Lomonosov Moscow
State University

Механико-математический факультет

Линейная алгебра и геометрия, 2 семестр, 2 поток

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студенты:	Молчанов Вячеслав Соколов Егор
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 22 мая 2025 г.

Содержание

1 Векторное пространство **3**
1.1 Изменение координат вектора при замене базиса 6

2 Векторные подпространства **6**
2.1 Примеры 6
2.2 Два основных способа задания подпространства в V 7

3 Пересечение и сумма подпространств **9**

4 Прямая сумма подпространств и пространств **11**

5 Линейные отображения и функции **16**

6 Линейные функции **17**

7 Линейные отображения и их матрицы **20**

8 Матрицы линейного отображения **22**
8.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат 22

9 Линейные операторы **24**

10 Действия над линейными отображениями **27**

11 Собственные векторы и собственные значения оператора **29**

12 Диагонализируемость **30**
12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением 31

13 Анулирующие многочлены линейных операторов **35**
13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора 37

14 Корневые подпространства **39**

15 Теорема Жордана **41**
15.1 Изображение разложения корневых подпространств 46
15.2 Решение СЛАУ 48
15.3 Решение СЛДУ 49
15.4 Функции от матриц 49
15.5 Вычисление корня и экспоненты 50

16 Билинейные и квадратичные формы **51**
16.1 Запись билинейной функции в координатах 52
16.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса 52
16.3 Квадратичные формы 55
16.4 Знакоопределённые квадратичные формы 57
16.5 Кососимметрические билинейные формы 60

17 Евклидовы пространства и их обобщения **62**
17.1 Основные понятия и утверждения 62

17.2 Линейные операторы в евклидовом пространстве 67
17.3 Самосопряжённые операторы 69
17.4 Ортогональные операторы 71

18 Общие линейные операторы **74**

19 Квадратичные формы **76**

20 Полуторалинейные, эрмитовы формы. Унитарные (эрмитовы) пространства **77**
20.1 Линейные операторы в унитарном пространстве 80

21 Аффинные пространства и их преобразования **82**
21.1 Аффинные плоскости (подпространства) 83

22 Евклидовы аффинные пространства **86**
22.1 Аффинные отображения и преобразования 88

23 Тензоры **95**
23.1 Основные определения и первоначальные конструкции 95
23.2 Свёртка тензора 99
23.3 Симметрические, кососимметрические тензоры 100
23.4 Тензоры на евклидовом пространстве 103

1 Векторное пространство

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F, если заданы операции $"+" : V \times V \to V$ и $"\cdot" :\ F \times V \to V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V\ \ :\ \ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists\, \vec{0} \in V :\ \forall v \in V\ \ :\ \ v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V\ \ \exists - v \in V$: $v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V\ \ :\ \ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V\ \ :\ \ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V :\ 1_F \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V\ \ :\ \ (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V\ \ :\ \ \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? *Ответ:* Аксиома коммутативности.

Доказательство. Сначала докажем два свойства.

1. $0 \cdot \overline{a} = 0 \cdot \overline{a} + \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} + (0 \cdot \overline{a} + (-0 \cdot \overline{a})) = (0 \cdot \overline{a} + 0 \cdot \overline{a}) + (-0 \cdot \overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \overline{a} + (-0 \cdot \overline{a}) = \overline{0}$
2. $(-1)\overline{a} + \overline{0} = (-1)\overline{a} + (\overline{a} + (-\overline{a})) = ((-1)\overline{a} + \overline{a}) + (-\overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \overline{a} + (-\overline{a}) = -\overline{a}$.

Теперь докажем первую аксиому (аксиому коммутативности).

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{0} = (\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b} + \overline{a}) + (-(-(\overline{b} + \overline{a}))) =$$

(по второму свойству)

$$= (\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b} + \overline{a}) + (\overline{b} + \overline{a})) =$$

(по аксиоме ассоциативности)

$$= (\overline{a} + \overline{b} + (-(\overline{b} + \overline{a}))) + (\overline{b} + \overline{a}) = (((\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b}))) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) =$$

$$= ((\overline{a} + (\overline{b} + (-(\overline{b})))) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) = ((\overline{a} + \overline{0}) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) =$$

$$(\overline{a} + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) = \overline{0} + (\overline{b} + \overline{a}) = \overline{b} + \overline{a}$$

□

Замечание. Любое поле можно рассматривать как векторное пространство над собой - все аксиомы будут выполнены из аксиом поля.

Определение. $U \subset V$ - *векторное подпространство* пространства V, если оно само является пространством относительно тех же операций в V.

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $U \neq \varnothing$
2. $\forall u_1, u_2 \in U \;\; : \;\; u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \;\; \lambda \in F \;\; : \;\; \lambda u \in U$

Определение. Векторы $v_1, ..., v_n \in V$ называются линейно зависимыми, если $\exists \; \lambda_1, ..., \lambda_n$ (не все равные 0) $: \; \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$. В противном случае векторы $v_1, ..., v_n$ называются линейно независимыми.

Утверждение. *Определение 3* $\Longleftrightarrow$ *($n \geq 2$) хотя бы один вектор из векторов v_i выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение. Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, ..., e_n), e_k \in V$ называется базисом V, если e - максимальный ЛНЗ набор векторов из V.

Утверждение. *e - базис в V* $\Longleftrightarrow$

1. $e_1, ..., e_n$ *- ЛНЗ*
2. $\forall x \in V \; \exists \; x_1, ..., x_n \in F \;\; : \;\; x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

Следствие. *Разложение любого вектора в базисе единственно.*

Доказательство. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) e_i$
Из ЛНЗ все коэффициенты равны $\square$

$$\text{Обозначаем: } X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n, \text{ тогда } x = eX_e = e_1 x_1 + ... + e_n x_n$$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

Теорема. *Если в V $\exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.*

Доказательство.
Если $\exists$ базис $e'_1, ..., e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ $e'_1, ..., e'_m$ - ЛЗ, т.е. не базис. Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) $e_1, ..., e_n$ - ЛЗ $\Longrightarrow$ не базис. □

Свойства. *матриц перехода*

1. $\det C \neq 0$
2. $C_{e' \to e} = (C_{e \to e'})^{-1}$
3. $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, ..., e'_n \Longrightarrow rkC = n \Longrightarrow \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.
По определению:

$$e' = (e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)C_{e \to e'}, \text{ т.е. } e' = eC_{e \to e'}$$

$$\boxed{e' = eC_{e \to e'}} \tag{2}$$

С другой стороны

$$e = e'C_{e' \to e} = eC_{e \to e'}C_{e' \to e} \Longrightarrow C_{e \to e'}C_{e' \to e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \to e'} = (C_{e' \to e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e'C_{e' \to e''} = e(C_{e \to e'}C_{e' \to e''}) = eC_{e \to e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e \to e''} = C_{e \to e'}C_{e' \to e''}$

□

Алгоритм. *Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном базисе?*
$e' = eC_{e \to e'}$ *можно рассмотреть как матричное уравнение:*

$$(e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow})C = ({e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow})$$

$$[e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow} \mid {e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow}] \overset{строк}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \to e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. *Формула изменения координат вектора при замене базиса:*

$$\boxed{X_e = C_{e \to e'} X_{e'}} \tag{3}$$

Доказательство.

$$\forall x \in V \ : \ x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e \to e'} X_{e'}$$

$$\Longrightarrow X_e = C_{e \to e'} X_{e'}$$

□

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

1. Геометрические векторы

2. F^n - пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot\lambda)$

   Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой невырожденной матрицы порядка n)

   Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из **(2)**)

   Упражнение. Пусть $|F| = q, \ \dim_F V = n \Longrightarrow |V| = q^n$
   $\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij-ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \to \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и умножения на скаляр
   Оно бесконечномерно, если X бесконечно.
   Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ
   Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + ... + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y_1' + ... + C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda_n C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda_n^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0 \Longrightarrow C_1 = ... = C_n = 0$$

4. $F[t]$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0 :\ 1, t, t^2, ...$ - линейно независимы. $F[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \mid a_k \in F,\ k = 0, ..., n;\ n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, ..., t^n$
Тейлоровский базис: $1, t - t_0, ..., (t - t_0)^n$; $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq 0,\ \ V = 2^{\Omega}$ с операциями вместо сложения:

$$A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\ \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2,\ 0 \cdot A = \emptyset,\ 1 \cdot A = A$$

Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \{\sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы) } \mid s_i \in S, \lambda_i \in F\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, ..., a_m \rangle = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F\} = U$$

Утверждение. $\langle a_1, ..., a_m \rangle \subseteq V \Longrightarrow \dim\langle a_1, ..., a_m \rangle = rk\{a_1, ..., a_m\}$

Доказательство.

$$\mu \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu \lambda_i) a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U$$

Если $r = rk\langle a_1, ..., a_m \rangle$, то $a_{j1}, ..., a_{jr}$ - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \Longrightarrow \{a_{j1}, ..., a_{jr}\} - \text{базис } U$$

□

Алгоритм. *Алгоритм вычисления* $\dim\langle a_1, ..., a_m\rangle$ *и базиса, если известны координаты этих векторов:*

1) Составить матрицу:

$$(a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow}) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{j_1 \cdots j_r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

2) Столбцы с номерами $j_1, ..., j_r$ *- базис в* U*, разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы*

2. ($\dim V = n$, известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = eX,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x \in V \mid x = eX:\ AX = 0\} - \text{ задание с помощью ОСЛУ}$$

Утверждение. W *- подпространство в* V*,* $\dim W = n - rkA$*, базис - любая ФСР (это переход от* ***2.*** *к* ***1.*** *способу задания подпространства).*

Теорема. *Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве* V *можно задать с помощью ОСЛУ.*

Доказательство. Два способа:

1) Вектор x (со столбцом координат $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, ..., a_m\rangle = U$$

$$\Longleftrightarrow \exists\ \alpha_1, ..., \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = x,\ \text{или в координатах: } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i^{\uparrow} = x$$

т.е. СЛУ с $\widetilde{A} = (a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix})$ совместна $\Longleftrightarrow$ после алгоритма Гаусса:

$$\widetilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} K & \sum\limits_{j} C_{kj} x_j \\ \hline 0 & \begin{matrix} \sum C_{r+1,j} x_j = 0 \\ \sum C_{nj} x_j = 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} K \end{pmatrix}$ имеет ступенчатый вид, а $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1,j}x_j = 0 \\ \sum C_{nj}x_j = 0 \end{pmatrix}$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\underset{(r\times n)}{C} X = 0, \ rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \begin{pmatrix} E_r & \Big| & D \end{pmatrix} = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + ... + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + ... + d_{kn}x_n) \end{cases} \qquad k = 1, ..., r$$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ \hline E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов $a_1, ..., a_r$:

$$\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_r} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} \begin{pmatrix} M & \Big| & E_r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ \hline E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = \begin{pmatrix} E_{n-r} & \Big| & -M^T \end{pmatrix}$
Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность $n - (n - r) = r$

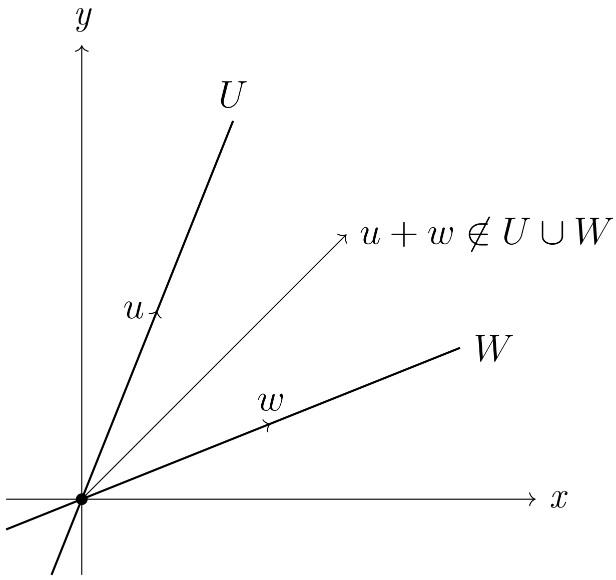
$\square$

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

1. *Если U_i $(i \in I)$ - подпространство V, то $W = \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ тоже подпространство в V;*

2. *Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств.*



Доказательство. 1. $\overline{0} \in W$, т.к. $\overline{0} \in U_i,\ \forall i \in I$.

Если $x, y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$

Если $x \in U_i,\ \forall i \in I,\ \forall \lambda \in F \Longrightarrow \lambda x \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow \lambda x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ □

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2, то оно содержит и сумму $u_1 + u_2$, если $u_i \in U_i,\ i = 1, 2$

Определение. Суммой подпространств $U_1, ..., U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + ... + U_m = \{x_1 + ... + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. $U_1 + ... + U_m$ *- подпространство в* V

Теорема. *(Формула Грассмана)*
Если U_1, U_2 *- подпространства в* V, $\dim U_1 < \infty,\ \dim U_2 < \infty$, *то*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i,\ \dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем $c_1, ..., c_s$ - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами $a_1, ..., a_{n_1 - s}$ и до базиса в U_2 векторами $b_1, ..., b_{n_2 - s}$.
Тогда векторы $c_1, ..., c_s, a_1, ..., a_{n_1 - s}, b_1, ..., b_{n_2 - s}$ - образуют базис в $U_1 + U_2$

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = \left(\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i\right) + \left(\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i\right)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s}\alpha_i a_i+\sum_{k=1}^{n_2-s}\beta_k b_k+\sum_{j=1}^{s}\gamma_j c_j=0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s}\alpha_i a_i=-\sum_{k=1}^{n_2-s}\beta_k b_k-\sum_{j=1}^{s}\gamma_j c_j\in U_1\cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\}\Longrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n_1-s}\alpha_i a_i=0\Longrightarrow a_i$ - ЛНЗ $\Longrightarrow\forall i:\ \alpha_i=0$
Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n_2-s}\beta_k b_k+\sum\limits_{j=1}^{s}\gamma_j c_j=0\Longrightarrow\{b_k,\gamma_j\}$ - ЛНЗ $\Longrightarrow\forall k,j:\ \beta_k=\gamma_j=0$

Алгоритм. *Пусть $U_1=\langle a_1,...,a_{n_1}\rangle,\ U_2=\langle b_1,...,b_{n_2}\rangle$, известны координаты всех этих векторов. Составим матрицу:*

$$\Big(A\ \Big|\ B\Big)=\Big(a_1^{\uparrow},...,a_{n_1}^{\uparrow}\ \Big|\ b_1^{\uparrow},...,b_{n_2}^{\uparrow}\Big)$$

$\dim(U_1+U_2)=rk(A|B)$

$$\Big(A\ \Big|\ B\Big)\xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}}\left(a_1^{\uparrow},...,a_{n_1}^{\uparrow}\ \middle|\ \underbrace{b_1^{\uparrow},...,b_m^{\uparrow}}_{\text{попало в базис}},b_{m+1}^{\uparrow},...,b_{n_2-m}^{\uparrow}\right)$$

Можно записать:

$$b_j=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i a_i+\sum_{k=1}^{m}\beta_{k_j}b_k\Longrightarrow b_j-\sum_{k=1}^{m}\beta_{k_j}b_k=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i a_i\in U_1\cap U_2$$

□

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение. Сумма $U_1+...+U_m$ подпространств $U_i\subset V,\ 1\le i\le m$ называется прямой суммой, если $\forall u\in U_1+...+U_m$ представим в виде:
$u=u_1+...+u_m\ (u_i\in U_i)$ единственным образом

Пусть $m=2, V$ - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. *$U=U_1+U_2$ - прямая сумма*

2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

4. Базис $U_1 + U_2$ *- объединение базисов слагаемых*

Доказательство.

1. $\to$ 2. Допустим $v \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow v = \underset{\in U_1}{v} + 0 = 0 + \underset{\in U_2}{v} \Longrightarrow v = 0$

2. $\to$ 3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{0}$$

3. $\to$ 4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \Longrightarrow \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$\Longrightarrow \text{все } \alpha_i \text{ и } \beta_i \text{ равны нулю}$$

4. $\to$ 1. $\forall u \in U_1 + U_2:$

$$u = (\sum_i \alpha_i a_i) + (\sum_j \beta_j b_j)$$

- разложение по базису единственно

$\square$

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. $U = U_1 + U_2 + ... + U_n$ *- прямая сумма*

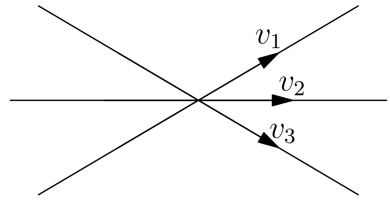
2. $\forall i,\ 1 \le i \le m,\ U_i \cap (\sum_{j \ne i} U_j) = \{0\}$

3. $\dim(U_1 + U_2 + ... + U_n) = \dim U_1 + \dim U_2 + ... + \dim U_n$

4. Базис $U_1 + U_2 + ... + U_n$ *- объединение базисов слагаемых*

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\},\ i \ne j$ недостаточно для прямой суммы:



v_1, v_2, v_3 - ЛЗ $\Longrightarrow$ представление не единственным образом

Лемма. *Любой ЛНЗ набор векторов $a_1, ..., a_m$ в n-мерном векторном пространстве V $(m < n)$ можно дополнить до базиса в V.*

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, ..., e_n \Longrightarrow rk\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(a_1^{\uparrow} \;\; \cdots a_m^{\uparrow} \;\Big|\; E_n\right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left(a_1^{\uparrow} \;\; \cdots a_m^{\uparrow} \;\Big|\; e_{i,1}^{\uparrow} \;\Big|\; e_{j,n-m}^{\uparrow} \;\; \cdots\right)$$

Тогда к векторам $a_1, ..., a_m$ надо добавить $e_{j,1}, ..., e_{j,n-m}$

$\square$

Определение. Если U - подпр-во в V $(0 \neq U \neq V)$ и $\exists\, W \subset V \;:\; V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U.

Следствие. *Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве $\exists$ прямые дополнения.*

Доказательство. $U = \langle a_1, ..., a_m\rangle \Longrightarrow \exists\, a_{m+1}, ..., a_n \;:\; \langle a_1, ..., a_n\rangle$ - базис в V, тогда $W = \langle a_{m+1}, ..., a_n\rangle$ $\square$

Определение. Пусть $V_1, ..., V_k$ $(k \geq 2)$ - векторы пространства над одним и тем же полем $\mathbb{F}$, тогда:

$$V = V_1 \times ... \times V_k = \{(v_1, ..., v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{ внешняя прямая сумма}$$

Обозначение: $\overset{\oplus}{\circ}$

Замечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \overset{\oplus}{\circ} ... \overset{\oplus}{\circ} V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V_i' = \{0, ..., .v_i, ..., 0\} - \text{ подпространство в } V$$

Запись $v_1, ..., v_k \overset{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, ..., 0) + (0, v_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, 0, ..., v_k)$ показывает, что $V = V_1' \oplus ... \oplus V_k'$ - единственно.
В частности $\dim(V_1 \overset{\oplus}{\circ} ... \overset{\oplus}{\circ} V_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim V_i$

Факторпространства

Определение. Пусть $U \subset V$ - подпространство, $v_1, v_2 \in V$. Говорят, что $v_1 \sim v_2$ по модулю U, если $v_1 - v_2 \in U$. Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U, где v - представитель
$* \ V/U = \{\underbrace{v + U}_{\overline{v}} \mid u \in U\}$

Утверждение. $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

Доказательство.

$\underline{\Rightarrow}$: Если $v_1 \sim v_2$, то $\exists\ u_0 \in V : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Longrightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0;\ \forall u \in U\ v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Longrightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

$\underline{\Leftarrow}$: Если $v_1 + U = v_2 + U$, то $\exists u_1 \in U :\ v_1 = v_2 + u_1 \Longrightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

Определение. $v + U$ - смежный класс элемента v по U : $\bar{v} := v + U$

Определение. $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ - факторпространство V по U.

Определение. Структура векторного пространства на V/U:

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda\overline{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

Определение. $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V
Обозначается: $\mathrm{Codim}_V U$

Пример. Пусть $V = C[a, b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0,\ x_0 \in [a, b]\} \Longrightarrow \mathrm{Codim}_V U = 1$$

Теорема.

1. *Данные операции задают на V/U векторное пр-во;*
2. *Если $\dim V < \infty$, то $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$*

Доказательство.

1) Проверим корректность введённых операций:
Если $v_1' = v_1 + u_1,\ v_2' = v_2 + u_2,\ u_1, u_2 \in U$:

$$v_1' + v_2' = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v_1' + v_2' \sim v_1 + v_2, \text{ т.е. } v_1' + v_2' + U = v_1 + v_2 + U \Rightarrow \overline{v_1' + v_2'} = \overline{v_1 + v_2}$$

$$\overline{v_1'} + \overline{v_2'} = \overline{v_1' + v_2'} = \overline{v_1 + v_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

т.е. сложение не зависит от выбора элементов в классах.
Если

$$v' = v + u,\ u \in U \Longrightarrow \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \Longrightarrow \lambda v \sim \lambda v';\ \overline{0} \in U;\ -\overline{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполенены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис $a_1, ..., a_m$ в U
Если $U = V$, т.е. $m = n = \dim V$, то $V/U = \{0\} \Longrightarrow \dim(V/U) = n - n = 0$
Если же $m < n$, то можно дополнить базис U векторами $a_{m+1}, ..., a_n$ до базиса в V, тогда классы $\overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ образуют базис в V/U :

$$\forall v \in V \ : \ v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j$$

$$\overline{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{a_j}$$

$\Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ порождают V/U
Проверим ЛНЗ:

$$\exists\ \lambda_j \in \mathbb{F} \ : \ \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j \overline{a_j} = \overline{0} \Longleftrightarrow \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j a_j \in U$$

$$\exists\ \mu_i \in \mathbb{F} \ : \ \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i = 0$$

Т.к. $\{a_1, ..., a_n\}$ ЛНЗ, то $\lambda_j = 0,\ \mu_i = 0,\ \forall i, j \Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ - ЛНЗ

$\square$

5 Линейные отображения и функции

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется линейным отображением V_1 в V_2, если:

1. $\forall v_1, v_1' \in V_1 \ : \ \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1')$;
2. $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} \ : \ \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$;

Из курса I семестра известно, что $\varphi(0_{V_1}) = 0_{V_2}$

Определение. Ядром φ называется множество $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\}$. Образом φ называется множество $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$.

Утверждение. *1.* $\mathrm{Ker}\varphi$ *- подпространство в* V_1

2. Отображение φ *инъективно* $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\}$

3. $\mathrm{Im}\varphi$ *- подпространство в* V_2

Доказательство. 1.

$$\forall u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}\varphi : \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = 0_{V_2} + 0_{V_2} = 0_{V_2}$$

$$\forall u \in \mathrm{Ker}\varphi, \ \forall\lambda \in \mathbb{F} : \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) = \lambda \cdot 0_{V_2} = 0_{V_2}$$

- подпространство по определению.

2. $\Longrightarrow$ Пусть отображение φ инъективно, то есть если $\varphi(v) = \varphi(w)$ для v, $w \in V$, то $v = w$. Возьмём $v = 0_{V_1}$, $w \in \mathrm{Ker}\varphi$. Так как $0_{V_1} \in \mathrm{Ker}\varphi$, то $\varphi(v) = 0_{V_2} = \varphi(w) \Longrightarrow v = w = 0_{V_1}$, так как отображение φ инъективно $\Longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\}$
$\Longleftarrow$ Пусть $\mathrm{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\}$ и v, $w \in V_1 : \varphi(v) = \varphi(w) \Leftrightarrow \varphi(v - w) = 0_{V_2}$, то есть $(v - w) \in \mathrm{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\} \Longrightarrow w = v$
3. $\forall w_1, \ w_2 \in V_2 \ \exists v_1, \ v_2 \in V_1 : \varphi(v_1) = w_1, \ \varphi(v_2) = w_2 \Longrightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \mathrm{Im}\varphi$

□

Определение. Линейное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом, если φ линейно и биективно. V_1 и V_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : V_1 \to V_2$. Обозначается: $V_1 \cong V_2$.

Теорема. *(Об изоморфизме) Конечномерные векторные пространства V_1 и V_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $dimV_1 = dimV_2$.*

Доказательство. $\Longleftarrow$ Пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Выберем $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V_1, а $f_1, \ldots, f_n$ - базис в V_2, тогда $\forall v \in V_1 \ \ v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Определим отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ формулой $\varphi(v) := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i$.

1. (линейность) Пусть $v_1, v_2 \in V_1$, $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $v_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, тогда

   $v_1 + v_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i) f_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

   $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ и $\forall v \in V_1$ $\varphi(\lambda v) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda x_i) f_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i = \lambda \varphi(v)$.

2. (инъективность) $\mathrm{Ker}\varphi = \{v \in V_1 | \varphi(v) = 0_{V_2}\}$. Пусть $v \in V_1$ и $v \in \mathrm{Ker}\varphi$, тогда $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow \varphi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$, а так как $f_1, \ldots, f_n$ - линейно независимы $\Longrightarrow \forall i$ $\alpha_i = 0 \Longrightarrow v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$.

3. (сюръективность) $\forall w \in V_2$ $w = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \Longrightarrow w = \varphi(v)$, $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \Longrightarrow$ $\varphi(V_1) = V_2$.

$\Longrightarrow$ Пусть $V_1 \cong V_2$, $\dim V_1 = n$, $\varphi : V_1 \to V_2$ - изоморфизм V_1 и V_2. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в V_1 и покажем, что $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ - базис в V_2.
$\forall w \in V_2 \ \exists v \in V_1 : \varphi(v) = w$. Пусть $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, тогда $\varphi(v) = w = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow V_2 = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$. Проверим линейную независимость
Предположим, что $\exists \mu_i \in \mathbb{F} : 0_{V_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i) \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i \in \mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, так как φ - биекция.
Так как $\{e_i\}$ линейно независимы $\Longrightarrow \mu_i = 0 \ \forall i \Longrightarrow \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. $\square$

6 Линейные функции

Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{F}$

Определение. Отображение $f:\ V \to \mathbb{F}$ - линейная функция со значениями в $\mathbb{F}$, если:

1. $\forall v_1,\ v_2 \in V:\ f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}:\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается: $V^* = \{f:\ V \to \mathbb{F}\}$ - множество линейных функций на V

Лемма. *Если* $f \not\equiv 0$, *то* $\dim(V/\mathrm{Ker} f) = 1$.

Доказательство. $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists v_1 \in V,\ f(v_1) \neq 0$. Пусть $v \in V$, тогда либо $v \in \mathrm{Ker}(f)$, либо $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Longrightarrow f(\frac{v_1}{\beta}) = 1,\ f(\frac{\alpha}{\beta}v_1) = \alpha$$

Рассмотрим выражение $f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1)$:

$$f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1) = f(v) - f(\frac{\alpha}{\beta}v_1) = \alpha - \alpha = 0$$

$\Longrightarrow v - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ и $v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u,\ u \in \mathrm{Ker}(f)$ $\square$

Замечание. $\forall x \in V:\ (f_1+f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Лемма. *Множество* V^* *с введенными операциями - векторное пространство.*

Определение. V^* - векторное пространство, сопряженное с V (двойственное для V)
Зафиксируем базис $e = (e_1, ..., e_n)$ в V и линейную функцию $f: V \to F$

$$\forall x \in V:\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ \text{где } a_i = f(e_i)$$

Удобно записывать это так: $f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Определение. Координатные функции - функции вида:

$$f_i:\ f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение: $e^i = f_i$

В частности: $f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$

Утверждение. *Функции* e^i *- базис в* V^*

Доказательство.
Докажем ЛНЗ: Пусть $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n:\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e^i \equiv 0$. Подставим e_j:

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех $e_1, ..., e_n$ получим, что $\forall i = 1, ..., n:\ \ \lambda_i = 0$. Разложим произвольную функцию $f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i e^i)(x) \ \Rightarrow\ f \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i e^i$$

$\square$

Следствие. *Если* $\dim V < \infty$, *то* $V^* \cong V$, *т.к.* $\dim V^* = \dim V$.

Определение. Базис $e^* = (e^1, ..., e^n)$ называется базисом V^*, сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису e в V.

Посмотрим, как изменится строка координат функции $f \in V^*$ при замене базиса e в V.
Пусть $e' = (e'_1, ..., e'_n) = e \cdot C_{e \to e'}$ - новый базис в V. Как известно, $X = C_{e \to e'} \cdot X'$.
Отсюда если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, то $\forall f \in V^*:$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i = (a'_1, ..., a'_n) X'$$

С другой стороны

$$f(x) = (a_1, ..., a_n) X = (a_1, ..., a_n)(C_{e \to e'} X') = ((a_1, ..., a_n) C_{e \to e'}) X'$$

Отсюда

$$\forall X' \in \mathbb{F}^n \ \ ((a_1, ..., a_n) C_{e \to e'}) X' = ((a'_1, ..., a'_n)) X'$$

Подставляя по очереди $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, в итоге получим равенство

$$(a_1, ..., a_n) C_{e \to e'} = (a'_1, ..., a'_n)$$

Пример. Возьмём $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$
Выберем в нём базис $\{1, (t - t_0), ..., (t - t_0)^n\} \Longrightarrow p(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i$
Если $e_i = (t - t_0)^i,\ 0 \leqslant i \leqslant n$, то $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

Определение. Вторым сопряжённым пространством к V (обозначается V^{**}) называется пространство, сопряженное к V^* - пространство линейных функций от линейных функций над V.

$$V^{**} = \{\varphi :\ V^* \to \mathbb{F}\}$$

Лемма. *f - инъекция $\Longleftrightarrow$ Ker(f) $= \{0\}$*

Теорема. *Если $\dim V < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).*

Доказательство. Рассмотрим отображение:

$$\varphi : V \to V^{**} :\ \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**} :\ \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

- $\forall f \in V^*,\ \varphi_{x_1+x_2}(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Longrightarrow \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$;
- $\forall f \in V^*,\ \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\varphi_x(f) \Longrightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;

Чтобы проверить, что φ - биекция, достаточно проверить, что $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ (так как сюръекцию имеем из $\dim V^{**} = \dim V$).
Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, т.е. $\varphi_x \equiv 0$. Значит, $\forall f \in V^* :\ f(x) = 0$
Если $x \neq 0$, то его можно дополнить до базиса: $x, e_2, ..., e_n$, где $n = \dim V$.
Тогда $e^1(x) = 1 \neq 0$ - противоречие с условием $\forall f \in V^* :\ f(x) = 0$. □

Задача. Доказать, что $a_1, ..., a_n \in V$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ лин. ф-ции $f^1, ..., f^n \in V^*$ такие, что $\det(f^i(a_j)) \neq 0$.

Замечание. Если $dimV = \infty$, то $V^* \ncong V$ в общем случае.

Пример. $V = \mathbb{Q}[t]$ - V счётно. Зафиксируем число $t \in \mathbb{Q}$ и рассмотрим произвольную $f \in V^*$:
$f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, ..., b_k, ...) \Rightarrow V^*$ континуально.
Отсюда мощность V^* больше мощности V, и они, очевидно, не изоморфны.

7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства, $\varphi : V_1 \to V_2$ - линейное отображение.

Пример.
$V_1 = D(a,b)$ - множество функций над полем $\mathbb{R}$, дифференцируемых на (a,b);
$V_2 = F(a,b)$ - множество функций над полем $\mathbb{R}$, опреелённых на (a,b);
$\varphi(f) = \frac{df}{dt},\ \varphi:\ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\ \mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$
Частный случай: $V_1 = \mathbb{R}[t]_n,\ V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$
$\varphi(f) = f'$ - линейное отображение (взяли производную)
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$. Является ли φ сюръекцией?
$\forall p(t) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}t^{n-1}$
$\exists f(t) = a_0t + a_1\frac{t^2}{2} + ... + a_{n-1}\frac{t^n}{n} : f'(t) = p(t) \Longrightarrow \varphi$ - сюръекция

Теорема. *Если* $\varphi:\ V_1 \to V_2$ *- линейное отображение,* $\dim V_1 < \infty$*, то*

$$\dim(Im\,\varphi) = \dim V_1 - \dim(Ker\,\varphi)$$

Доказательство. Пусть $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = m$ $(m \le n = \dim V_1)$
Выберем $c_1, ..., c_m$ - базис в $\mathrm{Im}\,\varphi \Longrightarrow \exists\ a_1, ..., a_m \in V_1:\ \varphi(a_i) = c_i,\ i = \overline{1,m}$
Так же выберем базис $b_1, ..., b_k$ в $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (если $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, то $\mathrm{Im}\,\varphi \cong V_1$)
Покажем, что $\{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_k\}$ - базис в V_1:
Пусть $\alpha_i,\ \beta_j:\ \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{k}\beta_j b_j = 0_{v_1}$, тогда:

$$\varphi(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k}\beta_j b_j) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(a_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\beta_j\varphi(b_j)}_{0_{v_2}} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i c_i = \varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$$

Т.к. c_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i = \overline{1,m}:\ \alpha_i = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{k} b_j\beta_j = 0$
Т.к. b_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall j = \overline{1,k}:\ \beta_j = 0$

$$\forall v \in V_1:\ \varphi(v) = \sum_{l=1}^{m}\gamma_l c_l = \varphi(\sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l) \Longrightarrow v - \sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l \in \mathrm{Ker}\,\varphi$$

$$\Longrightarrow \exists\beta_j \in \mathbb{F}:\ v = \sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l + \sum_{j=1}^{k}\beta_j b_j$$

$\square$

8 Матрицы линейного отображения

Пусть: $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ - базис в V_1; $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ - базис в V_2

$$\forall x \in V_1: \; x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Longrightarrow \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) =$$

$$= \{\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} f_i$$

Определение. Назовем $A = (a_{ij}) = A_{\varphi,e,f}$ - матрицей φ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Обозначается: $Y_f = A_{\varphi,e,f} \cdot X_e$ (где Y - столбец координат $\varphi(x)$).

Замечание. Для линейного оператора $\varphi: \; V \to V, \; A_{\varphi,e} \equiv A_{\varphi,e,e}$

Алгоритм. *Вычисление* $Ker\,\varphi$ *и* $Im\,\varphi$ *с помощью матрицы* A_φ :

1. $Ker\,\varphi = \{x = \mathcal{E} \cdot x_\mathcal{E} \; : \; A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = 0\}; \; \dim(Ker\,\varphi) = n - rkA_\varphi$
2. $Im\,\varphi = \langle \varphi(e_1), ..., \varphi(e_n) \rangle = \{y = f \cdot Y_f \; : \; Y_f = A_\varphi \cdot x_\mathcal{E}\}$
   $Y \in Im\,\varphi \Longleftrightarrow$ *СЛУ* $A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = Y$ *совместна* $\Longrightarrow \dim(Im\,\varphi) = rkA_\varphi$
   (т.е. не зависит от базиса);
3. $\dim(Im\,\varphi) + \dim(Ker\,\varphi) = \dim V_1$

8.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат

Утверждение. *Пусть* $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ *- старый, а* $\mathcal{E}' = (e'_1, ..., e'_n)$ *- новый базисы в* V_1 *и* $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ *- старый , а* $\mathcal{F}' = (f'_1, ..., f'_n)$ *- новый базисы в* V_2, C *- матрица перехода из* $\mathcal{E}$ *в* $\mathcal{E}'$*, а* D *- матрица перехода из* $\mathcal{F}$ *в* $\mathcal{F}'$*. Тогда:*

$$A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C$$

Доказательство. Воспользуемся формулами связи координат векторов:

$$\forall x \in V_1: \; x_\mathcal{E} = \underbrace{C_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}}_{C} \cdot x_{\mathcal{E}'} \text{ и } \forall y \in V_2: \; y_\mathcal{F} = \underbrace{C_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'}}_{D} \cdot y_{\mathcal{F}'}$$

Тогда формулы имеют вид:

$$Y_\mathcal{F} = \underset{(*)}{A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}}} \cdot x_\mathcal{E} \text{ и } Y_{\mathcal{F}'} = \underset{(**)}{A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'}} \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Умножим $(*)$ слева на D^{-1}, а также запишем выражение $x_{\mathcal{E}}$ через $x_{\mathcal{E}'}$:
$\forall x_{\mathcal{E}'} \in F^n$:

$$D^{-1} \cdot Y_{\mathcal{F}} = D^{-1} \cdot (A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'} \Longleftrightarrow Y_{\mathcal{F}'} = (D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Возьмем $x_{\mathcal{E}'} = E_j,\ j = 1, ..., n$ □

Замечание. Для линейного оператора $\varphi: \ V \to V$:

$$A_{\varphi,\mathcal{E}'} = C^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$$

Следствие.

1. *Для любого линейного отображения ранг его матрицы инвариантен при замене базиса*
$$rk\, A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = rk\, A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}};$$

2. *Для любого линейного оператора опердзелитель и след его матрицы инвариантны при замене базиса*
$$\det(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = \det(A_{\varphi,\mathcal{E}})$$
$$tr\,(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = tr\,(A_{\varphi,\mathcal{E}})$$

Доказательство.

1. Матрицы C и D невырождены, значит достаточно доказать, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(AC)$, где C - невыроджена.
$$\begin{cases} B = A \cdot C \Longrightarrow \operatorname{rk} B \le \operatorname{rk} A \\ A = (A \cdot C) \cdot C^{-1} \Longrightarrow \operatorname{rk} A \le \operatorname{rk}(AC) \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\operatorname{rk}(AC) \le \operatorname{rk} A \le \operatorname{rk}(AC)}_{\operatorname{rk}(AC) = \operatorname{rk} A}$$

2. $\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A$

3. $\operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(CA) \Longrightarrow \operatorname{tr}\,\left[C^{-1} \cdot (AC)\right] = \operatorname{tr}\,\left[(AC) \cdot C^{-1}\right] = \operatorname{tr} A$

□

Теорема. *Пусть* $a_1, ..., a_n$ *- ЛНЗ векторы в* V_1 $(\dim V_1 = n)$, $b_1, ..., b_n$ *- случайные векторы в* V_2 $(\dim V_2 = m)$. *Тогда* $\exists!$ *линейное отображение* $\varphi: \ V_1 \to V_2$: $\varphi(a_j) = b_j,\ j = 1, ..., n$

Доказательство.
Пусть в некотором базисе $\mathcal{E}$ пространства V_1 вектор $a_j \sim a_j^{\uparrow}$ - столбец координат, в базисе f пространства V_2 вектор $b_j \sim b_j^{\uparrow}$
По условию, $\forall j = 1, ..., n: \; A_\varphi \cdot a_j^{\uparrow} = b_j^{\uparrow} \Longrightarrow A_\varphi(a_1^{\uparrow}, ..., a_n^{\uparrow}) = (b_1^{\uparrow}, ..., b_n^{\uparrow})$ или $A_\varphi \cdot A = B$, где A_φ - искомая матрица.
Отсюда получаем, что $A_\varphi = B \cdot A^{-1}$ (т.к. $a_1, ..., a_n$ ЛНЗ).

$$\left(\frac{A}{B}\right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\frac{E}{A_\varphi}\right), \; \left(\frac{A}{B}\right) \to \left(\frac{A}{B}\right) \cdot C_{\text{эл}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)$$

Если $AC = E$, то $C = A^{-1}$ и $BC = BA^{-1} = A_\varphi$ □

Теорема. *Если* $\dim V_1 < \infty, \; \varphi: \; V_1 \to V_2$ *- линейное отображение, то*

$$Im\,\varphi \cong V_1/Ker\,\varphi$$

Доказательство. Базис ядра дополним до базиса пространства V_1 векторами $e_1, ..., e_s$. Тогда любой $v \in V_1$ можно записать в виде:

$$v = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i + u, \text{где } u \in \operatorname{Ker}\varphi$$

По этому в факторпространстве базис составляет классы $\overline{v} + u = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i \overline{e_i}$
Рассмотрим отношение $\overline{\varphi}: \; V_1/u \to V_2$, где $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(v + u) := \varphi(v)$
Отсюда $w = \overline{\varphi}(\overline{v})$. Получаем, что φ - сюръективное линейное отображение (т.к. $\forall w \in V_2 \; \exists \; v \in V_1: \; \varphi(v) = w$). Также $\operatorname{Ker}\overline{\varphi} = \{0\} = \{\operatorname{Ker}\varphi\}$, потому что если $\overline{\varphi}(\overline{v}) = 0$, то $\varphi(v) = 0$, т.е. $v \in \operatorname{Ker}\varphi = u \Longrightarrow v \in U \Longrightarrow \overline{v} = u = \{0\}$ □

9 Линейные операторы

Определение. Линейное отображение $\varphi: \; V \to V$ называется линейным оператором

Далее рассматриваем линейные операторы.

Утверждение.

1. *$Ker\,\varphi$ - подпространство в V*

2. *$Im\,\varphi$ - подпространство в V*

3. Если $U \subset V$, то $\varphi(U)$ - подпространство в V

Определение. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно φ (или φ - инвариантным), если:

$$\forall u \in U: \ \varphi(u) \in U, \text{ т.е. } \varphi(U) \subseteq U$$

Примеры.

1. Пусть $V = U \oplus W$. Пусть $\varphi: \ V \to V$ такое, что $\varphi(v) = \varphi(u + w) = u$ - проекция V на U вдоль W. Тогда U и W - инвариантные подпространства относительно φ и $\forall u \in U: \ \varphi(u) = u$, а также $\forall w \in W: \ \varphi(w) = 0$. Отсюда $U \cong V/W$

2. Пусть $V = \mathbb{R}[t], \ \varphi(f) = \frac{df}{dt} \Rightarrow p(t) \to p'(t)$. Здесь инвариантным является подпространство $\mathbb{R}[t]_n \supset \mathbb{R}[t]_{n-1}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Теорема. *Если $\varphi: \ V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, U - инвариантное подпространство, то существует базис, в котором A_φ имеет блочный вид:*

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Где B и C - квадратные: $B_{m \times m}, \ m = \dim U$

Доказательство. Выберем базис $e_1, ..., e_m$ в U и дополним до базиса в V. Тогда в полученном базисе A_φ имеет нужный вид. $\square$

Замечание. Пусть $U \subset V$ - инвариантное подпространство для линейного оператора $\varphi: \ V \to V$
Ограничение φ на подпространство U:

$$\varphi|_u: \ U \to U; \ \ \forall u \in U: \ \varphi|_u(u) = \varphi(u)$$

Рассмотрим факторпространтсво:

$$\overline{V} = V/U: \ \{v + u \mid u \in U\}$$

и фактор-оператор:

$$\overline{\varphi}(\overline{v}) := \overline{\varphi(v)}$$

$\forall \overline{v} \in \overline{V}: \ v' = v + u, \ u \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v) + \varphi(u) \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v)$
Т.о. $\overline{\varphi}: \ \overline{V} \to \overline{V}$ - линейный оператор.

Теорема.

1. *Если существует инвариантное подпространство* $U \subset V$*, то в подходящем базисе:*
$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad (I)$$
Где $B_{m\times m},\ m = \dim U$*, а точнее:* B *- матрица оператора* $\varphi|_u$*,*
C *- матрица оператора* $\overline{\varphi}$

2. *Если* $V = U \oplus W,\ U$ *и* W *- инвариантные для* φ*, то в подходящем базисе:*
$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad (II)$$
Причем $B = A_{\varphi|_u},\ C = A_{\varphi|_w}$*.*
Верно и обратное, если в некотором базисе матрица A_φ *имеет вид* (I)*, то для* φ $\exists$ *инвариантное подпространство, а если* A_φ *имеет вид* (II)*, то* V *- прямая сумма двух инвариантных подпространств.*

Доказательство. Обозначим $\dim V = n,\ \dim U = m,\ 0 < m < n$

1. Выберем базис в $U:\ e_1, ..., e_m$ и произвольно дополним его до базиса V векторами $e_{m+1}, ..., e_n$.
$$\forall u \in U:\ u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i \Longrightarrow \varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi(e_i)$$
В частности, столбцы $\varphi(e_1)^\uparrow, ..., \varphi(e_m)^\uparrow$ имеют вид: $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \Longrightarrow$ они составляют матрицу $\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right)$. Столбцы матрицы $\varphi(e_{m+1}^\uparrow, ..., e_n^\uparrow)$ соответствуют номерам координат. Видно, что:
$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_u}$$
$\overline{e_j} = e_j + U,\ j = m+1, ..., n$ - базис в факторпространстве $\overline{V} = V/U$.
$$\overline{\varphi(e_j)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i + \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj} \overline{e_k}$$
$$\Longrightarrow C = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица оператора } \overline{\varphi}$$

2. Если $V = U \oplus W$, векторы $e_{m+1}, ..., e_n$ надо выбирать в W. Остальное аналогично.

$\square$

Теорема. *(Обратная)*
Для второго случая, если в базисе $e_1, ..., e_n$ матрица имеет вид (II), то положим $U := \langle e_1, ..., e_m \rangle, \ W := \langle e_{m+1}, ..., e_n \rangle$
Из определения матрицы $A_{\varphi,e}$ следует, что U, W - инвариантные относительно φ, $\varphi|_u$ имеет матрицу B, $\varphi|_w$ - матрицу C.

Замечание. В общем случае, если $V = U_1 \oplus ... \oplus U_s, \ U_i$ - инвариантны относительно $\varphi : \ V \to V$, то в базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix}$$

где B_i - матрица $\varphi|_{u_i}$.

Примеры. $\varphi : \ V \to V$

1. $\operatorname{Ker} \varphi, \ \operatorname{Im} \varphi$, любое подпространство $U \supseteq \operatorname{Im} \varphi$ - инвариантны.

2. Если $U_1, U_2 - \varphi$-инвариантные подпространства, то $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$ - инвариантны

10 Действия над линейными отображениями

Пусть $\varphi : \ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\forall x \in V_1$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{F} : \ (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$

2. Если $\psi : \ V_1 \to V_2$, то $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

Утверждение. *(1) Относительно этих операций множество $Z(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 является векторным пространством.*

Утверждение. *(2) Если $\dim V_1 = n, \ \dim V_2 = m$, то $Z(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$*

Доказательство. Зафиксируем базисы в V_1 и V_2: e и f соответственно, тогда $\forall \varphi$ взаимоднозначно соответствует его матрица $A_{\varphi,e,f}$ относительно базисов e

и f. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$ $\forall\lambda \in \mathbb{F}$ $(\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \Longrightarrow$ все столбцы A_φ умножаются на $\lambda \Longrightarrow A_\varphi$ умножается на λ.

$$\forall j = 1, ..., m: \ (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j)$$

$\Longrightarrow$ столбцы $A_{\varphi+\psi}$ имеют вид $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$. □

Обозначение: $L(V_1, V_2) = \mathfrak{T}(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.
$\mathfrak{T}(V)$ - множество линейных операторов на V.

Определение. Произведением линейных операторов $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ называется их композиция:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x)), \text{ где } x \in V_1$$

Утверждение. *(3) Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.*

Утверждение. *(4) Пусть V_1, V_2, V_3 - конечномерные векторные пространства, $\varphi : V_1 \to V_2$, $\psi : V_2 \to V_3$ - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции:*

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi$$

Доказательство.
Утверждение (3) - упражнение.
Утверждение (4): Пусть e - базис в V_1, f - базис в V_2, g - базис в V_3.

$$A_\varphi = (\varphi(e_1)^\uparrow \dots \varphi(e_n)^\uparrow) \text{ в базисе } f$$

$$A_\psi = (\psi(f_1)^\uparrow \dots \psi(f_m)^\uparrow) \text{ в базисе } g$$

$\forall x = eX$, обозначим $y = \varphi(x)$, $z = \psi(y)$ со столбцами координат Y и Z соответственно. Тогда:

$$Y = A_\varphi X, \ Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi\circ\varphi}X$$

□

Теорема. *Множество $L(V)$ с операциями $+$, $\cdot\lambda$, $\cdot$ является ассоциативной алгеброй с единицей, равной $\mathrm{id}\, V$. Если $\dim V = n$, то $L(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Следует из утверждений (1) - (4). □

Утверждение. *Если φ - линейный оператор на V, то $\forall k \in \mathbb{N}$ подпространства $Ker\,\varphi^k$ и $Im\,\varphi^k$ инвариантны. При этом:*

$$\{0\} \subseteq Ker\,\varphi \subseteq Ker\,\varphi^2 \subseteq \dots$$

$$V \supseteq Im\,\varphi \supseteq Im\,\varphi^2 \dots$$

11 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$

Определение. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ, если $x \neq 0$ и

$$\exists \lambda \in \mathbb{F} : \ \varphi(x) = \lambda \cdot x \tag{1}$$

Где λ - называется собственным значением оператора φ, соответствующим вектору x.

Пусть $\dim V = n$, e - базис в V, в нём $\forall x = e \cdot X$, тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно:

$$A_\varphi X = \lambda X \Longleftrightarrow (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \tag{2}$$

- это СЛУ для нахождения вектора x, если известна λ. Система (2) имеет ненулевое решение, только если:

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

Равенство (3) называется характеристическим уравненением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

Примеры.

1. $V = D^\infty(\mathbb{R})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций.

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \ \forall f(x) : \ \varphi(f) = f'(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \ (e^{\lambda x})' = \lambda e^x$$

Доказательство. Если $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$, то $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, где $C \neq 0$. Рассмотрим $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow f(x)e^{-\lambda x} = C$. □

2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Упражнение. Какие существуют собственные векторы и собственные значения у φ во втором примере?

Определение.

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{11}-\lambda)+\cdots = (-\lambda)^n + (a_{11}+...+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+...+\det A$

$\chi_A(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A

Утверждение. ***(1)*** *$\chi_A(\lambda)$ - не зависит от базиса.*

Доказательство. В новом базисе: $A'_\varphi = C^{-1}\cdot A_\varphi \cdot C$

$$\chi_{A'_\varphi}(\lambda) = \det(C^{-1}A_\varphi C - \lambda E) = \det(C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C) = \det(A_\varphi - \lambda E)$$

□

Определение. Вместо $\chi_{A_\varphi}(\lambda) = \chi_\varphi(\lambda)$ и называется характеристическим многочленом оператора φ

12 Диагонализируемость

Пусть $\varphi: \ V \to V$ - линейный оператор

Лемма. *Если $a_1, ..., a_m \in V$ - собственные векторы оператора φ с собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_m$, причем $\forall i \neq j: \ \lambda_i \neq \lambda_j$, то $a_1, ..., a_m$ - ЛНЗ.*

Доказательство.

$m = 1:$ Один вектор $a_1 \neq 0$ ЛНЗ

$m > 1:$ Предположение индукции: Любые $m-1$ вектор, отвечающих попарно различным собственным значениям - ЛНЗ

Запишем:

$$a_1\alpha_1 + ... + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m = 0 \tag{1}$$

Подействуем оператором

$$\varphi: a_1\lambda_1\alpha_1 + ... + a_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\lambda_m\alpha_m = 0 \tag{2}$$

Домножим (1) на λ_m и вычтем его из (2):

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$$

По предположению индукции $\forall i = 1, ..., m-1: \ \alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0$

Остается $\alpha_m a_m = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$

$\square$

Следствие. *Если φ имеет n попарно различных собственных значений $(\dim V = n)$, то соответствующее собственные векторы, взятые по одному для каждого собственного значения, образуют базис в V (Базис из собственных векторов или собственный базис).*

Вид матрицы A_φ в базисе из собственных векторов:
Обозначаем базис $\{e_1, ..., e_n\} \in V,\ \ \varphi(e_j) = \lambda_j e_j,\ j = \overline{1, n}$
$\forall x \in V:\ \varphi(x) = A_{\varphi,e} \cdot X_e$. Столбец вектора $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,...

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- диагональная, причем на диагонали находятся собственные значения с учетом нумерации векторов

12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением

Фиксируем собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ так, что $\exists\ v \in V, v \neq 0:\ \varphi(v) = \lambda_0 v$
Обозначается: $V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$

Утверждение. *(1) V_{λ_0} - подпространство в V, $V_{\lambda_0} = Ker\,(\varphi - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})$*

Доказательство. Если A_φ - матрица оператора φ, то в координатах V_{λ_0} - множество всех решений СЛУ.

$$(A_\varphi - \lambda_0 E) \cdot X = 0 \Longrightarrow \dim V_{\lambda_0} = n - \mathrm{rk}\,(A_\varphi - \lambda_0 E)$$

$\square$

Определение.
$\dim V_{\lambda_0}$ - геометрическая кратность характеристического корня $\lambda = \lambda_0$. Имеет смысл и алгебраическая кратность λ_0 характеристического корня $\chi_\varphi(\lambda)$:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p(\lambda_0),\ P(\lambda_0) \neq 0,\ k - \text{алгебраическая кратность}$$

Лемма. *Для любого собственного значения λ_0 оператора φ :*
$$\dim V_{\lambda_0} \leq \text{алгебраическая кратность корня } \lambda = \lambda_0 \text{ в } \chi_\varphi(\lambda)$$

Доказательство. Пусть $\dim V_{\lambda_0} = m \le n$, выберем базис в $V_{\lambda_0}: \ \{e_1, ..., e_m\}$ и произвольно дополним его до базиса в V (при m<n) векторами $e_{m+1}, ..., e_n \Longrightarrow$

$$A_{\varphi,e} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & \\ & \ddots & & C \\ 0 & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A_{\varphi,e} - \lambda E| = \det \left(\begin{array}{ccc|c} (\lambda_0-\lambda) & & 0 & \\ & \ddots & & C \\ 0 & & (\lambda_0-\lambda) & \\ \hline & 0 & & B-\lambda E \end{array}\right) = (\lambda_0-\lambda)^m \cdot |B-\lambda E| = 0$$

Не исключено, что $\lambda = \lambda_0$ - корень уравнения $|B - \lambda E| = 0$ □

Замечание. Любое собственное подпространство V_{λ_0} является φ - инвариантным:

$$\forall v \in V_{\lambda_0}: \ \varphi(v) = w: \ \varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = \lambda_0\varphi(v) = \lambda_0 w$$

Либо $w = 0$, либо является собственным вектором.

Следствие. ***2 из Леммы о ЛНЗ:***
Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_r$ - все попарно различные собственные значения оператора φ, тогда $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_r}$ - является прямой суммой, т.е.:

$$\forall i = 1, ..., n: \ V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j\neq i} V_{\lambda_j}) = \{0\}$$

Доказательство. Допустим, что $\exists \ w \in V_{\lambda_i} \cap (\sum\limits_{j\neq i} V_{\lambda_j})$, тогда:

$$w = v_i = \sum_{j\neq i} v_j \Longrightarrow (\sum_{j\neq i} v_j) - v_i = 0$$

Где $(\sum\limits_{j\neq i} v_j)$ - попарно различные собственные векторы, т.е. либо 0, либо противоречие с ЛНЗ $\Longrightarrow v_i = w = 0$ □

Определение. Скажем, что φ (или его матрица) приводится к диагональному виду (т.е. диагонализируема), если в V $\exists$ базис, в котором A_φ диагональна.

Теорема. *Для линейного оператора $\varphi: \ V \to V$ $(\dim V < \infty)$ следующие условия эквивалентны:*

1. *A_φ - диагонализируема*

2. В V $\exists$ базис из собственных векторов

3. Все характеристические корни принадлежат $\mathbb{F}$ и $\forall i = 1, ..., r$:

$$\dim V_{\lambda_i} = \textit{алгебраической кратности корня } \lambda_i$$

4. $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$

Доказательство.

$\underline{1 \Rightarrow 2}$: Если $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, это значит, что:

$$\varphi(e_j)^\uparrow = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \varphi(e_j) = \lambda_j e_j$, т.е. e_j - собственный вектор с собственным значением λ_j

$\underline{2 \Rightarrow 1}$: В базисе из собственных векторов марица A_φ диагональна

$\underline{1 \cup 2 \Rightarrow 3}$: Выберем базис из собственных векторов $\{f_1, ..., f_n\}$ так, чтобы:

$$\{f_1, ..., f_{m_1}, f_{m_1+1}, ..., f_{m_1+m_2}, ...\}$$

В этом базисе матрица $A_{\varphi,f}$ выглядит:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{m_1} \qquad \underbrace{\qquad}_{m_2} \qquad \underbrace{\qquad}_{m_r}$$

$\Longrightarrow m_1 + ... + m_r = n$. С другой стороны, если k_i - алгебраическая кратность корня λ_i, то:

$$n = \sum_{i=1}^{r} m_i \leq \sum_{i=1}^{r} k_i = \deg[\chi_\varphi(\lambda)] = n$$

$\underline{3 \Rightarrow 4}$: $\sum\limits_{i=1}^{r} \dim V_{\lambda_i} = n \Longrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$

$\underline{4 \Rightarrow 1}$: Базис в V - объединение базисов слагаемых

□

Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над $\mathbb{R}$, отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.

Пусть $\varphi: \ V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, тогда в некотором базисе V, φ действует матрицей $Y = A_\varphi \cdot X$, где $X \in \mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора ($y = \varphi(x)$). Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем $\mathbb{C}$, действующий при той же матрице:

$$A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n, \ Z \to A_\varphi \cdot Z$$

Соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то $\exists$ собственный вектор Z_0, отвечающий выбранному λ. Это значит, что:

$$A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0, \ Z_0 = X_0 + iY_0, \ \text{где } X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longrightarrow A_\varphi Z_0 = A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = \\ = (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases}$$

Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \Longrightarrow \ \text{подпространство } U := \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$$

$\Longrightarrow U$ является инвариантным подпространством для φ.
Теперь докажем, что $\dim U = 2$

Доказательство. Предположим, что $\dim U = 1$, то есть $y_0 = \mu x_0$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \Longrightarrow$ если $x_0 \neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ.

$$A_{\varphi|_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{имеет корни } \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R} - \text{противоречие}$$

□

Теорема. *Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Если $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характеристического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V,\ \ u_i \neq 0, \Longrightarrow \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.
Если $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $\exists\ U$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Вместо диагонализируемости можно использовать следующее утверждение:

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R},\ \ i = \overline{1, r},$ а $\beta_j \neq 0,\ \ j = \overline{1, m}$

13 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi:\ V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Линейный оператор $\varphi:\ V \to V$ такой, что $\forall v \in V:\ \varphi(v) = v$, называется тождественным оператором и обозначается id.

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ

$$f(\varphi) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m = 0 \Longrightarrow f(A_\varphi) = 0$$

$\Longrightarrow A_{f(\varphi)} = f(A_\varphi) = a_0 E + a_1 A_\varphi + \ldots + a_m A_\varphi^m.$

Пример. $V = \mathbb{R}[t]_n,\ \ \varphi = \frac{d}{dt}$

$$\varphi^n(t^n) = n!,\ \varphi^{n+1} \equiv 0 \Longrightarrow \text{для } \varphi = \frac{d}{dt}\ \ t^{n+1} - \text{анулирующий многочлен}$$

Утверждение. *Если* $\dim V = n \Longrightarrow \exists$ *многочлен* $\deg \leq n^2$, *анулирующий* φ.

Доказательство. $\dim L(V) = n^2,\ L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \Longrightarrow$ операторы
$\{Id,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^{n^2}\}$ - линейно зависимы, так как их больше $n^2 \Longrightarrow$

$$\exists\ a_0, ..., a_{n^2} \in \mathbb{F}:\ a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1\varphi + \ldots + a_{n^2}\varphi^{n^2} = 0$$

$\Longrightarrow a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n^2} t^{n^2}$ - анулирующий многочлен для φ □

Определение. Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица $P = (P_{ij}(\lambda))$, где $P_{ij}(\lambda)$ - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

Пример.

$$P = \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 2\lambda+1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2+\lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2$$

- многочлен от λ с матричными коэффициентами.

Определение. Оператор $\varphi: \ V \to V$ называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

Определение. Для матрицы $A = (a_{ij})$ присоединённой матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ji})$, то есть $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$.

Свойство.

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

Теорема. ***Гамильтона-Кэли***

Характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ является анулирующим многочленом для линейного оператора φ, то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$, где 0 - нулевой оператор.

В матричной форме:

$$\forall A \in M_n(\mathbb{F}): \ \chi_A(A) = 0$$

Доказательство. Пусть A - данная матрица, тогда:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \sum_{i=0}^{n} p_i \lambda^i$$

$$p_i \in \mathbb{F}, \ p_n = (-1)^n, \ \chi_A(A) = \sum_{i=0}^{n} p_i A^i (\text{считаем, что } A^0 = E)$$

Составим матрицу:

$$\widehat{A - \lambda E} = \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j, \ \text{где } D_j \in M_n(\mathbb{F})$$

Рассмотрим равенство:

$$(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda) E$$

$$(A-\lambda E)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}D_j\lambda^j=\sum_{j=0}^{n-1}(AD_j\lambda^j)-\sum_{j=0}^{n-1}D_j\lambda^{j+1}=$$
$$=AD_0+\sum_{j=1}^{n-1}(AD_j-D_{j-1})\lambda^j-D_{n-1}\lambda^n=\chi_A(\lambda)E=(\sum_{j=0}^{n}p_j\lambda^j)E$$

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях λ:

$$\begin{array}{c|ll} E\cdot & \lambda^0: & AD_0=p_0E \\ A\cdot & \lambda^1: & AD_1-D_0=p_1E \\ \vdots & & \\ A^j\cdot & \lambda^j: & AD_j-D_{j-1}=p_jE \\ \vdots & & \\ A^n\cdot & \lambda^n: & -D_{n-1}=p_nE \end{array}$$

Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени A и сложим:

$$\Longrightarrow \chi_A(A)E=0$$

□

13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора

Определение. Минимальным анулирующим многочленом линейного оператора $\varphi:\ V\to V$ называется анулирующий многочлен φ минимальной степени. Обозначается: $\mu_\varphi(\lambda)$ (Зачастую его выбирают со старшим коэффициентом $=1$)
Ясно, что:

$$m=\deg\mu_\varphi(\lambda)\leq n\leq\deg\chi_\varphi(\lambda)$$

Теорема.

1. *$\mu_\varphi(\lambda)$ делит анулирующий многочлен оператора φ (в частности $\chi_\varphi(\lambda)$);*

2. *Если $\mu'_\varphi(\lambda)$ тоже минимальный многочлен φ, то:*

$$\mu'_\varphi(\lambda)=\alpha\mu_\varphi(\lambda),\ \alpha\neq0$$

   Он определен единственным образом с условием, что старший коэффициент $=1$;

3. *Если все корни λ_i характеристического многочлена принадлежат $\mathbb{F}$, то они являются и корнями минимального многочлена.*

Доказательство.

1. Пусть $p(\varphi) = 0$, для некоторого $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$
   Разделим p с остатком на μ_φ:
   $$p(\lambda) = \mu_\varphi(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = \mu_\varphi(\varphi) \cdot q(\varphi) + r(\varphi) = 0 \Rightarrow r(\varphi) = 0$$
   Т.к. $\deg r(\lambda) < \deg(\mu_\varphi(\lambda))$, $r(\lambda) \equiv 0$.
2. Т.к. $\mu_\varphi(\lambda) \mid \mu'_\varphi(\lambda)$ и $\mu'_\varphi(\lambda) \mid \mu_\varphi(\lambda) \Longrightarrow \frac{\mu'_\varphi}{\mu_\varphi} = \alpha \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$
   Если $\mu_\varphi(\lambda) = \lambda^m + ...$ и $\mu'_\varphi(\lambda) = \lambda^m + ... \Longrightarrow \alpha = 1$
3. Допустим, что $\exists j: \ \mu_\varphi(\lambda_j) \neq 0$, т.е. в разложение μ_φ не входит $(\lambda - \lambda_j)$ $\Longrightarrow \exists$ вектор $v \in V: \ \varphi(v) = \lambda_j v$
   $$0 = \mu_\varphi(\varphi)(v) = \mu_\varphi(\varphi(v)) = \mu_\varphi(\lambda_j v) = \mu_\varphi(\lambda_j) v \neq 0$$
   - противоречие

$\square$

Примеры.

1. $$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \chi_\varphi(\lambda) = (2-\lambda)^3$$
   $$A_\varphi - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (A-2E)^2 \neq 0, \ (A-2E)^3 = 0 \Longrightarrow \mu_\varphi = -\chi_\varphi$$
2. $$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \chi_\varphi = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$
   $$(A_\varphi - 2E)(A_\varphi - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \mu_\varphi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

Вопросы:

1. Для каких операторов φ (или A_φ) $\chi_\varphi(\lambda) = \pm\mu_\varphi(\lambda)$?

2. Для каких φ корни $\mu_\varphi(\lambda)$ простые?

Определение. Оператор φ нильпотентный, если:

$$\exists\ L \in \mathbb{N} :\ \varphi^L = 0$$

Если L - минимальный с этим условием, то L - индекс нильпотентности

Пример. $D = \frac{d}{dt}$ в пространстве $\mathbb{R}[t]_n$, то $D^{n+1} = 0$

Утверждение. *Все собственные значения нильпотентного оператора* $= 0$

Доказательство. Если $v \neq 0,\ \varphi(v) = \lambda v$:

$$\Longrightarrow \varphi^L(v) = \lambda^L v = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = \pm\lambda^n$$

□

14 Корневые подпространства

$\varphi :\ V \to V$ - линейный оператор над $\mathbb{F},\ \dim V = n$
Все корни характеристического многочлена для φ принадлежат F так, что:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},\ \forall i \neq j :\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ \sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + ... + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}}\ \ | \cdot \chi_\varphi(\lambda)$$

$$\Longrightarrow 1 = f_1(\lambda)\prod_{i\neq 1}(\lambda - \lambda_i)^{k_i} + ... + f_s(\lambda)\prod_{i \neq s}(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

$$1 = q_1(\lambda) + ... + q_s(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{id} = q_1(\varphi) + ... + q_s(\varphi) = Q_1 + ... + Q_s$$

$$\forall x \in V :\ x = Q_1(x) + ... + Q_s(x) \Longrightarrow V = \mathrm{Im}(Q_1) + ... + \mathrm{Im}(Q_s)$$

Обратим внимание, что:

$$\forall i \neq j :\ Q_i Q_j = Q_j Q_i = 0$$

Т.к. в $q_i(\lambda)q_j(\lambda)$ входят все множители, входящие в разложение $\chi_\varphi(\lambda) \Longrightarrow$ по теореме Гамильтона-Кэли:

$$q_i(\varphi)q_j(\varphi) = 0$$

Умножим равенство $\mathrm{id} = Q_1 + ... + Q_i + ... + Q_s$ на Q_i :

$$\Longrightarrow Q_i \mathrm{id} = Q_i = Q_i Q_1 + ... + Q_i Q_i + ... + Q_i Q_s = Q_i^2 \Longrightarrow Q_i^2 = Q_i$$

Определение. $Q_i^2 = Q_i$ - идемпотентный оператор.

Введем обозначение $K_i = \mathrm{Im} Q_i$

Утверждение. $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s$

Доказательство. Пусть $x = y_1 + ... + y_s,\ y_i = Q_i(x_i)$. Тогда:

$$Q_i(x) = Q_i(Q_1(x_1)) + ... + Q_s(Q_i(x_s)) = Q_i(Q_i(x_i)) = Q_i(x_i) = y_i$$

Отсюда разложение любого вектора из V в сумму векторов из $K_1, ..., K_s$ единственно, т.е. $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s$. □

Определение. Подпространство $K_i = \mathrm{Im} Q_i$ назовем корневым подпространством, отвечающим корню λ_i.

Замечание. $q_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda) \cdot \chi_\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}} = f_i(\lambda) \prod\limits_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{k_j};\quad Q_i = q_i(\varphi);\quad K_i = \mathrm{Im} Q_i$.

Утверждение.

1. *Корневые подпространства инвариантны*
2. $K_i = Ker(\varphi - \lambda_i \cdot id)^{k_i},\ 1 \leq i \leq s$

Доказательство.

1. Докажем, что для линейного оператора φ и многочлена $q(\lambda)$ подпространство $q(\varphi)(V)$ инвариантно:

   $$q(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + ... + a_m \lambda^m,\quad q(\varphi) = a_0 + a_1 \varphi + ... + a_m \varphi^m$$

   Возьмем $v \in \mathrm{Im} q(v) \Longrightarrow \exists\ u \in V :\ v = q(\varphi)(u) \Longrightarrow \varphi(v) = (\varphi \cdot q(\varphi))(u) = q(\varphi)(\varphi(u)) \in \mathrm{Im} q(u)$, так как оператор φ и любой $q(\varphi)$ перестановочны.
   Так как $K_i = Q_i(V) = q_i(\varphi)(V)$, из доказаноого выше следует, что K_i инвариантно.

2. $\forall x_i \in \mathrm{Im} Q_i \Longrightarrow x_i = Q_i(u_i)$

   $$(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i}(x_i) = f_i(\varphi) \cdot \underbrace{(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i} \cdot \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j E)^{k_j}}_{\chi_\varphi(\varphi)}(u_i) = 0$$

   $\Longrightarrow K_i \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i}$
   Обратно: пусть $y_i \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k^i}$. Знаем, что $y_i = Q_1(y_i) + ... + Q_s(y_i)$, причём в Q_j при $j \neq i$ содержится множитель $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i}$. Отсюда $Q_j(y_i) = 0$ при $j \neq i$, т.е. $y_i = Q_i(y_i) \Rightarrow y_i \in K_i \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i} \subseteq K_i$.

$\square$

Теорема. *Размерность K_i равна алгебраической кратности корня λ_i.*

Доказательство. Рассмотрим ограничение оператора $\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}$ на K_i. Так как полученный оператор нильпотентный (из предыдущей теоремы), его единственное собственное значение равно 0, т.е. оператор φ в ограничении на K_i имеет единственное собственное значение λ_i, причём его алгебраическая кратность для ограничения равна размерности K_i.

Выберем базис в K_i, дополним его до базиса V и рассмотрим матрицу оператора в нём. Из инвариантности K_i она будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

где B - матрица $\varphi|_{K_i}$. Из её характеристического многочлена очевидно, что алгебраическая кратность λ_i для ограничения не может превосходить алгебраической кратности λ_i для всего оператора. Значит, $\dim K_i$ не превосходит алгебраической кратности λ_i.

Осталось заметить, что $\dim V$ равна сумме алгебраических кратностей всех собственных значений и $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s \Rightarrow \dim V = \dim K_1 + ... + \dim K_i$. Значит, $\dim K_i$ равна алг. кратности λ_i. $\square$

15 Теорема Жордана

Основное условие: $\varphi: \ V \to V$ - линейный оператор, все его корни $\in \mathbb{F}$

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ (\forall i \neq j: \ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ и } \sum_{i=1}^{s} k_i = \dim V)$$

$$V = K_1 \oplus \ldots \oplus K_s, \text{ где } K_i = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i} - \text{корневое подпространство}$$

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda_i x\}, \ \dim V_{\lambda_i} \leqslant k_i = \dim K_i$$

Так как K_i - инвариантное подпространство относительно оператора φ, можно рассмотреть ограничение:

$$(\varphi - \lambda_i \ \mathrm{id})|_{K_i} := B_i$$

Из определения K_i следует, что $B_i^{K_i} = 0$, то есть B_i - нильпотентный оператор. В базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

где $A_i = A_{\varphi_{k_i}}$ - матрица порядка $k_i,\ A_i - \lambda_i E_{k_i} = B_i,\ B_i^{k_i} = 0$
Обозначим $K_i := K$, $B_i := B$, $k_i := k$, тогда:

$$\forall x \in K:\ B^k(x) = 0$$

если $x \neq 0$, то $\exists$ наименьшее значение m:

$$B^m(x) = 0,\ B^{m-1}(x) \neq 0\ (m \leqslant h)$$

Назовём это высотой вектора x.
Для фиксированного вектора $x \neq 0$ (высоты m) рассмотрим векторы:

$$x,\ Bx, \ldots, B^{m-1}x,\ B^m x = 0$$

Определение. Векторы $\{x,\ Bx,\ \ldots,\ B^{m-1}x\}$ называются жордановой цепочкой.

Лемма. *Вышеуказанные векторы являются линейно независимыми.*

Доказательство. Предположим, что:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Bx + \ldots + \alpha_{m-1} B^{m-1} x = 0$$

Подействуем на это равенство оператором B^{m-1}:

$$\alpha_0 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

На оставшиеся векторы подействуем оператором B^{m-2}:

$$\alpha_1 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

и т.д. Получим, что $\forall i = \overline{0, m-1}:\ \ \alpha_i = 0\ \implies$ векторы являются линейно независимыми. $\square$

Определение. Подпространство, натянутое на эти векторы:

$$\langle x,\ Bx,\ \ldots,\ B^{m-1}x \rangle$$

называется циклическим подпространством, порождённым жордановой цепочкой. Данное подпространство обозначим U_x, $\dim U_x = m$.
Обычно векторы жордановой цепочки нумеруют с конца, то есть:

$$a_1 = B^{m-1}x,\ a_2 = B^{m-2}x, \dots, a_m = x$$

Тогда a_1 - собственный вектор для B, и для $\forall j = \overline{2, m}:\ a_{j-1} = Ba_j$.
Вектор a_j называется **присоединённым** к вектору a_{j-1}.
К вектору a_1: a_2 - присоединённый, a_3 - второй присоединённый и т.д.

Определение.
Матрица ограничения оператора B на подпространство $U_x = \langle a_1 \dots a_m \rangle$:

$$B|_{U_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

называется жордановой клеткой с собственным значением $\lambda = 0$

$$\lambda = \lambda_i:\ A_{\varphi|_{U_x}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = J_k(\lambda_i)$$

- жорданова клетка с собственным значением $\lambda = \lambda_i$, где:

$$\varphi(a_2) = a_1 + \lambda_i a_2,\ \varphi(a_{j+1}) = a_j + \lambda_i a_{j+1}$$

Перед доказательством теоремы докажем лемму:

Лемма. *Если B - такой оператор в пространстве V, что:*

$$ImB = B(V) \subset V$$

то V обладает $(n-1)$-мерным инвариантным подпространством W, таким что $\mathrm{Im}B \subseteq W$.

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_m$ - базис в $\mathrm{Im}B$, $m < n = \dim V$
Дополним его до базиса в V векторами $e_{m+1}, ..., e_n$.
Тогда $W = \langle e_1, ..., e_{n-1} \rangle$ - искомое инвариантное подпространство:

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i \Longrightarrow Bw = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i Be_i \in \mathrm{Im}B \subseteq W$$

$\square$

Теорема. ***Жордана***

Если все характеристические корни опертора $\varphi: V \to V$ принадлежат полю $\mathbb{F}$, то V является прямой суммой циклических подпространств для оператора φ. Это равносильно тому, что в V существует базис, составленный из жордановых цепочек. Такой базис называется жордановым базисом.

Если жорданов базис уже построен: Пусть имеются r жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, необязательно различным, длины которых $m_1, \ldots, m_r$ соответственно, тогда в этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{m_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{r} m_i = n = \dim V$$

- жорданова матрица - жорданова нормальная форма (ЖНФ) матрицы A_φ.

Теорема. ***Жордана (матричная формулировка)***

Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$, все характеристические корни которой $\in \mathbb{F}$, $\exists$ матрица C $(\det C \neq 0)$ такая, что:

$$C^{-1}AC = J$$

- жорданова матрица. При этом жордановы клетки определены для матрицы A единственным образом с точностью до расположения клеток на диагонали жордановой матрицы.

Замечание. Матрицу A можно интерпретировать как матрицу линейного оператора φ, для него верна теорема Жордана.

Доказательство. (См. Шафаревич И.Р. "Линейная алгебра")
Доказательство достаточно провести для ограничения оператора на каждое корневое подпространство K_i.
Введем обозначения: $B: V \to V$ - нильпотентный оператор, $\dim V = n$, $W -$ $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство в V, содержащее $\mathrm{Im} B$ (существует по лемме 1).

Докажем теорему индукцией по n:
База: если $n = 1$, то $B = 0$ и любой базис - жорданов.
Пусть $n > 1$, тогда по предположению индукции в W $\exists$ базис для $B|_w$, т.е.

$$W = U_1 \oplus ... \oplus U_r$$

Выберем вектор $a \in V \setminus W$, тогда a ЛНЗ с векторами из W.
Рассмотрим $Ba \in W$ (т.к. $\mathrm{Im} B \subseteq W$) так, что $Ba = u_1 + ... + u_r,\ u_i \in U_i$ $(*)$.
Если $Ba = 0$, то:

$$V = \langle a \rangle \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_r - \text{искомое разложение пространства}$$

Если $Ba \neq 0$, то найдется i, что $u_i \neq 0$.
Если в разложении есть $u_i \in B(U_i)$, то $\exists\ v_i \in U_i :\ u_i = Bv_i$.
Рассмотрим вместо a вектор $a - v_i :\ B(a - v_i) = u_1 + ... + \cancel{u_i} + ... + u_r - \cancel{u_i} \Longrightarrow$ в разложение такого вектора u_i не входит.
Заменив a на нужные разности $a - v_i$, получим новый вектор $e \in V \setminus W$, при этом занулив все $u_i \in B(U_i)$, т.е.

$$Be = u'_1 + ... + u'_r,\ \forall i \text{ либо } u'_i \notin B(U_i), \text{ либо } u'_i = 0$$

Хотя бы один из векторов $u'_i \neq 0$, выберем из них вектор, имеющий максимальную высоту m. Заметим, что $m = \max(\dim U_i)$, так как каждый u'_i по построению нового разложения имеет максимальную высоту в своём подпространстве. Тогда $h(e) = m + 1$, т.к. $h(Be) = m$.
Без ограничения общности выбрали вектор u_1. Докажем, что:

$$V = \langle e,\ Be,\ ...,\ B^m e \rangle \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$$

Сумма размерностей подпространств в правой части:

$$(m_1 + 1) + ... + m_r = n = \dim V$$

Поэтому для прямой суммы достаточно доказать, что:

$$\langle e,\ Be,\ ...,\ B^m e \rangle \cap (U_2 \oplus ... \oplus U_r) = \{0\}$$

Пусть $v = \lambda_1 e + ... + \lambda_{m+1} B^m e \in U_2 \oplus ... \oplus U_r$
Т.к. $e \notin W$, $\lambda_1 = 0$. $Be = u'_1 + ... + u'_r \Rightarrow$ проекция Be на U_1 равна u'_1.
Спроецируем всё разложение на U_1:

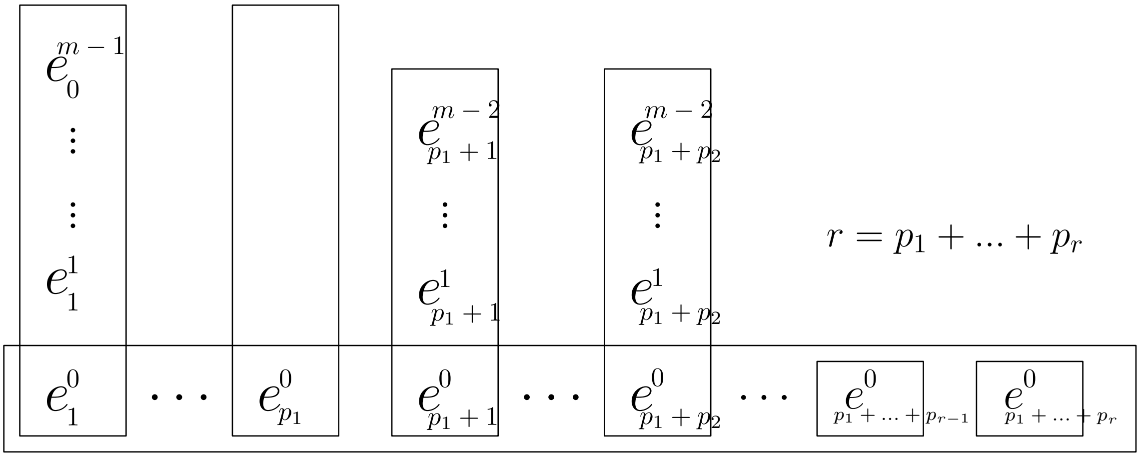
$$\lambda_2 u_1 + \lambda_3 B u_1 + ... + \lambda_{m+1} B^{m-1} u_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = ... = \lambda_{m+1} = 0 \Longrightarrow v = 0$$

Существование ЖНФ доказано. Доказательство единственности приводится в следующем пункте. $\square$

Замечание. r - количество циклических подпространств в разложении корневого подпространства K, отвечающего корню λ_0, равно геометрической кратности корня λ_0 характеристического многочлена.

15.1 Изображение разложения корневых подпространств

Обозначим: $r = \dim \mathrm{Ker} B$ - размерность собственного подпространства
Занумеруем собственные векторы, входящие в цепочки, располагая цепочки по убыванию высоты. m - максимальная высота цепочки, 1 - минимальная
Также введем обозначение для последовательных присоединённых векторов: есть p_1 цепочек высоты m, p_2 - высоты $m-1$,..., $r-(p_1+...+p_{r-1})$ - высоты 1



$V = U_1 \oplus ... \oplus U_r,\ \dim U_{i+1} \le \dim U_i$

$$BV = BU_1 \oplus ... \oplus BU_r$$
$$\vdots$$
$$B^kV = B^kU_1 \oplus ... \oplus B^kU_r$$

Если $\dim U_i = m_i,\ \dim(B^kU_i) = \left[\begin{matrix} m_i - k, \text{ если } k < m_i \\ 0, \text{ если } k \ge m_i \end{matrix}\right. \Longrightarrow$

$$\dim(B^kV) = \sum_{i=1}^{r} \dim B^kU_i = q_{k+1} + 2q_{k+2} + ... + (m-k)q_m$$

Пусть q_i - число циклических подпространств размерности i, $1 \le i \le r$
Обозначим $r_k = \mathrm{rk} B^k$
Для $k = 0$ до $m-1$ получим равенства:

$$k = 0: \ q_1 + 2q_2 + ... + mq_m = n$$
$$k = 1: \ q_2 + 2q_3 + ... + (m-1)q_m = r_1 = \mathrm{rk} B$$
$$\cdots$$
$$q_m = r_{m-1} = \mathrm{rk} B^{m-1} \neq 0$$
$$B^m = 0 \text{ на корневом подпространстве}$$

Вычитая из каждого уравнения следующее, получим систему:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + ... + q_m = n - r_1 \implies q_1 = n - 2r_1 + r_2 \\ \quad q_2 + ... + q_m = r_1 - r_2 \implies q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 \\ \qquad \dots \\ \qquad\qquad q_m = r_{m-1} - r_m \; (r_m = 0) \end{cases}$$

$$\implies q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1} \; (i = 1, ..., m-1)$$

Вывод: количество и порядок (высоты цепочек) однозначно опреледяется по матрице $B = A|_{\varphi - \lambda \mathrm{id}}$ - эти ранги не зависят от конкретного разложения $\implies$ определяются единственным образом, т.е. **ЖНФ единственна с точностью до перестановки клеток на диагонали**.

Следствие. *Пусть:*

$$\chi_\varphi = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

- характеристический многочлен

$$\mu_\varphi = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

- минимальный многочлен
Тогда $\forall i = \overline{1, s}$: m_i *равна* $\max$ *размерности жордановой клетки, отвечающей корню* λ_i

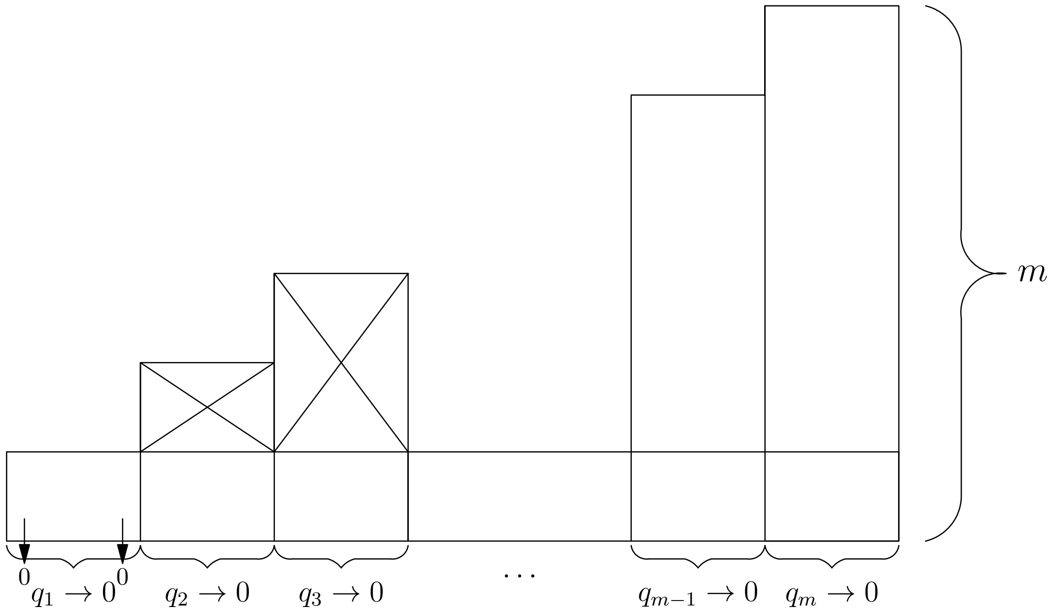
Следствие. ***Критерий диагонализируемости в терминах min многочлена:***
Оператор φ *диагонализируем* $\iff m_1 = ... = m_s = 1$

Доказательство. Достаточно доказать для каждого корневого подпространства K_i

$$B = A_{\varphi - \lambda_i \mathrm{id}}|_{K_i}$$

- блочно-диагональная матрица с клетками размера m_j $\square$

Переделываем:



Применим оператор B:

$$\begin{cases} \dim V = q_1 + 2q_2 + ... + (m-1)q_{m-1} + mq_m = n \\ \dim \mathrm{Im} B = q_2 + ... + (m-2)q_{m-1} + (m-1)q_m = r_1 \\ \vdots \\ \dim \mathrm{Im} B^{m-1} = q_m = r_{m-1} \end{cases}$$

Некоторые применения приведут матрицу к жордановой форме (в частности, диагонализируемости)

15.2 Решение СЛАУ

Пусть дана система $AX = B$ с квадратной матрицей A, все характеристические корни которой $\in \mathbb{R}$.
Сделаем замену:

$$X = CY \Longrightarrow (AC)Y = B \Longleftrightarrow (\underbrace{C^{-1}AC}_{y})Y = C^{-1}b = b'$$

Можно взять C - матрицу перехода к жорданову базису

$$y = \begin{pmatrix} \boxed{Y_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{Y_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Если у жорданова клетка, то уравнения:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = b'_1 \\ \lambda x_2 + x_3 = b'_2 \\ \vdots \end{cases} \qquad \text{легко решить}$$

15.3 Решение СЛДУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$\dot{X} = AX$, где A - квадратная

$$X = CY \Longrightarrow \dot{X} = C\dot{Y}$$

$$C\dot{Y} = (AC)Y \Longrightarrow \dot{Y} = (C^{-1}AC)Y$$

Если матрица $C^{-1}AC$ диагональная: $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0$ получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y_n} = \lambda_n y_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Тогда $X = CY$

Если

$$C^{-1}AC = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \lambda_0 y_{n-1} + y_n \\ \dot{y}_n = \lambda_0 y_n \end{cases}$$

решаем снизу вверх.

15.4 Функции от матриц

$$(C^{-1}AC) = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix} \Longrightarrow A = CYC^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^n = (CYC^{-1})(CYC^{-1})...(CYC^{-1}) = CY^nC^{-1}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} \boxed{J^n_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J^n_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \left(\lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 + ... = \begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1}C_n^1 & \lambda^{n-2}C_n^2 & \cdots & \\ \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda^n & \lambda^{n-1}C_n^1 & \lambda^{n-2}C_n^2 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda^n & \end{pmatrix}$$

Упражнение. Пусть $f(t)$ - многочлен, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

Доказать, что:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

15.5 Вычисление корня и экспоненты

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + ... + \frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + ...$$

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + ... + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + ...$$

Для $J_n(\lambda) = \lambda E + B \Longrightarrow$

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^{t\lambda E} \cdot e^{tB} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & & \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{A+B} = e^A \cdot e^B \Longleftrightarrow AB = BA)$$

Примеры.

1. $$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)t^2 + ...$$

2. $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = E + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2!}C_{\frac{1}{2}}^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 0$$

16 Билинейные и квадратичные формы

Определение. Функция $b: \ V \times V \to \mathbb{F}$ называется билинейной функцией, если:

1. аддитивность:
$$\forall x_1, x_2, y: \ b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$$
$$\forall x, y_1, y_2: \ b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$$

2. однородность:
$$\forall x, y \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}: \ b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$$

Определение. $b(x, y)$ - называется симметрической, если:
$$\forall x, y \in V: \ b(y, x) = b(x, y)$$

Примеры.

1. Симметрическая билинейная функция - скалярное произведение

2. $V = M_n(\mathbb{F}): \ b(X, Y) = tr(XY)$

3. $\beta(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

16.1 Запись билинейной функции в координатах

Пусть в V задан базис $e_1, ..., e_n$, тогда:

$$b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} b(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j)$$

Определение. Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, тогда $B_e = b_{ij}$ - матрица билинейной функции $b(x,y)$ в базисе e

Тогда:

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B_e \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B_e Y \tag{1}$$

16.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть $e' = eC$, т.е. C - матрица перехода от e к e'

Тогда:

$$X = CX',\ Y = CY' \tag{2}$$

По определению матрицы билинейной функции, в новом базисе:

$$b(x,y) = X'^T B' Y' \ \ (B' = B_{e'})$$

Подставим в формулу (1) выраженеие (2):

$$b(x,y) = X'^T C^T B C Y' = X'^T (C^T B C) Y' = X'^T B' Y' \ \ (\forall X', Y' \in \mathbb{F}^n)$$

$$\Longrightarrow B' = C^T B C \ \ (\forall i, j:\ X' := E_i,\ Y' := E_j)$$

Следствие.

1. $rkB' = rkB$
2. $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{sgn}(\det B') = \operatorname{sgn}(\det B)$

Определение. Билинейная функция $b(x,y)$ называется кососимметрической (при $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$), если:

$$\forall x, y \in V:\ b(x,y) = -b(y,x)$$

Утверждение. $(*)$ *Любая билинейная функция над* $\mathbb{F}:\ char\mathbb{F} \neq 2$ *единственным образом представляется в виде:*

$$b(x,y) = b_+(x,y) + b_-(x,y), \quad \text{где } b_+(x,y) \equiv b_+(y,x),\ b_-(x,y) \equiv -b(y,x)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} b(x,y) = b_+(x,y) + b_-(x,y) \\ b(y,x) = b_+(x,y) - b_-(x,y) \end{cases} \implies$$

$$b_+(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2},\ b_-(x,y) = \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2}$$

$\square$

Утверждение. *Билинейная функция $b(x,y)$ симметрична (кососимметрична) $\iff$ в любом базисе e:*

$$B_e^T = B_e\ (B_e^T = -B_e)$$

Доказательство. (Докажем для симметрической, для кососимметрической аналогично)

$\underline{\implies}$ Пусть $B = (b_{ij})$, тогда $b_{ij} = b(e_i, e_j)$.

$$\forall x, y \in V,\ b(x,y) = b(y,x) \implies b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$$

$\underline{\impliedby}$

$$b(x,y) = X^TBY,\ b(y,x) = Y^TBX = (X^TB^TY)^T = (X^TBY)^T = b(x,y)$$

$\square$

Утверждение (1) $\iff \forall$ матрицы B некоторой билинейной функции верно, что $B = B_+ + B_-$, где B_+ - матрица симметрической билинейной функции, а B_- - матрица кососимметрической билинейной функции.

Определение. Квадратичная функция, порождённая билинейной функцией $b(x,y)$ - это функция на V.
Обозначаем: $k(x) := b(x,x)$, если $k(x) \not\equiv 0$.

Если b - кососимметрическая функция, то $b(x,x) = 0 \implies k(x) \equiv 0$. В общем случае существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную, таких, что:

$$b(x,y) = b_+(x,y) + b_-(x,y) \implies b(x,x) = b_+(x,x)$$

Теорема. $\forall$ *квадратичной функции* $\exists!$ *симметрическая билинейная функция, которая её порождает.*

Доказательство. Допустим, что $b(x,y)=b(y,x)$ - симметрическая билинейная функция и $k(x)=b(x,x)$. Тогда $\forall x,y\in V$:

$$k(x+y)=b(x+y,x+y)=b(x,x)+b(x,y)+b(y,x)+b(y,y)=$$
$$=b(x,x)+2b(x,y)+b(y,y)=k(x)+2b(x,y)+k(y)$$

Так как $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq 2$, то:

$$b(x,y)=\frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$$

□

Определение. Билинейная функция $b(x,y)=\frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$ называется поляризацией квадратичной функции k.

Далее будем считать матрицу квадратичной формы матрицей её полярной симметрической билинейной функции $b(x,y)$

$$b(x,y)=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_iy_i+\sum_{i<j}b_{ij}x_iy_j+\sum_{i>j}b_{ij}x_iy_j$$

$$\forall i,j:\ b_{ij}=b_{ji}\Longrightarrow b(x,x)=k(x)=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{ij}x_ix_j \qquad \mathbf{(1)}$$

Пример. Пусть $k(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_1x_2-x_1x_3+x_2^2+6x_2x_3-7x_3^2$, тогда:

$$B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 3\\ -\frac{1}{2} & 3 & -7\end{pmatrix}$$

Определение. Пусть $b(x,y)$ - симметрическая или кососимметрическая билинейная функция и $\varnothing\neq L\subset V$ - подпространство. Ортогональным дополнением к L относительно билинейной формы $b(x,y)$ называется:

$$L^{\perp}:=\{y\in V\mid b(x,y)=0,\ \forall x\in L\}$$

Замечание. Запись $x\perp y$ означает, что $b(x,y)=0$.

Определение. $V^{\perp}=\{y\in V\mid b(x,y)=0,\ \forall x\in V\}$ - ядро формы.

Определение. Билинейная функция $b(x,y)$ называется невырожденной, если:

$$\mathrm{Ker}(b)=V^{\perp}=\{0\}$$

Упражнение. $b(x,y)$ - невырожденная функция $\Longleftrightarrow\det B\neq 0$.

16.3 Квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма в некотором базисе называется диагональной, если в этом базисе:

$$k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2, \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{F}$$

Теорема. *В конечномерном пространстве V $(\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2)$ $\exists$ базис, в котором эта форма диагональна.*

Доказательство. (Алгоритм Лагранжа - метод выделения полных квадратов)
По формуле **(1)**:

$$k(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j$$

1. Основной случай:
   $\exists i : b_{ii} \neq 0 \Longrightarrow$ можно перенумеровать неизвестные x_1, …, x_n так, что $b_{11} \neq 0$. Выделим в $k(x)$ все одночлены, содержащие x_1:

   $$k(x) = b_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} b_{1i} x_i + \widetilde{k}(x_2, \dots, x_n)$$

   и дополним выражение до квадрата:

   $$k(x) = b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i + (\sum_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2) - \frac{(\sum\limits_{i=2}^{n} b_{1i} x_i)^2}{b_{11}} + \widetilde{k} =$$
   $$= b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2 + k_2(x_2, \dots, x_n)$$

   Затем для формы $k_2(x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=2}^{n} b'_{ii} x_i^2 + \sum\limits_{2 \leqslant i < j \leqslant n} b'_{ij} x_i x_j$ найдём коэффициент $b'_{jj} \neq 0$ и выделим квадрат как на предыдущем шаге. На каждом шаге число переменных уменьшается на единицу, а значит, за конечное число шагов (а именно $\leqslant n-2$) форма приобретёт диагональный вид.

2. Особый случай:
   $\forall i : \ b_{ii} = 0$, но так как $k(x) \not\equiv 0 \Longrightarrow \exists$ индексы i и j такие, что $b_{ij} \neq 0$, то есть в выражение $k(x)$ входит одночлен $2b_{ij} x_i x_j$.
   Пусть $x_i = x'_i + x'_j$ и $x_j = x'_i - x'_j$, тогда $x_i x_j = x_i'^2 - x_j'^2$, то есть появился квадрат с коэффициентом, не равным нулю $\Longrightarrow$ можно перейти к общему

случаю. (Квадраты появятся только в этом одночлене, т.к. x'_i и x'_j ни в одном другом не встретятся дважды, поэтому и после приведения подобных коэффициенты перед ними будут ненулевые)

$\square$

Замечание. В благоприятном случае, когда на первом шаге коэффициент при x_1 не равен нулю, на втором шаге коэффициент при x_2 не равен нулю и т.д., матрица замены будет иметь вид:

$$C^{-1}_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица с 1 на диагонали $\Longrightarrow |C^{-1}_{e\to e'}| = 1 \neq 0$.

Определение. Форма $k(x_1, \dots, x_n)$ называется канонической(нормальной), если:

1. (над $\mathbb{R}$) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: -1, 0, 1
2. (над $\mathbb{C}$) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: 0, 1

Примеры.

1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

   $$k(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

   Если $rkB = r \Longrightarrow k(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 (\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0)$.
   Если $\alpha_i > 0$, то введём обозначение:

   $$\widehat{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i \Longrightarrow k = \widehat{x}_1^2 + \dots + \widehat{x}_p^2 - \widehat{x}_{p+1}^2 - \dots - \widehat{x}_r^2$$

   где p - количество коэффициентов $\alpha_i > 0$.
   Если $\alpha_i < 0 \Longrightarrow \widehat{x_i} = -\sqrt{\alpha_i} x_i$.

2. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

   $$\forall i = \overline{1, r}: \ \widehat{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i \Longrightarrow k = \widehat{x}_1^2 + \dots + \widehat{x}_r^2$$

Таким образом, в вещественном случае для любой квадратичной формы $k(x)$ существует замена координат $X = CY (|C| \neq 0)$ такая, что в новых координатах $k = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum\limits_{j=p+1}^{p+q} x_j^2$.

Определение. p в такой записи называется положительным индексом инерции, q - отрицательным индексом инерции.

Теорема. ***единственности (закон инерции)***
Если в некоторых базисах $e_1, ...e_n$ и $f_1, ..., f_n$ квадратичная форма k имеет канонические виды

$$k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2 = \sum_{i=1}^{p'} z_i^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} z_j^2$$

то $p = p', q = q'$.

Доказательство. Так как $p+q = rkB = p'+q'$, достаточно доказать, что $p = p'$. От противного: пусть $p' < p$. Рассмотрим подпространства $U_1 = \langle e_1, .., e_p \rangle, U_2 = \langle f_{p'+1}, .., f_n \rangle$. Очевидно, $\dim U_1 = p, \dim U_2 = n - p'$.

$$\dim U_1 + \dim U_2 = p - p' + n > n; \;\; U_1 + U_2 \subset V \Rightarrow dim(U_1 + U_2) \leq n$$

Из формулы Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow dim(U_1 \cap U_2) > 0$$

Рассмотрим вектор $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$:

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \Rightarrow k(v) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \geq 0$$

С другой стороны:

$$v = \sum_{k=p'+1}^{n} \beta_k f_k \Rightarrow k(v) = -\sum_{k=p'+1}^{n} \beta_k^2 \leq 0$$

Отсюда $k(v) = 0 \Longrightarrow \forall i = 1, ..., p \;\; \alpha_i = 0 \Longrightarrow v = 0$ - противоречие. □

16.4 Знакоопределённые квадратичные формы

Определение. Пусть $b(x, y)$ - симметрическая билинейная форма. Векторы u, v называются *ортогональными*, если $b(u, v) = 0$. Обозначается $u \perp v$.

Определение. Базис $e_1, ..., e_n$ в V - *ортогональный*, если $b(e_i, e_j) = 0 (i \neq j)$.

Определение. Для квадратной матрицы B главными минорами (угловыми минорами) называются миноры $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$, где $\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$. Определим $\Delta_n = |B|, \Delta_0 = 1$.

Теорема. ***Якоби*** *Пусть $k(x)(= b(x,x), b$ – симм. б. ф.) такова, что главные миноры её матрицы B в нек. базисе e : $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1} \neq 0$ Тогда в V существует базис (и замена координат $X = CY$), в котором*

$$k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$$

Доказательство. Будем строить базис e' из базиса e, ортогональный относительно $b(x,y)$ (алгоритм ортогонализации Грама/Шмидта).

$$e'_1 := e_1; \quad \forall k \geq 1 \ \langle e'_1, ..., e'_k \rangle = \langle e_1, ..., e_k \rangle$$

причём $b(e'_i, e'_j) = 0(1 \leq i \neq j \leq k)$
Шаг алгоритма: допустим, что $k > 1$ и векторы $e'_1, ..., e'_{k-1}$ уже построены. Будем искать e'_k в виде

$$e'_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e'_i$$

где λ_i найдём из условия $b(e'_k, e'_j) = 0, \ j = 0, ..., k-1$

$$b(e'_k, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_j b(e'_i, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \lambda_j b(e'_j, e'_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = -\frac{b(e_k, e'_j)}{b(e'_j, e'_j)}$$

Покажем по индукции, что $b(e'_j, e'_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \neq 0$.
Обратим внимание, что матрица перехода от $e_1, ..., e_{k-1}$ к $e'_1, ..., e'_{k-1}$ - верхняя треугольная с 1 по диагонали (предп. индукции). Запишем: $C_{(e_1,...,e_k) \to (e'_1,...,e'_k)} =$ $\begin{pmatrix} C_{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где по предположению индукции $C_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ B - матрица билин. формы $b(x,y)$ в базисе e, B' - в базисе e', который мы строим.

$$B'_{k|\langle e'_1,...,e'_k \rangle} = C_k^T B_{k|\langle e_1,...,e_k \rangle} C_k \Rightarrow \det(B'_{k|\langle e'_1,...,e'_k \rangle}) = (\det C_k)^2 \cdot \det B_{k|\langle e_1,...,e_k \rangle}$$

$$\Delta'_k = \det(B'_{k|\langle e'_1,...,e'_k \rangle}) = b'_{11}...b'_{kk} = \Delta_k$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot ... \cdot \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}} \cdot b'_{kk} = \Delta_k \Rightarrow b'_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

□

Далее рассматриваем $F = \mathbb{R}$.

Определение. Квадратичная форма $k(x)$ на пр-ве V над $\mathbb{R}$ называется

- положительно определённой, если $\forall x \neq 0 \ k(x) > 0$ (обозн. $k > 0$);
- отрицательно определённой, если $\forall x \neq 0 \ k(x) < 0$ (обозн. $k < 0$);
- неотрицательно определённой, если $\forall x \ k(x) \geq 0$ (обозн. $k \geq 0$);
- неположительно определённой, если $\forall x \ k(x) \leq 0$ (обозн. $k \leq 0$).

Утверждение. *Квадратичная форма $k(x)$ является*

1. *положительно определённой* $\Leftrightarrow p = n, q = 0$;
2. *отрицательно определённой* $\Leftrightarrow p = 0, q = n$;
3. *неотрицательно определённой* $\Leftrightarrow q = 0$;
4. *неположительно определённой* $\Leftrightarrow p = 0$;
5. *знаконеопределённой* $\Leftrightarrow p, q > 0$.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма. *Если кв. форма $k > 0$, то $\det B = \Delta_n \neq 0$.*

Доказательство. Т.к. $k > 0$, $p = n$, т.е. существует базис, в котором $k(x') = {x'_1}^2 + ... + {x'_n}^2 \Rightarrow \Delta'_n = 1 > 0$.
А так как $B' = C^T BC$, $|B'| = |C|^2 \cdot |B| \Rightarrow \det B > 0$. □

Теорема. ***Критерий Сильвестра***
Квадратичная форма $k(x)$, имеющая в некотором базисе матрицу B, является

1. *положительно определённой* $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, ..., \Delta_n > 0$.
2. *отрицательно определённой* $\Leftrightarrow \forall k \ (-1)^k \Delta_k > 0$.

Доказательство. Для положительной определённости:
$\Leftarrow$: По теореме Якоби $\exists$ базис, в котором $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$. Т.к все $\Delta_i > 0$ (знакочередующиеся для отрицательного случая), все коэффициенты $> 0 (< 0)$, т.е. значение формы на любом ненулевом векторе имеет необходимый нам знак.

$\Rightarrow$: $k > 0 \Rightarrow \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot ... \cdot \Delta_n \neq 0$ (k-ый минор ненулевой по лемме для угловой подматрицы)$\Rightarrow$ применима т. Якоби, из которой следуют необходимые нам знаки на всех Δ.

Для отрицательной определённости: $k < 0 \Leftrightarrow -k > 0$, причём при домножении матрицы на -1 знак меняют только миноры нечётного порядка. □

Замечание. Т.к. $b_{ii} = k(e_i)$, у положительно определённой формы все $b_{ii} > 0$, у отрицательной все $b_{ii} < 0$.

Замечание. Пусть $k(x)$ такая, что $\Delta_1, ..., \Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = ... = \Delta_n = 0$. Тогда p - число сохранений знака в последовательности $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_r$, а q - число перемен знака в этой последовательности.

Доказательство. Из теоремы Якоби в подходящем базисе

$$k(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + ... + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} y_k^2 + ... + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} y_r^2$$

Тогда каждое сохранение знака соответствует положительному коэффициенту, а каждая перемена знака - отрицательному коэффициенту, откуда и следует необходимое равенство. □

16.5 Кососимметрические билинейные формы

$$\forall\ x, y \in V: \quad b(y, x) = -b(x, y) \quad (\mathrm{char}\, \mathbb{F} \neq 2)$$

Заметим, что $\forall x \in V:\ b(x, x) = 0$. Если же $b(x, x) \equiv 0$:

$$0 = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + b(x, y) + b(y, x) \Rightarrow b(x, y) = -b(y, x)$$

Поэтому условие $b(x, x) \equiv 0$ не только эквивалентно кососимметричности формы, но и применимо в случае $\mathrm{char}\, F = 2$.

Лемма. *Пусть $b(x, y)$ - симметрическая или кососимметрическая билинейная форма на V $(\dim V = n < \infty)$, $U \subset V$ такое, что $b|_U$ невырождена. Тогда $V = U \oplus U^\perp$.*

Доказательство. $U^\perp = \{y \in V:\ b(x, y) = 0\ \forall x \in U\}$.
В координатах: если выбрать базис $e_1, ..., e_m$ в U $(m = \dim U, 0 < m < n)$, то $y \in U^\perp \Leftrightarrow b(e_i, y) = 0,\ i = 1, ..., m$.
Если $b(x, y) = 0\ \forall x \in U$, то $b(e_i, y) = 0,\ i = 1, ..., m$
Обратно, если $b(e_i, y) = 0,\ i = 1, ..., m$, то $\forall x \in U\ x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i \Rightarrow b(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i b(e_i, y) = 0$.
Запишем систему уравнений для нахождения y, выбрав базис $e_1, ..., e_m \in U$

и дополнив его до базиса $e_1, ..., e_n \in V$. В этом базисе $e_i^{\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $b(e_i, y) =$

$(0, ..., 1, ..., 0)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (b_{i1}, ..., b_{in})Y^{\uparrow}$

Система имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} Y = 0$$

Т.к. матрица $B|_U$ невырождена, $\mathrm{rk}B = m$, т.е. система имеет $n - m$ ЛНЗ решений, а значит, $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.

Если же $v \in U \cap U^{\perp}$, то $\forall\ x \in U\ b(x, v) = 0$, а из невырожденности формы $b|_U$ тогда следует, что $v = 0$. □

Теорема. *Для любой кососимметрической билинейной формы $b(x, y) \not\equiv 0$ $\exists$ такой базис $f_1, ..., f_n \in V$, в котором матрица этой формы имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \boxed{I_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{I_s} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

где $I_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $rkB = 2s$

Доказательство. Т.к. $b(x, y) \not\equiv 0$, $\exists$ векторы $e_1, e_2 \in V$ такие, что $b(e_1, e_2) = \beta_{12} \neq 0$. Рассмотрим

$$f_1 = \frac{e_1}{\beta_{12}}, f_2 = e_2 \Rightarrow b(f_1, f_2) = 1, b(f_2, f_1) = -b(f_1, f_2) = -1$$

Пусть $U = \langle e_1, e_2 \rangle$. Возьмём $W = U^{\perp}$ в пр-ве V. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$ и $\tilde{b} = b|_{U^{\perp}}$ также кососимметрическая форма, т.е. можем провести индукцию по $n = \dim V$ (базу $n = 2$ доказали). $\dim W = n - 2$, т.е. $\exists$ базис $f_3, ..., f_n$, в котором матрица

$b|_{U^\perp}$ имеет вид $\begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{I} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, т.е в базисе $f_1, ..., f_n$ матрица b имеет нужный вид. $\square$

17 Евклидовы пространства и их обобщения

17.1 Основные понятия и утверждения

Основное поле - $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Определение. Вещественное конечномерное векторное пространство $\mathcal{E}$ называется евклидовым, если на $\mathcal{E}$ задано скалярное произведение (x, y).

Определение. Скалярное произведение (x, y) - симметрическая билинейная функция такая, что соответственная квадратичная форма (x, x) положительно определена.

Определение. Длина (норма) вектора $x \in \mathcal{E}$: $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Теорема. ***Неравенство Коши-Буняковского-Шварца***
$\forall\ x, y \in \mathcal{E}:\ \ |(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство выполнено $\iff x \parallel y$ (либо $x = 0$ или $y = 0$, либо $y = \lambda x$).

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = (tx - y, tx - y) = t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Это квадратичная функция относительно t:

$$f(t) \geqslant 0 \iff \frac{\mathcal{D}}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0 \Rightarrow (x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)} = |x| \cdot |y|$$

Равенство выполнено $\iff (tx - y, tx - y) = 0 \Rightarrow y = tx$. $\square$

Теорема. ***Неравенство треугольника***
$\forall x, y \in \mathcal{E}:\ |x + y| \leq |x| + |y|$ (равенство выполнено $\iff x \uparrow\uparrow y$)

Доказательство.

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

$$|x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \iff |x + y| \leq |x| + |y|$$

$\square$

Координатная запись: пусть в V фиксированный базис $e_1, ..., e_n$, то:

$$(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j)$$

Определение. $G_e = ((e_i, e_j))$ - матрица Грама базиса e

$$G_e^T = G_e$$

Т.к. (x,x) - положительно определенная квадратичная форма, то матрица:

$$G_e = (g_{ij})$$

может служить матрицей Грама $\Longleftrightarrow \triangle_1 > 0, ..., \triangle_n > 0$
В частности: $\det G_e > 0$ (определитель Грама)

$$\boxed{(x,y) = X^T G_e Y}$$

Определение.

$$x \perp y \Longleftrightarrow (x,y) = 0$$

Определение. Базис $e_1, ..., e_n$ называется ортогональным, если:

$$e_i \perp e_j \text{ при } i \neq j$$

Если при этом длина каждого вектора $e_1, ..., e_n$ равна 1, то базис называется ортонормированным.

Следствие. $e_1, ..., e_n$ *- ортонормированный базис, если* $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Следствие. *Если базис ортонормированный, то* $G = E$ *и* $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Теорема. *Пусть* $e' = eC_{e \to e'}$ *- новый базис. Тогда:*

1. *Если* e *и* e' *- ортонормированные базисы, то* $C_{e \to e'}$ *ортогональна;*
2. *Если* e *- ортонормированный базис и* $C_{e \to e'}$ *ортогональная матрица* $\Longrightarrow$ $e' = eC$ *- ортонормированный базис.*

Замечание. C - ортогональная, если $C^T C = E$

Доказательство.

1. По определению матрицы перехода $C_{e\to e'} = \begin{pmatrix} e_1'^{\uparrow} & \cdots & e_n'^{\uparrow} \end{pmatrix}$
   $C^T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} e_1'^{\to} \\ \vdots \\ e_n'^{\to} \end{pmatrix}$ Обозначим d_{ij} - (ij)элемент матрицы C^TC :
   $$d_{ij} = e_i'^{\to} \cdot e_j'^{\uparrow} = (e_i', e_j') = \delta_{ij}$$
   т.к. базис e ортонормированный $\Longrightarrow d_{ij} = \delta_{ij} \Longrightarrow C^TC = E$
2. Рассмотрим $e' = eC_{e\to e'}$, тогда $e_j^{\uparrow}$ - это j столбец матрицы $C_{e\to e'}$
   По условию $C^TC = E \Longleftrightarrow e_i'^{\to} \cdot e_j'^{\uparrow} = \delta_{ij} = (e_i', e_j')$

□

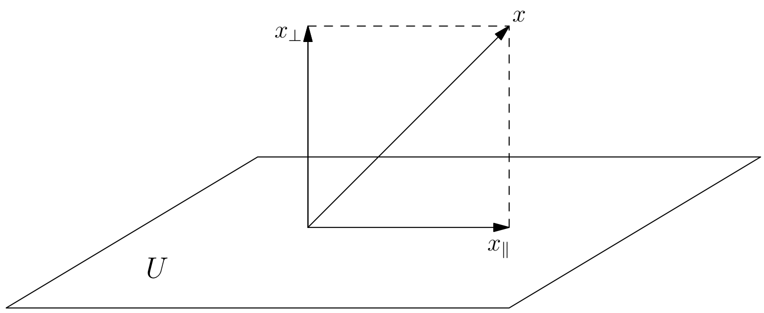
Лемма. *Если $a_1, ..., a_m \in \mathcal{E}$ - ортогональная система векторов, то $a_1, ..., a_m$ ЛНЗ.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0$. Скалярно умножим обе части на a_j:

$$(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, a_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i, a_j) = \lambda_j (a_j, a_j) = 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0$$

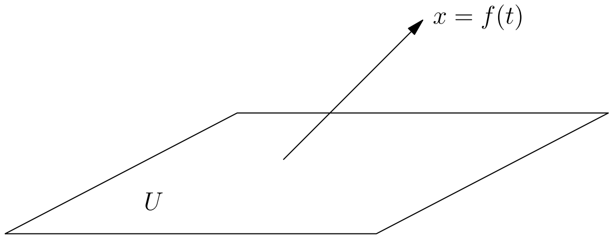
Проведя такие рассуждения для $j = 1, ..., m$, получим, что все коэффициенты должны быть равны 0, т.е. $a_1, ..., a_m$ ЛНЗ. □

Т.о. $\forall x \in \mathcal{E}$ единственным образом разлагается в сумму $x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}$



$x_{\shortparallel} \in U$, $x_{\shortparallel}$ - ортогональная проекция вектора x на U
$x_\perp \in U^\perp$, $x_\perp$ - ортогональная составляющая x относительно U

Пример.



$U = \langle 1, t, ..., t^{n-1} \rangle$

Надо подобрать такой многочлен $p(t) \in U$, чтобы:

$$\| f(t) - p(t) \| = \min$$

Где $p(t) = f(t)$ - псевдорешение

Как конкретно находить такое разложение?

1 способ: Выбрать ортогональный базис в U и дополнить его до ортогонального базиса в $\mathcal{E}$

Тогда:

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}(x_i, e_i)e_i}_{x_{\shortparallel}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n}(x_i, e_i)e_i}_{x_\perp} = x_{\shortparallel} + x_\perp$$

2 способ: Выбрать в U произвольный базис $a_1, ..., a_m$ и искать разложение в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + x_\perp \ \ | \cdot a_j \Longrightarrow (x_i, a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a_i, a_j) + \underbrace{(x_\perp, a_j)}_{=0}$$

Неоднородная СЛУ с неизвестными α_i, основная матрица:

$$((a_i, a_j)) = G_{\{a_1, ..., a_m\}}$$

где $\det G \neq 0 \Longrightarrow$ по теореме Крамера $\exists!\, \alpha_1, ..., \alpha_m \Longrightarrow \exists!\, x_{\shortparallel} \Longrightarrow x_\perp = x - x_{\shortparallel}$

Свойства. ***операций ортогонального дополнения***

1. $(U^\perp)^\perp = U$

2. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

3. $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

Доказательство.

1. Пусть $x \in U,\ y \in U^\perp$, тогда:

$$(y, x) = 0\ \forall y \in U^\perp \Rightarrow x \in (U^\perp)^\perp \Longrightarrow U \subseteq (U^\perp)^\perp$$

Причем:

$$\dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = n - (n - \dim U) = \dim U \Longrightarrow U = (U^\perp)^\perp$$

2. Пусть $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp \Longrightarrow v \perp U_1$ и $v \perp U_2 \Longrightarrow \forall x = u_1 + u_2$:

$$(v, x) = (v, u_1) + (v, u_2) = 0 \Longrightarrow v \in (U_1 + U_2)^\perp \Longrightarrow U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$$

Если $w \in (U_1 + U_2)^\perp$, то $\forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2 : \ (w, u_1 + u_2) = 0$
В частности:

$$\begin{cases} \forall u_1 \in U_1 : \ (w, u_1) = 0 \ \Longrightarrow w \in U_1^\perp \\ \forall u_2 \in U_2 : \ (w, u_2) = 0 \ \Longrightarrow w \in U_2^\perp \end{cases} \Longrightarrow w \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

То есть $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp \Longrightarrow$ имеет место равенство:

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

3. Возьмем $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$

$$\Longrightarrow ((U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp)^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp \Longrightarrow U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$$

□

Утверждение. *Вектор наименьшей длины, соединяющий точку из подпространства U с концом вектора x - $x_\perp$.*

Доказательство. Обозначим $x_{\shortparallel} = y, \ x_\perp = z$, а вектор из начала x в произвольную точку U - вектор v

Какой тут рисунок то?

Докажем, что $|x - v| \geqslant |z|$, причём равенство достигается при $v = y$:

$$x - v = x - y + y - v = z + y - v$$

Т.к. $z \in U^\perp, (y - v) \in U$,

$$z \perp (y - v) \Longrightarrow |x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geqslant |z|^2$$

причём равенство при $|y - v| = 0 \Longrightarrow y = v$. □

Это подтверждает осмысленность определения $\rho(x, U) = |x_\perp|$.

Упражнение. Докажите отсюда, что $\angle(x, v) \geqslant \angle(x, y)$.

Определение. Углом между вектором и подпространством будем называть:

$$\angle(x, U) = \angle(x, y)$$

Частный случай: $\dim U = n-1$ ("гиперплоскость"):
В ортонормированном базисе U задаётся уравнением $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$, а ортогональное дополнение $U^\perp = \langle n = (a_1, ..., a_n)\rangle$ (n - вектор нормали). Тогда:

$$\rho(x, U) = |x_\perp| = \frac{V_{\langle e_1, ..., e_{n-1}, x\rangle}}{V_{\langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle}}$$

где $V_{\langle a_1, ..., a_k\rangle}$ - объём параллелепипеда, натянутого на $a_1, ..., a_k$.

Определение. n-мерным параллелепипедом с рёбрами $e_1, ..., e_n$ называется:

$$\Pi_{\langle e_1, ..., e_n\rangle} = \{v = \lambda_1e_1 + ... + \lambda_ne_n, 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\}$$

Определение. В общем случае объём параллелепипеда определяется рекурсивно:

$$V_{\langle e_1, ..., e_n\rangle} = V_{\langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle} \cdot |e_{n\perp}|, \text{ где } e_{n\perp} \text{ - проекция } e_n \text{ на } \langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle$$

Заметим, что если $e_1, ..., e_n$ попарно ортогональны, то $V_{\langle e_1, ..., e_n\rangle} = |e_1| \cdot ... \cdot |e_n|$.

Объём не изменится, если к векторам применить процесс ортогонализации (с унитреугольной матрицей перехода).
Тогда:

$$V_{\langle e'_1, ..., e'_n\rangle} = |e'_1| \cdot ... \cdot |e'_n| = \sqrt{|G_{\{e'_1, ..., e'_n\}}|}$$

В ортогональном базисе:

$$G_{\{e'_1, ..., e'_n\}} = \begin{pmatrix} |e'_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |e'_n|^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |G_{\{e'_1, ..., e'_n\}}| = |e'_1|^2 \cdot ... \cdot |e'_n|^2$$

$$G_{e'} = C^TG_eC \Longrightarrow |G_{e'}| = |C|^2|G_e| = |G_e|$$

Упражнение. Доказать отсюда. что если $U = \langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle$, то:

$$\rho^2(x, U) = \frac{|G_{\{e_1, ..., e_n\}}|}{|G_{\{e_1, ..., e_{n-1}\}}|}$$

17.2 Линейные операторы в евклидовом пространстве

Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пр-во, $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - лин. оператор в $\mathcal{E}$.

Определение.

1. Оператор $\varphi^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - сопряжённый к φ, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : \ (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \tag{1}$$

2. Оператор φ - самосопряжённый, если:

$$\varphi^* = \varphi \Longrightarrow \forall x, y \in \mathcal{E}: \ (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \tag{2}$$

3. Оператор φ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E}: \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \tag{3}$$

   В частности, для ортогонального $\varphi : \forall x \in \mathcal{E} \ \ |\varphi(x)| = |x|$.

Условия (1)-(3) через матрицу Грама

Пусть в $\mathcal{E}$ зафиксирован базис $e = (e_1, ..., e_n)$ $(\dim \mathcal{E} = n)$. Пусть $x = eX$, $y = eY, G_e = ((e_i, e_j))$ - матрица Грама базиса e, A_φ - матрица φ в базисе e.
(1): $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$(A_\varphi X)^T G_e Y = X^T A_\varphi^T G_e Y = X^T G_e A_{\varphi^*} Y \Longrightarrow A_\varphi^T G_e = G_e A_{\varphi^*} \ \ (1')$$

(2): В частности,

$$\varphi^* = \varphi \Longleftrightarrow A_\varphi^T G_e = G_e A_\varphi (2')$$

Если e - ортонормированный, то $G_e = E$, и $A_\varphi^T = A_\varphi$, т.е. A_φ - симметрическая матрица.
(3): φ - ортогональный $\Longleftrightarrow$ $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$(A_\varphi X)^T G_e (A_\varphi Y) = X^T G_e Y \Longrightarrow A_\varphi^T G_e A_\varphi = G_e (3')$$

Если $G_e = E$, то $A_\varphi^T A_\varphi = E$, т.е. A_φ - ортогональная матрица.

Теорема. ***Свойства сопряжённых операторов***

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$*;*

2. $\mathrm{Ker}\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$

3. $\mathrm{Ker}\varphi = (\mathrm{Im}\varphi^*)^\perp$

Доказательство.

1. В ортонормированном базисе:

$$A_{\varphi^*} = A_\varphi^T \Longrightarrow A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = (A_\varphi^T)^T = A_\varphi$$

   Т.к. в фиксированном базисе имеется взаимно однозначное соответствие операторов и их матриц, $(\varphi^*)^* = \varphi$.

2. Сравним размерности:

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi^* = n - \mathrm{rk}(A_{\varphi^*}) = n - \mathrm{rk}(A_\varphi^T) = n - \mathrm{rk}(A_\varphi)$$

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk}A_\varphi \Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}\varphi)^\perp = \mathrm{n} - rkA_\varphi$$

Докажем, что $\mathrm{Im}\varphi \subseteq (\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp$ (отсюда $\mathrm{Ker}\varphi^* \subseteq (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$):
Пусть $v \in \mathrm{Im}\varphi \Longrightarrow v = \varphi(x)$, $y \in \mathrm{Ker}\varphi^*$. Тогда:

$$(v, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (x, 0) = 0 \Longrightarrow v \perp \mathrm{Ker}\varphi^*$$

Т.к. размерности равны и $\mathrm{Ker}\varphi^* \subseteq (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$, то $\mathrm{Ker}\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$.

3. Следует из (2) подстановкой φ^* вместо φ.

□

Следствие. ***Теорема Фредгольма*** *СЛУ $AX = b$ с квадратной матрицей A порядка n совместна $\Longleftrightarrow$ для любого Y - решения однородной сопряжённой системы - выполнено условие $Y \perp b$.*

Доказательство. $AX = b$ совместна $\Longleftrightarrow b \in \mathrm{Im}A$

$$Y \in \mathrm{Ker}\varphi^* = \mathrm{Ker}A^T$$

Т.к. $\mathrm{Ker}\varphi^* = (\mathrm{Im}A)^\perp$, то система совместна $\Longleftrightarrow b \perp \mathrm{Ker}\varphi^*$ □

17.3 Самосопряжённые операторы

Лемма. *Пусть $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - лин. оператор, $U \subset \mathcal{E} : \varphi(U) \subseteq U$.*
Тогда $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^\perp, x \in U$ выполнено $(x, \varphi^*(y)) = 0$:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0, \text{ т.к. } \varphi(x) \in U, \ y \in U^\perp$$

□

Утверждение. *1. Если λ_1, λ_2 - различные собственные значения самосопряжённого оператора φ, x_1, x_2 - соответсвующие им собственные векторы, то $x_1 \perp x_2$;*

2. Все характеристические числа самосопряжённого оператора $\in \mathbb{R}$.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi^* = \varphi$. Тогда:

$$(\varphi(x_1), x_2) = \lambda_1(x_1, x_2);\ (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

   Из $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует $(x_1, x_2) = 0$.

2. От противного: пусть $\exists \lambda_1 = \alpha + i\beta$ - характеристическое число для самосопряжённого φ с $\beta \neq 0$.
   Как было доказано ранее, $\exists$ φ-инвариантное подпространство U размерности 2, на котором $\varphi|_U$ имеет собственные значения $\alpha \pm i\beta$. U можно рассматривать как евклидово пр-во со скалярным произведением $(x, y)|_U$. Тогда $\varphi|_U$ - также самосопряжённый на U.
   Выберем ортонормированный базис в U. Тогда в этом базисе $\varphi|_U$ имеет симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Её характеристические числа:

$$|A - \lambda E| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\mathcal{D} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$$

   Отсюда корни характеристического многочлена вещественные, что противоречит предположению.

□

Теорема. *Для любого самосопряжённого оператора $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора.*

Доказательство. Индукция по $\dim \mathcal{E} = n$:
База: $n = 1$. Тогда $\forall x \in \mathcal{E}:\ \varphi(x) = \lambda_1 x$, т.е. любой вектор длины 1 подойдёт в качестве ортонормированного базиса.
Шаг: Пусть $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ - какое-либо собственное значение для φ. Рассмотрим $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \{0\}$ - оно является φ-инвариантным подпространством.
Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} = \mathcal{E}$, то $\forall x \in \mathcal{E}:\ \varphi(x) = \lambda_1 x$, т.е. в ортонормированном базисе матрица оператора - $\lambda_1 E$;
Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \mathcal{E}$, то по лемме $\mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$ также φ-инвариантно и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$. К ограничению φ на инвариантные подпространства $\mathcal{E}_{\lambda_1}, \mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$ можно применить предположение индукции, если рассмотреть их как отдельные евклидовы пространства. Тогда в них есть ортонормированные базисы из собственных векторов, а тогда их объединение будет искомым ортонормированным базисом для $\mathcal{E}$ (ортогональность векторов из разных базисов следует из утверждения выше). □

Следствие. *Если $\lambda_1, ..., \lambda_s$ - все попарно различные собственные значения самосопряжённого оператора φ, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{E}_{\lambda_s}$.*

Замечание. Если все собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ самосопряжённого оператора φ положительны, то $\exists$ самосопряжённый оператор ψ с положительными собственными значениями такой, что $\psi^2 = \varphi$.

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_n$ - ортонормированный базис из собственных векторов для φ. Тогда:

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{оператор с матрицей } \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} - \psi$$

□

Пример. Пусть $\mathcal{E} = U \oplus U^{\perp}$, т.е. $\forall x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}$.
$\varphi_1(x) = x_{\shortparallel}$ - ортогональное проектирование на U;
$\varphi_2(x) = x_{\shortparallel} - x_{\perp}$ - ортогональная симметрия, или отражение $\mathcal{E}$ относительно U.
Покажем, что φ_1 и φ_2 самосопряжённые:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}, y = y_{\shortparallel} + y_{\perp} :$$

$$(\varphi_1(x), y) = (x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel} + y_{\perp}) = (x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel}) = (x_{\shortparallel} + x_{\perp}, y_{\shortparallel}) = (x, \varphi_1(y))$$

$$(\varphi_2(x), y) = (x_{\shortparallel} - x_{\perp}, y_{\shortparallel} + y_{\perp}) = (x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel}) - (x_{\perp}, y_{\perp}) = (x_{\shortparallel} + x_{\perp}, y_{\shortparallel} - y_{\perp}) = (x, \varphi_2(y))$$

17.4 Ортогональные операторы

Определение. $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

Из определения следует, что $\forall x \in \mathcal{E} : \ |\varphi(x)| = |x|$ - φ сохраняет длины $\Longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{0\} \Longrightarrow \varphi$ инъективный, а так как $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$, получаем, что φ - биективный (и обратимый) оператор.

Утверждение. *Пусть $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор.*
Тогда φ^{-1} также ортогональный, причём $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Доказательство. Покажем, что $\forall x, y \in \mathcal{E} (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x, y)$. Выберем $x' = \varphi^{-1}(x), y' = \varphi^{-1}(y)$. Тогда:

$$(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x', y') = (\varphi(x'), \varphi(y')) = (x, y)$$

По определению φ^*: $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)),\ \forall x, y \in \mathcal{E}$
Т.к. φ обратим, $\exists y' \in E:\ y = \varphi(y')$

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(x), \varphi(y')) = (x, y') = (x, \varphi^{-1}(y)) \Longrightarrow (x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi^{-1}(y))$$

$$(x, \varphi^*(y) - \varphi^{-1}(y)) = 0\ \forall x, y \in \mathcal{E} \Longrightarrow \varphi^*(y) = \varphi^{-1}(y)\ \forall y \in \mathcal{E}$$

т.е. $\varphi^* = \varphi^{-1}$ □

Лемма. *Пусть $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор, $U \subset E:\ \varphi(U) \subseteq U$. Тогда:*

$$\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$$

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^\perp, x \in U$ выполнено $(x, \varphi(y)) = 0$.
Т.к. φ обратим, $\exists x' : x = \varphi(x')$, т.е. $x' = \varphi^{-1}(x) \in U$. Отсюда:

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi(x'), \varphi(y)) = (x', y) = 0,\ \text{т.к. } x' \in U,\ y \in U^\perp$$

□

Определение. В пространстве $\mathcal{C}^n$ введем скалярное произведение с требованиями:

1. Линейность по 1 аргументу
2. Вместо симметричности потребуем:
$$(y, x) = \overline{(x, y)}$$
3. $(x, x) \neq 0,\ (x, x) = 0$, если $x = 0$

Следовательно, если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$

Теорема. *Пусть $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор.*

1. *Собственные значения φ - только ± 1, причём отвечающие этим значениям собственные векторы $\perp$.*
2. *Все характеристические числа для φ над $\mathbb{C}$ имеют модуль 1.*

Доказательство.

1. Пусть $\varphi(x) = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:
$$(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2(x, x) \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$
Если $\varphi(x) = x, \varphi(y) = -y (x, y \neq 0)$, то
$$(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = -(x, y) \Longrightarrow (x, y) = 0$$

2. Будем обозначать через $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ заданной матрицей A_φ
   Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - характеристическое число для φ, то:

$$\exists\ v \in \mathbb{C}^n: \ \varphi(v) = \lambda(v)$$

   Тогда $(v, v) = (\varphi(v), \varphi(v)) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda\overline{\lambda}(v, v) \Longrightarrow \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$, или $\lambda = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$.

□

Теорема. *Если $\varphi: \ \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор, то в $\mathcal{E}$ $\exists$ ортонормированный базис, в котором:*

$$A^{\varphi,f} = \begin{pmatrix} \boxed{\Phi_1} &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \boxed{\Phi_s} &&&&&& \\ &&& \boxed{1} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \boxed{1} &&& \\ &&&&&& \boxed{-1} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \boxed{-1} \end{pmatrix}, \ \Phi_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

Порядок матрицы равен $n = \dim\mathcal{E}$ (s - количество пар сопряжённых собственных значений, а также количество 1 и -1 определены однозначно).

Доказательство. Заметим, что если все собственные значения φ вещественные, то для φ существует ортонормированный базис из собственных векторов - это объединение ортонормированных базисов подпространств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_{-1}$ (в частности, φ будет ещё и самосопряжённым).
Индукция по n:
База: $n = 2$. Случай, если все собственные значения φ вещественные, разобран. Если у φ есть комплексное собственное значение λ, то $\overline{\lambda}$ - также собственное значение для φ. Рассмотрим произвольный ортонормированный базис $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$. В нём $\varphi(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$. Так как φ сохраняет длины, $|\varphi(e_1)| = 1$, т.е.

$$(\alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Longrightarrow \exists\psi_1: \ \alpha = \cos(\psi_1), \beta = \sin(\psi_1)$$

Аналогично $\exists\psi_2: \ \varphi(e_2) = \cos(\psi_2)e_1 + \sin(\psi_2)e_2$. При этом $(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = (e_1, e_2) = 0$, т.е.

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = \cos\psi_1\cos\psi_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2 = \cos(\psi_1 - \psi_2) = 0$$

Отсюда $\psi_2 = \psi_1 + \frac{(2k+1)\pi}{2}$, т.е. при необходимости заменив e_2 на $-e_2$ в базисе, получим матрицу $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\psi_1 & -\sin\psi_1 \\ \sin\psi_1 & \cos\psi_1 \end{pmatrix}$. База доказана.
Переход: пусть $n > 2$. Случай, если все собственные значения φ вещественные, разобран. Если у φ есть комплексное собственное значение λ, то из доказанного ранее знаем, что существует φ-инвариантное подпространство U такое, что $\varphi|_U$ имеет собственные значения $\lambda, \overline{\lambda}$. Тогда $U^\perp$ - также φ-инвариантно, причём $\mathcal{E} = U \oplus U^\perp$. Для U и $U^\perp$ искомые ортонормированные базисы есть по предположению индукции, а тогда искомый ортонормированный базис для $\mathcal{E}$ будет объединением двух найденных (возможно, с перестановкой векторов для правильного порядка элементов на диагонали матрицы). $\square$

Определение. Оператор φ собственный, если $\det\varphi = 1$, при $\det\varphi = -1$ - не собственный

Частный случай теоремы: $\forall$ собственный оператор φ в трехмерном пространстве - это поворот вокруг оси на некоторый угол.
Объяснение: Т.к. 3 - нечетное число, то у φ есть вещественное собственное значение $\lambda = \pm 1$, т.к. $\det\varphi > 0$, то $\lambda = 1$ и e_3 - собственный вектор для этого λ, тогда плоскость $\langle e_3\rangle^\perp$ - инвариантная плоскость, и она поворачивается на некоторый угол.

18 Общие линейные операторы

Теорема. *Любой невырожденный линейный оператор φ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ единственным образом может быть представлен в виде: $\varphi = \theta \cdot \rho$, где θ - ортогональный оператор и ρ - самосопряжённый оператор с положительными собственными значениями.*

Теорема. ***Матричная версия***
Любую вещественную матрицу A с $\det A \neq 0$ можно представить в виде произведения $A = Q \cdot R$, где Q - ортогональная, R - симметричная с положительными собственными значениями.

Лемма. *Если оператор $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ невырожденный, то все собственные значения оператора $\varphi^* \cdot \varphi$ положительны.*

Утверждение.
$$(\psi \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot \psi^*$$

Доказательство. Оператор $\varphi^* \cdot \varphi$ - самосопряжённый:

$$(\varphi^* \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot (\varphi^*)^* = \varphi^* \cdot \varphi$$

$\Longrightarrow$ все его собственные значения $\in \mathbb{R}$. Путсь μ - какое-то из них: $(\varphi^* \cdot \varphi)(v) = \mu v$ для подходящего $v \neq 0$. Вычислим μ:

$$((\varphi^* \cdot \varphi)(v), v) = \mu(v, v) = (\varphi(v), (\varphi^*)^*(v)) = (\varphi(v), \varphi(v)) \Longrightarrow \mu = \frac{(\varphi(v), \varphi(v))}{(v, v)}$$

$\Longrightarrow \mu > 0$ □

Замечание. Для любой вещественной матрицы A она является $A = A_\varphi$ в подходящем базисе (этот базис можно выбрать ортонормированным). Будем доказывать матричную версию, используя тот факт, что в ортонормированном базисе: $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$

Доказательство. Предположим, что разложение $A = QR$ уже найдено:

$$\Longrightarrow A^T = R^T Q^T = RQ^T \Longrightarrow A^T A = R(\underbrace{Q^T Q}_{=E})R = R^2$$

- это симметричная матрица с положительными собственными значениями $\Longrightarrow$ R^2 можно привести к диагональному виду: $\exists$ ортогональная матрица C такая, что:

$$C^{-1}(R^2)C = \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \Longrightarrow R^2 = C\Lambda^2 C^{-1} = C\Lambda^2 C^T \Longrightarrow R = C\Lambda C^T$$

Где $\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$ имеет положительные собственные значения

Тогда $Q = A \cdot R^{-1}$

Проверка:

$$Q^T = (R^{-1})^T A^T = R^{-1} A^T \Longrightarrow Q^T Q = R^{-1}(A^T A)R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} = E$$

□

Определение. Разложение $\varphi = \theta\rho$ или $A = Q \cdot R$ - полярное разложение оператора φ с собственной матрицей A

Определение. Сингулярное разложение: $A = (QC)\Lambda C^T = U\Lambda V$, где Λ - диагональная матрица с положительными собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_m$, U, V - ортогональные матрицы ($\lambda_1, ..., \lambda_m$ - сингулярные числа матрицы A)

19 Квадратичные формы

Пусть $k(x) = b(x, x)$ - квадратичная форма на пространстве $\mathcal{E}$, B - её матрица в некотором базисе ($B^T = B$).

Теорема. *В $\mathcal{E}$ $\exists$ ортонормированный базис $f = eC$, в котором эта форма имеет вид $k(x) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - собственные значения B.*

Замечание. Векторы базиса f называются главными осями для квадратичной формы k, а сама замена - приведением формы к главным осям.

Доказательство. Примем B за матрицу самосопряжённого оператора φ в некотором ортонормированном базисе. Тогда $\exists$ ортонормированный базис $f_1, ..., f_n$ из собственных векторов оператора φ, т.е. $\exists C$ - ортогональная матрица такая, что

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow C^T BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

т.е. C - матрица перехода к главным осям. □

Утверждение. *Если $\mathcal{E}$ - евклидово пр-во, то $\mathcal{E}^*$ изоморфно E.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\forall f : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \;\; \exists! a \in \mathcal{E}$ такой, что $\forall x \in \mathcal{E}, f(x) = (a, x)$.
Выберем в $\mathcal{E}$ ортонормированный базис $e = \{e_1, ..., e_n\}$, тогда в нём $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = (a, x)$, где $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. □

Лемма. *Для любой билинейной функции $b(x, y)$ на евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ $\exists!$ линейный оператор $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ такой, что*

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : \;\; b(x, y) = (x, \varphi(y)) \quad (1)$$

Доказательство. Выберем произвольный базис e в $\mathcal{E}$ с матрицей Грама G ($\dim \mathcal{E} = n$). Тогда:

$$(1) \Longleftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n : X^T BY = X^T (GA_\varphi) Y \Longrightarrow A_\varphi = G^{-1}B$$

□

Замечание. Пусть $b(x, y) = b(y, x)$. Тогда:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = (y, \varphi(x)) = b(y, x) = b(x, y) = (x, \varphi(y)) \Rightarrow \varphi^* = \varphi$$

Теорема. *Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$ $(\dim V = n)$, f, g - квадратичные формы на V, причём g знакоопределена (в частности, $g > 0$). Тогда $\exists$ базис, в котором $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$; $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ (для $g < 0$ $g(x) = -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$).*

Доказательство. Рассмотрим порождающие f, g симметрические билинейные формы $f(x, y)$ и $g(x, y)$, т.е. $f(x, x) \equiv f(x), g(x, x) \equiv g(x)$, и обозначим за F, G матрицы этих форм в некотором базисе. Тогда можем задать на пр-ве V скалярное произведение с помощью формы $g : (x, y) = g(x, y)$.
По лемме $\exists!\ \varphi : V \to V$ - самосопряжённый оператор такой, что $f(x, y) \equiv g(x, \varphi(y))$. Заметим также, что G - матрица Грама для базиса, в котором функция $g(x, y)$ имеет матрицу G. Тогда $A_\varphi = G^{-1}F$.
Так как $\varphi \equiv \varphi^*$, в V существует ортонормированный базис, в котором $A_{\varphi,e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Если $C = C_{e\to e'}$, то $A_{\varphi,e'} = C^{-1}A_\varphi C$, $F_{e'} = C^T F C$.
Тогда во-первых, $C^T G C = G_{e'} = E$, т.к базис ортонормированный, а во-вторых

$$C^{-1}A_{\varphi,e}C = C^{-1}G^{-1}FC = C^{-1}(CC^T)FC = (C^{-1}C)C^T FC = C^T FC = F_{e'}$$

т.е. в новых координатах $F_{e'} = A_{\varphi,e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ и $f(x') = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i'}^2$ □

Замечание. $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - корни характеристического ур-я

$$|A_\varphi - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow |G^{-1}F - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow |F - \lambda G| = 0 \quad (2)$$

т.е. соответствующие собственные векторы будут решениями СЛУ

$$(F - \lambda G)X = 0 \quad (3)$$

Для каждого собственного значения λ_i нужно найти ФСР для (3) и ортонормировать относительно $g(x, y)$.

20 Полуторалинейные, эрмитовы формы. Унитарные (эрмитовы) пространства

Далее всюду $F = \mathbb{C}, V$ - в.п. над $\mathbb{C}$.

Определение. Функция $f(x, y) : V \times V \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если:

1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$;
   $f(\lambda_x, y) = \lambda f(x, y)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$;

2. $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$;
   $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

Определение. $f(x, y)$ называется эрмитово симметричной (эрмитовой), если

1. $f(x, y)$ линейна по x;
2. $f(y, x) \equiv \overline{f(x, y)}$ $(\Longrightarrow f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)\ \forall \lambda \in \mathbb{C})$

Заметим, что если $f(x, y)$ эрмитова, то $f(x, x) \equiv \overline{f(x, x)} \Rightarrow f(x, x) \in \mathbb{R}$.

Определение. Квадратичная функция, порождённая эрмитовой формой - это функция $k(x) \equiv f(x, x)$.

Упражнение. Доказать, что для любой квадратичной формы $k(x)$ $\exists!$ эрмитова форма $f(x, y)$ такая, что $f(x, x) \equiv k(x)$.

Если $f(x, y)$ полуторалинейна и эрмитова, то обозначим $F = (f(e_i, e_j))$, и тогда $f(e_j, e_i) = \overline{f(e_i, e_j)} \Longrightarrow F^T = \overline{F} \Longleftrightarrow \overline{F}^T = F$.

Определение. $F^* = \overline{F}^T$ - эрмитово сопряжённая матрица к F.
Если $F^* = F$, то F - эрмитова матрица.

Определение. Скалярное произведение на пр-ве V - функция (x, y) такая, что

1. (x, y) линейна по x;
2. $(y, x) \equiv \overline{(x, y)}$;
3. $(x, x) > 0\ \forall x \neq 0$

Скалярное произведение в координатах:

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k \overline{y_j} (e_k, e_j)$$

Матрица Грама базиса e: $G_e = ((e_k, e_j))$. $G_e * = \overline{G_e}^T = G_e$.

Определение. $x \perp y \Longleftrightarrow (x, y) = 0$.
Базис $e_1, ..., e_n$ ортогональный, если $(e_k, e_j) = 0, k \neq j$.
Базис $e_1, ..., e_n$ ортонормированный, если $(e_k, e_j) = \delta_{ij}$.

В ортонормированном базисе $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$.

Изменение матрицы полуторалинейной формы при замене базиса:
Если $f(x,y)$ - полуторалинейная форма, то в некотором базисе e : $f(x,y) = X^T F\overline{Y}$, где $F = (f(e_i,e_j))$. Если f эрмитово симметричная, т.е. $\overline{f(y,x)} = f(x,y)$, то $\overline{F}^T = F$.
Тогда если $e' = Ce$, то в случае полуторалинейной формы:

$$X = CX', Y = CY' \Rightarrow f(x,y) = (X')^T(C^T F\overline{C})\overline{Y'} = (X')^T F'\overline{Y'}$$

В случае эрмитовой квадратичной формы $k(x) = f(x,x)$:

$$k(x) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k\overline{x}_j f_{kj} = ... + f_{kj}x_k\overline{x}_j + ..., \ f_{jk} = \overline{f}_{kj}$$

Отсюда $f_{ii} = \overline{f}_{ii}$, т.е. $f_{ii} \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Эрмитову квадратичную форму можно привести к диагональному виду $\alpha_1|x_1|^2 + ... + \alpha_r|x_r|^2$, где $r = rkF$, $\alpha_1,...,\alpha_r \in \mathbb{R}, \alpha_j \neq 0$. Количества положительных коэффициентов p и отрицательных коэффициентов q - инварианты для данной формы.*

Доказательство. Применим следующий вариант алгоритма Лагранжа: Основной случай. Если $b_{11} \neq 0$, то необходимо выделить все одночлены, содержащие x_1 и $\overline{x}_1$:

$$\begin{aligned} k(x_1,...,x_n) &= (b_{11}x_1\overline{x}_1 + ... + b_{n1}x_n\overline{x}_1) + (b_{12}x_1\overline{x}_2 + ... + b_{1n}x_1\overline{x}_n) + \tilde{k}(x_2,...,x_n) = \\ &= \frac{1}{\overline{b}_{11}}(b_{11}x_1 + ... + b_{n1}x_n)(\overline{b_{11}x_1} + ... + \overline{b_{n1}x_n}) + \tilde{k}(x_2,...,x_n) = \\ &= \frac{1}{\overline{b}_{11}}|b_{11}x_1 + ... + b_{n1}x_n|^2 + \tilde{k}(x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

Заменяем $y_1 = b_{11}x_1 + ... + b_{n1}x_n$ и далее преобразуем $\tilde{k}$. Особый случай: $b_{ii} = 0, i = 1,...,n$. По условию $k \not\equiv 0$, т.е. $\exists b_{ij} = \overline{b}_{ji} \neq 0$ и форма содержит члены $b_{ij}x_i\overline{x}_j + b_{ji}x_j\overline{x}_i = 2b_{ij}^2|y_i|^2 - 2b_{ij}^2|y_j|^2$ при замене $\begin{cases} x_i = b_{ji}(y_i + y_j) \\ x_j = y_i - y_j \end{cases}$
Далее можем продолжать по основному случаю. □

Сохраняют силу следующие утверждения и понятия:

1. Теорема Якоби: $\Delta_1,...,\Delta_{n-1} \neq 0 \Longrightarrow k = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}|y_1|^2 + ... + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}|y_n|^2$;
2. Критерий Сильвестра: $k > 0 \Longleftrightarrow \Delta_i > 0, i = 1,...,n$;

3. Понятие $u^\perp$ и утверждение $V = U \oplus U^\perp$.

Замечание. Если $A^* = \overline{A}^T = A$, то $|A| = |\overline{A}^T| = |\overline{A}| = \overline{|A|}$, т.е. $|A| \in \mathbb{R}$

Алгоритм. *Процесс ортогонализации:*
Дан произвольный базис $e_1, ..., e_n \in V$. необходимо построить ортогональный базис $e'_1, ..., e'_n$ такой, что $\langle e_1, ..., e_k \rangle = \langle e'_1, ..., e'_k \rangle$.

Возьмём $e'_1 = e_1$.
Шаг алгоритма: если $k > 1$ и $e'_1, ..., e'_{k-1}$ уже построены, то будем искать e'_k в виде $e_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(k)} e'_j$. Тогда:

$$0 = (e'_k, e'_i) = (e_k, e'_i) - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(k)} (e'_j, e'_i) = (e_k, e'_i) - \lambda_i^{(k)} (e'_i, e'_i) \Longrightarrow \lambda_i^{(k)} = \frac{(e_k, e'_i)}{(e'_i, e'_i)}$$

20.1 Линейные операторы в унитарном пространстве

1. Сопряжённый оператор φ^* к линейному оператору $\varphi : V \to V$:

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

2. Самосопряжённый оператор: $\varphi = \varphi^* \quad (2)$

3. Унитарный оператор:

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad (3)$$

Для самосопряжённого оператора:

$$(2) \Longleftrightarrow (\varphi(x), y) \equiv (x, \varphi(y)) \Longrightarrow (A_\varphi X)^T G \overline{Y} = X^T (A_\varphi^T G) \overline{Y} = X^T (G \overline{A}_\varphi) \overline{Y}$$

Отсюда

$$A_\varphi^T G = G \overline{A}_\varphi \quad (2')$$

Если базис ортонормированный, то $A_\varphi^T = \overline{A}_\varphi \Longleftrightarrow A = A^*$

Для унитарного оператора:

$$(3) \Longleftrightarrow X^T G \overline{Y} = (A_\varphi X)^T G \overline{A_\varphi Y} = X^T (A_\varphi^T G \overline{A}_\varphi) \overline{Y} \Longrightarrow A_\varphi^T G \overline{A}_\varphi = G \quad (3')$$

Если базис ортонормированный, то $A_\varphi^T \overline{A}_\varphi = E \Longleftrightarrow A^{-1} = A^*$ (унитарная матрица).

Теорема. *Если φ - самосопряжённый линейный оператор в V, то*

1. *Все его характеристические корни* $\in \mathbb{R}$*;*

2. *Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;*

3. *Если* U *-* φ*-инвариантно в* V*, то* $U^{\perp}$ *также* φ*-инвариантно;*

4. *В* V $\exists$ *ортонормированный базис из собственных векторов* $\varphi \Longleftrightarrow \varphi = \varphi^*$ *(*$\Longrightarrow$ *при условии, что все собственные значения* $\in \mathbb{R}$*)*

Теорема. *Если* φ *- унитарный линейный оператор в* V*, то*

1. *Все собственные значения имеют модуль 1;*

2. *Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;*

3. *Если* U *-* φ*-инвариантно в* V*, то* $U^{\perp}$ *также* φ*-инвариантно;*

4. *В* V $\exists$ *базис из собственных векторов* φ*, причём в этом базисе*

$$A'_{\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\omega_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство. За исключением примечаний ниже доказательство аналогично случаю евклидова пространства.

К пункту 1 обоих теорем:

Так как $\mathbb{C}$ замкнуто, любой корень λ характеристического многочлена для φ является собственным значением и имеет отвечающийй ему собственный вектор.

Для самосопряжённого оператора:

$$\lambda(x,x) = (\varphi(x), x) = (x, \varphi(x)) = \overline{\lambda}(x,x) \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Для унитарного оператора:

$$(x,x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda\overline{\lambda}(x, \varphi(x)) \Longrightarrow \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \Longrightarrow |\lambda| = 1$$

К пункту 4 теоремы 2:

Индукция по n:

База: $n = 1 \Rightarrow \varphi(x) = e^{i\omega}x$; Шаг: Выберем собственное значение $\lambda_1 = e^{i\omega_1}$, найдём для него собственный вектор e_1 и нормируем его. $\langle e_1 \rangle - \varphi$-инвариантное подпространство $\Longrightarrow$ $\langle e_1\rangle^\perp$ – φ-инвариантно, и тогда по предположению индукции $\exists$ ортонормированный базис $e_2, ..., e_n$ нужного вида для $\varphi|_{\langle e_1\rangle^\perp}$, а из ортогональности e_1 всем векторам этого базиса получаем, что $e_1, ..., e_n$ - искомый базис. $\square$

21 Аффинные пространства и их преобразования

Определение. Аффинным пространством над полем $\mathbb{F}$ называется пара $(\mathbb{A}, V)$, где $\mathbb{A}$ - множество точек, V - ассоциированное с ним векторное пространство (над $\mathbb{F}$), если задано отображение $\mathbb{A}\times V \to \mathbb{A}$ - операция прибавления вектора к точке (откладывание вектора от точки) со следующими аксиомами:

1. $\forall p \in \mathbb{A}, x, y \in V: \ p + (x + y) = (p + x) + y$;
2. $\forall p \in \mathbb{A}: \ p + 0 = p$;
3. $\forall p, q \in \mathbb{A}\ \exists! x \in V : p + x = q$

Размерность аффинного пространства: $\dim \mathbb{A} = \dim V$.

Замечание. Если имеется векторное пространство V, то можно принять $\mathbb{A} = V$, понимая точки как радиус-векторы, если задать начальную точку $0 \in V$.

Утверждение. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs} = \overrightarrow{ps}$

Доказательство. $q = p + x;\ s = q + y = (p + x) + y = p + (x + y)$ $\square$

Аффинная система координат

Задаётся точкой $o \in \mathbb{A}$ - началом координат и базисом e ассоциированного векторного пространства V. Обозначается $(o, e_1, ..., e_n)$.
Координаты точки p - координаты радиус-вектора $\overrightarrow{op}$ в базисе e.

$$\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Longrightarrow \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)e_i$$

Также можно задать точки $o, p_1, ..., p_n$ общего положения (т.е. $\overrightarrow{op_1}, ..., \overrightarrow{op_n}$ линейно независимы) - тогда $(o, \overrightarrow{op_1}, ..., \overrightarrow{op_n})$ - система координат.

Изменение координат точки при замене системы координат

Пусть (o, e) - старая система координат, (o, e') - новая система координат.

Заметим, что $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p}$. Поэтому если X - столбец координат точки p в старых координатах, X' - в новых координатах, а X_o - столбец старых координат точки o', то

$$X = X_o + CX, \quad (C = C_{e \to e'}) \ \ (1)$$

Можно ввести аффинную матрицу перехода $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ порядка $n+1$ ($n = \dim V$) и дополненный столбец $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ высоты $n+1$. Тогда из (1):

$$\tilde{X} = \tilde{C}\tilde{X}' \ \ (1')$$

Барицентрическая комбинация точек

Пусть даны $p_0, p_1, ..., p_m (1 \leqslant m \leqslant n)$ с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, $\sum \lambda_i = 1$. Барицентрической комбинацией будем называть

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i := p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (p_i - p) \text{ для некоторой точки } p$$

Покажем, что результат не зависит от выбора точки p: если $q = p + v$ - другая точка, то

$$q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{qp_i} = p + v + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (-v) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{pp_i}$$

Следствие. *Если $m = n$ и $p_0, ..., p_n$ - точки общего положения, то любую точку можно единственным образом представить в виде барицентрической комбинации этих точек: $p = \sum_{i=0}^{m} x_i p_i$, $\sum_{i=0}^{m} x_i = 1$.*
$(x_0, ..., x_n)$ называются барицентрическими координатами точки p.

21.1 Аффинные плоскости (подпространства)

Определение. Зафиксируем точку $p_0 \in \mathbb{A}$ и подпространство $U \subseteq V$.
Аффинная плоскость P с начальной точкой p_0 и направляющим подпространством U - это множество точек $P := p_0 + U = \{p_0 + u | u \in U\}$.
Размерность плоскости: $\dim P = \dim U$.

Утверждение. *P не зависит от выбора точки p_0.*

Доказательство. Пусть $P = p_0 + U, p_0' \in P$. Тогда:

$$p_0' = p_0 + u_0, u_0 \in U \Longrightarrow P' = p_0' + U = p_0 + u_0 + U = p_0 + U = P$$

□

Утверждение. *Если* $P = p_0 + U = p'_0 + U'$, *то* $U = U'$ *(т.е. направляющее подпространство для плоскости определено однозначно).*

Доказательство. $p'_0 \in p_0 + U \Longrightarrow p_0 + U = p'_0 + U = p'_0 + U' \Longrightarrow U = U'$ □

Утверждение. (P, U) *является аффинным пространством относ. операции* $p \to p + x$ *для* $x \in U$.

Доказательство. Проверим аксиомы:

1. $p + u \in p + U$ - операция определена на P и U;
2. $p + (u_1 + u_2) = (p + u_1) + u_2 \in p' + U = P$;
3. Если $p, q \in P$, то $P = p + U, q = p + u \Longrightarrow \overrightarrow{pq} = u \in U$ - существует и единственный.

□

$\forall p \in P: \ p = p_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i$ $(e_1, .., e_m$ - базис в $U)$.

Вместо точки p_0 и базиса $e_1, ..., e_m$ можно рассмотреть точки $p_0, p_1, ..., p_m$ общего положения - любую точку $p \in P$ можно представить в виде барицентрической комбинации точек $p_0, ..., p_n$.

Задание аффинной плоскости неоднородной СЛУ

Пусть $P = p_0 + U, \dim U = m, \dim V = n$. Тогда $\exists$ матрица A такая, что $U = \{x = eX | AX = 0\}$ (e - базис V).

$\forall p \in P$ имеет координаты $X_0 + X$, где X_0 - столбец координат p_0, а X - координаты $u \in U$. Тогда $A(X_0 + X) = AX_0 + AX = AX_0 := b \Longrightarrow$ координаты $p \in P$ удовлетворяют системе $AX = b$.

Если p_0 заменить на p'_0 с координатами $X_0 + X', AX' = 0$, то $A(X_0 + X') = AX_0 = b$. Остюда получаем следующее утверждение:

Утверждение. *Любую аффинную плоскость можно задать (неоднородной) системой линейных уравнений.*

Определение. Аффинная оболочка множества точек M - это наименьшая по включению аффинная плоскость, содержащая все точки M. В частности, если $M = \{p_0, ..., p_k\}$, то $\langle M \rangle = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0 p_1}, ..., \overrightarrow{p_0 p_k} \rangle$.

Замечание. Аффинная плоскость $P = p_0 + U$ представляет собой некоторый смежный класс пространства V по U:

$$p_0' + U = p_0 + U = P \iff \overline{p_o p_0'} \in U$$

Взаимное расположение двух плоскостей:

Пусть $P_1 = p_1 + U_1,\ P_2 = p_2 + U_2$

1. $P_1 \parallel P_2$ (в широком смысле), если $U_1 \subseteq U_2$ или $U_2 \subseteq U_1$. В истинном смысле: если они параллельны в широком смысле и не пересекаются.

2. $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, но не параллельны.

3. P_1 и P_2 скрещиваются: $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Утверждение. $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset \iff \overline{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть $p = p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \Rightarrow \overline{p_1 p_2} = u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$

$\Longleftarrow$ Пусть существуют $u_i \in U_i,\ i = 1, 2 : \overline{p_1 p_2} = u_1 - u_2$. Значит:

$$p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \in P_1 \cap P_2$$

$\square$

Определение. Аффинная оболочка подмножества $M \subset \mathbb{A}$ - это

$$\mathrm{Aff}(M) \equiv \langle M \rangle := p_0 + \langle \overline{pq} \mid p, q \in M \rangle,\ p_0 \in M$$

Видно, что $< M >$ - аффинная плоскость с направляющим подпространством

$$U_0 = \langle \overline{pq} : p, q \in M \rangle$$

Если $P = p_0 + U \supseteq M \Longrightarrow P \ni p_0 + \overline{pq},\ p, q \in M \Longrightarrow P \supseteq \langle M \rangle$. Если P_1, P_2 - аффинные плоскости, то:

$$\langle P_1, P_2 \rangle = p_0 + \langle \overline{p_1 p_2}, U_1, U_2 \rangle$$

Теорема.

$$\dim \langle P_1, P_2 \rangle = \begin{cases} \dim(U_1 + U_2),\ \textit{если } P_1 \cap P_2 \neq \emptyset, \\ \dim(U_1 + U_2) + 1,\ \textit{если } P_1 \cap P_2 = \emptyset \end{cases}$$

Доказательство. $\langle P_1, P_2\rangle$ имеет направляющее подпространство:

$$\langle\overline{p_1p_2}, U_1, U_2\rangle,\ \forall p_1 \in P_1,\ p_2 \in P_2$$

$$\dim\langle\overline{p_1p_2}, U_1, U_2\rangle = \begin{cases}\dim(U_1+U_2),\ \text{если } \overline{p_1p_2} \in U_1+U_2 \iff P_1\cap P_2 \neq \emptyset,\\ \dim(U_1+U_2)+1,\ \text{если } \overline{p_1p_2}\notin U_1+U_2.\end{cases}$$

□

22 Евклидовы аффинные пространства

Определение. Аффинное простарнство $(\mathbb{A}, \mathcal{E})$ - евклидово, если $\mathcal{E}$ - евклидово пространство (над $\mathbb{R}$), $\mathcal{E}$ ассоциированно с пространством точек $\mathbb{A}$.
Расстояние определяется как

$$\rho(p,q) = |\overline{pq}|$$

Для трех точек a, b, c угол между лучами (ab) и (ac) - это угол между векторами $\overline{ab}$ и $\overline{ac}$ (если они ненулевые).

Определение.
Расстояние от точки $p_1 \in \mathbb{A}$ до плоскости $P = p_0 + U,\ V \supset U \neq \{0\}$.
Либо $p_1 \in P$, либо $\overline{p_0p_1} \notin U$.
Можно рассматривать подпространтсво:

$$\widetilde{U} = \langle\overline{p_0p_1} + U\rangle \supset V,\ \overline{p_0p_1} = y + z,\ y \in U,\ z \in U^{\perp} \Longrightarrow \min|\overline{p_1q}| = |z|$$

Определение. Параллелепипед с одной вершиной p_0 и ребрами $a_1, \ldots, a_m$, где $m \leq n,\ a_i \in \mathcal{E}$:

$$\Pi_{\langle p_0, a_1, \ldots, a_m\rangle} = \{p_0 + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

Определим m-мерный объем рекурсивно: для $m = 1$:

$$V(\Pi_1) = |a_1|$$

$$V(\Pi_m) = (a_m)_{\perp} \cdot V_{\{p_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}}$$

где $(a_m)_{\perp}$ - ортогональная сотавляющая ребра a_m отностительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1}\rangle$.
Пусть $a_1, \ldots, a_m$ линейно независимы. Тогда:

$$V_{p_0, a_1, \ldots, a_m} = \sqrt{|G_{\{a_1, \ldots, a_m\}}|}$$

Можно ортогонализовать векторы $a_1, \ldots, a_m$, причем матрица перехода от $a_1, \ldots, a_m$ к $b_1, \ldots, b_m$, где $b_1, \ldots, b_m$ получены из алгоритма ортогонализации, выглядит так:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$|G_{\{a_1,\ldots,a_m\}}| = |G_{\{b_1,\ldots,b_m\}}| = \begin{vmatrix} |b_1^2| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |b_m^2| \end{vmatrix} = |b_1|^2 \cdot \ldots \cdot |b_m|^2$$

Значит:

$$\rho(p_1, P) = \frac{\sqrt{|G_{\{a_1,\ldots,a_m,\overline{p_0p_1}\}}|}}{\sqrt{|G_{\{a_1,\ldots,a_m\}}|}}$$

Если $P_1 = p_1 + U_1, P_2 = p_2 + U_2$ - две афиинные плоскости в аффинном пространстве, то назовем:

$$\rho(P_1, P_2) = \inf\{|\overline{pq}| : p \in P_1, q \in P_2\}$$

Теорема. $\rho(P_1, P_2)$ *равно длине ортогональной составляющей вектора* $\overline{p_1p_2}$ *относительно* $U_1 + U_2$

Замечание. Если $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, то $\rho(P_1, P_2) = 0$, $\overline{p_1p_2} \in U_1 + U_2$, так что $(p_1, p_2)_\perp = 0$, что не противоречит утверждению теоремы.

Доказательство. Обозначим $W = U_1 + U_2$, тогда $\mathcal{E} = W \oplus W^\perp$. Обозначим

$$\overline{p_1p_2} = v = v_\parallel + v_\perp,\ v_\parallel \in W,\ v_\perp \in W^\perp$$

Попробуем доказать, что существуют

$$a = p_1 + u_1^0 \in P_1,\ b = p_2 + u_2^0 \in P_2$$

такие, что $\overline{ab} = v_\perp$.

Выберем произвольные точки $x = p_1 + u_1 \in P_1,\ y = p_2 + u_2 \in P_2$. Тогда:

$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) = |\overline{yx}|^2 = |\overline{p_2p_1} + u_1 - u_2|^2 = |v + u_2 - u_1|^2 = \\ = |(v_\parallel + u_2 - u_1) + v_\perp|^2 = |v_\parallel + u_2 - u_1|^2 + |v_\perp|^2 \geq |v_\perp|^2 \end{aligned}$$

где $v_\perp \in (U_1 + U_2)^\perp$. Равенство достигается, если $v_\parallel = u_2 - u_1 \Rightarrow \exists\ u_1, u_2$ такие, что $a = p_1 + u_1,\ b = p_2 + u_2 : |\overline{ab}| = v_\perp$. □

Следствие. *Прямая* $l = a + \langle \overline{ab} \rangle = (p_1 + u_1) + \langle (\overline{p_1p_2})_\perp \rangle$ *является общим перпендикуляром этих двух плоскостей.*

22.1 Аффинные отображения и преобразования

Пусть $(\mathbb{A}_1, V_1)$ и $(\mathbb{A}_2, V_2)$ - аффинные пространства над одним и тем же полем.

Определение. Отображение $\Phi : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ называется аффинно-линейным отображением, если существует линейное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ такое, что

$$\forall a, b \in \mathbb{A}_1 : \ \overline{\Phi(a)\Phi(b)} = \varphi(\overline{ab}) \tag{1}$$

Такое определение равносильно следующему:

$$\forall a, b \in \mathbb{A}_1 : \ \Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overline{ab}) \tag{2}$$

Если задано Φ и какая-то точка a, то φ определяется однозначно.
Если $\overline{ab} = \overline{a_1 b_1} = v$

$$\Phi(a_1) + \varphi'(v) = \Phi(b_1) = \Phi(a_1) + \varphi'(\overline{a_1 b_1}) \Rightarrow \varphi = \varphi'$$

Утверждение.

1. *Пусть*

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$$

где Φ_1, Φ_2 *- аффинно-линейны, тогда*

$$\Phi = \Phi_2 \cdot \Phi_1 : \ \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_3$$

тоже аффинно-линейно с линейной частью $\varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1$

2. $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}_2$ *биективно* $\Longleftrightarrow \varphi$ *- биективно, при этом* Φ^{-1} *является аффинно-линейным с линейной частью* φ^{-1}.

Координатная запись

Выберем систему координат с началом в точке O и базисом e

$$\forall b(x_1, \ldots, x_n) = \overline{Ob}, \ \Phi(O) = O'(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

$$\Phi(b) = \Phi(O) + \varphi(\overline{Ob})$$

Обозначим $\Phi(b)(y_1, \ldots, y_m)$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix} + A_{\varphi,e,f} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

где f - базис в V_2

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_\varphi & X_0 \\ 0\dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \Longleftrightarrow \widetilde{Y} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{X}$$

где

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}, \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Подробная запись:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^0, \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_m^0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dy_1 = a_{11}dx_1 + \dots + a_{1n}dx_n, \\ \vdots \\ dy_m = a_{m1}dx_1 + \dots + a_{mn}dx_n \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Значит, A_φ действует на столбцы

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

как оператор φ. Обозначим

$$DY = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix},\ D : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$

Утверждение.

1. *Пусть*

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$$

где Φ_1, Φ_2 *- аффинно-линейны, тогда*

$$\Phi = \Phi_2 \cdot \Phi_1 :\ \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_3$$

тоже аффинно-линейны, причем

$$D(\Phi_2 \cdot \Phi_1) = D\Phi_2 \cdot D\Phi_1 = \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

2. Φ_1 *- биективно* $\Longleftrightarrow \varphi_1$ *- биективно, и линейная часть* Φ_1^{-1} *есть* φ_1^{-1}

Доказательство. 1. Пусть $b_1, a_1 \in \mathbb{A}_1$

$$\Phi_1(b_1) = \Phi_1(a_1) + \varphi_1(\overline{a_1b_1})$$

$$\Phi_2(\Phi_1(b_1)) = \Phi_2(\Phi_1(a_1)) + \varphi_2(\varphi_1(\overline{a_1b_1}))$$

2. Если φ_1 - биективно, то $\forall\ \overline{a_2b_2} \in V_2$ существует единственный вектор

$$\overline{a_1b_1} \in V_1 : \varphi(\overline{a_1b_1}) = \overline{a_2b_2}$$

Определим отображение

$$\Phi' : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_1$$

$$\Phi'(a_2) = a_1,\ \Phi'(b_2) = \Phi'(a_2) + \varphi^{-1}(\overline{a_2b_2})$$

Значит, Φ' - аффинно-линейное отображение.

$$\Phi(a_1) = a_2,\ \Phi(b_1) = \Phi(a_1) + \varphi(\overline{a_1b_1}) = \Phi(a_1) + \overline{a_2b_2} = b_2$$

$$(\Phi'\Phi)(a_1) = \Phi'(a_2) = a_1 \Longrightarrow \Phi'\Phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_1}$$

Аналогично в другом порядке.

□

Аффинные преобразования

Определение. Пусть $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ - аффинно-линейное преобразование. Если Φ биективно, то будем называть его просто аффинным.

Примеры. 1. Параллельный перенос на вектор $v \in V$:

$$\forall a \in \mathbb{A}:\ t_v(a) = a + v$$

ясно что

$$t_v^{-1} = t_{-v},\ Dt_v = \mathrm{Id}$$

2. Гомотетия с центром в точке O:

$$\forall v \in V:\ \Phi(O + v) = O + \lambda v$$

где $\lambda \neq 0$ - коэффициент гомотетии. Например, при $\lambda = -1$ - это центральная симметрия.

Теорема. *Любое (биективное) аффинное преобразование Φ для любой точки $a \in A$ представляется единственным образом в виде композиции*

$$\Phi = t_v \cdot \Psi$$

где Ψ - аффинное преобразование такое, что $\Psi(a) = a$.

Доказательство. Для заданной точки a обозначим $v := \overline{a\Phi(a)}$. Рассмотрим преобразование $\Psi = t_{-v} \cdot \Phi$, тогда Ψ - аффинное.

$$\Psi(a) = \Phi(a) - v = a \Longrightarrow \Phi = t_v \cdot \Psi$$

Докажем единственность: Пусть

$$\Phi = t_v \cdot \Psi = t_{v'} \cdot \Psi', \ \Psi'(a) = a$$

значит,

$$t_{v-v'} = \Psi' \cdot \Psi^{-1}, \text{ т.к } \Psi'(a) = \Psi(a) = a$$

отсюда

$$\Psi' \cdot \Psi^{-1}(a) = a = a + (v - v') \Longrightarrow v' = v$$

следовательно,

$$\Psi' \cdot \Psi^{-1} = t_0 = \mathrm{Id}$$

□

Теорема. *Для любых двух наборов точек общего положения $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ существует единственное аффинное преобразование $\Psi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ n-мерного аффинного пространства такое, что*

$$\Phi(a_i) = b_i, \ \forall i = 0, \ldots, n$$

Доказательство. По условию $\{\overline{a_0a_1}, \ldots, \overline{a_0a_n}\}$ и $\{\overline{b_0b_1}, \ldots, \overline{b_0b_n}\}$ - базисы в ассоциированном с $\mathbb{A}$ векторном пространстве V. Значит, существует единственный линейный оператор $\varphi : V \to V$ такой, что

$$\varphi(\overline{a_0a_i}) = \overline{b_0b_i}, \ i = 0, \ldots, n$$

Тогда $\Phi(a_0 + v) = b_0 + \varphi(v)$ - требуемое преобразование. □

Ортогональные преобразования (движения, изометрии)

Определение. Пусть $(\mathbb{A}, V)$ - аффинное евклидово пространтсво, то есть V - евклидово пространство.
Аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ называется ортогональным или движением, если $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho(a, b), \text{ т.е } |\overline{\Phi(a), \Phi(b)}| = |\overline{ab}|$$

Упражнение. Доказать, что если преобразование $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ сохраняет расстояния между точками, то оно является аффинным, то есть $\forall a$:

$$\Phi(a + v) = \Phi(a) + \varphi(v)$$

где φ - линейный оператор.

На этом основании можно называть Φ изометрией

Замечание. Если Φ - движение, то $D\Phi = \varphi$ - ортогональный оператор:

$$|\overline{\Phi(a), \Phi(b)}| = |\overline{ab}|, \ \Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overline{ab})$$

значит,

$$|\varphi(\overline{ab})| = |\overline{ab}|, \ b - a + v, \ \forall v \in V$$

следовательно, φ сохраняет длины векторов, а отсюда и скалярное произведение.

Запишем Φ в координатах в ортонормированной системе координат.

$$Y = X_0 + A_\varphi \cdot X, \ A_\varphi^T = A_\varphi^{-1} \Longrightarrow \det A_\varphi = \pm 1$$

поскольку

$$A_\varphi^T \cdot A_\varphi = E \Longrightarrow (\det A_\varphi)^2 = 1 \Longrightarrow \det A_\varphi = \pm 1$$

Определение. Движение называется собственным, если $\det A_\varphi = 1$ и несобственным, если $\det A_\varphi = -1$

Замечание. (Уточнение к теореме о разложении: $\Phi = t_v \cdot \Psi$)
Для любой точки a и любого движения $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ с линейной частью φ существует $u \in V$ такой, что

$$\Phi = t_u \cdot \Psi$$

причем $\varphi(u) = u$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{A}$ - произвольная точка. Обозначим $v := \overline{a\Phi(a)}$. Пусть $\lambda = 1$ является собственным значением оператора φ, а также:

$$U = \{u \in V : \ \varphi(u) = u\} \neq \{0\}, \ W = U^{\perp}$$

тогда

$$V = U \oplus W$$

$v = u + w$, где $\varphi(u) = u, \ (w, u) = 0$. Определим $\Psi = t_{-u} \cdot \Phi$. Поищем для Ψ неподвижную точку в виде $b = a + \widetilde{w}, \ \widetilde{w} \in W$. Вычислим

$$\Psi(b) = (t_{-u}\Phi)(b)$$

$$\begin{aligned}\Psi(a + \widetilde{w}) &= t_{-u}(\Phi(a) + \varphi(\widetilde{w})) = t_{-u}(a + v + \varphi(\widetilde{w})) = \\ &= a + (v - u) + \varphi(\widetilde{w}) = a + w + \varphi(\widetilde{w}) = a + (w + \widetilde{w}) + (\varphi(\widetilde{w}) - \widetilde{w}) = \\ &= a + \widetilde{w} + w + (\varphi - \mathrm{Id})(\widetilde{w}) = a + \widetilde{w}\end{aligned}$$

Поледнее равенство выполнено $\iff (\varphi - \mathrm{Id})\widetilde{w} = -w, \ \widetilde{w} \in W$ - инвариантное подпространство для $\varphi - \mathrm{Id}$, но у $\varphi|_W$ нет собственного значения $\lambda = 1$ $\implies \ \exists \ (\varphi - \mathrm{Id})^{-1}$ и $\widetilde{w} = -(\varphi - \mathrm{Id})^{-1}(w) \implies \Psi(b) = b$. Если $\lambda = 1$ не является собственным значением, то рассуждения сохраняют силу с $U = 0$ и $W = V$, $t_u = \mathrm{Id}, \ \Psi = \Phi$ имеет неподвижную точку. $\square$

Наблюдение: Если $\lambda = 1$ - не собственное значение оператора φ, то Φ имеет неподвижную точку. Если же $\lambda = 1$ - собственное значение, u_0 - собственный вектор: $\varphi(u_0) = u_0$, то все точки прямой

$$l = b + \langle u_0 \rangle$$

неподвижны, а Ψ определяется своим действием в гиперплоскости, ортогональной этой прямой:

$$P = b + \langle u_0 \rangle^{\perp}$$

Классификация движений при $n = 1, 2, 3$

1. $n = 1$: Φ - либо параллельный перенос, либо центральная симметрия относительно неподвижной точки.

2. $n = 2$: Координатная запись одна из следующих:

(a) Параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b \end{cases}$$

(b) Композиция параллельного переноса вдоль оси и симметрии относительно оси:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \widetilde{x}' = x' + a, \\ \widetilde{y}' = -y' \end{cases}$$

(c) Поворот:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

Согласно общей теореме, существует неподвижная точка такая, что после переноса в эту точку остается только поворот.

3. $n = 3$: Четыре варианта в каноническом базисе для оператора φ:

(a) Параллельный перенос ($\lambda_{1,2,3} = 1$)

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c \end{cases}$$

(b) $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Можно заменить координаты $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$ и получить

$$\begin{cases} \xi' = \xi + a, \\ \eta' = \eta + b, \\ \zeta' = -\zeta \end{cases}$$

- композиция ортогональной симметрии относительно плоскости $\xi = \eta = 0$ и параллельного переноса на вектор $(a, b, 0)$, параллельно этой плоскости.

(c)

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \\ z' = z + c \end{cases}$$

Можно сделать замену координат $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$, чтобы осталось (упражнение):

$$\begin{cases} \xi' = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha, \\ \eta' = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha, \\ \zeta' = \zeta + c \end{cases}$$

- композиция поворота вокруг прямой, параллельной $(0, 0, 1)$, на угол α и переноса на вектор $(0, 0, c)$ вдоль этой прямой (винтовое движение).

(d)

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Можно сделать замену координат $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$, чтобы осталось:

$$\begin{cases} \xi' = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha, \\ \eta' = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha, \\ \zeta' = -\zeta + c \end{cases}$$

что является композицией симметрии относительно плоскости $\zeta = c$, повотора вокруг прямой, перпендикулярной этой плоскости, и параллельного переноса на вектор $(0, 0, c)$, который параллелен этой плоскости.

23 Тензоры

23.1 Основные определения и первоначальные конструкции

Если векторное пространство V над F конечномерно, то $(V^*)^* \simeq V$. Соглашение: векторное пространство V отождествляется с пространством линейных функций на V^*. Пока что будем считать, что поле F - произвольное.

Определение. Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0$. Тензор типа (p, q) - это полилинейная функция

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to F$$

p - ковариантная валентность тензора f, q - контрвариантная валентность тензора f, $p+q$ - ранг тензора f. Множество всех тензоров типа (p, q) обозначают

$$T_p^q(v) = T_p^q$$

По определению $T_0^0 := F$.

Линейные операции на T_p^q

1. Сложение:

$$f_1(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q) + f_2(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q) = \\ = (f_1 + f_2)(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q)$$

2. Умножение на $\lambda \in F$:

$$(\lambda f)(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q) = \lambda f(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q)$$

3. Произведение тензоров:
   Пусть $f_1 \in T_p^q(V)$, $f_2 \in T_r^s(V)$, определим функцию:

$$(f_1 \otimes f_2)(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+r}, u_1, \ldots, u_q, u_{q+1}, \ldots, u_{q+s}) = \\ = f_1(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q) \cdot f_2(v_{p+1}, \ldots, v_{p+r}, u_{q+1}, \ldots, u_{q+s})$$

Утверждение. *T_p^q с введенными операциями - векторное пространство над полем F.*

Утверждение.

1. *$f_1 \otimes f_2 \in T_{p+r}^{q+s}(V)$*
2. *Операция $\otimes$ ассоциативна*
3. *$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \otimes f_3 = \alpha_1(f_1 \otimes f_3) + \alpha_2(f_2 \otimes f_3)$*

Отождествление тензоров малых валентностей с известными объектами из линейной алгебры

Теорема.

1. $T_1^0(V) = V^*$

2. $T_0^1(V) = (V^*)^* \equiv V$

3. $T_2^0(V)$ - *билинейные функции*

4. $T_1^1(V) \equiv L(V)$ - *линейные операторы на* V.

Доказательство. Докажем, что тензор типа (1,1) - это линейный оператор. Пусть $f \in T_1^1(V)$, то есть $f = f(v, u)$, где $v \in V,\ u \in V^*$. Изоморфизм между V и V^{**} задавался правилом:

$$\forall v \in V : \varphi_v \text{ - линейная функция на } V^* : \forall u \in V^* \ \ \varphi_v(u) = u(v)$$

При фиксированном v $f(v, u)$ - линейная функция на V^*, а значит,

$$\exists y_v = \varphi^{-1}(f(v, u))$$

где $y_v \in V$. Соответствие $v \xrightarrow{\psi} y_v$ является линейным оператором на V, так как

$$f(v_1 + v_2, u) = u(y_{v_1+v_2})$$

и

$$f(v_1 + v_2, u) = f(v_1, u) + f(v_2, u) = u(y_{v_1}) + u(y_{v_2}) = u(y_{v_1} + y_{v_2})$$

Также очевидно, что

$$\psi(\lambda v) = \lambda\psi(v)$$

Обратно: если $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, то $f(v, u) := u(\varphi(v))$ - функция, линейная по v и u, то есть $f \in T_1^1(V)$. Значит, можем установить изоморфизм

$$T_1^1(V) \simeq L(V)$$

□

Правило Эйнштейна

Некоторые индексы пишутся снизу, а некоторые сверху: например, базисные векторы записываются как e_i $(= (e_1, ..., e_n))$, а координаты векторов имеют верхние индексы, а также $e^i (= (e^1, ..., e^n))$ - дуальный базис.

Также опускается знак суммирования. если один и тот же индекс повторяется сверху и снизу: $x = x^i e_i$ подразумевает $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Матрицы линейных операторов по этому правилу можно записывать так: $A_\varphi = (a^i_j)$, где i - номер строки, j - номер столбца. Также:

1. $\mathrm{tr} A_\varphi = a^i_i$ (след матрицы);
2. $Y = A_\varphi X \Longrightarrow y^i = a^i_j x^j$ (умножение матрицы на вектор);
3. $b(x, y) = b_{ij} x^i y^j$ (билинейная форма)

Построение базиса в пространстве $T^q_p(V)$

Для любых значений $\{i_1, \dots i_p, j_1, \dots, j_q\} \in \{1, \dots, n\}$ и чисел $p, q \in \mathbb{N}_0$ можно определить тензоры:

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \in T^q_p(V)$$

$$(e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q})(e_{k_1}, ..., e_{k_p}, e^{l_1}, ..., e^{l_q}) = \\ = e^{i_1}(e_{k_1}) \cdot ... \cdot e^{i_p}(e_{k_p}) \cdot e_{j_1}(e^{l_1}) \cdot ... \cdot e_{j_q}(e^{l_q}) = \delta^{i_1}_{k_1} \cdot ... \cdot \delta^{i_p}_{k_p} \cdot \delta^{l_1}_{j_1} \cdot ... \cdot \delta^{l_q}_{j_q} (*)$$

Теорема. *Тензоры вида $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p}\}$ образуют базис в пространстве $T^q_p(V)$, причем*

$$\dim{(T^q_p)}(V) = n^{p+q}$$

Доказательство. Пусть $f \in T^q_p(V)$. Вычислим $f(v_1, ..., v_p; u^1, ..., u^q)$:

$$v_i = v_i^{k_i} e_{k_i},\ i = 1, ..., p; u^j = u^j_{l_j} e^{l_j},\ j = 1, ..., q;$$

Тогда:

$$f(..., v_i^{k_i} e_{k_i}, ...;\ ..., u^j_{l_j} e^{l_j}, ...) = f(e_{k_1}, ..., e_{k_p}; e^{l_1}, ..., e^{l_q}) v_1^{k_1} ... v_p^{k_p} u^1_{l_1} ... u^q_{l_q} = \\ = f(e_{k_1}, ..., e_{k_p}; e^{l_1}, ..., e^{l_q}) e^{k_1} \otimes ... \otimes e^{k_p} \otimes e_{l_1} \otimes ... \otimes e_{l_q}(v_1, ..., v_p; u^1, ..., u^q)$$

в силу равенства $(*)$. Это значит, что

$$f = f(e_{k_1}, ..., e_{k_p}; e^{l_1}, ..., e^{l_q})(e^{k_1} \otimes ... \otimes e^{k_p} \otimes e_{l_1} \otimes ... \otimes e_{l_q})$$

Коэффициенты, очевидно, определены однозначно при фиксированном базисе $e_1, ..., e_n$, а значит, $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p}\}$ - базис в пространстве $T^q_p(V)$. $\square$

Определение. Матрицей тензора f называется матрица $A^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p}$ такая, что $a^{l_1, ..., l_q}_{k_1, ..., k_p} := f(e_{k_1}, ..., e_{k_p}; e^{l_1}, ..., e^{l_q})$.

Закон изменения матрицы координат тензора при замене базиса

Пусть $(e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)C$, $\begin{pmatrix} e'^1 \\ \vdots \\ e'^n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$. Тогда:

$$DC = D \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} (e_1, ..., e_n)C = \begin{pmatrix} e'^1 \\ \vdots \\ e'^n \end{pmatrix} (e'_1, ..., e'_n) = E \Rightarrow D = C^{-1}$$

Отсюда:

$$f = A^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} x^{i_1}_1 ... x^{i_p}_p u^1_{j_1} ... u^q_{j_q}$$

$$x^{i_k}_k = c^{i_k}_{i'_k} x'^{i'_k}_k; \quad u^l_{j_l} = d^{j'_l}_{j_l} u'^l_{j'_l}$$

Отсюда новые коэффициенты линейной формы:

$$(u'_1, ..., u'_n) = (u_1, ..., u_n)C \Longrightarrow (u_1, ..., u_n) = (u'_1, ..., u'_n)D$$

Итак, в новом базисе

$$f = A^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} c^{i_1}_{i'_1} ... c^{i_p}_{i'_p} d^{j'_1}_{j_1} ... d^{j'_q}_{j_q} x'^{i'_1}_1 ... x'^{i'_p}_p u'^1_{j'_1} ... u'^q_{j'_q}$$

Пупупу.

23.2 Свёртка тензора

Примеры. 1. $A = a^i_j \in T^1_1(V): \quad \mathrm{tr} A = a^i_i$
Из тензора a^i_j получили тензор $\mathrm{tr} A \in T^0_0$.

2. Действие оператора на вектор, т.е. умножение матрицы на столбец:

$$A = a^i_k, \; x = x^j \Longrightarrow A \otimes X = a^i_k x^j, \quad j := k \Longrightarrow a^i_k x^k$$

$A \in T^1_1, X \in T^1_0 \Longrightarrow A \otimes X \in T^2_1$ - из него получили тензор $\in T^1_0$.

3. Произведение матриц:

$$A = a^i_k, \; B = b^l_j \Longrightarrow A \otimes B = a^i_k b^l_j, \quad l := k \Longrightarrow a^i_k b^k_j = (AB)^i_j$$

Из тензора $\in T^2_2$ получили тензор T^1_1.

Определение. Пусть $f \in T^q_p(V)$, причём $p \geqslant 1, q \geqslant 1$, т.е. $f(x_1, ..., x_p, u^1, ..., u^q)$. Выберем пару индексов $s \in \{1, ..., p\}, r \in \{1, ..., q\}$ и рассмотрим функцию

$$\overline{f}(x_1, ..., \hat{x}_s, ..., x_p, u^1, ..., \hat{u}'^r, ..., u^q) := \sum_{k=1}^{n} f(x_1, ..., \underbrace{e_k}_{s}, ..., x_p, u^1, ..., \underbrace{e^k}_{r}, ..., u^q)$$

Ясно, что $\overline{f} \in T_{p-1}^{q-1}$.
Типичное обозначение: $\overline{f} = \mathrm{tr}_s^r(f)$
В матрицах: $\overline{A}_{\cdots}^{\cdots}$ - матрица тензора $\overline{f}$, тогда

$$\overline{A}_{i_1,\ldots,\hat{i}_s,\ldots i_p}^{j_1,\ldots,\hat{j}_r,\ldots,j_q} = A_{i_1,\ldots,k,\ldots i_p}^{j_1,\ldots,k,\ldots,j_q}$$

Если $p = q$, то тензор можно свернуть по всем парам индексов и получить инвариант (тензор $\in T_0^0$).
Можно сначала рассмотреть произведение тензоров, а после этого свернуть получившийся тензор.

Пример. Пусть $\mathcal{A}$ - конечномерная (как векторное пространство) алгебра с операциями $+, \lambda\cdot, \cdot,\ e_1, \ldots, e_n$ - линейный базис (базис в.п.).
Тогда $\forall i, j e_i e_j = a_{ij}^k e_k$, где a_{ij}^k - структурные константы - составляют структурный тензор типа (2,1).

Упражнение. Найдите структурный тензор для $M_n(F)$.

23.3 Симметрические, кососимметрические тензоры

Определение. Тензор $f \in T_p^0(V)$ - симметрический, если $\forall x_1, \ldots, x_p \in V, \sigma \in S_p$

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \ldots, x_p) \quad (1)$$

Аналогично, если $g \in T_0^q(V)$, то g - симметрический, если $\forall u^1, \ldots, u^q \in V^*, \sigma \in S_p$

$$f(u^{\sigma(1)}, \ldots, u^{\sigma(p)}) = f(u^1, \ldots, u^p) \quad (1')$$

Тензор $f \in T_p^0(V)$ ($\mathrm{char} F \neq 2$) - кососимметрический, если $\forall x_1, \ldots, x_p \in V, \sigma \in S_p$

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p) \quad (2)$$

Аналогично для $T_0^q(V)$. Обозначения:
T_p^+ - симметрические тензоры типа (p, 0);
$T^{q,-}$, либо $\Lambda^q(V^*)$ - кососимметрические тензоры типа (0, q)
Очевидно, для определения кососимметричности достаточно выполнения условия (2) только для транспозиций.

Очевидно, что $T_2^0 = T_2^+ \oplus T_2^-$

Упражнение. Доказать, что такого разложения для T_p^0 нет при $p > 2$.

Тензорная алгебра пространства V

Определим $T(V) = \bigoplus\limits_{q=0}^{\infty} T_0^q(V)$ - множество финитных последовательностей тензоров $(f_0, ..., f_s, 0, ...)$. $f_i \in T_0^i, f_j \in T_0^j \Longrightarrow f_i \otimes f_j \in T_0^{i+j}$.
Последовательности перемножаются по правилу перемножения многочленов (от одной переменной).

Симметризация и альтернирование

Далее $\mathrm{char} F = 0$.

1. Симметризация: для тензора $f \in T_p^0(V)$:

$$\mathrm{Sym}(f)(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$$

   Свойства:

   (a) $\mathrm{Sym} : T_p^0(V) \to T_p^0(V)$ - линейное отображение, $\mathrm{Im\ Sym} = T_p^+(V)$;

   (b) $\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(f)) = \mathrm{Sym}(f)$, т.е. $\mathrm{Sym}^2 = \mathrm{Sym}$.

2. Альтернирование: для тензора $f \in T_p^0(V)$:

$$\mathrm{Alt}(f)(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$$

   $\mathrm{Alt}(f)$ - кососимметрический тензор, обозначим $g = \mathrm{Alt}(f)$ - полилинейная функция $\in T_p^0(V)$.
   Тогда $g(x_1, ..., x_p)$; $\forall \pi \in S_p$ рассмотрим

$$g(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(p)}) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(\pi(1))}, ..., x_{\sigma(\pi(p))}) =$$
$$= \frac{1}{p!} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_p} \mathrm{sgn}(\tau) f(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(p)}) = \mathrm{sgn}(\pi) g(x_1, ..., x_p)$$

   Свойства:

   (a) $\mathrm{Alt} : T_p^0(V) \to T_p^0(V)$ - линейное отображение, $\mathrm{Im\ Alt} = \Lambda_p$

   (b) $\mathrm{Alt}^2 = \mathrm{Alt}$.

Внешнее произведение кососимметрических тензоров

Определение. Пусть $f \in T_p^0, g \in T_r^0$. Тогда $\mathrm{Alt}(f) \in \Lambda_p,\ \mathrm{Alt}(g) \in \Lambda_r$, и

$$f \wedge g := \mathrm{Alt}(f \otimes g) \in \Lambda_{p+r}$$

Замечание. Если f, g кососимметрические, то $f \otimes g$ не обязано быть кососимметрическим.

Из определения следует, что $\Lambda_p \wedge \Lambda_q \subseteq \Lambda_{p+q}$
(Вообще говоря, внешнее произведение существует для произвольных тензоров, но в данном курсе операции внешнего/внутреннего произведения рассматриваются исключительно на кососимметрических/симметрических тензорах соответственно)

Пусть $x_i = x_i^j e_j, i = 1, ..., q = n$. Вычислим $x_1 \wedge ... \wedge x_n$:

$$x_1 \wedge ... \wedge x_n = (x_1^{j_1} e_{j_1}) \wedge (x_2^{j_2} e_{j_2}) \wedge ... \wedge (x_n^{j_n} e_{j_n}) = x_1^{j_1} \cdot ... \cdot x_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_n})$$

Также $e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_n} = 0$, если $\exists j_k = j_l$. Остаются только слагаемые, в которых $\{j_1, ..., j_n\} = \{1, .., n\}$, поэтому

$$x_1^{j_1} \cdot ... \cdot x_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_n}) = (\mathrm{sgn}(j_1 ... j_n) x_1^{j_1} \cdot ... \cdot x_n^{j_n}) e_1 \wedge ... \wedge e_n = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} e_1 \wedge ... \wedge e_n$$

Очевидно, что существует только одномерное подпространство, содержащее $x_1 \wedge ... \wedge x_n \forall x_i \in V$, т.е. $\dim \Lambda^n(V) = n$.
Рассмотрим теперь $\Lambda^q(V)$. Оно содержит произведения $e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_q}$, причём они линейно независимы и любой тензор типа Λ^q линейно выражается через них $\implies \dim \Lambda^q(V) = C_n^q$.
Обозначим $\Lambda(V) = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} \Lambda_p = \{(f_0, f_1 ..., f_n) | f_i = \Lambda^i(V)\} \implies \dim \Lambda(V) = 2^n$.
$\Lambda(V)$ называется внешней алгеброй пространства V или алгеброй Грассмана.

Внутреннее произведение симметрических тензоров

Обозначим $S(V) = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} T_p^+(V)$.
В качестве операции умножения используем операцию внешнего произведения:

$$f \vee g = \mathrm{Sym}(f \otimes g)$$

Несложно показать, что данная операция ассоциативна, дистрибутивна со сложением и коммутативна.

Тензоры $e^{j_1} \vee ... \vee e^{j_p} \in T_p^+(V)$ (допускается равенство индексов). При этом

$$\forall u \in T_p^0(V) \;\; u = u_{i_1,...,i_p} e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p}$$

Если $u \in T_p^+$, то

$$u = \mathrm{Sym}(u) = u_{i_1,...,i_p} e^{i_1} \vee ... \vee e^{i_p} \Longrightarrow T_p^+ = \langle e^{i_1} \vee ... \vee e^{i_p} | i_1, ..., i_p \in \{1, ..., n\} \rangle$$

Также из линейной независимости $e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p}$ следует линейная независимость тензоров $e^{i_1} \vee ... \vee e^{i_p}$

Сопоставим $e^1 \leftrightarrow x_1, ..., e^n \leftrightarrow x_n$, где $x_1, ..., x_n$ - коммутирующие независимые переменные. Получаем биекцию $T_p^+(V) \leftrightarrow \{\sum a_{i_1,...,i_k} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n} | \sum\limits_{k=1}^{n} i_k = p\}$ (операция внутреннего произведения в этом случае сопоставляется операции умножения: $e^{i_1} \vee e^{i_2} \leftrightarrow x_{i_1} \cdot x_{i_2}$)

Вычислим размерность пространства однородных многочленов степени p. Для этого необходимо подсчитать количество выборок $i_1, ..., i_p$ с повторениями из $\{1, ..., n\}$ без учёта порядка. Для этого воспользуемся методом шаров и перегородок - пусть шарами являются числа 1,...,n, а перегородками - элементы выборки, причём i_k равен числу, соответствующему ближайшему слева шару от перегородки i_k. Тогда шаров n, перегородок p, причём первый элемент строки - не перегородка, т.е. индексы не принимают значение 0. Тогда всего способов C_{n-p+1}^p (выбираем p элементов как перегородки из $n - p + 1$ элемента) $\Longrightarrow \dim T_p^+ = C_{n-p+1}^p$

23.4 Тензоры на евклидовом пространстве

Скалярное произведение - тензор типа (2, 0): $(x, y) = g_{ij} x^i x^j$. g_{ij} - метрический тензор.

Далее полагаем базис ортонормированным.

Обозначим $G^{-1} = g^{kl}$. Тогда $G^{-1}G = E \Leftrightarrow g^{kl} g_{lj} = \delta_j^k$. g^{kl} называется контравариантным метрическим тензором.

Рассмотрим вектор x^i (типа $(0, 1)$) и свёртку $g_{ij} x^j = a_i$ - это линейная функция, т.е. тензор типа $(1, 0)$. В результате верхний индекс переместился вниз:

$$V_i \longrightarrow V_i^* : \quad x_i \rightarrowtail g_{ij} x^i = a_j$$

- изоморфизм между V и V^*. Аналогично можно рассмотреть свёртку $g^{ij} a_j = y^i$ - индекс поднимается наверх. Эти операции, очевидно, взаимно обратны: $g_{ij}(g^{ij} a_j) = (g_{ij} g^{ij}) a_j = a_j$.

Общий случай: пусть $q \geqslant 1$, $f \in T_p^q(V)$ - тензор, $A_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}$ - его матрица. Рассмотрим свёртку

$$g_{ij} A_{i_1,\ldots,i_s,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,\overbrace{j}^{k},\ldots,j_q} = \tilde{A}_{i_1,\ldots,i_s,,\ldots,i_p,i}^{j_1,\ldots,j_{k-1},j_{k+1},\ldots,,j_q} \in T_{p+1}^{q-1}$$

- операция опускания индекса тензора. Аналогично, свёртка

$$g^{ij} A_{i_1,\ldots,\underbrace{i}_{s},\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_k,\ldots,j_q} = \tilde{\tilde{A}}_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_{k-1},j_{k+1},\ldots,,j_q,j} \in T_{p-1}^{q+1}$$

- операция поднятия индекса тензора (для $p \geqslant 1$).