что:

$$\forall i \neq j : Q_i Q_j = Q_j Q_i = 0$$

Т.к. в $q_i(\lambda)q_j(\lambda)$ входят все множители, входящие в разложение $\chi_\varphi(\lambda) \implies$ по теореме Гамильтона-Кэли:

$$q_i(\varphi)q_j(\varphi) = 0$$

Умножим равенство $\text{id} = Q_1 + \dots + Q_i + \dots + Q_s$ на Q_i :

$$\implies Q_i \text{id} = Q_i = Q_i Q_1 + \dots + Q_i Q_i + \dots + Q_i Q_s = Q_i^2 \implies Q_i^2 = Q_i$$

Определение. $Q_i^2 = Q_i$ - идемпотентный оператор.

Введем обозначение $K_i = \text{Im}Q_i$

Утверждение. $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$

Доказательство. Пусть $x = y_1 + \dots + y_s$, $y_i = Q_i(x_i)$. Тогда:

$$Q_i(x) = Q_i(Q_1(x_1)) + \dots + Q_s(Q_i(x_s)) = Q_i(Q_i(x_i)) = Q_i(x_i) = y_i$$

Отсюда разложение любого вектора из V в сумму векторов из K_1, \dots, K_s единственно, т.е. $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$. \square

Определение. Подпространство $K_i = \text{Im}Q_i$ назовем корневым подпространством, отвечающим корню λ_i .

Замечание. $q_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda) \cdot \chi_\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}} = f_i(\lambda) \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$; $Q_i = q_i(\varphi)$; $K_i = \text{Im}Q_i$.

Утверждение.

1. Корневые подпространства инвариантны
2. $K_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$, $1 \leq i \leq s$

Доказательство.

1. Докажем, что для линейного оператора φ и многочлена $q(\lambda)$ подпространство $q(\varphi)(V)$ инвариантно:

$$q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m, \quad q(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + \dots + a_m\varphi^m$$

Возьмем $v \in \text{Im}q(\varphi) \implies \exists u \in V : v = q(\varphi)(u) \implies \varphi(v) = (\varphi \cdot q(\varphi))(u) = q(\varphi)(\varphi(u)) \in \text{Im}q(\varphi)$, так как оператор φ и любой $q(\varphi)$ перестановочны.

Так как $K_i = Q_i(V) = q_i(\varphi)(V)$, из доказанного выше следует, что K_i инвариантно.

2. $\forall x_i \in \text{Im}Q_i \implies x_i = Q_i(u_i)$

$$(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}(x_i) = f_i(\varphi) \cdot (\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i} \cdot \underbrace{\prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j E)^{k_j}}_{\chi_\varphi(\varphi)}(u_i) = 0$$

$$\implies K_i \subseteq \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$$

Обратно: пусть $y_i \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$. Знаем, что $y_i = Q_1(y_i) + \dots + Q_s(y_i)$, причём в Q_j при $j \neq i$ содержится множитель $(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$. Отсюда $Q_j(y_i) = 0$ при $j \neq i$, т.е. $y_i = Q_i(y_i) \implies y_i \in K_i \implies \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i} \subseteq K_i$.

□

Теорема. Размерность K_i равна алгебраической кратности корня λ_i .

Доказательство. Рассмотрим ограничение оператора $\varphi - \lambda_i \cdot \text{id}$ на K_i . Так как полученный оператор нильпотентный (из предыдущей теоремы), его единственное собственное значение равно 0, т.е. оператор φ в ограничении на K_i имеет единственное собственное значение λ_i , причём его алгебраическая кратность для ограничения равна размерности K_i .

Выберем базис в K_i , дополним его до базиса V и рассмотрим матрицу оператора в нём. Из инвариантности K_i она будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

где B - матрица $\varphi|_{K_i}$. Из её характеристического многочлена очевидно, что алгебраическая кратность λ_i для ограничения не может превосходить алгебраической кратности λ_i для всего оператора. Значит, $\dim K_i$ не превосходит алгебраической кратности λ_i .

Осталось заметить, что $\dim V$ равна сумме алгебраических кратностей всех собственных значений и $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s \Rightarrow \dim V = \dim K_1 + \dots + \dim K_i$. Значит, $\dim K_i$ равна алг. кратности λ_i . □

15 Теорема Жордана

Основное условие: $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор, все его корни $\in \mathbb{F}$

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ и } \sum_{i=1}^s k_i = \dim V)$$

$V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$, где $K_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$ - корневое подпространство

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda_i x\}, \quad \dim V_{\lambda_i} \leq k_i = \dim K_i$$

Так как K_i - инвариантное подпространство относительно оператора φ , можно рассмотреть ограничение:

$$(\varphi - \lambda_i \text{id})|_{K_i} := B_i$$

Из определения K_i следует, что $B_i^{K_i} = 0$, то есть B_i - нильпотентный оператор. В базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

где $A_i = A_{\varphi_{k_i}}$ - матрица порядка k_i , $A_i - \lambda_i E_{k_i} = B_i$, $B_i^{k_i} = 0$
Обозначим $K_i := K$, $B_i := B$, $k_i := k$, тогда:

$$\forall x \in K : B^k(x) = 0$$

если $x \neq 0$, то \exists наименьшее значение m :

$$B^m(x) = 0, B^{m-1}(x) \neq 0 \ (m \leq h)$$

Назовём это высотой вектора x .

Для фиксированного вектора $x \neq 0$ (высоты m) рассмотрим векторы:

$$x, Bx, \dots, B^{m-1}x, B^m x = 0$$

Определение. Векторы $\{x, Bx, \dots, B^{m-1}x\}$ называются жордановой цепочкой.

Лемма. Вышеуказанные векторы являются линейно независимыми.

Доказательство. Предположим, что:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Bx + \dots + \alpha_{m-1} B^{m-1}x = 0$$

Подействуем на это равенство оператором B^{m-1} :

$$\alpha_0 B^{m-1}x = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

На оставшиеся векторы подействуем оператором B^{m-2} :

$$\alpha_1 B^{m-1}x = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

и т.д. Получим, что $\forall i = \overline{0, m-1} : \alpha_i = 0 \implies$ векторы являются линейно независимыми. \square

Определение. Подпространство, натянутое на эти векторы:

$$\langle x, Bx, \dots, B^{m-1}x \rangle$$

называется циклическим подпространством, порождённым жордановой цепочкой. Данное подпространство обозначим U_x , $\dim U_x = m$.

Обычно векторы жордановой цепочки нумеруют с конца, то есть:

$$a_1 = B^{m-1}x, \quad a_2 = B^{m-2}x, \dots, a_m = x$$

Тогда a_1 - собственный вектор для B , и для $\forall j = \overline{2, m} : a_{j-1} = Ba_j$.

Вектор a_j называется **присоединённым** к вектору a_{j-1} .

К вектору a_1 : a_2 - присоединённый, a_3 - второй присоединённый и т.д.

Определение.

Матрица ограничения оператора B на подпространство $U_x = \langle a_1 \dots a_m \rangle$:

$$B|_{U_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

называется жордановой клеткой с собственным значением $\lambda = 0$

$$\lambda = \lambda_i : A_{\varphi|_{U_x}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = J_k(\lambda_i)$$

- жорданова клетка с собственным значением $\lambda = \lambda_i$, где:

$$\varphi(a_2) = a_1 + \lambda_i a_2, \quad \varphi(a_{j+1}) = a_j + \lambda_i a_{j+1}$$

Перед доказательством теоремы докажем лемму:

Лемма. Если B - такой оператор в пространстве V , что:

$$\text{Im} B = B(V) \subset V$$

то V обладает $(n-1)$ -мерным инвариантным подпространством W , таким что $\text{Im} B \subseteq W$.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_m - базис в $\text{Im} B$, $m < n = \dim V$

Дополним его до базиса в V векторами e_{m+1}, \dots, e_n .

Тогда $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ - искомое инвариантное подпространство:

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i \implies Bw = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i B e_i \in \text{Im} B \subseteq W$$

□

Теорема. Жордана

Если все характеристические корни оператора $\varphi : V \rightarrow V$ принадлежат полю \mathbb{F} , то V является прямой суммой циклических подпространств для оператора φ . Это равносильно тому, что в V существует базис, составленный из жордановых цепочек. Такой базис называется жордановым базисом.

Если жорданов базис уже построен: Пусть имеются r жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, необязательно различным, длины которых m_1, \dots, m_r соответственно, тогда в этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{m_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^r m_i = n = \dim V$$

- жорданова матрица - жорданова нормальная форма (ЖНФ) матрицы A_φ .

Теорема. Жордана (матричная формулировка)

Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$, все характеристические корни которой $\in \mathbb{F}$, \exists матрица C ($\det C \neq 0$) такая, что:

$$C^{-1}AC = J$$

- жорданова матрица. При этом жордановы клетки определены для матрицы A единственным образом с точностью до расположения клеток на диагонали жордановой матрицы.

Замечание. Матрицу A можно интерпретировать как матрицу линейного оператора φ , для него верна теорема Жордана.

Доказательство. (См. Шафаревич И.Р. "Линейная алгебра")

Доказательство достаточно провести для ограничения оператора на каждое корневое подпространство K_i .

Введем обозначения: $B : V \rightarrow V$ - нильпотентный оператор, $\dim V = n$, W - $(n-1)$ -мерное инвариантное подпространство в V , содержащее $\text{Im} B$ (существует по лемме 1).

Докажем теорему индукцией по n :

База: если $n = 1$, то $B = 0$ и любой базис - жорданов.

Пусть $n > 1$, тогда по предположению индукции в $W \exists$ базис для $B|_w$, т.е.

$$W = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

Выберем вектор $a \in V \setminus W$, тогда a ЛНЗ с векторами из W .

Рассмотрим $Ba \in W$ (т.к. $\text{Im} B \subseteq W$) так, что $Ba = u_1 + \dots + u_r$, $u_i \in U_i$ (*).

Если $Ba = 0$, то:

$$V = \langle a \rangle \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_r - \text{искомое разложение пространства}$$

Если $Ba \neq 0$, то найдется i , что $u_i \neq 0$.

Если в разложении есть $u_i \in B(U_i)$, то $\exists v_i \in U_i : u_i = Bv_i$.

Рассмотрим вместо a вектор $a - v_i : B(a - v_i) = u_1 + \dots + u_i + \dots + u_r - u_i \implies$
в разложение такого вектора u_i не входит.

Заменив a на нужные разности $a - v_i$, получим новый вектор $e \in V \setminus W$, при этом занулив все $u_i \in B(U_i)$, т.е.

$$Be = u'_1 + \dots + u'_r, \forall i \text{ либо } u'_i \notin B(U_i), \text{ либо } u'_i = 0$$

Хотя бы один из векторов $u'_i \neq 0$, выберем из них вектор, имеющий максимальную высоту m . Заметим, что $m = \max(\dim U_i)$, так как каждый u'_i по построению нового разложения имеет максимальную высоту в своём подпространстве. Тогда $h(e) = m + 1$, т.к. $h(Be) = m$.

Без ограничения общности выбрали вектор u_1 . Докажем, что:

$$V = \langle e, Be, \dots, B^m e \rangle \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$$

Сумма размерностей подпространств в правой части:

$$(m_1 + 1) + \dots + m_r = n = \dim V$$

Поэтому для прямой суммы достаточно доказать, что:

$$\langle e, Be, \dots, B^m e \rangle \cap (U_2 \oplus \dots \oplus U_r) = \{0\}$$

Пусть $v = \lambda_1 e + \dots + \lambda_{m+1} B^m e \in U_2 \oplus \dots \oplus U_r$

Т.к. $e \notin W$, $\lambda_1 = 0$. $Be = u'_1 + \dots + u'_r \implies$ проекция Be на U_1 равна u'_1 .

Спроецируем всё разложение на U_1 :

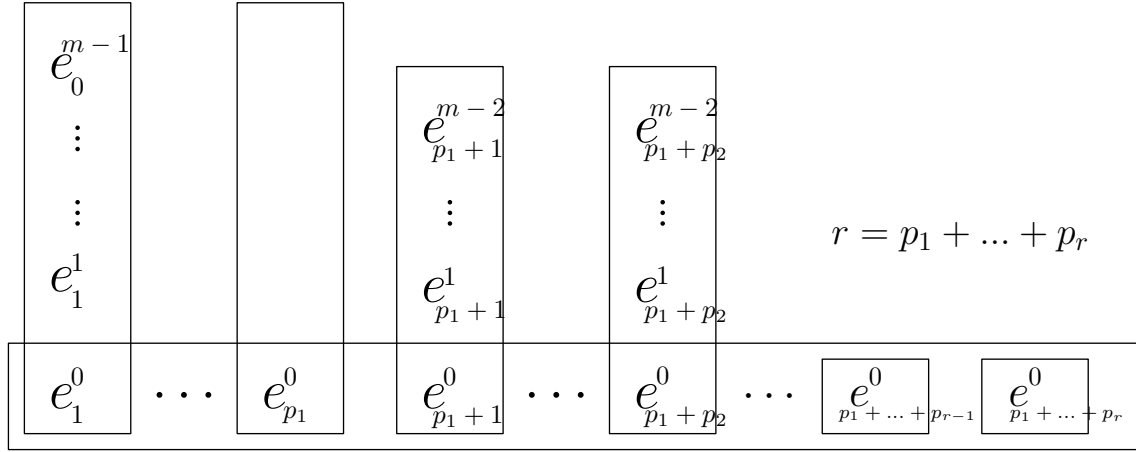
$$\lambda_2 u_1 + \lambda_3 Bu_1 + \dots + \lambda_{m+1} B^{m-1} u_1 = 0 \implies \lambda_2 = \dots = \lambda_{m+1} = 0 \implies v = 0$$

Существование ЖНФ доказано. Доказательство единственности приводится в следующем пункте. \square

Замечание. r - количество циклических подпространств в разложении корневого подпространства K , отвечающего корню λ_0 , равно геометрической кратности корня λ_0 характеристического многочлена.

15.1 Изображение разложения корневых подпространств

Обозначим: $r = \dim \text{Ker } B$ - размерность собственного подпространства
 Занумеруем собственные векторы, входящие в цепочки, располагая цепочки по убыванию высоты. m - максимальная высота цепочки, 1 - минимальная
 Также введем обозначение для последовательных присоединённых векторов:
 есть p_1 цепочек высоты m , p_2 - высоты $m - 1, \dots, r - (p_1 + \dots + p_{r-1})$ - высоты 1



$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r, \dim U_{i+1} \leq \dim U_i$$

$$\begin{aligned} BV &= BU_1 \oplus \dots \oplus BU_r \\ &\vdots \\ B^k V &= B^k U_1 \oplus \dots \oplus B^k U_r \end{aligned}$$

$$\text{Если } \dim U_i = m_i, \dim(B^k U_i) = \begin{cases} m_i - k, & \text{если } k < m_i \\ 0, & \text{если } k \geq m_i \end{cases} \implies$$

$$\dim(B^k V) = \sum_{i=1}^r \dim B^k U_i = q_{k+1} + 2q_{k+2} + \dots + (m - k)q_m$$

Пусть q_i - число циклических подпространств размерности i , $1 \leq i \leq r$

Обозначим $r_k = \text{rk } B^k$

Для $k = 0$ до $m - 1$ получим равенства:

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad q_1 + 2q_2 + \dots + mq_m = n \\ k = 1 : & \quad q_2 + 2q_3 + \dots + (m - 1)q_m = r_1 = \text{rk } B \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

$$q_m = r_{m-1} = \text{rk } B^{m-1} \neq 0$$

$B^m = 0$ на корневом подпространстве

Вычитая из каждого уравнения следующее, получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 + \dots + q_m = n - r_1 \implies q_1 = n - 2r_1 + r_2 \\ q_2 + \dots + q_m = r_1 - r_2 \implies q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 \\ \dots \\ q_m = r_{m-1} - r_m \quad (r_m = 0) \end{array} \right.$$

$$\implies q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1} \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

Вывод: количество и порядок (высоты цепочек) однозначно определяется по матрице $B = A|_{\varphi - \lambda \text{id}}$ - эти ранги не зависят от конкретного разложения \implies определяются единственным образом, т.е. **ЖНФ единственна с точностью до перестановки клеток на диагонали.**

Следствие. Пусть:

$$\chi_\varphi = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

- характеристический многочлен

$$\mu_\varphi = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

- минимальный многочлен

Тогда $\forall i = \overline{1, s}$: m_i равна тах размерности жордановой клетки, отвечающей корню λ_i

Следствие. Критерий диагонализируемости в терминах m_i многочлена:

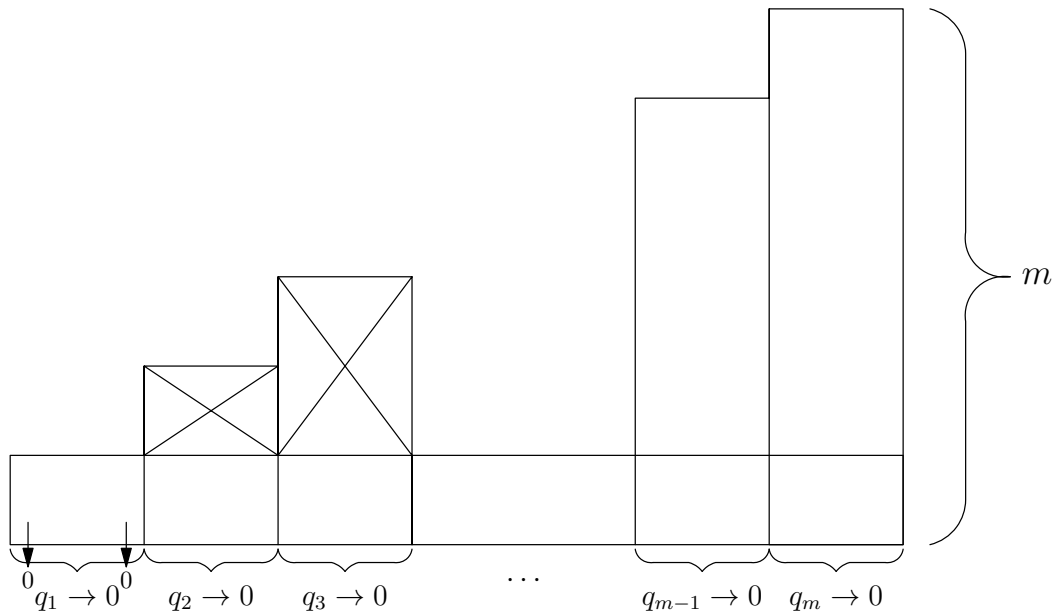
Оператор φ диагонализируем $\iff m_1 = \dots = m_s = 1$

Доказательство. Достаточно доказать для каждого корневого подпространства K_i

$$B = A_{\varphi - \lambda_i \text{id}}|_{K_i}$$

- блочно-диагональная матрица с клетками размера m_j □

Переделываем:



Применим оператор B :

$$\begin{cases} \dim V = q_1 + 2q_2 + \dots + (m-1)q_{m-1} + mq_m = n \\ \dim \operatorname{Im} B = q_2 + \dots + (m-2)q_{m-1} + (m-1)q_m = r_1 \\ \vdots \\ \dim \operatorname{Im} B^{m-1} = q_m = r_{m-1} \end{cases}$$

Некоторые применения приведут матрицу к жордановой форме (в частности, диагонализируемости)

15.2 Решение СЛАУ

Пусть дана система $AX = B$ с квадратной матрицей A , все характеристические корни которой $\in \mathbb{R}$.

Сделаем замену:

$$X = CY \implies (AC)Y = B \iff \underbrace{(C^{-1}AC)}_Y Y = C^{-1}b = b'$$

Можно взять C - матрицу перехода к жорданову базису

$$y = \begin{pmatrix} \boxed{Y_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{Y_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Если y жорданова клетка, то уравнения:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = b'_1 \\ \lambda x_2 + x_3 = b'_2 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{легко решить}$$

15.3 Решение СЛДУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$\dot{X} = AX$, где A - квадратная

$$X = CY \implies \dot{X} = C\dot{Y}$$

$$C\dot{Y} = (AC)Y \implies \dot{Y} = (C^{-1}AC)Y$$

Если матрица $C^{-1}AC$ диагональная: $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0$ получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \lambda_n y_n \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Тогда $X = CY$

Если

$$C^{-1}AC = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \lambda_0 y_{n-1} + y_n \\ \dot{y}_n = \lambda_0 y_n \end{cases}$$

решаем снизу вверх.

15.4 Функции от матриц

$$(C^{-1}AC) = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix} \implies A = CYC^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = (CYC^{-1})(CYC^{-1})...(CYC^{-1}) = CY^n C^{-1}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}^n(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}^n(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} & 1 \\ & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \left(\lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 + \dots = \begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1} C_n^1 & \lambda^{n-2} C_n^2 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \lambda^n & \lambda^{n-1} C_n^1 & \lambda^{n-2} C_n^2 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Упражнение. Пусть $f(t)$ - многочлен, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

Доказать, что:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

15.5 Вычисление корня и экспоненты

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

Для $J_n(\lambda) = \lambda E + B \Rightarrow$

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^{t\lambda E} \cdot e^{tB} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{A+B} = e^A \cdot e^B \iff AB = BA)$$

Примеры.

1.

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)t^2 + \dots$$

2.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = E + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2!}C_{\frac{1}{2}}^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \neq 0$$

16 Билинейные и квадратичные формы

Определение. Функция $b : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ называется билинейной функцией, если:

1. аддитивность:

$$\forall x_1, x_2, y : b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2 : b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$$

2. однородность:

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} : b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$$

Определение. $b(x, y)$ - называется симметрической, если:

$$\forall x, y \in V : b(y, x) = b(x, y)$$

Примеры.

1. Симметрическая билинейная функция - скалярное произведение

2. $V = M_n(\mathbb{F}) : b(X, Y) = \text{tr}(XY)$

3. $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

16.1 Запись билинейной функции в координатах

Пусть в V задан базис e_1, \dots, e_n , тогда:

$$b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n b(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j)$$

Определение. Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, тогда $B_e = b_{ij}$ - матрица билинейной функции $b(x, y)$ в базисе e

Тогда:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B_e \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B_e Y \quad (1)$$

16.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть $e' = eC$, C - матрица перехода от e к e'

Тогда:

$$X = CX', Y = CY' \quad (2)$$

По определению матрицы билинейной функции, в новом базисе:

$$b(x, y) = X'^T B' Y' \quad (B' = B e')$$

Подставим в формулу (1) выражение (2):

$$\begin{aligned} b(x, y) &= X'^T C^T B C Y' = X'^T (C^T B C) Y' = X'^T B' Y' \quad (\forall X', Y' \in \mathbb{F}^n) \\ \implies B' &= C^T B C \quad (\forall i, j : X' := E_i, Y' := E_j) \end{aligned}$$

Следствие.

$$1. \operatorname{rk} B' = \operatorname{rk} B$$

$$2. \mathbb{F} = \mathbb{R} \implies \operatorname{sgn}(\det B') = \operatorname{sgn}(\det B)$$

Определение. Билинейная функция $b(x, y)$ называется кососимметрической (при $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$), если:

$$\forall x, y \in V : b(x, y) = -b(y, x)$$

Утверждение. (*) Любая билинейная функция над $\mathbb{F} : \operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ единственным образом представляется в виде:

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y), \quad \text{где } b_+(x, y) \equiv b_+(y, x), \quad b_-(x, y) \equiv -b_-(y, x)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \\ b(y, x) = b_+(x, y) - b_-(x, y) \end{cases} \implies$$

$$b_+(x, y) = \frac{b(x, y) + b(y, x)}{2}, \quad b_-(x, y) = \frac{b(x, y) - b(y, x)}{2}$$

□

Утверждение. Билинейная функция $b(x, y)$ симметрична (кососимметрична) \iff в любом базисе e :

$$B_e^T = B_e \quad (B_e^T = -B_e)$$

Доказательство. (Докажем для симметрической, для кососимметрической аналогично)

\implies Пусть $B = (b_{ij})$, тогда $b_{ij} = b(e_i, e_j)$.

$$\forall x, y \in V, \quad b(x, y) = b(y, x) \implies b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$$

\iff

$$b(x, y) = X^T B Y, \quad b(y, x) = Y^T B X = (X^T B^T Y)^T = (X^T B Y)^T = b(x, y)$$

□

Утверждение (1) $\iff \forall$ матрицы B некоторой билинейной функции верно, что $B = B_+ + B_-$, где B_+ - матрица симметрической билинейной функции, а B_- - матрица кососимметрической билинейной функции.

Определение. Квадратичная функция, порождённая билинейной функцией $b(x, y)$ - это функция на V .

Обозначаем: $k(x) := b(x, x)$, если $k(x) \neq 0$.

Если b - кососимметрическая функция, то $b(x, x) = 0 \implies k(x) \equiv 0$. В общем случае существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную, таких, что:

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \implies b(x, x) = b_+(x, x)$$

Теорема. \forall квадратичной функции $\exists!$ симметрическая билинейная функция, которая её порождает.

Доказательство. Допустим, что $b(x, y) = b(y, x)$ - симметрическая билинейная функция и $k(x) = b(x, x)$. Тогда $\forall x, y \in V$:

$$\begin{aligned} k(x+y) &= b(x+y, x+y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = \\ &= b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = k(x) + 2b(x, y) + k(y) \end{aligned}$$

Так как $\text{char} \mathbb{F} \neq 2$, то:

$$b(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$$

□

Определение. Билинейная функция $b(x, y) = \frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$ называется поляризацией квадратичной функции k .

Далее будем считать матрицу квадратичной формы матрицей её полярной симметрической билинейной функции $b(x, y)$

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_iy_i + \sum_{i<j} b_{ij}x_iy_j + \sum_{i>j} b_{ij}x_iy_j$$

$$\forall i, j : b_{ij} = b_{ji} \implies b(x, x) = k(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_ix_j \quad (1)$$

Пример. Пусть $k(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 - 7x_3^2$, тогда:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Определение. Пусть $b(x, y)$ - симметрическая или кососимметрическая билинейная функция и $\emptyset \neq L \leq V$. Ортогональным дополнением к L относительно билинейной формы $b(x, y)$ называется:

$$L^\perp := \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in L\}$$

Замечание. Запись $x \perp y$ означает, что $b(x, y) = 0$.

Определение. $V^\perp = \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in V\}$ - ядро формы.

Определение. Билинейная функция $b(x, y)$ называется невырожденной, если:

$$\text{Ker}(b) = V^\perp = \{0\}$$

Упражнение. $b(x, y)$ - невырожденная функция $\iff \det B \neq 0$.

16.3 Квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма в некотором базисе называется диагональной, если в этом базисе:

$$k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2, \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{F}$$

Теорема. В конечномерном пространстве V ($\text{char} \mathbb{F} \neq 2$) \exists базис, в котором эта форма диагональна.

Доказательство. (Алгоритм Лагранжа - метод выделения полных квадратов)
По формуле (1):

$$k(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j$$

1. Основной случай:

$\exists i : b_{ii} \neq 0 \implies$ можно перенумеровать неизвестные x_1, \dots, x_n так, что $b_{11} \neq 0$. Выделим в $k(x)$ все одночлены, содержащие x_1 :

$$k(x) = b_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n b_{1i} x_i + \tilde{k}(x_2, \dots, x_n)$$

и дополним выражение до квадрата:

$$\begin{aligned} k(x) &= b_{11} (x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i + (\sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2) - \frac{(\sum_{i=2}^n b_{1i} x_i)^2}{b_{11}} + \tilde{k} = \\ &= b_{11} (x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2 + k_2(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Затем для формы $k_2(x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n b'_{ii} x_i^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} b'_{ij} x_i x_j$ найдём коэффициент $b'_{jj} \neq 0$ и выделим квадрат как на предыдущем шаге. На каждом шаге число переменных уменьшается на единицу, а значит, за конечное число шагов (а именно $\leq n - 2$) форма приобретёт диагональный вид.

2. Особый случай:

$\forall i : b_{ii} = 0$, но так как $k(x) \not\equiv 0 \implies \exists$ индексы i и j такие, что $b_{ij} \neq 0$, то есть в выражение $k(x)$ входит одночлен $2b_{ij} x_i x_j$.

Пусть $x_i = x'_i + x'_j$ и $x_j = x'_i - x'_j$, тогда $x_i x_j = x'^2_i - x'^2_j$, то есть появился квадрат с коэффициентом, не равным нулю \implies можно перейти к общему случаю.

□

Замечание. В благоприятном случае, когда на первом шаге коэффициент при x_1 не равен нулю, на втором шаге коэффициент при x_2 не равен нулю и т.д., матрица замены будет иметь вид:

$$C_{e \rightarrow e'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \cdots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица с 1 на диагонали $\implies |C_{e \rightarrow e'}^{-1}| = 1 \neq 0$.

Определение. Форма $k(x_1, \dots, x_n)$ называется канонической (нормальной), если:

1. (над \mathbb{R}) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: -1, 0, 1
2. (над \mathbb{C}) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: 0, 1

Примеры.

1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \dots + \alpha_nx_n^2$$

Если $rkB = r \implies k(x) = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \dots + \alpha_rx_r^2 (\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0)$.

Если $\alpha_i > 0$, то введём обозначение:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\alpha_i}x_i \implies k = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_p^2 - \hat{x}_{p+1}^2 - \dots - \hat{x}_r^2$$

где p - количество коэффициентов $\alpha_i > 0$.

Если $\alpha_i < 0 \implies \hat{x}_i = -\sqrt{\alpha_i}x_i$.

2. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$\forall i = \overline{1, r} : \hat{x}_i = \sqrt{\alpha_i}x_i \implies k = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_r^2$$

Таким образом, в вещественном случае для любой квадратичной формы $k(x)$ существует замена координат $X = CY (|C| \neq 0)$ такая, что в новых координатах

$$k = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2.$$

Определение. p в такой записи называется положительным индексом инерции, q - отрицательным индексом инерции.

Теорема. единственности (закон инерции)

Если в некоторых базисах e_1, \dots, e_n и f_1, \dots, f_n квадратичная форма k имеет канонический вид

$$k = \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2 = \sum_{i=1}^{p'} z_i^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} z_j^2$$

то $p = p', q = q'$.

Доказательство. Так как $p+q = rkB = p'+q'$, достаточно доказать, что $p = p'$. От противного: пусть $p' < p$. Рассмотрим подпространства $U_1 = \langle e_1, \dots, e_p \rangle, U_2 = \langle f_{p'+1}, \dots, f_n \rangle$. Очевидно, $\dim U_1 = p, \dim U_2 = n - p'$.

$$\dim U_1 + \dim U_2 = p - p' + n > n; \quad U_1 + U_2 \subset V \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \leq n$$

Из формулы Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) > 0$$

Рассмотрим вектор $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$:

$$v = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \Rightarrow k(v) = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \geq 0$$

С другой стороны:

$$v = \sum_{k=p'+1}^n \beta_k f_k \Rightarrow k(v) = - \sum_{k=p'+1}^n \beta_k^2 \leq 0$$

Противоречие с $v \neq 0$. □

16.4 Знакоопределённые квадратичные формы

Определение. Пусть $b(x, y)$ - симметрическая билинейная форма. Векторы u, v называются *ортгональными*, если $b(u, v) = 0$. Обозначается $u \perp v$.

Определение. Базис e_1, \dots, e_n в V - *ортгональный*, если $b(e_i, e_j) = 0 (i \neq j)$.

Определение. Для квадратной матрицы B главными минорами (угловыми

минорами) называются миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$, где $\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$. Опре-

делим $\Delta_n = |B|, \Delta_0 = 1$.

Теорема. Якоби Пусть $k(x)(=b(x, x), b - \text{симм. б. ф.})$ такова, что главные миноры её матрицы B в нек. базисе $e : \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$ Тогда в V существует базис (и замена координат $X = CY$), в котором

$$k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$$

Доказательство. Будем строить базис e' из базиса e , ортогональный относительно $b(x, y)$ (алгоритм ортогонализации Грама/Шмидта).

$$e'_1 := e_1; \quad \forall k \geq 1 \quad \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

причём $b(e'_i, e'_j) = 0 (1 \leq i \neq j \leq k)$

Шаг алгоритма: допустим, что $k > 1$ и векторы e'_1, \dots, e'_{k-1} уже построены.

Будем искать e'_k в виде

$$e'_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e'_i$$

где λ_i найдём из условия $b(e'_k, e'_j) = 0, j = 0, \dots, k-1$

$$b(e'_k, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_j b(e'_i, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \lambda_j b(e'_j, e'_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = -\frac{b(e_k, e'_j)}{b(e'_j, e'_j)}$$

Покажем по индукции, что $b(e'_j, e'_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \neq 0$.

Обратим внимание, что матрица перехода от e_1, \dots, e_{k-1} к e'_1, \dots, e'_{k-1} - верхняя треугольная с 1 по диагонали (предп. индукции). Запишем: $C_{(e_1, \dots, e_k) \rightarrow (e'_1, \dots, e'_k)} =$

$$\begin{pmatrix} C_{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где по предположению индукции } C_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} B - \text{матрица}$$

билин. формы $b(x, y)$ в базисе e , B' - в базисе e' , который мы строим.

$$B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle} = C_k^T B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle} C_k \Rightarrow \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = (\det C_k)^2 \cdot \det B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle}$$

$$\Delta'_k = \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = b'_{11} \dots b'_{kk} = \Delta_k$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}} \cdot b_{kk} = \Delta_k \Rightarrow b_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

□

Далее рассматриваем $F = \mathbb{R}$.

Определение. Квадратичная форма $k(x)$ на пр-ве V над \mathbb{R} называется положительно определённой, если $\forall x \neq 0 k(x) > 0$ (обозн. $k > 0$); отрицательно определённой, если $\forall x \neq 0 k(x) < 0$ (обозн. $k < 0$); неотрицательно определённой, если $\forall x k(x) \geq 0$ (обозн. $k \geq 0$); неположительно определённой, если $\forall x k(x) \leq 0$ (обозн. $k \leq 0$).

Утверждение. Квадратичная форма $k(x)$ является

1. положительно определённой $\Leftrightarrow p = n, q = 0$;
2. отрицательно определённой $\Leftrightarrow p = 0, q = n$;
3. неотрицательно определённой $\Leftrightarrow q = 0$;
4. неположительно определённой $\Leftrightarrow p = 0$;
5. знаконеопределённой $\Leftrightarrow p, q > 0$.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма. Если кв. форма $k > 0$, то $\det B = \Delta_n \neq 0$.

Доказательство. Т.к. $k > 0, p = n$, т.е. существует базис, в котором $k(x') = x_1'^2 + \dots + x_n'^2 \Rightarrow \Delta'_n = 1 > 0$.

А так как $B' = C^T B C, |B'| = |C|^2 \cdot |B| \Rightarrow \det B > 0$. □

Теорема. Критерий Сильвестра

Квадратичная форма $k(x)$, имеющая в некотором базисе матрицу B , является

1. положительно определённой $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.
2. отрицательно определённой $\Leftrightarrow \forall k (-1)^k \Delta_k > 0$.

Доказательство. Для положительной определённости:

\Leftarrow : По теореме Якоби \exists базис, в котором $k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$. Т.к. все $\Delta_i > 0$ (знакопередающиеся для отрицательного случая), все коэффициенты $> 0 (< 0)$, т.е. значение формы на любом ненулевом векторе имеет необходимый нам знак.

\Rightarrow : $k > 0 \Rightarrow \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \dots \cdot \Delta_n \neq 0$ (k -ый минор ненулевой по лемме для угловой подматрицы) \Rightarrow применима т. Якоби, из которой следуют необходимые нам знаки на всех Δ .

Для отрицательной определённости: $k < 0 \Leftrightarrow -k > 0$, причём при домножении матрицы на -1 знак меняют только миноры нечётного порядка. □

Замечание. Т.к. $b_{ii} = k(e_i)$, у положительно определённой формы все $b_{ii} > 0$, у отрицательной все $b_{ii} < 0$.

Замечание. Пусть $k(x)$ такая, что $\Delta_1, \dots, \Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = \dots = \Delta_n = 0$. Тогда p - число сохранений знака в последовательности $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_r$, а q - число перемен знака в этой последовательности.

Доказательство. Из теоремы Якоби в подходящем базисе

$$k(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} y_k^2 + \dots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} y_r^2$$

Тогда каждое сохранение знака соответствует положительному коэффициенту, а каждая перемена знака - отрицательному коэффициенту, откуда и следует необходимое равенство. \square

16.5 Кососимметрические билинейные формы

$$\forall x, y \in V : b(y, x) = -b(x, y) \quad (\text{char } \mathbb{F} \neq 2)$$

Заметим, что $\forall x \in V : b(x, x) = 0$. Если же $b(x, x) \equiv 0$:

$$0 = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + b(x, y) + b(y, x) \Rightarrow b(x, y) = -b(y, x)$$

Поэтому условие $b(x, x) \equiv 0$ не только эквивалентно кососимметричности формы, но и применимо в случае $\text{char } F = 2$.

Лемма. Пусть $b(x, y)$ - симметрическая или кососимметрическая билинейная форма на V ($\dim V = n < \infty$), $U \subset V$ такое что $b|_U$ невырождена. Тогда $V = U \oplus U^\perp$.

Доказательство. $U^\perp = \{y \in V : b(x, y) = 0 \ \forall x \in U\}$.

В координатах: если выбрать базис e_1, \dots, e_n в U ($m = \dim U, 0 < m < n$), то $y \in U^\perp \Leftrightarrow b(e_i, y) = 0, i = 1, \dots, m$.

Если $b(x, y) = 0 \ \forall x \in U$, то $b(e_i, y) = 0, i = 1, \dots, m$

Обратно, если $b(e_i, y) = 0, i = 1, \dots, m$, то $\forall x \in U \ x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \Rightarrow b(x, y) =$

$$\sum_{i=1}^m x_i b(e_i, y) = 0.$$

Запишем систему уравнений для нахождения y , выбрав базис $e_1, \dots, e_m \in U$

и дополнив его до базиса $e_1, \dots, e_n \in V$. В этом базисе $e_i^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $b(e_i, y) =$

$$(0, \dots, 1, \dots, 0)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (b_{i1}, \dots, b_{in})Y^\uparrow$$

Система имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} Y = 0$$

Т.к. матрица $B|_U$ невырождена, $\text{rk} B = m$, т.е. система имеет $n - m$ ЛНЗ решений, а значит $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Если же $v \in U \cap U^\perp$, то $\forall x \in U \ b(x, v) = 0$, а из невырожденности формы $b|_U$ тогда следует, что $v = 0$. \square

Теорема. Для любой кососимметрической билинейной формы $b(x, y) \not\equiv 0$ \exists такой базис $f_1, \dots, f_n \in V$, в котором матрица этой формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \boxed{I_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{I_s} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{где } I_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ rk} B = 2s$$

Доказательство. Т.к. $b(x, y) \not\equiv 0$, \exists векторы $e_1, e_2 \in V$, такие что $b(e_1, e_2) = \beta_{12} \neq 0$. Рассмотрим

$$f_1 = \frac{e_1}{\beta_{12}}, f_2 = e_2 \Rightarrow b(f_1, f_2) = 1, b(f_2, f_1) = -b(f_1, f_2) = -1$$

Возьмём $W = U^\perp$ в пр-ве V . Тогда $V = U \oplus U^\perp$ и $\tilde{b} = b|_{U^\perp}$ также кососимметрическая форма, т.е. можем провести индукцию по $n = \dim V$ (базу $n = 2$ доказали). $\dim W = n - 2$, т.е. \exists базис f_3, \dots, f_n , в котором матрица $b|_{U^\perp}$ име-

ет вид
$$\begin{pmatrix} \boxed{I} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{I} & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$
 т.е в базисе f_1, \dots, f_n матрица b имеет нужный вид. □

17 Евклидовы пространства и их обобщения

17.1 Основные понятия и утверждения

Основное поле - $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Определение. Вещественное конечномерное векторное пространство \mathcal{E} называется евклидовым, если на \mathcal{E} задано скалярное произведение (x, y) .

Определение. Скалярное произведение (x, y) - симметрическая билинейная функция такая, что соответственная квадратичная форма (x, x) положительно определена.

Определение. Длина (норма) вектора $x \in \mathcal{E}$: $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Теорема. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$\forall x, y \in \mathcal{E} : |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, причём равенство выполнено $\iff x \parallel y$ (либо $x = 0$ или $y = 0$, либо $y = \lambda x$).

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = (tx - y, tx - y) = t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) \geq 0$. Это квадратичная функция относительно t :

$$f(t) \geq 0 \iff \frac{\mathcal{D}}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \Rightarrow (x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)} = |x| \cdot |y|$$

Равенство выполнено $\iff (tx - y, tx - y) = 0 \Rightarrow y = tx$. □

Теорема. Неравенство треугольника

$\forall x, y \in \mathcal{E} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (равенство выполнено $\iff x \uparrow\uparrow y$)

Доказательство.

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq |x|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

$$|x + y|^2 \iff |x + y| \leq |x| + |y|$$

□

Координатная запись: пусть в V фиксированный базис e_1, \dots, e_n , то:

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j)$$

Определение. $G_e = ((e_i, e_j))$ - матрица Грама базиса e

$$G_e^T = G_e$$

Т.к. (x, x) - положительно определенная квадратичная форма, то матрица:

$$G_e = (g_{ij})$$

может служить матрицей Грама $\iff \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

В частности: $\det G_e > 0$ (определитель Грама)

$$(x, y) = X^T G_e Y$$

Определение.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

Определение. Базис e_1, \dots, e_n называется ортогональным, если:

$$e_i \perp e_j \text{ при } i \neq j$$

Если при этом длина каждого вектора e_1, \dots, e_n равна 1, то базис называется ортонормированным.

Следствие. e_1, \dots, e_n - ортонормированный базис, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Следствие. Если базис ортонормированный, то $G = E$ и $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Теорема. Пусть $e' = e C_{e \rightarrow e'}$ - новый базис. Тогда:

1. Если e и e' - ортонормированные базисы, то $C_{e \rightarrow e'}$ ортогональна;
2. Если e - ортонормированный базис и $C_{e \rightarrow e'}$ ортогональная матрица $\implies e' = e C$ - ортонормированный базис.

Замечание. C - ортогональная, если $C^T C = E$

Доказательство.

1. По определению матрицы перехода $C_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} e_1'^\uparrow & \dots & e_n'^\uparrow \end{pmatrix}$

$$C_{e \rightarrow e'}^T = \begin{pmatrix} e_1'^\rightarrow \\ \vdots \\ e_n'^\rightarrow \end{pmatrix} \text{ Обозначим } d_{ij} - (ij)\text{элемент матрицы } C^T C :$$

$$d_{ij} = e_i'^\rightarrow \cdot e_j'^\uparrow = (e_i', e_j') = \delta_{ij}$$

т.к. базис e ортонормированный $\implies d_{ij} = \delta_{ij} \implies C^T C = E$

2. Рассмотрим $e' = e C_{e \rightarrow e'}$, тогда $e_j'^\uparrow$ - это j столбец матрицы $C_{e \rightarrow e'}$

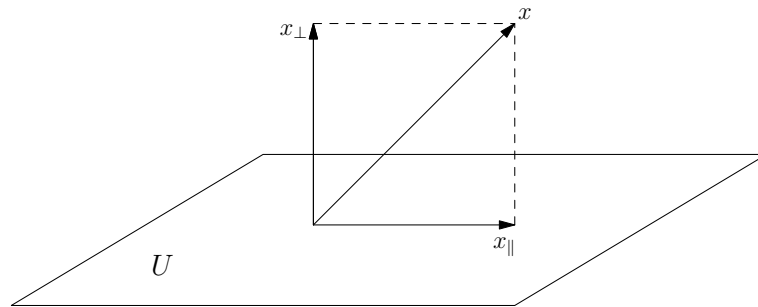
По условию $C^T C = E \iff e_i'^\rightarrow \cdot e_j'^\uparrow = \delta_{ij} = (e_i', e_j')$

□

Лемма. Если $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$ - ортогональная система векторов

$\implies a_1, \dots, a_m$ ЛНЗ

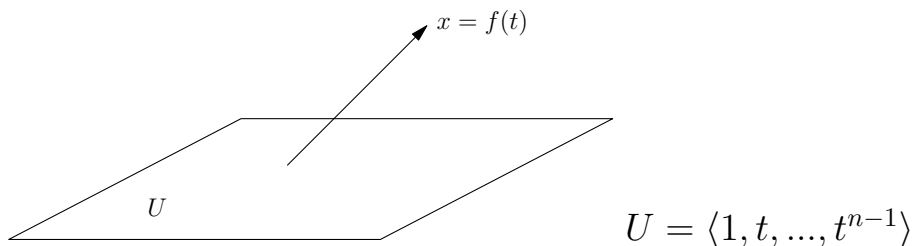
Т.о. $\forall x \in \mathcal{E}$ единственным образом разлагается в сумму $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$



$x_{\parallel} \in U$, x_{\parallel} - ортогональная проекция вектора x на U

$x_{\perp} \in U^{\perp}$, x_{\perp} - ортогональная составляющая x относительно U

Пример.



Надо подобрать такой многочлен $p(t) \in U$, чтобы:

$$\| f(t) - p(t) \| = \min$$

Где $p(t) = f(t)$ - псевдорешение

Как конкретно находить такое разложение?

1 способ: Выбрать ортогональный базис в U и дополнить его до ортогонального базиса в \mathcal{E}

Тогда:

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^m (x_i, e_i) e_i}_{x_{\parallel}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^n (x_i, e_i) e_i}_{x_{\perp}} = x_{\parallel} + x_{\perp}$$

2 способ: Выбрать в U произвольный базис a_1, \dots, a_m и искать разложение в виде:

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + x_{\perp} \quad | \cdot a_j \implies (x, a_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (a_i, a_j) + \underbrace{(x_{\perp}, a_j)}_{=0}$$

Неоднородная СЛУ с неизвестными α_i , основная матрица:

$$((a_i, a_j)) = G_{\{a_1, \dots, a_m\}}$$

где $\det G \neq 0 \implies$ по теореме Крамера $\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_m \implies \exists! x_{\parallel} \implies x_{\perp} = x - x_{\parallel}$

Свойства. операций ортогонального дополнения

1. $(U^{\perp})^{\perp} = U$
2. $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$
3. $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$

Доказательство.

1. Пусть $x \in U$, $y \in U^{\perp}$, тогда:

$$(y, x) = 0 \quad \forall y \in U^{\perp} \implies x \in (U^{\perp})^{\perp} \implies U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$$

Причем:

$$\dim (U^{\perp})^{\perp} = n - \dim U^{\perp} = n - (n - \dim U) = \dim U \implies U = (U^{\perp})^{\perp}$$

2. Пусть $v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \implies v \perp U_1$ и $v \perp U_2 \implies \forall x = u_1 + u_2$:

$$(v, x) = (v, u_1) + (v, u_2) = 0 \implies v \in (U_1 + U_2)^{\perp} \implies U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq (U_1 + U_2)^{\perp}$$

Если $w \in (U_1 + U_2)^{\perp}$, то $\forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2 : (w, u_1 + u_2) = 0$

В частности:

$$\begin{cases} \forall u_1 \in U_1 : (w, u_1) = 0 \implies w \in U_1^{\perp} \\ \forall u_2 \in U_2 : (w, u_2) = 0 \implies w \in U_2^{\perp} \end{cases} \implies w \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

То есть $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp \implies$ имеет место равенство:

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

3. Возьмем $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$

$$\implies ((U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp)^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp \implies U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$$

□

Утверждение. Вектор наименьшей длины, соединяющий точку из подпространства U с концом вектора x - x_\perp .

Доказательство. Обозначим $x_\parallel = y$, $x_\perp = z$, а вектор из начала x в произвольную точку U - вектор v

Какой тут рисунок то?

Докажем, что $|x - v| \geq |z|$, причём равенство достигается при $v = y$:

$$x - v = x - y + y - v = z + y - v$$

Т.к. $z \in U^\perp$, $(y - v) \in U$,

$$z \perp (y - v) \implies |x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geq |z|^2$$

причём равенство при $|y - v| = 0 \implies y = v$.

□

Это подтверждает осмысленность определения $\rho(x, U) = |x_\perp|$.

Упражнение. Докажите отсюда, что $\angle(x, v) \geq \angle(x, y)$.

Определение. Углом между вектором и подпространством будем называть:

$$\angle(x, v) = \angle(x, y)$$

Частный случай: $\dim U = n - 1$ ("гиперплоскость"):

В ортонормированном базисе U задаётся уравнением $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, а ортогональное дополнение $U^\perp = \langle n = (a_1, \dots, a_n) \rangle$ (n - вектор нормали). Тогда:

$$\rho(x, U) = |x_\perp| = \frac{V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1}, x \rangle}}{V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle}}$$

где $V_{\langle a_1, \dots, a_k \rangle}$ - объём параллелепипеда, натянутого на a_1, \dots, a_k .

Определение. n -мерным параллелепипедом с рёбрами e_1, \dots, e_n называется:

$$\Pi_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle} = \{v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

Определение. В общем случае объём параллелепипеда определяется рекурсивно:

$$V_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle} = V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle} \cdot |e_{n\perp}|, \text{ где } e_{n\perp} - \text{проекция } e_n \text{ на } \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$$

Заметим, что если e_1, \dots, e_n попарно ортогональны, то $V_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle} = |e_1| \cdot \dots \cdot |e_n|$.

Объём не изменится, если к векторам применить процесс ортогонализации (с унитарной матрицей перехода).

Тогда:

$$V_{\langle e'_1, \dots, e'_n \rangle} = |e'_1| \cdot \dots \cdot |e'_n| = \sqrt{|G_{\{e'_1, \dots, e'_n\}}|}$$

В ортогональном базисе:

$$G_{\{e'_1, \dots, e'_n\}} = \begin{pmatrix} |e'_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |e'_n|^2 \end{pmatrix} \implies |G_{\{e'_1, \dots, e'_n\}}| = |e'_1|^2 \cdot \dots \cdot |e'_n|^2$$

$$G_{e'} = C^T G_e C \implies |G_{e'}| = |C|^2 |G_e| = |G_e|$$

Упражнение. Доказать отсюда, что если $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$, то:

$$\rho^2(x, U) = \frac{|G_{\{e_1, \dots, e_n\}}|}{|G_{\{e_1, \dots, e_{n-1}\}}|}$$

17.2 Линейные операторы в евклидовом пространстве

Пусть \mathcal{E} - евклидово пр-во, $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ - лин. оператор в \mathcal{E} .

Определение.

1. Оператор $\varphi^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ - сопряжённый к φ , если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

2. Оператор φ - самосопряжённый, если:

$$\varphi^* = \varphi \implies \forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \quad (2)$$

3. Оператор φ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad (3)$$

В частности, для ортогонального $\varphi : \forall x \in \mathcal{E} \quad |\varphi(x)| = |x|$.

Условия (1)-(3) через матрицу Грама

Пусть в \mathcal{E} зафиксирован базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ ($\dim \mathcal{E} = n$). Пусть $x = eX$, $y = eY$, $G_e = ((e_i, e_j))$ - матрица Грама базиса e , A_φ - матрица φ в базисе e .

(1): $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$(A_\varphi X)^T G_e Y = X^T A_\varphi^T G_e Y = X^T G_e A_{\varphi^*} Y \implies A_\varphi^T G_e = G_e A_{\varphi^*} \quad (1')$$

(2): В частности,

$$\varphi^* = \varphi \iff A_\varphi^T G_e = G_e A_\varphi \quad (2')$$

Если e - ортонормированный, то $G_e = E$, и $A_\varphi^T = A_\varphi$, т.е. A_φ - симметрическая матрица.

(3): φ - ортогональный $\iff \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$(A_\varphi X)^T G_e (A_\varphi Y) = G_e Y \implies A_\varphi^T G_e A_\varphi = G_e \quad (3')$$

Если $G_e = E$, то $A_\varphi^T A_\varphi = E$, т.е. A_φ - ортогональная матрица.

Теорема. Свойства сопряжённых операторов

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2. $\text{Ker} \varphi^* = (\text{Im} \varphi)^\perp$
3. $\text{Ker} \varphi = (\text{Im} \varphi^*)^\perp$

Доказательство.

1. В ортонормированном базисе:

$$A_{\varphi^*} = A_\varphi^T \implies A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = (A_\varphi^T)^T = A_\varphi$$

Т.к. в фиксированном базисе имеется взаимно однозначное соответствие операторов и их матриц, $(\varphi^*)^* = \varphi$.

2. Сравним размерности:

$$\dim \text{Ker} \varphi^* = n - \text{rk}(A_{\varphi^*}) = n - \text{rk}(A_\varphi^T) = n - \text{rk}(A_\varphi)$$

$$\dim \text{Im} \varphi = \text{rk} A_\varphi \implies \dim(\text{Im} \varphi)^\perp = n - \text{rk} A_\varphi$$

Докажем, что $\text{Im} \varphi \subseteq (\text{Ker} \varphi^*)^\perp$ (отсюда $(\text{Im} \varphi)^\perp \subseteq \text{Ker} \varphi^*$):

Пусть $v \in \text{Im} \varphi \implies v = \varphi(x)$, $y \in \text{Ker} \varphi^*$. Тогда:

$$(v, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (x, 0) = 0 \implies v \perp \text{Ker} \varphi^*$$

Т.к. размерности равны и $(\text{Im} \varphi)^\perp \subseteq \text{Ker} \varphi^*$, то $\text{Ker} \varphi^* = (\text{Im} \varphi)^\perp$.

3. Следует из (2) подстановкой φ^* вместо φ .

□

Следствие. Теорема Фредгольма СЛУ $AX = b$ с квадратной матрицей A порядка n совместна \iff для любого Y - решения однородной сопряжённой системы - выполнено условие $Y \perp b$.

Доказательство. $AX = b$ совместна $\iff b \in \text{Im}A$

$$Y \in \text{Ker}\varphi^* = \text{Ker}A^T$$

Т.к. $\text{Ker}\varphi^* = (\text{Im}A)^\perp$, то система совместна $\iff b \perp \text{Ker}\varphi^*$

□

17.3 Самосопряжённые операторы

Лемма. Пусть $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ - лин. оператор, $U \subset E : \varphi(U) \subseteq U$.

Тогда $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^\perp, x \in U$ выполнено $(x, \varphi^*(y)) = 0$:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0, \text{ т.к. } \varphi(x) \in U, y \in U^\perp$$

□

Утверждение. 1. Если λ_1, λ_2 - различные собственные значения самосопряжённого оператора φ , x_1, x_2 - соответствующие им собственные векторы, то $x_1 \perp x_2$;

2. Все собственные значения самосопряжённого оператора $\in \mathbb{R}$.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi^* = \varphi$. Тогда:

$$(\varphi(x_1), x_2) = \lambda_1(x_1, x_2); (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

Из $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует $(x_1, x_2) = 0$.

2. От противного: пусть $\exists \lambda_1 = \alpha + i\beta$ - собственное значение для самосопряжённого φ с $\beta \neq 0$.

Как было доказано ранее, \exists φ -инвариантное подпространство U размерности 2, на котором $\varphi|_U$ имеет собственные значения $\alpha \pm i\beta$. U можно рассматривать как евклидово пр-во со скалярным произведением $(x, y)|_U$.

Тогда $\varphi|_U$ - также самосопряжённый на U .

Выберем ортонормированный базис в U . Тогда в этом базисе $\varphi|_U$ имеет симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Её собственные значения:

$$|A - \lambda E| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\mathcal{D} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

Отсюда корни характеристического многочлена вещественные, что противоречит предположению. □

Теорема. Для любого самосопряжённого оператора $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ в \mathcal{E} существует базис из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Индукция по $\dim \mathcal{E} = n$:

База: $n = 1$. Тогда $\forall x \in \mathcal{E} : \varphi(x) = \lambda_1 x$, т.е. любой вектор длины 1 подойдёт в качестве ортонормированного базиса.

Шаг: Пусть $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ - какое-либо собственное значение для φ . Рассмотрим $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \{0\}$ - оно является φ -инвариантным подпространством.

Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} = \mathcal{E}$, то $\forall x \in \mathcal{E} : \varphi(x) = \lambda_1 x$, т.е. в ортонормированном базисе матрица оператора - $\lambda_1 E$;

Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \mathcal{E}$, то по лемме $\mathcal{E}_{\lambda_1}^\perp$ также φ -инвариантно и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{E}_{\lambda_1}^\perp$. К ограничению φ на инвариантные подпространства $\mathcal{E}_{\lambda_1}, \mathcal{E}_{\lambda_1}^\perp$ можно применить предположение индукции, если рассмотреть их как отдельные евклидовы пространства. Тогда в них есть ортонормированные базисы из собственных векторов, а тогда их объединение будет искомым ортонормированным базисом для \mathcal{E} (ортогональность векторов из разных базисов следует из утверждения выше). □

Следствие. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ - все попарно различные собственные значения самосопряжённого оператора φ , то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_s}$.

Замечание. Если все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ самосопряжённого оператора φ положительны, то \exists самосопряжённый оператор ψ с положительными собственными значениями такой, что $\psi^2 = \varphi$.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n - ортонормированный базис из собственных векторов для φ . Тогда:

$$A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \text{оператор с матрицей } \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = \psi$$

□

Пример. Пусть $\mathcal{E} = U \oplus U^\perp$, т.е. $\forall x = x_{||} + x_\perp$.

$\varphi_1(x) = x_{||}$ - ортогональное проектирование на U ;

$\varphi_2(x) = x_{||} - x_\perp$ - ортогональная симметрия, или отражение \mathcal{E} относительно U .

Покажем, что φ_1 и φ_2 самосопряжённые:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : x = x_{||} + x_\perp, y = y_{||} + y_\perp :$$

$$(\varphi_1(x), y) = (x_{||}, y_{||} + y_\perp) = (x_{||}, y_{||}) = (x_{||} + x_\perp, y_{||}) = (x, \varphi_1(y))$$

$$(\varphi_2(x), y) = (x_{||} - x_\perp, y_{||} + y_\perp) = (x_{||}, y_{||}) - (x_\perp, y_\perp) = (x_{||} + x_\perp, y_{||} - y_\perp) = (x, \varphi_2(y))$$

17.4 Ортогональные операторы

Определение. $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

Из определения следует, что $\forall x \in \mathcal{E} : |\varphi(x)| = |x|$ - φ сохраняет длины $\implies \text{Ker} \varphi = \{0\} \implies \varphi$ инъективный, а так как $\varphi : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$, получаем, что φ - биективный (и обратимый) оператор.

Утверждение. Пусть $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ - ортогональный оператор.

Тогда φ^{-1} также ортогональный, причём $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Доказательство. Покажем, что $\forall x, y \in \mathcal{E} (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x, y)$. Выберем $x' = \varphi^{-1}(x), y' = \varphi^{-1}(y)$. Тогда:

$$(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x', y') = (\varphi(x'), \varphi(y')) = (x, y)$$

По определению: $\varphi^*(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)), \forall x, y \in \mathcal{E}$

Т.к. φ обратим, $\exists y' \in E : y = \varphi(y')$

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(x), \varphi(y')) = (x, y') = (x, \varphi^{-1}(y)) \implies (x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi^{-1}(y))$$

$$(x, \varphi^*(y) - \varphi^{-1}(y)) = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \implies \varphi^*(y) = \varphi^{-1}(y) \quad \forall y \in \mathcal{E}$$

т.е. $\varphi^* = \varphi^{-1}$

□

Лемма. Пусть $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ - ортогональный оператор, $U \subset E : \varphi(U) \subseteq U$.

Тогда:

$$\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$$

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^\perp, x \in U$ выполнено $(x, \varphi(y)) = 0$.
 Т.к. φ обратим, $\exists x' : x = \varphi(x')$, т.е. $x' = \varphi^{-1}(x) \in U$. Отсюда:

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi(x'), \varphi(y)) = (x', y) = 0, \text{ т.к. } x' \in U, y \in U^\perp$$

□

Теорема. Пусть $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ - ортогональный оператор.

1. Собственные значения φ - только ± 1 , причём отвечающие этим значениям собственные векторы \perp .
2. Все характеристические числа для φ над \mathbb{C} имеют модуль 1.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi(x) = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2(x, x) \implies \lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

Если $\varphi(x) = x, \varphi(y) = -y (x, y \neq 0)$, то

$$(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = -(x, y) \implies (x, y) = 0$$

□