Lomonosov Moscow State University

Механико-математический факультет

Линейная алгебра и геометрия, 2 семестр, 2 поток

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 7 февраля 2025 г.

Содержание

1 Векторное пространство

Определение 1. Множество V называется *векторным пространством* над полем F, если заданы операции $" + "$ и $" \cdot "$: $V \times V \to V$, $F \times V \to V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \ : \ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists\, \vec{0} \in V : \ \forall v \in V \ : \ v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \ \ \exists - v \in V$: $v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V \ : \ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V \ : \ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V \ \exists\, 1 \in F \ : \ 1 \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V \ : \ (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V \ : \ \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая?

Определение 2. $U \in V$ - *векторное подпространство* пространства V, если оно само является пространством относительно тех же операций в V.

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $\forall U \neq 0$

2. $\forall u_1, u_2 \in U \ : \ u_1 + u_2 \in U$

3. $\forall u \in U, \ \lambda \in F \ : \ \lambda u \in U$

Определение 3. Векторы $v_1, ..., v_n \in V$ называются линойно независимыми, если $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n$ (не все равные 0) : $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$

Утверждение. *Определение 3* $\Longleftrightarrow$ *(*$m \geq 2$*) хотя бы один вектор из векторов* v_i *выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение 4. *Упорядоченный набор векторов* $e = (e_1, ..., e_n), e_k \in V$, если это максимально ЛНЗ набор веторов V.

Утверждение. e *- базис в* $V \Longleftrightarrow$

1. $e_1, ..., e_n$ - *ЛНЗ*

2. $\forall x \in V \ \exists \ x_1, ..., x_n \in F \ : \ x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

Следствие. *Разложение любого вектора в базисе единственно.*

Доказательство. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) e_i$
Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем: $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда $x = eX_e = e_1 x_1 + ... + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

Теорема. *Если в V $\exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.*

Доказательство.
Если $\exists$ базис $e'_1, ..., e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ $e'_1, ..., e'_m$ - ЛЗ, т.е. не базис.
Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) $e_1, ..., e_n$ - ЛЗ $\Longrightarrow$ не базис. □

Свойства. *матриц перехода*

1. $\det C \neq 0$

2. $C_{e' \to e} = (C_{e \to e'})^{-1}$

3. $C_{e'' \to e} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, ..., e'_n \Longrightarrow rkC = n \Longrightarrow \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.
   По определению:

$$e' = (e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n) C_{e \to e'}, \text{ т.е. } e' = eC_{e \to e'}$$

$$\boxed{e' = eC_{e \to e'}} \tag{2}$$

   С другой стороны

$$C = e' C_{e' \to e} = eC_{e \to e'} C_{e' \to e} \Longrightarrow C_{e \to e'} C_{e' \to e} = E$$

   ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \to e'} = (C_{e' \to e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e'C_{e'\to e''} = e(C_{e\to e'}C_{e'\to e''}) = eC_{e\to e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e\to e''} = C_{e\to e'}C_{e'\to e''}$

$\square$

Алгоритм. *Как вичислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном?*
$e' = eC_{e\to e'}$ можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow})C = ({e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow})$$

$$[e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow} \mid {e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow}] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e\to e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. *Формула изменение координат вектора при замене базиса:*

$$\boxed{X_e = C_{e\to e'}X_{e'}} \tag{3}$$

Доказательство.

$$\forall x \in V \ : \ x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e\to e'}X_{e'}$$

$$\Longrightarrow X_e = C_{e\to e'}X_{e'}$$

$\square$

2 Векторные подпространства

Примеры.

1. Геометрические вектроры

2. F^n - пространство слобцов (строк) высоты (длины) n с естественными оперицаями $(+, \cdot\lambda)$

   Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой невырожденной матрицы порядка n)

Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из **(2)**)

Упражнение. Пусть $|F| = q,\ \dim_F V = n \Longrightarrow |V| = q^n$
$\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij-ой позиции и 0 на остальных.

3) $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \to \mathbb{R}\}$ с опирициями сложения и λF
Оно бесконечномерно, если X бесконечно.
Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ
Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + ... + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y_1' + ... + C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 y_1' + ... + \lambda_n C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$