Lomonosov Moscow State University

Механико-математический факультет

Линейная алгебра и геометрия, 2 семестр, 2 поток

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 21 апреля 2025 г.

Содержание

1 Векторное пространство

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F, если заданы операции $"+" : V \times V \to V$ и $"\cdot" : \ F \times V \to V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \ \ : \ \ (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists \ \vec{0} \in V : \ \forall v \in V \ \ : \ \ v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \ \ \exists - v \in V$: $v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V \ \ : \ \ v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V \ \ : \ \ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V : \ 1_F \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V \ \ : \ \ (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V \ \ : \ \ \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? *Ответ:* Аксиома коммутативности.

Доказательство. Сначала докажем два свойства.

1. $0 \cdot \overline{a} = 0 \cdot \overline{a} + \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} + (0 \cdot \overline{a} + (-0 \cdot \overline{a})) = (0 \cdot \overline{a} + 0 \cdot \overline{a}) + (-0 \cdot \overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \overline{a} + (-0 \cdot \overline{a}) = \overline{0}$
2. $(-1)\overline{a} + \overline{0} = (-1)\overline{a} + (\overline{a} + (-\overline{a})) = ((-1)\overline{a} + \overline{a}) + (-\overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \overline{a} + (-\overline{a}) = -\overline{a}$.

Теперь докажем первую аксиому (аксиому коммутативности).

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{0} = (\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b} + \overline{a}) + (-(-(\overline{b} + \overline{a}))) =$$

(по второму свойству)

$$= (\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b} + \overline{a}) + (\overline{b} + \overline{a})) =$$

(по аксиоме ассоциативности)

$$= (\overline{a} + \overline{b} + (-(\overline{b} + \overline{a}))) + (\overline{b} + \overline{a}) = (((\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b}))) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) =$$
$$= ((\overline{a} + (\overline{b} + (-(\overline{b})))) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) = ((\overline{a} + \overline{0}) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) =$$
$$(\overline{a} + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) = \overline{0} + (\overline{b} + \overline{a}) = \overline{b} + \overline{a}$$

□

Замечание. Любое поле можно рассматривать как векторное пространство над собой - все аксиомы будут выполнены из аксиом поля.

Определение. $U \subset V$ - *векторное подпространство* пространства V, если оно само является пространством относительно тех же операций в V.

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $U \neq \varnothing$
2. $\forall u_1, u_2 \in U \ : \ u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \ \lambda \in F \ : \ \lambda u \in U$

Определение. Векторы $v_1, ..., v_n \in V$ называются линейно зависимыми, если $\exists \ \lambda_1, ..., \lambda_n$ (не все равные 0) $:$ $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$. В противном случае векторы $v_1, ..., v_n$ называются линейно независимыми.

Утверждение. *Определение 3* $\iff$ *($n \geq 2$) хотя бы один вектор из векторов v_i выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение. Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, ..., e_n), e_k \in V$ называется базисом V, если e - максимальный ЛНЗ набор векторов из V.

Утверждение. *e - базис в V* $\iff$

1. $e_1, ..., e_n$ *- ЛНЗ*
2. $\forall x \in V \ \exists \ x_1, ..., x_n \in F \ : \ x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

Следствие. *Разложение любого вектора в базисе единственно.*

Доказательство. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i' e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i' - x_i) e_i$
Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

$$\text{Обозначаем: } X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n, \text{ тогда } x = eX_e = e_1 x_1 + ... + e_n x_n$$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

Теорема. *Если в V $\exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.*

Доказательство.
Если $\exists$ базис $e'_1, ..., e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ $e'_1, ..., e'_m$ - ЛЗ, т.е. не базис.
Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) $e_1, ..., e_n$ - ЛЗ $\Longrightarrow$ не базис. $\square$

Свойства. *матриц перехода*

1. $\det C \neq 0$
2. $C_{e' \to e} = (C_{e \to e'})^{-1}$
3. $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, ..., e'_n \Longrightarrow rkC = n \Longrightarrow \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.
По определению:

$$e' = (e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)C_{e \to e'}, \text{ т.е. } e' = eC_{e \to e'}$$

$$\boxed{e' = eC_{e \to e'}} \tag{2}$$

С другой стороны

$$e = e'C_{e' \to e} = eC_{e \to e'}C_{e' \to e} \Longrightarrow C_{e \to e'}C_{e' \to e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \to e'} = (C_{e' \to e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e'C_{e' \to e''} = e(C_{e \to e'}C_{e' \to e''}) = eC_{e \to e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e \to e''} = C_{e \to e'}C_{e' \to e''}$

$\square$

Алгоритм. *Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном базисе?*
$e' = eC_{e \to e'}$ *можно рассмотреть как матричное уравнение:*

$$(e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow})C = ({e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow})$$

$$[e_1^{\uparrow}, ..., e_n^{\uparrow} \mid {e'_1}^{\uparrow}, ..., {e'_n}^{\uparrow}] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \to e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. *Формула изменения координат вектора при замене базиса:*

$$\boxed{X_e = C_{e\to e'}X_{e'}} \tag{3}$$

Доказательство.

$$\forall x \in V \ : \ x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e\to e'}X_{e'}$$

$$\Longrightarrow X_e = C_{e\to e'}X_{e'}$$

□

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

1. Геометрические векторы

2. F^n - пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot\lambda)$

   Базис $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (можно взять столбцы любой невырожденной матрицы порядка n)

   Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из **(2)**)

   Упражнение. Пусть $|F| = q,\ \dim_F V = n \Longrightarrow |V| = q^n$
   $\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij-ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F : \underset{(X\subseteq\mathbb{R})}{X} \to \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и умножения на скаляр
   Оно бесконечномерно, если X бесконечно.
   Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ
   Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1y_1 + ... + C_ny_n \equiv 0 \\ C_1y_1' + ... + C_ny_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1e^{\lambda_1 x} + ... + C_ne^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1C_1e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda_nC_ne^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1}C_1e^{\lambda_1 x} + ... + \lambda_n^{n-1}C_ne^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0 \Longrightarrow C_1 = ... = C_n = 0$$

4. $F[t]$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0 :\ 1, t, t^2, ...$ - линейно независимы. $F[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \mid a_k \in F,\ k = 0, ..., n;\ n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, ..., t^n$
   Тейлоровский базис: $1, t - t_0, ..., (t - t_0)^n$; $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq 0,\ \ V = 2^{\Omega}$ с операциями вместо сложения:

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\ \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2,\ 0 \cdot A = \emptyset,\ 1 \cdot A = A$$

   Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \{\sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, ..., a_m \rangle = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F\} = U$$

Утверждение. $\langle a_1, ..., a_m \rangle \subseteq V \Longrightarrow \dim\langle a_1, ..., a_m \rangle = rk\{a_1, ..., a_m\}$

Доказательство.

$$\mu \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu \lambda_i) a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U$$

Если $r = rk\langle a_1, ..., a_m \rangle$, то $a_{j1}, ..., a_{jr}$ - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \Longrightarrow \{a_{j1}, ..., a_{jr}\} - \text{базис } U$$

$\square$

Алгоритм. *Алгоритм вычисления* $\dim\langle a_1, ..., a_m\rangle$ *и базиса, если известны координаты этих векторов:*

1) Составить матрицу:

$$(a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow}) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{}^{j_1 \ \cdots \ j_r}} & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

2) Столбцы с номерами $j_1, ..., j_r$ *- базис в* U*, разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы*

2. ($\dim V = n$, известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = eX, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x \in V \mid x = eX : \ AX = 0\} - \text{ задание с помощью ОСЛУ}$$

Утверждение. W *- подпространство в* V*,* $\dim W = n - rkA$*, базис - любая ФСР (это переход от* **2.** *к* **1.** *способу задания подпространства).*

Теорема. *Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве* V *можно задать с помощью ОСЛУ.*

Доказательство. Два способа:

1) Вектор x (со столбцом координат $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, ..., a_m\rangle = U$$

$$\Longleftrightarrow \exists\ \alpha_1, ..., \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i^{\uparrow} = x$$

т.е. СЛУ с $\widetilde{A} = (a_1^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix})$ совместна $\Longleftrightarrow$ после алгоритма Гаусса:

$$\widetilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} K & \sum\limits_j C_{kj} x_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1,j} x_j = 0 \\ & \sum C_{nj} x_j = 0 \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} K \end{pmatrix}$ имеет ступенчатый вид, а $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1,j}x_j = 0 \\ \sum C_{nj}x_j = 0 \end{pmatrix}$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\underset{(r\times n)}{C} X = 0, \; rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \begin{pmatrix} E_r & \Big| & D \end{pmatrix} = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + ... + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + ... + d_{kn}x_n) \end{cases} \qquad k = 1, ..., r$$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ \hline E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов $a_1, ..., a_r$:

$$\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_r} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} \begin{pmatrix} M & \Big| & E_r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ \hline E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = \begin{pmatrix} E_{n-r} & \Big| & -M^T \end{pmatrix}$
Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность $n - (n - r) = r$

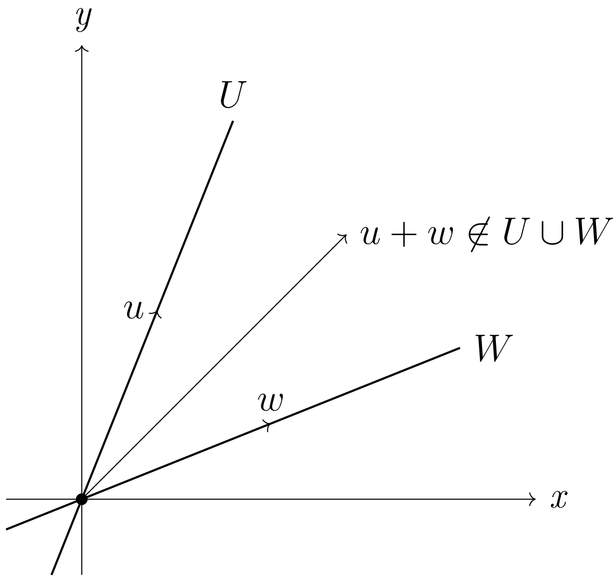
$\square$

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

1. *Если U_i $(i \in I)$ - подпространство V, то $W = \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ тоже подпространство в V;*

2. *Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств.*



Доказательство. 1. $\overline{0} \in W$, т.к. $\overline{0} \in U_i,\ \forall i \in I$.

Если $x, y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$

Если $x \in U_i,\ \forall i \in I,\ \forall \lambda \in F \Longrightarrow \lambda x \in U_i,\ \forall i \in I \Longrightarrow \lambda x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ □

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2, то оно содержит и сумму $u_1 + u_2$, если $u_i \in U_i,\ i = 1, 2$

Определение. Суммой подпространств $U_1, ..., U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + ... + U_m = \{x_1 + ... + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. $U_1 + ... + U_m$ *- подпространство в* V

Теорема. *(Формула Грассмана)*
Если U_1, U_2 *- подпространства в* V, $\dim U_1 < \infty,\ \dim U_2 < \infty$, *то*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i,\ \dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем $c_1, ..., c_s$ - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами $a_1, ..., a_{n_1 - s}$ и до базиса в U_2 векторами $b_1, ..., b_{n_2 - s}$.
Тогда векторы $c_1, ..., c_s, a_1, ..., a_{n_1 - s}, b_1, ..., b_{n_2 - s}$ - образуют базис в $U_1 + U_2$

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = \left(\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i\right) + \left(\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i\right)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^{s} \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = -\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^{s} \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\} \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow a_i$ - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i: \ \alpha_i = 0$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum\limits_{j=1}^{s} \gamma_j c_j = 0 \Longrightarrow \{b_k, \gamma_j\}$ - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall k, j: \ \beta_k = \gamma_j = 0$

Алгоритм. *Пусть* $U_1 = \langle a_1, ..., a_{n_1} \rangle, \ U_2 = \langle b_1, ..., b_{n_2} \rangle$, *известны координаты всех этих векторов. Составим матрицу:*

$$\Big(A \ \Big| \ B \Big) = \Big(a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} \ \Big| \ b_1^{\uparrow}, ..., b_{n_2}^{\uparrow} \Big)$$

$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$

$$\Big(A \ \Big| \ B \Big) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} \ \middle| \ \underbrace{b_1^{\uparrow}, ..., b_m^{\uparrow}}_{\text{попало в базис}}, b_{m+1}^{\uparrow}, ..., b_{n_2-m}^{\uparrow} \right)$$

Можно записать:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_j} b_k \Longrightarrow b_j - \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

□

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение. Сумма $U_1 + ... + U_m$ подпространств $U_i \subset V, \ 1 \leq i \leq m$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + ... + U_m$ представим в виде:
$u = u_1 + ... + u_m \ (u_i \in U_i)$ единственным образом

Пусть $m = 2, V$ - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. $U = U_1 + U_2$ *- прямая сумма*

2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

4. Базис $U_1 + U_2$ *- объединение базисов слагаемых*

Доказательство.

1. $\rightarrow$ 2. Допустим $v \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow v = \underset{\in U_1}{v} + 0 = 0 + \underset{\in U_2}{v} \Longrightarrow v = 0$

2. $\rightarrow$ 3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{0}$$

3. $\rightarrow$ 4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \Longrightarrow \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$\Longrightarrow \text{все } \alpha_i \text{ и } \beta_i \text{ равны нулю}$$

4. $\rightarrow$ 1. $\forall u \in U_1 + U_2:$

$$u = (\sum_i \alpha_i a_i) + (\sum_j \beta_j b_j)$$

- разложение по базису единственно

$\square$

Теорема. *Следующие условия равносильны:*

1. $U = U_1 + U_2 + ... + U_n$ *- прямая сумма*

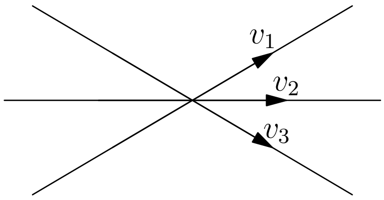
2. $\forall i,\ 1 \leq i \leq m,\ U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}$

3. $\dim(U_1 + U_2 + ... + U_n) = \dim U_1 + \dim U_2 + ... + \dim U_n$

4. Базис $U_1 + U_2 + ... + U_n$ *- объединение базисов слагаемых*

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\},\ i \neq j$ недостаточно для прямой суммы:



v_1, v_2, v_3 - ЛЗ $\Longrightarrow$ представление не единственным образом

Лемма. *Любой ЛНЗ набор векторов $a_1, ..., a_m$ в n-мерном векторном пространстве V $(m < n)$ можно дополнить до базиса в V.*

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, ..., e_n \Longrightarrow rk\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(a_1^{\uparrow} \ \cdots a_m^{\uparrow} \ \Big| \ E_n\right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left(a_1^{\uparrow} \ \cdots a_m^{\uparrow} \ \Big| \ e_{i,1}^{\uparrow} \ \Big| \ e_{j,n-m}^{\uparrow} \ \cdots\right)$$

Тогда к векторам $a_1, ..., a_m$ надо добавить $e_{j,1}, ..., e_{j,n-m}$

□

Определение. Если U - подпр-во в V $(0 \neq U \neq V)$ и $\exists \, W \subset V \ : \ V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U.

Следствие. *Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве $\exists$ прямые дополнения.*

Доказательство. $U = \langle a_1, ..., a_m \rangle \Longrightarrow \exists \ a_{m+1}, ..., a_n \ : \ \langle a_1, ..., a_n \rangle$ - базис в V, тогда $W = \langle a_{m+1}, ..., a_n \rangle$ □

Определение. Пусть $V_1, ..., V_k$ $(k \geq 2)$ - векторы пространства над одним и тем же полем $\mathbb{F}$, тогда:

$$V = V_1 \times ... \times V_k = \{(v_1, ..., v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{ внешняя прямая сумма}$$

Обозначение: $\overset{\oplus}{\circ}$

Замечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \overset{\oplus}{\circ} ... \overset{\oplus}{\circ} V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V_i' = \{0, ..., .v_i, ..., 0\} - \text{ подпространство в } V$$

Запись $v_1, ..., v_k \overset{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, ..., 0) + (0, v_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, 0, ..., v_k)$ показывает, что $V = V_1' \oplus ... \oplus V_k'$ - единственно.
В частности $\dim(V_1 \overset{\oplus}{\circ} ... \overset{\oplus}{\circ} V_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim V_i$

Факторпространства

Определение. Пусть $U \subset V$ - подпространство, $v_1, v_2 \in V$. Говорят, что $v_1 \sim v_2$ по модулю U, если $v_1 - v_2 \in U$. Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U, где v - представитель
$* \; V/U = \{\underbrace{v+U}_{\overline{v}} \mid u \in U\}$

Утверждение. $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

Доказательство.

$\underline{\Rightarrow}$: Если $v_1 \sim v_2$, то $\exists \; u_0 \in V : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Longrightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \; \forall u \in U \; v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Longrightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

$\underline{\Leftarrow}$: Если $v_1 + U = v_2 + U$, то $\exists u_1 \in U : \; v_1 = v_2 + u_1 \Longrightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

Определение. $v + U$ - смежный класс элемента v по U : $\bar{v} := v + U$

Определение. $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$ - факторпространство V по U.

Определение. Структура векторного пространства на V/U:

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda\overline{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

Определение. $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V
Обозначается: $\mathrm{Codim}_V U$

Пример. Пусть $V = C[a, b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0, \; x_0 \in [a, b]\} \Longrightarrow \mathrm{Codim}_V U = 1$$

Теорема.

1. *Данные операции задают на V/U векторное пр-во;*
2. *Если $\dim V < \infty$, то $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$*

Доказательство.

1) Проверим корректность введённых операций:
Если $v_1' = v_1 + u_1,\ v_2' = v_2 + u_2,\ u_1, u_2 \in U:$

$$v_1' + v_2' = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v_1' + v_2' \sim v_1 + v_2, \text{ т.е. } v_1' + v_2' + U = v_1 + v_2 + U \Rightarrow \overline{v_1' + v_2'} = \overline{v_1 + v_2}$$
$$\overline{v_1'} + \overline{v_2'} = \overline{v_1' + v_2'} = \overline{v_1 + v_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

т.е. сложение не зависит от выбора элементов в классах.
Если

$$v' = v + u,\ u \in U \Longrightarrow \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \Longrightarrow \lambda v \sim \lambda v';\ \overline{0} \in U;\ -\overline{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполенены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис $a_1, ..., a_m$ в U
Если $U = V$, т.е. $m = n = \dim V$, то $V/U = \{0\} \Longrightarrow \dim(V/U) = n - n = 0$
Если же $m < n$, то можно дополнить базис U векторами $a_{m+1}, ..., a_n$ до базиса в V, тогда классы $\overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ образуют базис в V/U :

$$\forall v \in V\ :\ v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j$$

$$\overline{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{a_j}$$

$\Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ порождают V/U
Проверим ЛНЗ:

$$\exists\ \lambda_j \in \mathbb{F}\ :\ \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j \overline{a_j} = \overline{0} \Longleftrightarrow \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j a_j \in U$$

$$\exists\ \mu_i \in \mathbb{F}\ :\ \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i = 0$$

Т.к. $\{a_1, ..., a_n\}$ ЛНЗ, то $\lambda_j = 0,\ \mu_i = 0,\ \forall i, j \Longrightarrow \overline{a_{m+1}}, ..., \overline{a_n}$ - ЛНЗ

$\square$

5 Линейные отображения и функции

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется линейным отображением V_1 в V_2, если:

1. $\forall v_1, v_1' \in V_1 \;:\; \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1')$;
2. $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} \;:\; \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$;

Из курса I семестра известно, что $\varphi(0_{v_1}) = 0_{V_2}$

Определение. Ядром φ называется множество $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\}$. Образом φ называется множество $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$.

6 Линейные функции

Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{F}$

Определение. Отображение $f : \; V \to \mathbb{F}$ - линейная функция со значениями в $\mathbb{F}$, если:

1. $\forall v_1, \; v_2 \in V : \; f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} : \; f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается: $V^* = \{f : \; V \to \mathbb{F}\}$ - множество линейных функций на V

Лемма. *Если* $f \not\equiv 0$, *то* $\dim(V/\mathrm{Ker} f) = 1$.

Доказательство. $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists v_1 \in V, \; f(v_1) \neq 0$. Пусть $v \in V$, тогда либо $v \in \mathrm{Ker}(f)$, либо $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Longrightarrow f(\frac{v_1}{\beta}) = 1, \; f(\frac{\alpha}{\beta} v_1) = \alpha$$

Рассмотрим выражение $f(v - \frac{\alpha}{\beta} v_1)$:

$$f(v - \frac{\alpha}{\beta} v_1) = f(v) - f(\frac{\alpha}{\beta} v_1) = \alpha - \alpha = 0$$

$\Longrightarrow v - \frac{\alpha}{\beta} v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ и $v = \frac{\alpha}{\beta} v_1 + u, \; u \in \mathrm{Ker}(f)$ □

Замечание. $\forall x \in V : \; (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Лемма. *Множество V^* с введенными операциями - векторное пространство.*

Определение. V^* - векторное пространство, сопряженное с V (двойственное для V)

Зафиксируем базис $e = (e_1, ..., e_n)$ в V и линейную функцию $f : V \to F$

$$\forall x \in V : \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \text{ где } a_i = f(e_i)$$

Удобно записывать это так: $f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Определение. Координатные функции - функции вида:

$$f_i : \ f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение: $e^i = f_i$

В частности: $f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$

Утверждение. *Функции e^i - базис в V^**

Доказательство.

Докажем ЛНЗ: Пусть $\exists \ \lambda_1, ..., \lambda_n : \ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e^i \equiv 0$. Подставим e_j:

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех $e_1, ..., e_n$ получим, что $\forall i = 1, ..., n : \ \lambda_i = 0$. Разложим произвольную функцию $f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i e^i)(x) \ \Rightarrow \ f \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i e^i$$

$\square$

Следствие. *Если $\dim V < \infty$, то $V^* \cong V$, т.к. $\dim V^* = \dim V$.*

Определение. Базис $e^* = (e^1, ..., e^n)$ называется базисом V^*, сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису e в V.

Посмотрим, как изменится строка координат функции $f \in V^*$ при замене базиса e в V.
Пусть $e' = (e'_1, ..., e'_n) = e \cdot C_{e \to e'}$ - новый базис в V. Как известно, $X = C_{e \to e'} \cdot X'$.
Отсюда если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, то $\forall f \in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i = (a'_1, ..., a'_n) X'$$

С другой стороны

$$f(x) = (a_1, ..., a_n) X = (a_1, ..., a_n)(C_{e \to e'} X') = ((a_1, ..., a_n) C_{e \to e'}) X'$$

Отсюда

$$\forall X' \in \mathbb{F}^n \quad ((a_1, ..., a_n) C_{e \to e'}) X' = ((a'_1, ..., a'_n)) X'$$

Подставляя по очереди $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, в итоге получим равенство

$$(a_1, ..., a_n) C_{e \to e'} = (a'_1, ..., a'_n)$$

Пример. Возьмём $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$
Выберем в нём базис $\{1, (t - t_0), ..., (t - t_0)^n\} \Longrightarrow p(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i$
Если $e_i = (t - t_0)^i, \ 0 \leqslant i \leqslant n$, то $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

Определение. Вторым сопряжённым пространством к V (обозначается V^{**}) называется пространство, сопряженное к V^* - пространство линейных функций от линейных функций над V.

$$V^{**} = \{\varphi : \ V^* \to \mathbb{F}\}$$

Лемма. *f - инъекция $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) = \{0\}$*

Теорема. *Если $\dim V < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).*

Доказательство. Рассмотрим отображение:

$$\varphi : V \to V^{**} : \ \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**} : \ \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

- $\forall f \in V^*, \ \varphi_{x_1 + x_2}(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Longrightarrow \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$;

- $\forall f \in V^*,\ \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda\varphi_x(f) \Longrightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x);$

Чтобы проверить, что φ - биекция, достаточно проверить, что $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ (так как сюръекцию имеем из $\dim V^{**} = \dim V$).
Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, т.е. $\varphi_x \equiv 0$. Значит, $\forall f \in V^* :\ f(x) = 0$
Если $x \neq 0$, то его можно дополнить до базиса: $x, e_2, ..., e_n$, где $n = \dim V$.
Тогда $e^1(x) = 1 \neq 0$ - противоречие с условием $\forall f \in V^* :\ f(x) = 0$. $\square$

Задача. Доказать, что $a_1, ..., a_n \in V$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ лин. ф-ции $f^1, ..., f^n \in V^*$ такие, что $\det(f^i(a_j)) \neq 0$.

Замечание. Если $dimV = \infty$, то $V^* \ncong V$ в общем случае.

Пример. $V = \mathbb{Q}[t]$ - V счётно. Зафиксируем число $t \in \mathbb{Q}$ и рассмотрим произвольную $f \in V^*$:
$f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, ..., b_k, ...) \Rightarrow V^*$ континуально.
Отсюда мощность V^* больше мощности V, и они, очевидно, не изоморфны.

7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства, $\varphi : V_1 \to V_2$ - линейное отображение.

Пример.
$V_1 = D(a, b)$ - множество функций над полем $\mathbb{R}$, дифференцируемых на (a, b);
$V_2 = F(a, b)$ - множество функций над полем $\mathbb{R}$, опреелённых на (a, b);
$\varphi(f) = \frac{df}{dt},\ \varphi :\ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$
Частный случай: $V_1 = \mathbb{R}[t]_n,\ V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$
$\varphi(f) = f'$ - линейное отображение (взяли производную)
$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{const\}$. Является ли φ сюръекцией?
$\forall p(t) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} t^{n-1}$
$\exists f(t) = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + ... + a_{n-1}\frac{t^n}{n} : f'(t) = p(t) \Longrightarrow \varphi$ - сюръекция

Теорема. *Если* $\varphi :\ V_1 \to V_2$ *- линейное отображение,* $\dim V_1 < \infty$*, то*

$$\dim(Im\,\varphi) = \dim V_1 - \dim(Ker\,\varphi)$$

Доказательство. Пусть $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = m\ (m \leq n = \dim V_1)$
Выберем $c_1, ..., c_m$ - базис в $\mathrm{Im}\,\varphi \Longrightarrow \exists\ a_1, ..., a_m \in V_1 :\ \varphi(a_i) = c_i,\ i = \overline{1, m}$
Так же выберем базис $b_1, ..., b_k$ в $\mathrm{Ker}\,\varphi$ (если $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, то $\mathrm{Im}\,\varphi \cong V_1$)
Покажем, что $\{a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_k\}$ - базис в V_1:

Пусть $\alpha_i,\ \beta_j:\ \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i a_i+\sum\limits_{j=1}^{k}\beta_j b_j=0_{v_1}$, тогда:

$$\varphi(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_i+\sum_{j=1}^{k}\beta_j b_j)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(a_i)+\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\beta_j\varphi(b_j)}_{0_{v_2}}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i c_i=\varphi(0_{v_1})=0_{v_2}$$

Т.к. c_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i=\overline{1,m}:\ \alpha_i=0\Longrightarrow\sum\limits_{j=1}^{k}b_j\beta_j=0$

Т.к. b_i - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall j=\overline{1,k}:\ \beta_j=0$

$$\forall v\in V_1:\ \varphi(v)=\sum_{l=1}^{m}\gamma_l c_l=\varphi(\sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l)\Longrightarrow v-\sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l\in\operatorname{Ker}\varphi$$

$$\Longrightarrow\exists\beta_j\in\mathbb{F}:\ v=\sum_{l=1}^{m}\gamma_l a_l+\sum_{j=1}^{k}\beta_j b_j$$

$\square$

8 Матрицы линейного отображения

Пусть: $\mathcal{E}=\{e_1,...,e_n\}$ - базис в V_1; $\mathcal{F}=\{f_1,...,f_m\}$ - базис в V_2

$$\forall x\in V_1:\ x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j\Longrightarrow\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j\varphi(e_j)=$$

$$=\{\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i\}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_ja_{ij}f_i$$

Определение. Назовем $A=(a_{ij})=A_{\varphi,e,f}$ - матрицей φ в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Обозначается: $Y_f=A_{\varphi,e,f}\cdot X_e$ (где Y - столбец координат $\varphi(x)$).

Замечание. Для линейного оператора $\varphi:\ V\to V,\ A_{\varphi,e}\equiv A_{\varphi,e,e}$

Алгоритм. *Вычисление $Ker\ \varphi$ и $Im\ \varphi$ с помощью матрицы A_φ :*

1. $Ker\,\varphi=\{x=\mathcal{E}\cdot x_{\mathcal{E}}\ :\ A_\varphi\cdot x_{\mathcal{E}}=0\};\ \dim(Ker\,\varphi)=n-rkA_\varphi$
2. $Im\,\varphi=\langle\varphi(e_1),...,\varphi(e_n)\rangle=\{y=f\cdot Y_f\ :\ Y_f=A_\varphi\cdot x_{\mathcal{E}}\}$
   $Y\in Im\,\varphi\Longleftrightarrow$ *СЛУ* $A_\varphi\cdot x_{\mathcal{E}}=Y$ *совместна* $\Longrightarrow\dim(Im\,\varphi)=rkA_\varphi$
   (т.е. не зависит от базиса);
3. $\dim(Im\,\varphi)+\dim(Ker\,\varphi)=\dim V_1$

8.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат

Утверждение. *Пусть* $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ *- старый, а* $\mathcal{E}' = (e'_1, ..., e'_n)$ *- новый базисы в* V_1 *и* $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_n)$ *- старый , а* $\mathcal{F}' = (f'_1, ..., f'_n)$ *- новый базисы в* V_2*,* C *- матрица перехода из* $\mathcal{E}$ *в* $\mathcal{E}'$*, а* D *- матрица перехода из* $\mathcal{F}$ *в* $\mathcal{F}'$*. Тогда:*

$$A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C$$

Доказательство. Воспользуемся формулами связи координат векторов:

$$\forall x \in V_1: \ x_{\mathcal{E}} = \underbrace{C_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}}_{C} \cdot x_{\mathcal{E}'} \text{ и } \ \forall y \in V_2: \ y_{\mathcal{F}} = \underbrace{C_{\mathcal{F}\to\mathcal{F}'}}_{D} \cdot y_{\mathcal{F}'}$$

Тогда формулы имеют вид:

$$Y_{\mathcal{F}} = \underset{(*)}{A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}}} \cdot x_{\mathcal{E}} \text{ и } \ Y_{\mathcal{F}'} = \underset{(**)}{A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'}} \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Умножим $(*)$ слева на D^{-1}, а также запишем выражение $x_{\mathcal{E}}$ через $x_{\mathcal{E}'}$:
$\forall x_{\mathcal{E}'} \in F^n$:

$$D^{-1} \cdot Y_{\mathcal{F}} = D^{-1} \cdot (A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'} \Longleftrightarrow Y_{\mathcal{F}'} = (D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Возьмем $x_{\mathcal{E}'} = E_j, \ j = 1, ..., n$ □

Замечание. Для линейного оператора $\varphi: \ V \to V$:

$$A_{\varphi,\mathcal{E}'} = C^{-1}_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$$

Следствие.

1. *Для любого линейного отображения ранг его матрицы инвариантен при замене базиса*
$$rk\, A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = rk\, A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}};$$

2. *Для любого линейного оператора оперделитель и след его матрицы инвариантны при замене базиса*

$$\det(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = \det(A_{\varphi,\mathcal{E}})$$

$$tr\,(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = tr\,(A_{\varphi,\mathcal{E}})$$

Доказательство.

1. Матрицы C и D невырождены, значит достаточно доказать, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(AC)$, где C - невыроджена.
$$\begin{cases} B = A\cdot C \Longrightarrow \operatorname{rk} B \le \operatorname{rk} A \\ A = (A\cdot C)\cdot C^{-1} \Longrightarrow \operatorname{rk} A \le \operatorname{rk}(AC) \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\operatorname{rk}(AC) \le \operatorname{rk} A \le \operatorname{rk}(AC)}_{\operatorname{rk}(AC) = \operatorname{rk} A}$$
2. $\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1}\cdot \det A \cdot \det C = \det A$
3. $\operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(CA) \Longrightarrow \operatorname{tr}\left[C^{-1}\cdot(AC)\right] = \operatorname{tr}\left[(AC)\cdot C^{-1}\right] = \operatorname{tr} A$

$\square$

Теорема. *Пусть* $a_1, ..., a_n$ *- ЛНЗ векторы в* V_1 $(\dim V_1 = n)$, $b_1, ..., b_n$ *- случайные векторы в* V_2 $(\dim V_2 = m)$. *Тогда* $\exists!$ *линейное отображение* $\varphi:\ V_1 \to V_2:$ $\varphi(a_j) = b_j,\ j = 1, ..., n$

Доказательство.
Пусть в некотором базисе $\mathcal{E}$ пространства V_1 вектор $a_j \sim a_j^{\uparrow}$ - столбец координат, в базисе f пространства V_2 вектор $b_j \sim b_j^{\uparrow}$
По условию, $\forall j = 1, ..., n:\ \ A_\varphi \cdot a_j^{\uparrow} = b_j^{\uparrow} \Longrightarrow A_\varphi(a_1^{\uparrow}, ..., a_n^{\uparrow}) = (b_1^{\uparrow}, ..., b_n^{\uparrow})$ или $A_\varphi \cdot A = B$, где A_φ - искомая матрица.
Отсюда получаем, что $A_\varphi = B\cdot A^{-1}$ (т.к. $a_1, ..., a_n$ ЛНЗ).

$$\left(\frac{A}{B}\right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\frac{E}{A_\varphi}\right),\ \left(\frac{A}{B}\right) \to \left(\frac{A}{B}\right)\cdot C_{\text{эл}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)$$

Если $AC = E$, то $C = A^{-1}$ и $BC = BA^{-1} = A_\varphi$ $\square$

Теорема. *Если* $\dim V_1 < \infty$, $\varphi:\ V_1 \to V_2$ *- линейное отображение, то*
$$Im\,\varphi \cong V_1/Ker\,\varphi$$

Доказательство. Базис ядра дополним до базиса пространства V_1 векторами $e_1, ..., e_s$. Тогда любой $v \in V_1$ можно записать в виде:
$$v = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i + u, \text{где } u \in \operatorname{Ker}\varphi$$

По этому в факторпространстве базис составляет классы $\overline{v} + u = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i\overline{e_i}$
Рассмотрим отношение $\overline{\varphi}:\ V_1/u \to V_2$, где $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(v+u) := \varphi(v)$
Отсюда $w = \overline{\varphi}(\overline{v})$. Получаем, что φ - сюръективное линейное отображение (т.к. $\forall w \in V_2\ \exists\ v \in V_1:\ \varphi(v) = w$). Также $\operatorname{Ker}\overline{\varphi} = \{0\} = \{\operatorname{Ker}\varphi\}$, потому что если $\overline{\varphi}(\overline{v}) = 0$, то $\varphi(v) = 0$, т.е. $v \in \operatorname{Ker}\varphi = u \Longrightarrow v \in U \Longrightarrow \overline{v} = u = \{0\}$ $\square$

9 Линейные операторы

Определение. Линейное отображение $\varphi: \ V \to V$ называется линейным оператором

Далее рассматриваем линейные операторы.

Утверждение.

1. *$Ker\,\varphi$ - подпространство в V*

2. *$Im\,\varphi$ - подпространство в V*

3. *Если $U \subset V$, то $\varphi(U)$ - подпространство в V*

Определение. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно φ (или φ - инвариантным), если:

$$\forall u \in U: \ \varphi(u) \in U, \text{ т.е. } \varphi(U) \subseteq U$$

Примеры.

1. Пусть $V = U \oplus W$. Пусть $\varphi: \ V \to V$ такое, что $\varphi(v) = \varphi(u + w) = u$ - проекция V на U вдоль W. Тогда U и W - инвариантные подпространства относительно φ и $\forall u \in U: \ \varphi(u) = u$, а также $\forall w \in W: \ \varphi(w) = 0$. Отсюда $U \cong V/W$

2. Пусть $V = \mathbb{R}[t], \ \varphi(f) = \frac{df}{dt} \Rightarrow p(t) \to p'(t)$. Здесь инвариантным является подпространство $\mathbb{R}[t]_n \supset \mathbb{R}[t]_{n-1}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Теорема. *Если $\varphi: \ V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, U - инвариантное подпространство, то существует базис, в котором A_φ имеет блочный вид:*

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Где B и C - квадратные: $B_{m \times m}, \ m = \dim U$

Доказательство. Выберем базис $e_1, ..., e_m$ в U и дополним до базиса в V. Тогда в полученном базисе A_φ имеет нужный вид. □

Замечание. Пусть $U \subset V$ - инвариантное подпространство для линейного оператора $\varphi: \ V \to V$

Ограничение φ на подпространство U:

$$\varphi|_u: \ U \to U; \ \ \forall u \in U: \ \varphi|_u(u) = \varphi(u)$$

Рассмотрим факторпространтсво:

$$\overline{V} = V/U: \ \{v + u \mid u \in U\}$$

и фактор-оператор:

$$\overline{\varphi}(\overline{v}) := \overline{\varphi(v)}$$

$\forall \overline{v} \in \overline{V}: \ v' = v + u, \ u \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v) + \varphi(u) \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v)$
Т.о. $\overline{\varphi}: \ \overline{V} \to \overline{V}$ - линейный оператор.

Теорема.

1. *Если существует инвариантное подпространство $U \subset V$, то в подходящем базисе:*
$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad (I)$$
Где $B_{m\times m}, \ m = \dim U$, а точнее: B - матрица оператора $\varphi|_u$,
C - матрица оператора $\overline{\varphi}$

2. *Если $V = U \oplus W, \ U$ и W - инвариантные для φ, то в подходящем базисе:*
$$A_\varphi = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad (II)$$
Причем $B = A_{\varphi|_u}, \ C = A_{\varphi|_w}$.
Верно и обратное, если в некотором базисе матрица A_φ имеет вид (I), то для φ $\exists$ инвариантное подпространство, а если A_φ имеет вид (II), то V - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

Доказательство. Обозначим $\dim V = n, \ \dim U = m, \ 0 < m < n$

1. Выберем базис в $U: \ e_1, ..., e_m$ и произвольно дополним его до базиса V векторами $e_{m+1}, ..., e_n$.
$$\forall u \in U: \ u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i \Longrightarrow \varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi(e_i)$$
В частности, столбцы $\varphi(e_1)^\uparrow, ..., \varphi(e_m)^\uparrow$ имеют вид: $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \Longrightarrow$ они составляют матрицу $\left(\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right)$. Столбцы матрицы $\varphi(e_{m+1}^\uparrow, ..., e_n^\uparrow)$ соответствуют но-

мерам координат. Видно, что:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_u}$$

$\overline{e_j} = e_j + U,\ j = m+1, ..., n$ - базис в факторпространстве $\overline{V} = V/U$.

$$\overline{\varphi(e_j)} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e_i + \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj}e_k + U = \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj}e_k + U = \sum_{k=m+1}^{n} a_{kj}\overline{e_k}$$

$$\Longrightarrow C = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \overline{\varphi}$$

2. Если $V = U \oplus W$, векторы $e_{m+1}, ..., e_n$ надо выбирать в W. Остальное аналогично.

$\square$

Теорема. *(Обратная)*
Для второго случая, если в базисе $e_1, ..., e_n$ матрица имеет вид (II), то положим $U := \langle e_1, ..., e_m\rangle,\ W := \langle e_{m+1}, ..., e_n\rangle$
Из определения матрицы $A_{\varphi,e}$ следует, что U, W - инвариантные относительно φ, $\varphi|_u$ имеет матрицу B, $\varphi|_w$ - матрицу C.

Замечание. В общем случае, если $V = U_1 \oplus ... \oplus U_s,\ U_i$ - инвариантны относительно $\varphi:\ V \to V$, то в базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix}$$

где B_i - матрица $\varphi|_{u_i}$.

Примеры. $\varphi:\ V \to V$

1. $\operatorname{Ker}\varphi,\ \operatorname{Im}\varphi$, любое подпространство $U \supseteq \operatorname{Im}\varphi$ - инвариантны.

2. Если $U_1, U_2 - \varphi$-инвариантные подпространства, то $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$ - инвариантны

10 Действия над линейными отображениями

Пусть $\varphi:\ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\forall x \in V_1$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{F}:\ (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$
2. Если $\psi:\ V_1 \to V_2$, то $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

Утверждение. *(1) Относительно этих операций множество $Z(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 является векторным пространством.*

Утверждение. *(2) Если $\dim V_1 = n,\ \dim V_2 = m$, то $Z(V_1, V_2) \cong M_{m\times n}(\mathbb{F})$*

Доказательство. Зафиксируем базисы в V_1 и V_2: e и f соответственно, тогда $\forall\varphi$ взаимооднозначно соответствует его матрица $A_{\varphi,e,f}$ относительно базисов e и f. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi\ \forall\lambda \in \mathbb{F}\ (\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \implies$ все столбцы A_φ умножаются на $\lambda \implies A_\varphi$ умножается на λ.

$$\forall j = 1, ..., m:\ (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j)$$

$\implies$ столбцы $A_{\varphi+\psi}$ имеют вид $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$. □

Обозначение: $L(V_1, V_2) = \mathfrak{T}(V_1, V_2) = \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.
$\mathfrak{T}(V)$ - множество линейных операторов на V.

Определение. Произведением линейных операторов $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : V_1 \to V_2$ называется их композиция:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x)),\ \text{где } x \in V_1$$

Утверждение. *(3) Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.*

Утверждение. *(4) Пусть V_1, V_2, V_3 - конечномерные векторные пространства, $\varphi : V_1 \to V_2,\ \ \psi : V_2 \to V_3$ - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции:*

$$A_{\psi\circ\varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi$$

Доказательство.
Утверждение (3) - упражнение.
Утверждение (4): Пусть e - базис в V_1, f - базис в V_2, g - базис в V_3.

$$A_\varphi = (\varphi(e_1)^\uparrow \dots \varphi(e_n)^\uparrow)\ \text{ в базисе } f$$

$$A_\psi = (\psi(f_1)^\uparrow \dots \psi(f_m)^\uparrow) \text{ в базисе } g$$

$\forall x = eX$, обозначим $y = \varphi(x)$, $z = \psi(y)$ со столбцами координат Y и Z соответственно. Тогда:

$$Y = A_\varphi X,\ Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi\circ\varphi}X$$

□

Теорема. *Множество $L(V)$ с операциями $+$, $\cdot\lambda$, $\cdot$ является ассоциативной алгеброй с единицей, равной* $\operatorname{id} V$. *Если* $\dim V = n$, *то* $L(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Следует из утверждений (1) - (4). □

Утверждение. *Если φ - линейный оператор на V, то $\forall k \in \mathbb{N}$ подпространства $Ker\,\varphi^k$ и $Im\,\varphi^k$ инвариантны. При этом:*

$$\{0\} \subseteq Ker\,\varphi \subseteq Ker\,\varphi^2 \subseteq \dots$$

$$V \supseteq Im\,\varphi \supseteq Im\,\varphi^2 \dots$$

11 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$

Определение. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ, если $x \neq 0$ и

$$\exists \lambda \in \mathbb{F} :\ \varphi(x) = \lambda \cdot x \tag{1}$$

Где λ - называется собственным значением оператора φ, соответствующим вектору x.

Пусть $\dim V = n$, e - базис в V, в нём $\forall x = e \cdot X$, тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно:

$$A_\varphi X = \lambda X \Longleftrightarrow (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \tag{2}$$

- это СЛУ для нахождения вектора x, если известна λ. Система (2) имеет ненулевое решение, только если:

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

Равенство (3) называется характеристическим уравненением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

Примеры.

1. $V = D^\infty(\mathbb{R})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций.

$$\varphi = \frac{d}{dx},\ \forall f(x):\ \varphi(f) = f'(x)$$

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}:\ (e^{\lambda x})' = \lambda e^x$$

Доказательство. Если $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$, то $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, где $C \neq 0$. Рассмотрим $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow f(x)e^{-\lambda x} = C$. □

2.
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Упражнение. Какие существуют собственные векторы и собственные значения у φ во втором примере?

Определение.

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{11}-\lambda)+\cdots = (-\lambda)^n+(a_{11}+...+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+...+\det A$

$\chi_A(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A

Утверждение. ***(1)*** *$\chi_A(\lambda)$ - не зависит от базиса.*

Доказательство. В новом базисе: $A'_\varphi = C^{-1} \cdot A_\varphi \cdot C$

$$\chi_{A'_\varphi}(\lambda) = \det(C^{-1}A_\varphi C - \lambda E) = \det(C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C) = \det(A_\varphi - \lambda E)$$

□

Определение. Вместо $\chi_{A_\varphi}(\lambda) = \chi_\varphi(\lambda)$ и называется характеристическим многочленом оператора φ

12 Диагонализируемость

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор

Лемма. *Если $a_1, ..., a_m \in V$ - собственные векторы оператора φ с собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_m$, причем $\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j$, то $a_1, ..., a_m$ - ЛНЗ.*

Доказательство.

$m = 1 :$ Один вектор $a_1 \neq 0$ ЛНЗ

$m > 1 :$ Предположение индукции: Любые $m-1$ вектор, отвечающих попарно различным собственным значениям - ЛНЗ

Запишем:

$$a_1\alpha_1 + ... + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m = 0 \tag{1}$$

Подействуем оператором

$$\varphi : a_1\lambda_1\alpha_1 + ... + a_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\lambda_m\alpha_m = 0 \tag{2}$$

Домножим (1) на λ_m и вычтем его из (2):

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$$

По предположению индукции $\forall i = 1, ..., m-1 : \alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0$

Остается $\alpha_m a_m = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$

□

Следствие. *Если φ имеет n попарно различных собственных значений ($\dim V = n$), то соответствующее собственные векторы, взятые по одному для каждого собственного значения, образуют базис в V (Базис из собственных векторов или собственный базис).*

Вид матрицы A_φ в базисе из собственных векторов:

Обозначаем базис $\{e_1, ..., e_n\} \in V$, $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j$, $j = \overline{1, n}$

$\forall x \in V : \varphi(x) = A_{\varphi,e} \cdot X_e$. Столбец вектора $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,...

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- диагональная, причем на диагонали находятся собственные значения с учетом нумерации векторов

12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением

Фиксируем собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ так, что $\exists\ v \in V, v \neq 0 :\ \varphi(v) = \lambda_0 v$
Обозначается: $V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$

Утверждение. *(1) V_{λ_0} - подпространство в V, $V_{\lambda_0} = Ker\,(\varphi - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})$*

Доказательство. Если A_φ - матрица оператора φ, то в координатах V_{λ_0} - множество всех решений СЛУ.

$$(A_\varphi - \lambda_0 E) \cdot X = 0 \Longrightarrow \dim V_{\lambda_0} = n - \mathrm{rk}\,(A_\varphi - \lambda_0 E)$$

□

Определение.
$\dim V_{\lambda_0}$ - геометрическая кратность характеристического корня $\lambda = \lambda_0$. Имеет смысл и алгебраическая кратность λ_0 характеристического корня $\chi_\varphi(\lambda)$:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p(\lambda_0),\ P(\lambda_0) \neq 0,\ k - \text{алгебраическая кратность}$$

Лемма. *Для любого собственного значения λ_0 оператора φ :*
$\dim V_{\lambda_0} \leq$ *алгебраическая кратность корня* $\lambda = \lambda_0$ *в* $\chi_\varphi(\lambda)$

Доказательство. Пусть $\dim V_{\lambda_0} = m \leq n$, выберем базис в V_{λ_0} : $\{e_1, ..., e_m\}$ и произвольно дополним его до базиса в V (при m<n) векторами $e_{m+1}, ..., e_n \Longrightarrow$

$$A_{\varphi,e} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & \\ & \ddots & & C \\ 0 & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A_{\varphi,e} - \lambda E| = \det \left(\begin{array}{ccc|c} (\lambda_0 - \lambda) & & 0 & \\ & \ddots & & C \\ 0 & & (\lambda_0 - \lambda) & \\ \hline & 0 & & B - \lambda E \end{array}\right) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot |B - \lambda E| = 0$$

Не исключено, что $\lambda = \lambda_0$ - корень уравнения $|B - \lambda E| = 0$ □

Замечание. Любое собственное подпространство V_{λ_0} является φ - инвариантным:

$$\forall v \in V_{\lambda_0} :\ \varphi(v) = w :\ \varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = \lambda_0 \varphi(v) = \lambda_0 w$$

Либо $w = 0$, либо является собственным вектором.

Следствие. ***2 из Леммы о ЛНЗ:***
Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_r$ *- все попарно различные собственные значения оператора* φ, *тогда* $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_r}$ *- является прямой суммой, т.е.:*

$$\forall i = 1, ..., n: \; V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \{0\}$$

Доказательство. Допустим, что $\exists \; w \in V_{\lambda_i} \cap (\sum\limits_{j \neq i} V_{\lambda_j})$, тогда:

$$w = v_i = \sum_{j \neq i} v_j \Longrightarrow (\sum_{j \neq i} v_j) - v_i = 0$$

Где $(\sum\limits_{j \neq i} v_j)$ - попарно различные собственные векторы, т.е. либо 0, либо противоречие с ЛНЗ $\Longrightarrow v_i = w = 0$ □

Определение. Скажем, что φ (или его матрица) приводится к диагональному виду (т.е. диагонализируема), если в V $\exists$ базис, в котором A_φ диагональна.

Теорема. *Для линейного оператора* $\varphi : \; V \to V \; (\dim V < \infty)$ *следующие условия эквивалентны:*

1. A_φ *- диагонализируема*
2. *В* V $\exists$ *базис из собственных векторов*
3. *Все характеристические корни принадлежат* $\mathbb{F}$ *и* $\forall i = 1, ..., r$:

$$\dim V_{\lambda_i} = \textit{алгебраической кратности корня } \lambda_i$$

4. $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$

Доказательство.

$\underline{1 \Rightarrow 2}$: Если $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, это значит, что:

$$\varphi(e_j)^\uparrow = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \varphi(e_j) = \lambda_j e_j$, т.е. e_j - собственный вектор с собственным значением λ_j

$\underline{2 \Rightarrow 1}$: В базисе из собственных векторов марица A_φ диагональна

$\underline{1 \cup 2 \Rightarrow 3}$: Выберем базис из собственных векторов $\{f_1, ..., f_n\}$ так, чтобы:

$$\{f_1, ..., f_{m_1}, f_{m_1+1}, ..., f_{m_1+m_2}, ...\}$$

В этом базисе матрица $A_{\varphi,f}$ выглядит:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}}_{m_1 \quad m_2 \quad m_r}$$

$\Longrightarrow m_1 + ... + m_r = n$. С другой стороны, если k_i - алгебраическая кратность корня λ_i, то:

$$n = \sum_{i=1}^{r} m_i \leq \sum_{i=1}^{r} k_i = \deg[\chi_\varphi(\lambda)] = n$$

$\underline{3 \Rightarrow 4}$: $\sum\limits_{i=1}^{r} \dim V_{\lambda_i} = n \Longrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$

$\underline{4 \Rightarrow 1}$: Базис в V - объединение базисов слагаемых

$\square$

Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над $\mathbb{R}$, отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.

Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n$, тогда в некотором базисе V, φ действует матрицей $Y = A_\varphi \cdot X$, где $X \in \mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора $(y = \varphi(x))$. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем $\mathbb{C}$, действующий при той же матрице:

$$A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n, \ Z \to A_\varphi \cdot Z$$

Соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, то $\exists$ собственный вектор Z_0, отвечающий выбранному λ. Это значит, что:

$$A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0, \ Z_0 = X_0 + iY_0, \text{ где } X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longrightarrow A_\varphi Z_0 = A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) =$$
$$= (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases}$$

Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \Longrightarrow \text{ подпространство } U := \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$$

$\Longrightarrow U$ является инвариантным подпространством для φ.
Теперь докажем, что $\dim U = 2$

Доказательство. Предположим, что $\dim U = 1$, то есть $y_0 = \mu x_0$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \Longrightarrow$ если $x_0 \neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ.

$$A_{\varphi|_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{имеет корни } \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R} - \text{противоречие}$$

□

Теорема. *Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Если $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характеристического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V,\ \ u_i \neq 0, \Longrightarrow \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.
Если $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $\exists\ U$ - двумерное инвариантное подпространство. □

Вместо диагонализируемости можно использовать следующее утверждение:

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && \lambda_r &&&&& \\ &&& \alpha_1 & \beta_1 &&& \\ &&& -\beta_1 & \alpha_1 &&& \\ &&&&& \ddots && \\ &&&&&& \alpha_m & \beta_m \\ &&&&&& -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R},\ \ i = \overline{1, r},\ $ а $\beta_j \neq 0,\ \ j = \overline{1, m}$

13 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi: \ V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb{F}$.

Определение. Линейный оператор $\varphi: \ V \to V$ такой, что $\forall v \in V: \ \varphi(v) = v$, называется тождественным оператором и обозначается id.

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ

$$f(\varphi) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m = 0 \Longrightarrow f(A_\varphi) = 0$$

$\Longrightarrow A_{f(\varphi)} = f(A_\varphi) = a_0 E + a_1 A_\varphi + \ldots + a_m A_\varphi^m.$

Пример. $V = \mathbb{R}[t]_n, \ \ \varphi = \frac{d}{dt}$

$$\varphi^n(t^n) = n!, \ \varphi^{n+1} \equiv 0 \Longrightarrow \text{для } \varphi = \frac{d}{dt} \ \ t^{n+1} - \text{анулирующий многочлен}$$

Утверждение. *Если* $\dim V = n \Longrightarrow \exists$ *многочлен* $\deg \leq n^2$*, анулирующий* φ*.*

Доказательство. $\dim L(V) = n^2, \ L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \Longrightarrow$ операторы
$\{Id, \ \varphi, \ \varphi^2, \ \ldots, \ \varphi^{n^2}\}$ - линейно зависимы, так как их больше $n^2 \Longrightarrow$

$$\exists \ a_0, ..., a_{n^2} \in \mathbb{F}: \ a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1\varphi + \ldots + a_{n^2}\varphi^{n^2} = 0$$

$\Longrightarrow a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n^2} t^{n^2}$ - анулирующий многочлен для φ $\square$

Определение. Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица $P = (P_{ij}(\lambda))$, где $P_{ij}(\lambda)$ - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

Пример.

$$P = \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 2\lambda+1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2+\lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2$$

- многочлен от λ с матричными коэффициентами.

Определение. Оператор $\varphi: \ V \to V$ называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

Определение. Для матрицы $A = (a_{ij})$ присоединённой матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ji})$, то есть $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$.

Свойство.

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

Теорема. ***Гамильтона-Кэли***

Характеристический многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ является анулирующим многочленом для линейного оператора φ, то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$, где 0 - нулевой оператор.
В матричной форме:

$$\forall A \in M_n(\mathbb{F}) :\ \chi_A(A) = 0$$

Доказательство. Пусть A - данная матрица, тогда:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \sum_{i=0}^{n} p_i \lambda^i$$

$$p_i \in \mathbb{F},\ p_n = (-1)^n,\ \chi_A(A) = \sum_{i=0}^{n} p_i A^i (\text{считаем, что } A^0 = E)$$

Составим матрицу:

$$\widehat{A - \lambda E} = \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j,\ \text{где } D_j \in M_n(\mathbb{F})$$

Рассмотрим равенство:

$$(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda) E$$

$$(A - \lambda E) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j = \sum_{j=0}^{n-1} (A D_j \lambda^j) - \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^{j+1} =$$
$$= A D_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (A D_j - D_{j-1}) \lambda^j - D_{n-1} \lambda^n = \chi_A(\lambda) E = (\sum_{j=0}^{n} p_j \lambda^j) E$$

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях λ:

$$\begin{array}{r|ll} E\cdot & \lambda^0 : & A D_0 = p_0 E \\ A\cdot & \lambda^1 : & A D_1 - D_0 = p_1 E \\ \vdots & & \\ A^j\cdot & \lambda^j : & A D_j - D_{j-1} = p_j E \\ \vdots & & \\ A^n\cdot & \lambda^n : & -D_{n-1} = p_n E \end{array}$$

Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени A и сложим:

$$\Longrightarrow \chi_A(A)E = 0$$

$\square$

13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора

Определение. Минимальным анулирующим многочленом линейного оператора $\varphi: V \to V$ называется анулирующий многочлен φ минимальной степени. Обозначается: $\mu_\varphi(\lambda)$ (Зачастую его выбирают со старшим коэффициентом $= 1$) Ясно, что:

$$m = \deg \mu_\varphi(\lambda) \leq n \leq \deg \chi_\varphi(\lambda)$$

Теорема.

1. *$\mu_\varphi(\lambda)$ делит анулирующий многочлен оператора φ (в частности $\chi_\varphi(\lambda)$);*
2. *Если $\mu'_\varphi(\lambda)$ тоже минимальный многочлен φ, то:*

   $$\mu'_\varphi(\lambda) = \alpha\mu_\varphi(\lambda),\ \alpha \neq 0$$

   Он определен единственным образом с условием, что старший коэффициент $= 1$;
3. *Если все корни λ_i характеристического многочлена принадлежат $\mathbb{F}$, то они являются и корнями минимального многочлена.*

Доказательство.

1. Пусть $p(\varphi) = 0$, для некоторого $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$
   Разделим p с остатком на μ_φ:

   $$p(\lambda) = \mu_\varphi(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = \mu_\varphi(\varphi) \cdot q(\varphi) + r(\varphi) = 0 \Rightarrow r(\varphi) = 0$$

   Т.к. $\deg r(\lambda) < \deg(\mu_\varphi(\lambda))$, $r(\lambda) \equiv 0$.
2. Т.к. $\mu_\varphi(\lambda) \mid \mu'_\varphi(\lambda)$ и $\mu'_\varphi(\lambda) \mid \mu_\varphi(\lambda) \Longrightarrow \frac{\mu'_\varphi}{\mu_\varphi} = \alpha \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$
   Если $\mu_\varphi(\lambda) = \lambda^m + ...$ и $\mu'_\varphi(\lambda) = \lambda^m + ... \Longrightarrow \alpha = 1$
3. Допустим, что $\exists j:\ \mu_\varphi(\lambda_j) \neq 0$, т.е. в разложение μ_φ не входит $(\lambda - \lambda_j)$
   $\Longrightarrow \exists$ вектор $v \in V:\ \varphi(v) = \lambda_j v$

   $$0 = \mu_\varphi(\varphi)(v) = \mu_\varphi(\varphi(v)) = \mu_\varphi(\lambda_j v) = \mu_\varphi(\lambda_j)v \neq 0$$

   - противоречие

$\square$

Примеры.

1.
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \chi_\varphi(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

$$A_\varphi - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (A-2E)^2 \neq 0,\ (A-2E)^3 = 0 \Longrightarrow \mu_\varphi = -\chi_\varphi$$

2.
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \chi_\varphi = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$(A_\varphi - 2E)(A_\varphi - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \mu_\varphi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)$$

Вопросы:

1. Для каких операторов φ (или A_φ) $\chi_\varphi(\lambda) = \pm\mu_\varphi(\lambda)$?
2. Для каких φ корни $\mu_\varphi(\lambda)$ простые?

Определение. Оператор φ нильпотентный, если:

$$\exists\ L \in \mathbb{N}:\ \varphi^L = 0$$

Если L - минимальный с этим условием, то L - индекс нильпотентности

Пример. $D = \frac{d}{dt}$ в пространстве $\mathbb{R}[t]_n$, то $D^{n+1} = 0$

Утверждение. *Все собственные значения нильпотентного оператора* $= 0$

Доказательство. Если $v \neq 0,\ \varphi(v) = \lambda v$:

$$\Longrightarrow \varphi^L(v) = \lambda^L v = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = \pm\lambda^n$$

$\square$

14 Корневые подпространства

$\varphi: \ V \to V$ - линейный оператор над $\mathbb{F}$, $\dim V = n$
Все корни характеристического многочлена для φ принадлежат F так, что:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}, \ \forall i \neq j: \ \lambda_i \neq \lambda_j, \ \sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + ... + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}} \ \ | \cdot \chi_\varphi(\lambda)$$

$$\Longrightarrow 1 = f_1(\lambda)\prod_{i\neq 1}(\lambda - \lambda_i)^{k_i} + ... + f_s(\lambda)\prod_{i\neq s}(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

$$1 = q_1(\lambda) + ... + q_s(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{id} = q_1(\varphi) + ... + q_s(\varphi) = Q_1 + ... + Q_s$$

$$\forall x \in V: \ x = Q_1(x) + ... + Q_s(x) \Longrightarrow V = \mathrm{Im}(Q_1) + ... + \mathrm{Im}(Q_s)$$

Обратим внимание, что:

$$\forall i \neq j: \ Q_iQ_j = Q_jQ_i = 0$$

Т.к. в $q_i(\lambda)q_j(\lambda)$ входят все множители, входящие в разложение $\chi_\varphi(\lambda) \Longrightarrow$ по теореме Гамильтона-Кэли:

$$q_i(\varphi)q_j(\varphi) = 0$$

Умножим равенство $\mathrm{id} = Q_1 + ... + Q_i + ... + Q_s$ на Q_i :

$$\Longrightarrow Q_i\mathrm{id} = Q_i = Q_iQ_1 + ... + Q_iQ_i + ... + Q_iQ_s = Q_i^2 \Longrightarrow Q_i^2 = Q_i$$

Определение. $Q_i^2 = Q_i$ - идемпотентный оператор.

Введем обозначение $K_i = \mathrm{Im}Q_i$

Утверждение. $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s$

Доказательство. Пусть $x = y_1 + ... + y_s, \ y_i = Q_i(x_i)$. Тогда:

$$Q_i(x) = Q_i(Q_1(x_1)) + ... + Q_s(Q_i(x_s)) = Q_i(Q_i(x_i)) = Q_i(x_i) = y_i$$

Отсюда разложение любого вектора из V в сумму векторов из $K_1, ..., K_s$ единственно, т.е. $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s$. □

Определение. Подпространство $K_i = \mathrm{Im}Q_i$ назовем корневым подпространством, отвечающим корню λ_i.

Замечание. $q_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda)\cdot\chi_\varphi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{k_i}} = f_i(\lambda)\prod\limits_{j\neq i}(\lambda-\lambda_j)^{k_j}$; $\quad Q_i = q_i(\varphi)$; $\quad K_i = \mathrm{Im}Q_i$.

Утверждение.

1. *Корневые подпространства инвариантны*
2. $K_i = Ker(\varphi - \lambda_i \cdot id)^{k_i},\ 1 \le i \le s$

Доказательство.

1. Докажем, что для линейного оператора φ и многочлена $q(\lambda)$ подпространство $q(\varphi)(V)$ инвариантно:
$$q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_m\lambda^m,\ \ q(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + ... + a_m\varphi^m$$
Возьмем $v \in \mathrm{Im}q(v) \Longrightarrow \exists\ u \in V:\ v = q(\varphi)(u) \Longrightarrow \varphi(v) = (\varphi\cdot q(\varphi))(u) = q(\varphi)(\varphi(u)) \in \mathrm{Im}q(u)$, так как оператор φ и любой $q(\varphi)$ перестановочны.
Так как $K_i = Q_i(V) = q_i(\varphi)(V)$, из доказаноого выше следует, что K_i инвариантно.

2. $\forall x_i \in \mathrm{Im}Q_i \Longrightarrow x_i = Q_i(u_i)$
$$(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^{k_i}(x_i) = f_i(\varphi)\cdot\underbrace{(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^{k_i}\cdot\prod_{j\neq i}(\varphi-\lambda_jE)^{k_j}}_{\chi_\varphi(\varphi)}(u_i) = 0$$
$\Longrightarrow K_i \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^{k_i}$
Обратно: пусть $y_i \in \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^{k^i}$. Знаем, что $y_i = Q_1(y_i) + ... + Q_s(y_i)$, причём в Q_j при $j \neq i$ содержится множитель $(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^{k_i}$. Отсюда $Q_j(y_i) = 0$ при $j \neq i$, т.е. $y_i = Q_i(y_i) \Rightarrow y_i \in K_i \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^{k_i} \subseteq K_i$.

□

Теорема. *Размерность K_i равна алгебраической кратности корня λ_i.*

Доказательство. Рассмотрим ограничение оператора $\varphi - \lambda_i\cdot\mathrm{id}$ на K_i. Так как полученный оператор нильпотентный (из предыдущей теоремы), его единственное собственное значение равно 0, т.е. оператор φ в ограничении на K_i имеет единственное собственное значение λ_i, причём его алгебраическая кратность для ограничения равна размерности K_i.
Выберем базис в K_i, дополним его до базиса V и рассмотрим матрицу оператора в нём. Из инвариантности K_i она будет иметь вид
$$\left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

где B - матрица $\varphi|_{K_i}$. Из её характеристического многочлена очевидно, что алгебраическая кратность λ_i для ограничения не может превосходить алгебраической кратности λ_i для всего оператора. Значит, $\dim K_i$ не превосходит алгебраической кратности λ_i.

Осталось заметить, что $\dim V$ равна сумме алгебраических кратностей всех собственных значений и $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s \Rightarrow \dim V = \dim K_1 + ... + \dim K_i$. Значит, $\dim K_i$ равна алг. кратности λ_i. $\square$

15 Теорема Жордана

Основное условие: $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, все его корни $\in \mathbb{F}$

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ (\forall i \neq j : \ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ и } \sum_{i=1}^{s} k_i = \dim V)$$

$$V = K_1 \oplus \ldots \oplus K_s, \text{ где } K_i = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i} - \text{корневое подпространство}$$

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda_i x\}, \ \dim V_{\lambda_i} \leqslant k_i = \dim K_i$$

Так как K_i - инвариантное подпространство относительно оператора φ, можно рассмотреть ограничение:

$$(\varphi - \lambda_i \ \mathrm{id})|_{K_i} := B_i$$

Из определения K_i следует, что $B_i^{K_i} = 0$, то есть B_i - нильпотентный оператор.
В базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

где $A_i = A_{\varphi_{k_i}}$ - матрица порядка k_i, $A_i - \lambda_i E_{k_i} = B_i$, $B_i^{k_i} = 0$
Обозначим $K_i := K$, $B_i := B$, $k_i := k$, тогда:

$$\forall x \in K : \ B^k(x) = 0$$

если $x \neq 0$, то $\exists$ наименьшее значение m:

$$B^m(x) = 0, \ B^{m-1}(x) \neq 0 \ (m \leqslant h)$$

Назовём это высотой вектора x.
Для фиксированного вектора $x \neq 0$ (высоты m) рассмотрим векторы:

$$x, \ Bx, \ldots, B^{m-1}x, \ B^m x = 0$$

Определение. Векторы $\{x,\ Bx,\ \ldots,\ B^{m-1}x\}$ называются жордановой цепочкой.

Лемма. *Вышеуказанные векторы являются линейно независимыми.*

Доказательство. Предположим, что:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Bx + \ldots + \alpha_{m-1}B^{m-1}x = 0$$

Подействуем на это равенство оператором B^{m-1}:

$$\alpha_0 B^{m-1}x = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

На оставшиеся векторы подействуем оператором B^{m-2}:

$$\alpha_1 B^{m-1}x = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

и т.д. Получим, что $\forall i = \overline{0, m-1}: \ \alpha_i = 0 \implies$ векторы являются линейно независимыми. $\square$

Определение. Подпространство, натянутое на эти векторы:

$$\langle x,\ Bx,\ \ldots,\ B^{m-1}x\rangle$$

называется циклическим подпространством, порождённым жордановой цепочкой. Данное подпространство обозначим U_x, $\dim U_x = m$.
Обычно векторы жордановой цепочки нумеруют с конца, то есть:

$$a_1 = B^{m-1}x,\ a_2 = B^{m-2}x, \ldots, a_m = x$$

Тогда a_1 - собственный вектор для B, и для $\forall j = \overline{2, m}: \ a_{j-1} = Ba_j$.
Вектор a_j называется **присоединённым** к вектору a_{j-1}.
К вектору a_1: a_2 - присоединённый, a_3 - второй присоединённый и т.д.

Определение.
Матрица ограничения оператора B на подпространство $U_x = \langle a_1 \ldots a_m\rangle$:

$$B|_{U_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

называется жордановой клеткой с собственным значением $\lambda = 0$

$$\lambda = \lambda_i: \ A_{\varphi|_{U_x}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = J_k(\lambda_i)$$

- жорданова клетка с собственным значением $\lambda = \lambda_i$, где:

$$\varphi(a_2) = a_1 + \lambda_i a_2, \ \varphi(a_{j+1}) = a_j + \lambda_i a_{j+1}$$

Перед доказательством теоремы докажем лемму:

Лемма. *Если B - такой оператор в пространстве V, что:*

$$ImB = B(V) \subset V$$

то V обладает $(n-1)$-мерным инвариантным подпространством W, таким что $\mathrm{Im}B \subseteq W$.

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_m$ - базис в $\mathrm{Im}B, \ m < n = \dim V$
Дополним его до базиса в V векторами $e_{m+1}, ..., e_n$.
Тогда $W = \langle e_1, ..., e_{n-1} \rangle$ - искомое инвариантное подпространство:

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i \Longrightarrow Bw = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i B e_i \in \mathrm{Im}B \subseteq W$$

$\square$

Теорема. ***Жордана***

Если все характеристические корни опертора $\varphi: \ V \to V$ принадлежат полю $\mathbb{F}$, то V является прямой суммой циклических подпространств для оператора φ. Это равносильно тому, что в V существует базис, составленный из жордановых цепочек. Такой базис называется жордановым базисом.

Если жорданов базис уже построен: Пусть имеются r жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, необязательно различным, длины которых $m_1, \ldots, m_r$ соответственно, тогда в этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{m_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{r} m_i = n = \dim V$$

- жорданова матрица - жорданова нормальная форма (ЖНФ) матрицы A_φ.

Теорема. ***Жордана (матричная формулировка)***

Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$, все характеристические корни которой $\in \mathbb{F}$, $\exists$ матрица C $(\det C \neq 0)$ такая, что:

$$C^{-1}AC = J$$

- жорданова матрица. При этом жордановы клетки определены для матрицы A единственным образом с точностью до расположения клеток на диагонали жордановой матрицы.

Замечание. Матрицу A можно интерпретировать как матрицу линейного оператора φ, для него верна теорема Жордана.

Доказательство. (См. Шафаревич И.Р. "Линейная алгебра")
Доказательство достаточно провести для ограничения оператора на каждое корневое подпространство K_i.
Введем обозначения: $B: \ V \to V$ - нильпотентный оператор, $\dim V = n, \ W -$ $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство в V, содержащее $\mathrm{Im}B$ (существует по лемме 1).

Докажем теорему индукцией по n:
База: если $n = 1$, то $B = 0$ и любой базис - жорданов.
Пусть $n > 1$, тогда по предположению индукции в W $\exists$ базис для $B|_w$, т.е.

$$W = U_1 \oplus ... \oplus U_r$$

Выберем вектор $a \in V \setminus W$, тогда a ЛНЗ с векторами из W.
Рассмотрим $Ba \in W$ (т.к. $\mathrm{Im}B \subseteq W$) так, что $Ba = u_1 + ... + u_r, \ u_i \in U_i$ $(*)$.
Если $Ba = 0$, то:

$$V = \langle a \rangle \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_r - \text{искомое разложение пространства}$$

Если $Ba \neq 0$, то найдется i, что $u_i \neq 0$.
Если в разложении есть $u_i \in B(U_i)$, то $\exists \ v_i \in U_i : \ u_i = Bv_i$.
Рассмотрим вместо a вектор $a - v_i : \ B(a - v_i) = u_1 + ... + \cancel{u_i} + ... + u_r - \cancel{u_i} \Longrightarrow$ в разложение такого вектора u_i не входит.
Заменив a на нужные разности $a - v_i$, получим новый вектор $e \in V \setminus W$, при этом занулив все $u_i \in B(U_i)$, т.е.

$$Be = u'_1 + ... + u'_r, \ \forall i \text{ либо } u'_i \notin B(U_i), \text{ либо } u'_i = 0$$

Хотя бы один из векторов $u'_i \neq 0$, выберем из них вектор, имеющий максимальную высоту m. Заметим, что $m = \max(\dim U_i)$, так как каждый u'_i по

построению нового разложения имеет максимальную высоту в своём подпространстве. Тогда $h(e) = m + 1$, т.к. $h(Be) = m$.
Без ограничения общности выбрали вектор u_1. Докажем, что:

$$V = \langle e,\ Be,\ ...,\ B^m e\rangle \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$$

Сумма размерностей подпространств в правой части:

$$(m_1 + 1) + ... + m_r = n = \dim V$$

Поэтому для прямой суммы достаточно доказать, что:

$$\langle e,\ Be,\ ...,\ B^m e\rangle \cap (U_2 \oplus ... \oplus U_r) = \{0\}$$

Пусть $v = \lambda_1 e + ... + \lambda_{m+1} B^m e \in U_2 \oplus ... \oplus U_r$
Т.к. $e \notin W$, $\lambda_1 = 0$. $Be = u_1' + ... + u_r' \Rightarrow$ проекция Be на U_1 равна u_1'.
Спроецируем всё разложение на U_1:

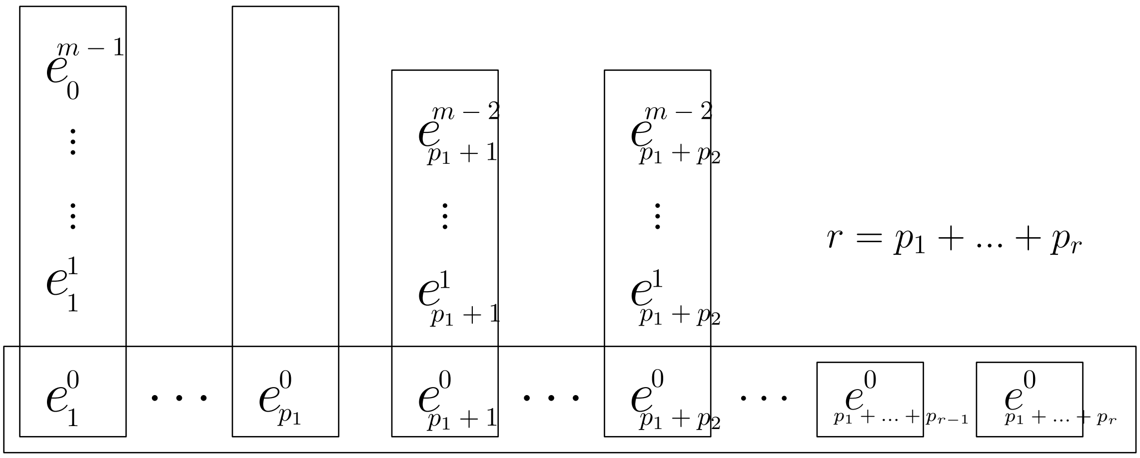
$$\lambda_2 u_1 + \lambda_3 B u_1 + ... + \lambda_{m+1} B^{m-1} u_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = ... = \lambda_{m+1} = 0 \Longrightarrow v = 0$$

Существование ЖНФ доказано. Доказательство единственности приводится в следующем пункте. □

Замечание. r - количество циклических подпространств в разложении корневого подпространства K, отвечающего корню λ_0, равно геометрической кратности корня λ_0 характеристического многочлена.

15.1 Изображение разложения корневых подпространств

Обозначим: $r = \dim \mathrm{Ker} B$ - размерность собственного подпространства
Занумеруем собственные векторы, входящие в цепочки, располагая цепочки по убыванию высоты. m - максимальная высота цепочки, 1 - минимальная
Также введем обозначение для последовательных присоединённых векторов: есть p_1 цепочек высоты m, p_2 - высоты $m-1$,..., $r - (p_1 + ... + p_{r-1})$ - высоты 1



$V = U_1 \oplus ... \oplus U_r,\ \dim U_{i+1} \le \dim U_i$

$$\begin{gathered} BV = BU_1 \oplus ... \oplus BU_r \\ \vdots \\ B^kV = B^kU_1 \oplus ... \oplus B^kU_r \end{gathered}$$

Если $\dim U_i = m_i,\ \dim(B^kU_i) = \left[\begin{array}{c} m_i - k,\ \text{если}\ k < m_i \\ 0,\ \text{если}\ k \ge m_i \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\dim(B^kV) = \sum_{i=1}^{r} \dim B^kU_i = q_{k+1} + 2q_{k+2} + ... + (m-k)q_m$$

Пусть q_i - число циклических подпространств размерности $i,\ \ 1 \le i \le r$

Обозначим $r_k = \mathrm{rk} B^k$

Для $k = 0$ до $m-1$ получим равенства:

$$\begin{gathered} k = 0:\ q_1 + 2q_2 + ... + mq_m = n \\ k = 1:\ q_2 + 2q_3 + ... + (m-1)q_m = r_1 = \mathrm{rk} B \\ \cdots \\ q_m = r_{m-1} = \mathrm{rk} B^{m-1} \ne 0 \\ B^m = 0 \text{ на корневом подпространстве} \end{gathered}$$

Вычитая из каждого уравнения следующее, получим систему:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + ... + q_m = n - r_1 \Longrightarrow q_1 = n - 2r_1 + r_2 \\ \qquad q_2 + ... + q_m = r_1 - r_2 \Longrightarrow q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad q_m = r_{m-1} - r_m\ (r_m = 0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}\ (i = 1, ..., m-1)$$

Вывод: количество и порядок (высоты цепочек) однозначно опреледяется по матрице $B = A|_{\varphi - \lambda \mathrm{id}}$ - эти ранги не зависят от конкретного разложения $\Longrightarrow$ определяются единственным образом, т.е. **ЖНФ единственна с точностью до перестановки клеток на диагонали**.

Следствие. *Пусть:*

$$\chi_\varphi = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

- характеристический многочлен

$$\mu_\varphi = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

- *минимальный многочлен*

Тогда $\forall i = \overline{1, s}$: m_i *равна* max *размерности жордановой клетки, отвечающей корню* λ_i

Следствие. ***Критерий диагонализируемости в терминах min многочлена:***

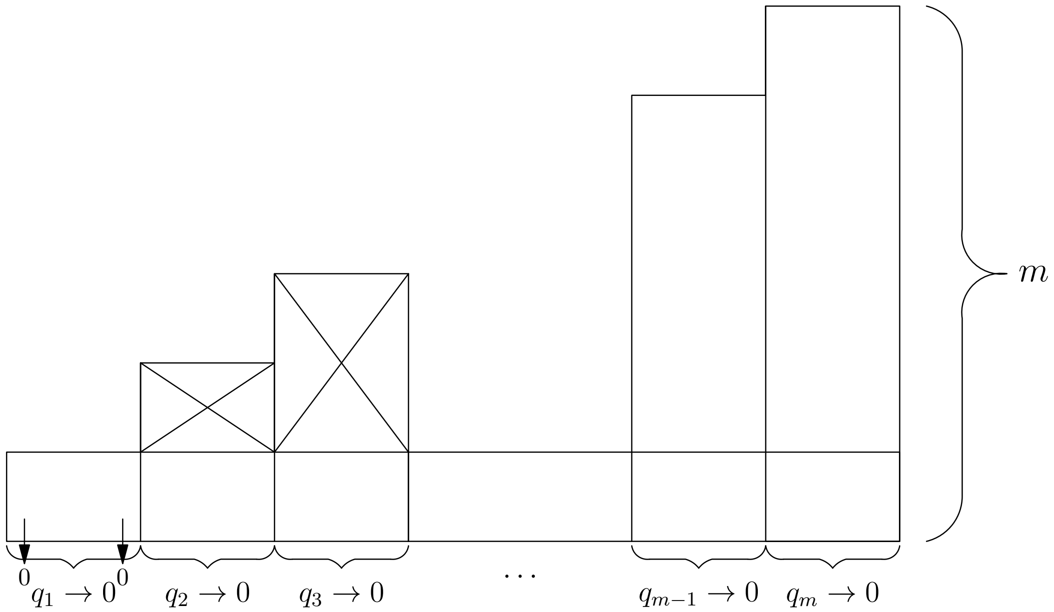
Оператор φ *диагонализируем* $\Longleftrightarrow m_1 = ... = m_s = 1$

Доказательство. Достаточно доказать для каждого корневого подпространства K_i

$$B = A_{\varphi - \lambda_i \mathrm{id}}|_{K_i}$$

- блочно-диагональная матрица с клетками размера m_j $\square$

Переделываем:



Применим оператор B:

$$\begin{cases} \dim V = q_1 + 2q_2 + ... + (m-1)q_{m-1} + mq_m = n \\ \dim \mathrm{Im} B = q_2 + ... + (m-2)q_{m-1} + (m-1)q_m = r_1 \\ \vdots \\ \dim \mathrm{Im} B^{m-1} = q_m = r_{m-1} \end{cases}$$

Некоторые применения приведут матрицу к жордановой форме (в частности, диагонализируемости)

15.2 Решение СЛАУ

Пусть дана система $AX = B$ с квадратной матрицей A, все характеристические корни которой $\in \mathbb{R}$.
Сделаем замену:

$$X = CY \Longrightarrow (AC)Y = B \Longleftrightarrow (\underbrace{C^{-1}AC}_{y})Y = C^{-1}b = b'$$

Можно взять C - матрицу перехода к жорданову базису

$$y = \begin{pmatrix} \boxed{Y_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{Y_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Если y жорданова клетка, то уравнения:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = b'_1 \\ \lambda x_2 + x_3 = b'_2 \\ \vdots \end{cases} \qquad \text{легко решить}$$

15.3 Решение СЛДУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$\dot{X} = AX$, где A - квадратная

$$X = CY \Longrightarrow \dot{X} = C\dot{Y}$$

$$C\dot{Y} = (AC)Y \Longrightarrow \dot{Y} = (C^{-1}AC)Y$$

Если матрица $C^{-1}AC$ диагональная: $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \neq 0$ получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y_n} = \lambda_n y_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Тогда $X = CY$

Если

$$C^{-1}AC = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \lambda_0 y_{n-1} + y_n \\ \dot{y}_n = \lambda_0 y_n \end{cases}$$

решаем снизу вверх.

15.4 Функции от матриц

$$(C^{-1}AC) = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix} \Longrightarrow A = CYC^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^n = (CYC^{-1})(CYC^{-1})...(CYC^{-1}) = CY^nC^{-1}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} \boxed{J^n_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J^n_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \left(\lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 + ... = \begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1}C_n^1 & \lambda^{n-2}C_n^2 & \cdots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \lambda^n & \lambda^{n-1}C_n^1 & \lambda^{n-2}C_n^2 & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda^n & & \end{pmatrix}$$

Упражнение. Пусть $f(t)$ - многочлен, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

Доказать, что:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

15.5 Вычисление корня и экспоненты

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + ... + \frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + ...$$

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + ... + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + ...$$

Для $J_n(\lambda) = \lambda E + B \Longrightarrow$

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^{t\lambda E} \cdot e^{tB} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & & \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{A+B} = e^A \cdot e^B \Longleftrightarrow AB = BA)$$

Примеры.

1.
$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)t^2 + ...$$

2.
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = E + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2!}C^2_{\frac{1}{2}}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 0$$

16 Билинейные и квадратичные формы

Определение. Функция $b: \ V \times V \to \mathbb{F}$ называется билинейной функцией, если:

1. аддитивность:

$$\forall x_1, x_2, y: \ b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2: \ b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$$

2. однородность:

$$\forall x, y \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}:\ b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$$

Определение. $b(x, y)$ - называется симметрической, если:

$$\forall x, y \in V:\ b(y, x) = b(x, y)$$

Примеры.

1. Симметрическая билинейная функция - скалярное произведение
2. $V = M_n(\mathbb{F}):\ b(X, Y) = tr(XY)$
3. $\beta(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

16.1 Запись билинейной функции в координатах

Пусть в V задан базис $e_1, ..., e_n$, тогда:

$$b(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n b(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j)$$

Определение. Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j)$, тогда $B_e = b_{ij}$ - матрица билинейной функции $b(x, y)$ в базисе e
Тогда:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B_e \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B_e Y \tag{1}$$

16.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть $e' = eC$, C - матрица перехода от e к e'
Тогда:

$$X = CX',\ Y = CY' \tag{2}$$

По определению матрицы билинейной функции, в новом базисе:

$$b(x, y) = X'^T B' Y' \ \ (B' = Be')$$

Подставим в формулу (1) выраженеие (2):

$$b(x, y) = X'^T C^T B C Y' = X'^T (C^T B C) Y' = X'^T B' Y' \ \ (\forall X', Y' \in \mathbb{F}^n)$$

$$\Longrightarrow B' = C^T B C \ \ (\forall i, j:\ X' := E_i,\ Y' := E_j)$$

Следствие.

1. $rkB' = rkB$

2. $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{sgn}(\det B') = \operatorname{sgn}(\det B)$

Определение. Билинейная функция $b(x, y)$ называется кососимметрической (при $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$), если:

$$\forall x, y \in V : \ b(x, y) = -b(y, x)$$

Утверждение. $(*)$ *Любая билинейная функция над $\mathbb{F}$: $char\mathbb{F} \neq 2$ единственным образом представляется в виде:*

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y), \quad \textit{где } b_+(x, y) \equiv b_+(y, x), \ b_-(x, y) \equiv -b(y, x)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \\ b(y, x) = b_+(x, y) - b_-(x, y) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$b_+(x, y) = \frac{b(x, y) + b(y, x)}{2}, \ b_-(x, y) = \frac{b(x, y) - b(y, x)}{2}$$

□

Утверждение. *Билинейная функция $b(x, y)$ симметрична (кососимметрич- -на)$\Longleftrightarrow$ в любом базисе e:*

$$B_e^T = B_e \ (B_e^T = -B_e)$$

Доказательство. (Докажем для симметрической, для кососимметрической аналогично)

$\underline{\Longrightarrow}$ Пусть $B = (b_{ij})$, тогда $b_{ij} = b(e_i, e_j)$.

$$\forall x, y \in V, \ b(x, y) = b(y, x) \Longrightarrow b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$$

$\underline{\Longleftarrow}$

$$b(x, y) = X^T BY, b(y, x) = Y^T BX = (X^T B^T Y)^T = (X^T BY)^T = b(x, y)$$

□

Утверждение (1) $\Longleftrightarrow \forall$ матрицы B некоторой билинейной функции верно, что $B = B_+ + B_-$, где B_+ - матрица симметрической билинейной функции, а B_- - матрица кососимметрической билинейной функции.

Определение. Квадратичная функция, порождённая билинейной функцией $b(x, y)$ - это функция на V.
Обозначаем: $k(x) := b(x, x)$, если $k(x) \not\equiv 0$.

Если b - кососимметрическая функция, то $b(x, x) = 0 \Longrightarrow k(x) \equiv 0$. В общем случае существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную, таких, что:

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \Longrightarrow b(x, x) = b_+(x, x)$$

Теорема. $\forall$ *квадратичной функции* $\exists!$ *симметрическая билинейная функция, которая её порождает.*

Доказательство. Допустим, что $b(x, y) = b(y, x)$ - симметрическая билинейная функция и $k(x) = b(x, x)$. Тогда $\forall x, y \in V$:

$$k(x + y) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = \\ = b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = k(x) + 2b(x, y) + k(y)$$

Так как $\mathrm{char}\mathbb{F} \neq 2$, то:

$$b(x, y) = \frac{k(x + y) - k(x) - k(y)}{2}$$

$\square$

Определение. Билинейная функция $b(x, y) = \frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$ называется поляризацией квадратичной функции k.

Далее будем считать матрицу квадратичной формы матрицей её полярной симметрической билинейной функции $b(x, y)$

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i y_i + \sum_{i<j} b_{ij} x_i y_j + \sum_{i>j} b_{ij} x_i y_j$$

$$\forall i, j: \ b_{ij} = b_{ji} \Longrightarrow b(x, x) = k(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} b_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

Пример. Пусть $k(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 - 7x_3^2$, тогда:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Определение. Пусть $b(x, y)$ - симметрическая или кососимметрическая билинейная функция и $\varnothing \neq L \leqslant V$. Ортогональным дополнением к L относительно билинейной формы $b(x, y)$ называется:

$$L^{\perp} := \{y \in V \mid b(x, y) = 0,\ \forall x \in L\}$$

Замечание. Запись $x \perp y$ означает, что $b(x, y) = 0$.

Определение. $V^{\perp} = \{y \in V \mid b(x, y) = 0,\ \forall x \in V\}$ - ядро формы.

Определение. Билинейная функция $b(x, y)$ называется невырожденной, если:

$$\mathrm{Ker}(b) = V^{\perp} = \{0\}$$

Упражнение. $b(x, y)$ - невырожденная функция $\iff \det B \neq 0$.

16.3 Квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма в некотором базисе называется диагональной, если в этом базисе:

$$k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2,\ \text{где } \alpha_i \in \mathbb{F}$$

Теорема. *В конечномерном пространстве V ($char\mathbb{F} \neq 2$) $\exists$ базис, в котором эта форма диагональна.*

Доказательство. (Алгоритм Лагранжа - метод выделения полных квадратов)
По формуле **(1)**:

$$k(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j$$

1. Основной случай:
   $\exists i : b_{ii} \neq 0 \implies$ можно перенумеровать неизвестные x_1, …, x_n так, что $b_{11} \neq 0$. Выделим в $k(x)$ все одночлены, содержащие x_1:

   $$k(x) = b_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} b_{1i} x_i + \widetilde{k}(x_2, \ldots, x_n)$$

   и дополним выражение до квадрата:

   $$k(x) = b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i + (\sum_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2) - \frac{(\sum\limits_{i=2}^{n} b_{1i} x_i)^2}{b_{11}} + \widetilde{k} =$$

   $$= b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2 + k_2(x_2, \ldots, x_n)$$

Затем для формы $k_2(x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=2}^{n} b'_{ii}x_i^2 + \sum\limits_{2\leqslant i<j\leqslant n} b'_{ij}x_ix_j$ найдём коэффициент $b'_{jj} \neq 0$ и выделим квадрат как на предыдущем шаге. На каждом шаге число переменных уменьшается на единицу, а значит, за конечное число шагов (а именно $\leqslant n-2$) форма приобретёт диагональный вид.

2. Особый случай:
   $\forall i:\ b_{ii} = 0$, но так как $k(x) \not\equiv 0 \Longrightarrow \exists$ индексы i и j такие, что $b_{ij} \neq 0$, то есть в выражение $k(x)$ входит одночлен $2b_{ij}x_ix_j$.
   Пусть $x_i = x'_i + x'_j$ и $x_j = x'_i - x'_j$, тогда $x_ix_j = x_i'^2 - x_j'^2$, то есть появился квадрат с коэффициентом, не равным нулю $\Longrightarrow$ можно перейти к общему случаю.

□

Замечание. В благоприятном случае, когда на первом шаге коэффициент при x_1 не равен нулю, на втором шаге коэффициент при x_2 не равен нулю и т.д., матрица замены будет иметь вид:

$$C^{-1}_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \ldots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица с 1 на диагонали $\Longrightarrow |C^{-1}_{e\to e'}| = 1 \neq 0$.

Определение. Форма $k(x_1, \ldots, x_n)$ называется канонической(нормальной), если:

1. (над $\mathbb{R}$) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: -1, 0, 1
2. (над $\mathbb{C}$) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: 0, 1

Примеры.

1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{nn}x_n^2 = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \ldots + \alpha_nx_n^2$$

   Если $rkB = r \Longrightarrow k(x) = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \ldots + \alpha_rx_r^2(\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = 0)$.
   Если $\alpha_i > 0$, то введём обозначение:

$$\widehat{x}_i = \sqrt{\alpha_i}x_i \Longrightarrow k = \widehat{x}_1^2 + \ldots + \widehat{x}_p^2 - \widehat{x}_{p+1}^2 - \ldots - \widehat{x}_r^2$$

   где p - количество коэффициентов $\alpha_i > 0$.
   Если $\alpha_i < 0 \Longrightarrow \widehat{x}_i = -\sqrt{\alpha_i}x_i$.

2. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$\forall i = \overline{1,r}: \ \widehat{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i \Longrightarrow k = \widehat{x}_1^2 + \ldots + \widehat{x}_r^2$$

Таким образом, в вещественном случае для любой квадратичной формы $k(x)$ существует замена координат $X = CY (|C| \neq 0)$ такая, что в новых координатах $k = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum\limits_{j=p+1}^{p+q} x_j^2$.

Определение. p в такой записи называется положительным индексом инерции, q - отрицательным индексом инерции.

Теорема. ***единственности (закон инерции)***
Если в некоторых базисах $e_1, ...e_n$ и $f_1, ..., f_n$ квардатичная форма k имеет канонический вид

$$k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2 = \sum_{i=1}^{p'} z_i^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} z_j^2$$

то $p = p', q = q'$.

Доказательство. Так как $p+q = rkB = p'+q'$, достаточно доказать, что $p = p'$. От противного: пусть $p' < p$. Рассмотрим подпространства $U_1 = \langle e_1, .., e_p \rangle, U_2 = \langle f_{p'+1}, .., f_n \rangle$. Очевидно, $\dim U_1 = p, \dim U_2 = n - p'$.

$$\dim U_1 + \dim U_2 = p - p' + n > n; \ \ U_1 + U_2 \subset V \Rightarrow dim(U_1 + U_2) \leq n$$

Из формулы Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow dim(U_1 \cap U_2) > 0$$

Рассмотрим вектор $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$:

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \Rightarrow k(v) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \geq 0$$

С другой стороны:

$$v = \sum_{k=p'+1}^{n} \beta_k f_k \Rightarrow k(v) = - \sum_{k=p'+1}^{n} \beta_k^2 \leq 0$$

Противоречие с $v \neq 0$. $\square$

16.4 Знакоопределённые квадратичные формы

Определение. Пусть $b(x, y)$ - симметрическая билинейная форма. Векторы u, v называются *ортогональными*, если $b(u, v) = 0$. Обозначается $u \perp v$.

Определение. Базис $e_1, ..., e_n$ в V - *ортогональный*, если $b(e_i, e_j) = 0 (i \neq j)$.

Определение. Для квадратной матрицы B главными минорами (угловыми минорами) называются миноры $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$, где $\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$. Определим $\Delta_n = |B|, \Delta_0 = 1$.

Теорема. ***Якоби*** *Пусть $k(x) (= b(x, x), b -$ симм. б. ф.$)$ такова, что главные миноры её матрицы B в нек. базисе $e : \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1} \neq 0$ Тогда в V существует базис (и замена координат $X = CY$), в котором*

$$k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$$

Доказательство. Будем строить базис e' из базиса e, ортогональный относительно $b(x, y)$ (алгоритм ортогонализации Грама/Шмидта).

$$e'_1 := e_1; \quad \forall k \geq 1 \ \langle e'_1, ..., e'_k \rangle = \langle e_1, ..., e_k \rangle$$

причём $b(e'_i, e'_j) = 0 (1 \leq i \neq j \leq k)$
Шаг алгоритма: допустим, что $k > 1$ и векторы $e'_1, ..., e'_{k-1}$ уже построены. Будем искать e'_k в виде

$$e'_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e'_i$$

где λ_i найдём из условия $b(e'_k, e'_j) = 0, \ j = 0, ..., k - 1$

$$b(e'_k, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_j b(e'_i, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \lambda_j b(e'_j, e'_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = -\frac{b(e_k, e'_j)}{b(e'_j, e'_j)}$$

Покажем по индукции, что $b(e'_j, e'_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \neq 0$.
Обратим внимание, что матрица перехода от $e_1, ..., e_{k-1}$ к $e'_1, ..., e'_{k-1}$ - верхняя треугольная с 1 по диагонали (предп. индукции). Запишем: $C_{(e_1,...,e_k) \to (e'_1,...,e'_k)} = \begin{pmatrix} C_{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где по предположению индукции $C_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ B - матрица

билин. формы $b(x,y)$ в базисе e, B' - в базисе e', который мы строим.

$$B'_{k|\langle e'_1,...,e'_k\rangle} = C_k^T B_{k|\langle e_1,...,e_k\rangle} C_k \Rightarrow \det(B'_{k|\langle e'_1,...,e'_k\rangle}) = (\det C_k)^2 \cdot \det B_{k|\langle e_1,...,e_k\rangle}$$

$$\Delta'_k = \det(B'_{k|\langle e'_1,...,e'_k\rangle}) = b'_{11}...b'_{kk} = \Delta_k$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot ... \cdot \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}} \cdot b_{kk} = \Delta_k \Rightarrow b_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

□

Далее рассматриваем $F = \mathbb{R}$.

Определение. Квадратичная форма $k(x)$ на пр-ве V над $\mathbb{R}$ называется положительно определённой, если $\forall\ x \neq 0 k(x) > 0$ (обозн. $k > 0$); отрицательно определённой, если $\forall\ x \neq 0 k(x) < 0$ (обозн. $k < 0$); неотрицательно определённой, если $\forall\ x k(x) \geq 0$ (обозн. $k \geq 0$); неположительно определённой, если $\forall\ x k(x) \leq 0$ (обозн. $k \leq 0$).

Утверждение. *Квадратичная форма $k(x)$ является*

1. *положительно определённой* $\Leftrightarrow p = n, q = 0$*;*
2. *отрицательно определённой* $\Leftrightarrow p = 0, q = n$*;*
3. *неотрицательно определённой* $\Leftrightarrow q = 0$*;*
4. *неположительно определённой* $\Leftrightarrow p = 0$*;*
5. *знаконеопределённой* $\Leftrightarrow p, q > 0$*.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма. *Если кв. форма $k > 0$, то $\det B = \Delta_n \neq 0$.*

Доказательство. Т.к. $k > 0$, $p = n$, т.е. существует базис, в котором $k(x') = {x'_1}^2 + ... + {x'_n}^2 \Rightarrow \Delta'_n = 1 > 0$.
А так как $B' = C^T BC$, $|B'| = |C|^2 \cdot |B| \Rightarrow \det B > 0$. □

Теорема. ***Критерий Сильвестра***
Квадратичная форма $k(x)$, имеющая в некотором базисе матрицу B, является

1. *положительно определённой* $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, ..., \Delta_n > 0$*.*
2. *отрицательно определённой* $\Leftrightarrow \forall k\ (-1)^k \Delta_k > 0$*.*

Доказательство. Для положительной определённости:

$\Leftarrow$: По теореме Якоби $\exists$ базис, в котором $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$. Т.к все $\Delta_i > 0$ (знакочередующиеся для отрицательного случая), все коэффициенты $> 0 (< 0)$, т.е. значение формы на любом ненулевом векторе имеет необходимый нам знак.

$\Rightarrow$: $k > 0 \Rightarrow \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot ... \cdot \Delta_n \neq 0$ (k-ый минор ненулевой по лемме для угловой подматрицы)$\Rightarrow$ применима т. Якоби, из которой следуют необходимые нам знаки на всех Δ.

Для отрицательной определённости: $k < 0 \Leftrightarrow -k > 0$, причём при домножении матрицы на -1 знак меняют только миноры нечётного порядка. □

Замечание. Т.к. $b_{ii} = k(e_i)$, у положительно определённой формы все $b_{ii} > 0$, у отрицательной все $b_{ii} < 0$.

Замечание. Пусть $k(x)$ такая, что $\Delta_1, ..., \Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = ... = \Delta_n = 0$. Тогда p - число сохранений знака в последовательности $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_r$, а q - число перемен знака в этой последовательности.

Доказательство. Из теоремы Якоби в подходящем базисе

$$k(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + ... + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} y_k^2 + ... + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} y_r^2$$

Тогда каждое сохранение знака соответствует положительному коэффициенту, а каждая перемена знака - отрицательному коэффициенту, откуда и следует необходимое равенство. □

16.5 Кососимметрические билинейные формы

$$\forall\ x, y \in V: \quad b(y, x) = -b(x, y) \quad (\mathrm{char}\ \mathbb{F} \neq 2)$$

Заметим, что $\forall x \in V:\ b(x, x) = 0$. Если же $b(x, x) \equiv 0$:

$$0 = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + b(x, y) + b(y, x) \Rightarrow b(x, y) = -b(y, x)$$

Поэтому условие $b(x, x) \equiv 0$ не только эквивалентно кососимметричности формы, но и применимо в случае char $F = 2$.

Лемма. *Пусть $b(x, y)$ - симметрическая или кососимметрическая билинейная форма на V $(\dim V = n < \infty)$, $U \subset V$ такое что $b|_U$ невырождена. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$.*

Доказательство. $U^\perp = \{y \in V: \ b(x,y) = 0 \ \forall x \in U\}$.
В координатах: если выбрать базис $e_1, ..., e_n$ в U ($m = \dim U, 0 < m < n$), то $y \in U^\perp \Leftrightarrow b(e_i, y) = 0, \ i = 1, ..., m$.
Если $b(x,y) = 0 \ \forall x \in U$, то $b(e_i, y) = 0, \ i = 1, ..., m$
Обратно, если $b(e_i, y) = 0, \ i = 1, ..., m$, то $\forall x \in U \ x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i \Rightarrow b(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i b(e_i, y) = 0$.
Запишем систему уравнений для нахождения y, выбрав базис $e_1, ..., e_m \in U$ и дополнив его до базиса $e_1, ..., e_n \in V$. В этом базисе $e_i^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $b(e_i, y) =$

$(0, ..., 1, ..., 0) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (b_{i1}, ..., b_{in}) Y^\uparrow$
Система имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} Y = 0$$

Т.к. матрица $B|_U$ невырождена, $\mathrm{rk} B = m$, т.е. система имеет $n - m$ ЛНЗ решений, а значит $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.
Если же $v \in U \cap U^\perp$, то $\forall \ x \in U \ b(x, v) = 0$, а из невырожденности формы $b|_U$ тогда следует, что $v = 0$. $\square$

Теорема. *Для любой кососимметрической билинейной формы* $b(x,y) \not\equiv 0$ $\exists$ *такой базис* $f_1, ..., f_n \in V$, *в котором матрица этой формы имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \boxed{I_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{I_s} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

где $I_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $rkB = 2s$

Доказательство. Т.к. $b(x,y) \not\equiv 0$, $\exists$ векторы $e_1, e_2 \in V$, такие что $b(e_1, e_2) = \beta_{12} \neq 0$. Рассмотрим

$$f_1 = \frac{e_1}{\beta_{12}}, f_2 = e_2 \Rightarrow b(f_1, f_2) = 1, b(f_2, f_1) = -b(f_1, f_2) = -1$$

Возьмём $W = U^\perp$ в пр-ве V. Тогда $V = U \oplus U^\perp$ и $\tilde{b} = b|_{U^\perp}$ также кососимметрическая форма, т.е. можем провести индукцию по $n = \dim V$ (базу $n = 2$ доказали). $\dim W = n - 2$, т.е. $\exists$ базис $f_3, ..., f_n$, в котором матрица $b|_{U^\perp}$ имеет вид $\begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{I} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, т.е в базисе $f_1, ..., f_n$ матрица b имеет нужный вид. □

17 Евклидовы пространства и их обобщения

17.1 Основные понятия и утверждения

Основное поле - $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Определение. Вещественное конечномерное векторное пространство $\mathcal{E}$ называется евклидовым, если на $\mathcal{E}$ задано скалярное произведение (x, y).

Определение. Скалярное произведение (x, y) - симметрическая билинейная функция такая, что соответственная квадратичная форма (x, x) положительно определена.

Определение. Длина (норма) вектора $x \in \mathcal{E}$: $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Теорема. ***Неравенство Коши-Буняковского-Шварца***
$\forall\ x, y \in \mathcal{E}:\ |(x,y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство выполнено $\Longleftrightarrow x \parallel y$ (либо $x = 0$ или $y = 0$, либо $y = \lambda x$).

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = (tx - y, tx - y) = t^2(x,x) - 2t(x,y) + (y,y) \geqslant 0$. Это квадратичная функция относительно t:

$$f(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathcal{D}}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leqslant 0 \Rightarrow (x,y) \leq \sqrt{(x,x)(y,y)} = |x| \cdot |y|$$

Равенство выполнено $\Longleftrightarrow (tx - y, tx - y) = 0 \Rightarrow y = tx$. □

Теорема. ***Неравенство треугольника***
$\forall x, y \in \mathcal{E}: \ |x+y| \leq |x| + |y|$ *(равенство выполнено* $\Longleftrightarrow x \upuparrows y$ *)*

Доказательство.

$$(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq |x|^2 + 2|x||y| = (|x|+|y|)^2$$

$$|x+y|^2 \Longleftrightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

$\square$

Координатная запись: пусть в V фиксированный базис $e_1, ..., e_n$, то:

$$(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j)$$

Определение. $G_e = ((e_i, e_j))$ - матрица Грама базиса e

$$G_e^T = G_e$$

Т.к. (x,x) - положительно определенная квадратичная форма, то матрица:

$$G_e = (g_{ij})$$

может служить матрицей Грама $\Longleftrightarrow \triangle_1 > 0, ..., \triangle_n > 0$
В частности: $\det G_e > 0$ (определитель Грама)

$$\boxed{(x,y) = X^T G_e Y}$$

Определение.

$$x \perp y \Longleftrightarrow (x,y) = 0$$

Определение. Базис $e_1, ..., e_n$ называется ортогональным, если:

$$e_i \perp e_j \ \text{ при } i \neq j$$

Если при этом длина каждого вектора $e_1, ..., e_n$ равна 1, то базис называется ортонормированным.

Следствие. $e_1, ..., e_n$ - *ортонормированный базис, если* $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Следствие. *Если базис ортонормированный, то* $G = E$ *и* $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Теорема. *Пусть* $e' = eC_{e \to e'}$ *- новый базис. Тогда:*

1. *Если* e *и* e' *- ортонормированные базисы, то* $C_{e \to e'}$ *ортогональна;*

2. *Если e - ортонормированный базис и $C_{e\to e'}$ ортогональная матрица $\Longrightarrow$ $e' = eC$ - ортонормированный базис.*

Замечание. C - ортогональная, если $C^TC = E$

Доказательство.

1. По определению матрицы перехода $C_{e\to e'} = \begin{pmatrix} e_1'^{\uparrow} & \cdots & e_n'^{\uparrow}\end{pmatrix}$

   $C^T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} e_1'^{\to} \\ \vdots \\ e_n'^{\to}\end{pmatrix}$ Обозначим d_{ij} - (ij)элемент матрицы C^TC :

   $$d_{ij} = e_i'^{\to} \cdot e_j'^{\uparrow} = (e_i', e_j') = \delta_{ij}$$

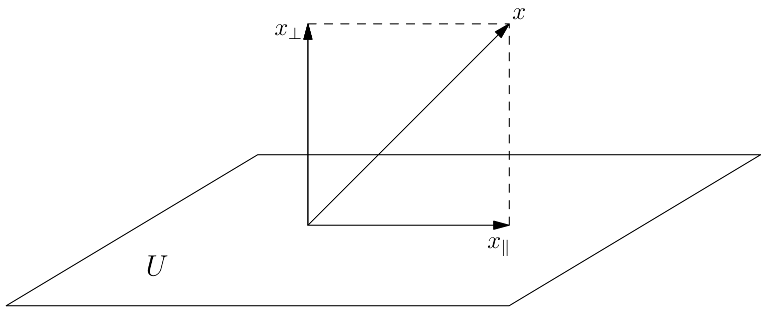
   т.к. базис e ортонормированный $\Longrightarrow d_{ij} = \delta_{ij} \Longrightarrow C^TC = E$

2. Рассмотрим $e' = eC_{e\to e'}$, тогда $e_j^{\uparrow}$ - это j столбец матрицы $C_{e\to e'}$
   По условию $C^TC = E \Longleftrightarrow e_i'^{\to} \cdot e_j'^{\uparrow} = \delta_{ij} = (e_i', e_j')$

$\square$

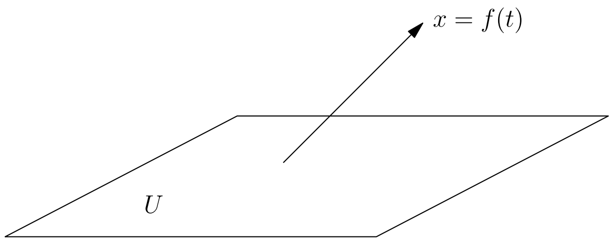
Лемма. *Если $a_1, ..., a_m \in \mathcal{E}$ - ортогональная система векторов $\Longrightarrow a_1, ..., a_m$ ЛНЗ*

Т.о. $\forall x \in \mathcal{E}$ единственным образом разлагается в сумму $x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}$



$x_{\shortparallel} \in U$, $x_{\shortparallel}$ - ортогональная проекция вектора x на U
$x_\perp \in U^\perp$, $x_\perp$ - ортогональная составляющая x относительно U

Пример.



$U = \langle 1, t, ..., t^{n-1}\rangle$

Надо подобрать такой многочлен $p(t) \in U$, чтобы:

$$\| f(t) - p(t) \| = \min$$

Где $p(t) = f(t)$ - псевдорешение

Как конкретно находить такое разложение?

1 способ: Выбрать ортогональный базис в U и дополнить его до ортогонального базиса в $\mathcal{E}$

Тогда:

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}(x_i, e_i)e_i}_{x_{\shortparallel}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n}(x_i, e_i)e_i}_{x_\perp} = x_{\shortparallel} + x_\perp$$

2 способ: Выбрать в U произвольный базис $a_1, ..., a_m$ и искать разложение в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + x_\perp \ \ | \cdot a_j \Longrightarrow (x_i, a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a_i, a_j) + \underbrace{(x_\perp, a_j)}_{=0}$$

Неоднородная СЛУ с неизвестными α_i, основная матрица:

$$((a_i, a_j)) = G_{\{a_1, ..., a_m\}}$$

где $\det G \neq 0 \Longrightarrow$ по теореме Крамера $\exists!\, \alpha_1, ..., \alpha_m \Longrightarrow \exists!\, x_{\shortparallel} \Longrightarrow x_\perp = x - x_{\shortparallel}$

Свойства. ***операций ортогонального дополнения***

1. $(U^\perp)^\perp = U$

2. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

3. $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

Доказательство.

1. Пусть $x \in U,\ y \in U^\perp$, тогда:

$$(y, x) = 0\ \forall y \in U^\perp \Rightarrow x \in (U^\perp)^\perp \Longrightarrow U \subseteq (U^\perp)^\perp$$

Причем:

$$\dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = n - (n - \dim U) = \dim U \Longrightarrow U = (U^\perp)^\perp$$

2. Пусть $v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \Longrightarrow v \perp U_1$ и $v \perp U_2 \Longrightarrow \forall x = u_1 + u_2$:

$$(v, x) = (v, u_1) + (v, u_2) = 0 \Longrightarrow v \in (U_1 + U_2)^{\perp} \Longrightarrow U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq (U_1 + U_2)^{\perp}$$

Если $w \in (U_1 + U_2)^{\perp}$, то $\forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2 :\ (w, u_1 + u_2) = 0$
В частности:

$$\begin{cases} \forall u_1 \in U_1 :\ (w, u_1) = 0 \ \Longrightarrow w \in U_1^{\perp} \\ \forall u_2 \in U_2 :\ (w, u_2) = 0 \ \Longrightarrow w \in U_2^{\perp} \end{cases} \Longrightarrow w \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

То есть $(U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \Longrightarrow$ имеет место равенство:

$$(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

3. Возьмем $(U_1^{\perp} + U_2^{\perp}) = (U_1^{\perp})^{\perp} \cap (U_2^{\perp})^{\perp} = U_1 \cap U_2$

$$\Longrightarrow ((U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (U_1 \cap U_2)^{\perp} \Longrightarrow U_1^{\perp} + U_2^{\perp} = (U_1 \cap U_2)^{\perp}$$

□

Утверждение. *Вектор наименьшей длины, соединяющий точку из подпространства U с концом вектора x - $x_{\perp}$.*

Доказательство. Обозначим $x_{\shortparallel} = y,\ x_{\perp} = z$, а вектор из начала x в произвольную точку U - вектор v

Какой тут рисунок то?

Докажем, что $|x - v| \geqslant |z|$, причём равенство достигается при $v = y$:

$$x - v = x - y + y - v = z + y - v$$

Т.к. $z \in U^{\perp}, (y - v) \in U$,

$$z \perp (y - v) \Longrightarrow |x - v|^2 = |z|^2 + |y - v| \geqslant |z|^2$$

причём равенство при $|y - v| = 0 \Longrightarrow y = v$. □

Это подтвержает осмысленность определения $\rho(x, U) = |x_{\perp}|$.

Упражнение. Докажите отсюда, что $\angle(x, v) \geqslant \angle(x, y)$.

Определение. Углом между вектором и подпространством будем называть:

$$\angle(x, v) = \angle(x, y)$$

Частный случай: $\dim U = n-1$ ("гиперплоскость"):
В ортонормированном базисе U задаётся уравнением $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$, а ортогональное дополнение $U^\perp = \langle n = (a_1, ..., a_n)\rangle$ (n - вектор нормали). Тогда:

$$\rho(x, U) = |x_\perp| = \frac{V_{\langle e_1, ..., e_{n-1}, x\rangle}}{V_{\langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle}}$$

где $V_{\langle a_1, ..., a_k\rangle}$ - объём параллелепипеда, натянутого на $a_1, ..., a_k$.

Определение. n-мерным параллелепипедом с рёбрами $e_1, ..., e_n$ называется:

$$\Pi_{\langle e_1, ..., e_n\rangle} = \{v = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n, 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\}$$

Определение. В общем случае объём параллелепипеда определяется рекурсивно:

$$V_{\langle e_1, ..., e_n\rangle} = V_{\langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle} \cdot |e_{n\perp}|, \text{ где } e_{n\perp} \text{ - проекция } e_n \text{ на } \langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle$$

Заметим, что если $e_1, ..., e_n$ попарно ортогональны, то $V_{\langle e_1, ..., e_n\rangle} = |e_1| \cdot ... \cdot |e_n|$.

Объём не изменится, если к векторам применить процесс ортогонализации (с унитреугольной матрицей перехода).
Тогда:

$$V_{\langle e'_1, ..., e'_n\rangle} = |e'_1| \cdot ... \cdot |e'_n| = \sqrt{|G_{\{e'_1, ..., e'_n\}}|}$$

В ортогональном базисе:

$$G_{\{e'_1, ..., e'_n\}} = \begin{pmatrix} |e'_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |e'_n|^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |G_{\{e'_1, ..., e'_n\}}| = |e'_1|^2 \cdot ... \cdot |e'_n|^2$$

$$G_{e'} = C^T G_e C \Longrightarrow |G_{e'}| = |C|^2 |G_e| = |G_e|$$

Упражнение. Доказать отсюда. что если $U = \langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle$, то:

$$\rho^2(x, U) = \frac{|G_{\{e_1, ..., e_n\}}|}{|G_{\{e_1, ..., e_{n-1}\}}|}$$

17.2 Линейные операторы в евклидовом пространстве

Пусть $\mathcal{E}$ - евклидово пр-во, $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - лин. оператор в $\mathcal{E}$.

Определение.

1. Оператор $\varphi^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - сопряжённый к φ, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E}: \ (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \qquad (1)$$

2. Оператор φ - самосопряжённый, если:

$$\varphi^* = \varphi \Longrightarrow \forall x, y \in \mathcal{E}: \ (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \tag{2}$$

3. Оператор φ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E}: \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \tag{3}$$

   В частности, для ортогонального $\varphi : \forall x \in \mathcal{E} \ \ |\varphi(x)| = |x|$.

Условия (1)-(3) через матрицу Грама

Пусть в $\mathcal{E}$ зафиксирован базис $e = (e_1, ..., e_n)$ $(\dim \mathcal{E} = n)$. Пусть $x = eX$, $y = eY, G_e = ((e_i, e_j))$ - матрица Грама базиса e, A_φ - матрица φ в базисе e.
(1): $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$(A_\varphi X)^T G_e Y = X^T A_\varphi^T G_e Y = X^T G_e A_{\varphi^*} Y \Longrightarrow A_\varphi^T G_e = G_e A_{\varphi^*} \quad (1')$$

(2): В частности,

$$\varphi^* = \varphi \Longleftrightarrow A_\varphi^T G_e = G_e A_\varphi (2')$$

Если e - ортонормированный, то $G_e = E$, и $A_\varphi^T = A_\varphi$, т.е. A_φ - симметрическая матрица.
(3): φ - ортогональный $\Longleftrightarrow$ $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$(A_\varphi X)^T G_e (A_\varphi Y) = G_e Y \Longrightarrow A_\varphi^T G_e A_\varphi = G_e (3')$$

Если $G_e = E$, то $A_\varphi^T A_\varphi = E$, т.е. A_φ - ортогональная матрица.

Теорема. ***Свойства сопряжённых операторов***

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$*;*

2. $\mathrm{Ker}\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$

3. $\mathrm{Ker}\varphi = (\mathrm{Im}\varphi^*)^\perp$

Доказательство.

1. В ортонормированном базисе:

$$A_{\varphi^*} = A_\varphi^T \Longrightarrow A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = (A_\varphi^T)^T = A_\varphi$$

   Т.к. в фиксированном базисе имеется взаимно однозначное соответствие операторов и их матриц, $(\varphi^*)^* = \varphi$.

2. Сравним размерности:

$$\dim \mathrm{Ker}\varphi^* = n - \mathrm{rk}(A_{\varphi^*}) = n - \mathrm{rk}(A_\varphi^T) = n - \mathrm{rk}(A_\varphi)$$

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \mathrm{rk}A_\varphi \Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}\varphi)^\perp = \mathrm{n} - rkA_\varphi$$

Докажем, что $\mathrm{Im}\varphi \subseteq (\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp$ (отсюда $(\mathrm{Im}\varphi)^\perp \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^*$):
Пусть $v \in \mathrm{Im}\varphi \Longrightarrow v = \varphi(x)$, $y \in \mathrm{Ker}\varphi^*$. Тогда:

$$(v, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (x, 0) = 0 \Longrightarrow v \perp \mathrm{Ker}\varphi^*$$

Т.к. размерности равны и $(\mathrm{Im}\varphi)^\perp \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^*$, то $\mathrm{Ker}\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$.

3. Следует из (2) подстановкой φ^* вместо φ.

□

Следствие. ***Теорема Фредгольма*** *СЛУ $AX = b$ с квадратной матрицей A порядка n совместна $\Longleftrightarrow$ для любого Y - решения однородной сопряжённой системы - выполнено условие $Y \perp b$.*

Доказательство. $AX = b$ совместна $\Longleftrightarrow b \in \mathrm{Im}A$

$$Y \in \mathrm{Ker}\varphi^* = \mathrm{Ker}A^T$$

Т.к. $\mathrm{Ker}\varphi^* = (\mathrm{Im}A)^\perp$, то система совместна $\Longleftrightarrow b \perp \mathrm{Ker}\varphi^*$ □

17.3 Самосопряжённые операторы

Лемма. *Пусть $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - лин. оператор, $U \subset E : \varphi(U) \subseteq U$.*
Тогда $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^\perp, x \in U$ выполнено $(x, \varphi^*(y)) = 0$:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0, \text{ т.к. } \varphi(x) \in U, \ y \in U^\perp$$

□

Утверждение. *1. Если λ_1, λ_2 - различные собственные значения самосопряжённого оператора φ, x_1, x_2 - соответсвующие им собственные векторы, то $x_1 \perp x_2$;*

2. Все характеристические числа самосопряжённого оператора $\in \mathbb{R}$.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi^* = \varphi$. Тогда:

$$(\varphi(x_1), x_2) = \lambda_1(x_1, x_2);\ (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

   Из $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует $(x_1, x_2) = 0$.

2. От противного: пусть $\exists \lambda_1 = \alpha + i\beta$ - характеристическое число для самосопряжённого φ с $\beta \neq 0$.
   Как было доказано ранее, $\exists$ φ-инвариантное подпространство U размерности 2, на котором $\varphi|_U$ имеет собственные значения $\alpha \pm i\beta$. U можно рассматривать как евклидово пр-во со скалярным произведением $(x, y)|_U$. Тогда $\varphi|_U$ - также самосопряжённый на U.
   Выберем ортонормированный базис в U. Тогда в этом базисе $\varphi|_U$ имеет симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Её характеристические числа:

$$|A - \lambda E| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\mathcal{D} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$$

   Отсюда корни характеристического многочлена вещественные, что противоречит предположению.

□

Теорема. *Для любого самосопряжённого оператора $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ в $\mathcal{E}$ существует базис из собственных векторов этого оператора.*

Доказательство. Индукция по $\dim \mathcal{E} = n$:
База: $n = 1$. Тогда $\forall x \in \mathcal{E}:\ \varphi(x) = \lambda_1 x$, т.е. любой вектор длины 1 подойдёт в качестве ортонормированного базиса.
Шаг: Пусть $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ - какое-либо собственное значение для φ. Рассмотрим $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \{0\}$ - оно является φ-инвариантным подпространством.
Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} = \mathcal{E}$, то $\forall x \in \mathcal{E}:\ \varphi(x) = \lambda_1 x$, т.е. в ортонормированном базисе матрица оператора - $\lambda_1 E$;
Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \mathcal{E}$, то по лемме $\mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$ также φ-инвариантно и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$. К ограничению φ на инвариантные подпространства $\mathcal{E}_{\lambda_1}, \mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$ можно применить предположение индукции, если рассмотреть их как отдельные евклидовы пространства. Тогда в них есть ортонормированные базисы из собственных векторов, а тогда их объединение будет искомым ортонормированным базисом для $\mathcal{E}$ (ортогональность векторов из разных базисов следует из утверждения выше). □

Следствие. *Если $\lambda_1, ..., \lambda_s$ - все попарно различные собственные значения самосопряжённого оператора φ, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{E}_{\lambda_s}$.*

Замечание. Если все собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ самосопряжённого оператора φ положительны, то $\exists$ самосопряжённый оператор ψ с положительными собственными значениями такой, что $\psi^2 = \varphi$.

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_n$ - ортонормированный базис из собственных векторов для φ. Тогда:

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ оператор с матрицей } \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} - \psi$$

$\square$

Пример. Пусть $\mathcal{E} = U \oplus U^{\perp}$, т.е. $\forall x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}$.
$\varphi_1(x) = x_{\shortparallel}$ - ортогональное проектирование на U;
$\varphi_2(x) = x_{\shortparallel} - x_{\perp}$ - ортогональная симметрия, или отражение $\mathcal{E}$ относительно U.
Покажем, что φ_1 и φ_2 самосопряжённые:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}, y = y_{\shortparallel} + y_{\perp} :$$

$$(\varphi_1(x), y) = (x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel} + y_{\perp}) = (x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel}) = (x_{\shortparallel} + x_{\perp}, y_{\shortparallel}) = (x, \varphi_1(y))$$

$$(\varphi_2(x), y) = (x_{\shortparallel} - x_{\perp}, y_{\shortparallel} + y_{\perp}) = (x_{\shortparallel}, y_{\shortparallel}) - (x_{\perp}, y_{\perp}) = (x_{\shortparallel} + x_{\perp}, y_{\shortparallel} - y_{\perp}) = (x, \varphi_2(y))$$

17.4 Ортогональные операторы

Определение. $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

Из определения следует, что $\forall x \in \mathcal{E}$: $|\varphi(x)| = |x|$ - φ сохраняет длины $\Longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \Longrightarrow \varphi$ инъективный, а так как $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$, получаем, что φ - биективный (и обратимый) оператор.

Утверждение. *Пусть $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор.*
Тогда φ^{-1} также ортогональный, причём $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Доказательство. Покажем, что $\forall x, y \in \mathcal{E}(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x, y)$. Выберем $x' = \varphi^{-1}(x), y' = \varphi^{-1}(y)$. Тогда:

$$(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x', y') = (\varphi(x'), \varphi(y')) = (x, y)$$

По определению: $\varphi^*(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)),\ \forall x, y \in \mathcal{E}$
Т.к. φ обратим, $\exists y' \in E: \ y = \varphi(y')$

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(x), \varphi(y')) = (x, y') = (x, \varphi^{-1}(y)) \Longrightarrow (x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi^{-1}(y))$$

$$(x, \varphi^*(y) - \varphi^{-1}(y)) = 0 \ \forall x, y \in \mathcal{E} \Longrightarrow \varphi^*(y) = \varphi^{-1}(y) \ \forall y \in \mathcal{E}$$

т.е. $\varphi^* = \varphi^{-1}$ $\square$

Лемма. *Пусть* $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *- ортогональный оператор,* $U \subset E: \ \varphi(U) \subseteq U$*. Тогда:*

$$\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$$

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^\perp, x \in U$ выполнено $(x, \varphi(y)) = 0$.
Т.к. φ обратим, $\exists x' : x = \varphi(x')$, т.е. $x' = \varphi^{-1}(x) \in U$. Отсюда:

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi(x'), \varphi(y)) = (x', y) = 0, \text{ т.к. } x' \in U, \ y \in U^\perp$$

$\square$

Теорема. *Пусть* $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *- ортогональный оператор.*

1. *Собственные значения* φ *- только* ± 1*, причём отвечающие этим значениям собственные векторы* $\perp$*.*

2. *Все характеристические числа для* φ *над* $\mathbb{C}$ *имеют модуль 1.*

Доказательство.

1. Пусть $\varphi(x) = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2 (x, x) \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

   Если $\varphi(x) = x, \varphi(y) = -y (x, y \neq 0)$, то

$$(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = -(x, y) \Longrightarrow (x, y) = 0$$

$\square$

Определение. В пространсве $\mathcal{C}^n$ введем скалярное произведение с требованиями:

1. Линейность по 1 аргументу

2. Вместо симметричности потребуем:

$$(y, x) = (\overline{x, y})$$

3. $(x, x) \neq 0, \ (x, x) = 0$, если $x = 0$

Следовательно, если $\lambda \in \mathcal{C}$, то $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$

Будем обозначать через $\varphi : \ (C)^n \to (C)^n$ заданной матрицей A_φ
Если $\lambda = \alpha - i\beta$ - характеристическое число для φ, то:

$$\exists \ v \in (C)^n : \ \varphi(v) = \lambda(v)$$

Вычислим $(\varphi(v), \varphi(v)) \xrightarrow{\text{ортогонализируем}} (\varphi, \varphi) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda\overline{\lambda}(v, v) \Longrightarrow \lambda\overline{\lambda} = |\lambda| = 1$
Т.о. $\lambda = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$ (это мы что то доказали)

Теорема. *Если $\varphi : \ \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор, то в $\mathcal{E} \exists$ ортонормированный базис, в котором:*

$$A^{\varphi, f} = \begin{pmatrix} \boxed{\Phi_1} & & & & & & \\ & \boxed{\Phi_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \boxed{\Phi_s} & & & \\ & & & & \boxed{1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Phi_i = \begin{pmatrix} \cos_i \alpha & -\sin_i \alpha \\ \sin_i \alpha & \cos_i \alpha \end{pmatrix}$$

Порядок матрицы равен $n = \dim \mathcal{E}$ (s - количество 1 и -1 - определяется единственным образом)

Определение. Оператор φ собственный, если $\dim \varphi = 1$, при $\dim \varphi = -1$ - не собственный

Частный случай теоремы: $\forall$ собственный оператор φ в трехмерном пространсве - это поворот вокруг оси на некоторый угол.
Объяснение: Т.к. 3 - нечетное число, то у φ есть вещественное собственное значение $\lambda = \pm 1$, т.к. $\det \varphi > 0$, то $\lambda = 1$ и e_3 - собственный вектор для этого λ, тогда плоскость $\langle e_3 \rangle^\perp$ - инвариантная плоскость и она поворачивается на некоторый угол.

Доказательство. Если все собственные значения φ - вещественные, т.е. $\lambda = \pm 1$, то φ будет также сопряженным. Если $\lambda_1 = 1$, то $\langle e_1 \rangle$ и $\langle e_1 \rangle^\perp$ - инвариантно
Предположение индукции: Если $n > 1$ и все собственные значения $\varphi = \pm 1$, то в пространстве размерности $< n$ $\exists$ ортонормированный базис из собственных

векторов для $\lambda = \pm 1$
В таком базисе $\exists$ минимальный корень $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то ему отвечает двумерное инвариантное пространство $U < \mathcal{E}$, в ортонормированном базисе:

$$A_\varphi|_U = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Индукция: База индукции $n = 2$
При $n > 2$ предположение индукции: в ортонормированном базисе матрица:

$$A_\varphi|_V = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \Phi_2 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & \Phi_s & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \pm 1 \end{array}\right), \ \dim V < n$$

Нужный базис - объединение ортонормированных бизисов U и V $\square$

Замечание. s - количество пар сопряженных характеристических корней, с учетом кратности

18 Общие линейные операторы

Теорема. *Любой невырожденный линейный оператор φ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ единственным образом может быть представлен в виде: $\varphi = \theta \cdot \rho$, где θ - ортогональный оператор и ρ - самосопряжённый оператор с положительными собственными значениями.*

Теорема. ***Матричная версия***
Любую вещественную матрицу A с $\det A \neq 0$ можно представить в виде произведения $A = Q \cdot R$, где Q - ортогональная, R - симметричная с положительными собственными значениями.

Лемма. *Если оператор $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ невырожденный, то все собственные значения оператора $\varphi^* \cdot \varphi$ положительны.*

Утверждение.

$$(\psi \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot \psi^*$$

Доказательство. Оператор $\varphi^* \cdot \varphi$ - самосопряжённый:

$$(\varphi^* \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot (\varphi^*)^* = \varphi^* \cdot \varphi$$

$\Longrightarrow$ все его собственные значения $\in \mathbb{R}$. Путсь μ - какое-то их них: $(\varphi^* \cdot \varphi)(v) = \mu v$ для подходящего $v \neq 0$. Вычислим μ:

$$((\varphi^* \cdot \varphi)(v), v) = \mu(v, v) = (\varphi(v), (\varphi^*)^*(v)) = (\varphi(v), \varphi(v)) \Longrightarrow \mu = \frac{(\varphi(v), \varphi(v))}{(v, v)}$$

$\Longrightarrow \mu > 0$ □

Замечание. Для любой вещественной матрицы A она является $A = A_\varphi$ в подходящем базисе (этот базис можно выбрать ортонормированным). Будем доказывать матричную версию, используя тот факт, что в ортонормированном базисе: $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$

Доказательство. Предположим, что разложение $A = QR$ уже найдено:

$$\Longrightarrow A^T = R^T Q^T = RQ^T \Longrightarrow A^T A = R(\underbrace{Q^T Q}_{=E})R = R^2$$

- это симметричная матрица с положительными собственными значениями $\Longrightarrow$ R^2 можно привести к диагональному виду: $\exists$ ортогональная матрица C такая, что:

$$C^{-1}(R^2)C = \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R^2 = C\Lambda^2 C^{-1} = C\Lambda^2 C^T \Longrightarrow R = C\Lambda C^T$$

Где $\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$ имеет положительные собственные значения

Тогда $Q = A \cdot R^{-1}$

Проверка:

$$Q^T = (R^{-1})^T A^T = R^{-1} A^T \Longrightarrow Q^T Q = R^{-1}(A^T A)R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} = E$$

□

Определение. Разложение $\varphi = \theta\rho$ или $A = Q \cdot R$ - полярное разложение оператора φ с собственной матрицей A

Определение. Сингулярное разложение: $A = (QC)\Lambda C^T = U\Lambda V$, где Λ - диагональная матрица с положительными собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_m$, U, V - ортогональные матрицы ($\lambda_1, ..., \lambda_m$ - сингулярные числа матрицы A)

19 Квадратичные формы

Пусть $k(x) = b(x, x)$ - квадратичная форма на пространстве $\mathcal{E}$, B - её матрица в некотором базисе ($B^T = B$).

Теорема. *В* B $\exists$ *ортонормированный базис* $f = eC$*, в котором эта форма имеет вид* $k(x) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$*, где* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *- собственные значения* B*.*

Замечание. Векторы базиса f называются главными осями для квадратичной формы k, а сама замена - приведением формы к главным осям.

Доказательство. Примем B за матрицу самосопряжённого оператора φ в некотором ортонормированном базисе. Тогда $\exists$ ортонормированный базис $f_1, ..., f_n$ из собственных векторов оператора φ, т.е. $\exists C$ - ортогональная матрица такая, что

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow C^TBC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

т.е. C - матрица перехода к главным осям. □

Утверждение. *Если* $\mathcal{E}$ *- евклидово пр-во, то* $\mathcal{E}^*$ *изоморфно* E*.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\forall f : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \;\; \exists! a \in \mathcal{E}$ такой, что $\forall x \in \mathcal{E}, f(x) = (a, x)$.
Выберем в $\mathcal{E}$ ортонормированный базис $e = \{e_1, ..., e_n\}$, тогда в нём $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = (a, x)$, где $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. □

Лемма. *Для любой билинейной функции* $b(x, y)$ *на евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ $\exists!$ *линейный оператор* $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *такой, что*

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : \; b(x, y) = (x, \varphi(y)) \quad (1)$$

Доказательство. Выберем произвольный базис e в $\mathcal{E}$ с матрицей Грама G ($\dim \mathcal{E} = n$). Тогда:

$$(1) \Longleftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n : X^TBY = X^T(GA_\varphi)Y \Longrightarrow A_\varphi = G^{-1}B$$

□

Замечание. Пусть $b(x, y) = b(y, x)$. Тогда:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = (y, \varphi(x)) = b(y, x) = b(x, y) = (x, \varphi(y)) \Rightarrow \varphi^* = \varphi$$

Теорема. *Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$ $(\dim V = n)$, f, g - квадратичные функции на V, причём g знакоопределена (в частности, $g > 0$). Тогда в V $\exists$ базис, в котором $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$; $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.*

Доказательство. Рассмотрим порождающие f, g симметрические билинейные формы $f(x, y)$ и $g(x, y)$, т.е. $f(x, x) \equiv f(x), g(x, x) \equiv g(x)$, и обозначим за F, G матрицы этих форм в некотором базисе. Тогда можем задать на пр-ве V скалярное произведение с помощью формы $g : (x, y) = g(x, y)$.

По лемме $\exists!$ $\varphi : V \to V$ - самосопряжённый оператор такой, что $f(x, y) \equiv g(x, \varphi(y))$. Заметим также, что G - матрица Грама для базиса, в котором функция $g(x, y)$ имеет матрицу G. Тогда $A_\varphi = G^{-1}F$.

Так как $\varphi \equiv \varphi^*$, в V существует ортонормированный базис, в котором $A_{\varphi,e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Если $C = C_{e \to e'}$, то $A_{\varphi,e'} = C^{-1} A_\varphi C$, $F_{e'} = C^T F C$.

Тогда во-первых, $C^T G C = G_{e'} = E$, т.к базис ортонормированный, а во-вторых

$$C^{-1} A_{\varphi,e} C = C^{-1} G^{-1} F C = C^{-1}(C C^T) F C = (C^{-1} C) C^T F C = C^T F C = F_{e'}$$

т.е. в новых координатах $F_{e'} = A_{\varphi,e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ и $f(x') = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i {x'_i}^2$ $\square$

Замечание. $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - корни характеристического ур-я

$$|A_\varphi - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow |G^{-1}F - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow |F - \lambda G| = 0 \quad (2)$$

т.е. соответствующие собственные векторы будут решениями СЛУ

$$(F - \lambda G)X = 0 \quad (3)$$

Для каждого собственного значения λ_i нужно найти ФСР для (3) и ортонормировать относительно $g(x, y)$.

20 Полуторалинейные, эрмитовы формы. Унитарные (эрмитовы) пространства

Далее всюду $F = \mathbb{C}, V$ - в.п. над $\mathbb{C}$.

Определение. Функция $f(x, y) : V \times V \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если:

1. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$;
   $f(\lambda_x, y) = \lambda f(x, y)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$;

2. $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$;
   $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

Определение. $f(x, y)$ называется эрмитово симметричной (эрмитовой), если

1. $f(x, y)$ линейна по x;

2. $f(y, x) \equiv \overline{f(x, y)}$ $(\Longrightarrow f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)\ \forall \lambda \in \mathbb{C})$

Заметим, что если $f(x, y)$ эрмитова, то $f(x, x) \equiv \overline{f(x, x)} \Rightarrow f(x, x) \in \mathbb{R}$.

Определение. Квадратичная функция, порождённая эрмитовой формой - это функция $k(x) \equiv f(x, x)$.

Упражнение. Доказать, что для любой квадратичной формы $k(x)$ $\exists!$ эрмитова форма $f(x, y)$ такая, что $f(x, x) \equiv k(x)$.

Если $f(x, y)$ полуторалинейна и эрмитова, то обозначим $F = (f(e_i, e_j))$, и тогда $f(e_j, e_i) = \overline{f(e_i, e_j)} \Longrightarrow F^T = \overline{F} \Longleftrightarrow \overline{F}^T = F$.

Определение. $F^* = \overline{F}^T$ - эрмитово сопряжённая матрица к F.
Если $F^* = F$, то F - эрмитова матрица.

Определение. Скалярное произведение на пр-ве V - функция (x, y) такая, что

1. (x, y) линейна по x;

2. $(y, x) \equiv \overline{(x, y)}$;

3. $(x, x) > 0\ \forall x \neq 0$

Скалярное произведение в координатах:

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k \overline{y_j} (e_k, e_j)$$

Матрица Грама базиса e: $G_e = ((e_k, e_j))$. $G_e * = \overline{G_e}^T = G_e$.

Определение. $x \perp y \Longleftrightarrow (x, y) = 0$.
Базис $e_1, ..., e_n$ ортогональный, если $(e_k, e_j) = 0, k \neq j$.
Базис $e_1, ..., e_n$ ортонормированный, если $(e_k, e_j) = \delta_{ij}$.

В ортонормированном базисе $(x,y)=\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$.

Изменение матрицы полуторалинейной формы при замене базиса:
Если $f(x,y)$ - полуторалинейная форма, то в некотором базисе $e : f(x,y) = X^T F\overline{Y}$, где $F = (f(e_i,e_j))$. Если f эрмитово симметричная, т.е. $\overline{f(y,x)} = f(x,y)$, то $\overline{F}^T = F$.
Тогда если $e' = Ce$, то в случае полуторалинейной формы:

$$X = CX', Y = CY' \Rightarrow f(x,y) = (X')^T(C^T F\overline{C})\overline{Y'} = (X')^T F'\overline{Y'}$$

В случае эрмитовой квадратичной формы $k(x) = f(x,x)$:

$$k(x) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k\overline{x}_j f_{kj} = ... + f_{kj}x_k\overline{x}_j + ...,\ f_{jk} = \overline{f}_{kj}$$

Отсюда $f_{ii} = \overline{f}_{ii}$, т.е. $f_{ii} \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Эрмитову квадратичную форму можно привести к диагональному виду $\alpha_1|x_1|^2 + ... + \alpha_r|x_r|^2$, где $r = rkF$, $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}, \alpha_j \neq 0$. Количества положительных коэффициентов p и отрицательных коэффициентов q - инварианты для данной формы.*

Доказательство. Применим следующий вариант алгоритма Лагранжа: Основной случай. Если $b_{11} \neq 0$, то необходимо выделить все одночлены, содержащие x_1 и $\overline{x}_1$:

$$\begin{aligned} k(x_1,...,x_n) = (b_{11}x_1\overline{x}_1 + ... + b_{n1}x_n\overline{x}_1) + (b_{12}x_1\overline{x}_2 + ... + b_{1n}x_1\overline{x}_n) + \tilde{k}(x_2,...,x_n) = \\ = \frac{1}{\overline{b}_{11}}(b_{11}x_1 + ... + b_{n1}x_n)(\overline{b_{11}x_1} + ... + \overline{b_{n1}x_n}) + \tilde{k}(x_2,...,x_n) = \\ = \frac{1}{\overline{b}_{11}}|b_{11}x_1 + ... + b_{n1}x_n|^2 + \tilde{k}(x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

Заменяем $y_1 = b_{11}x_1 + ... + b_{n1}x_n$ и далее преобразуем $\tilde{k}$. Особый случай: $b_{ii} = 0, i = 1,...,n$. По условию $k \not\equiv 0$, т.е. $\exists b_{ij} = \overline{b}_{ji} \neq 0$ и форма содержит члены $b_{ij}x_i\overline{x}_j + b_{ji}x_j\overline{x}_i = 2b_{ij}^2|y_i|^2 - 2b_{ij}^2|y_j|^2$ при замене $\begin{cases} x_i = b_{ji}(y_i + y_j) \\ x_j = y_i - y_j \end{cases}$
Далее можем продолжать по основному случаю. $\square$

Сохраняют силу следующие утверждения и понятия:

1. Теорема Якоби: $\Delta_1, ..., \Delta_{n-1} \neq 0 \Longrightarrow k\ \frac{\Delta_1}{\Delta_0}|y_1|^2 + ... + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}|y_n|^2$;

2. Критерий Сильвестра: $k > 0 \Longleftrightarrow \Delta_i > 0, i = 1, ..., n$;

3. Понятие $u^{\perp}$ и утверждение $V = U \oplus U^{\perp}$.

Замечание. Если $A^* = \overline{A}^T = A$, то $|A| = |\overline{A}^T| = |\overline{A}| = \overline{|A|}$, т.е. $|A| \in \mathbb{R}$

Алгоритм. *Процесс ортогонализации:*
Дан произвольный базис $e_1, ..., e_n \in V$. необходимо построить ортогональный базис $e'_1, ..., e'_n$ такой, что $\langle e_1, ..., e_k \rangle = \langle e'_1, ..., e'_k \rangle$.

Возьмём $e'_1 = e_1$.
Шаг алгоритма: если $k > 1$ и $e'_1, ..., e'_{k-1}$ уже построены, то будем искать e'_k в виде $e_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(k)} e'_j$. Тогда:

$$0 = (e'_k, e'_i) = (e_k, e'_i) - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(k)} (e'_j, e'_i) = (e_k, e_i) - \lambda_i^{(k)} (e'_i, e'_i) \Longrightarrow \lambda_i^{(k)} = \frac{(e_k, e'_i)}{(e'_i, e'_i)}$$

20.1 Линейные операторы в унитарном пространстве

1. Сопряжённый оператор φ^* к линейному оператору $\varphi : V \to V$:

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

2. Самосопряжённый оператор: $\varphi = \varphi^* \quad (2)$

3. Унитарный оператор:

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad (3)$$

Для самосопряжённого оператора:

$$(2) \Longleftrightarrow (\varphi(x), y) \equiv (x, \varphi(y)) \Longrightarrow (A_\varphi X)^T G \overline{Y} = X^T (A_\varphi^T G) \overline{Y} = X^T (G \overline{A}_\varphi) \overline{Y}$$

Отсюда

$$A_\varphi^T G = G \overline{A}_\varphi \quad (2')$$

Если базис ортонормированный, то $A_\varphi^T = \overline{A}_\varphi \Longleftrightarrow A = A^*$

Для унитарного оператора:

$$(3) \Longleftrightarrow X^T G \overline{Y} = (A_\varphi X)^T G \overline{A_\varphi Y} = X^T (A_\varphi^T G \overline{A_\varphi}) \overline{Y} \Longrightarrow A_\varphi^T G \overline{A_\varphi} = G \quad (3')$$

Если базис ортонормированный, то $A_\varphi^T \overline{A_\varphi} = E \Longleftrightarrow A^{-1} = A^*$ (унитарная матрица).

Теорема. *Если φ - самосопряжённый линейный оператор в V, то*

1. *Все его характеристические корни $\in \mathbb{R}$;*
2. *Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;*
3. *Если U - φ-инвариантно в V, то $U^\perp$ также φ-инвариантно;*
4. *В V $\exists$ базис из собственных векторов $\varphi \Longleftrightarrow \varphi = \varphi^*$*

Теорема. *Если φ - унитарный линейный оператор в V, то*

1. *Все собственные значения имеют модуль 1;*
2. *Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;*
3. *Если U - φ-инвариантно в V, то $U^\perp$ также φ-инвариантно;*
4. *В V $\exists$ базис из собственных векторов φ, причём в этом базисе*

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\omega_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство. За исключением примечаний ниже доказательство аналогично случаю евклидова пространства.

К пункту 1 обоих теорем:

Так как $\mathbb{C}$ замкнуто, любой корень λ характеристического многочлена для φ является собственным значением и имеет отвечающийй ему собственный вектор.

Для самосопряжённого оператора:

$$\lambda(x,x) = (\varphi(x),x) = (x,\varphi(x)) = \overline{\lambda}(x,x) \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Для унитарного оператора:

$$(x,x) = (\varphi(x),\varphi(x)) = \lambda\overline{\lambda}(x,\varphi(x)) \Longrightarrow \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \Longrightarrow |\lambda| = 1$$

К пункту 4 теоремы 2:

Индукция по n:

База: $n = 1 \Rightarrow \varphi(x) = e^{i\omega}x$; Шаг: Выберем собственное значение $\lambda_1 = e^{i\omega_1}$, найдём для него собственный вектор e_1 и нормируем его. $\langle e_1 \rangle - \varphi$-инвариантное подпространство $\Longrightarrow$ $\langle e_1\rangle^\perp$ – φ-инвариантно, и тогда по предположению индукции $\exists$ ортонормированный базис $e_2, ..., e_n$ нужного вида для $\varphi|_{\langle e_1\rangle^\perp}$, а из ортогональности e_1 всем векторам этого базиса получаем, что $e_1, ..., e_n$ - искомый базис. $\square$