



Механико-математический факультет

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, 2 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	<a href="#">Мой телеграм для связи</a>

Москва  
Последняя компиляция: 19 февраля 2025 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Векторное пространство</b>	<b>2</b>
1.1	Изменение координат вектора при замене базиса . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Векторные подпространства</b>	<b>4</b>
2.1	Примеры . . . . .	4
2.2	Два основных способа задания подпространства в $V$ . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Пересечение и сумма подпространств</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Прямая сумма подпространств и пространств</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Линейные отображения и функции</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Линейные функции</b>	<b>14</b>

# 1 Векторное пространство

**Определение.** Множество  $V$  называется *векторным пространством* над полем  $F$ , если заданы операции " + " и "  $\cdot$  " :  $V \times V \rightarrow V$ ,  $F \times V \rightarrow V$  и выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2.  $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V : v + \vec{0} = v$
3.  $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4.  $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6.  $\forall v \in V \exists 1 \in F : 1 \cdot v = v$
7.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8.  $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

*Загадка:* Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? (*Примечание: скоро тут будет разгадка*)

**Определение.**  $U \subset V$  - *векторное подпространство* пространства  $V$ , если оно само является пространством относительно тех же операций в  $V$ .

**Утверждение.** *Определение 2 эквивалентно:*

1.  $\forall U \neq \emptyset$
2.  $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
3.  $\forall u \in U, \lambda \in F : \lambda u \in U$

**Определение.** Векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  называются *линейно независимыми*, если  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$  (не все равные 0) :  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$

**Утверждение.** *Определение 3  $\iff (n \geq 2)$  хотя бы один вектор из векторов  $v_i$  выражается как линейная комбинация остальных.*

**Определение.** *Упорядоченный набор векторов  $e = (e_1, \dots, e_n), e_k \in V$ , если это максимальный ЛНЗ набор векторов из  $V$ .*

**Утверждение.**  *$e$  - базис в  $V \iff$*

1.  $e_1, \dots, e_n$  - ЛНЗ

2.  $\forall x \in V \exists x_1, \dots, x_n \in F : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

**Следствие.** Разложение любого вектора в базисе единственно.

*Доказательство.* Если  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$ , то  $\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) e_i$

Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем:  $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$ , тогда  $x = eX_e = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \quad (1)$$

**Теорема.** Если в  $V \exists$  базис из  $k$  векторов, то любой базис  $V$  содержит  $k$  векторов.

*Доказательство.*

Если  $\exists$  базис  $e'_1, \dots, e'_m \in V$ , где  $m > n$ , то по ОЛЛЗ  $e'_1, \dots, e'_m$  - ЛЗ, т.е. не базис.

Если же  $m < n$ , то по ОЛЛЗ (в другую сторону)  $e_1, \dots, e_n$  - ЛЗ  $\implies$  не базис. □

**Свойства.** матриц перехода

1.  $\det C \neq 0$

2.  $C_{e' \rightarrow e} = (C_{e \rightarrow e'})^{-1}$

3.  $C_{e'' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$

*Доказательство.*

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов  $e'_1, \dots, e'_n \implies rkC = n \implies \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.

По определению:

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C_{e \rightarrow e'}, \text{ т.е. } e' = e C_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{e' = e C_{e \rightarrow e'}} \quad (2)$$

С другой стороны

$$C = e' C_{e' \rightarrow e} = e C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} \implies C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \rightarrow e'} = (C_{e' \rightarrow e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e' C_{e' \rightarrow e''} = e(C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}) = e C_{e \rightarrow e''}$$

В силу единственности разложения  $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}$

□

**Алгоритм.** Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов  $e_i$  и  $e'_j$  в некотором универсальном?

$e' = e C_{e \rightarrow e'}$  можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow) C = (e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow)$$

$$[e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow \mid e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \rightarrow e'}]$$

## 1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

**Теорема.** Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$\boxed{X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}} \quad (3)$$

*Доказательство.*

$$\forall x \in V : x = e X_e = e' X_{e'} = e C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

$$\implies X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

□

## 2 Векторные подпространства

### 2.1 Примеры

1. Геометрические векторы
2.  $F^n$  - пространство столбцов (строк) высоты (длины)  $n$  с естественными операциями  $(+, \cdot \lambda)$

Базис  $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  (можно взять столбцы любой

невыврожденной матрицы порядка  $n$ )

*Замечание.* Доказать, что если  $e$  - базис,  $C$  - невырожденная матрица, то  $eC$  - тоже базис (из (2))

**Упражнение.** Пусть  $|F| = q$ ,  $\dim_F V = n \implies |V| = q^n$   
 $\dim M_{m,n} = mn$ , стандартный базис -  $\{E_{ij}\}$ , где  $E_{ij}$  содержит 1 на  $ij$ -ой позиции и 0 на остальных.

3.  $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$  с операциями сложения и  $\lambda F$

Оно бесконечномерно, если  $X$  бесконечно.

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - попарно различные числа, то  $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$  ЛНЗ  
 Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y'_1 + \dots + C_n y'_n \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 y'_1 + \dots + \lambda_n C_n y'_n \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \implies C_1 = \dots = C_n = 0$$

4.  $F[t]$  с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.:  $\forall n \in N_0 : 1, t, t^2, \dots$  - линейно независимы.  
 $F[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \mid a_k \in F, k = 0, \dots, n; n \in N_0\}$  - подпространство,  $\dim U = n + 1$ , базис:  $1, t, \dots, t^n$   
 Тейлоровский базис:  $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n; \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$

5.  $\Omega \neq \emptyset, V = 2^\Omega$  с операциями вместо сложения:

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2, 0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$$

**Упражнение.** Доказать, что  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{Z}_2$

## 2.2 Два основных способа задания подпространства в $V$

1. Линейная оболочка семейства векторов  $S \subset V$ :

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F \right\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F \right\} = U$$

**Утверждение.**  $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \subseteq V \implies \dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle = rk\{a_1, \dots, a_m\}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu \lambda_i) a_i \\ \sum_{i=1}^m \mu_i a_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U \end{aligned}$$

Если  $r = rk\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ , то  $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$  - базисные, то  $\forall a_i$  через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \implies \{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\} - \text{базис } U$$

□

**Алгоритм.** Алгоритм вычисления  $\dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle$  и базиса, если известны координаты этих векторов:

1) Составить матрицу:

$$(a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left( \begin{array}{ccc|c} & \overbrace{j_1 \dots j_r} & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

2) Столбцы с номерами  $j_1, \dots, j_r$  - базис в  $U$ , разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы

**2.** ( $\dim V = n$ , известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^n X_i e_i = eX, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x = eX \mid AX = 0\} - \text{задание с помощью ОСЛУ}$$

**Утверждение.**  $W$  - подпространство в  $V$ ,  $\dim W = n - rkA$ , базис - любая ФСР (это переход от **2.** к **1.** способу задания подпространства).

**Теорема.** Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве  $V$  можно задать с помощью ОСЛУ.

*Доказательство.* Два способа:

1) Вектор  $x$  (со столбцами координат  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ ):

$$x \in \langle a_1, \dots, a_m \rangle = U$$

$$\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i^\uparrow = X$$

т.е. СЛУ с  $\tilde{A} = (a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow \mid \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix})$  совместна  $\iff$  после алгоритма Гаусса:

$$\tilde{A} \longrightarrow \left( \begin{array}{c|c} K & \sum_j C_{kj} X_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ & \sum C_{nj} X_j = 0 \end{array} \right)$$

$(K)$  имеет ступенчатый вид, а  $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1} X_j = 0 \\ \sum C_{nj} X_j = 0 \end{pmatrix}$  - нужная нам система.

**Упражнение.** Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ:  $\begin{matrix} C & X = 0, & rkC = r \\ (r \times n) \end{matrix}$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (E_r \mid D) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + \dots + d_{kn}x_n) \end{cases} \quad k = 1, \dots, r$$

Фундаментальная матрица:  $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов  $a_1, \dots, a_r$ :

$$\begin{pmatrix} a_1^\rightarrow \\ \vdots \\ a_r^\rightarrow \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} (M \mid E_r) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу:  $C = (E_{n-r} \mid -M^T)$   
Пространство  $\{X \mid CX = 0\}$  имеет размерность  $n - (n - r) = r$

□



### 3 Пересечение и сумма подпространств

**Утверждение.**

1. Если  $U_i$  ( $i \in I$ ) - подпространство  $V$ , то  $W = \bigcap_{i \in I} U_i$  - тоже подпространство в  $V$
2. Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств. (РИСУНОК)

*Доказательство.* 1.  $\overline{Q} \in W$ , т.к.  $\overline{Q} \in U_i, \forall i \in I$ .

Если  $x, y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Если  $x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \implies \lambda x \in U_i, \forall i \in I \implies x \in \bigcap_{i \in I} U_i$  □

*Замечание.* Если  $U_1, U_2$  - подпространства в  $V$  и  $Q$  - любое подпространство, которое содержит  $U_1$  и  $U_2$ , то оно содержит и сумму  $u_1 + u_2$ , если  $u_i \in U_i, i = 1, 2$

*Замечание.* Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_m \subseteq V$  назовем:

$$U_1 + \dots + U_m = \{x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

**Утверждение.**  $U_1 + \dots + U_m$  - подпространство в  $V$

**Теорема.** (Формула Грассмана)

Если  $U_1, U_2$  - подпространства в  $V$ ,  $\dim U_1 < \infty, \dim U_2 < \infty$ , то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

*Доказательство.* Пусть  $\dim U_i = n_i, \dim(U_1 \cap U_2) = s$  Выберем  $c_1, \dots, c_s$  - базис  $U_1 \cap U_2$ , дополним до базиса в  $U_1$  векторами  $a_1, \dots, a_{n_1-s}$  и до базиса в  $U_2$  векторами  $b_1, \dots, b_{n_2-s}$ .

Тогда векторы  $c_1, \dots, c_s, a_1, \dots, a_{n_1-s}, b_1, \dots, b_{n_2-s}$  - образуют базис в  $U_1 + U_2$

1. Они порождают  $U_1 + U_2$  :

$$\forall u = u_1 + u_2 = (\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i) + (\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = - \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по  $\{c_j\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow a_i$  - ЛНЗ

$\Rightarrow \forall i : \alpha_i = 0$

Тогда  $\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0 \Rightarrow \{b_k, \gamma_j\}$  - ЛНЗ  $\Rightarrow \forall k, j : \beta_k = \gamma_j = 0$

**Алгоритм.** Пусть  $U_1 = \langle a_1, \dots, a_{n_1} \rangle$ ,  $U_2 = \langle b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$  известны координаты. Составим матрицу:

$$\left( A \mid B \right) = \left( a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_{n_2}^\uparrow \right)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$$

$$\left( A \mid B \right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left( a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{n_2-m}^\uparrow \right)$$

Можно записать:

$$b_i = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k \Rightarrow b_j - \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

□

**Упражнение.** Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

## 4 Прямая сумма подпространств и пространств

**Определение.** Сумма  $U_1 + \dots + U_m$  подпространств  $U_i \subset V$ ,  $1 \leq i \leq m$  называется прямой суммой, если  $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$  представим в виде:

$u = u_1 + \dots + u_m$  ( $u_i \in U_i$ ) единственным образом

Пусть  $m = 2$ ,  $V$  - конечномерное пространство,  $U_{1,2}$  - подпространства  $V$

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

1.  $U = U_1 + U_2$  - прямая сумма
2.  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
3.  $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис  $U_1 + U_2$  - объединение базисов слагаемых

*Доказательство.*

1.  $\rightarrow$  2. Допустим  $u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow v = v + 0 = 0 + v \Rightarrow v = 0$

2.  $\rightarrow$  3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_0$$

3.  $\rightarrow$  4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 &\Rightarrow \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\} \\ &\Rightarrow \text{все } a_i \text{ и } b_i \text{ равны нулю} \end{aligned}$$

4.  $\rightarrow$  1.  $\forall u \in U_1 + U_2$  :

$$u = \left( \sum_i \alpha_i a_i \right) + \left( \sum_j \beta_j b_j \right)$$

- разложение по базису единственно

□

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

1.  $U = U_1 + U_2$  - прямая сумма
2.  $\forall i, 1 \leq i \leq m, U_i \cap \left( \sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}$
3.  $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис  $U_1 + U_2$  - объединение базисов слагаемых

**Упражнение.** Доказать

**Пример.** того, что условия  $U_i \cap U_j = \{0\}, i \neq j$  недостаточно для прямой суммы: (РИСУНОК)

$v_1, v_2, v_3$  - ЛЗ  $\Rightarrow$  представление не единственным образом

**Лемма.** Любой ЛНЗ набор векторов  $a_1, \dots, a_m$  в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  ( $m < n$ ) можно дополнить до базиса в  $V$ .

*Доказательство.* 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе  $e_1, \dots, e_n \Rightarrow rk\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & E_n \end{array} \right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left( \begin{array}{ccc|c|c} a_1^\uparrow & \cdots & a_m^\uparrow & e_{i,1}^\uparrow & e_{j,n-m}^\uparrow & \cdots \end{array} \right)$$

Тогда к векторам  $a_1, \dots, a_m$  надо добавить  $e_{j,1}, \dots, e_{j,n-m}$

□

**Определение.** Если  $U$  - подпр-во в  $V$  ( $0 \neq U \neq V$ ) и  $\exists W \subset V : V = U \oplus W$ , то  $W$  - прямое дополнение к  $U$ .

**Следствие.** Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве  $\exists$  прямые дополнения.

*Доказательство.*  $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \implies \exists a_{m+1}, \dots, a_n : \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  - базис в  $V$ , тогда  $W = \langle a_{m+1}, \dots, a_n \rangle$  □

**Определение.** Пусть  $V_1, \dots, V_k$  ( $k \geq 2$ ) - векторы пространства над одним и тем же полем  $\mathbb{F}$ , тогда:

$$V = V_1 \times \dots \times V_k = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{внешняя прямая сумма}$$

Обозначение:  $\bigoplus$

*Замечание.* Внешнюю прямую сумму  $V = V_1 \bigoplus \dots \bigoplus V_k$  можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V'_i = \{0, \dots, v_i, \dots, 0\} - \text{подпространство в } V$$

Запись  $v_1, \dots, v_k \stackrel{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, v_k)$  показывает, что  $V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_k$  - единственно.

$$\text{В частности } \dim(V_1) \bigoplus \dots \bigoplus V_k = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

## Фактор пространства

**Определение.** Пусть  $U \subset V$  - подпространство. Скажем, что  $V_1 \sim V_2$  по модулю  $U$ , если  $v_1 - v_2 \in U$  ( $v_1, v_2 \in V$ ). Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по  $U$ , где  $v$  - представитель

$$* V/U = \{\underbrace{v + U}_{\bar{v}} \mid v \in V\}$$

**Утверждение.**  $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  : Если  $v_1 \sim v_2$ , то  $\exists u_0 \in U : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \implies v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \quad \forall u \in U \quad v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \implies v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

$\Leftarrow$  : Если  $v_1 + U = v_2 + U$ , то  $\exists u_1 \in U : v_1 = v_2 + u_1 \implies v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

**Определение.**  $v + U$  - смежный класс элемента  $v$  по  $U$  :  $\bar{v} := v + U$

**Определение.**  $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$  - факторпространство  $V$  по  $U$ .

**Определение.** Структура векторного пространства на  $V/U$ :

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda \bar{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

**Определение.**  $\dim(V/U)$  называется коразмерностью подпространства  $U$  в  $V$   
Обозначается:  $\text{Codim}_V U$

**Пример.** Пусть  $V = C[a, b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]\} \implies \text{Codim}_V U = 1$$

**Теорема.**

1. Данные операции задают на  $V/U$  векторное пр-во;
2. Если  $\dim V < \infty$ , то  $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

*Доказательство.*

1) Проверим корректность определений.

Если  $v'_1 = v_1 + \bar{u}_1$ ,  $v'_2 = v_2 + \bar{u}_2$ ,  $\bar{u}_i \in U$ ,  $i = 1, 2$  :

$$v'_1 + v'_2 = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v'_1 + v'_2 \sim v_1 + v_2, \text{ т.е. } v'_1 + v'_2 + \underline{\underline{U}} = v_1 + v_2 + \underline{\underline{U}}$$

$$\overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2}$$

т.е. определение не зависит от выбора элемента в классе.

Если

$$v' = v + u, u \in U \implies \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \implies \lambda v \sim \lambda v'; \quad \bar{0} \in U; \quad -\bar{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполнены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис  $a_1, \dots, a_m$  в  $U$

Если  $U = V$ , т.е.  $m = n = \dim V$ , то  $V \setminus U = \{0\} \implies \dim(V \setminus U) = n - n = 0$

Пусть  $m < n$ , можно дополнить базис  $U$  до базиса  $a_{m+1}, \dots, a_n$  в  $V$ , тогда классы  $\overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  образуют базис в  $V \setminus U$

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j$$

$$\bar{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^n \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \bar{a_j}$$

$\implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  порождают  $V \setminus U$

Проверим ЛНЗ:

$$\exists \lambda_j \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \bar{a_j} = 0 \iff \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j \in U$$

$$\exists \mu_i \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0$$

Т.к.  $\{a_1, \dots, a_n\}$  ЛНЗ, то  $\lambda_j = 0, \mu_i = 0, \forall i, j \implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  - ЛНЗ

□

## 5 Линейные отображения и функции

Пусть  $V_1, V_2$  - векторные пространства над полем  $\mathbb{F}$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  называется линейным отображением  $V_1$  в  $V_2$ , если:

1.  $\forall v_1, v'_1 \in V_1 : \varphi(v_1 + v'_1) = \varphi(v_1) + \varphi(v'_1);$
2.  $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v);$

Из курса I семестра известно, что  $\varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$

Обозначается:  $\text{Ker}(\varphi)$  - ядро  $\varphi$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\}, \text{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$$

## 6 Линейные функции

Пусть  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{F}$

**Определение.** Отображение  $f : V \rightarrow \mathbb{F}$  - линейная функция со значениями в  $\mathbb{F}$ , если:

1.  $\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2.  $\forall v \in V, \forall \lambda : f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается:  $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{F}\}$  - множество линейных функций на  $V$

*Замечание.*  $V_2 = \mathbb{F}$ ,  $\dim V_2 = 1$

**Лемма.** Если  $f \neq 0$ , то  $\text{Ker}(f)$  имеет в  $V$  коразмерность = 1

*Доказательство.* Пусть  $\exists v_1 \in V, f(v_1) \neq 0$ . Пусть  $v \in V$ , либо  $v \in \text{Ker}(f)$ , либо  $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \implies f\left(\frac{v_1}{\beta}\right) = 1, f\left(\alpha - \frac{v_1}{\beta}\right) = \alpha$$

Рассмотрим выражение  $r - \frac{\alpha}{\beta}v_1$ :

$$f\left(r - \frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = f(v) - f\left(\frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = \alpha - \alpha = 0$$

$\implies r - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \text{Ker}(f)$  и  $v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u, u \in \text{Ker}(f)$  □

*Замечание.*  $\forall x \in V : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$  и  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

**Лемма.** Множество  $V^*$  с введенными операциями - векторное пространство.

**Определение.**  $V^*$  - векторное пространство, сопряженное к  $V$  ??? (не разобрал, что написано)