Lomonosov Moscow State University

Механико-математический факультет

Линейная алгебра и геометрия, 2 семестр, 2 поток

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 28 февраля 2025 г.

Содержание

1 Векторное пространство **2**
1.1 Изменение координат вектора при замене базиса 4

2 Векторные подпространства **4**
2.1 Примеры 4
2.2 Два основных способа задания подпространства в V 5

3 Пересечение и сумма подпространств **8**

4 Прямая сумма подпространств и пространств **9**

5 Линейные отображения и функции **13**

6 Линейные функции **14**

7 Линейные отображения и их матрицы **17**

8 Матрицы линейного отображения **18**

1 Векторное пространство

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F, если заданы операции $"+"$ и $"\cdot"$: $V \times V \to V$, $F \times V \to V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \ : \ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists\, \vec{0} \in V : \ \forall v \in V \ : \ v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \ \ \exists - v \in V$: $v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V \ : \ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V \ : \ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V \ \exists\, 1 \in F \ : \ 1 \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V \ : \ (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V \ : \ \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? (*Примечание: скоро тут будет разгадка*)

Определение. $U \subset V$ - *векторное подпространство* пространства V, если оно само является пространством относительно тех же операций в V.

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $\forall U \neq \emptyset$
2. $\forall u_1, u_2 \in U \ : \ u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \ \lambda \in F \ : \ \lambda u \in U$

Определение. Векторы $v_1, ..., v_n \in V$ называются линойно независимыми, если $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n$ (не все равные 0) $:$ $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$

Утверждение. *Определение 3* $\Longleftrightarrow$ *(*$m \geq 2$*) хотя бы один вектор из векторов* v_i *выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение. *Упорядоченный набор векторов* $e = (e_1, ..., e_n), e_k \in V$, если это максимальный ЛНЗ набор веторов из V.

Утверждение. *e - базис в* $V \Longleftrightarrow$

1. $e_1, ..., e_n$ - *ЛНЗ*

2. $\forall x \in V \ \exists \ x_1, ..., x_n \in F \ : \ x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

Следствие. *Разложение любого вектора в базисе единственно.*

Доказательство. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) e_i$
Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем: $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда $x = eX_e = e_1 x_1 + ... + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

Теорема. *Если в V $\exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.*

Доказательство.
Если $\exists$ базис $e'_1, ..., e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ $e'_1, ..., e'_m$ - ЛЗ, т.е. не базис.
Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) $e_1, ..., e_n$ - ЛЗ $\Longrightarrow$ не базис. □

Свойства. *матриц перехода*

1. $\det C \neq 0$

2. $C_{e' \to e} = (C_{e \to e'})^{-1}$

3. $C_{e'' \to e} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, ..., e'_n \Longrightarrow rkC = n \Longrightarrow \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.
По определению:

$$e' = (e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n) C_{e \to e'}, \text{ т.е. } e' = eC_{e \to e'}$$

$$\boxed{e' = eC_{e \to e'}} \tag{2}$$

С другой стороны

$$C = e' C_{e' \to e} = eC_{e \to e'} C_{e' \to e} \Longrightarrow C_{e \to e'} C_{e' \to e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \to e'} = (C_{e' \to e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e'C_{e'\to e''} = e(C_{e\to e'}C_{e'\to e''}) = eC_{e\to e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e\to e''} = C_{e\to e'}C_{e'\to e''}$

$\square$

Алгоритм. *Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном?*
$e' = eC_{e\to e'}$ *можно рассмотреть как матричное уравнение:*

$$(e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow})C = ({e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow})$$

$$[e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow} \mid {e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow}] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e\to e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. *Формула изменения координат вектора при замене базиса:*

$$\boxed{X_e = C_{e\to e'}X_{e'}} \tag{3}$$

Доказательство.

$$\forall x \in V \ : \ x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e\to e'}X_{e'}$$

$$\Longrightarrow X_e = C_{e\to e'}X_{e'}$$

$\square$

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

1. Геометрические векторы

2. F^n - пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot\lambda)$

   Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой невырожденной матрицы порядка n)

   Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из **(2)**)

Упражнение. Пусть $|F| = q,\ \dim_F V = n \Longrightarrow |V| = q^n$
$\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij-ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \to \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и λF
Оно бесконечномерно, если X бесконечно.
Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ
Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + ... + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y_1' + ... + C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 y_1' + ... + \lambda_n C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0 \Longrightarrow C_1 = ... = C_n = 0$$

4. $F[t]$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0 :\ 1, t, t^2, ...$ - линейно независимы.
$F[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \mid a_k \in F,\ k = 0, ..., n;\ n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, ..., t^n$
Тейлоровский базис: $1, t - t_0, ..., (t - t_0)^n;\ \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq 0,\ \ V = 2^{\Omega}$ с операциями вместо сложения:

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\ \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2,\ 0 \cdot A = \emptyset,\ 1 \cdot A = A$$

Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \{\sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, ..., a_m \rangle = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F\} = U$$

Утверждение. $\langle a_1, ..., a_m\rangle \subseteq V \Longrightarrow \dim\langle a_1, ..., a_m\rangle = rk\{a_1, ..., a_m\}$

Доказательство.

$$\mu \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu\lambda_i) a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U$$

Если $r = rk\langle a_1, ..., a_m\rangle$, то $a_{j1}, ..., a_{jr}$ - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \Longrightarrow \{a_{j1}, ..., a_{jr}\} - \text{базис } U$$

□

Алгоритм. *Алгоритм вычисления* $\dim\langle a_1, ..., a_m\rangle$ *и базиса, если известны координаты этих векторов:*

1) *Составить матрицу:*

$$(a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow}) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{j_1 \cdots j_r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

2) *Столбцы с номерами* $j_1, ..., j_r$ *- базис в* U*, разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы*

2. ($\dim V = n$, известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^{n} X_i e_i = eX, \ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x = eX \mid AX = 0\} - \text{ задание с помощью ОСЛУ}$$

Утверждение. W *- подпространство в* V*,* $\dim W = n - rkA$*, базис - любая ФСР (это переход от* ***2.*** *к* ***1.*** *способу задания подпространства).*

Теорема. *Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве* V *можно задать с помощью ОСЛУ.*

Доказательство. Два способа:

1) Вектор x (со столбцами координат $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, ..., a_m \rangle = U$$

$$\Longleftrightarrow \exists\ \alpha_1, ..., \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^{m} \alpha_1 a_i^{\uparrow} = X$$

т.е. СЛУ с $\widetilde{A} = (a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow} \mid \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix})$ совместна $\Longleftrightarrow$ после алгоритма Гаусса:

$$\widetilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} K & \sum\limits_j C_{kj} X_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ & \sum C_{nj} X_j = 0 \end{array}\right)$$

$\Big(K\Big)$ имеет ступенчатый вид, а $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ \sum C_{nj} X_j = 0 \end{pmatrix}$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\underset{(r \times n)}{C} X = 0,\ rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \Big(E_r \ \Big|\ D\Big) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1} x_{1,r+1} + ... + d_{1n} x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1} x_{k,r+1} + ... + d_{kn} x_n) \end{cases} \qquad k = 1, ..., r$$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \left(\begin{array}{c} -D \\ \hline E_{n-r} \end{array}\right)$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов $a_1, ..., a_r$:

$$\begin{pmatrix} a_1^{\rightarrow} \\ \vdots \\ a_r^{\rightarrow} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} \Big(M \ \Big|\ E_r\Big) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \left(\begin{array}{c} M^T \\ \hline E_r \end{array}\right) = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = \Big(E_{n-r} \ \Big|\ -M^T\Big)$
Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность $n - (n - r) = r$

□

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

1. *Если U_i $(i \in I)$ - подпространство V, то $W = \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ - тоже подпространство в V*

2. *Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств. (РИСУНОК)*

Доказательство. 1. $\overline{Q} \in W$, т.к. $\overline{Q} \in U_i,\ \forall i \in I$.

Если $x, y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$

Если $x \in U_i,\ \forall i \in I,\ \forall \lambda \in F \Longrightarrow \lambda x \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ $\square$

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2, то оно содержит и сумму $u_1 + u_2$, если $u_i \in U_i,\ i = 1, 2$

Замечание. Суммой подпространств $U_1, ..., U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + ... + U_m = \{x_1 + ... + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. $U_1 + ... + U_m$ *- подпространство в V*

Теорема. *(Формула Грассмана)*
Если U_1, U_2 - подпространства в V, $\dim U_1 < \infty$, $\dim U_2 < \infty$, то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i,\ \dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем $c_1, ..., c_s$ - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами $a_1, ..., a_{n_1 - s}$ и до базиса в U_2 векторами $b_1, ..., b_{n_2 - s}$.
Тогда векторы $c_1, ..., c_s, a_1, ..., a_{n_1 - s}, b_1, ..., b_{n_2 - s}$ - образуют базис в $U_1 + U_2$

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = \left(\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i\right) + \left(\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i\right)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1 - s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2 - s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^{s} \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s}\alpha_i a_i = -\sum_{k=1}^{n_2-s}\beta_k b_k - \sum_{j=1}^{s}\gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\} \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n_1-s}\alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow a_i$ - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i: \ \alpha_i = 0$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n_2-s}\beta_k b_k + \sum\limits_{j=1}^{s}\gamma_j c_j = 0 \Longrightarrow \{b_k, \gamma_j\}$ - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall k, j: \ \beta_k = \gamma_j = 0$

Алгоритм. *Пусть* $U_1 = \langle a_1, ..., a_{n_1}\rangle, \ U_2 = \langle b_1, ..., b_{n_2}\rangle$ *известны координаты. Составим матрицу:*

$$\begin{pmatrix} A & \Big| & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} & \Big| & b_1^{\uparrow}, ..., b_{n_2}^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$

$$\begin{pmatrix} A & \Big| & B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \begin{pmatrix} a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} & \Big| & b_1^{\uparrow}, ..., b_m, b_{m+1}, ..., b_{n_2-m}^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

Можно записать:

$$b_i = \sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{m}\beta_{k_j} b_k \Longrightarrow b_j - \sum_{k=1}^{m}\beta_{k_j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

$\square$

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение. Сумма $U_1 + ... + U_m$ подпространств $U_i \subset V, \ 1 \le i \le m$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + ... + U_m$ представим в виде:
$u = u_1 + ... + u_m$ $(u_i \in U_i)$ единственным образом

Пусть $m = 2, V$ - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. $U = U_1 + U_2$ *- прямая сумма*

2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

4. *Базис* $U_1 + U_2$ *- объединение базисов слогаемых*

Доказательство.

1. → 2. Допустим $u \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow v = v + 0 = 0 + v \Longrightarrow v = 0$

2. → 3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{0}$$

3. → 4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \Longrightarrow \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$\Longrightarrow \text{все } a_i \text{ и } b_i \text{ равны нулю}$$

4. → 1. $\forall u \in U_1 + U_2:$

$$u = (\sum_i \alpha_i a_i) + (\sum_j \beta_j b_j)$$

- разложение по базису единственно

□

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. $U = U_1 + U_2$ *- прямая сумма*
2. $\forall i,\ 1 \leq i \leq m,\ U_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} U_j) = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. *Базис* $U_1 + U_2$ *- объединение базисов слогаемых*

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\},\ i \neq j$ недостаточно для прямой суммы: (РИСУНОК)
v_1, v_2, v_3 - ЛЗ $\Longrightarrow$ представление не единственным образом

Лемма. *Любой ЛНЗ набор векторов $a_1, ..., a_m$ в n-мерном векторном пространстве V $(m < n)$ можно дополнить до базиса в V.*

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, ..., e_n \Longrightarrow rk\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(a_1^{\uparrow} \ \cdots a_m^{\uparrow} \ \middle| \ E_n\right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left(a_1^{\uparrow} \ \cdots a_m^{\uparrow} \ \middle| \ e_{i,1}^{\uparrow} \ \middle| \ e_{j,n-m}^{\uparrow} \ \cdots\right)$$

Тогда к векторам $a_1, ..., a_m$ надо добавить $e_{j,1}, ..., e_{j,n-m}$

$\square$

Определение. Если U - подпр-во в V $(0 \neq U \neq V)$ и $\exists\, W \subset V \ : \ V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U.

Следствие. *Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве $\exists$ прямые дополнения.*

Доказательство. $U = \langle a_1, ..., a_m \rangle \Longrightarrow \exists\ a_{m+1}, ..., a_n \ : \ \langle a_1, ..., a_n \rangle$ - базис в V, тогда $W = \langle a_{m+1}, ..., a_n \rangle$ $\square$

Определение. Пусть $V_1, ..., V_k$ $(k \geq 2)$ - векторы пространства над одним и тем же полем $\mathbb{F}$, тогда:

$$V = V_1 \times ... \times V_k = \{(v_1, ..., v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{ внешняя прямая сумма}$$

Обозначение: $\underset{\circ}{\oplus}$

Замечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \underset{\circ}{\oplus} ... \underset{\circ}{\oplus} V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V_i' = \{0, ..., .v_i, ..., 0\} - \text{ подпространство в } V$$

Запись $v_1, ..., v_k \overset{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, ..., 0) + (0, v_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, 0, ..., v_k)$ показывает, что $V = V_1' \oplus ... \oplus V_k'$ - единственно.
В частности $\dim(V_1) \underset{\circ}{\oplus} ... \underset{\circ}{\oplus} V_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim V_i$

Фактор пространства

Определение. Пусть $U \subset V$ - подпространство. Скажем, что $V_1 \sim V_2$ по модулю U, если $v_1 - v_2 \in U$ $(v_1, v_2 \in V)$. Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U, где v - представитель
$* \ V/U = \{\underbrace{v + U}_{\overline{v}} \mid u \in U\}$

Утверждение. $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

Доказательство.

$\underline{\Rightarrow}$: Если $v_1 \sim v_2$, то $\exists\ u_0 \in V : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Longrightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0;\ \forall u \in U\ v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Longrightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

$\underline{\Leftarrow}$: Если $v_1 + U = v_2 + U$, то $\exists u_1 \in U :\ v_1 = v_2 + u_1 \Longrightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

Определение. $v + U$ - смежный класс элемента v по U : $\bar{v} := v + U$

Определение. $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ - факторпространство V по U.

Определение. Структура векторного пространства на V/U:

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda\overline{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

Определение. $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V
Обозначается: $\mathrm{Codim}_V U$

Пример. Пусть $V = C[a,b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0,\ x_0 \in [a,b]\} \Longrightarrow \mathrm{Codim}_V U = 1$$

Теорема.

1. *Данные операции задают на V/U векторное пр-во;*
2. *Если $\dim V < \infty$, то $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$*

Доказательство.

1) Проверим корректность определений.
Если $v_1' = v_1 + \overline{\overline{U_1}},\ v_2' = v_2 + \overline{U_2},\ \overline{\overline{u_i}} \in U,\ i = 1,2$:

$$v_1' + v_2' = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v_1' + v_2' \sim v_1 + v_2,\ \text{т.е. } v_1' + v_2' + \underline{\underline{U}} = v_1 + v_2 + \underline{\underline{U}}$$
$$\overline{v_1'} + \overline{v_2'} = \overline{v_1' + v_2'} = \overline{v_1 + v_2}$$

т.е. определение не зависит от выбора элемента в классе.
Если

$$v' = v + u,\ u \in U \Longrightarrow \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \Longrightarrow \lambda v \sim \lambda v';\ \overline{0} \in U;\ -\overline{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполенены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис $a_1, ..., a_m$ в U
Если $U = V$, т.е. $m = n = \dim V$, то $V \backslash U = \{0\} \Longrightarrow \dim(V \backslash U) = n - n = 0$
Пусть $m < n$, можно дополнить базис U до базиса $a_{m+1}, ..., a_n$ в V, тогда классы $\overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ образуют базис в $V \setminus U$

$$\forall v \in V\ :\ v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j$$

$$\overline{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{a_j}$$

$\Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ порождают $V \setminus U$
Проверим ЛНЗ:

$$\exists\ \lambda_j \in \mathbb{F}\ :\ \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{a_j} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j \in U$$

$$\exists\ \mu_i \in \mathbb{F}\ :\ \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i = 0$$

Т.к. $\{a_1, ..., a_n\}$ ЛНЗ, то $\lambda_j = 0,\ \mu_i = 0,\ \forall i, j \Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ - ЛНЗ

□

5 Линейные отображения и функции

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется линейным отображением V_1 в V_2, если:

1. $\forall v_1, v_1' \in V_1\ :\ \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1')$;
2. $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F}\ :\ \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$;

Из курса I семестра известно, что $\varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$
Обозначается: $\mathrm{Ker}(\varphi)$ - ядро φ

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\},\ \mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$$

6 Линейные функции

Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{F}$

Определение. Отображение $f:\ V \to \mathbb{F}$ - линейная функция со значениями в $\mathbb{F}$, если:

1. $\forall v_1,\ v_2 \in V:\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) = f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \forall \lambda:\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается: $V^* = \{f:\ V \to \mathbb{F}\}$ - множество линейных функций на V

Замечание. $V_2 = \mathbb{F},\ \dim V_2 = 1$

Лемма. *Если $f \not\equiv 0$, то Ker(f) имеет в V коразмерность = 1*

Доказательство. Пусть $\exists v_1 \in V,\ f(v_1) \neq 0$. Пусть $v \in V$, либо $v \in \mathrm{Ker}(f)$, либо $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Longrightarrow f(\frac{v_1}{\beta}) = 1,\ f(\alpha - \frac{v_1}{\beta}) = \alpha$$

Рассмотрим выражение $r - \frac{\alpha}{\beta}v_1$:

$$f(r - \frac{\alpha}{\beta}v_1) = f(v) - f(\frac{\alpha}{\beta}v_1) = \alpha - \alpha = 0$$

$\Longrightarrow r - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ и $v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u,\ u \in \mathrm{Ker}(f)$ $\square$

Замечание. $\forall x \in V:\ (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Лемма. *Множество V^* с введенными операциями - векторное пространство.*

Определение. V^* - векторное пространство, сопряженное с V (двойственное для V)
Зафиксируем базис $e = (e_1, ..., e_n)$ в V и линейную функцию $f : V \to F$

$$\forall x \in V:\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ \text{где } a_i = f(e_i)$$

Удобно записывать это так: $f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Определение. Координатные функции - функции вида:

$$f_i: \ f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение: $e^i = f_i$

В частности: $f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$

Утверждение. *Функции e^i - базис в V^**

Доказательство.

Докажем ЛНЗ: Пусть $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n: \ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e^i \equiv 0$. Подставим e_j:

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех $e_1, ..., e_n$ получим, что $\forall i = 1, ..., n: \ \lambda_i = 0$. Разложим произвольную функцию $f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i e^i)(x) \ \ \forall x \in V \ f \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i e^i$$

$\square$

Следствие. *Если $\dim V < \infty$, то $V^* \cong V$, т.к. $\dim V^* = \dim V$.*

Определение. Базис $e^* = (e^1, ..., e^n)$ называется базисом V^*, сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису e в V.

Посмотрим, как изменится строка координат функции $f \in V^*$ при замене базиса e в V.

Пусть $e' = (e'_1, ..., e'_n) = e \cdot C_{e \to e'}$ - новый базис в V. Как известно, $X = C_{e \to e'} \cdot X'$. Отсюда если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, то

$$\forall f \in V: \ f(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i$$

$$f(x) = (a_1, ..., a_n)X = (a_1, ..., a_n)(C_{e \to e'} X') = ((a_1, ..., a_n)C_{e \to e'})X'$$

$$((a_1, ..., a_n)C_{e \to e'})X' = ((a'_1, ..., a'_n))X' \ \ \forall X' \in \mathbb{F}^n$$

Беря по очереди $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, покоординатно получим равенство

$$(a_1, ..., a_n)C_{e \to e'} = (a'_1, ..., a'_n)$$

Пример. Возьмём $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$
Выберем в нём базис $\{1, (t-t_0), ..., (t-t_0)^n\} \Longrightarrow p(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}(t-t_0)^i$
Если $e_i = (t-t_0)^i,\ 0 \leqslant i \leqslant n$, то $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

Определение. Вторым сопряжённым пространством к V (обозначается V^{**}) называется пространство, сопряженное к V^* - пространство линейных функций от линейных функций над V.

$$V^{**} = \{\varphi :\ V^* \to \mathbb{F}\}$$

Теорема. *Если $\dim V < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).*

Доказательство. Рассмотрим отображение:

$$\varphi : V \to V^{**} :\ \forall x \in V :\ \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**}$$

$$\Longrightarrow \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

- $\forall f \in V^*,\ \varphi_{x_1+x_2}(f) = f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Longrightarrow \varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$;
- $\forall f \in V^*,\ \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\varphi_x(f) \Longrightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;

Чтобы проверить, что φ - изоморфизм, достаточно проверить, что $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ (так как $\dim V^{**} = \dim V$).
Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, т.е. $\varphi_x \equiv 0$. Значит, $\forall f \in V^* :\ f(x) = 0$
Если $x \neq 0$, то его можно дополнить до базиса: $x, e_2, ..., e_n$, где $n = \dim V$.
Тогда $e^1(x) = 1 \neq 0$ - противоречие с условием $\forall f \in V^* :\ f(x) = 0$. □

Задача. Доказать, что $a_1, ..., a_n \in V$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ лин. ф-ции $f^1, ..., f^n \in V^*$ такие, что $\det(f^i(a_j)) \neq 0$.

Замечание. Если $dimV = \infty$, то $V^* \ncong V$ в общем случае.

Пример. $V = \mathbb{Q}[t]$ - V счётно. Зафиксируем число $t \in \mathbb{Q}$ и рассмотрим произвольную $f \in V^*$:
$f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, ..., b_k, ...) \Rightarrow V^*$ континуально.
Отсюда мощность V^* больше мощности V, и они, очевидно, не изоморфны.

7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства, $\varphi : V_1 \to V_2$ - линейное отображение.

Пример.
$V_1 = D(a,b)$ - множество дифиренцированных функций над полем $\mathbb{R}$
$V_2 = F(a,b)$ - функции на (a,b) над полем $\mathbb{R}$
$\varphi(f) = \frac{df}{dt},\ \varphi:\ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\ \mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$
Частный случай: $V_1 = \mathbb{R}[t]_n,\ V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$
$\varphi(f) = f'$ - линейное отображение (взяли производную)
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$. Является ли φ сюрьекцией?
$\forall p(t) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}t^{n-1}$
$f'(t) = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + ... + a_{n-1}\frac{t^n}{n} \Longrightarrow \varphi$ - сюрьекция

Теорема. *Если* $\varphi:\ V_1 \to V_2$ *- линейное отображение,* $\dim V_1 < \infty$*, то*

$$\dim(Im\,\varphi) = \dim V_1 - \dim(Ker\,\varphi)$$

Доказательство. Пусть $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = m\ (m \leq n = \dim V_1)$
Выберем $c_1, ..., c_m$ - базис в $\mathrm{Im}\,\varphi \Longrightarrow \exists\ a_1, ..., a_m \in V_1:\ \varphi(a_i) = c_i,\ i = \overline{1,m}$
Так же выберем базис $b_1, ..., b_k$ в $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (если $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, то $\mathrm{Im}\,\varphi \cong V_1$)
Покажем, что $\{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_k\}$ - базис в V_1:
Пусть $\alpha_i,\ \beta_j:\ \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j b_j = 0_{V_1}$, тогда:

$$\varphi(\sum_i + \sum_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(a_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \beta_j \varphi(b_j)}_{0_{V_2}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i = \varphi(0_{V_1}) = 0_{V_2}$$

Т.к. c_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i = \overline{1,m}:\ \alpha_i = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{k} b_j \beta_j = 0$
Т.к. b_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall j = \overline{1,k}:\ \beta_j = 0$

$$\forall v \in V_1:\ \varphi(v) = \sum_{l=1}^{m} \gamma_l c_l = \varphi(\sum_{l=1}^{m} \gamma_l a_l) \Longrightarrow v - \sum_{l=1}^{m} \gamma_l a_l \in \mathrm{Ker}\,\varphi$$

$$\Longrightarrow \exists \beta_j \in \mathbb{F}:\ v = \sum_{l=1}^{m} \gamma_l a_l + \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j$$

□

8 Матрицы линейного отображения

Пусть: $\mathcal{E}\{e_1, ..., e_n\}$ - базис в V_1; $\mathcal{F}\{f_1, ..., f_m\}$ - базис в V_2

$$\forall x \in V_1 : \; x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Longrightarrow \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) =$$

$$= \{\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} f_i$$

Определение. Назовем $A = (a_{ij}) = A_{\varphi,e,f}$ - матрицей φ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.
Обозначается: $Y_f = A_{\varphi,e,f} \cdot X_e$ (где $Y = \varphi(x)$).