



Механико-математический факультет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, 2 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва
Последняя компиляция: 7 февраля 2025 г.

Содержание

1	Векторное пространство	2
1.1	Изменение координат вектора при замене базиса	4
2	Векторные подпространства	4

1 Векторное пространство

Определение 1. Множество V называется *векторным пространством* над полем F , если заданы операции " + " и " · " : $V \times V \rightarrow V$, $F \times V \rightarrow V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V : v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V \exists 1 \in F : 1 \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Загадка: Одна из этих аксиом - следствие других. Какая?

Определение 2. $U \in V$ - *векторное подпространство* пространства V , если оно само является пространством относительно тех же операций в V .

Утверждение. *Определение 2 эквивалентно:*

1. $\forall U \neq 0$
2. $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \lambda \in F : \lambda u \in U$

Определение 3. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно независимыми*, если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ (не все равные 0) : $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$

Утверждение. *Определение 3 $\iff (n \geq 2)$ хотя бы один вектор из векторов v_i выражается как линейная комбинация остальных.*

Определение 4. *Упорядоченный набор векторов $e = (e_1, \dots, e_n), e_k \in V$, если это максимально ЛНЗ набор векторов V .*

Утверждение. *e - базис в $V \iff$*

1. e_1, \dots, e_n - ЛНЗ

2. $\forall x \in V \exists x_1, \dots, x_n \in F : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Следствие. Разложение любого вектора в базисе единственно.

Доказательство. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$, то $\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) e_i$

Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем: $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$, тогда $x = eX_e = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \quad (1)$$

Теорема. Если в $V \exists$ базис из k векторов, то любой базис V содержит k векторов.

Доказательство.

Если \exists базис $e'_1, \dots, e'_m \in V$, где $m > n$, то по ОЛЛЗ e'_1, \dots, e'_m - ЛЗ, т.е. не базис.

Если же $m < n$, то по ОЛЛЗ (в другую сторону) e_1, \dots, e_n - ЛЗ \implies не базис. □

Свойства. матриц перехода

1. $\det C \neq 0$

2. $C_{e' \rightarrow e} = (C_{e \rightarrow e'})^{-1}$

3. $C_{e'' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$

Доказательство.

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов $e'_1, \dots, e'_n \implies rkC = n \implies \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.

По определению:

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C_{e \rightarrow e'}, \text{ т.е. } e' = e C_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{e' = e C_{e \rightarrow e'}} \quad (2)$$

С другой стороны

$$C = e' C_{e' \rightarrow e} = e C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} \implies C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \rightarrow e'} = (C_{e' \rightarrow e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e' C_{e' \rightarrow e''} = e(C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}) = e C_{e \rightarrow e''}$$

В силу единственности разложения $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}$

□

Алгоритм. Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов e_i и e'_j в некотором универсальном?

$e' = e C_{e \rightarrow e'}$ можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow) C = (e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow)$$

$$[e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow \mid e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \rightarrow e'}]$$

1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

Теорема. Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$\boxed{X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}} \quad (3)$$

Доказательство.

$$\forall x \in V : x = e X_e = e' X_{e'} = e C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

$$\implies X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

□

2 Векторные подпространства

Примеры.

1. Геометрические векторы
2. F^n - пространство слобцов (строк) высоты (длины) n с естественными операциями $(+, \cdot \lambda)$

$$\text{Базис } \vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{можно взять столбцы любой}$$

невырожденной матрицы порядка n)

Замечание. Доказать, что если e - базис, C - невырожденная матрица, то eC - тоже базис (из **(2)**)

Упражнение. Пусть $|F| = q$, $\dim_F V = n \implies |V| = q^n$
 $\dim M_{m,n} = mn$, стандартный базис - $\{E_{ij}\}$, где E_{ij} содержит 1 на ij -ой позиции и 0 на остальных.

3) $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$ с операциями сложения и λF

Оно бесконечномерно, если X бесконечно.

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - попарно различные числа, то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ ЛНЗ

Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 y_1' + \dots + \lambda_n C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$