

Механико-математический факультет

Линейная алгебра и геометрия, 2 семестр, 2 поток

Преподаватель: Чубаров Игорь Андреевич

Студенты: Молчанов Вячеслав

Соколов Егор

Группа: 108

Контакт: Мой телеграм для связи

Содержание

1	Векторное пространство 1.1 Изменение координат вектора при замене базиса	(
2	Векторные подпространства 2.1 Примеры	(
3	Пересечение и сумма подпространств	g
4	Прямая сумма подпространств и пространств	13
5	Линейные отображения и функции	16
6	Линейные функции	16
7	Линейные отображения и их матрицы	19
8	Матрицы линейного отображения 8.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат	20 21
9	Линейные операторы	23
10	Действия над линейными отображениями	26
11	Собственные векторы и собственные значения оператора	27
12	Диагонализируемость 12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением	29
13	Анулирующие многочлены линейных операторов 13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора	3 4
14	Корневые подпространства	38
15	Теорема Жордана 15.1 Изображение разложения корневых подпространств 15.2 Решение СЛАУ 15.3 Решение СЛДУ 15.4 Функции от матриц 15.5 Вычисление корня и экспоненты	40 44 47 47 48 49
16	Билинейные и квадратичные формы 16.1 Запись билинейной функции в координатах	49 50 50 53 56 58
17	Евклидовы пространства и их обобщения 17.1 Основные понятия и утверждения	60

	17.2 Линейные операторы в евклидовом пространстве 17.3 Самосопряжённые операторы 17.4 Ортогональные операторы	65 67 69
18	Общие линейные операторы	72
19	Квадратичные формы	7 4
20	Полуторалинейные, эрмитовы формы. Унитарные (эрмитовы) пространства 20.1 Линейные операторы в унитарном пространстве	75 78
21	Аффинные пространства и их преобразования 21.1 Аффинные плоскости (подпространства)	80 81
22	Евклидовы аффинные пространства 22.1 Афиинные отображения и преобразования	84 86
23	Тензоры 23.1 Основные определения и первоначальные конструкции	93 93

1 Векторное пространство

Определение. Множество V называется векторным пространством над полем F, если заданы операции "+" : $V \times V \to V$ и " \cdot " : $F \times V \to V$ и выполнены следующие аксиомы:

1.
$$\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

$$2. \ \exists \ \vec{0} \in V: \ \forall v \in V : \ v + \vec{0} = v$$

3.
$$\forall v \in V \ \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$$

4.
$$\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

5.
$$\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha \beta)v = \alpha(\beta v)$$

6.
$$\forall v \in V : 1_F \cdot v = v$$

7.
$$\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

8.
$$\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? *Ответ:* Аксиома коммутативности.

Доказательство. Сначала докажем два свойства.

- 1. $0 \cdot \overline{a} = 0 \cdot \overline{a} + \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} + (0 \cdot \overline{a} + (-0 \cdot \overline{a})) = (0 \cdot \overline{a} + 0 \cdot \overline{a}) + (-0 \cdot \overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \overline{a} + (-0 \cdot \overline{a}) = \overline{0}$
- 2. $(-1)\overline{a} + \overline{0} = (-1)\overline{a} + (\overline{a} + (-\overline{a})) = ((-1)\overline{a} + \overline{a}) + (-\overline{a})$ (по аксиоме ассоциативности) $= 0 \cdot \overline{a} + (-\overline{a}) = -\overline{a}$.

Теперь докажем первую аксиому (аксиому коммутативности).

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{0} = (\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b} + \overline{a}) + (-(-(\overline{b} + \overline{a}))) =$$

(по второму свойству)

$$=(\overline{a}+\overline{b})+(-(\overline{b}+\overline{a})+(\overline{b}+\overline{a}))=$$

(по аксиоме ассоциативности)

$$= (\overline{a} + \overline{b} + (-(\overline{b} + \overline{a}))) + (\overline{b} + \overline{a}) = (((\overline{a} + \overline{b}) + (-(\overline{b}))) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) =$$

$$= ((\overline{a} + (\overline{b} + (-(\overline{b})))) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) = ((\overline{a} + \overline{0}) + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) =$$

$$(\overline{a} + (-\overline{a})) + (\overline{b} + \overline{a}) = \overline{0} + (\overline{b} + \overline{a}) = \overline{b} + \overline{a}$$

Замечание. Любое поле можно рассматривать как векторное пространство над собой - все аксиомы будут выполнены из аксиом поля.

Определение. $U \subset V$ - векторное подпространство пространства V, если оно само является пространством относительно тех же операций в V.

Утверждение. Определение 2 эквивалентно:

- 1. $U \neq \emptyset$
- 2. $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
- 3. $\forall u \in U, \ \lambda \in F : \lambda u \in U$

Определение. Векторы $v_1,...,v_n \in V$ называются линейно зависимыми, если $\exists \lambda_1,...,\lambda_n$ (не все равные 0) : $\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n=\vec{0}$. В противном случае векторы $v_1,...,v_n$ называются линейно независимыми.

Утверждение. Определение $3 \iff (n \ge 2)$ хотя бы один вектор из векторов v_i выражается как линейная комбинация остальных.

Определение. Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, ..., e_n), e_k \in V$ называется базисом V, если e - максимальный ЛНЗ набор векторов из V.

Утверждение. e - базис в $V \Longleftrightarrow$

1.
$$e_1, ..., e_n - JH3$$

2.
$$\forall x \in V \exists x_1, ..., x_n \in F : x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Следствие. Разложение любого вектора в базисе единственно.

Доказательство. Если
$$x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i=\sum\limits_{i=1}^n x_i'e_i$$
, то $\vec{0}=x-x=\sum\limits_{i=1}^n (x_i'-x_i)e_i$ Из ЛНЗ все коэффициенты равны

Обозначаем:
$$X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$$
, тогда $x = eX_e = e_1x_1 + ... + e_nx_n$
$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

Теорема. Если в $V \equiv 6$ азис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.

Доказательство.

Если \exists базис $e_1',...,e_m' \in V$, где m>n, то по ОЛЛЗ $e_1',...,e_m'$ - ЛЗ, т.е. не базис. Если же m< n, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) $e_1,...,e_n$ - ЛЗ \Longrightarrow не базис. \square

Свойства. матриц перехода

1. $\det C \neq 0$

2.
$$C_{e'\to e} = (C_{e\to e'})^{-1}$$

3.
$$C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$$

Доказательство.

- 1) Столбцы координаты ЛНЗ векторов $e_1',...,e_n'\Longrightarrow rkC=n\Longrightarrow \det C\neq 0$
- Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.
 По определению:

$$e' = (e'_1, ..., e'_n) = (e_1, ..., e_n)C_{e \to e'}, \text{ r.e. } e' = eC_{e \to e'}$$

$$e' = eC_{e \to e'}$$
(2)

С другой стороны

$$e = e'C_{e' \to e} = eC_{e \to e'}C_{e' \to e} \Longrightarrow C_{e \to e'}C_{e' \to e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \to e'} = (C_{e' \to e})^{-1}$$

3)
$$e'' = e'C_{e'\to e''} = e(C_{e\to e'}C_{e'\to e''}) = eC_{e\to e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e o e''} = C_{e o e'} C_{e' o e''}$

Алгоритм. Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном базисе? $e' = eC_{e \to e'}$ можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^{\uparrow},...,e_n^{\uparrow})C = (e_1^{\prime}{}^{\uparrow},...,e_n^{\prime}{}^{\uparrow})$$
$$[e_1^{\uparrow},...,e_n^{\uparrow} \mid e_1^{\prime}{}^{\uparrow},...,e_n^{\prime}{}^{\uparrow}] \stackrel{cmpo\kappa}{\leadsto} [E \mid C_{e \to e^{\prime}}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$X_e = C_{e \to e'} X_{e'} \tag{3}$$

Доказательство.

$$\forall x \in V : x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e \to e'}X_{e'}$$
$$\Longrightarrow X_e = C_{e \to e'}X_{e'}$$

2 Векторные подпространства

2.1 Примеры

- 1. Геометрические векторы
- 2. F^n пространство столбцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot \lambda)$

Базис
$$\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\\vdots\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\\vdots\\0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0\\0\\\vdots\\1 \end{pmatrix} \right\}$$
 (можно взять столбцы любой

невырожденной матрицы порядка n)

 $\it 3ameчanue.$ Доказать, что если $\it e$ - базис, $\it C$ - невырожденная матрица, то $\it eC$ - тоже базис (из (2))

Упражнение. Пусть $|F|=q, \dim_F V=n \Longrightarrow |V|=q^n$ $\dim M_{m,n}=mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij-ой позиции и 0 на остальных.

3. $V = \{F: \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \to \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и умножения на скаляр Оно бесконечномерно, если X бесконечно.

Если $\lambda_1,...,\lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1=e^{\lambda_1 x},...,y_n=e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq 0 \Longrightarrow C_1 = ... = C_n = 0$$

4. F[t] с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.: $\forall n \in N_0: 1, t, t^2, ...$ - линейно независимы. $F[t]_n = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n \mid a_k \in F, \ k = 0, ..., n; \ n \in N_0\}$ - подпространство, $\dim U = n + 1$, базис: $1, t, ..., t^n$ Тейлоровский базис: $1, t - t_0, ..., (t - t_0)^n$; $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$

5. $\Omega \neq 0$, $V=2^{\Omega}$ с операциями вместо сложения:

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \ \forall A, B \subseteq \Omega$$

 $F = \mathbb{Z}_2, \ 0 \cdot A = \emptyset, \ 1 \cdot A = A$

Упражнение. Доказать, что V - векторное пространство над \mathbb{Z}_2

2.2 Два основных способа задания подпространства в V

1. Линейная оболочка семейства векторов $S \subset V$:

$$\langle S \rangle = \{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы) } | s_i \in S, \lambda_i \in F \}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, ..., a_m \rangle = \{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F \} = U$$

Утверждение. $\langle a_1,...,a_m\rangle\subseteq V\Longrightarrow \dim\langle a_1,...,a_m\rangle=rk\{a_1,...,a_m\}$

Доказательство.

$$\mu \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu \lambda_i) a_i$$
$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U$$

Если $r = rk\langle a_1,...,a_m\rangle$, то $a_{j1},...,a_{jr}$ - базисные, то $\forall a_i$ через них тоже выражается

$$orall \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \Longrightarrow \{a_{j1},...,a_{jr}\}$$
 — базис U

Алгоритм. Алгоритм вычисления $\dim \langle a_1, ..., a_m \rangle$ и базиса, если известны координаты этих векторов:

1) Cocmasums mampuny: $(a_1^\uparrow,...,a_m^\uparrow) \xrightarrow[cmpo\kappa]{j_1 \cdots j_r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 0 & \end{pmatrix}$

- 2) Столбцы с номерами $j_1, ..., j_r$ базис в U, разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы
- **2.** $(\dim V = n, \text{ известны координаты в некотором базисе})$

$$\forall \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = eX, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

 $W = \{x \in V \mid x = eX: \ AX = 0\}$ — задание с помощью ОСЛУ

Утверждение. W - подпространство в V, $\dim W = n - rkA$, базис - любая ΦCP (это переход от **2.** к **1.** способу задания подпространства).

Теорема. Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве V можно задать с помощью OCJY.

Доказательство. Два способа:

1) Вектор
$$x$$
 (со столбцом координат $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$):

$$x \in \langle a_1, ..., a_m \rangle = U$$

$$\iff$$
 $\exists \ \alpha_1,...,\alpha_m \in F: \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = x, \$ или в координатах: $\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i^{\uparrow} = x$

т.е. СЛУ с
$$\widetilde{A}=(a_1^\uparrow,...,a_m^\uparrow\mid \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix})$$
 совместна \Longleftrightarrow после алгоритма Гаусса:

$$\widetilde{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} K & \sum_{j} C_{kj} x_{j} \\ 0 & \sum_{j} C_{r+1,j} x_{j} = 0 \\ \sum_{j} C_{nj} x_{j} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(K\right)$$
 имеет ступенчатый вид, а $\left(\sum C_{r+1,j}x_j=0\right)$ - нужная нам система.

Упражнение. Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ: $\underset{(r \times n)}{C} X = 0, rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\Theta\Pi} \left(E_r \mid D \right) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + \dots + d_{kn}x_n) \end{cases}$$
 $k = 1, \dots, r$

Фундаментальная матрица: $\mathcal{F} = \left(\frac{-D}{E_{n-r}}\right)$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов $a_1, ..., a_r$:

$$\begin{pmatrix} a_1^{\rightarrow} \\ \vdots \\ a_r^{\rightarrow} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{улучшенный вид}} \begin{pmatrix} M \mid E_r \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу: $C = (E_{n-r} \mid -M^T)$ Пространство $\{X \mid CX = 0\}$ имеет размерность n - (n-r) = r

3 Пересечение и сумма подпространств

Утверждение.

- 1. Если U_i $(i \in I)$ подпространство V, то $W = \bigcap_{i \in I} U_i$ тоже подпространство V;
- 2. Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств.



Доказательство. 1. $\overline{0} \in W$, т.к. $\overline{0} \in U_i$, $\forall i \in I$.

Если
$$x, y \in U_i, \ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in U_i, \ \forall i \in I \Longrightarrow x + y \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

Если $x \in U_i, \ \forall i \in I, \ \forall \lambda \in F \Longrightarrow \lambda x \in U_i, \ \forall i \in I \Longrightarrow \lambda x \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Замечание. Если U_1, U_2 - подпространства в V и Q - любое подпространство, которое содержит U_1 и U_2 , то оно содержит и сумму u_1+u_2 , если $u_i\in U_i,\ i=1,2$

Определение. Суммой подпространств $U_1, ..., U_m \subseteq V$ назовем:

$$U_1 + \dots + U_m = \{x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

Утверждение. $U_1 + ... + U_m$ - nodnpocmpancmeo в V

Теорема. (Формула Грассмана)

Eсли U_1, U_2 - $no\partial npocmpaнcmea$ в $V, \dim U_1 < \infty, \dim U_2 < \infty, mo$

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказательство. Пусть $\dim U_i = n_i$, $\dim(U_1 \cap U_2) = s$ Выберем $c_1, ..., c_s$ - базис $U_1 \cap U_2$, дополним до базиса в U_1 векторами $a_1, ..., a_{n_1-s}$ и до базиса в U_2 векторами $b_1, ..., b_{n_2-s}$.

Тогда векторы $c_1,...,c_s,a_1,...,a_{n_1-s},b_1,...,b_{n_2-s}$ - образуют базис в U_1+U_2

1. Они порождают $U_1 + U_2$:

$$\forall u = u_1 + u_2 = \left(\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i\right) + \left(\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i\right)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = -\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по $\{c_j\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Longrightarrow a_i$ - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i: \ \alpha_i = 0$

Тогда
$$\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0 \Longrightarrow \{b_k, \gamma_j\}$$
 - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall k, j: \ \beta_k = \gamma_j = 0$

Алгоритм. Пусть $U_1 = \langle a_1, ..., a_{n_1} \rangle$, $U_2 = \langle b_1, ..., b_{n_2} \rangle$, известны координаты всех этих векторов. Составим матрицу:

$$(A \mid B) = (a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} \mid b_1^{\uparrow}, ..., b_{n_2}^{\uparrow})$$

 $\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$

$$\begin{pmatrix} A \mid B \end{pmatrix} \xrightarrow[cmpo\kappa]{} \stackrel{\partial\Pi}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a_1^{\uparrow}, ..., a_{n_1}^{\uparrow} \mid \underbrace{b_1^{\uparrow}, ..., b_m^{\uparrow}}_{nonano\ e\ 6asuc}, b_{m+1}^{\uparrow}, ..., b_{n_2-m}^{\uparrow} \end{pmatrix}$$

Можно записать:

$$b_{j} = \sum_{i=1}^{n_{1}} \alpha_{i} a_{i} + \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_{j}} b_{k} \Longrightarrow b_{j} - \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_{j}} b_{k} = \sum_{i=1}^{n_{1}} \alpha_{i} a_{i} \in U_{1} \cap U_{2}$$

Упражнение. Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

4 Прямая сумма подпространств и пространств

Определение. Сумма $U_1 + ... + U_m$ подпространств $U_i \subset V$, $1 \leq i \leq m$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + ... + U_m$ представим в виде: $u = u_1 + ... + u_m \; (u_i \in U_i)$ единственным образом

Пусть m=2,V - конечномерное пространство, $U_{1,2}$ - подпространства V

Теорема. Следующие условия равносильны:

1.
$$U = U_1 + U_2$$
 - прямая сумма

2.
$$U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

3.
$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

4. $\mathit{Basuc}\ U_1 + U_2$ - объединение базисов слагаемых

Доказательство.

$$1. \to 2.$$
 Допустим $v \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow v = v + 0 = 0 + v \Longrightarrow v = 0$

 $2. \to 3.$ По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{0}$$

 $3. \to 4.$ Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_{i} \alpha_{i} a_{i} + \sum_{j} \beta_{j} b_{j} = 0 \Longrightarrow \sum_{i} \alpha_{i} a_{i} = \sum_{j} (-\beta_{j}) b_{j} \in U_{1} \cap U_{2} = \{0\}$$

 \Longrightarrow все α_i и β_i равны нулю

 $4. \to 1. \ \forall u \in U_1 + U_2 :$

$$u = \left(\sum_{i} \alpha_{i} a_{i}\right) + \left(\sum_{j} \beta_{j} b_{j}\right)$$

- разложение по базису единственно

Теорема. Следующие условия равносильны:

1.
$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n$$
 - прямая сумма

2.
$$\forall i, 1 \leq i \leq m, U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}$$

3.
$$\dim(U_1 + U_2 + ... + U_n) = \dim U_1 + \dim U_2 + ... + \dim U_n$$

4. Базис
$$U_1+U_2+...+U_n$$
 - объединение базисов слагаемых

Упражнение. Доказать

Пример. того, что условия $U_i \cap U_j = \{0\}, \ i \neq j$ недостаточно для прямой суммы:



 v_1, v_2, v_3 - ЛЗ \Longrightarrow представление не единственным образом

Лемма. Любой ЛНЗ набор векторов $a_1, ..., a_m$ в n-мерном векторном пространстве V (m < n) можно дополнить до базиса в V.

Доказательство. 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе $e_1, ..., e_n \Longrightarrow rk\{a_1, ..., a_m, e_1, ..., e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left(a_1^{\uparrow} \cdots a_m^{\uparrow} \mid E_n\right) \xrightarrow{\exists \Pi \text{ строк матрицы}} \left(a_1^{\uparrow} \cdots a_m^{\uparrow} \mid e_{i,1}^{\uparrow} \mid e_{j,n-m}^{\uparrow} \cdots\right)$$

Тогда к векторам $a_1, ..., a_m$ надо добавить $e_{i,1}, ..., e_{i,n-m}$

Определение. Если U - подпр-во в V $(0 \neq U \neq V)$ и $\exists W \subset V : V = U \oplus W$, то W - прямое дополнение к U.

Следствие. Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве \exists прямые дополнения.

Доказательство.
$$U=\langle a_1,...,a_m\rangle \Longrightarrow \exists \ a_{m+1},...,a_n : \langle a_1,...,a_n\rangle$$
 - базис в V , тогда $W=\langle a_{m+1},...,a_n\rangle$

Определение. Пусть $V_1,...,V_k$ $(k \ge 2)$ - векторы пространства над одним и тем же полем \mathbb{F} , тогда:

$$V = V_1 \times ... \times V_k = \{(v_1,...,v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\}$$
 — внешняя прямая сумма

Обозначение: 👵

3амечание. Внешнюю прямую сумму $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V_i' = \{0,...,v_i,....,0\}$$
 — подпространство в V

Запись $v_1,...,v_k\stackrel{\text{единственно}}{=}(v_1,0,0,...,0)+(0,v_2,0,...,0)+...+(0,0,0,...,v_k)$ по-казывает, что $V=V_1'\oplus...\oplus V_k'$ - единственно.

В частности
$$\dim(V_1 \oplus ... \oplus V_k) = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

Факторпространства

Определение. Пусть $U\subset V$ - подпространство, $v_1,v_2\in V$. Говорят, что $v_1\sim v_2$ по модулю U, если $v_1-v_2\in U$. Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по U, где v - представитель

$$*V/U = \{\underbrace{v + U}_{\overline{v}} \mid u \in U\}$$

Утверждение. $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

Доказательство.

 \Rightarrow : Если $v_1 \sim v_2$, то $\exists u_0 \in V : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \ v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Longrightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \ \forall u \in U \ v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Longrightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

 \leq : Если $v_1 + U = v_2 + U$, то $\exists u_1 \in U : v_1 = v_2 + u_1 \Longrightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

Определение. v+U - смежный класс элемента v по U : $\bar{v}:=v+U$

Определение. $V/U = \{ \bar{v} \mid v \in V \}$ - факторпространство V по U.

Определение. Структура векторного пространства на V/U:

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda \overline{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

Определение. $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V Обозначается: $\operatorname{Codim}_V U$

Пример. Пусть V = C[a, b]

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0, \ x_0 \in [a, b]\} \Longrightarrow \operatorname{Codim}_V U = 1$$

Теорема.

- 1. Данные операции задают на V/U векторное пр-во;
- 2. Ecau dim $V < \infty$, mo dim $(V/U) = \dim V \dim U$

Доказательство.

1) Проверим корректность введённых операций:

Если
$$v_1' = v_1 + u_1, \ v_2' = v_2 + u_2, \ u_1, u_2 \in U$$
:

$$v'_1 + v'_2 = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v'_1 + v'_2 \sim v_1 + v_2, \text{ r.e. } v'_1 + v'_2 + U = v_1 + v_2 + U \Rightarrow \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2}$$

$$\overline{v'_1} + \overline{v'_2} = \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

т.е. сложение не зависит от выбора элементов в классах.

Если

$$v' = v + u, \ u \in U \Longrightarrow \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

 $v \sim v' \Longrightarrow \lambda v \sim \lambda v'; \ \overline{0} \in U; \ -\overline{v} = \overline{-v}$

Все аксиомы выполенены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис $a_1, ..., a_m$ в U Если U = V, т.е. $m = n = \dim V$, то $V/U = \{0\} \Longrightarrow \dim(V/U) = n - n = 0$ Если же m < n, то можно дополнить базис U векторами $a_{m+1},, a_n$ до базиса в V, тогда классы $\overline{a_{m+1}},, \overline{a_n}$ образуют базис в V/U:

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_j$$

$$\overline{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{a_j}$$

 $\Longrightarrow \overline{a_{m+1}},....,\overline{a_n}$ порождают V/U

Проверим ЛНЗ:

$$\exists \ \lambda_j \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \lambda_j \overline{a_j} = \overline{0} \iff \sum_{j=m+1}^n \lambda_j a_j \in U$$

$$\exists \ \mu_i \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0$$

Т.к. $\{a_1,...,a_n\}$ ЛНЗ, то $\lambda_j=0,\ \mu_i=0,\ \forall i,j\Longrightarrow\overline{a_{m+1}},....,\overline{a_n}$ - ЛНЗ

5 Линейные отображения и функции

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства над полем \mathbb{F} .

Определение. Отображение $\varphi: V_1 \to V_2$ называется линейным отображением V_1 в V_2 , если:

- 1. $\forall v_1, v_1' \in V_1 : \varphi(v_1 + v_1') = \varphi(v_1) + \varphi(v_1');$
- 2. $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v);$

Из курса I семестра известно, что $\varphi(0_{v_1}) = 0_{V_2}$

Определение. Ядром φ называется множество $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\}.$ Образом φ называется множество $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(V_1).$

6 Линейные функции

Пусть V - векторное пространство над $\mathbb F$

Определение. Отображение $f: V \to \mathbb{F}$ - линейная функция со значениями в \mathbb{F} , если:

- 1. $\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- 2. $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F}: f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается: $V^* = \{f: \ V \to \mathbb{F}\}$ - множество линейных функций на V

Лемма. $Ecnu \ f \not\equiv 0, \ mo \ \dim(V/\mathrm{Ker} f) = 1.$

Доказательство. $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists v_1 \in V, \ f(v_1) \not= 0.$ Пусть $v \in V$, тогда либо $v \in \mathrm{Ker}(f)$, либо $f(v) = \alpha \not= 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Longrightarrow f(\frac{v_1}{\beta}) = 1, \ f(\frac{\alpha}{\beta}v_1) = \alpha$$

Рассмотрим выражение $f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1)$:

$$f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1) = f(v) - f(\frac{\alpha}{\beta}v_1) = \alpha - \alpha = 0$$

 $\Longrightarrow v - \frac{\alpha}{\beta} v_1 \in \operatorname{Ker}(f)$ и $v = \frac{\alpha}{\beta} v_1 + u$, $u \in \operatorname{Ker}(f)$

Замечание. $\forall x \in V: (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Лемма. Множество V^* с введенными операциями - векторное пространство.

Определение. V^* - векторное пространство, сопряженное с V (двойственное для V)

Зафиксируем базис $e=(e_1,...,e_n)$ в V и линейную функцию $f:V \to F$

$$\forall x \in V: \ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \ \text{где } a_i = f(e_i)$$

Удобно записывать это так: $f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Определение. Координатные функции - функции вида:

$$f_i: f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение: $e^i = f_i$

В частности:
$$f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Утверждение. Функции e^i - базис в V^*

Доказательство.

Докажем ЛНЗ: Пусть $\exists \lambda_1,...,\lambda_n: \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i \equiv 0$. Подставим e_j :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i\right)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех $e_1,...,e_n$ получим, что $\forall i=1,...,n: \lambda_i=0.$ Разложим произвольную функцию $f\in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i e^i)(x) \implies f \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i e^i$$

Следствие. $Ecnu \dim V < \infty, \ mo \ V^* \cong V, \ m.\kappa. \ \dim V^* = \dim V.$

Определение. Базис $e^* = (e^1, ..., e^n)$ называется базисом V^* , сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису e в V.

Посмотрим, как изменится строка координат функции $f \in V^*$ при замене базиса e в V.

Пусть $e'=(e'_1,...,e'_n)=e\cdot C_{e\to e'}$ - новый базис в V. Как известно, $X=C_{e\to e'}\cdot X'$. Отсюда если $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i=\sum_{i=1}^n x'_ie'_i$, то $\forall f\in V^*$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_{i} x'_{i} = (a'_{1}, ..., a'_{n}) X'$$

С другой стороны

$$f(x) = (a_1, ..., a_n)X = (a_1, ..., a_n)(C_{e \to e'}X') = ((a_1, ..., a_n)C_{e \to e'})X'$$

Отсюда

$$\forall X' \in \mathbb{F}^n \ ((a_1, ..., a_n) C_{e \to e'}) X' = ((a'_1, ..., a'_n)) X'$$

Подставляя по очереди $X'=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, в итоге получим равенство

$$(a_1, ..., a_n)C_{e \to e'} = (a'_1, ..., a'_n)$$

Пример. Возьмём $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$ Выберем в нём базис $\{1, (t-t_0), ..., (t-t_0)^n\} \Longrightarrow p(t) = \sum_{i=0}^n \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!} (t-t_0)^i$ Если $e_i = (t-t_0)^i, \ 0 \leqslant i \leqslant n$, то $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

Определение. Вторым сопряжённым пространством к V (обозначается V^{**}) называется пространство, сопряженное к V^* - пространство линейных функций от линейных функций над V.

$$V^{**} = \{ \varphi : V^* \to \mathbb{F} \}$$

Лемма. f - интекция $\iff Ker(f) = \{0\}$

Теорема. Если $\dim V < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).

Доказательство. Рассмотрим отображение:

$$\varphi: V \to V^{**}: \ \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**}: \ \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

• $\forall f \in V^*$, $\varphi_{x_1+x_2}(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Longrightarrow \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$

•
$$\forall f \in V^*, \ \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f) \Longrightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x);$$

Чтобы проверить, что φ - биекция, достаточно проверить, что $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ (так как сюръекцию имеем из $\dim V^{**}=\dim V$).

Пусть $x \in \text{Ker}(\varphi)$, т.е. $\varphi_x \equiv 0$. Значит, $\forall f \in V^* : f(x) = 0$

Если $x \neq 0$, то его можно дополнить до базиса: $x, e_2, ..., e_n$, где $n = \dim V$.

Тогда
$$e^1(x)=1 \neq 0$$
 - противоречие с условием $\forall f \in V^*: \ f(x)=0.$

 $\exists a \partial a \vee a$. Доказать, что $a_1,...,a_n \in V$ ЛНЗ $\Leftrightarrow \exists$ лин. ф-ции $f^1,...,f^n \in V^*$ такие, что $\det(f^i(a_j)) \neq 0$.

3амечание. Если $dimV=\infty$, то $V^*\ncong V$ в общем случае.

Пример. $V = \mathbb{Q}[t]$ - V счётно. Зафиксируем число $t \in \mathbb{Q}$ и рассмотрим произвольную $f \in V^*$:

 $f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, ..., b_k, ...) \Rightarrow V^*$ континуально.

Отсюда мощность V^* больше мощности V, и они, очевидно, не изоморфны.

7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть V_1, V_2 - векторные пространства, $\varphi: V_1 \to V_2$ - линейное отображение.

Пример.

 $V_1 = D(a,b)$ - множество функций над полем \mathbb{R} , дифференцируемых на (a,b);

 $V_2 = F(a,b)$ - множество функций над полем \mathbb{R} , опреелённых на (a,b);

 $\varphi(f)=rac{df}{dt},\; arphi:\; V_1 o V_2$ - линейное отображение, $\operatorname{Ker}(arphi)=\{const\}$

Частный случай: $V_1 = \mathbb{R}[t]_n, \ V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$

 $\varphi(f) = f'$ - линейное отображение (взяли производную)

 $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{const\}$. Является ли φ сюръекцией?

 $\forall p(t) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$

$$\exists f(t)=a_0t+a_1rac{t^2}{2}+\ldots+a_{n-1}rac{t^n}{n}:f'(t)=p(t)\Longrightarrow arphi$$
 - сюръекция

Теорема. Если $\varphi:\ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\dim V_1 < \infty,\ mo$

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V_1 - \dim(\operatorname{Ker}\varphi)$$

Доказательство. Пусть $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = m \ (m \leq n = \dim V_1)$

Выберем $c_1,...,c_m$ - базис в $\operatorname{Im}\varphi\Longrightarrow\exists\ a_1,...,a_m\in V_1:\ \varphi(a_i)=c_i,\ i=\overline{1,m}$

Так же выберем базис $b_1,...,b_k$ в $\operatorname{Ker} \varphi$ (если $\operatorname{Ker} \varphi=\{0\}$, то $\operatorname{Im} \varphi\cong V_1$)

Покажем, что $\{a_1,...,a_m,b_1,...,b_k\}$ - базис в V_1 :

Пусть
$$\alpha_i$$
, β_j : $\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j = 0_{v_1}$, тогда:

$$\varphi(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i} a_{i} + \sum_{j=1}^{k} \beta_{j} b_{j}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i} \varphi(a_{i}) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \beta_{j} \varphi(b_{j})}_{0_{v_{2}}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i} c_{i} = \varphi(0_{v_{1}}) = 0_{v_{2}}$$

Т.к.
$$c_i$$
 - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall i = \overline{1,m}: \ \alpha_i = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^k b_j \beta_j = 0$

Т.к.
$$b_i$$
 - ЛНЗ $\Longrightarrow \forall j = \overline{1,k}: \beta_j = 0$

$$\forall v \in V_1: \ \varphi(v) = \sum_{l=1}^m \gamma_l c_l = \varphi(\sum_{l=1}^m \gamma_l a_l) \Longrightarrow v - \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l \in \operatorname{Ker} \varphi$$

$$\Longrightarrow \exists \beta_j \in \mathbb{F}: \ v = \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j$$

8 Матрицы линейного отображения

Пусть: $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ - базис в V_1 ; $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ - базис в V_2

$$\forall x \in V_1: \ x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \Longrightarrow \varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) =$$
$$= \{ \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_i \} = \sum_{j=1}^n \sum_{j=1}^m x_j a_{ij} f_i$$

Определение. Назовем $A=(a_{ij})=A_{\varphi,e,f}$ - матрицей φ в базисах \mathcal{E} и \mathcal{F} . Обозначается: $Y_f=A_{\varphi,e,f}\cdot X_e$ (где Y - столбец координат $\varphi(x)$).

 $\it 3$ амечание. Для линейного оператора $arphi:\ V o V,\ A_{arphi,e}\equiv A_{arphi,e,e}$

Алгоритм. Вычисление $Ker \varphi u Im \varphi c помощью матрицы <math>A_{\varphi}$:

1.
$$Ker \varphi = \{x = \mathcal{E} \cdot x_{\mathcal{E}} : A_{\varphi} \cdot x_{\mathcal{E}} = 0\}; \dim(Ker \varphi) = n - rkA_{\varphi}$$

2.
$$Im \varphi = \langle \varphi(e_1), ..., \varphi(e_n) \rangle = \{ y = f \cdot Y_f : Y_f = A_{\varphi} \cdot x_{\mathcal{E}} \}$$

 $Y \in Im \varphi \iff C\Pi Y A_{\varphi} \cdot x_{\mathcal{E}} = Y \text{ совместна} \implies \dim(Im \varphi) = rkA_{\varphi}$
(т.е. не зависит от базиса);

3.
$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim V_1$$

Изменение матрицы линейного отображения при за-8.1мене координат

Утверждение. Пусть $\mathcal{E}=(e_1,...,e_n)$ - старый, а $\mathcal{E}'=(e_1',...,e_n')$ - новый базисы в V_1 и $\mathcal{F}=(f_1,...,f_n)$ - старый, а $\mathcal{F}'=(f_1',...,f_n')$ - новый базисы в V_2 , C - матрица перехода из $\mathcal E$ в $\mathcal E'$, а D - матрица перехода из $\mathcal F$ в $\mathcal F'$. Тогда:

$$A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C$$

Доказательство. Воспользуемся формулами связи координат векторов:

$$\forall x \in V_1: \ x_{\mathcal{E}} = \underbrace{C_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}}_{C} \cdot x_{\mathcal{E}'}$$
 и $\forall y \in V_2: \ y_{\mathcal{F}} = \underbrace{C_{\mathcal{F} \to \mathcal{F}'}}_{D} \cdot y_{\mathcal{F}'}$ Тогда формулы имеют вид:

$$Y_{\mathcal{F}} = A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot x_{\mathcal{E}}$$
 и $Y_{\mathcal{F}'} = A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} \cdot x_{\mathcal{E}'}$
 $(**)$

Умножим (*) слева на D^{-1} , а также запишем выражение $x_{\mathcal{E}}$ через $x_{\mathcal{E}'}$: $\forall x_{\mathcal{E}'} \in F^n$:

$$D^{-1} \cdot Y_{\mathcal{F}} = D^{-1} \cdot (A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'} \Longleftrightarrow Y_{\mathcal{F}'} = (D^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Возьмем
$$x_{\mathcal{E}'} = E_j, \ j = 1,...,n$$

 $\it Замечание.$ Для линейного оператора $\varphi:\ V \to V:$

$$A_{\varphi,\mathcal{E}'} = C_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}^{-1} \cdot A_{\varphi,\mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}'}$$

Следствие.

1. Для любого линейного отображения ранг его матрицы инвариантен при замене базиса

$$rk A_{\varphi,\mathcal{E}',\mathcal{F}'} = rk A_{\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}};$$

2. Для любого линейного оператора оперделитель и след его матрицы инвариантны при замене базиса

$$\det(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = \det(A_{\varphi,\mathcal{E}})$$

$$tr(A_{\varphi,\mathcal{E}'}) = tr(A_{\varphi,\mathcal{E}})$$

Доказательство.

1. Матрицы C и D невырождены, значит достаточно доказать, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} (AC)$, где C - невыроджена.

$$\begin{cases} B = A \cdot C \Longrightarrow \operatorname{rk} B \le \operatorname{rk} A \\ A = (A \cdot C) \cdot C^{-1} \Longrightarrow \operatorname{rk} A \le \operatorname{rk} (AC) \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\operatorname{rk} (AC) \le \operatorname{rk} A \le \operatorname{rk} (AC)}_{\operatorname{rk} (AC) = \operatorname{rk} A}$$

2. $\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A$

3.
$$\operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(CA) \Longrightarrow \operatorname{tr}\left[C^{-1} \cdot (AC)\right] = \operatorname{tr}\left[(AC) \cdot C^{-1}\right] = \operatorname{tr}A$$

Теорема. Пусть $a_1,...,a_n$ - ЛНЗ векторы в V_1 (dim $V_1=n$), $b_1,...,b_n$ - случайные векторы в V_2 (dim $V_2=m$). Тогда $\exists !$ линейное отображение $\varphi:\ V_1\to V_2:$ $\varphi(a_j) = b_j, \ j = 1, ..., n$

Доказательство.

Пусть в некотором базисе ${\cal E}$ пространства V_1 вектор $a_j \sim a_j^{\uparrow}$ - столбец координат,

в базисе f пространства V_2 вектор $b_j \sim b_j^{\uparrow}$ По условию, $\forall j=1,...,n: A_{\varphi}\cdot a_j^{\uparrow}=b_j^{\uparrow} \Longrightarrow A_{\varphi}(a_1^{\uparrow},...,a_n^{\uparrow})=(b_1^{\uparrow},...,b_n^{\uparrow})$ или $A_{\varphi}\cdot A=B$, где A_{φ} - искомая матрица.

Отсюда получаем, что $A_{\varphi} = B \cdot A^{-1}$ (т.к. $a_1, ..., a_n$ ЛНЗ).

$$\frac{\left(A\right)}{B} \xrightarrow[\text{строк}]{\Im\Pi} \left(\frac{E}{A_{\varphi}}\right), \ \left(\frac{A}{B}\right) \rightarrow \left(\frac{A}{B}\right) \cdot C_{\text{эл}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)$$
 Если $AC = E$, то $C = A^{-1}$ и $BC = BA^{-1} = A_{\varphi}$

Теорема. Если $\dim V_1 < \infty, \ \varphi: \ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, то

$$Im \varphi \cong V_1/Ker \varphi$$

 \mathcal{A} оказательство. Базис ядра дополним до базиса пространства V_1 векторами $e_1, ..., e_s$. Тогда любой $v \in V_1$ можно записать в виде:

$$v = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i + u$$
, где $u \in \operatorname{Ker} \varphi$

По этому в факторпространстве базис составляет классы $\overline{v} + u = \sum_{i=1}^{s} x_i \overline{e_i}$ Рассмотрим отношение $\overline{\varphi}: V_1/u \to V_2$, где $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(v+u) := \varphi(v)$ Отсюда $w=\overline{\varphi}(\overline{v})$. Получаем, что φ - сюръективное линейное отображение (т.к. $\forall w \in V_2 \exists v \in V_1 : \varphi(v) = w$). Также $\operatorname{Ker} \overline{\varphi} = \{0\} = \{\operatorname{Ker} \varphi\}$, потому что если $\overline{\varphi}(\overline{v})=0$, то $\varphi(v)=0$, т.е. $v\in \operatorname{Ker} \varphi=u\Longrightarrow v\in U\Longrightarrow \overline{v}=u=\{0\}$

9 Линейные операторы

Определение. Линейное отображение $\varphi:V\to V$ называется линейным оператором

Далее рассматриваем линейные операторы.

Утверждение.

- 1. $Ker \varphi$ nodnpocmpaнcmвo в V
- $2.~Im\, arphi$ nodnpocmpaнcmво в V
- 3. Если $U \subset V$, то $\varphi(U)$ подпространство в V

Определение. Подпространство $U \subset V$ называется инвариантным относительно φ (или φ - инвариантным), если:

$$\forall u \in U : \varphi(u) \in U$$
, T.E. $\varphi(U) \subseteq U$

Примеры.

- 1. Пусть $V=U\oplus W$. Пусть $\varphi:\ V\to V$ такое, что $\varphi(v)=\varphi(u+w)=u$ проекция V на U вдоль W. Тогда U и W инвариантные подпространства относительно φ и $\forall u\in U:\ \varphi(u)=u,$ а также $\forall w\in W:\ \varphi(w)=0.$ Отсюда $U\cong V/W$
- 2. Пусть $V = \mathbb{R}[t], \ \varphi(f) = \frac{df}{dt} \Rightarrow p(t) \to p'(t)$. Здесь инвариантным является подпространство $\mathbb{R}[t]_n \supset \mathbb{R}[t]_{n-1}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Теорема. Если $\varphi: V \to V$ - линейный оператор, $\dim V = n, U$ - инвариантное подпространство, то существует базис, в котором A_{φ} имеет блочный вид:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} B & D \\ \hline 0 & C \end{pmatrix}$$

 $\Gamma \partial e \ B \ u \ C$ - квадратные: $B_{m \times m}, \ m = \dim U$

Доказательство. Выберем базис $e_1,...,e_m$ в U и дополним до базиса в V. Тогда в полученном базисе A_{φ} имеет нужный вид.

3амечание. Пусть $U\subset V$ - инвариантное подпространство для линейного оператора $\varphi:\ V\to V$

Ограничение φ на подпространство U:

$$\varphi|_u: U \to U; \quad \forall u \in U: \ \varphi|_u(u) = \varphi(u)$$

Рассмотрим факторпространтсво:

$$\overline{V} = V/U : \{ v + u \mid u \in U \}$$

и фактор-оператор:

$$\overline{\varphi}(\overline{v}) := \overline{\varphi(v)}$$

 $\forall \overline{v} \in \overline{V}: \ v' = v + u, \ u \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v) + \varphi(u) \in U \Longrightarrow \varphi(\overline{v}) = \varphi(v)$

T.o. $\overline{\varphi}:\ \overline{V} \to \overline{V}$ - линейный оператор.

Теорема.

1. Если существует инвариантное подпространство $U \subset V$, то в подходящем базисе:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} B & D \\ \hline 0 & C \end{pmatrix} \tag{I}$$

 $\Gamma \partial e \; B_{m \times m}, \; m = \dim U, \; a \; moчнее: B \; - \; матрица \; onepamopa \; \varphi |_u,$ $C \; - \; матрица \; onepamopa \; \overline{\varphi}$

2. Если $V=U\oplus W,\ U\ u\ W$ - инвариантные для $\varphi,\ mo\ в\ nodxoдящем$ базисе:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{pmatrix} \tag{II}$$

Причем $B = A_{\varphi|_u}, \ C = A_{\varphi|_w}.$

Верно и обратное, если в некотором базисе матрица A_{φ} имеет вид (I), то для $\varphi \exists$ инвариантное подпространство, а если A_{φ} имеет вид (II), то V - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

Доказательство. Обозначим $\dim V = n, \ \dim U = m, \ 0 < m < n$

1. Выберем базис в $U: e_1,...,e_m$ и произвольно дополним его до базиса V векторами $e_{m+1},...,e_n$.

$$\forall u \in U : u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i \Longrightarrow \varphi(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i \varphi(e_i)$$

В частности, столбцы $\varphi(e_1)^{\uparrow},...,\varphi(e_m)^{\uparrow}$ имеют вид: $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ \Longrightarrow они составляют матрицу $\frac{B}{0}$. Столбцы матрицы $\varphi(e_{m+1}^{\uparrow},...,e_n^{\uparrow})$ соответствуют но-

мерам координат. Видно, что:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_u}$$

 $\overline{e_j}=e_j+U,\ j=m+1,...,n$ - базис в факторпространстве $\overline{V}=V/U.$

$$\overline{\varphi(e_j)} = \sum_{i=1}^m a_{ij}e_i + \sum_{k=m+1}^n a_{kj}e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj}e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj}\overline{e_k}$$

$$\Longrightarrow C = egin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
 — матрица оператора \overline{arphi}

2. Если $V = U \oplus W$, векторы $e_{m+1}, ..., e_n$ надо выбирать в W. Остальное аналогично.

Теорема. (Обратная)

Для второго случая, если в базисе $e_1,...,e_n$ матрица имеет вид (II), то положим $U:=\langle e_1,...,e_m\rangle,\ W:=\langle e_{m+1},....,e_n\rangle$

Из определения матрицы $A_{\varphi,e}$ следует, что U,W - инвариантные относительно $\varphi,\ \varphi|_u$ имеет матрицу $B,\ \varphi|_w$ - матрицу C.

Замечание. В общем случае, если $V = U_1 \oplus ... \oplus U_s, \ U_i$ - инвариантны относительно $\varphi:\ V \to V$, то в базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix}$$

где B_i - матрица $\varphi|_{u_i}$.

Примеры. $\varphi:\ V \to V$

- 1. Кег φ , Іт φ , любое подпространство $U\supseteq \operatorname{Im} \varphi$ инвариантны.
- 2. Если $U_1, U_2 \varphi$ -инвариантные подпространства, то $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$ инвариантны

10 Действия над линейными отображениями

Пусть $\varphi:\ V_1 \to V_2$ - линейное отображение, $\forall x \in V_1$

1. $\forall \lambda \in \mathbb{F} : (\lambda \varphi)(x) = \lambda \varphi(x)$

2. Если $\psi: V_1 \to V_2$, то $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

Утверждение. (1) Относительно этих операций множество $Z(V_1, V_2)$ линейных отображений из V_1 в V_2 является векторным пространством.

Утверждение. (2) Если dim $V_1 = n$, dim $V_2 = m$, mo $Z(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$

Доказательство. Зафиксируем базисы в V_1 и V_2 : e и f соответственно, тогда $\forall \varphi$ взаимооднозначно соответствует его матрица $A_{\varphi,e,f}$ относительно базисов e и f. $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_{\varphi} \ \forall \lambda \in \mathbb{F} \ (\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \Longrightarrow$ все столбцы A_{φ} умножаются на $\lambda \Longrightarrow A_{\varphi}$ умножается на λ .

$$\forall j = 1, ..., m : (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j)$$

 \Longrightarrow столбцы $A_{\varphi+\psi}$ имеют вид $\varphi(e_i) + \psi(e_i)$.

Обозначение: $L(V_1, V_2) = \mathfrak{T}(V_1, V_2) = \text{Hom}(V_1, V_2)$.

 $\mathfrak{T}(V)$ - множество линейных операторов на V.

Определение. Произведением линейных операторов $\varphi: V_1 \to V_2$ и $\psi: V_1 \to V_2$ называется их композиция:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$$
, где $x \in V_1$

Утверждение. (3) Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.

Утверждение. (4) Пусть V_1, V_2, V_3 - конечномерные векторные пространства, $\varphi: V_1 \to V_2, \ \psi: V_2 \to V_3$ - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции:

$$A_{\psi \circ \varphi} = A_{\psi} \cdot A_{\varphi}$$

Доказательство.

Утверждение (3) - упражнение.

Утверждение (4): Пусть e - базис в V_1 , f - базис в V_2 , g - базис в V_3 .

$$A_{\varphi} = (\varphi(e_1)^{\uparrow} \dots \varphi(e_n)^{\uparrow})$$
 в базисе f

$$A_{\psi} = (\psi(f_1)^{\uparrow} \dots \psi(f_m)^{\uparrow})$$
 в базисе g

 $\forall x=eX,$ обозначим $y=\varphi(x),\ z=\psi(y)$ со столбцами координат Y и Z соответственно. Тогда:

$$Y = A_{\varphi}X, \ Z = A_{\psi}Y = A_{\psi}(A_{\varphi}X) = (A_{\psi}A_{\varphi})X = A_{\psi\circ\varphi}X$$

Теорема. Множество L(V) с операциями $+, \cdot \lambda, \cdot$ является ассоциативной алгеброй с единицей, равной id V. Если $\dim V = n$, то $L(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.

Утверждение. Если φ - линейный оператор на V, то $\forall k \in \mathbb{N}$ подпространства $Ker \varphi^k$ и $Im \varphi^k$ инвариантны. При этом:

$$\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi \subseteq \operatorname{Ker} \varphi^2 \subseteq \dots$$
$$V \supset \operatorname{Im} \varphi \supset \operatorname{Im} \varphi^2 \dots$$

11 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть $\varphi:V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb F$

Определение. Вектор $x \in V$ называется собственным вектором оператора φ , если $x \neq 0$ и

$$\exists \lambda \in \mathbb{F}: \ \varphi(x) = \lambda \cdot x \tag{1}$$

Где λ - называется собственным значением оператора φ , соответствующим вектору x.

Пусть $\dim V = n$, e - базис в V, в нём $\forall x = e \cdot X$, тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно:

$$A_{\varphi}X = \lambda X \Longleftrightarrow (A_{\varphi} - \lambda E)X = 0 \tag{2}$$

- это СЛУ для нахождения вектора x, если известна λ . Система (2) имеет ненулевое решение, только если:

$$\det(A_{\omega} - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

Равенство (3) называется характеристическим уравненением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

Примеры.

1. $V = D^{\infty}(\mathbb{R})$ - множество бесконечно дифференцируемых функций.

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \ \forall f(x) : \ \varphi(f) = f'(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \ (e^{\lambda x})' = \lambda e^x$$

Доказательство. Если $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$, то $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, где $C \neq 0$. Рассмотрим $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow f(x)e^{-\lambda x} = C$. \square

2.

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Упражнение. Какие существуют собственные векторы и собственные значения у φ во втором примере?

Определение.

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(a_{11}-\lambda)\cdot(a_{11}-\lambda)\cdot\cdot\cdot(a_{11}-\lambda)+\cdot\cdot\cdot=(-\lambda)^n+(a_{11}+...+a_{nn})(-\lambda)^{n-1}+...+\det A$$
 $\chi_A(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A

Утверждение. (1) $\chi_A(\lambda)$ - не зависит от базиса.

 \mathcal{A} оказательство. В новом базисе: $A_{\varphi}' = C^{-1} \cdot A_{\varphi} \cdot C$

$$\chi_{A'_{\varphi}}(\lambda) = \det(C^{-1}A_{\varphi}C - \lambda E) = \det(C^{-1}(A_{\varphi} - \lambda E)C) = \det(A_{\varphi} - \lambda E)$$

Определение. Вместо $\chi_{A_{\varphi}}(\lambda) = \chi_{\varphi}(\lambda)$ и называется характеристическим многочленом оператора φ

12 Диагонализируемость

Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор

Лемма. Если $a_1, ..., a_m \in V$ - собственные векторы оператора φ с собственными значениями $\lambda_1,...,\lambda_m$, причем $\forall i \neq j: \lambda_i \neq \lambda_j$, то $a_1,...,a_m$ - ЛНЗ.

Доказательство.

m = 1: Один вектор $a_1 \neq 0$ ЛНЗ

m > 1: Предположение индукции: Любые m-1 вектор, отвечающих попарно различным собственным значениям - ЛНЗ

Запишем:

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m = 0 \tag{1}$$

Подействуем оператором

$$\varphi: a_1 \lambda_1 \alpha_1 + \dots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} + a_m \lambda_m \alpha_m = 0 \tag{2}$$

Домножим (1) на λ_m и вычтем его из (2):

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$$

По предположению индукции $\forall i=1,...,m-1:\ \alpha_i(\lambda_i-\lambda_m)=0\Longrightarrow \alpha_i=0$ Остается $\alpha_m a_m = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$

Следствие. Если φ имеет n попарно различных собственных значений $(\dim V = n)$, то соответствующее собственные векторы, взятые по одному для каждого собственного значения, образуют базис в V (Базис из собственных векторов или собственный базис).

Вид матрицы A_{φ} в базисе из собственных векторов:

Обозначаем базис $\{e_1,...,e_n\} \in V, \ \varphi(e_j) = \lambda_j e_j, \ j = \overline{1,n}$

$$\forall x \in V : \varphi(x) = A_{\varphi,e} \cdot X_e$$
. Столбец вектора $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

$$A_{arphi,e} = egin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \ & \lambda_2 & & & \ & & \ddots & & \ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- диагональная, причем на диагонали находятся собственные значения с учетом нумерации векторов

12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением

Фиксируем собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ так, что $\exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda_0 v$ Обозначается: $V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$

Утверждение. (1) V_{λ_0} - $nodnpocmpancmeo\ e\ V,\ V_{\lambda_0} = Ker(\varphi - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})$

Доказательство. Если A_{φ} - матрица оператора φ , то в координатах V_{λ_0} - множество всех решений СЛУ.

$$(A_{\varphi} - \lambda_0 E) \cdot X = 0 \Longrightarrow \dim V_{\lambda_0} = n - \operatorname{rk} (A_{\varphi} - \lambda_0 E)$$

Определение.

 $\dim V_{\lambda_0}$ - геометрическая кратность характеристического корня $\lambda=\lambda_0$. Имеет смысл и алгебраическая кратность λ_0 характеристического корня $\chi_{\varphi}(\lambda)$:

$$\chi_{\varphi}(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p(\lambda_0), \ P(\lambda_0) \neq 0, \ k$$
 – алгебраическая кратность

Лемма. Для любого собственного значения λ_0 оператора φ :

$$\dim V_{\lambda_0} \leq$$
 алгебраическая кратность корня $\lambda = \lambda_0$ в $\chi_{\varphi}(\lambda)$

Доказательство. Пусть $\dim V_{\lambda_0} = m \le n$, выберем базис в $V_{\lambda_0} : \{e_1, ..., e_m\}$ и произвольно дополним его до базиса в V (при m < n) векторами $e_{m+1}, ..., e_n \Longrightarrow$

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \\ & \ddots & & C \\ 0 & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & B \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$|A_{\varphi,e} - \lambda E| = \det \begin{pmatrix} (\lambda_0 - \lambda) & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & (\lambda_0 - \lambda) & \end{pmatrix} = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot |B - \lambda E| = 0$$

Не исключено, что $\lambda=\lambda_0$ - корень уравнения $|B-\lambda E|=0$

3амечание. Любое собственное подпространство V_{λ_0} является φ - инвариантным:

$$\forall v \in V_{\lambda_0}: \ \varphi(v) = w: \ \varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = \lambda_0 \varphi(v) = \lambda_0 w$$

Либо w = 0, либо является собственным вектором.

Следствие. 2 из Леммы о ЛНЗ:

Пусть $\lambda_1,...,\lambda_r$ - все попарно различные собственные значения оператора $\varphi,$ тогда $V_{\lambda_1}+...+V_{\lambda_r}$ - является прямой суммой, т.е.:

$$\forall i = 1, ..., n : V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}) = \{0\}$$

Доказательство. Допустим, что $\exists \ w \in V_{\lambda_i} \cap (\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j})$, тогда:

$$w = v_i = \sum_{j \neq i} v_j \Longrightarrow (\sum_{j \neq i} v_j) - v_i = 0$$

Где $(\sum_{j\neq i}v_j)$ - попарно различные собственные векторы, т.е. либо 0, либо противоречие с ЛНЗ $\Longrightarrow v_i=w=0$

Определение. Скажем, что φ (или его матрица) приводится к диагональному виду (т.е. диагонализируема), если в V \exists базис, в котором A_{φ} диагональна.

Теорема. Для линейного оператора $\varphi: V \to V \ (\dim V < \infty)$ следующие условия эквивалентны:

- 1. A_{φ} диагонализируема
- 2. $B \ V \ \exists \ \textit{базис из собственных векторов}$
- 3. Все характеристические корни принадлежат \mathbb{F} и $\forall i=1,...,r$:

 $\dim V_{\lambda_i} =$ алгебраической кратности корня λ_i

4.
$$V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$$

Доказательство.

 $1 \Rightarrow 2$: Если $A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}$, это значит, что:

$$\varphi(e_j)^{\uparrow} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \vdots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

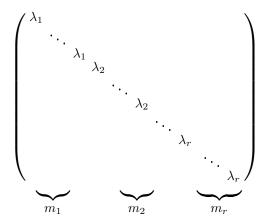
 $\Longrightarrow arphi(e_j) = \lambda_j e_j$, т.е. e_j - собственный вектор с собственным значением λ_j

 $2\Rightarrow 1$: В базисе из собственных векторов марица A_{arphi} диагональна

 $1 \cup 2 \Rightarrow 3$: Выберем базис из собственных векторов $\{f_1, ..., f_n\}$ так, чтобы:

$$\{f_1,...,f_{m_1},f_{m_1+1},...,f_{m_1+m_2},...\}$$

В этом базисе матрица $A_{\varphi,f}$ выглядит:



 $\implies m_1 + ... + m_r = n$. С другой стороны, если k_i - алгебраическая кратность корня λ_i , то:

$$n = \sum_{i=1}^{r} m_i \le \sum_{i=1}^{r} k_i = \deg[\chi_{\varphi}(\lambda)] = n$$

$$\underline{3 \Rightarrow 4} : \sum_{i=1}^{r} \dim V_{\lambda_i} = n \Longrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_r}$$

 $4\Rightarrow 1$: Базис в V - объединение базисов слагаемых

Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над \mathbb{R} , отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.

Пусть $\varphi:V\to V$ - линейный оператор, $\dim V=n$, тогда в некотором базисе $V,\, \varphi$ действует матрицей $Y=A_{\varphi}\cdot X$, где $X\in\mathbb{R}^n$, а Y - столбец образа этого вектора $(y=\varphi(x))$. Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем \mathbb{C} , действующий при той же матрице:

$$A_{\varphi}: \forall Z \in \mathbb{C}^n, \ Z \to A_{\varphi} \cdot Z$$

Соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как \mathbb{C} алгебраически замкнуто, то \exists собственный вектор Z_0 , отвечающий выбранному λ . Это значит, что:

$$A_{\varphi}Z_0 = \lambda Z_0, \ Z_0 = X_0 + iY_0, \$$
где $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\implies A_{\varphi}Z_0 = A_{\varphi}X_0 + iA_{\varphi}Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) =$$

$$= (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \implies$$

$$\implies \begin{cases} A_{\varphi}X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_{\varphi}Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases}$$

Обозначим x_0 и $y_0 \in V$ векторы со столбцами координат X_0 и Y_0 соответственно, тогда:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \implies \text{подпространство } U := \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$$

 $\Longrightarrow U$ является инвариантным подпространством для φ .

Теперь докажем, что $\dim U = 2$

Доказательство. Предположим, что dim U=1, то есть $y_0=\mu x_0$, где $\mu\in\mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x_0)=(\alpha-\beta\mu)x_0\Longrightarrow$ если $x_0\neq 0$, то x_0 - собственный вектор для φ (для y_0 аналогично). Но эти векторы не были собственными для φ .

$$A_{arphi|_U}=egin{pmatrix}lphaη\-eta&lpha\end{pmatrix}$$
 имеет корни $lpha\pm ieta
otin\mathbb{R}$ — противоречие

Теорема. Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Если $\exists \ \lambda \in \mathbb{R}$ - корень характеристического многочлена, ему отвечает собственный вектор $u_i \in V, \ u_i \neq 0, \Longrightarrow \langle u_i \rangle$ - одномерное инвариантное подпространство.

Если
$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$
, то $\exists U$ - двумерное инвариантное подпространство.

Вместо диагонализируемости можно использовать следующее утверждение:

$$A'_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & \alpha_1 & \beta_1 & \\ & & -\beta_1 & \alpha_1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1,r}, \ a \beta_i \neq 0, \ j = \overline{1,m}$

13 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть $\varphi:\ V \to V$ - линейный оператор над полем $\mathbb F.$

Определение. Линейный оператор $\varphi: V \to V$ такой, что $\forall v \in V: \varphi(v) = v$, называется тождественным оператором и обозначается id.

Определение. Многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$, где $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{F}$, называется анулирующим многочленом оператора φ

$$f(\varphi) = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 \varphi + \ldots + a_m \varphi^m = 0 \Longrightarrow f(A_\varphi) = 0$$

$$\Longrightarrow A_{f(\varphi)} = f(A_{\varphi}) = a_0 E + a_1 A_{\varphi} + \ldots + a_m A_{\varphi}^m.$$

Пример. $V = \mathbb{R}[t]_n, \ \varphi = \frac{d}{dt}$

$$\varphi^n(t^n)=n!,\; \varphi^{n+1}\equiv 0\Longrightarrow$$
 для $\varphi=rac{d}{dt}\;\;t^{n+1}$ — анулирующий многочлен

Утверждение. Если $\dim V = n \Longrightarrow \exists$ многочлен $\deg \leq n^2$, анулирующий φ .

Доказательство. $\dim L(V) = n^2, \ L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \Longrightarrow$ операторы $\{Id, \ \varphi, \ \varphi^2, \ \ldots, \ \varphi^{n^2}\}$ - линейно зависимы, так как их больше $n^2 \Longrightarrow$

$$\exists a_0, ..., a_{n^2} \in \mathbb{F} : a_0 \cdot id + a_1 \varphi + ... + a_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$$

$$\Longrightarrow a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n^2} t^{n^2}$$
 - анулирующий многочлен для φ

Определение. Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица $P=(P_{ij}(\lambda))$, где $P_{ij}(\lambda)$ - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

Пример.

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2$$

- многочлен от λ с матричными коэффициентами.

Определение. Оператор $\varphi:V\to V$ называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

Определение. Для матрицы $A = (a_{ij})$ присоединённой матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ji})$, то есть $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$.

Свойство.

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

Теорема. Гамильтона-Кэли

Характеристический многочлен $\chi_{\varphi}(\lambda)$ является анулирующим многочленом для линейного оператора φ , то есть $\chi_{\varphi}(\varphi) = 0$, где θ - нулевой оператор. В матричной форме:

$$\forall A \in M_n(\mathbb{F}): \ \chi_A(A) = 0$$

$$\chi_A(\lambda)=|A-\lambda E|=\sum_{i=0}^n p_i\lambda^i$$
 $p_i\in\mathbb F,\ p_n=(-1)^n,\ \chi_A(A)=\sum_{i=0}^n p_iA^i$ (считаем, что $A^0=E$)

Составим матрицу:

$$\widehat{A-\lambda E}=\sum_{j=0}^{n-1}D_j\lambda^j,$$
 где $D_j\in M_n(\mathbb{F})$

Рассмотрим равенство:

$$(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda)E$$

$$(A - \lambda E) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j = \sum_{j=0}^{n-1} (AD_j \lambda^j) - \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^{j+1} =$$

$$= AD_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (AD_j - D_{j-1}) \lambda^j - D_{n-1} \lambda^n = \chi_A(\lambda) E = (\sum_{j=0}^n p_j \lambda^j) E$$

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях λ :

$$E \cdot \begin{vmatrix} \lambda^0 : & AD_0 = p_0 E \\ A \cdot & \lambda^1 : & AD_1 - D_0 = p_1 E \\ \vdots & & & \\ A^j \cdot & \lambda^j : & AD_j - D_{j-1} = p_j E \\ \vdots & & & \\ A^n \cdot & \lambda^n : & -D_{n-1} = p_n E \end{vmatrix}$$

Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени A и сложим:

$$\Longrightarrow \chi_A(A)E = 0$$

13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора

Определение. Минимальным анулирующим многочленом линейного оператора $\varphi: V \to V$ называется анулирующий многочлен φ минимальной степени. Обозначается: $\mu_{\varphi}(\lambda)$ (Зачастую его выбирают со старшим коэффициентом = 1) Ясно, что:

$$m = \deg \mu_{\varphi}(\lambda) \le n \le \deg \chi_{\varphi}(\lambda)$$

Теорема.

- 1. $\mu_{\varphi}(\lambda)$ делит анулирующий многочлен оператора φ (в частности $\chi_{\varphi}(\lambda)$);
- 2. Если $\mu_{\varphi}'(\lambda)$ тоже минимальный многочлен φ , то:

$$\mu_{\varphi}'(\lambda) = \alpha \mu_{\varphi}(\lambda), \ \alpha \neq 0$$

Он определен единственным образом с условием, что старший коэффиииент = 1;

3. Если все корни λ_i характеристического многочлена принадлежат \mathbb{F} , то они являются и корнями минимального многочлена.

Доказательство.

1. Пусть $p(\varphi) = 0$, для некоторого $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ Разделим p с остатком на μ_{φ} :

$$p(\lambda) = \mu_{\varphi}(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = \mu_{\varphi}(\varphi) \cdot q(\varphi) + r(\varphi) = 0 \Rightarrow r(\varphi) = 0$$
 Т.к. $\deg r(\lambda) < \deg(\mu_{\varphi}(\lambda)), \ r(\lambda) \equiv 0.$

- 2. Т.к. $\mu_{\varphi}(\lambda) \mid \mu_{\varphi}'(\lambda)$ и $\mu_{\varphi}'(\lambda) \mid \mu_{\varphi}(\lambda) \Longrightarrow \frac{\mu_{\varphi}'}{\mu_{\varphi}} = \alpha \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \backslash \{0\}$ Если $\mu_{\varphi}(\lambda) = \lambda^m + \dots$ и $\mu_{\varphi}'(\lambda) = \lambda^m + \dots \Longrightarrow \alpha = 1$
- 3. Допустим, что $\exists j: \ \mu_{\varphi}(\lambda_j) \neq 0$, т.е. в разложение μ_{φ} не входит $(\lambda \lambda_j)$ $\Longrightarrow \exists$ вектор $v \in V: \ \varphi(v) = \lambda_j v$

$$0 = \mu_{\varphi}(\varphi)(v) = \mu_{\varphi}(\varphi(v)) = \mu_{\varphi}(\lambda_{i}v) = \mu_{\varphi}(\lambda_{i})v \neq 0$$

- противоречие

Примеры.

1.

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \chi_{\varphi}(\lambda) = (2 - \lambda)^{3}$$
$$A_{\varphi} - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (A - 2E)^{2} \neq 0, \ (A - 2E)^{3} = 0 \Longrightarrow \mu_{\varphi} = -\chi_{\varphi}$$

2.

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \chi_{\varphi} = (2 - \lambda)^{2} (1 - \lambda)$$
$$(A_{\varphi} - 2E)(A_{\varphi} - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \mu_{\varphi}(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Вопросы:

- 1. Для каких операторов φ (или A_{φ}) $\chi_{\varphi}(\lambda) = \pm \mu_{\varphi}(\lambda)$?
- 2. Для каких φ корни $\mu_{\varphi}(\lambda)$ простые?

Определение. Оператор φ нильпотентный, если:

$$\exists L \in \mathbb{N}: \ \varphi^L = 0$$

Если L - минимальный с этим условием, то L - индекс нильпотентности

Пример. $D = \frac{d}{dt}$ в пространстве $\mathbb{R}[t]_n$, то $D^{n+1} = 0$

Утверждение. Все собственные значения нильпотентного оператора = 0

Доказательство. Если $v \neq 0, \ \varphi(v) = \lambda v$:

$$\Longrightarrow \varphi^L(v) = \lambda^L v = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \chi_{\varphi}(\lambda) = \pm \lambda^n$$

14 Корневые подпространства

 $\varphi:\ V o V$ - линейный оператор над $\mathbb{F},\ \dim V=n$

Все корни характеристического многочлена для φ принадлежат F так, что:

$$\chi_{\varphi}(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}, \ \forall i \neq j : \ \lambda_i \neq \lambda_j, \ \sum_{i=1}^s k_i = n$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\chi_{\varphi}(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}} | \cdot \chi_{\varphi}(\lambda)$$

$$\Longrightarrow 1 = f_1(\lambda) \prod_{i \neq 1} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} + \dots + f_s(\lambda) \prod_{i \neq s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

$$1 = q_1(\lambda) + \dots + q_s(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{id} = q_1(\varphi) + \dots + q_s(\varphi) = Q_1 + \dots + Q_s$$

$$\forall x \in V : x = Q_1(x) + \dots + Q_s(x) \Longrightarrow V = \mathrm{Im}(Q_1) + \dots + \mathrm{Im}(Q_s)$$

Обратим внимание, что:

$$\forall i \neq j : Q_i Q_j = Q_j Q_i = 0$$

Т.к. в $q_i(\lambda)q_j(\lambda)$ входят все множители, входящие в разложение $\chi_{\varphi}(\lambda) \Longrightarrow$ по теореме Гамильтона-Кэли:

$$q_i(\varphi)q_j(\varphi) = 0$$

Умножим равенство $id = Q_1 + ... + Q_i + ... + Q_s$ на Q_i :

$$\Longrightarrow Q_i \text{id} = Q_i = Q_i Q_1 + \dots + Q_i Q_i + \dots + Q_i Q_s = Q_i^2 \Longrightarrow Q_i^2 = Q_i$$

Определение. $Q_i^2 = Q_i$ - идемпотентный оператор.

Введем обозначение $K_i = \operatorname{Im} Q_i$

Утверждение. $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s$

Доказательство. Пусть $x=y_1+...+y_s,\ y_i=Q_i(x_i)$. Тогда:

$$Q_i(x) = Q_i(Q_1(x_1)) + \dots + Q_s(Q_i(x_s)) = Q_i(Q_i(x_i)) = Q_i(x_i) = y_i$$

Отсюда разложение любого вектора из V в сумму векторов из $K_1,...,K_s$ единственно, т.е. $V=K_1\oplus...\oplus K_s$.

Определение. Подпространство $K_i = \text{Im}Q_i$ назовем корневым подпространством, отвечающим корню λ_i .

Замечание.
$$q_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda) \cdot \chi_{\varphi}(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}} = f_i(\lambda) \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}; \quad Q_i = q_i(\varphi); \quad K_i = \operatorname{Im} Q_i.$$

Утверждение.

1. Корневые подпространства инвариантны

2.
$$K_i = Ker(\varphi - \lambda_i \cdot id)^{k_i}, \ 1 \le i \le s$$

Доказательство.

1. Докажем, что для линейного оператора φ и многочлена $q(\lambda)$ подпространство $q(\varphi)(V)$ инвариантно:

$$q(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + ... + a_m \lambda^m, \quad q(\varphi) = a_0 + a_1 \varphi + ... + a_m \varphi^m$$

Возьмем $v \in \text{Im}q(v) \Longrightarrow \exists u \in V : v = q(\varphi)(u) \Longrightarrow \varphi(v) = (\varphi \cdot q(\varphi))(u) = q(\varphi)(\varphi(u)) \in \text{Im}q(u)$, так как оператор φ и любой $q(\varphi)$ перестановочны. Так как $K_i = Q_i(V) = q_i(\varphi)(V)$, из доказаноого выше следует, что K_i инвариантно.

2. $\forall x_i \in \text{Im}Q_i \Longrightarrow x_i = Q_i(u_i)$

$$(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i}(x_i) = f_i(\varphi) \cdot (\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{k_i} \cdot \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j E)^{k_j}(u_i) = 0$$

$$\chi_{\varphi}(\varphi)$$

$$\Longrightarrow K_i \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \operatorname{id})^{k_i}$$

Обратно: пусть $y_i \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k^i}$. Знаем, что $y_i = Q_1(y_i) + ... + Q_s(y_i)$, причём в Q_j при $j \neq i$ содержится множитель $(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$. Отсюда $Q_j(y_i) = 0$ при $j \neq i$, т.е. $y_i = Q_i(y_i) \Rightarrow y_i \in K_i \Rightarrow \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i} \subseteq K_i$.

Теорема. Размерность K_i равна алгебраической кратности корня λ_i .

Доказательство. Рассмотрим ограничение оператора $\varphi - \lambda_i \cdot \text{id}$ на K_i . Так как полученный оператор нильпотентный (из предыдущей теоремы), его единственное собственное значение равно 0, т.е. оператор φ в ограничении на K_i имеет единственное собственное значение λ_i , причём его алгебраическая кратность для ограничения равна размерности K_i .

Выберем базис в K_i , дополним его до базиса V и рассмотрим матрицу оператора в нём. Из инвариантности K_i она будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}
B & D \\
0 & C
\end{pmatrix}$$

где B - матрица $\varphi|_{K_i}$. Из её характеристического многочлена очевидно, что алгебраическая кратность λ_i для ограничения не может превосходить алгебраической кратности λ_i для всего оператора. Значит, $\dim K_i$ не превосходит алгебраической кратности λ_i .

Осталось заметить, что $\dim V$ равна сумме алгебраических кратностей всех собственных значений и $V = K_1 \oplus ... \oplus K_s \Rightarrow \dim V = \dim K_1 + ... + \dim K_i$. Значит, $\dim K_i$ равна алг. кратности λ_i .

15 Теорема Жордана

Основное условие: $\varphi: V \to V$ - линейный оператор, все его корни $\in \mathbb{F}$

$$\chi_{\varphi}(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ (\forall i \neq j : \ \lambda_i \neq \lambda_j \ \text{if} \ \sum_{i=1}^s k_i = \dim V)$$

$$V=K_1\oplus\ldots\oplus K_s$$
, где $K_i=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^{k_i}$ – корневое подпространство $V_{\lambda_i}=\{x\in V\mid \varphi(x)=\lambda_ix\},\ \dim V_{\lambda_i}\leqslant k_i=\dim K_i$

Так как K_i - инвариантное подпространство относительно оператора φ , можно рассмотреть ограничение:

$$(\varphi - \lambda_i \text{ id})|_{K_i} := B_i$$

Из определения K_i следует, что $B_i^{K_i}=0$, то есть B_i - нильпотентный оператор. В базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

где $A_i=A_{\varphi_{k_i}}$ - матрица порядка $k_i,\ A_i-\lambda_i E_{k_i}=B_i,\ B_i^{k_i}=0$ Обозначим $K_i:=K,\ B_i:=B,\ k_i:=k,$ тогда:

$$\forall x \in K: \ B^k(x) = 0$$

если $x \neq 0$, то \exists наименьшее значение m:

$$B^{m}(x) = 0, \ B^{m-1}(x) \neq 0 \ (m \leqslant h)$$

Назовём это высотой вектора x.

Для фиксированного вектора $x \neq 0$ (высоты m) рассмотрим векторы:

$$x, Bx, \dots, B^{m-1}x, B^mx = 0$$

Определение. Векторы $\{x, Bx, \ldots, B^{m-1}x\}$ называются жордановой цепочкой.

Лемма. Вышеуказанные векторы являются линейно независимыми.

Доказательство. Предположим, что:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 B x + \ldots + \alpha_{m-1} B^{m-1} x = 0$$

Подействуем на это равенство оператором B^{m-1} :

$$\alpha_0 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

На оставшиеся векторы подействуем оператором B^{m-2} :

$$\alpha_1 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

и т.д. Получим, что $\forall i=\overline{0,m-1}: \ \alpha_i=0 \implies$ векторы являются линейно независимыми.

Определение. Подпространство, натянутое на эти векторы:

$$\langle x, Bx, \ldots, B^{m-1}x \rangle$$

называется циклическим подпространством, порождённым жордановой цепочкой. Данное подпространство обозначим U_x , dim $U_x = m$.

Обычно векторы жордановой цепочки нумеруют с конца, то есть:

$$a_1 = B^{m-1}x, \ a_2 = B^{m-2}x, \dots, a_m = x$$

Тогда a_1 - собственный вектор для B, и для $\forall j=\overline{2,m}:\ a_{j-1}=Ba_j.$

Вектор a_j называется **присоединённым** к вектору a_{j-1} .

К вектору a_1 : a_2 - присоединённый, a_3 - второй присоединённый и т.д.

Определение.

Матрица ограничения оператора B на подпространство $U_x = \langle a_1 \dots a_m \rangle$:

$$B|_{U_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

называется жордановой клеткой с собственным значением $\lambda=0$

$$\lambda = \lambda_i : A_{\varphi|_{U_x}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = J_k(\lambda_i)$$

- жорданова клетка с собственным значением $\lambda = \lambda_i$, где:

$$\varphi(a_2) = a_1 + \lambda_i a_2, \ \varphi(a_{i+1}) = a_i + \lambda_i a_{i+1}$$

Перед доказательством теоремы докажем лемму:

Лемма. Если B - такой оператор в пространстве V, что:

$$ImB = B(V) \subset V$$

то V обладает (n-1)-мерным инвариантным подпространством W, таким что ${\rm Im} B\subseteq W.$

Доказательство. Пусть $e_1,...,e_m$ - базис в ${\rm Im}B,\ m< n=\dim V$ Дополним его до базиса в V векторами $e_{m+1},...,e_n$.

Тогда $W = \langle e_1, ..., e_{n-1} \rangle$ - искомое инвариантное подпространство:

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i \Longrightarrow Bw = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i Be_i \in \operatorname{Im} B \subseteq W$$

Теорема. Жордана

Если все характеристические корни опертора $\varphi: V \to V$ принадлежат полю \mathbb{F} , то V является прямой суммой циклических подпространств для оператора φ . Это равносильно тому, что в V существует базис, составленный из жордановых цепочек. Такой базис называется жордановым базисом.

Если жорданов базис уже построен: Пусть имеются r жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, необязательно различным, длины которых m_1, \ldots, m_r соответственно, тогда в этом базисе:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^r m_i = n = \dim V$$

- жорданова матрица - жорданова нормальная форма $(\mathcal{K}\mathcal{H}\Phi)$ матрицы $A_{\varphi}.$

Теорема. Жордана (матричная формулировка)

Для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$, все характеристические корни которой $\in \mathbb{F}$, \exists матрица C (det $C \neq 0$) такая, что:

$$C^{-1}AC = J$$

жорданова матрица. При этом жордановы клетки определены для матрицы
 А единственным образом с точностью до расположения клеток на диагонали жордановой матрицы.

3амечание. Матрицу A можно интерпретировать как матрицу линейного оператора φ , для него верна теорема Жордана.

Доказательство. (См. Шафаревич И.Р. "Линейная алгебра")

Доказательство достаточно провести для ограничения оператора на каждое корневое подпространство K_i .

Введем обозначения: $B: V \to V$ - нильпотентный оператор, $\dim V = n, W - (n-1)$ -мерное инвариантное подпространство в V, содержащее $\operatorname{Im} B$ (существует по лемме 1).

Докажем теорему индукцией по n:

База: если n=1, то B=0 и любой базис - жорданов.

Пусть n > 1, тогда по предположению индукции в $W \exists$ базис для $B|_w$, т.е.

$$W = U_1 \oplus ... \oplus U_r$$

Выберем вектор $a \in V \setminus W$, тогда a ЛНЗ с векторами из W.

Рассмотрим $Ba \in W$ (т.к. ${\rm Im} B \subseteq W$) так, что $Ba = u_1 + ... + u_r, \ u_i \in U_i$ (*). Если Ba = 0, то:

$$V = \langle a \rangle \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_r$$
 — искомое разложение пространства

Если $Ba \neq 0$, то найдется i, что $u_i \neq 0$.

Если в разложении есть $u_i \in B(U_i)$, то $\exists v_i \in U_i : u_i = Bv_i$.

Рассмотрим вместо a вектор $a - v_i$: $B(a - v_i) = u_1 + ... + u_i + ... + u_r - u_i \Longrightarrow$ в разложение такого вектора u_i не входит.

Заменив a на нужные разности $a-v_i$, получим новый вектор $e \in V \setminus W$, при этом занулив все $u_i \in B(U_i)$, т.е.

$$Be = u_1' + ... + u_r', \ \forall i$$
 либо $u_i' \not\in B(U_i)$, либо $u_i' = 0$

Хотя бы один из векторов $u_i' \neq 0$, выберем из них вектор, имеющий максимальную высоту m. Заметим, что $m = \max(\dim U_i)$, так как каждый u_i' по

построению нового разложения имеет максимальную высоту в своём подпространстве. Тогда h(e)=m+1, т.к. h(Be)=m.

Без ограничения общности выбрали вектор u_1 . Докажем, что:

$$V = \langle e, Be, ..., B^m e \rangle \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$$

Сумма размерностей подпространств в правой части:

$$(m_1+1)+...+m_r=n=\dim V$$

Поэтому для прямой суммы достаточно доказать, что:

$$\langle e, Be, ..., B^m e \rangle \cap (U_2 \oplus ... \oplus U_r) = \{0\}$$

Пусть $v = \lambda_1 e + ... + \lambda_{m+1} B^m e \in U_2 \oplus ... \oplus U_r$

Т.к. $e \not\in W$, $\lambda_1=0$. $Be=u_1'+\ldots+u_r'\Rightarrow$ проекция Be на U_1 равна u_1' .

Спроецируем всё разложение на U_1 :

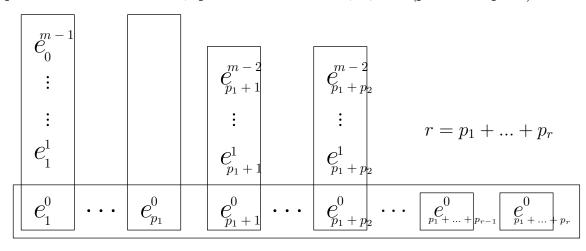
$$\lambda_2 u_1 + \lambda_3 B u_1 + \dots + \lambda_{m+1} B^{m-1} u_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = \dots = \lambda_{m+1} = 0 \Longrightarrow v = 0$$

Существование ЖНФ доказано. Доказательство единственности приводится в следующем пункте. $\hfill\Box$

3 a m e v a h u e. r - количество циклических подпространств в разложении корневого подпространства K, отвечающего корню λ_0 , равно геометрической кратности корня λ_0 характеристического многочлена.

15.1 Изображение разложения корневых подпространств

Обозначим: $r=\dim \operatorname{Ker} B$ - размерность собственного подпространства Занумеруем собственные векторы, входящие в цепочки, располагая цепочки по убыванию высоты. m - максимальная высота цепочки, 1 - минимальная Также введем обозначение для последовательных присоединённых векторов: есть p_1 цепочек высоты m, p_2 - высоты $m-1,\ldots,\,r-(p_1+\ldots+p_{r-1})$ - высоты 1



$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$$
, dim $U_{i+1} \leq \dim U_i$

$$BV = BU_1 \oplus \dots \oplus BU_r$$

$$\vdots$$

$$B^kV = B^kU_1 \oplus \dots \oplus B^kU_r$$

Если
$$\dim U_i = m_i$$
, $\dim(B^k U_i) = \begin{bmatrix} m_i - k, & \text{если } k < m_i \\ 0, & \text{если } k \ge m_i \end{bmatrix}$

$$\dim(B^k V) = \sum_{i=1}^r \dim B^k U_i = q_{k+1} + 2q_{k+2} + \dots + (m-k)q_m$$

Пусть q_i - число циклических подпространств размерности $i,\ 1 \leq i \leq r$ Обозначим $r_k = \operatorname{rk} B^k$

Для k = 0 до m - 1 получим равенства:

$$k=0: \ q_1+2q_2+\ldots+mq_m=n$$
 $k=1: \ q_2+2q_3+\ldots+(m-1)q_m=r_1=\mathrm{rk}B$ \ldots $q_m=r_{m-1}=\mathrm{rk}B^{m-1}\neq 0$ $B^m=0$ на корневом подпространстве

Вычитая из каждого уравнения следующее, получим систему:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + \dots + q_m = n - r_1 \implies q_1 = n - 2r_1 + r_2 \\ q_2 + \dots + q_m = r_1 - r_2 \implies q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 \\ & \dots \\ q_m = r_{m-1} - r_m \ (r_m = 0) \\ \implies q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1} \ (i = 1, \dots, m-1) \end{cases}$$

Вывод: количество и порядок (высоты цепочек) однозначно опреледяется по матрице $B = A|_{\varphi-\lambda {\rm id}}$ - эти ранги не зависят от конкретного разложения \Longrightarrow определяются единственным образом, т.е. **ЖНФ единственна с точностью** до перестановки клеток на диагонали.

Следствие. Пусть:

$$\chi_{\varphi} = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

- характеристический многочлен

$$\mu_{\varphi} = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

- минимальный многочлен

Tогда $\forall i=\overline{1,s}: m_i$ равна \max размерности жордановой клетки, отвечающей корню λ_i

Следствие. Критерий диагонализируемости в терминах тіп многочлена:

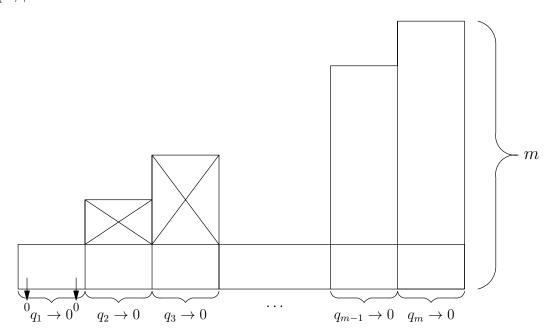
Оператор φ диагонализируем $\iff m_1 = ... = m_s = 1$

 \mathcal{A} оказательство. Достаточно доказать для каждого корневого подпространства K_i

$$B = A_{\varphi - \lambda_i \mathrm{id}}|_{K_i}$$

- блочно-диагональная матрица с клетками размера m_j

Переделываем:



Применим оператор B:

$$\begin{cases} \dim V = q_1 + 2q_2 + \dots + (m-1)q_{m-1} + mq_m = n \\ \dim \operatorname{Im} B = q_2 + \dots + (m-2)q_{m-1} + (m-1)q_m = r_1 \\ \vdots \\ \dim \operatorname{Im} B^{m-1} = q_m = r_{m-1} \end{cases}$$

Некоторые применения приведут матрицу к жордановой форме (в частности, диагонализируемости)

15.2 Решение СЛАУ

Пусть дана система AX = B с квадратной матрицей A, все характеристические корни которой $\in \mathbb{R}$.

Сделаем замену:

$$X = CY \Longrightarrow (AC)Y = B \Longleftrightarrow (\underbrace{C^{-1}AC}_{y})Y = C^{-1}b = b'$$

Можно взять C - матрицу перехода к жорданову базису

$$y = \begin{pmatrix} Y_{k_1}(\lambda_1) & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & Y_{k_i}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Если y жорданова клетка, то уравнения:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = b_1' \\ \lambda x_2 + x_3 = b_2' \end{cases}$$
 легко решить

15.3 Решение СЛДУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

 $\dot{X} = AX$, где A - квадратная

$$X = CY \Longrightarrow \dot{X} = C\dot{Y}$$

$$C\dot{Y} = (AC)Y \Longrightarrow \dot{Y} = (C^{-1}AC)Y$$

Если матрица $C^{-1}AC$ диагональная: $C^{-1}AC=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix},\;\lambda_i\neq 0$ получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \lambda_n y_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Тогда X = CY Если

$$C^{-1}AC = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \lambda_0 y_{n-1} + y_n \\ \dot{y}_n = \lambda_0 y_n \end{cases}$$

решаем снизу вверх.

15.4 Функции от матриц

$$(C^{-1}AC) = J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & J_{k_i}(\lambda_i) \end{pmatrix} \Longrightarrow A = CYC^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^n = (CYC^{-1})(CYC^{-1})...(CYC^{-1}) = CY^nC^{-1}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} J_{k_1}^n(\lambda_1) & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & J_{k_i}^n(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1} & 1 & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_{n} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n} & \lambda^{n-1} C_{n}^{1} & \lambda^{n-2} C_{n}^{2} & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ \lambda^{n} & \lambda^{n-1} C_{n}^{1} & \lambda^{n-2} C_{n}^{2} & \cdots \\ \lambda^{n} & \lambda^{n-1} C_{n}^{1} & \lambda^{n-2} C_{n}^{2} & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda^{n} & \lambda^{n-1} C_{n}^{1} & \lambda^{n-2} C_{n}^{2} \end{pmatrix}$$

Упражнение. Пусть f(t) - многочлен, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Доказать, что:

15.5 Вычисление корня и экспоненты

$$\begin{split} e^{at} &= 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \\ e^{At} &= E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \end{split}$$

Для $J_n(\lambda) = \lambda E + B \Longrightarrow$

$$(e^{A+B} = e^A \cdot e^B \Longleftrightarrow AB = BA)$$

Примеры.

1. $(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)t^2 + \dots$

3. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 0$

16 Билинейные и квадратичные формы

Определение. Функция $b:V\times V\to \mathbb{F}$ называется билинейной функцией, если:

1. аддитивность:

$$\forall x_1, x_2, y : b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2 : b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$$

2. однородность:

$$\forall x, y \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}: \ b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$$

Определение. b(x,y) - называется симметрической, если:

$$\forall x, y \in V : b(y, x) = b(x, y)$$

Примеры.

1. Симметрическая билинейная функция - скалярное произведение

2.
$$V = M_n(\mathbb{F}) : b(X,Y) = tr(XY)$$

3.
$$\beta(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

16.1 Запись билинейной функции в координатах

Пусть в V задан базис $e_1, ..., e_n$, тогда:

$$b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} b(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j)$$

Определение. Обозначим $b_{ij}=b(e_i,e_j)$, тогда $B_e=b_{ij}$ - матрица билинейной функции b(x,y) в базисе e

Тогда:

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B_e \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B_e Y$$
 (1)

16.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть $e'=eC,\ C$ - матрица перехода от e к e' Тогда:

$$X = CX', Y = CY' \tag{2}$$

По определению матрицы билинейной функции, в новом базисе:

$$b(x, y) = X'^T B' Y' \quad (B' = Be')$$

Подставим в формулу (1) выраженеие (2):

$$b(x,y) = X'^T C^T B C Y' = X'^T (C^T B C) Y' = X'^T B' Y' \quad (\forall X', Y' \in \mathbb{F}^n)$$
$$\Longrightarrow B' = C^T B C \quad (\forall i, j : X' := E_i, Y' := E_j)$$

Следствие.

1.
$$rkB' = rkB$$

2.
$$\mathbb{F} = \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{sgn}(\det B') = \operatorname{sgn}(\det B)$$

Определение. Билинейная функция b(x,y) называется кососимметрической (при char $\mathbb{F} \neq 2$), если:

$$\forall x, y \in V : b(x, y) = -b(y, x)$$

Утверждение. (*) Любая билинейная функция над \mathbb{F} : $char\mathbb{F} \neq 2$ единственным образом представляется в виде:

$$b(x,y) = b_{+}(x,y) + b_{-}(x,y), \quad e \partial e \ b_{+}(x,y) \equiv b_{+}(y,x), \ b_{-}(x,y) \equiv -b(y,x)$$

Доказательство.

$$\begin{cases} b(x,y) = b_{+}(x,y) + b_{-}(x,y) \\ b(y,x) = b_{+}(x,y) - b_{-}(x,y) \end{cases} \Longrightarrow b_{+}(x,y) = \frac{b(x,y) + b(y,x)}{2}, \ b_{-}(x,y) = \frac{b(x,y) - b(y,x)}{2}$$

Утверждение. Билинейная функция b(x,y) симметрична (кососимметрич--на) \iff в любом базисе e:

$$B_e^T = B_e \ (B_e^T = -B_e)$$

Доказательство. (Докажем для симметрической, для кососимметрической аналогично)

$$\Longrightarrow$$
 Пусть $B=(b_{ij})$, тогда $b_{ij}=b(e_i,e_j)$.

$$\forall x, y \in V, \ b(x, y) = b(y, x) \Longrightarrow b(e_i, e_i) = b(e_i, e_i)$$

=

$$b(x,y) = X^T B Y, b(y,x) = Y^T B X = (X^T B^T Y)^T = (X^T B Y)^T = b(x,y)$$

Утверждение (1) \iff \forall матрицы B некоторой билинейной функции верно, что $B=B_++B_-$, где B_+ - матрица симметрической билинейной функции, а B_- - матрица кососимметрической билинейной функции.

Определение. Квадратичная функция, порождённая билинейной функцией b(x,y) - это функция на V.

Обозначаем: k(x) := b(x, x), если $k(x) \not\equiv 0$.

Если b - кососимметрическая функция, то $b(x,x)=0 \Longrightarrow k(x)\equiv 0$. В общем случае существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную, таких, что:

$$b(x,y) = b_{+}(x,y) + b_{-}(x,y) \Longrightarrow b(x,x) = b_{+}(x,x)$$

Теорема. \forall квадратичной функции \exists ! симметрическая билинейная функция, которая её порождает.

Доказательство. Допустим, что b(x,y)=b(y,x) - симметрическая билинейная функция и k(x)=b(x,x). Тогда $\forall x,y\in V$:

$$k(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) =$$
$$= b(x,x) + 2b(x,y) + b(y,y) = k(x) + 2b(x,y) + k(y)$$

Так как $char \mathbb{F} \neq 2$, то:

$$b(x,y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$$

Определение. Билинейная функция $b(x,y) = \frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$ называется поляризацией квадратичной функции k.

Далее будем считать матрицу квадратичной формы матрицей её полярной симметрической билинейной функции b(x,y)

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i y_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i y_j + \sum_{i > j} b_{ij} x_i y_j$$

$$\forall i, j: \ b_{ij} = b_{ji} \Longrightarrow b(x,x) = k(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij} x_i x_j$$
(1)

Пример. Пусть $k(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 - 7x_3^2$, тогда:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Определение. Пусть b(x,y) - симметрическая или кососимметрическая билинейная функция и $\varnothing \neq L \leqslant V$. Ортогональным дополнением к L относительно билинейной формы b(x,y) называется:

$$L^{\perp} := \{ y \in V \mid b(x, y) = 0, \ \forall x \in L \}$$

3амечание. Запись $x \perp y$ означает, что b(x,y) = 0.

Определение. $V^{\perp} = \{ y \in V \mid b(x,y) = 0, \ \forall x \in V \}$ - ядро формы.

Определение. Билинейная функция b(x,y) называется невырожденной, если:

$$Ker(b) = V^{\perp} = \{0\}$$

Упражнение. b(x,y) - невырожденная функция $\iff \det B \neq 0$.

16.3 Квадратичные формы

Определение. Квадратичная форма в некотором базисе называется диагональной, если в этом базисе:

$$k(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2,$$
 где $\alpha_i\in\mathbb{F}$

Теорема. В конечномерном пространстве V (char $\mathbb{F} \neq 2$) \exists базис, в котором эта форма диагональна.

Доказательство. (Алгоритм Лагранжа - метод выделения полных квадратов) По формуле (1):

$$k(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j$$

1. Основной случай:

 $\exists i: b_{ii} \neq 0 \Longrightarrow$ можно перенумеровать неизвестные x_1, \ldots, x_n так, что $b_{11} \neq 0$. Выделим в k(x) все одночлены, содержащие x_1 :

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n b_{1i}x_i + \widetilde{k}(x_2, \dots, x_n)$$

и дополним выражение до квадрата:

$$k(x) = b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i + (\sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2) - \frac{(\sum_{i=2}^n b_{1i} x_i)^2}{b_{11}} + \widetilde{k} =$$

$$= b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2 + k_2(x_2, \dots, x_n)$$

Затем для формы $k_2(x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=2}^n b'_{ii}x_i^2+\sum_{2\leqslant i< j\leqslant n} b'_{ij}x_ix_j$ найдём коэффициент $b'_{jj}\neq 0$ и выделим квадрат как на предыдущем шаге. На каждом шаге число переменных уменьшается на единицу, а значит, за конечное число шагов (а именно $\leqslant n-2$) форма приобретёт диагональный вид.

2. Особый случай:

 $\forall i: b_{ii} = 0$, но так как $k(x) \not\equiv 0 \Longrightarrow \exists$ индексы i и j такие, что $b_{ij} \not\equiv 0$, то есть в выражение k(x) входит одночлен $2b_{ij}x_ix_j$.

Пусть $x_i = x_i' + x_j'$ и $x_j = x_i' - x_j'$, тогда $x_i x_j = x_i'^2 - x_j'^2$, то есть появился квадрат с коэффициентом, не равным нулю \Longrightarrow можно перейти к общему случаю.

3амечание. В благоприятном случае, когда на первом шаге коэффициент при x_1 не равен нулю, на втором шаге коэффициент при x_2 не равен нулю и т.д., матрица замены будет иметь вид:

$$C_{e \to e'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица с 1 на диагонали $\Longrightarrow |C_{e \to e'}^{-1}| = 1 \neq 0.$

Определение. Форма $k(x_1, \ldots, x_n)$ называется канонической (нормальной), если:

- 1. (над \mathbb{R}) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: -1, 0, 1
- 2. (над \mathbb{C}) в диагональном виде $\forall \alpha_i$ принимает только значения: 0, 1

Примеры.

1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{nn}x_n^2 = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \ldots + \alpha_nx_n^2$$
 Если $rkB = r \Longrightarrow k(x) = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \ldots + \alpha_rx_r^2(\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = 0).$

Если $\alpha_i > 0$, то введём обозначение:

$$\widehat{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i \Longrightarrow k = \widehat{x}_1^2 + \ldots + \widehat{x}_p^2 - \widehat{x}_{p+1}^2 - \ldots - \widehat{x}_r^2$$

где p - количество коэффициентов $\alpha_i > 0$.

Если $\alpha_i < 0 \Longrightarrow \widehat{x}_i = -\sqrt{\alpha_i} x_i$.

2. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$\forall i = \overline{1,r} : \widehat{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i \Longrightarrow k = \widehat{x}_1^2 + \ldots + \widehat{x}_r^2$$

Таким образом, в вещественном случае для любой квадратичной формы k(x) существует замена координат $X=CY(|C|\neq 0)$ такая, что в новых координатах $k=\sum_{i=1}^p x_i^2-\sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2.$

Определение. р в такой записи называется положительным индексом инерции, q - отрицательным индексом инерции.

Теорема. единственности (закон инерции)

Eсли в некоторых базисах $e_1,...e_n$ и $f_1,...,f_n$ квардатичная форма k имеет канонический вид

$$k = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2 = \sum_{i=1}^{p'} z_i^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} z_j^2$$

 $mo \ p = p', q = q'.$

Доказательство. Так как p+q=rkB=p'+q', достаточно доказать, что p=p'. От противного: пусть p' < p. Рассмотрим подпространства $U_1 = \langle e_1, .., e_p \rangle, U_2 = \langle f_{p'+1}, ..., f_n \rangle$. Очевидно, dim $U_1 = p$, dim $U_2 = n - p'$.

$$\dim U_1 + \dim U_2 = p - p' + n > n; \quad U_1 + U_2 \subset V \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \leq n$$

Из формулы Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) > 0$$

Рассмотрим вектор $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$:

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \Rightarrow k(v) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \ge 0$$

С другой стороны:

$$v = \sum_{k=p'+1}^{n} \beta_k f_k \Rightarrow k(v) = -\sum_{k=p'+1}^{n} \beta_k^2 \le 0$$

Противоречие с $v \neq 0$.

16.4 Знакоопределённые квадратичные формы

Определение. Пусть b(x,y) - симметрическая билинейная форма. Векторы u,v называются *ортогональными*, если b(u,v)=0. Обозначается $u\perp v$.

Определение. Базис $e_1,...,e_n$ в V - ортогональный, если $b(e_i,e_j)=0 (i \neq j).$

Определение. Для квадратной матрицы B главными минорами (угловыми

минорами) называются миноры
$$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1}$$
, где $\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$. Опре-

делим $\Delta_n = |B|, \Delta_0 = 1.$

Теорема. Якоби Пусть k(x) (= b(x, x), b - cимм. б. ф.) такова, что главные миноры её матрицы B в нек. базисе $e: \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{n-1} \neq 0$ Тогда в V существует базис (и замена координат X = CY), в котором

$$k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$$

 \mathcal{A} оказательство. Будем строить базис e' из базиса e, ортогональный относительно b(x,y) (алгоритм ортогонализации Грама/Шмидта).

$$e'_1 := e_1; \ \forall k \ge 1 \ \langle e'_1, ..., e'_k \rangle = \langle e_1, ..., e_k \rangle$$

причём $b(e'_i, e'_i) = 0 (1 \le i \ne j \le k)$

Шаг алгоритма: допустим, что k>1 и векторы $e_1',...,e_{k-1}'$ уже построены. Будем искать e_k' в виде

$$e_k' = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e_i'$$

где λ_i найдём из условия $b(e_k',e_j')=0,\; j=0,...,k-1$

$$b(e'_k, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_j b(e'_i, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \lambda_j b(e'_j, e'_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = -\frac{b(e_k, e'_j)}{b(e'_j, e'_j)}$$

Покажем по индукции, что $b(e'_j, e'_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \neq 0.$

Обратим внимание, что матрица перехода от $e_1,...,e_{k-1}$ к $e'_1,...,e'_{k-1}$ - верхняя треугольная с 1 по диагонали (предп. индукции). Запишем: $C_{(e_1,...,e_k)\to(e'_1,...,e'_k)}=$

$$\begin{pmatrix} C_{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, где по предположению индукции $C_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} B$ - матрица

билин. формы b(x, y) в базисе e, B' - в базисе e', который мы строим.

$$B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle} = C_k^T B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle} C_k \Rightarrow \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = (\det C_k)^2 \cdot \det B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle}$$

$$\Delta'_k = \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = b'_{11} \dots b'_{kk} = \Delta_k$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}} \cdot b_{kk} = \Delta_k \Rightarrow b_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

Далее рассматриваем $F = \mathbb{R}$.

Определение. Квадратичная форма k(x) на пр-ве V над \mathbb{R} называется положительно определённой, если $\forall x \neq 0 k(x) > 0$ (обозн. k > 0); отрицательно определённой, если $\forall x \neq 0 k(x) < 0$ (обозн. k < 0); неотрицательно определённой, если $\forall x k(x) \geq 0$ (обозн. $k \geq 0$); неположительно определённой, если $\forall x k(x) \leq 0$ (обозн. $k \leq 0$).

Утверждение. *Квадратичная форма* k(x) *является*

- 1. положительно определённой $\Leftrightarrow p=n, q=0$;
- 2. отрицательно определённой $\Leftrightarrow p = 0, q = n;$
- 3. неотрицательно определённой $\Leftrightarrow q=0$;
- 4. неположительно определённой $\Leftrightarrow p=0$;
- 5. знаконе определённой $\Leftrightarrow p, q > 0$.

Доказательство. Очевидно.

Лемма. Если кв. форма k > 0, то $\det B = \Delta_n \neq 0$.

Доказательство. Т.к. $k>0,\; p=n,\;$ т.е. существует базис, в котором $k(x')=x_1'^2+...+x_n'^2\Rightarrow \Delta_n'=1>0.$

A так как
$$B' = C^T B C$$
, $|B'| = |C|^2 \cdot |B| \Rightarrow \det B > 0$.

Теорема. Критерий Сильвестра

Kвадратичная форма k(x), имеющая в некотором базисе матрицу B, является

- 1. положительно определённой $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, ..., \Delta_n > 0$.
- 2. отрицательно определённой $\Leftrightarrow \forall k \ (-1)^k \Delta_k > 0.$

Доказательство. Для положительной определённости:

 \Leftarrow : По теореме Якоби \exists базис, в котором $k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i}}{\Delta_{i-1}} y_{i}^{2}$. Т.к все $\Delta_{i} > 0$ (знакочередующиеся для отрицательного случая), все коэффициенты > 0 (< 0), т.е. значение формы на любом ненулевом векторе имеет необходимый нам знак.

 \Rightarrow : $k>0 \Rightarrow \Delta_1\cdot\Delta_2\cdot\ldots\cdot\Delta_n\neq 0$ (k-ый минор ненулевой по лемме для угловой подматрицы) \Rightarrow применима т. Якоби, из которой следуют необходимые нам знаки на всех Δ .

Для отрицательной определённости: $k < 0 \Leftrightarrow -k > 0$, причём при домножении матрицы на -1 знак меняют только миноры нечётного порядка.

3амечание. Т.к. $b_{ii} = k(e_i)$, у положительно определённой формы все $b_{ii} > 0$, у отрицательной все $b_{ii} < 0$.

Замечание. Пусть k(x) такая, что $\Delta_1,...,\Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = ... = \Delta_n = 0$. Тогда p - число сохранений знака в последовательности $\Delta_0,\Delta_1,...,\Delta_r$, а q - число перемен знака в этой последовательности.

Доказательство. Из теоремы Якоби в подходящем базисе

$$k(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} y_k^2 + \dots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} y_r^2$$

Тогда каждое сохранение знака соответствует положительному коэффициенту, а каждая перемена знака - отрицательному коэффициенту, откуда и следует необходимое равенство.

16.5 Кососимметрические билинейные формы

$$\forall x, y \in V : b(y, x) = -b(x, y) \text{ (char } \mathbb{F} \neq 2)$$

Заметим, что $\forall x \in V : b(x,x) = 0$. Если же $b(x,x) \equiv 0$:

$$0 = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + b(x, y) + b(y, x) \Rightarrow b(x, y) = -b(y, x)$$

Поэтому условие $b(x,x) \equiv 0$ не только эквивалентно кососимметричности формы, но и применимо в случае char F=2.

Лемма. Пусть b(x,y) - симметрическая или кососимметрическая билинейная форма на V (dim $V=n<\infty$), $U\subset V$ такое что $b|_U$ невырождена. Тогда $V=U\oplus U^\perp$.

Доказательство. $U^{\perp} = \{ y \in V : b(x,y) = 0 \ \forall x \in U \}.$

В координатах: если выбрать базис $e_1,...,e_n$ в U $(m=\dim U,0< m< n)$, то $y\in U^\perp \Leftrightarrow b(e_i,y)=0,\ i=1,...,m.$

Если $b(x,y)=0 \; \forall x\in U, \; \text{то} \; b(e_i,y)=0, \; i=1,...,m$

Обратно, если $b(e_i,y)=0,\ i=1,...,m,$ то $\forall x\in U\ x=\sum_{i=1}^m x_ie_i\Rightarrow b(x,y)=\sum_{i=1}^m x_ib(e_i,y)=0.$

 $\ddot{\mathrm{3a}}$ пишем систему уравнений для нахождения y, выбрав базис $e_1,...,e_m\in U$

и дополнив его до базиса $e_1,...,e_n\in V$. В этом базисе $e_i^\uparrow=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ b(e_i,y)=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$$(0,...,1,...,0)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (b_{i1},...,b_{in})Y^{\uparrow}$$

Система имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} Y = 0$$

Т.к. матрица $B|_U$ невырождена, $\operatorname{rk} B = m$, т.е. система имеет n-m ЛНЗ решений, а значит $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Если же $v \in U \cap U^{\perp}$, то $\forall x \in U \ b(x,v) = 0$, а из невырожденности формы $b|_U$ тогда следует, что v = 0.

Теорема. Для любой кососимметрической билинейной формы $b(x,y) \not\equiv 0$ \exists такой базис $f_1,...,f_n \in V$, в котором матрица этой формы имеет вид

$$egin{pmatrix} I_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & I_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$e\partial e \ I_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ rkB = 2s$$

Доказательство. Т.к. $b(x,y)\not\equiv 0,\ \exists$ векторы $e_1,e_2\in V,$ такие что $b(e_1,e_2)=\beta_{12}\not\equiv 0.$ Рассмотрим

$$f_1 = \frac{e_1}{\beta_{12}}, f_2 = e_2 \Rightarrow b(f_1, f_2) = 1, b(f_2, f_1) = -b(f_1, f_2) = -1$$

Возьмём $W=U^{\perp}$ в пр-ве V. Тогда $V=U\oplus U^{\perp}$ и $\tilde{b}=b|_{U^{\perp}}$ также кососимметрическая форма, т.е. можем провести индукцию по $n=\dim V$ (базу n=2 доказали). $\dim W=n-2$, т.е. \exists базис $f_3,...,f_n$, в котором матрица $b|_{U^{\perp}}$ име-

ет вид
$$\begin{pmatrix} I & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I & & \\ & & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$
, т.е в базисе $f_1,...,f_n$ матрица b имеет нужный вид.

17 Евклидовы пространства и их обобщения

17.1 Основные понятия и утверждения

Основное поле - $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Определение. Вещественное конечномерное векторное пространство \mathcal{E} называется евклидовым, если на \mathcal{E} задано скалярное произведение (x,y).

Определение. Скалярное произведение (x,y) - симметрическая билинейная функция такая, что соответственная квадратичная форма (x,x) положительно определена.

Определение. Длина (норма) вектора $x \in \mathcal{E}$: $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Теорема. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

 $\forall x,y \in \mathcal{E}: |(x,y)| \leq |x| \cdot |y|$, причём равенство выполнено $\iff x \parallel y$ (либо x=0 или y=0, либо $y=\lambda x$).

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t)=(tx-y,tx-y)=t^2(x,x)-2t(x,y)+(y,y)\geqslant 0.$ Это квадратичная функция относительно t:

$$f(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathcal{D}}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0 \Rightarrow (x, y) \le \sqrt{(x, x)(y, y)} = |x| \cdot |y|$$

Равенство выполнено \iff $(tx - y, tx - y) = 0 \Rightarrow y = tx$.

Теорема. Неравенство треугольника

 $\forall x,y \in \mathcal{E}: |x+y| \leq |x| + |y|$ (равенство выполнено $\iff x \uparrow \uparrow y$)

Доказательство.

$$(x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \le |x|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$
$$|x+y|^2 \Longleftrightarrow |x+y| \le |x| + |y|$$

Координатная запись: пусть в V фиксированный базис $e_1, ..., e_n$, то:

$$(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j)$$

Определение. $G_e = ((e_i, e_j))$ - матрица Грама базиса e

$$G_e^T = G_e$$

T.к. (x, x) - положительно определенная квадратичная форма, то матрица:

$$G_e = (g_{ij})$$

может служить матрицей Грама $\iff \Delta_1 > 0, ..., \Delta_n > 0$ В частности: $\det G_e > 0$ (определитель Грама)

$$(x,y) = X^T G_e Y$$

Определение.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

Определение. Базис $e_1,...,e_n$ называется ортогональным, если:

$$e_i \perp e_j$$
 при $i \neq j$

Если при этом длина каждого вектора $e_1, ..., e_n$ равна 1, то базис называется ортонормированным.

Следствие. $e_1,...,e_n$ - ортонормированный базис, если $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$.

Следствие. Если базис ортонормированный, то $G = E \ u \ (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Теорема. Пусть $e' = eC_{e \to e'}$ - новый базис. Тогда:

1. Если е и е' - ортонормированные базисы, то $C_{e \to e'}$ ортогональна;

2. Если e - ортонормированный базис и $C_{e \to e'}$ ортогональная матрица \Longrightarrow e' = eC - ортонормированный базис.

3амечание. C - ортогональная, если $C^TC=E$

Доказательство.

1. По определению матрицы перехода $C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} e_1'^{\uparrow} & \cdots & e_n'^{\uparrow} \end{pmatrix}$

$$C_{e o e'}^T = \begin{pmatrix} e_1'^{ o} \\ \vdots \\ e_n'^{ o} \end{pmatrix}$$
 Обозначим d_{ij} - (ij) элемент матрицы C^TC :

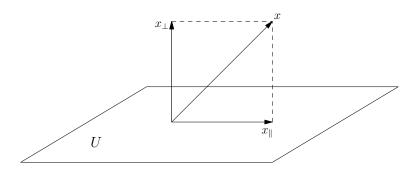
$$d_{ij} = e_i^{\prime \to} \cdot e_j^{\prime \uparrow} = (e_i^{\prime}, e_j^{\prime}) = \delta_{ij}$$

т.к. базис e ортонормированный $\Longrightarrow d_{ij} = \delta_{ij} \Longrightarrow C^T C = E$

2. Рассмотрим $e' = eC_{e \to e'}$, тогда e_j^{\uparrow} - это j столбец матрицы $C_{e \to e'}$ По условию $C^TC = E \iff e_i'^{\to} \cdot e_j'^{\uparrow} = \delta_{ij} = (e_i', e_j')$

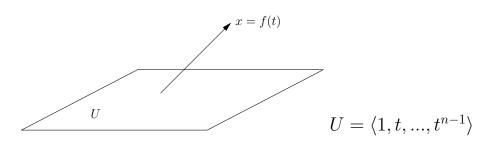
Лемма. Если $a_1,...,a_m \in \mathcal{E}$ - ортогональная система векторов $\implies a_1,...,a_m$ ЛНЗ

T.o. $\forall x \in \mathcal{E}$ единственным образом разлагается в сумму $x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}$



 $x_{\shortparallel}\in U,\ x_{\shortparallel}$ - ортогональная проекция вектора x на U $x_{\perp}\in U^{\perp},\ x_{\perp}$ - ортогональная составляющая x относительно U

Пример.



Надо подобрать такой многочлен $p(t) \in U$, чтобы:

$$|| f(t) - p(t) || = \min$$

Где p(t) = f(t) - псевдорешение

Как конкретно находить такое разложение?

1 способ: Выбрать ортогональный базис в U и дополнить его до ортогонального базиса в $\mathcal E$

Тогда:

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (x_i, e_i)e_i}_{x_{\text{II}}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} (x_i, e_i)e_i}_{x_{\text{L}}} = x_{\text{II}} + x_{\text{L}}$$

2 способ: Выбрать в U произвольный базис $a_1, ..., a_m$ и искать разложение в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + x_{\perp} \mid \cdot a_j \Longrightarrow (x_i, a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (a_i, a_j) + \underbrace{(x_{\perp}, a_j)}_{=0}$$

Неоднородная СЛУ с неизвестными α_i , основная матрица:

$$((a_i, a_j)) = G_{\{a_1, \dots, a_m\}}$$

где $\det G \neq 0 \Longrightarrow$ по теореме Крамера $\exists ! \ \alpha_1,...,\alpha_m \Longrightarrow \exists ! \ x_{\shortparallel} \Longrightarrow x_{\bot} = x - x_{\shortparallel}$

Свойства. операций ортогонального дополнения

1.
$$(U^{\perp})^{\perp} = U$$

2.
$$(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

3.
$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$$

Доказательство.

1. Пусть $x \in U, y \in U^{\perp}$, тогда:

$$(y,x) = 0 \ \forall y \in U^{\perp} \Rightarrow x \in (U^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow U \subset (U^{\perp})^{\perp}$$

Причем:

$$\dim (U^{\perp})^{\perp} = n - \dim U^{\perp} = n - (n - \dim U) = \dim U \Longrightarrow U = (U^{\perp})^{\perp}$$

2. Пусть $v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \Longrightarrow v \perp U_1$ и $v \perp U_2 \Longrightarrow \forall x = u_1 + u_2$: $(v, x) = (v, u_1) + (v, u_2) = 0 \Longrightarrow v \in (U_1 + U_2)^{\perp} \Longrightarrow U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq (U_1 + U_2)^{\perp}$ Если $w \in (U_1 + U_2)^{\perp}$, то $\forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2 : (w, u_1 + u_2) = 0$ В частности:

$$\begin{cases} \forall u_1 \in U_1 : \ (w, u_1) = 0 \implies w \in U_1^{\perp} \\ \forall u_2 \in U_2 : \ (w, u_2) = 0 \implies w \in U_2^{\perp} \end{cases} \implies w \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

To есть $(U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \Longrightarrow$ имеет место равенство:

$$(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

3. Возьмем $(U_1^{\perp} + U_2^{\perp}) = (U_1^{\perp})^{\perp} \cap (U_2^{\perp})^{\perp} = U_1 \cap U_2$ $\Longrightarrow ((U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (U_1 \cap U_2)^{\perp} \Longrightarrow U_1^{\perp} + U_2^{\perp} = (U_1 \cap U_2)^{\perp}$

Утверждение. Вектор наименьшей длины, соединяющий точку из подпространства U с концом вектора x - x_{\perp} .

Доказательство. Обозначим $x_{\shortparallel}=y,\ x_{\perp}=z,$ а вектор из начала x в произвольную точку U - вектор v

Какой тут рисунок то?

Докажем, что $|x-v|\geqslant |z|$, причём равенство достигается при v=y:

$$x - v = x - y + y - v = z + y - v$$

T.к. $z \in U^{\perp}, (y-v) \in U,$

$$z \perp (y - v) \Longrightarrow |x - v|^2 = |z|^2 + |y - v| \geqslant |z|^2$$

причём равенство при $|y - v| = 0 \Longrightarrow y = v$.

Это подтверждает осмысленность определения $\rho(x,U)=|x_{\perp}|.$

Упражнение. Докажите отсюда, что $\angle(x,v) \geqslant \angle(x,y)$.

Определение. Углом между вектором и подпространством будем называть:

$$\angle(x,v) = \angle(x,y)$$

Частный случай: $\dim U = n-1$ ("гиперплоскость"):

В ортонормированном базисе U задаётся уравнением $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$, а ортогональное дополнение $U^{\perp} = \langle n = (a_1, ..., a_n) \rangle$ (n - вектор нормали). Тогда:

$$\rho(x, U) = |x_{\perp}| = \frac{V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1}, x \rangle}}{V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle}}$$

где $V_{\langle a_1,...,a_k\rangle}$ - объём параллелепипеда, натянутого на $a_1,...,a_k$.

Определение. n-мерным параллелепипедом с рёбрами $e_1, ..., e_n$ называется:

$$\Pi_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle} = \{ v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1 \}$$

Определение. В общем случае объём параллелепипеда определяется рекурсивно:

$$V_{\langle e_1,...,e_n\rangle}=V_{\langle e_1,...,e_{n-1}\rangle}\cdot |e_{n\perp}|,$$
 где $e_{n\perp}$ - проекция e_n на $\langle e_1,...,e_{n-1}\rangle$

Заметим, что если $e_1,...,e_n$ попарно ортогональны, то $V_{\langle e_1,...,e_n\rangle}=|e_1|\cdot...\cdot|e_n|.$

Объём не изменится, если к векторам применить процесс ортогонализации (с унитреугольной матрицей перехода).

Тогда:

$$V_{\langle e'_1, \dots, e'_n \rangle} = |e'_1| \cdot \dots \cdot |e'_n| = \sqrt{|G_{\{e'_1, \dots, e'_n\}}|}$$

В ортогональном базисе:

$$G_{\{e'_1,\dots,e'_n\}} = \begin{pmatrix} |e'_1|^2 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & |e'_n|^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |G_{\{e'_1,\dots,e'_n\}}| = |e'_1|^2 \cdot \dots \cdot |e'_n|^2$$

$$G_{e'} = C^T G_e C \Longrightarrow |G_{e'}| = |C|^2 |G_e| = |G_e|$$

Упражнение. Доказать отсюда. что если $U = \langle e_1, ..., e_{n-1} \rangle$, то:

$$\rho^{2}(x,U) = \frac{|G_{\{e_{1},\dots,e_{n}\}}|}{|G_{\{e_{1},\dots,e_{n-1}\}}|}$$

17.2 Линейные операторы в евклидовом пространстве

Пусть \mathcal{E} - евклидово пр-во, $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - лин. оператор в \mathcal{E} .

Определение.

1. Оператор $\varphi^*: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - сопряжённый к φ , если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$$
 (1)

2. Оператор φ - самосопряжённый, если:

$$\varphi^* = \varphi \Longrightarrow \forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$
 (2)

3. Оператор φ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \tag{3}$$

В частности, для ортогонального $\varphi : \forall x \in \mathcal{E} \ |\varphi(x)| = |x|$.

Условия (1)-(3) через матрицу Грама

Пусть в \mathcal{E} зафиксирован базис $e=(e_1,...,e_n)$ (dim $\mathcal{E}=n$). Пусть x=eX, $y=eY,G_e=((e_i,e_j))$ - матрица Грама базиса e,A_{φ} - матрица φ в базисе e. (1): $\forall X,Y\in\mathbb{R}^n$:

$$(A_{\varphi}X)^T G_e Y = X^T A_{\varphi}^T G_e Y = X^T G_e A_{\varphi^*} Y \Longrightarrow A_{\varphi}^T G_e = G_e A_{\varphi^*} \quad (1')$$

(2): В частности,

$$\varphi^* = \varphi \iff A_{\varphi}^T G_e = G_e A_{\varphi}(2')$$

Если e - ортонормированный, то $G_e=E$, и $A_{\varphi}^T=A_{\varphi}$, т.е. A_{φ} - симметрическая матрица.

(3): φ - ортогональный $\iff \forall X,Y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$(A_{\varphi}X)^T G_e(A_{\varphi}Y) = G_eY \Longrightarrow A_{\varphi}^T G_e A_{\varphi} = G_e(3')$$

Если $G_e=E$, то $A_{\varphi}^TA_{\varphi}=E$, т.е. A_{φ} - ортогональная матрица.

Теорема. Свойства сопряжённых операторов

- 1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
- 2. $\operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$
- 3. $\operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi^*)^{\perp}$

Доказательство.

1. В ортонормированном базисе:

$$A_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T \Longrightarrow A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = (A_{\varphi}^T)^T = A_{\varphi}$$

Т.к. в фиксированном базисе имеется взаимно однозначное соответствие операторов и их матриц, $(\varphi^*)^* = \varphi$.

2. Сравним размерности:

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi^* = n - \operatorname{rk}(A_{\varphi^*}) = n - \operatorname{rk}(A_{\varphi}^T) = n - \operatorname{rk}(A_{\varphi})$$
$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A_{\varphi} \Longrightarrow \dim (\operatorname{Im} \varphi)^{\perp} = n - rkA_{\varphi}$$

Докажем, что $\operatorname{Im}\varphi\subseteq (\operatorname{Ker}\varphi^*)^{\perp}$ (отсюда $(\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}\subseteq \operatorname{Ker}\varphi^*$): Пусть $v\in \operatorname{Im}\varphi\Longrightarrow v=\varphi(x),\ y\in \operatorname{Ker}\varphi^*$. Тогда:

$$(v,y) = (\varphi(x),y) = (x,\varphi^*(y)) = (x,0) = 0 \Longrightarrow v \perp \operatorname{Ker} \varphi^*$$

Т.к. размерности равны и $(\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^*$, то $\operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

3. Следует из (2) подстановкой φ^* вместо φ .

Следствие. Теорема Фредгольма СЛУ AX = b с квадратной матрицей A порядка n совместна \iff для любого Y - решения однородной сопряжённой системы - выполнено условие $Y \perp b$.

Доказательство. AX = b совместна $\iff b \in \operatorname{Im} A$

$$Y \in \operatorname{Ker}\varphi^* = \operatorname{Ker}A^T$$

Т.к. $\mathrm{Ker} \varphi^* = (\mathrm{Im} A)^\perp$, то система совместна $\iff b \perp \mathrm{Ker} \varphi^*$

17.3 Самосопряжённые операторы

Лемма. Пусть $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - лин. оператор, $U \subset E: \varphi(U) \subseteq U$. Тогда $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^{\perp}, x \in U$ выполнено $(x, \varphi^*(y)) = 0$:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0$$
, t.k. $\varphi(x) \in U$, $y \in U^{\perp}$

Утверждение. 1. Если λ_1, λ_2 - различные собственные значения самосопряжённого оператора φ, x_1, x_2 - соответсвующие им собственные векторы, то $x_1 \perp x_2$;

2. Все характеристические числа самосопряжённого оператора $\in \mathbb{R}$.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi^* = \varphi$. Тогда:

$$(\varphi(x_1), x_2) = \lambda_1(x_1, x_2); \ (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

Из $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует $(x_1, x_2) = 0$.

2. От противного: пусть $\exists \lambda_1 = \alpha + i\beta$ - характеристическое число для самосопряжённого φ с $\beta \neq 0$.

Как было доказано ранее, $\exists \varphi$ -инвариантное подпространство U размерности 2, на котором $\varphi|_U$ имеет собственные значения $\alpha \pm i\beta$. U можно рассматривать как евклидово пр-во со скалярным произведением $(x,y)|_U$. Тогда $\varphi|_U$ - также самосопряжённый на U.

Выберем ортонормированный базис в U. Тогда в этом базисе $\varphi|_U$ имеет симметрическую матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Её характеристические числа:

$$|A - \lambda E| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$
$$\mathcal{D} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$$

Отсюда корни характеристического многочлена вещественные, что противоречит предположению.

Теорема. Для любого самосопряжённого оператора $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ в \mathcal{E} существует базис из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Индукция по $\dim \mathcal{E} = n$:

База: n=1. Тогда $\forall x \in \mathcal{E}: \varphi(x)=\lambda_1 x$, т.е. любой вектор длины 1 подойдёт в качестве ортонормированного базиса.

Шаг: Пусть $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ - какое-либо собственное значение для φ . Рассмотрим $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \{0\}$ - оно является φ -инвариантным подпространством.

Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} = \mathcal{E}$, то $\forall x \in \mathcal{E}: \varphi(x) = \lambda_1 x$, т.е. в ортонормированном базисе матрица оператора - $\lambda_1 E$;

Если $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \mathcal{E}$, то по лемме $\mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$ также φ -инвариантно и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$. К ограничению φ на инвариантные подпространства $\mathcal{E}_{\lambda_1}, \mathcal{E}_{\lambda_1}^{\perp}$ можно применить предположение индукции, если рассмотреть их как отдельные евклидовы пространства. Тогда в них есть ортонормированные базисы из собственных векторов, а тогда их объединение будет искомым ортонормированным базисом для \mathcal{E} (ортогональность векторов из разных базисов следует из утверждения выше).

Следствие. Если $\lambda_1, ..., \lambda_s$ - все попарно различные собственные значения самосопряжённого оператора φ , то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{E}_{\lambda_s}$.

Замечание. Если все собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ самосопряжённого оператора φ положительны, то \exists самосопряжённый оператор ψ с положительными собственными значениями такой, что $\psi^2 = \varphi$.

 \mathcal{A} оказательство. Пусть $e_1,...,e_n$ - ортонормированный базис из собственных векторов для φ . Тогда:

$$A_{arphi,e}=egin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \ \text{оператор c матрицей} \ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} -\psi$$

Пример. Пусть $\mathcal{E} = U \oplus U^{\perp}$, т.е. $\forall x = x_{\shortparallel} + x_{\perp}$.

 $\varphi_1(x) = x_{\shortparallel}$ - ортогональное проектирование на U;

 $\varphi_2(x) = x_{\shortparallel} - x_{\bot}$ - ортогональная симметрия, или отражение $\mathcal E$ относительно U. Покажем, что φ_1 и φ_2 самосопряжённые:

$$\forall x,y \in \mathcal{E} : x = x_{\shortparallel} + x_{\bot}, y = y_{\shortparallel} + y_{\bot} :$$

$$(\varphi_1(x),y) = (x_{\shortparallel},y_{\shortparallel} + y_{\bot}) = (x_{\shortparallel},y_{\shortparallel}) = (x_{\shortparallel} + x_{\bot},y_{\shortparallel}) = (x,\varphi_1(y))$$

$$(\varphi_2(x),y) = (x_{\shortparallel} - x_{\bot},y_{\shortparallel} + y_{\bot}) = (x_{\shortparallel},y_{\shortparallel}) - (x_{\bot},y_{\bot}) = (x_{\shortparallel} + x_{\bot},y_{\shortparallel} - y_{\bot}) = (x,\varphi_2(y))$$

17.4 Ортогональные операторы

Определение. $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

Из определения следует, что $\forall x \in \mathcal{E} : |\varphi(x)| = |x|$ - φ сохраняет длины $\Longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0\} \Longrightarrow \varphi$ инъективный, а так как $\varphi : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$, получаем, что φ - биективный (и обратимый) оператор.

Утверждение. Пусть $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор. Тогда φ^{-1} также ортогональный, причём $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Доказательство. Покажем, что $\forall x,y \in \mathcal{E}(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))=(x,y)$. Выберем $x'=\varphi^{-1}(x),y'=\varphi^{-1}(y)$. Тогда:

$$(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x', y') = (\varphi(x'), \varphi(y')) = (x, y)$$

По определению: $\varphi^*(\varphi(x),y)=(x,\varphi^*(y)),\ \forall x,y\in\mathcal{E}$ Т.к. φ обратим, $\exists y'\in E:\ y=\varphi(y')$

$$(\varphi(x),y)=(\varphi(x),\varphi(y'))=(x,y')=(x,\varphi^{-1}(y))\Longrightarrow (x,\varphi^*(y))=(x,\varphi^{-1}(y))$$

$$(x,\varphi^*(y)-\varphi^{-1}(y))=0\ \forall x,y\in\mathcal{E}\Longrightarrow \varphi^*(y)=\varphi^{-1}(y)\ \forall y\in\mathcal{E}$$
 T.e.
$$\varphi^*=\varphi^{-1}$$

Лемма. Пусть $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор, $U \subset E: \varphi(U) \subseteq U$. Тогда:

$$\varphi(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$$

Доказательство. Покажем, что $\forall y \in U^{\perp}, x \in U$ выполнено $(x, \varphi(y)) = 0$. Т.к. φ обратим, $\exists x' : x = \varphi(x')$, т.е. $x' = \varphi^{-1}(x) \in U$. Отсюда:

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi(x'), \varphi(y)) = (x', y) = 0, \text{ t.k. } x' \in U, y \in U^{\perp}$$

Определение. В пространстве \mathcal{C}^n введем скалярное произведение с требованиями:

- 1. Линейность по 1 аргументу
- 2. Вместо симметричности потребуем:

$$(y,x) = \overline{(x,y)}$$

3. $(x,x) \neq 0$, (x,x) = 0, если x = 0

Следовательно, если $\lambda \in \mathbb{C}$, то $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$

Теорема. Пусть $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор.

- 1. Собственные значения φ только ± 1 , причём отвечающие этим значениям собственные векторы \perp .
- 2. Все характеристические числа для φ над $\mathbb C$ имеют модуль 1.

Доказательство.

1. Пусть $\varphi(x) = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$(x,x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2(x,x) \Longrightarrow \lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Если $\varphi(x) = x, \varphi(y) = -y(x, y \neq 0)$, то

$$(x,y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = -(x,y) \Longrightarrow (x,y) = 0$$

2. Будем обозначать через $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ заданной матрицей A_{φ} Если $\lambda = \alpha - i\beta$ - характеристическое число для φ , то:

$$\exists\;v\in\mathbb{C}^n:\;\varphi(v)=\lambda(v)$$
 Вычислим $(\varphi(v),\varphi(v))\stackrel{\text{ортогонализируем}}{\longrightarrow}(\varphi,\varphi)=(\lambda v,\lambda v)=\lambda\overline{\lambda}(v,v)\Longrightarrow$ $\lambda\overline{\lambda}=|\lambda|=1,$ или $\lambda=\cos(\theta)\pm i\sin(\theta).$

Теорема. Если $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ - ортогональный оператор, то в $\mathcal{E} \exists$ ортонормированный базис, в котором:

Порядок матрицы равен $n = \dim \mathcal{E}$ (s - количество 1 и -1 - определяется единственным образом)

Определение. Оператор φ собственный, если $\dim \varphi = 1$, при $\dim \varphi = -1$ - не собственный

Частный случай теоремы: \forall собственный оператор φ в трехмерном пространстве - это поворот вокруг оси на некоторый угол.

Объяснение: Т.к. 3 - нечетное число, то у φ есть вещественное собственное значение $\lambda = \pm 1$, т.к. $\det \varphi > 0$, то $\lambda = 1$ и e_3 - собственный вектор для этого λ , тогда плоскость $\langle e_3 \rangle^{\perp}$ - инвариантная плоскость и она поворачивается на некоторый угол.

Доказательство. Если все собственные значения φ - вещественные, т.е. $\lambda=\pm 1$, то φ будет также сопряженным. Если $\lambda_1=1$, то $\langle e_1\rangle$ и $\langle e_1\rangle^\perp$ - инвариантно Предположение индукции: Если n>1 и все собственные значения $\varphi=\pm 1$, то в пространстве размерности < n \exists ортонормированный базис из собственных векторов для $\lambda=\pm 1$

В таком базисе \exists минимальный корень $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то ему отвечает двумерное

инвариантное пространство $U < \mathcal{E}$, в ортонормированном базисе:

Индукция: База индукции n=2

При n>2 предположение индукции: в ортонормированном базисе матрица:

$$A_{\varphi}|_{V} = \begin{pmatrix} \Phi_{2} & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ \hline 0 & \Phi_{s} & & & \\ \hline & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \ \dim V < n$$

Нужный базис - объединение ортонормированных бизисов U и V

 $\it 3ame \, vanue. \, s$ - количество пар сопряженных характеристических корней, с учетом кратности

18 Общие линейные операторы

Теорема. Любой невырожденный линейный оператор φ в евклидовом пространстве \mathcal{E} единственным образом может быть представлен в виде: $\varphi = \theta \cdot \rho$, где θ - ортогональный оператор и ρ - самосопряжённый оператор с положительными собственными значениями.

Теорема. Матричная версия

Любую вещественную матрицу A c $\det A \neq 0$ можно представить в виде произведения $A = Q \cdot R$, где Q - ортогональная, R - симметричная c положительными собственными значениями.

Лемма. Если оператор $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ невырожденный, то все собственные значения оператора $\varphi^* \cdot \varphi$ положительны.

Утверждение.

$$(\psi \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot \psi^*$$

Доказательство. Оператор $\varphi^* \cdot \varphi$ - самосопряжённый:

$$(\varphi^* \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot (\varphi^*)^* = \varphi^* \cdot \varphi$$

 \Longrightarrow все его собственные значения $\in \mathbb{R}$. Путсь μ - какое-то их них: $(\varphi^* \cdot \varphi)(v) = \mu v$ для подходящего $v \neq 0$. Вычислим μ :

$$((\varphi^* \cdot \varphi)(v), v) = \mu(v, v) = (\varphi(v), (\varphi^*)^*(v)) = (\varphi(v), \varphi(v)) \Longrightarrow \mu = \frac{(\varphi(v), \varphi(v))}{(v, v)}$$
$$\Longrightarrow \mu > 0$$

3амечание. Для любой вещественной матрицы A она является $A=A_{\varphi}$ в подходящем базисе (этот базис можно выбрать ортонормированным). Будем доказывать матричную версию, используя тот факт, что в ортонормированном базисе: $A_{\varphi^*}=A_{\varphi}^T$

$$\Longrightarrow A^T = R^T Q^T = RQ^T \Longrightarrow A^T A = R(\underbrace{Q^T Q}_{=E})R = R^2$$

- это симметричная матрица с положительными собственными значениями $\Longrightarrow R^2$ можно привести к диагональному виду: \exists ортогональная матрица C такая, что:

$$C^{-1}(R^2)C = \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R^2 = C\Lambda^2C^{-1} = C\Lambda^2C^T \Longrightarrow R = C\Lambda C^T$$

Где
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$$
 имеет положительные собственные значения

Tогда $Q - A \cdot R$

Проверка:

$$Q^T = (R^{-1})^T A^T = R^{-1} A^T \Longrightarrow Q^T Q = R^{-1} (A^T A) R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} = E$$

Определение. Разложение $\varphi=\theta\rho$ или $A=Q\cdot R$ - полярное разложение оператора φ с собственной матрицей A

Определение. Сингулярное разложение: $A = (QC)\Lambda C^T = U\Lambda V$, где Λ - диагональная матрица с положительными собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_m$, U, V - ортогональные матрицы $(\lambda_1, ..., \lambda_m$ - сингулярные числа матрицы A)

19 Квадратичные формы

Пусть k(x) = b(x,x) - квадратичная форма на пространстве \mathcal{E} , B - её матрица в некотором базисе $(B^T = B)$.

Теорема. В В \exists ортонормированный базис f = eC, в котором эта форма имеет вид $k(x) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - собственные значения B.

3 a m e v a h u e. Векторы базиса f называются главными осями для квадратичной формы k, а сама замена - приведением формы к главным осям.

 \mathcal{A} оказательство. Примем B за матрицу самосопряжённого оператора φ в некотором ортонормированном базисе. Тогда \exists ортонормированный базис $f_1, ..., f_n$ из собственных векторов оператора φ , т.е. $\exists C$ - ортогональная матрица такая, что

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \ddots & \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow C^TBC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

т.е. C - матрица перехода к главным осям.

Утверждение. Если \mathcal{E} - евклидово пр-во, то \mathcal{E}^* изоморфно E.

Доказательство. Достаточно показать, что $\forall f: \mathcal{E} \to \mathbb{R} \ \exists ! a \in \mathcal{E}$ такой, что $\forall x \in \mathcal{E}, f(x) = (a, x).$

Выберем в
$$\mathcal{E}$$
 ортонормированный базис $e=\{e_1,...,e_n\}$, тогда в нём $f(x)=\sum_{i=1}^n a_i x_i=(a,x)$, где $a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.

Лемма. Для любой билинейной функции b(x,y) на евклидовом пространстве \mathcal{E} $\exists !$ линейный оператор $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ такой, что

$$\forall x, y \in \mathcal{E}: \ b(x, y) = (x, \varphi(y))$$
 (1)

 \mathcal{A} оказательство. Выберем произвольный базис e в \mathcal{E} с матрицей Грама G $(\dim \mathcal{E} = n)$. Тогда:

$$(1) \Longleftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n : X^T B Y = X^T (G A_{\varphi}) Y \Longrightarrow A_{\varphi} = G^{-1} B$$

3амечание. Пусть b(x,y) = b(y,x). Тогда:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = (y, \varphi(x)) = b(y, x) = b(x, y) = (x, \varphi(y)) \Rightarrow \varphi^* = \varphi$$

74

Теорема. Пусть V - векторное пространство над \mathbb{R} (dim V=n), f,g - квадратичные функции на V, причём g знакоопределена (в частности, g>0). Тогда в V \exists базис, в котором $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$; $g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Доказательство. Рассмотрим порождающие f, g симметрические билинейные формы f(x,y) и g(x,y), т.е. $f(x,x) \equiv f(x), g(x,x) \equiv g(x)$, и обозначим за F,G матрицы этих форм в некотором базисе. Тогда можем задать на пр-ве V скалярное произведение с помощью формы g:(x,y)=g(x,y).

По лемме $\exists!\ \varphi:V\to V$ - самосопряжённый оператор такой, что $f(x,y)\equiv g(x,\varphi(y))$. Заметим также, что G - матрица Грама для базиса, в котором функция g(x,y) имеет матрицу G. Тогда $A_{\varphi}=G^{-1}F$.

Так как $\varphi \equiv \varphi^*$, в V существует ортонормированный базис, в котором $A_{\varphi,e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Если $C = C_{e \to e'}$, то $A_{\varphi,e'} = C^{-1}A_{\varphi}C$, $F_{e'} = C^TFC$.

Тогда во-первых, $C^TGC = G_{e'} = E$, т.к базис ортонормированный, а во-вторых

$$C^{-1}A_{\varphi,e}C = C^{-1}G^{-1}FC = C^{-1}(CC^T)FC = (C^{-1}C)C^TFC = C^TFC = F_{e'}$$

т.е. в новых координатах
$$F_{e'}=A_{\varphi,e'}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\ddots\\\lambda_n\end{pmatrix}$$
 и $f(x')=\sum_{i=1}^n\lambda_i {x_i'}^2$

3амечание. $\lambda_1,...,\lambda_n$ - корни характеристического ур-я

$$|A_{\varphi} - \lambda E| = 0 \iff |G^{-1}F - \lambda E| = 0 \iff |F - \lambda G| = 0 \quad (2)$$

т.е. соответствующие собственные векторы будут решениями СЛУ

$$(F - \lambda G)X = 0 \quad (3)$$

Для каждого собственного значения λ_i нужно найти ФСР для (3) и ортонормировать относительно g(x,y).

20 Полуторалинейные, эрмитовы формы. Унитарные (эрмитовы) пространства

Далее всюду $F = \mathbb{C}, V$ - в.п. над \mathbb{C} .

Определение. Функция $f(x,y):V\times V\to\mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если:

1.
$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y);$$

 $f(\lambda_x, y) = \lambda f(x, y) \ (\lambda \in \mathbb{C});$

2.
$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2);$$

 $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y) \ (\lambda \in \mathbb{C})$

Определение. f(x,y) называется эрмитово симметричной (эрмитовой), если

1. f(x,y) линейна по x;

2.
$$f(y,x) \equiv \overline{f(x,y)} \iff f(x,\lambda y) = \overline{\lambda}f(x,y) \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Заметим, что если f(x,y) эрмитова, то $f(x,x) \equiv \overline{f(x,x)} \Rightarrow f(x,x) \in \mathbb{R}$.

Определение. Квадратичная функция, порождённая эрмитовой формой - это функция $k(x) \equiv f(x,x)$.

Упражнение. Доказать, что для любой квадратичной формы k(x) $\exists !$ эрмитова форма f(x,y) такая, что $f(x,x) \equiv k(x)$.

Если f(x,y) полуторалинейна и эрмитова, то обозначим $F=(f(e_i,e_j))$, и тогда $f(e_j,e_i)=\overline{f(e_i,e_j)}\Longrightarrow F^T=\overline{F}\Longleftrightarrow \overline{F}^T=F.$

Определение. $F^* = \overline{F}^T$ - эрмитово сопряжённая матрица к F. Если $F^* = F$, то F - эрмитова матрица.

Определение. Скалярное произведение на пр-ве V - функция (x,y) такая, что

- 1. (x, y) линейна по x;
- $2. (y,x) \equiv \overline{(x,y)};$
- 3. $(x, x) > 0 \ \forall x \neq 0$

Скалярное произведение в координатах:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k \overline{y_j} \left(e_k, e_j\right)$$

Матрица Грама базиса $e: G_e = ((e_k, e_j)). G_e * = \overline{G_e}^T = G_e.$

Определение. $x \perp y \iff (x,y) = 0$.

Базис $e_1, ..., e_n$ ортогональный, если $(e_k, e_j) = 0, k \neq j$.

Базис $e_1,...,e_n$ ортонормированный, если $(e_k,e_j)=\delta_{ij}.$

В ортонормированном базисе $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$.

Изменение матрицы полуторалинейной формы при замене базиса:

Если f(x,y) - полуторалинейная форма, то в некотором базисе $e:f(x,y)=X^TF\overline{Y}$, где $F=(f(e_i,e_j))$. Если f эрмитово симметричная, т.е. $\overline{f(y,x)}=f(x,y)$, то $\overline{F}^T=F$.

Тогда если e' = Ce, то в случае полуторалинейной формы:

$$X = CX', Y = CY' \Rightarrow f(x, y) = (X')^T (C^T F \overline{C}) \overline{Y'} = (X')^T F' \overline{Y'}$$

В случае эрмитовой квадратичной формы k(x) = f(x, x):

$$k(x) = \sum_{k,j=1}^{n} x_k \overline{x}_j f_{kj} = \dots + f_{kj} x_k \overline{x}_j + \dots, \ f_{jk} = \overline{f}_{kj}$$

Отсюда $f_{ii} = \overline{f}_{ii}$, т.е. $f_{ii} \in \mathbb{R}$.

Теорема. Эрмитову квадратичную форму можно привести к диагональному виду $\alpha_1|x_1|^2 + ... + \alpha_r|x_r|^2$, где r = rkF, $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$, $\alpha_j \neq 0$. Количества положительных коэффициентов p и отрицательных коэффициентов q - инварианты для данной формы.

Доказательство. Применим следующий вариант алгоритма Лагранжа: Основной случай. Если $b_{11} \neq 0$, то необходимо выделить все одночлены, содержащие x_1 и \overline{x}_1 :

$$k(x_{1},...,x_{n}) = (b_{11}x_{1}\overline{x}_{1} + ... + b_{n1}x_{n}\overline{x}_{1}) + (b_{12}x_{1}\overline{x}_{2} + ... + b_{1n}x_{1}\overline{x}_{n}) + \tilde{k}(x_{2},...,x_{n}) =$$

$$= \frac{1}{\overline{b}_{11}}(b_{11}x_{1} + ... + b_{n1}x_{n})(\overline{b_{11}x_{1}} + ... + \overline{b_{n1}x_{n}}) + \tilde{k}(x_{2},...,x_{n}) =$$

$$= \frac{1}{\overline{b}_{11}}|b_{11}x_{1} + ... + b_{n1}x_{n}|^{2} + \tilde{k}(x_{2},...,x_{n})$$

Заменяем $y_1=b_{11}x_1+...+b_{n1}x_n$ и далее преобразуем \tilde{k} . Особый случай: $b_{ii}=0, i=1,...,n$. По условию $k\not\equiv 0$, т.е. $\exists b_{ij}=\bar{b}_{ji}\not\equiv 0$ и форма содержит члены $b_{ij}x_i\overline{x}_j+b_{ji}x_j\overline{x}_i=2b_{ij}^2|y_i|^2-2b_{ij}^2|y_j|^2$ при замене $\begin{cases} x_i=b_{ji}(y_i+y_j)\\ x_j=y_i-y_j \end{cases}$

Далее можем продолжать по основному случаю.

Сохраняют силу следующие утверждения и понятия:

- 1. Теорема Якоби: $\Delta_1, ..., \Delta_{n-1} \neq 0 \Longrightarrow k \frac{\Delta_1}{\Delta_0} |y_1|^2 + ... + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} |y_n|^2$;
- 2. Критерий Сильвестра: $k > 0 \iff \Delta_i > 0, i = 1, ..., n$;

3. Понятие u^{\perp} и утверждение $V = U \oplus U^{\perp}$.

Замечание. Если
$$A^* = \overline{A}^T = A$$
, то $|A| = |\overline{A}^T| = |\overline{A}| = |\overline{A}|$, т.е. $|A| \in \mathbb{R}$

Алгоритм. Процесс ортогонализации:

Дан произвольный базис $e_1,...,e_n \in V$. необходимо построить ортогональный базис $e'_1,...,e'_n$ такой, что $\langle e_1,...,e_k \rangle = \langle e'_1,...,e'_k \rangle$.

Возьмём $e_1' = e_1$.

Шаг алгоритма: если k>1 и $e'_1,...,e'_{k-1}$ уже построены, то будем искать e'_k в виде $e_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\lambda_j^{(k)}e'_j$. Тогда:

$$0 = (e'_k, e'_i) = (e_k, e'_i) - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(k)}(e'_j, e'_i) = (e_k, e'_i) - \lambda_i^{(k)}(e'_i, e'_i) \Longrightarrow \lambda_i^{(k)} = \frac{(e_k, e'_i)}{(e'_i, e'_i)}$$

20.1 Линейные операторы в унитарном пространстве

1. Сопряжённый оператор φ^* к линейному оператору $\varphi:V\to V$:

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

- 2. Самосопряжённый оператор: $\varphi=\varphi^*$ (2)
- 3. Унитарный оператор:

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad (3)$$

Для самосопряжённого оператора:

$$(2) \iff (\varphi(x), y) \equiv (x, \varphi(y)) \implies (A_{\varphi}X)^T G\overline{Y} = X^T (A_{\varphi}^T G) \overline{Y} = X^T (G\overline{A}_{\varphi}) \overline{Y}$$

Отсюда

$$A_{\varphi}^T G = G \overline{A}_{\varphi} \quad (2')$$

Если базис ортонормированный, то $A_{\varphi}^T = \overline{A}_{\varphi} \Longleftrightarrow A = A^*$

Для унитарного оператора:

$$(3) \iff X^T G \overline{Y} = (A_{\varphi} X)^T G \overline{A_{\varphi} Y} = X^T (A_{\varphi}^T G \overline{A_{\varphi}}) \overline{Y} \implies A_{\varphi}^T G \overline{A_{\varphi}} = G \quad (3')$$

Если базис ортонормированный, то $A_{\varphi}^T \overline{A}_{\varphi} = E \iff A^{-1} = A^*$ (унитарная матрица).

Теорема. Если φ - самосопряжённый линейный оператор в V, то

- 1. Все его характеристические корни $\in \mathbb{R}$;
- 2. Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;
- 3. Если U φ -инвариантно в V, то U^\perp также φ -инвариантно;
- 4. В $V \equiv$ базис из собственных векторов $\varphi \Longleftrightarrow \varphi = \varphi^*$

Теорема. Если φ - унитарный линейный оператор в V, то

- 1. Все собственные значения имеют модуль 1;
- 2. Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;
- 3. Если U φ -инвариантно в V, то U^{\perp} также φ -инвариантно;
- 4. В V \exists базис из собственных векторов φ , причём в этом базисе

$$A'_{\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & e^{i\omega_n} \end{pmatrix}$$

Доказательство. За исключением примечаний ниже доказательство аналогично случаю евклидова пространства.

К пункту 1 обоих теорем:

Так как $\mathbb C$ замкнуто, любой корень λ характеристического многочлена для φ является собственным значением и имеет отвечающийй ему собственный вектор.

Для самосопряжённого оператора:

$$\lambda(x,x) = (\varphi(x),x) = (x,\varphi(x)) = \overline{\lambda}(x,x) \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Для унитарного оператора:

$$(x,x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda \overline{\lambda}(x, \varphi(x)) \Longrightarrow \lambda \overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \Longrightarrow |\lambda| = 1$$

К пункту 4 теоремы 2:

Индукция по n:

База: $n=1\Rightarrow \varphi(x)=e^{i\omega}x$; Шаг: Выберем собственное значение $\lambda_1=e^{i\omega_1}$, найдём для него собственный вектор e_1 и нормируем его. $\langle e_1\rangle - \varphi$ -инвариантное подпространство $\Longrightarrow \langle e_1\rangle^\perp - \varphi$ -инвариантно, и тогда по предположению индукции \exists ортонормированный базис $e_2,...,e_n$ нужного вида для $\varphi|_{\langle e_1\rangle^\perp}$, а из ортогональности e_1 всем векторам этого базиса получаем, что $e_1,...,e_n$ - искомый базис.

21 Аффинные пространства и их преобразования

Определение. Аффинным пространством над полем \mathbb{F} называется пара (\mathbb{A},V) , где \mathbb{A} - множество точек, V - ассоциированное с ним векторное пространство (над \mathbb{F}), если задано отображение $\mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$ - операция прибавления вектора к точке (откладывание вектора от точки) со следующими аксиомами:

- 1. $\forall p \in \mathbb{A}, x, y \in V : p + (x + y) = (p + x) + y;$
- $2. \ \forall p \in \mathbb{A}: \ p+0=p;$
- 3. $\forall p, q \in \mathbb{A} \exists ! x \in V : p + x = q$

Размерность аффинного пространства: $\dim \mathbb{A} = \dim V$.

3амечание. Если имеется векторное пространство V, то можно принять $\mathbb{A} = V$, понимая точки как радиус-векторы, если задать начальную точку $0 \in V$.

Утверждение. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs} = \overrightarrow{ps}$

Доказательство.
$$q = p + x$$
; $s = q + y = (p + x) + y = p + (x + y)$

Аффинная система координат

Задаётся точкой $o \in \mathbb{A}$ - началом координат и базисом e ассоциированного векторного пространства V. Обозначается $(o, e_1, ..., e_n)$.

Координаты точки p - координаты радиус-вектора \overrightarrow{op} в базисе e.

$$\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Longrightarrow \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) e_i$$

Также можно задать точки $o, p_1, ..., p_n$ общего положения (т.е. $\overrightarrow{op_1}, ..., \overrightarrow{op_n}$ линейно независимы) - тогда $(o, \overrightarrow{op_1}, ..., \overrightarrow{op_n})$ - система координат.

Изменение координат точки при замене системы координат

Пусть (o,e) - старая система координат, (o,e') - новая система координат. Заметим, что $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p}$. Поэтому если X - столбец координат точки p в старых координатах, X' - в новых координатах, а X_o - столбец старых координат точки o', то

$$X = X_o + CX$$
, $(C = C_{e \to e'})$ (1)

Можно ввести аффинную матрицу перехода $\tilde{C}=\begin{pmatrix} C & X_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ порядка n+1 $(n=\dim V)$ и дополненный столбец $\tilde{X}=\begin{pmatrix} X\\ 1\end{pmatrix}$ высоты n+1. Тогда из (1): $\tilde{X}=\tilde{C}\tilde{X}' \quad (1')$

Барицентрическая комбинация точек

Пусть даны $p_0, p_1, ..., p_m (1 \leqslant m \leqslant n)$ с коэффициентами $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m, \sum \lambda_i = 1$. Барицентрической комбинацией будем называть

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i p_i := p + \sum_{i=0}^m \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = p + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p)$$
 для некоторой точки p

Покажем, что результат не зависит от выбора точки p: если q=p+v - другая точка, то

$$q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{qp_i} = p + v + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (-v) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{pp_i}$$

Следствие. Если m=n и $p_0,...,p_n$ - точки общего положения, то любую точку можно единственным образом представить в виде барицентрической комбинации этих точек: $p=\sum_{i=0}^m x_i p_i, \sum_{i=0}^m x_i = 1.$ $(x_0,...,x_n)$ называются барицентрическими координатами точки p.

21.1 Аффинные плоскости (подпространства)

Определение. Зафиксируем точку $p_0 \in \mathbb{A}$ и подпространство $U \subseteq V$. Аффинная плоскость P с начальной точкой p_0 и направляющим подпространством U - это множество точек $P:=p_0+U=\{p_0+u|u\in U\}$. Размерность плоскости: $\dim P=\dim U$.

Утверждение. P не зависит от выбора точки p_0 .

Доказательство. Пусть $P = p_0 + U, p'_0 \in P$. Тогда:

$$p'_0 = p_0 + u_0, u_0 \in U \Longrightarrow P' = p'_0 + U = p_0 + u_0 + U = p_0 + U = P$$

Утверждение. Если $P = p_0 + U = p'_0 + U'$, то U = U' (т.е. направляющее подпространство для плоскости определено однозначно).

Доказательство. $p_0' \in p_0 + U \Longrightarrow p_0 + U = p_0' + U = p_0' + U' \Longrightarrow U = U'$

Утверждение. (P, U) является аффинным пространством относ. операции $p \to p + x$ для $x \in U$.

Доказательство. Проверим аксиомы:

- 1. $p + u \in p + U$ операция определена на P и U;
- 2. $p + (u_1 + u_2) = (p + u_1) + u_2 \in p' + U = P$;
- 3. Если $p,q\in P$, то $P=p+U,q=p+u \Longrightarrow \overrightarrow{pq}=u\in U$ существует и единственный.

$$\forall p \in P: \ p = p_0 + \sum_{i=1}^m x_i e_i \ (e_1, ..., e_m \text{ - базис в } U).$$

Вместо точки p_0 и базиса $e_1, ..., e_m$ можно рассмотреть точки $p_0, p_1, ..., p_m$ общего положения - любую точку $p \in P$ можно представить в виде барицентрической комбинации точек $p_0, ..., p_n$.

Задание аффинной плоскости неоднородной СЛУ

Пусть $P = p_0 + U, \dim U = m, \dim V = n$. Тогда \exists матрица A такая, что $U = \{x = eX | AX = 0\}$ (e - базис V).

 $\forall p \in P$ имеет координаты $X_0 + X$, где X_0 - столбец координат p_0 , а X - координаты $u \in U$. Тогда $A(X_0 + X) = AX_0 + AX = AX_0 := b \Longrightarrow$ координаты $p \in P$ удовлетворяют системе AX = b.

Если p_0 заменить на p_0' с координатами $X_0+X',AX'=0$, то $A(X_0+X')=AX_0=b$. Остюда получаем следующее утверждение:

Утверждение. Любую аффинную плоскость можно задать (неоднородной) системой линейных уравнений.

Определение. Аффинная оболочка множества точек M - это наименьшая по включению аффинная плоскость, содержащая все точки M. В частности. если $M = \{p_0, ..., p_k\}$, то $\langle M \rangle = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p_1}, ..., \overrightarrow{p_0p_k} \rangle$.

Замечание. Аффинная плоскость $P = p_0 + U$ представляет собой некоторый смежный класс пространства V по U:

$$p_0' + U = p_0 + U = P \Longleftrightarrow \overline{p_o p_0'} \in U$$

Взаимное расположение двух плоскостей:

Пусть $P_1 = p_1 + U_1$, $P_2 = p_2 + U_2$

- 1. $P_1 \parallel P_2$ (в широком смысле), если $U_1 \subseteq U_2$ или $U_2 \subseteq U_1$. В истинном смысле: если они параллельны в широком смысле и не пересекаются.
- 2. $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, но не параллельны.
- 3. P_1 и P_2 скрещиваются: $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ и $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Утверждение. $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset \iff \overline{p_1p_2} \in U_1 + U_2$

Доказательство.

$$\implies$$
 Пусть $p = p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \Rightarrow \overline{p_1 p_2} = u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$

 $\underline{\longleftarrow}$ Пусть существуют $u_i \in U_i, i = 1, 2 : \overline{p_1p_2} = u_1 - u_2$. Значит:

$$p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \in P_1 \cap P_2$$

Определение. Аффинная оболочка подмножества $M \subset \mathbb{A}$ - это

$$Aff(M) \equiv \langle M \rangle := p_0 + \langle \overline{pq} \mid p, q \in M \rangle, \ p_0 \in M$$

Видно, что < M > - аффинная плоскость с направляющим подпространством

$$U_0 = \langle \overline{pq} : p, q \in M \rangle$$

Если $P = p_0 + U \supseteq M \Longrightarrow P \ni p_0 + \overline{pq}, \ p,q \in M \Longrightarrow P \supseteq \langle M \rangle$. Если P_1,P_2 -аффинные плоскости, то:

$$\langle P_1, P_2 \rangle = p_0 + \langle \overline{p_1 p_2}, U_1, U_2 \rangle$$

Теорема.

$$\dim \langle P_1, P_2 \rangle = \begin{cases} \dim(U_1 + U_2), & ecnu \ P_1 \cap P_2 \neq \emptyset, \\ \dim(U_1 + U_2) + 1, & ecnu \ P_1 \cap P_2 = \emptyset \end{cases}$$

83

Доказательство. $\langle P_1, P_2 \rangle$ имеет направляющее подпространство:

$$\langle \overline{p_1p_2}, U_1, U_2 \rangle, \ \forall p_1 \in P_1, \ p_2 \in P_2$$

$$\dim \langle \overline{p_1p_2}, U_1, U_2 \rangle = \begin{cases} \dim(U_1 + U_2), \ \text{если } \overline{p_1p_2} \in U_1 + U_2 \Longleftrightarrow P_1 \cap P_2 \neq \emptyset, \\ \dim(U_1 + U_2) + 1, \ \text{если } \overline{p_1p_2} \notin U_1 + U_2. \end{cases}$$

22 Евклидовы аффинные пространства

Определение. Аффинное простариство (\mathbb{A} , \mathcal{E}) - евклидово, если \mathcal{E} - евклидово пространство (над \mathbb{R}), \mathcal{E} ассоциированно с пространством точек \mathbb{A} . Расстояние определяется как

$$\rho(p,q) = |\overline{pq}|$$

Для трех точек a,b,c угол между лучами (ab) и (ac) - это угол между векторами \overline{ab} и \overline{ac} (если они ненулевые).

Определение.

Расстояние от точки $p_1 \in \mathbb{A}$ до плоскости $P = p_0 + U, \ V \supset U \neq \{0\}.$ Либо $p_1 \in P$, либо $\overline{p_0p_1} \not\in U.$

Можно рассматривать подпространтсво:

$$\widetilde{U} = \langle \overline{p_0 p_1} + U \rangle \supset V, \ \overline{p_0 p_1} = y + z, \ y \in U, \ z \in U^{\perp} \Longrightarrow \min |\overline{p_1 q}| = |z|$$

Определение. Параллелепипед с одной вершиной p_0 и ребрами a_1, \ldots, a_m , где $m \leq n, \ a_i \in \mathcal{E}$:

$$\Pi_{\langle p_0, a_1, \dots, a_m \rangle} = \{ p_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i : 0 \le \lambda_i \le 1 \}$$

Определим m-мерный объем рекурсивно: для m=1:

$$V(\Pi_1) = |a_1|$$

$$V(\Pi_m) = (a_m)_{\perp} \cdot V_{\{p_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}}$$

где $(a_m)_{\perp}$ - ортогональная сотавляющая ребра a_m отностительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$.

Пусть a_1, \ldots, a_m линейно независимы. Тогда:

$$V_{p_0,a_1,...,a_m} = |G_{\{a_1,...,a_m\}}|$$

Можно ортогонализовать векторы a_1, \ldots, a_m , причем матрица перехода от a_1, \ldots, a_m к b_1, \ldots, b_m , где b_1, \ldots, b_m получены из алгоритма ортогонализации, выглядит так:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$|G_{\{a_1,\dots,a_m\}}| = |G_{\{b_1,\dots,b_m\}}| = \begin{vmatrix} |b_1^2| & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & |b_m^2| \end{vmatrix} = |b_1|^2 \cdot \dots \cdot |b_m|^2$$

Значит:

$$\rho(p_1, P) = \frac{\sqrt{|G_{\{a_1, \dots, a_m, \overline{p_0 p_1}\}}|}}{\sqrt{|G_{\{a_1, \dots, a_m\}}|}}$$

Если $P_1 = p_1 + U_1, P_2 = p_2 + U_2$ - две афиинные плоскости в аффинном пространстве, то назовем:

$$\rho(P_1, P_2) = \inf\{|\overline{pq}| : p \in P_1, q \in P_2\}$$

Теорема. $\rho(P_1, P_2)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overline{p_1p_2}$ относительно $U_1 + U_2$

Замечание. Если $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, то $\rho(P_1, P_2) = 0$, $\overline{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$, так что $(p_1, p_2)_{\perp} = 0$, что не противоречит утверждению теоремы.

Доказательство. Обозначим $W=U_1+U_2$, тогда $\mathcal{E}=W\oplus W^\perp$. Обозначим

$$\overline{p_1 p_2} = v = v_{\parallel} + v_{\perp}, \ v_{\parallel} \in W, \ v_{\perp} \in W^{\perp}$$

Попробуем доказать, что существуют

$$a = p_1 + u_1^0 \in P_1, \ b = p_2 + u_2^0 \in P_2$$

такие, что $\overline{ab} = v_{\perp}$.

Выберем произвольные точки $x=p_1+u_1\in P_1,\ y=p_2+u_2\in P_2.$ Тогда:

$$\rho^{2}(x,y) = |\overline{yx}|^{2} = |\overline{p_{2}p_{1}} + u_{1} - u_{2}|^{2} = |v + u_{2} - u_{1}|^{2} = |v + u_{2} - u_{1}|^{2} = |(v_{\parallel} + u_{2} - u_{1}) + v_{\perp}|^{2} = |v_{\parallel} + u_{2} - u_{1}|^{2} + |v_{\perp}|^{2} \ge |v_{\perp}|^{2}$$

где $v_{\perp} \in (U_1 + U_2)^{\perp}$. Равенство достигается, если $v_{\parallel} = u_2 - u_1 \Rightarrow \exists \ u_1, u_2$ такие, что $a = p_1 + u_1, \ b = p_2 + u_2 : |\overline{ab}| = v_{\perp}$.

Следствие. Прямая $l = a + \langle \overline{ab} \rangle = (p_1 + u_1) + \langle (\overline{p_1p_2})_{\perp} \rangle$ является общим перпендикуляром этих двух плоскостей.

22.1 Афиинные отображения и преобразования

Пусть (\mathbb{A}_1, V_1) и (\mathbb{A}_2, V_2) - аффинные пространства над одним и тем же полем.

Определение. Отображение $\Phi: \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ называется аффинно-линейным отображением, если существует линейное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$ такое, что

$$\forall a, b \in \mathbb{A}_1 : \overline{\Phi(a)\Phi(b)} = \varphi(\overline{ab}) \tag{1}$$

Такое определение равносильно следующему:

$$\forall a, b \in \mathbb{A}_1: \ \Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overline{ab}) \tag{2}$$

Если задано Φ и какая-то точка a, то φ определяется однозначно. Если $\overline{ab}=\overline{a_1b_1}=v$

$$\Phi(a_1) + \varphi'(v) = \Phi(b_1) = \Phi(a_1) + \varphi'(\overline{a_1b_1}) \Rightarrow \varphi = \varphi'$$

Утверждение.

1. $\Pi ycmb$

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$$

 $\epsilon \partial e \Phi_1, \Phi_2$ - аффинно-линейны, то

$$\Phi = \Phi_2 \cdot \Phi_1: \ \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_3$$

тоже аффинно-линейно с линейной частью $\varphi=\varphi_2\cdot\varphi_1$

2. $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}_2$ биективно $\iff \varphi$ - биективно, при этом Φ^{-1} является аффинно-линейным с линейной частью φ^{-1} .

Координатная запись

Выберем систему координат с началом в точке O и базисом e

$$\forall b(x_1, \dots, x_n) = \overline{Ob}, \ \Phi(O) = O'(x_1^0, \dots, x_n^0)$$
$$\Phi(b) = \Phi(O) + \varphi(\overline{Ob})$$

Обозначим $\Phi(b)(y_1,\ldots,y_m)$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix} + A_{\varphi,e,f} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

где f - базис в V_2

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{\varphi} & X_0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \iff \widetilde{Y} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{X}$$

где

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}, \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Подробная запись:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^0, \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_m^0 \end{cases} \implies \begin{cases} dy_1 = a_{11}dx_1 + \dots + a_{1n}dx_n, \\ \vdots \\ dy_m = a_{m1}dx_1 + \dots + a_{mn}dx_n \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = A_{\varphi} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Значит A_{φ} действует на столбцы

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

как оператор φ . Обозначим

$$DY = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix}, \ D : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$

Утверждение.

1. $\Pi ycmb$

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$$

 $\it rde\ \Phi_1,\Phi_2$ - $\it afffuhho$ -линейны, то

$$\Phi = \Phi_2 \cdot \Phi_1 : \ \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_3$$

тоже, причем

$$D(\Phi_2 \cdot \Phi_1) = D\Phi_2 \cdot D\varphi_1 = \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

2. Φ_1 - биективно $\Longleftrightarrow \varphi_1$ - биективно, и линейная часть Φ_1^{-1} есть φ_1^{-1}

Доказательство. 1. Пусть $b_1, a_1 \in \mathbb{A}_1$

$$\Phi_1(b_1) = \Phi_1(a_1) + \varphi_1(\overline{a_1b_1})$$

$$\Phi_2(\Phi_1(b_1)) = \Phi_2(\Phi_1(a_1)) + \varphi_2(\varphi_1(\overline{a_1b_1}))$$

2. Если φ_1 - биективно, то $\forall \ \overline{a_2b_2} \in V_2$ существует единственный вектор

$$\overline{a_1b_1} \in V_1 : \varphi(\overline{a_1b_1}) = \overline{a_2b_2}$$

Определим отображение

$$\Phi': \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_1$$

$$\Phi'(a_2) = a_1, \ \Phi'(b_2) = \Phi'(a_2) + \varphi^{-1}(\overline{a_2b_2})$$

Значит Φ' - аффинно-линейное отображение.

$$\Phi(a_1) = a_2, \ \Phi(b_1) = \Phi(a_1) + \varphi(\overline{a_1b_1}) = \Phi(a_1) + \overline{a_2b_2} = b_2$$
$$(\Phi'\Phi)(a_1) = \Phi'(a_2) = a_1 \Longrightarrow \Phi'\Phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}_1}$$

Аналогично в другом порядке.

Аффинные преобразования

Определение. Пусть $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ - аффинно-линейное преобразование. Если Φ биективно, то будем называть его просто аффинным.

Примеры. 1. Параллельный перенос на вектор $v \in V$:

$$\forall a \in \mathbb{A} : t_v(a) = a + v$$

ясно что

$$t_v^{-1} = t_{-v}, Dt_v = \text{Id}$$

2. Гомотетия с центром в точке O:

$$\forall v \in V: \ \Phi(O+v) = O + \lambda v$$

где $\lambda \neq 0$ - коэффициент гомотетии. Например, при $\lambda = -1$ - это центральная симметрия.

Теорема. Любое (биективное) аффинное преобразование Φ для любой точки $a \in A$ представляется единственным образом в виде композиции

$$\Phi = t_v \cdot \Psi$$

где Ψ - аффинное преобразование такое, что $\Psi(a)=a.$

Доказательство. Для заданной точки a обозначим $v:=\overline{a\Phi(a)}$. Рассмотрим преобразование $\Psi=t_{-v}\cdot\Phi$, тогда Ψ - аффинное.

$$\Psi(a) = \Phi(a) - v = a \Longrightarrow \Phi = t_v \cdot \Psi$$

Докажем единственность: Пусть

$$\Phi = t_v \cdot \Psi = t_{v'} \cdot \Psi', \ \Psi'(a) = a$$

значит

$$t_{v-v'} = \Psi' \cdot \Psi^{-1}, \text{ T.K } \Psi'(a) = \Psi(a) = a$$

отсюда

$$\Psi' \cdot \Psi^{-1}(a) = a = a + (v - v') \Longrightarrow v' = v$$

следовательно

$$\Psi' \cdot \Psi^{-1} = t_0 = \operatorname{Id}$$

Теорема. Для любых двух наборов точек общего положения $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ существует единственное аффинное преобразование $\Psi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ n-мерного аффинного пространства такое, что

$$\Phi(a_i) = b_i, \ \forall i = 0, \dots, n$$

Доказательство. По условию $\{\overline{a_0a_1},\dots,\overline{a_0a_n}\}$ и $\{\overline{b_0b_1},\dots,\overline{b_0b_n}\}$ - базисы в ассоциированном с $\mathbb A$ векторном пространстве V. Значит существует единственный линеный оператор $\varphi:V\to V$ такой, что

$$\varphi(\overline{a_0a_i}) = \overline{b_0b_i}, \ i = 0, \dots, n$$

Тогда $\Phi(a_0+v)=b_0+\varphi(v)$ - требуемое преобразование.

Ортогональные преобразования (движения или изометрии)

Определение. Пусть (\mathbb{A}, V) - аффинное евклидово пространтсво, то есть V - евклидово пространство.

Аффинное преобразование $\Phi: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ называется ортогональным или движением, если $\forall a,b \in \mathbb{A}$:

$$\rho(\Phi(a),\Phi(b)) = \rho(a,b), \text{ r.e } |\overline{\Phi(a),\Phi(b)}| = |\overline{ab}|$$

Упражнение. Доказать, что если преобразование $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ сохраняет расстояния между точками, то оно является аффинным, то есть $\forall a$:

$$\Phi(a+v) = \Phi(a) + \varphi(v)$$

где φ - линейный оператор.

На этом основании можно называть Ф изометрией

3амечание. Если Φ - движение, то $D\Phi = \varphi$ - ортогональный оператор:

$$|\overline{\Phi(a)}, \overline{\Phi(b)}| = |\overline{ab}|, \ \Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overline{ab})$$

значит

$$|\varphi(\overline{ab})| = |\overline{ab}|, \ b - a + v, \ \forall v \in V$$

следовательно φ сохраняет длины векторов, а значит и скалярное произведение.

Запишем Ф в координатах в ортонормированной системе координат.

$$Y = X_0 + A_{\varphi} \cdot X, \ A_{\varphi}^T = A_{\varphi}^{-1} \Longrightarrow \det A_{\varphi} = \pm 1$$

поскольку

$$A_{\varphi}^{T} \cdot A_{\varphi} = E \Longrightarrow (\det A_{\varphi})^{2} = 1 \Longrightarrow \det A_{\varphi} = \pm 1$$

Определение. Движение называется собственным, если $\det A_{\varphi}=1$ и несобственным, если $\det A_{\varphi}=-1$

3амечание. (Уточнение к теореме о разложении: $\Phi = t_v \cdot \Psi$)

Для любой точки a и любого движения $\Phi:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ с линейной частью φ существует $u\in V$ такой, что

$$\Phi = t_u \cdot \Psi$$

причем $\varphi(u) = u$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{A}$ - произвольная точка. Обозначим $v := \overline{a\Phi(u)}$. Пусть $\lambda = 1$ является собственным значением оператора φ , а также:

$$U = \{u \in V : \varphi(u) = u\} \neq \{0\}, \ W = U^{\perp}$$

тогда

$$V = U \oplus W$$

v = u + w, где $\varphi(u) = u$, (w, u) = 0. Определим $\Psi = t_u \cdot \Phi$. Поищем для Ψ неподвижную точку в виде $b = a + \widetilde{w}$, $\widetilde{w} \in W$. Вычислим

$$\Psi(b) = (t_{-u}\Phi)(b)$$

$$\Psi(a+\widetilde{w}) = t_{-u}(\Psi(a) + \varphi(\widetilde{w})) = t_{-u}(a+v+\varphi(\widetilde{w})) =$$

$$= a + (v-u) + \varphi(\widetilde{w}) = a + w + \varphi(\widetilde{w}) = a + (w+\widetilde{w}) + (\varphi(\widetilde{w}) - \widetilde{w}) =$$

$$= a + \widetilde{w} + w + (\varphi - \operatorname{Id})(\widetilde{w}) = a + \widetilde{w}$$

Поледнее равенство выполнено $\iff (\varphi - \operatorname{Id})\widetilde{w} = -w, \ \widetilde{w} \in W$ - инвариантное подпространство для $\varphi - \operatorname{Id}$, но у $\varphi|_W$ нет собственного значения $\lambda = 1$ $\implies \exists \ (\varphi - \operatorname{Id})^{-1}$ и $\widetilde{w} = -(\varphi - \operatorname{Id})^{-1}(w) \Longrightarrow \Psi(b) = b$. Если $\lambda = 1$ не является собственным значением, то рассуждения сохраняют силу с U = 0 и W = V, $t_u = \operatorname{Id}, \ \Psi = \Phi$ имеет неподвижную точку.

Наблюдение: Если $\lambda=1$ - не собственное значение оператора φ , то Φ имеет неподвижную точку. Если же $\lambda=1$ - собственное значение, u_0 - собственный вектор: $\varphi(u_0)=u_0$, то все точки прямой

$$l = b + \langle u_0 \rangle$$

неподвижны, а Ψ определяется своим действием в гиперплоскости ортогональной к этой прямой:

$$P = b + \langle u_0 \rangle^{\perp}$$

Классификация движений при n=1,2,3

- 1. n=1: Φ либо параллельный перенос, либо центральная симметрия относительно неподвижной точки.
- $2. \ n=2$: Координатная запись одна из следующих:

(а) Параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b \end{cases}$$

(b) Композиция параллельного переноса в доль оси и симметрии относительно оси:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y + b \end{cases} \implies \begin{cases} \widetilde{x}' = x' + a, \\ \widetilde{y}' = -y' \end{cases}$$

(с) Поворот:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$$

Согласно общей теореме, существует неподвижаня точка, что после переноса в эту точку остается только поворот.

- 3. n=3: Четыре варианта в каноническом базисе для оператора φ :
 - (a) Параллельный перенос $(\lambda_{1,2,3} = 1)$

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c \end{cases}$$

(b)
$$\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$$

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Можно заменить координаты $(x,y,z) \to (\xi,\eta,\zeta)$ и получить

$$\begin{cases} \xi' = \xi + a, \\ \eta' = \eta + b, \\ \zeta' = -\zeta \end{cases}$$

что является композицией ортогональной симметрии относительно плоскости $\xi=\eta=0$ и параллельного переноса на вектор (a,b,0), параллельно этой плоскости.

92

(c)
$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b, \\ z' = z = c \end{cases}$$

Можно сделать замену координат $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$, чтобы осталось (упражнение):

$$\begin{cases} \xi' = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ \eta' = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \\ \zeta' = \zeta + c \end{cases}$$

что является композицией поворота вокруг прямой, параллельной (0,0,1) на угол α и переноса на вектор (0,0,c) вдоль этой прямой (винтовое движение).

(d)
$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b, \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Можно сделать замену координат $(x, y, z) \to (\xi, \eta, \zeta)$, чтобы осталось:

$$\begin{cases} \xi' = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ \eta' = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \\ \zeta' = -\zeta + c \end{cases}$$

что является композицией симметрии относительно плоскости $\zeta=c$, повотора вокруг прямой Θ перпендикулярной этой плоскости, и параллельного переноса на вектор (0,0,c), который параллелен этой плоскости.

23 Тензоры

23.1 Основные определения и первоначальные конструкции

Если векторное пространство V над F конечномерно, то $(V^*)^* \simeq V$. Соглашение: векторное пространство V отождествляется с пространством линейных функций на V^* . Пока что будем считать что поле F - произвольное.

Определение. Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0$. Тензор типа (p, q) - это полилинейная функция

$$f: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^{*} \times \cdots \times V^{*}}_{q} \to F$$

p - ковариантная валентность тензора $f,\ q$ - контрвариантная валентность тензора $f,\ p+q$ - ранг тензора f. Множество всех тензоров типа (p,q) обозначают

$$T_p^q(v) = T_p^q$$

По определению $T_0^0 := F$.

Линейные операции на T_p^q

1. Сложение:

$$f_1(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) + f_2(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) =$$

= $(f_1 + f_2)(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q)$

2. Умножение на $\lambda \in F$:

$$(\lambda f)(v_1,\ldots,v_p,u_1,\ldots,u_q) = \lambda f(v_1,\ldots,v_p,u_1,\ldots,u_q)$$

3. Произведение тензоров:

Пусть $f_1 \in T_p^q(V), \ f_2 \in T_r^s(V),$ определим функцию:

$$(f_1 \otimes f_2)(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}, u_1, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_{q+s}) =$$

$$= f_1(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) \cdot f_2(v_{p+1}, \dots, v_{p+r}, u_{q+1}, \dots, u_{q+s})$$

Утверждение. T_p^q с введенными операциями - векторное пространство над полем F.

Утверждение.

- 1. $f_1 \otimes f_2 \in T^{q+s}_{p+r}(V)$
- 2. $Onepayus \otimes accoyumusha$

3.
$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \otimes f_3 = \alpha_1 (f_1 \otimes f_3) + \alpha_2 (f_2 \otimes f_3)$$

Отождествелние тензоров малых валентностей с известными объектами из линейной алгебры

Теорема.

1.
$$T_1^0(V) = V^*$$

2.
$$T_0^1(V) = (V^*)^* \equiv V$$

3. $T_2^0(V)$ - билинейные функции

4.
$$T_1^1(V) \equiv L(V)$$
 - линейные операторы на V .

Доказательство. Докажем что тензор типа (1,1) - это линейный оператор. Пусть $f \in T_1^1(V)$, то есть f = f(v,u), где $v \in V$, $u \in V^*$. Изоморфизм между V и V^{**} задавался правилом:

$$\forall v \in V : \varphi_v$$
 - линейная функция на $V^* : \forall u \in V^* \ \ \varphi_v(u) = u(v)$

При фиксированном v f(v,u) - линейная функция на V^* , а значит

$$\exists y_v = \varphi^{-1}(f(v, u))$$

где $y_v \in V$. Соответсвие $v \xrightarrow{\psi} y_v$ является линейным оператором на V, так как

$$f(v_1 + v_2, u) = u(y_{v_1 + v_2})$$

И

$$f(v_1 + v_2, u) = f(v_1, u) + f(v_2, u) = u(y_{v_1}) + u(y_{v_2}) = u(y_{v_1} + y_{v_2})$$

Также очевидно, что

$$\psi(\lambda v) = \lambda \psi(v)$$

Обратно: если $\varphi:V\to V$ - линейный оператор, то $f(v,u):=u(\varphi(v))$ - функция, линейная по v и u, то есть $f\in T^1_1(V)$. Значит, можем установить изоморфизм

$$T_1^1(V) \simeq L(V)$$

Правило Эйнштейна

Некоторые индексы пишутся снизу, а некоторые сверху: например, базисные векторы записываются как e_i (= $(e_1,...,e_n)$), а координаты векторов имеют верхние индексы, а также e^i (= $(e^1,...,e^n)$) - дуальный базис.

Также опускается знак суммирования. если один и тот же инвариантныедекс повторяется сверху и снизу: $x = x^i e_i$ подразумевает $\sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Матрицы линейных операторов по этому правилу можно записывать так: $A_{\varphi}=(a_{j}^{i}),$ где i - номер строки, j - номер столбца. Также:

- 1. $\operatorname{tr} A_{\varphi} = a_i^i$ (след матрицы);
- 2. $Y = A_{\varphi}X \Longrightarrow y^i = a^i_j x^j$ (умножение матрицы на вектор);
- 3. $b(x,y) = b_{ij}x^{i}y^{j}$ (билинейная форма)

Построение базиса в пространстве $T^q_p(V)$

Для любых значений $\{i_1,\ldots i_p,j_1,\ldots,j_q\}\in\{1,\ldots,n\}$ и чисел $p,q\in\mathbb{N}_0$ можно определить тензоры:

$$e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \in T_p^q(V)$$

$$(e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q})(e_{k_1}, ..., e_{k_p}, e^{l_1}, ..., e^{l_q}) =$$

$$= e^{i_1}(e_{k_1}) \cdot ... \cdot e^{i_p}(e_{k_p}) \cdot e_{j_1}(e^{l_1}) \cdot ... \cdot e_{j_q}(e^{l_q}) = \delta^{i_1}_{k_1} \cdot ... \cdot \delta^{i_p}_{k_p} \cdot \delta^{l_1}_{j_1} \cdot ... \cdot \delta^{l_q}_{j_q}(*)$$

Теорема. Тензоры вида $\{e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_p}\}$ образуют базис в пространстве $T_p^q(V)$, причем

$$\dim (T_p^q)(V) = n^{p+q}$$

Доказательство. Пусть $f \in T_p^q(V)$. Вычислим $f(v_1, ..., v_p; u^1, ..., u^q)$:

$$v_i = v_i^{k_i} e_{k_i}, \ i = 1, ..., p; u^j = u_{l_j}^j e^{l_j}, \ j = 1, ..., q;$$

Тогда:

$$f(..., v_i^{k_i} e_{k_i}, ...; ..., u_{l_j}^j e^{l_j}, ...) = f(e_{k_1}, ..., e_{k_p}; e^{l_1}, ..., e^{l_q}) v_1^{k_1} ... v_p^{k_p} u_{l_1}^1 ... u_{l_q}^q =$$

$$= f(e_{k_1}, ..., e_{k_p}; e^{l_1}, ..., e^{l_q}) e^{k_1} \otimes ... \otimes e^{k_p} \otimes e_{l_1} \otimes ... \otimes e_{l_q}(v_1, ..., v_p; u^1, ..., u^q)$$

в силу равенства (*). Это значит, что

$$f = f(e_{k_1}, ..., e_{k_p}; e^{l_1}, ..., e^{l_q})(e^{k_1} \otimes ... \otimes e^{k_p} \otimes e_{l_1} \otimes ... \otimes e_{l_q})$$

Коэффициенты, очевидно, определены однозначно при фиксированном базисе $e_1,...,e_n$, а значит $\{e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_p}\}$ - базис в пространстве $T_p^q(V)$. \square

Определение. Матрицей тензора f называется матрица $A^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p}$ такая, что $a^{l_1,...,l_q}_{k_1,...,k_p}:=f(e_{k_1},...,e_{k_p};e^{l_1},...,e^{l_q}).$

Закон изменения матрицы координат тензора при замене базиса

Пусть
$$(e'_1,...,e'_n)=(e_1,...,e_n)C,$$
 $\begin{pmatrix} e'^1\\ \vdots\\ e'^n \end{pmatrix}=D\begin{pmatrix} e^1\\ \vdots\\ e^n \end{pmatrix}.$ Тогда:

$$DC = D \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} (e_1, ..., e_n)C = \begin{pmatrix} e'^1 \\ \vdots \\ e'^n \end{pmatrix} (e'_1, ..., e'_n) = E \Rightarrow D = C^{-1}$$

Отсюда:

$$f = A_{i_1,...,i_p}^{j_1,...,j_q} x_1^{i_1} ... x_p^{i_p} u_{j_1}^1 ... u_{j_q}^q$$
$$x_k^{i_k} = c_{i'_k}^{i_k} x_k'^{i'_k}; \quad u_{j_l}^l = d_{j_l}^{j'_l} u_{j'_l}'^l$$

Отсюда новые коэффициенты линейной формы:

$$(u'_1, ..., u'_n) = (u_1, ..., u_n)C \Longrightarrow (u_1, ..., u_n) = (u'_1, ..., u'_n)D$$

Итак, в новом базисе

$$f = A^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p} c^{i_1}_{i'_1} \dots c^{i_p}_{i'_p} d^{j'_1}_{j_1} \dots d^{j'_q}_{j_q} x'^{i'_1}_{1} \dots x'^{i'_p}_{p} u'^{1}_{j'_1} \dots u'^{q}_{j'_q}$$