



Механико-математический факультет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, 2 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 21 февраля 2025 г.

Содержание

1	Векторное пространство	2
1.1	Изменение координат вектора при замене базиса	4
2	Векторные подпространства	4
2.1	Примеры	4
2.2	Два основных способа задания подпространства в V	5
3	Пересечение и сумма подпространств	8
4	Прямая сумма подпространств и пространств	9
5	Линейные отображения и функции	13
6	Линейные функции	14
7	Линейные отображения и их матрицы	16

1 Векторное пространство

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F , если заданы операции " + " и " · " : $V \times V \rightarrow V$, $F \times V \rightarrow V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V : v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V \exists 1 \in F : 1 \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? (*Примечание: скоро тут будет разгадка*)

Определение. $U \subset V$ - *векторное подпространство* пространства V , если оно само является пространством относительно тех же операций в V .

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $\forall U \neq \emptyset$
2. $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \lambda \in F : \lambda u \in U$

Определение. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно независимыми*, если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ (не все равные 0) : $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$

Утверждение. *Определение 3 $\iff (n \geq 2)$ хотя бы один вектор из векторов v_i выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение. *Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, \dots, e_n), e_k \in V$, если это максимальный ЛНЗ набор векторов из V .*

Утверждение. *e - базис в $V \iff$*

1. e_1, \dots, e_n - ЛНЗ

2. $\forall x \in V \exists x_1, \dots, x_n \in F : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Следствие. Разложение любого вектора в базисе единственно.

Доказательство. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) e_i$

Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем: $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда $x = eX_e = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \quad (1)$$

Теорема. Если в $V \exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.

Доказательство.

Если \exists базис $e'_1, \dots, e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ e'_1, \dots, e'_m - ЛЗ, т.е. не базис.

Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) e_1, \dots, e_n - ЛЗ \implies не базис. □

Свойства. матриц перехода

1. $\det C \neq 0$

2. $C_{e' \rightarrow e} = (C_{e \rightarrow e'})^{-1}$

3. $C_{e'' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, \dots, e'_n \implies rkC = n \implies \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.

По определению:

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C_{e \rightarrow e'}, \text{ т.е. } e' = e C_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{e' = e C_{e \rightarrow e'}} \quad (2)$$

С другой стороны

$$C = e' C_{e' \rightarrow e} = e C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} \implies C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \rightarrow e'} = (C_{e' \rightarrow e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e' C_{e' \rightarrow e''} = e(C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}) = e C_{e \rightarrow e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}$

□

Алгоритм. Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном?

$e' = e C_{e \rightarrow e'}$ можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow) C = (e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow)$$

$$[e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow \mid e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \rightarrow e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$\boxed{X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}} \quad (3)$$

Доказательство.

$$\forall x \in V : x = e X_e = e' X_{e'} = e C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

$$\implies X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

□

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

1. Геометрические векторы
2. F^n - пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot \lambda)$

Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой

невырожденной матрицы порядка n)

Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из (2))

Упражнение. Пусть $|F| = q$, $\dim_F V = n \implies |V| = q^n$
 $\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij -ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и λF

Оно бесконечномерно, если X бесконечно.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ

Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y'_1 + \dots + C_n y'_n \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 y'_1 + \dots + \lambda_n C_n y'_n \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \implies C_1 = \dots = C_n = 0$$

4. $F[t]$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0 : 1, t, t^2, \dots$ - линейно независимы.
 $F[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \mid a_k \in F, k = 0, \dots, n; n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, \dots, t^n$
 Тейлоровский базис: $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n; \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq \emptyset, V = 2^\Omega$ с операциями вместо сложения:

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2, 0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$$

Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над \mathbb{Z}_2

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F \right\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F \right\} = U$$

Утверждение. $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \subseteq V \implies \dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle = rk\{a_1, \dots, a_m\}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu \lambda_i) a_i \\ \sum_{i=1}^m \mu_i a_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U \end{aligned}$$

Если $r = rk\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, то a_{j_1}, \dots, a_{j_r} - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \implies \{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\} - \text{базис } U$$

□

Алгоритм. Алгоритм вычисления $\dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и базиса, если известны координаты этих векторов:

1) Составить матрицу:

$$(a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\begin{array}{ccc|c} & \overbrace{j_1 \dots j_r} & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

2) Столбцы с номерами j_1, \dots, j_r - базис в U , разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы

2. ($\dim V = n$, известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^n X_i e_i = eX, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x = eX \mid AX = 0\} - \text{задание с помощью ОСЛУ}$$

Утверждение. W - подпространство в V , $\dim W = n - rkA$, базис - любая ФСР (это переход от 2. к 1. способу задания подпространства).

Теорема. Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве V можно задать с помощью ОСЛУ.

Доказательство. Два способа:

1) Вектор x (со столбцами координат $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, \dots, a_m \rangle = U$$

$$\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i^\uparrow = X$$

т.е. СЛУ с $\tilde{A} = (a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow \mid \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix})$ совместна \iff после алгоритма Гаусса:

$$\tilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} K & \sum_j C_{kj} X_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ & \sum C_{nj} X_j = 0 \end{array} \right)$$

(K) имеет ступенчатый вид, а $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ \sum C_{nj} X_j = 0 \end{pmatrix}$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\underset{(r \times n)}{C} X = 0, rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (E_r \mid D) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + \dots + d_{kn}x_n) \end{cases} \quad k = 1, \dots, r$$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов a_1, \dots, a_r :

$$\begin{pmatrix} a_1^\rightarrow \\ \vdots \\ a_r^\rightarrow \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} (M \mid E_r) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = (E_{n-r} \mid -M^T)$
Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность $n - (n - r) = r$

□

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

1. Если U_i ($i \in I$) - подпространство V , то $W = \bigcap_{i \in I} U_i$ - тоже подпространство в V
2. Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств. (РИСУНОК)

Доказательство. 1. $\overline{Q} \in W$, т.к. $\overline{Q} \in U_i, \forall i \in I$.

Если $x, y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Если $x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \implies \lambda x \in U_i, \forall i \in I \implies x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ □

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2 , то оно содержит и сумму $u_1 + u_2$, если $u_i \in U_i, i = 1, 2$

Замечание. Суммой подпространств $U_1, \dots, U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + \dots + U_m = \{x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. $U_1 + \dots + U_m$ - подпространство в V

Теорема. (Формула Грассмана)

Если U_1, U_2 - подпространства в V , $\dim U_1 < \infty, \dim U_2 < \infty$, то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i, \dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем c_1, \dots, c_s - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами a_1, \dots, a_{n_1-s} и до базиса в U_2 векторами b_1, \dots, b_{n_2-s} .

Тогда векторы $c_1, \dots, c_s, a_1, \dots, a_{n_1-s}, b_1, \dots, b_{n_2-s}$ - образуют базис в $U_1 + U_2$

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = (\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i) + (\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = - \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\} \implies \sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \implies a_i$ - ЛНЗ

$$\implies \forall i : \alpha_i = 0$$

Тогда $\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0 \implies \{b_k, \gamma_j\}$ - ЛНЗ $\implies \forall k, j : \beta_k = \gamma_j = 0$

Алгоритм. Пусть $U_1 = \langle a_1, \dots, a_{n_1} \rangle$, $U_2 = \langle b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$ известны координаты. Составим матрицу:

$$\left(A \mid B \right) = \left(a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_{n_2}^\uparrow \right)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$$

$$\left(A \mid B \right) \xrightarrow[\text{строк}]{\partial \Pi} \left(a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{n_2-m}^\uparrow \right)$$

Можно записать:

$$b_i = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k \implies b_j - \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

□

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение. Сумма $U_1 + \dots + U_m$ подпространств $U_i \subset V$, $1 \leq i \leq m$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$ представим в виде:

$u = u_1 + \dots + u_m$ ($u_i \in U_i$) единственным образом

Пусть $m = 2$, V - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U = U_1 + U_2$ - прямая сумма
2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис $U_1 + U_2$ - объединение базисов слагаемых

Доказательство.

1. \rightarrow 2. Допустим $u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow v = v + 0 = 0 + v \Rightarrow v = 0$

2. \rightarrow 3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_0$$

3. \rightarrow 4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 &\Rightarrow \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\} \\ &\Rightarrow \text{все } a_i \text{ и } b_i \text{ равны нулю} \end{aligned}$$

4. \rightarrow 1. $\forall u \in U_1 + U_2$:

$$u = \left(\sum_i \alpha_i a_i \right) + \left(\sum_j \beta_j b_j \right)$$

- разложение по базису единственно

□

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U = U_1 + U_2$ - прямая сумма
2. $\forall i, 1 \leq i \leq m, U_i \cap \left(\sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис $U_1 + U_2$ - объединение базисов слагаемых

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\}, i \neq j$ недостаточно для прямой суммы: (РИСУНОК)

v_1, v_2, v_3 - ЛЗ \Rightarrow представление не единственным образом

Лемма. Любой ЛНЗ набор векторов a_1, \dots, a_m в n -мерном векторном пространстве V ($m < n$) можно дополнить до базиса в V .

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, \dots, e_n \Rightarrow rk\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & E_n \end{array} \right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left(\begin{array}{ccc|c|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & e_{i,1}^\uparrow & e_{j,n-m}^\uparrow & \cdots \end{array} \right)$$

Тогда к векторам a_1, \dots, a_m надо добавить $e_{j,1}, \dots, e_{j,n-m}$

□

Определение. Если U - подпр-во в V ($0 \neq U \neq V$) и $\exists W \subset V : V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U .

Следствие. Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве \exists прямые дополнения.

Доказательство. $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \implies \exists a_{m+1}, \dots, a_n : \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ - базис в V , тогда $W = \langle a_{m+1}, \dots, a_n \rangle$ □

Определение. Пусть V_1, \dots, V_k ($k \geq 2$) - векторы пространства над одним и тем же полем \mathbb{F} , тогда:

$$V = V_1 \times \dots \times V_k = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{внешняя прямая сумма}$$

Обозначение: \bigoplus

Замечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \bigoplus \dots \bigoplus V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V'_i = \{0, \dots, v_i, \dots, 0\} - \text{подпространство в } V$$

Запись $v_1, \dots, v_k \stackrel{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, v_k)$ показывает, что $V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_k$ - единственно.

$$\text{В частности } \dim(V_1) \bigoplus \dots \bigoplus V_k = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

Фактор пространства

Определение. Пусть $U \subset V$ - подпространство. Скажем, что $V_1 \sim V_2$ по модулю U , если $v_1 - v_2 \in U$ ($v_1, v_2 \in V$). Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U , где v - представитель

$$* V/U = \{\underbrace{v + U}_{\bar{v}} \mid v \in V\}$$

Утверждение. $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

Доказательство.

\Rightarrow : Если $v_1 \sim v_2$, то $\exists u_0 \in U : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \implies v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \quad \forall u \in U \quad v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \implies v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

\Leftarrow : Если $v_1 + U = v_2 + U$, то $\exists u_1 \in U : v_1 = v_2 + u_1 \implies v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

Определение. $v + U$ - смежный класс элемента v по U : $\bar{v} := v + U$

Определение. $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ - факторпространство V по U .

Определение. Структура векторного пространства на V/U :

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda \bar{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

Определение. $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V
Обозначается: $\text{Codim}_V U$

Пример. Пусть $V = C[a, b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]\} \implies \text{Codim}_V U = 1$$

Теорема.

1. Данные операции задают на V/U векторное пр-во;
2. Если $\dim V < \infty$, то $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

Доказательство.

1) Проверим корректность определений.

Если $v'_1 = v_1 + \bar{u}_1$, $v'_2 = v_2 + \bar{u}_2$, $\bar{u}_i \in U$, $i = 1, 2$:

$$v'_1 + v'_2 = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v'_1 + v'_2 \sim v_1 + v_2, \text{ т.е. } v'_1 + v'_2 + \underline{\underline{U}} = v_1 + v_2 + \underline{\underline{U}}$$

$$\overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2}$$

т.е. определение не зависит от выбора элемента в классе.

Если

$$v' = v + u, u \in U \implies \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \implies \lambda v \sim \lambda v'; \bar{0} \in U; -\bar{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполнены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис a_1, \dots, a_m в U

Если $U = V$, т.е. $m = n = \dim V$, то $V \setminus U = \{0\} \implies \dim(V \setminus U) = n - n = 0$

Пусть $m < n$, можно дополнить базис U до базиса a_{m+1}, \dots, a_n в V , тогда классы $\overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$ образуют базис в $V \setminus U$

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j$$

$$\bar{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^n \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \bar{a_j}$$

$\implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$ порождают $V \setminus U$

Проверим ЛНЗ:

$$\exists \lambda_j \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \bar{a_j} = 0 \iff \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j \in U$$

$$\exists \mu_i \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0$$

Т.к. $\{a_1, \dots, a_n\}$ ЛНЗ, то $\lambda_j = 0, \mu_i = 0, \forall i, j \implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$ - ЛНЗ

□

5 Линейные отображения и функции

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем \mathbb{F} .

Определение. Отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ называется линейным отображением V_1 в V_2 , если:

1. $\forall v_1, v'_1 \in V_1 : \varphi(v_1 + v'_1) = \varphi(v_1) + \varphi(v'_1);$
2. $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v);$

Из курса I семестра известно, что $\varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$

Обозначается: $\text{Ker}(\varphi)$ - ядро φ

$$\text{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\}, \quad \text{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$$

6 Линейные функции

Пусть V - векторное пространство над \mathbb{F}

Определение. Отображение $f : V \rightarrow \mathbb{F}$ - линейная функция со значениями в \mathbb{F} , если:

1. $\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \forall \lambda : f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается: $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{F}\}$ - множество линейных функций на V

Замечание. $V_2 = \mathbb{F}$, $\dim V_2 = 1$

Лемма. Если $f \neq 0$, то $\text{Ker}(f)$ имеет в V коразмерность $= 1$

Доказательство. Пусть $\exists v_1 \in V, f(v_1) \neq 0$. Пусть $v \in V$, либо $v \in \text{Ker}(f)$, либо $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \implies f\left(\frac{v_1}{\beta}\right) = 1, \quad f\left(\alpha - \frac{v_1}{\beta}\right) = \alpha$$

Рассмотрим выражение $r - \frac{\alpha}{\beta}v_1$:

$$f\left(r - \frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = f(v) - f\left(\frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = \alpha - \alpha = 0$$

$\implies r - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \text{Ker}(f)$ и $v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u, u \in \text{Ker}(f)$ □

Замечание. $\forall x \in V : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Лемма. Множество V^* с введенными операциями - векторное пространство.

Определение. V^* - векторное пространство, сопряженное с V (двойственное для V)

Зафиксируем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V и линейную функцию $f : V \rightarrow F$. Тогда $\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \implies f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, где $a_i = f(e_i)$.

Удобно записывать это так: $f(x) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Определение. Координатные функции - функции вида $f_i : f_i(x) = x_i$. Будем использовать обозначение $e^i = f_i$.

В частности, $f_i(e_j) = e^i(e_j) = \delta_j^i$.

Утверждение. Функции e^i - базис в V^*

Доказательство. ЛНЗ: Пусть $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i \equiv 0$. Подставим e_j :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i\right)(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех e_1, \dots, e_n получим $\forall i = 1, \dots, n \lambda_i = 0$. Разложим произвольную функцию $f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i e^i(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i e^i\right)(x) \quad \forall x \in V \quad f \equiv \sum_{i=1}^n a_i e^i$$

□

Следствие. Если $\dim V < \infty$, то $V^* \cong V$.

Определение. Базис $e^* = (e^1, \dots, e^n)$ называется базисом V^* , сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису e в V .

Посмотрим, как изменится строка координат функции $f \in V^*$ при замене базиса e в V .

Пусть $e' = (e'_1, \dots, e'_n) = e C_{e \rightarrow e'}$ - новый базис в V . Как известно, $X = C_{e \rightarrow e'} X'$.

Отсюда если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$, то

$$\begin{aligned} \forall f \in V, f(x) = \sum_{i=1}^n a'_i x'_i &\Rightarrow f(x) = (a_1, \dots, a_n) X = (a_1, \dots, a_n) (C_{e \rightarrow e'} X') = \\ &= ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X' \Rightarrow ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X' = ((a'_1, \dots, a'_n)) X' \quad \forall X' \in \mathbb{F}^n \end{aligned}$$

Беря по очереди $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, по координатно получим равенство

$$(a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'} = (a'_1, \dots, a'_n)$$

Пример. Возьмём $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$.

Выберем в нём базис $1, (t - t_0), \dots, (t - t_0)^n \Rightarrow p(t) = \sum_{i=0}^n \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i$

Если $e_i = (t - t_0)^i, 0 \leq i \leq n$, то $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$.

Определение. Вторым сопряжённым пространством к V (обозначается V^{**}) называется пространство, сопряженное к V^* - пространство линейных функций от линейных функций над V .

Теорема. Если $\dim V < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причём изоморфизм не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : V \rightarrow V^{**} : \forall x \in V \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**}$, такое что $\forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$. Это линейное отображение:

$$\begin{aligned} \forall f \in V^*, \varphi_{x_1+x_2}(f) &= f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Rightarrow \\ &\varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2); \\ \forall f \in V^*, \varphi_{\lambda x}(f) &= f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f) \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x); \end{aligned}$$

Чтобы проверить, что φ - изоморфизм, достаточно проверить, что $\text{Ker} \varphi = \{0\}$ (так как $\dim V^{**} = \dim V$).

Пусть $x \in \text{Ker} \varphi$, т.е. $\varphi_x \equiv 0$. Значит, $\forall f \in V^* : f(x) = 0$

Если $x \neq 0$, то его можно дополнить до базиса: x, e_2, \dots, e_n , где $n = \dim V$. Тогда $e^1(x) = 1 \neq 0$ - противоречие с условием $\forall f \in V^* : f(x) = 0$. \square

Задача. Доказать, что $a_1, \dots, a_n \in V$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ лин. ф-ции $f^1, \dots, f^n \in V^*$ такие, что $\det(f^i(a_j)) \neq 0$.

Замечание. Если $\dim V = \infty$, то $V^* \not\cong V$ в общем случае.

Пример. $V = \mathbb{Q}[t]$ - V счётно. Зафиксируем число $t \in \mathbb{Q}$ и рассмотрим произвольную $f \in V^*$:

$$f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots) \Rightarrow V^* \text{ континуально.}$$

Отсюда мощность V^* больше мощности V , и они, очевидно, не изоморфны.

7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - линейное отображение.