



Механико-математический факультет

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, 2 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Преподаватель:	Чубаров Игорь Андреевич
Студент:	Молчанов Вячеслав
Группа:	108
Контакт:	<a href="#">Мой телеграм для связи</a>

Москва  
Последняя компиляция: 28 марта 2025 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Векторное пространство</b>	<b>2</b>
1.1	Изменение координат вектора при замене базиса . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Векторные подпространства</b>	<b>5</b>
2.1	Примеры . . . . .	5
2.2	Два основных способа задания подпространства в $V$ . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Пересечение и сумма подпространств</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Прямая сумма подпространств и пространств</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Линейные отображения и функции</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Линейные функции</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Линейные отображения и их матрицы</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Матрицы линейного отображения</b>	<b>19</b>
8.1	Изменение матрицы линейного отображения при замене координат . . . . .	19
<b>9</b>	<b>Линейные операторы</b>	<b>21</b>
<b>10</b>	<b>Действия над линейными отображениями</b>	<b>24</b>
<b>11</b>	<b>Собственные векторы и собственные значения оператора</b>	<b>26</b>
<b>12</b>	<b>Диагонализируемость</b>	<b>27</b>
12.1	Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением . . . . .	28
<b>13</b>	<b>Анулирующие многочлены линейных операторов</b>	<b>32</b>
13.1	Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора . . . . .	34
<b>14</b>	<b>Корневые подпространства</b>	<b>36</b>
<b>15</b>	<b>Теорема Жордана</b>	<b>38</b>
15.1	Изображение разложения корневых подпространств . . . . .	42
15.2	Решение СЛАУ . . . . .	45
15.3	Решение СЛДУ . . . . .	45
15.4	Функции от матриц . . . . .	46
15.5	Вычисление корня и экспоненты . . . . .	47
<b>16</b>	<b>Билинейные и квадратичные формы</b>	<b>48</b>
16.1	Запись билинейной функции в координатах . . . . .	48
16.2	Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса . . . . .	49
16.3	Квадратичные формы . . . . .	51
16.4	Знакоопределённые квадратичные формы . . . . .	54

# 1 Векторное пространство

**Определение.** Множество  $V$  называется *векторным пространством* над полем  $F$ , если заданы операции " + " и "  $\cdot$  " :  $V \times V \rightarrow V$ ,  $F \times V \rightarrow V$  и выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2.  $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V : v + \vec{0} = v$
3.  $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4.  $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6.  $\forall v \in V \exists 1 \in F : 1 \cdot v = v$
7.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8.  $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

*Загадка:* Одна из этих аксиом - следствие других. Какая?

*Доказательство.* Сначала докажем два свойства.

1.  $0 \cdot \bar{a} = 0 \cdot \bar{a} + \bar{0} = 0 \cdot \bar{a} + (0 \cdot \bar{a} + (-0 \cdot \bar{a})) = (0 \cdot \bar{a} + 0 \cdot \bar{a}) + (-0 \cdot \bar{a})$  (по аксиоме ассоциативности)  $= 0 \cdot \bar{a} + (-0 \cdot \bar{a}) = \bar{0}$
2.  $(-1)\bar{a} + \bar{0} = (-1)\bar{a} + (\bar{a} + (-\bar{a})) = ((-1)\bar{a} + \bar{a}) + (-\bar{a})$  (по аксиоме ассоциативности)  $= 0 \cdot \bar{a} + (-\bar{a}) = -\bar{a}$ .

Теперь докажем первую аксиому (аксиому коммутативности).

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{0} = (\bar{a} + \bar{b}) + (-(\bar{b} + \bar{a}) + (-(-(\bar{b} + \bar{a})))) =$$

(по второму свойству)

$$= (\bar{a} + \bar{b}) + (-(\bar{b} + \bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a})) =$$

(по аксиоме ассоциативности)

$$\begin{aligned} &= (\bar{a} + \bar{b} + (-(\bar{b} + \bar{a}))) + (\bar{b} + \bar{a}) = (((\bar{a} + \bar{b}) + (-\bar{b}))) + (-\bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a}) = \\ &= ((\bar{a} + (\bar{b} + (-\bar{b})))) + (-\bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a}) = ((\bar{a} + \bar{0}) + (-\bar{a})) + (\bar{b} + \bar{a}) = \\ &(\bar{a} + (-\bar{a})) + (\bar{b} + \bar{a}) = \bar{0} + (\bar{b} + \bar{a}) = \bar{b} + \bar{a} \end{aligned}$$

□

*Замечание.* Любое поле можно рассматривать как векторное пространство над собой размерности 1:  $V_2 = \mathbb{F}$ ,  $\dim V_2 = 1$ .

**Определение.**  $U \subset V$  - векторное подпространство пространства  $V$ , если оно само является пространством относительно тех же операций в  $V$ .

**Утверждение.** Определение 2 эквивалентно:

1.  $U \neq \emptyset$
2.  $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
3.  $\forall u \in U, \lambda \in F : \lambda u \in U$

**Определение.** Векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  называются линейно зависимыми, если  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$  (не все равные 0) :  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$

**Утверждение.** Определение 3  $\iff (n \geq 2)$  хотя бы один вектор из векторов  $v_i$  выражается как линейная комбинация остальных.

**Определение.** Упорядоченный набор векторов  $e = (e_1, \dots, e_n), e_k \in V$  называется базисом  $V$ , если  $e$  - максимальный ЛНЗ набор векторов из  $V$ .

**Утверждение.**  $e$  - базис в  $V \iff$

1.  $e_1, \dots, e_n$  - ЛНЗ
2.  $\forall x \in V \exists x_1, \dots, x_n \in F : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

**Следствие.** Разложение любого вектора в базисе единственно.

*Доказательство.* Если  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$ , то  $\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) e_i$

Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем:  $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$ , тогда  $x = eX_e = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

**Теорема.** Если в  $V \exists$  базис из  $k$  векторов, то любой базис  $V$  содержит  $k$  векторов.

*Доказательство.*

Если  $\exists$  базис  $e'_1, \dots, e'_m \in V$ , где  $m > n$ , то по ОЛЛЗ  $e'_1, \dots, e'_m$  - ЛЗ, т.е. не базис. Если же  $m < n$ , то по ОЛЛЗ (в другую сторону)  $e_1, \dots, e_n$  - ЛЗ  $\implies$  не базис.  $\square$

**Свойства.** матриц перехода

$$1. \det C \neq 0$$

$$2. C_{e' \rightarrow e} = (C_{e \rightarrow e'})^{-1}$$

$$3. C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$$

*Доказательство.*

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов  $e'_1, \dots, e'_n \implies rk C = n \implies \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.

По определению:

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C_{e \rightarrow e'}, \text{ т.е. } e' = e C_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{e' = e C_{e \rightarrow e'}} \quad (2)$$

С другой стороны

$$e = e' C_{e' \rightarrow e} = e C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} \implies C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \rightarrow e'} = (C_{e' \rightarrow e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e' C_{e' \rightarrow e''} = e (C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}) = e C_{e \rightarrow e''}$$

В силу единственности разложения  $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}$

$\square$

**Алгоритм.** Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов  $e_i$  и  $e'_j$  в некотором универсальном базисе?

$e' = e C_{e \rightarrow e'}$  можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow) C = (e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow)$$

$$[e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow \mid e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \rightarrow e'}]$$

## 1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

**Теорема.** Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$\boxed{X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}} \quad (3)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall x \in V : x = eX_e = e'X_{e'} = eC_{e \rightarrow e'}X_{e'} \\ \implies X_e = C_{e \rightarrow e'}X_{e'} \end{aligned}$$

□

## 2 Векторные подпространства

### 2.1 Примеры

1. Геометрические векторы
2.  $F^n$  - пространство столбцов (строк) высоты (длины)  $n$  с естественными операциями  $(+, \cdot \lambda)$

Базис  $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  (можно взять столбцы любой

невыврожденной матрицы порядка  $n$ )

*Замечание.* Доказать, что если  $e$  - базис,  $C$  - невырожденная матрица, то  $eC$  - тоже базис (из (2))

**Упражнение.** Пусть  $|F| = q$ ,  $\dim_F V = n \implies |V| = q^n$

$\dim M_{m,n} = mn$ , стандартный базис -  $\{E_{ij}\}$ , где  $E_{ij}$  содержит 1 на  $ij$ -ой позиции и 0 на остальных.

3.  $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$  с операциями сложения и  $\lambda F$

Оно бесконечномерно, если  $X$  бесконечно.

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - попарно различные числа, то  $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$  ЛНЗ

Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y'_1 + \dots + C_n y'_n \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \implies C_1 = \dots = C_n = 0$$

4.  $F[t]$  с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.:  $\forall n \in N_0 : 1, t, t^2, \dots$  - линейно независимы.  $F[t]_n = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \mid a_k \in F, k = 0, \dots, n; n \in N_0\}$  - подпространство,  $\dim U = n + 1$ , базис:  $1, t, \dots, t^n$   
Тейлоровский базис:  $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n; \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$

5.  $\Omega \neq \emptyset, V = 2^\Omega$  с операциями вместо сложения:

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2, 0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$$

**Упражнение.** Доказать, что  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{Z}_2$

## 2.2 Два основных способа задания подпространства в $V$

1. Линейная оболочка семейства векторов  $S \subset V$ :

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F \right\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F \right\} = U$$

**Утверждение.**  $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \subseteq V \implies \dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle = rk\{a_1, \dots, a_m\}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu \lambda_i) a_i \\ \sum_{i=1}^m \mu_i a_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U \end{aligned}$$

Если  $r = rk\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ , то  $a_{j1}, \dots, a_{jr}$  - базисные, то  $\forall a_i$  через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \implies \{a_{j1}, \dots, a_{jr}\} - \text{базис } U$$

□

**Алгоритм.** Алгоритм вычисления  $\dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle$  и базиса, если известны координаты этих векторов:

1) Составить матрицу:

$$(a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left( \begin{array}{ccc|c} & \overbrace{j_1 \dots j_r} & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

2) Столбцы с номерами  $j_1, \dots, j_r$  - базис в  $U$ , разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы

**2.** ( $\dim V = n$ , известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^n x_i e_i = eX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x = eX \mid x \in V, AX = 0\} - \text{задание с помощью ОСЛУ}$$

**Утверждение.**  $W$  - подпространство в  $V$ ,  $\dim W = n - rkA$ , базис - любая ФСР (это переход от **2.** к **1.** способу задания подпространства).

**Теорема.** Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве  $V$  можно задать с помощью ОСЛУ.

*Доказательство.* Два способа:

1) Вектор  $x$  (со столбцом координат  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ):

$$x \in \langle a_1, \dots, a_m \rangle = U$$

$$\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i^\uparrow = x$$

т.е. СЛУ с  $\tilde{A} = (a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix})$  совместна  $\iff$  после алгоритма Гаусса:

$$\tilde{A} \longrightarrow \left( \begin{array}{c|c} K & \sum_j C_{kj} x_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1,j} x_j = 0 \\ & \sum C_{nj} x_j = 0 \end{array} \right)$$



$(K)$  имеет ступенчатый вид, а  $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1,j}x_j = 0 \\ \sum C_{nj}x_j = 0 \end{pmatrix}$  - нужная нам система.

**Упражнение.** Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ:  $\underset{(r \times n)}{C} X = 0, rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (E_r \mid D) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + \dots + d_{kn}x_n) \end{cases} \quad k = 1, \dots, r$$

Фундаментальная матрица:  $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов  $a_1, \dots, a_r$ :

$$\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_r} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} (M \mid E_r) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу:  $C = (E_{n-r} \mid -M^T)$   
 Пространство  $\{X \mid CX = 0\}$  имеет размерность  $n - (n - r) = r$

□

### 3 Пересечение и сумма подпространств

**Утверждение.**

1. Если  $U_i$  ( $i \in I$ ) - подпространство  $V$ , то  $W = \bigcap_{i \in I} U_i$  - тоже подпространство в  $V$
2. Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств.



*Доказательство.* 1.  $\bar{0} \in W$ , т.к.  $\bar{0} \in U_i, \forall i \in I$ .

Если  $x, y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Если  $x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \implies \lambda x \in U_i, \forall i \in I \implies \lambda x \in \bigcap_{i \in I} U_i$  □

*Замечание.* Если  $U_1, U_2$  - подпространства в  $V$  и  $Q$  - любое подпространство, которое содержит  $U_1$  и  $U_2$ , то оно содержит и сумму  $u_1 + u_2$ , если  $u_i \in U_i, i = 1, 2$

**Определение.** Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_m \subseteq V$  назовем:

$$U_1 + \dots + U_m = \{x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

**Утверждение.**  $U_1 + \dots + U_m$  - подпространство в  $V$

**Теорема.** (Формула Грассмана)

Если  $U_1, U_2$  - подпространства в  $V$ ,  $\dim U_1 < \infty, \dim U_2 < \infty$ , то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

*Доказательство.* Пусть  $\dim U_i = n_i, \dim(U_1 \cap U_2) = s$  Выберем  $c_1, \dots, c_s$  - базис  $U_1 \cap U_2$ , дополним до базиса в  $U_1$  векторами  $a_1, \dots, a_{n_1-s}$  и до базиса в  $U_2$  векторами  $b_1, \dots, b_{n_2-s}$ .

Тогда векторы  $c_1, \dots, c_s, a_1, \dots, a_{n_1-s}, b_1, \dots, b_{n_2-s}$  - образуют базис в  $U_1 + U_2$

1. Они порождают  $U_1 + U_2$  :

$$\forall u = u_1 + u_2 = \left( \sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i \right) + \left( \sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i \right)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = - \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по  $\{c_j\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow a_i$  - ЛНЗ

$$\Rightarrow \forall i : \alpha_i = 0$$

Тогда  $\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0 \Rightarrow \{b_k, \gamma_j\}$  - ЛНЗ  $\Rightarrow \forall k, j : \beta_k = \gamma_j = 0$

**Алгоритм.** Пусть  $U_1 = \langle a_1, \dots, a_{n_1} \rangle$ ,  $U_2 = \langle b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$  известны координаты. Составим матрицу:

$$(A \mid B) = (a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_{n_2}^\uparrow)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left( a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid \underbrace{b_1^\uparrow, \dots, b_m^\uparrow}_{\text{попало в базис}}, b_{m+1}^\uparrow, \dots, b_{n_2-m}^\uparrow \right)$$

Можно записать:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^m \beta_{k,j} b_k \Rightarrow b_j - \sum_{k=1}^m \beta_{k,j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

□

**Упражнение.** Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

## 4 Прямая сумма подпространств и пространств

**Определение.** Сумма  $U_1 + \dots + U_m$  подпространств  $U_i \subset V$ ,  $1 \leq i \leq m$  называется прямой суммой, если  $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$  представим в виде:

$u = u_1 + \dots + u_m$  ( $u_i \in U_i$ ) единственным образом

Пусть  $m = 2$ ,  $V$  - конечномерное пространство,  $U_{1,2}$  - подпространства  $V$

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

1.  $U = U_1 + U_2$  - прямая сумма

$$2. U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$3. \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

4. Базис  $U_1 + U_2$  - объединение базисов слагаемых

*Доказательство.*

$$1. \rightarrow 2. \text{ Допустим } v \in U_1 \cap U_2 \implies v = \underset{\in U_1}{v} + 0 = 0 + \underset{\in U_2}{v} \implies v = 0$$

2.  $\rightarrow$  3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_0$$

3.  $\rightarrow$  4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \implies \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$\implies \text{все } \alpha_i \text{ и } \beta_i \text{ равны нулю}$$

4.  $\rightarrow$  1.  $\forall u \in U_1 + U_2$  :

$$u = \left( \sum_i \alpha_i a_i \right) + \left( \sum_j \beta_j b_j \right)$$

- разложение по базису единственно

□

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

1.  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  - прямая сумма

2.  $\forall i, 1 \leq i \leq m, U_i \cap \left( \sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}$

3.  $\dim(U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_n$

4. Базис  $U_1 + U_2 + \dots + U_n$  - объединение базисов слагаемых

**Упражнение.** Доказать

**Пример.** того, что условия  $U_i \cap U_j = \{0\}, i \neq j$  недостаточно для прямой суммы: (РИСУНОК)

$v_1, v_2, v_3$  - ЛЗ  $\implies$  представление не единственным образом

**Лемма.** Любой ЛНЗ набор векторов  $a_1, \dots, a_m$  в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  ( $m < n$ ) можно дополнить до базиса в  $V$ .

*Доказательство.* 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе  $e_1, \dots, e_n \implies rk\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_1^\uparrow & \dots & a_m^\uparrow & E_n \end{array} \right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left( \begin{array}{ccc|c|c|c} a_1^\uparrow & \dots & a_m^\uparrow & e_{i,1}^\uparrow & e_{j,n-m}^\uparrow & \dots \end{array} \right)$$

Тогда к векторам  $a_1, \dots, a_m$  надо добавить  $e_{j,1}, \dots, e_{j,n-m}$

□

**Определение.** Если  $U$  - подпр-во в  $V$  ( $0 \neq U \neq V$ ) и  $\exists W \subset V : V = U \oplus W$ , то  $W$  - прямое дополнение к  $U$ .

**Следствие.** Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве  $\exists$  прямые дополнения.

*Доказательство.*  $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \implies \exists a_{m+1}, \dots, a_n : \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  - базис в  $V$ , тогда  $W = \langle a_{m+1}, \dots, a_n \rangle$  □

**Определение.** Пусть  $V_1, \dots, V_k$  ( $k \geq 2$ ) - векторы пространства над одним и тем же полем  $\mathbb{F}$ , тогда:

$$V = V_1 \times \dots \times V_k = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{внешняя прямая сумма}$$

Обозначение:  $\bigoplus$

*Замечание.* Внешнюю прямую сумму  $V = V_1 \bigoplus \dots \bigoplus V_k$  можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V'_i = \{0, \dots, v_i, \dots, 0\} - \text{подпространство в } V$$

Запись  $v_1, \dots, v_k \stackrel{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, v_k)$  показывает, что  $V = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_k$  - единственно.

$$\text{В частности } \dim(V_1 \bigoplus \dots \bigoplus V_k) = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

## Факторпространства

**Определение.** Пусть  $U \subset V$  - подпространство,  $v_1, v_2 \in V$ . Говорят, что  $v_1 \sim v_2$  по модулю  $U$ , если  $v_1 - v_2 \in U$ . Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по  $U$ , где  $v$  - представитель

$$* V/U = \{\underbrace{v + U}_{\bar{v}} \mid v \in V\}$$

**Утверждение.**  $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  : Если  $v_1 \sim v_2$ , то  $\exists u_0 \in U : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Rightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \quad \forall u \in U \quad v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Rightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

$\Leftarrow$  : Если  $v_1 + U = v_2 + U$ , то  $\exists u_1 \in U : v_1 = v_2 + u_1 \Rightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

**Определение.**  $v + U$  - смежный класс элемента  $v$  по  $U$  :  $\bar{v} := v + U$

**Определение.**  $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$  - факторпространство  $V$  по  $U$ .

**Определение.** Структура векторного пространства на  $V/U$ :

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda \bar{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

**Определение.**  $\dim(V/U)$  называется коразмерностью подпространства  $U$  в  $V$   
Обозначается:  $\text{Codim}_V U$

**Пример.** Пусть  $V = C[a, b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]\} \Rightarrow \text{Codim}_V U = 1$$

**Теорема.**

1. Данные операции задают на  $V/U$  векторное пр-во;
2. Если  $\dim V < \infty$ , то  $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

*Доказательство.*

1) Проверим корректность введенных операций:

Если  $v'_1 = v_1 + u_1, v'_2 = v_2 + u_2, u_1, u_2 \in U$  :

$$v'_1 + v'_2 = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v'_1 + v'_2 \sim v_1 + v_2, \text{ т.е. } v'_1 + v'_2 + U = v_1 + v_2 + U \Rightarrow \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2}$$

$$\overline{v'_1} + \overline{v'_2} = \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

т.е. сложение не зависит от выбора элементов в классах.

Если

$$v' = v + u, u \in U \implies \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \implies \lambda v \sim \lambda v'; \quad \bar{0} \in U; \quad -\bar{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполнены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис  $a_1, \dots, a_m$  в  $U$

Если  $U = V$ , т.е.  $m = n = \dim V$ , то  $V \setminus U = \{0\} \implies \dim(V \setminus U) = n - n = 0$

Если же  $m < n$ , то можно дополнить базис  $U$  векторами  $a_{m+1}, \dots, a_n$  до базиса в  $V$ , тогда классы  $\overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  образуют базис в  $V \setminus U$ :

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j$$

$$\bar{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^n \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \bar{a_j}$$

$\implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  порождают  $V \setminus U$

Проверим ЛНЗ:

$$\exists \lambda_j \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \lambda_j \bar{a_j} = \bar{0} \iff \sum_{j=m+1}^n \lambda_j a_j \in U$$

$$\exists \mu_i \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0$$

Т.к.  $\{a_1, \dots, a_n\}$  ЛНЗ, то  $\lambda_j = 0, \mu_i = 0, \forall i, j \implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  - ЛНЗ

□

## 5 Линейные отображения и функции

Пусть  $V_1, V_2$  - векторные пространства над полем  $\mathbb{F}$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  называется линейным отображением  $V_1$  в  $V_2$ , если:

$$1. \forall v_1, v'_1 \in V_1 : \varphi(v_1 + v'_1) = \varphi(v_1) + \varphi(v'_1);$$

$$2. \forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v);$$

Из курса I семестра известно, что  $\varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$

**Определение.** Ядром  $\varphi$  называется множество  $\text{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{v_2}\}$ . Образом  $\varphi$  называется множество  $\text{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$ .

## 6 Линейные функции

Пусть  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{F}$

**Определение.** Отображение  $f : V \rightarrow \mathbb{F}$  - линейная функция со значениями в  $\mathbb{F}$ , если:

$$1. \forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

$$2. \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} : f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

Обозначается:  $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{F}\}$  - множество линейных функций на  $V$

**Лемма.** Если  $f \neq 0$ , то  $\dim(V/\text{Ker} f) = 1$ .

*Доказательство.*  $f \neq 0 \Rightarrow \exists v_1 \in V, f(v_1) \neq 0$ . Пусть  $v \in V$ , либо  $v \in \text{Ker}(f)$ , либо  $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Rightarrow f\left(\frac{v_1}{\beta}\right) = 1, f\left(\frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = \alpha$$

Рассмотрим выражение  $f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1)$ :

$$f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1) = f(v) - f\left(\frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = \alpha - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow v - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \text{Ker}(f) \text{ и } v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u, u \in \text{Ker}(f) \quad \square$$

*Замечание.*  $\forall x \in V : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$  и  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

**Лемма.** Множество  $V^*$  с введенными операциями - векторное пространство.

**Определение.**  $V^*$  - векторное пространство, сопряженное с  $V$  (двойственное для  $V$ )

Зафиксируем базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и линейную функцию  $f : V \rightarrow F$

$$\forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \text{ где } a_i = f(e_i)$$

$$\text{Удобно записывать это так: } f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



**Определение.** Координатные функции - функции вида:

$$f_i : f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение:  $e^i = f_i$

$$\text{В частности: } f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**Утверждение.** Функции  $e^i$  - базис в  $V^*$

*Доказательство.*

Докажем ЛНЗ: Пусть  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i \equiv 0$ . Подставим  $e_j$ :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i\right)(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех  $e_1, \dots, e_n$  получим, что  $\forall i = 1, \dots, n : \lambda_i = 0$ .  
Разложим произвольную функцию  $f \in V^*$ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i e^i(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i e^i\right)(x) \Rightarrow f \equiv \sum_{i=1}^n a_i e^i$$

□

**Следствие.** Если  $\dim V < \infty$ , то  $V^* \cong V$ , т.к.  $\dim V^* = \dim V$ .

**Определение.** Базис  $e^* = (e^1, \dots, e^n)$  называется базисом  $V^*$ , сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису  $e$  в  $V$ .

Посмотрим, как изменится строка координат функции  $f \in V^*$  при замене базиса  $e$  в  $V$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n) = e \cdot C_{e \rightarrow e'}$  - новый базис в  $V$ . Как известно,  $X = C_{e \rightarrow e'} \cdot X'$ .

Отсюда если  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ , то  $\forall f \in V^*$ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a'_i x'_i = (a'_1, \dots, a'_n) X'$$

С другой стороны

$$f(x) = (a_1, \dots, a_n) X = (a_1, \dots, a_n) (C_{e \rightarrow e'} X') = ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X'$$

Отсюда

$$\forall X' \in \mathbb{F}^n \quad ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X' = ((a'_1, \dots, a'_n)) X'$$

Подставляя по очереди  $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , в итоге получим равенство

$$(a_1, \dots, a_n)C_{e \rightarrow e'} = (a'_1, \dots, a'_n)$$

**Пример.** Возьмём  $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$

Выберем в нём базис  $\{1, (t - t_0), \dots, (t - t_0)^n\} \Rightarrow p(t) = \sum_{i=0}^n \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i$

Если  $e_i = (t - t_0)^i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , то  $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

**Определение.** Вторым сопряжённым пространством к  $V$  (обозначается  $V^{**}$ ) называется пространство, сопряженное к  $V^*$  - пространство линейных функций от линейных функций над  $V$ .

$$V^{**} = \{\varphi : V^* \rightarrow \mathbb{F}\}$$

**Лемма.**  $f$  - инъекция  $\iff \text{Ker}(f) = \{0\}$

**Теорема.** Если  $\dim V < \infty$ , то  $V^{**} \cong V$ , причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).

*Доказательство.* Рассмотрим отображение:

$$\varphi : V \rightarrow V^{**} : \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**} : \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

- $\forall f \in V^*, \varphi_{x_1+x_2}(f) = f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \Rightarrow \varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$
- $\forall f \in V^*, \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f) \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x);$

Чтобы проверить, что  $\varphi$  - биекция, достаточно проверить, что  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  (так как сюръекцию имеем из  $\dim V^{**} = \dim V$ ).

Пусть  $x \in \text{Ker}(\varphi)$ , т.е.  $\varphi_x \equiv 0$ . Значит,  $\forall f \in V^* : f(x) = 0$

Если  $x \neq 0$ , то его можно дополнить до базиса:  $x, e_2, \dots, e_n$ , где  $n = \dim V$ .

Тогда  $e^1(x) = 1 \neq 0$  - противоречие с условием  $\forall f \in V^* : f(x) = 0$ .  $\square$

*Задача.* Доказать, что  $a_1, \dots, a_n \in V$  ЛНЗ  $\iff \exists$  лин. ф-ции  $f^1, \dots, f^n \in V^*$  такие, что  $\det(f^i(a_j)) \neq 0$ .

*Замечание.* Если  $\dim V = \infty$ , то  $V^* \not\cong V$  в общем случае.

**Пример.**  $V = \mathbb{Q}[t]$  -  $V$  счётно. Зафиксируем число  $t \in \mathbb{Q}$  и рассмотрим произвольную  $f \in V^*$ :

$$f(t^k) = b_k \Rightarrow f \leftrightarrow (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots) \Rightarrow V^* \text{ континуально.}$$

Отсюда мощность  $V^*$  больше мощности  $V$ , и они, очевидно, не изоморфны.

## 7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть  $V_1, V_2$  - векторные пространства,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение.

**Пример.**

$V_1 = D(a, b)$  - множество функций над полем  $\mathbb{R}$ , дифференцируемых на  $(a, b)$ ;

$V_2 = F(a, b)$  - множество функций над полем  $\mathbb{R}$ , определенных на  $(a, b)$ ;

$\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ ,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение,  $\text{Ker}(\varphi) = \{\text{const}\}$

Частный случай:  $V_1 = \mathbb{R}[t]_n$ ,  $V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$

$\varphi(f) = f'$  - линейное отображение (взяли производную)

$\text{Ker}(\varphi) = \{\text{const}\}$ . Является ли  $\varphi$  сюръекцией?

$\forall p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$

$\exists f(t) = a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + \dots + a_{n-1} \frac{t^n}{n} : f'(t) = p(t) \implies \varphi$  - сюръекция

**Теорема.** Если  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение,  $\dim V_1 < \infty$ , то

$$\dim(\text{Im } \varphi) = \dim V_1 - \dim(\text{Ker } \varphi)$$

*Доказательство.* Пусть  $\dim(\text{Im } \varphi) = m$  ( $m \leq n = \dim V_1$ )

Выберем  $c_1, \dots, c_m$  - базис в  $\text{Im } \varphi \implies \exists a_1, \dots, a_m \in V_1 : \varphi(a_i) = c_i, i = \overline{1, m}$

Так же выберем базис  $b_1, \dots, b_k$  в  $\text{Ker } \varphi$  (если  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ , то  $\text{Im } \varphi \cong V_1$ )

Покажем, что  $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k\}$  - базис в  $V_1$ :

Пусть  $\alpha_i, \beta_j : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j = 0_{v_1}$ , тогда:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(a_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^k \beta_j \varphi(b_j)}_{0_{v_2}} = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i = \varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$$

Т.к.  $c_i$  - ЛНЗ  $\implies \forall i = \overline{1, m} : \alpha_i = 0 \implies \sum_{j=1}^k \beta_j b_j = 0$

Т.к.  $b_j$  - ЛНЗ  $\implies \forall j = \overline{1, k} : \beta_j = 0$

$$\begin{aligned} \forall v \in V_1 : \varphi(v) &= \sum_{l=1}^m \gamma_l c_l = \varphi\left(\sum_{l=1}^m \gamma_l a_l\right) \implies v - \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l \in \text{Ker } \varphi \\ &\implies \exists \beta_j \in \mathbb{F} : v = \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j \end{aligned}$$

□

## 8 Матрицы линейного отображения

Пусть:  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  - базис в  $V_1$ ;  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  - базис в  $V_2$

$$\begin{aligned} \forall x \in V_1 : x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \implies \varphi(x) &= \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \\ &= \{\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i\} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} f_i \end{aligned}$$

**Определение.** Назовем  $A = (a_{ij}) = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}}$  - матрицей  $\varphi$  в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ .

Обозначается:  $Y_f = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot X_e$  (где  $Y$  - столбец координат  $\varphi(x)$ ).

*Замечание.* Для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ ,  $A_{\varphi, e} \equiv A_{\varphi, e, e}$

**Алгоритм.** Вычисление  $\text{Ker } \varphi$  и  $\text{Im } \varphi$  с помощью матрицы  $A_\varphi$  :

1.  $\text{Ker } \varphi = \{x = \mathcal{E} \cdot x_\mathcal{E} : A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = 0\}$ ;  $\dim(\text{Ker } \varphi) = n - \text{rk} A_\varphi$
2.  $\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \{y = \mathcal{F} \cdot Y_f : Y_f = A_\varphi \cdot x_\mathcal{E}\}$   
 $Y \in \text{Im } \varphi \iff \text{СЛУ } A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = Y \text{ совместна} \implies \dim(\text{Im } \varphi) = \text{rk} A_\varphi$   
*(т.е. не зависит от базиса);*
3.  $\dim(\text{Im } \varphi) + \dim(\text{Ker } \varphi) = \dim V_1$

### 8.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат

**Утверждение.** Пусть  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  - старый, а  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  - новый базисы в  $V_1$  и  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$  - старый, а  $\mathcal{F}' = (f'_1, \dots, f'_m)$  - новый базисы в  $V_2$ ,  $C$  - матрица перехода из  $\mathcal{E}$  в  $\mathcal{E}'$ , а  $D$  - матрица перехода из  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{F}'$ . Тогда:

$$A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} = D^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулами связи координат векторов:

$$\forall x \in V_1 : x_\mathcal{E} = \underbrace{C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}}_{C} \cdot x_{\mathcal{E}'} \text{ и } \forall y \in V_2 : y_\mathcal{F} = \underbrace{C_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'}}_{D} \cdot y_{\mathcal{F}'}$$

Тогда формулы имеют вид:

$$Y_\mathcal{F} = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot x_\mathcal{E} \text{ и } Y_{\mathcal{F}'} = A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} \cdot x_{\mathcal{E}'} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

Умножим  $(*)$  слева на  $D^{-1}$ , а также запишем выражение  $x_{\mathcal{E}}$  через  $x_{\mathcal{E}'}$ :  
 $\forall x_{\mathcal{E}'} \in F^n :$

$$D^{-1} \cdot Y_{\mathcal{F}} = D^{-1} \cdot (A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'} \iff Y_{\mathcal{F}'} = (D^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Возьмем  $x_{\mathcal{E}'} = E_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  □

*Замечание.* Для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  :

$$A_{\varphi, \mathcal{E}'} = C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$$

**Следствие.**

1. Для любого линейного отображения ранг его матрицы инвариантен при замене базиса

$$\text{rk } A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} = \text{rk } A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}};$$

2. Для любого линейного оператора определитель и след его матрицы инвариантны при замене базиса

$$\det(A_{\varphi, \mathcal{E}'}) = \det(A_{\varphi, \mathcal{E}})$$

$$\text{tr}(A_{\varphi, \mathcal{E}'}) = \text{tr}(A_{\varphi, \mathcal{E}})$$

*Доказательство.*

1. Матрицы  $C$  и  $D$  невырождены, значит достаточно доказать, что  $\text{rk } A = \text{rk } (AC)$ , где  $C$  - невырождена.

$$\begin{cases} B = A \cdot C \implies \text{rk } B \leq \text{rk } A \\ A = (A \cdot C) \cdot C^{-1} \implies \text{rk } A \leq \text{rk } (AC) \end{cases} \implies \underbrace{\text{rk } (AC) \leq \text{rk } A \leq \text{rk } (AC)}_{\text{rk } (AC) = \text{rk } A}$$

$$2. \det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A$$

$$3. \text{tr}(AC) = \text{tr}(CA) \implies \text{tr}[C^{-1} \cdot (AC)] = \text{tr}[(AC) \cdot C^{-1}] = \text{tr } A$$

□

**Теорема.** Пусть  $a_1, \dots, a_n$  - ЛНЗ векторы в  $V_1$  ( $\dim V_1 = n$ ),  $b_1, \dots, b_n$  - случайные векторы в  $V_2$  ( $\dim V_2 = m$ ). Тогда  $\exists!$  линейное отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  :  $\varphi(a_j) = b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$

*Доказательство.*

Пусть в некотором базисе  $\mathcal{E}$  пространства  $V_1$  вектор  $a_j \sim a_j^\uparrow$  - столбец координат, в базисе  $f$  пространства  $V_2$  вектор  $b_j \sim b_j^\uparrow$

По условию,  $\forall j = 1, \dots, n : A_\varphi \cdot a_j^\uparrow = b_j^\uparrow \implies A_\varphi(a_1^\uparrow, \dots, a_n^\uparrow) = (b_1^\uparrow, \dots, b_n^\uparrow)$  или  $A_\varphi \cdot A = B$ , где  $A_\varphi$  - искомая матрица.

Отсюда получаем, что  $A_\varphi = B \cdot A^{-1}$  (т.к.  $a_1, \dots, a_n$  ЛНЗ).

$$\left( \frac{A}{B} \right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эп}} \left( \frac{E}{A_\varphi} \right), \quad \left( \frac{A}{B} \right) \rightarrow \left( \frac{A}{B} \right) \cdot C_{\text{эл}} = \left( \frac{AC}{BC} \right)$$

Если  $AC = E$ , то  $C = A^{-1}$  и  $BC = BA^{-1} = A_\varphi$

□

**Теорема.** Если  $\dim V_1 < \infty$ ,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение, то

$$\text{Im } \varphi \cong V_1 / \text{Ker } \varphi$$

*Доказательство.* Базис ядра дополним до базиса пространства  $V_1$  векторами  $e_1, \dots, e_s$ . Тогда любой  $v \in V_1$  можно записать в виде:

$$v = \sum_{i=1}^s x_i e_i + u, \text{ где } u \in \text{Ker } \varphi$$

По этому в факторпространстве базис составляет классы  $\bar{v} + u = \sum_{i=1}^s x_i \bar{e}_i$

Рассмотрим отношение  $\bar{\varphi} : V_1/u \rightarrow V_2$ , где  $\bar{\varphi}(\bar{v}) = \bar{\varphi}(v + u) := \varphi(v)$

Отсюда  $w = \bar{\varphi}(\bar{v})$ . Получаем, что  $\varphi$  - сюръективное линейное отображение (т.к.  $\forall w \in V_2 \exists v \in V_1 : \varphi(v) = w$ ). Также  $\text{Ker } \bar{\varphi} = \{0\} = \{\text{Ker } \varphi\}$ , потому что если  $\bar{\varphi}(\bar{v}) = 0$ , то  $\varphi(v) = 0$ , т.е.  $v \in \text{Ker } \varphi = u \implies v \in U \implies \bar{v} = u = \{0\}$  □

## 9 Линейные операторы

**Определение.** Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$  называется линейным оператором

Далее рассматриваем линейные операторы.

**Утверждение.**

1.  $\text{Ker } \varphi$  - подпространство в  $V$
2.  $\text{Im } \varphi$  - подпространство в  $V$

3. Если  $U \subset V$ , то  $\varphi(U)$  - подпространство в  $V$

**Определение.** Подпространство  $U \subset V$  называется инвариантным относительно  $\varphi$  (или  $\varphi$  - инвариантным), если:

$$\forall u \in U : \varphi(u) \in U, \text{ т.е. } \varphi(U) \subseteq U$$

**Примеры.**

1. Пусть  $V = U \oplus W$ . Рассмотрим  $\varphi : V \rightarrow W$ . Пусть  $\varphi(u+w) = u$  - проекция  $V$  на  $U$  вдоль  $W$ . Тогда  $U$  и  $W$  -  $\varphi$  инвариантные подпространства и  $\forall u \in U : \varphi(u) = u$ , а также  $\forall w \in W : \varphi(w) = w$ . Итак:  $U \cong V/W$
2. Пусть  $V = \mathbb{R}[t]$ ,  $\varphi = \frac{d(\dots)}{dt}$  и  $p(t) \rightarrow p'(t)$ . Здесь инвариантным является подпространство  $\mathbb{R}[t]_n \supset \mathbb{R}[t]_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

**Теорема.** Если  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор,  $\dim V = n$ ,  $U$  - инвариантное подпространство, то существует базис, в котором  $A_\varphi$  имеет блочный вид:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Где  $B$  и  $C$  - квадратные:  $B_{m \times m}$ ,  $m = \dim U$

*Доказательство.* Выберем базис  $e_1, \dots, e_m$  в  $U$  и дополним до базиса в  $V$ . Тогда в полученном базисе  $A_\varphi$  имеет нужный вид.  $\square$

*Замечание.* Пусть  $U \in V$  - инвариантное подпространство для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$

Ограничение  $\varphi$  на подпространство  $U$ :

$$\varphi|_U : U \rightarrow U; \quad \forall u \in U : \varphi|_U(u) = \varphi(u)$$

Рассмотрим факторпространство:

$$\bar{V} = V/U : \{v + u \mid u \in U\}$$

и фактор-оператор:

$$\bar{\varphi}(\bar{v}) := \overline{\varphi(v)}$$

$$\forall \bar{v} \in \bar{V} : v' = v + u, u \in U \implies \varphi(\bar{v}) = \varphi(v) + \varphi(u) \in U \implies \varphi(\bar{v}) = \varphi(v)$$

Т.о.  $\bar{\varphi} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  - линейный оператор.

**Теорема.**

1. Если существует инвариантное подпространство  $U \subset V$ , то в подходящем базисе:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad (I)$$

Где  $B_{m \times m}$ ,  $m = \dim U$ , а точнее:  $B$  - матрица оператора  $\varphi|_U$ ,  
 $C$  - матрица оператора  $\bar{\varphi}$

2. Если  $V = U \oplus W$ ,  $U$  и  $W$  - инвариантные для  $\varphi$ , то в подходящем базисе:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad (II)$$

Причем  $B = A_{\varphi|_U}$ ,  $C = A_{\bar{\varphi}|_W}$ .

Верно и обратное, если в некотором базисе матрица  $A_\varphi$  имеет вид (I), то для  $\varphi \exists$  инвариантное подпространство, а если  $A_\varphi$  имеет вид (II), то  $V$  - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

*Доказательство.* Обозначим  $\dim V = n$ ,  $\dim U = m$ ,  $0 < m < n$

1. Выберем базис в  $U$  :  $e_1, \dots, e_m$  и произвольно дополним его до базиса  $V$  векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n$ .

$$\forall u \in U : u = \sum_{i=1}^m u_i e_i \implies \varphi(u) = \sum_{i=1}^m u_i \varphi(e_i)$$

В частности, столбцы  $\varphi(e_1)^\uparrow, \dots, \varphi(e_m)^\uparrow$  имеют вид:  $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \implies$  они составляют матрицу  $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ . Столбцы матрицы  $\varphi(e_{m+1}^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow)$  соответствуют номерам координат. Видно, что:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_U}$$

$\bar{e}_j = e_j + U$ ,  $j = m+1, \dots, n$  - базис в факторпространстве  $\bar{V} = V/U$ .

$$\overline{\varphi(e_j)} = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i + \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj} \bar{e}_k$$

$$\implies C = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \bar{\varphi}$$



2. Если  $V = U \oplus W$ , векторы  $e_{m+1}, \dots, e_n$  надо выбирать в  $W$ . Остальное аналогично.

□

**Теорема. (Обратная)**

Для второго случая, если в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрица имеет вид (II), то положим  $U := \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ ,  $W := \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$

Из определения матрицы  $A_{\varphi, e}$  следует, что  $U, W$  - инвариантные относительно  $\varphi$ ,  $\varphi|_u$  имеет матрицу  $B$ ,  $\varphi|_w$  - матрицу  $C$ .

*Замечание.* В общем случае, если  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ ,  $U_i$  - инвариантны относительно  $\varphi : V \rightarrow V$ , то в базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix}$$

где  $B_i$  - матрица  $\varphi|_{u_i}$ .

**Примеры.**  $\varphi : V \rightarrow V$

1.  $\text{Ker } \varphi$ ,  $\text{Im } \varphi$ , любое подпространство  $U \supseteq \text{Im } \varphi$  - инвариантны.
2. Если  $U_1, U_2$  -  $\varphi$ -инвариантные подпространства, то  $U_1 + U_2$  и  $U_1 \cap U_2$  - инвариантны

## 10 Действия над линейными отображениями

Пусть  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение,  $\forall x \in V_1$

1.  $\forall \lambda \in \mathbb{F} : (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$
2. Если  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ , то  $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

**Утверждение. (1)** Относительно этих операций множество  $Z(V_1, V_2)$  линейных отображений из  $V_1$  в  $V_2$  является векторным пространством.

**Утверждение. (2)** Если  $\dim V_1 = n$ ,  $\dim V_2 = m$ , то  $Z(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$

*Доказательство.* Зафиксируем базисы в  $V_1$  и  $V_2$ :  $e$  и  $f$  соответственно, тогда  $\forall \varphi$  взаимнооднозначно соответствует его матрица  $A_{\varphi, e, f}$  относительно базисов  $e$

и  $f$ .  $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad (\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \implies$  все столбцы  $A_\varphi$  умножаются на  $\lambda \implies A_\varphi$  умножается на  $\lambda$ .

$$\forall j = 1, \dots, m : (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j)$$

$\implies$  столбцы  $A_{\varphi+\psi}$  имеют вид  $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$ . □

Обозначение:  $L(V_1, V_2) = \mathfrak{T}(V_1, V_2) = \text{Hom}(V_1, V_2)$ .

$\mathfrak{T}(V)$  - множество линейных операторов на  $V$ .

**Определение.** Произведением линейных операторов  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  и  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  называется их композиция:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x)), \text{ где } x \in V_1$$

**Утверждение. (3)** *Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.*

**Утверждение. (4)** *Пусть  $V_1, V_2, V_3$  - конечномерные векторные пространства,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $\psi : V_2 \rightarrow V_3$  - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции:*

$$A_{\psi \circ \varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi$$

*Доказательство.*

Утверждение (3) - упражнение.

Утверждение (4): Пусть  $e$  - базис в  $V_1$ ,  $f$  - базис в  $V_2$ ,  $g$  - базис в  $V_3$ .

$$A_\varphi = (\varphi(e_1)^\uparrow \dots \varphi(e_n)^\uparrow) \text{ в базисе } f$$

$$A_\psi = (\psi(f_1)^\uparrow \dots \psi(f_m)^\uparrow) \text{ в базисе } g$$

$\forall x = eX$ , обозначим  $y = \varphi(x)$ ,  $z = \psi(y)$  со столбцами координат  $Y$  и  $Z$  соответственно. Тогда:

$$Y = A_\varphi X, \quad Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi \circ \varphi} X$$

□

**Теорема.** *Множество  $L(V)$  с операциями  $+$ ,  $\cdot \lambda$ ,  $\cdot$  является ассоциативной алгеброй с единицей, равной  $\text{id } V$ . Если  $\dim V = n$ , то  $L(V) \cong M_n(\mathbb{F})$ .*

*Доказательство.* Следует из утверждений (1) - (4). □

**Утверждение.** *Если  $\varphi$  - линейный оператор на  $V$ , то  $\forall k \in \mathbb{N}$  подпространства  $\text{Ker } \varphi^k$  и  $\text{Im } \varphi^k$  - инварианты. При этом:*

$$\{0\} \subseteq \text{Ker } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi^2 \subseteq \dots$$

$$V \supseteq \text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \dots$$

## 11 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор над полем  $\mathbb{F}$

**Определение.** Вектор  $x \in V$  называется собственным вектором оператора  $\varphi$ , если  $x \neq 0$  и

$$\exists \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(x) = \lambda \cdot x \quad (1)$$

Где  $\lambda$  - называется собственным значением оператора  $\varphi$ , соответствующим вектору  $x$ .

Пусть  $\dim V = n$ ,  $e$  - базис в  $V$ , в нём  $\forall x = e \cdot X$ , тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно:

$$A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \quad (2)$$

- это СЛУ для нахождения вектора  $x$ , если известна  $\lambda$ . Система (2) имеет ненулевое решение, только если:

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \quad (3)$$

Равенство (3) называется характеристическим уравнением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

### Примеры.

1.  $V = D^\infty(\mathbb{R})$  - множество бесконечно дифференцируемых функций.

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \quad \forall f(x) : \varphi(f) = f'(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$$

*Доказательство.* Если  $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$ , то  $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$ , где  $C \neq 0$ .  
Рассмотрим  $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \implies f(x)e^{-\lambda x} = C$ .  $\square$

2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

**Упражнение.** Какие существуют собственные векторы и собственные значения у  $\varphi$  во втором примере?

**Определение.**

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{11} - \lambda) + \cdots = (-\lambda)^n + (a_{11} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det A$$

$\chi_A(\lambda)$  - характеристический многочлен матрицы  $A$

**Утверждение. (1)**  $\chi_A(\lambda)$  - не зависит от базиса.

*Доказательство.* В новом базисе:  $A'_\varphi = C^{-1} \cdot A_\varphi \cdot C$

$$\chi_{A'_\varphi}(\lambda) = \det(C^{-1}A_\varphi C - \lambda E) = \det(C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C) = \det(A_\varphi - \lambda E)$$

□

**Определение.** Вместо  $\chi_{A_\varphi}(\lambda) = \chi_\varphi(\lambda)$  и называется характеристическим многочленом оператора  $\varphi$

## 12 Диагонализируемость

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор

**Лемма.** Если  $a_1, \dots, a_m \in V$  - собственные векторы оператора  $\varphi$  с собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , причем  $\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j$ , то  $a_1, \dots, a_m$  - ЛНЗ.

*Доказательство.*

$m = 1$  : Один вектор  $a_1 \neq 0$  ЛНЗ

$m > 1$  : Предположение индукции: Любые  $m - 1$  вектор, отвечающих попарно различным собственным значениям - ЛНЗ

$$\text{Запишем: } a_1\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m = 0$$

$$\text{Подействуем оператором } \varphi : a_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\lambda_m\alpha_m = 0 \implies$$

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$$

$$\text{По предположению индукции } \forall i = 1, \dots, m - 1 : \alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \implies \alpha_i = 0$$

$$\text{Остается } \alpha_m a_m = 0 \implies \alpha_m = 0$$

□

**Следствие.** Если  $\varphi$  имеет  $n$  попарно различных собственных значений ( $\dim V = n$ ), то соответствующие собственные векторы, взятые по одному для каждого собственного значения, образуют базис в  $V$  (Базис из собственных векторов или собственный базис).

**Вид матрицы  $A_\varphi$  в базисе из собственных векторов:**

Обозначаем базис  $\{e_1, \dots, e_n\} \in V$ ,  $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j$ ,  $j = \overline{1, n}$   
 $\forall x \in V : \varphi(x) = A_{\varphi, e} \cdot X_e$ . Столбец вектора  $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

$$A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- диагональная, причем на диагонали находятся собственные значения с учетом нумерации векторов

## 12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением

Фиксируем собственное значение  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  так, что  $\exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda_0 v$   
 Обозначается:  $V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$

**Утверждение. (1)**  $V_{\lambda_0}$  - подпространство в  $V$ ,  $V_{\lambda_0} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \cdot \text{id})$

Если  $A_\varphi$  - матрица оператора  $\varphi$ , то в координатах  $V_{\lambda_0}$  - множество всех решений СЛУ.

$$(A_\varphi - \lambda_0 E) \cdot X = 0 \implies \dim V_{\lambda_0} = n - \text{rk}(A_\varphi - \lambda_0 E)$$

**Определение.**

$\dim V_{\lambda_0}$  - геометрическая кратность характеристического корня  $\lambda = \lambda_0$ . Имеет смысл и алгебраическая кратность  $\lambda_0$  характеристического корня  $\chi_\varphi(\lambda)$  :

$$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p(\lambda_0), \quad P(\lambda_0) \neq 0, \quad k - \text{алгебраическая кратность}$$

**Лемма.** Для любого собственного значения  $\lambda_0$  оператора  $\varphi$  :

$$\dim V_{\lambda_0} \leq \text{алгебраическая кратность корня } \lambda = \lambda_0 \text{ в } \chi_\varphi(\lambda)$$

*Доказательство.* Пусть  $\dim V_{\lambda_0} = m \leq n$ , выберем базис в  $V_{\lambda_0}$  :  $\{e_1, \dots, e_m\}$  и произвольно дополним его до базиса в  $V$  (при  $m < n$ ) векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n \Rightarrow$

$$A_{\varphi,e} = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & C \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & B \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$|A_{\varphi,e} - \lambda E| = \left( \begin{array}{ccc|c} (\lambda_0 - \lambda) & & 0 & C \\ & \ddots & & \\ 0 & & (\lambda_0 - \lambda) & \\ \hline & 0 & & B - \lambda E \end{array} \right) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot |B - \lambda E| = 0$$

Не исключено, что  $\lambda = \lambda_0$  - корень уравнения  $|B - \lambda E| = 0$  □

*Замечание.* Любое собственное подпространство  $V_{\lambda_0}$  является  $\varphi$  - инвариантным:

$$\forall v \in V_{\lambda_0} : \varphi(v) = w : \varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = \lambda_0 \varphi(v) = \lambda_0 w$$

Либо  $w = 0$ , либо является собственным вектором.

**Следствие. 2 из Леммы о ЛНЗ:**

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  - все попарно различные собственные значения оператора  $\varphi$ , тогда  $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}$  - является прямой суммой, т.е.:

$$\forall i = 1, \dots, n : V_{\lambda_i} \cap \left( \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right) = \{0\}$$

*Доказательство.* Допустим, что  $\exists w \in V_{\lambda_i} \cap \left( \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right)$ , тогда:

$$w = v_i = \sum_{j \neq i} v_j \Rightarrow \left( \sum_{j \neq i} v_j \right) - v_i = 0$$

Где  $\left( \sum_{j \neq i} v_j \right)$  - попарно различные собственные значения, т.е. либо 0, либо противоречие с ЛНЗ  $\Rightarrow v_i = w = 0$  □

Скажем, что  $\varphi$  (или его матрица) приводится к диагональному виду (т.е. диагонализуема), если в  $V \exists$  базис, в котором  $A_\varphi$  диагональна.

**Теорема.** Для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V (\dim V < \infty)$  следующие условия эквивалентны:

1.  $A_\varphi$  - диагонализуема

2. В  $V$   $\exists$  базис из собственных векторов

3. Все характеристические корни принадлежат  $\mathbb{F}$  и  $\forall i = 1, \dots, r :$

$$\dim V_{\lambda_i} = \text{алгебраической кратности корня } \lambda_i$$

$$4. V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$$

*Доказательство.*

1  $\Rightarrow$  2 : Если  $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , это значит, что:

$$\varphi(e_j)^\uparrow = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi(e_j) = \lambda_j e_j$ , т.е.  $e_j$  - собственный вектор с собственным значением  $\lambda_j$

2  $\Rightarrow$  1 : В базисе из собственных векторов матрица  $A_\varphi$  диагональна

1  $\cup$  2  $\Rightarrow$  3 : Выберем базис из собственных векторов  $\{f_1, \dots, f_n\}$  так, чтобы:

$$\{f_1, \dots, f_{m_1}, f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+m_2}, \dots\}$$

В этом базисе матрица  $A_{\varphi, f}$  выглядит:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_r \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m_1}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m_2}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m_r}$

$\Rightarrow m_1 + \dots + m_r = n$ . С другой стороны, если  $k_i$  - алгебраическая кратность корня  $\lambda_i$ , то:

$$n = \sum_{i=1}^n m_i \leq \sum_{i=1}^r k_i = \deg[\chi_\varphi(\lambda)] = n$$

3  $\Rightarrow$  4 :  $\sum_{i=1}^r \dim V_{\lambda_i} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

4  $\Rightarrow$  1 : Базис в  $V$  - объединение базисов слагаемых

□

**Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над  $\mathbb{R}$ , отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.**

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор,  $\dim V = n$ , тогда в некотором базисе  $V$ ,  $\varphi$  действует матрицей  $Y = A_\varphi \cdot X$ , где  $X \in \mathbb{R}^n$ , а  $Y$  - столбец образа этого вектора ( $y = \varphi(x)$ ). Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ) - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем  $\mathbb{C}$ , действующий при той же матрице:

$$A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n, Z \rightarrow A_\varphi \cdot Z$$

Соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто, то  $\exists$  собственный вектор  $Z_0$ , отвечающий выбранному  $\lambda$ . Это значит, что:

$$A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0, \quad Z_0 = X_0 + iY_0, \quad \text{где } X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \implies A_\varphi Z_0 &= A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = \\ &= (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \implies \\ &\implies \begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим  $x_0$  и  $y_0 \in V$  векторы со столбцами координат  $X_0$  и  $Y_0$  соответственно, тогда:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \implies \text{подпространство } U := \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$$

$\implies U$  является инвариантным подпространством для  $\varphi$ .

Теперь докажем, что  $\dim U = 2$

*Доказательство.* Предположим, что  $\dim U = 1$ , то есть  $y_0 = \mu x_0$ , где  $\mu \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \implies$  если  $x_0 \neq 0$ , то  $x_0$  - собственный вектор для  $\varphi$  (для  $y_0$  аналогично). Но эти векторы не были собственными для  $\varphi$ .

$$A_{\varphi|_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ имеет корни } \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R} - \text{противоречие}$$

□



**Теорема.** Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное подпространство.

*Доказательство.* Если  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  - корень характеристического многочлена, ему отвечает собственный вектор  $u_i \in V$ ,  $u_i \neq 0$ ,  $\implies \langle u_i \rangle$  - одномерное инвариантное подпространство.

Если  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , то  $\exists U$  - двумерное инвариантное подпространство.  $\square$

Вместо диагонализированности можно использовать следующее утверждение:

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

где  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, r}$ , а  $\beta_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, m}$

## 13 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор над полем  $\mathbb{F}$ .

**Определение.** Линейный оператор  $\varphi : V \rightarrow V$  такой, что  $\forall v \in V : \varphi(v) = v$ , называется тождественным оператором и обозначается  $\text{id}$ .

**Определение.** Многочлен  $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$ , где  $a_1 \dots a_m \in \mathbb{F}$ , называется анулирующим многочленом оператора  $\varphi$

$$f(\varphi) = a_0 \cdot \text{id} + a_1 \varphi + \dots + a_m \varphi^m = 0 \implies f(A_\varphi) = 0$$

$$\implies A_{f(\varphi)} = f \cdot A_\varphi = a_0 E + a_1 A_\varphi + \dots + a_m A_\varphi^m.$$

**Пример.**  $V = \mathbb{R}[t]_n$ ,  $\varphi = \frac{d}{dt}$

$$\varphi^n(t^n) = n!, \varphi^{n+1} \equiv 0 \implies \text{для } \varphi = \frac{d}{dt} t^{n+1} - \text{анулирующий многочлен}$$

**Утверждение.** Если  $\dim V = n \implies \exists$  многочлен  $\deg \leq n^2$ , анулирующий  $\varphi$ .

*Доказательство.*  $\dim L(V) = n^2$ ,  $L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \implies$  операторы  $\{Id, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n^2}\}$  - линейно зависимы, так как их больше  $n^2 \implies$

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{F} : a_0 \cdot \text{id} + a_1 \varphi + \dots + a_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$$

$\implies a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2}$  - анулирующий многочлен для  $\varphi$   $\square$

**Определение.** Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица  $P = (P_{ij}(\lambda))$ , где  $P_{ij}(\lambda)$  - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

**Пример.**

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2$$

- многочлен от  $\lambda$  с матричными коэффициентами.

**Определение.** Оператор  $\varphi : V \rightarrow V$  называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

**Определение.** Для матрицы  $A = (a_{ij})$  присоединённой матрицей называется матрица  $\widehat{A} = (A_{ji})$ , то есть  $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$ .

**Свойство.**

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

**Теорема. Гамильтона-Кэли**

*Характеристический многочлен  $\chi_\varphi(\lambda)$  является аннулирующим многочленом для линейного оператора  $\varphi$ , то есть  $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ , где  $0$  - нулевой оператор.*

*В матричной форме:*

$$\forall A \in M_n(\mathbb{F}) : \chi_A(A) = 0$$

*Доказательство.* Пусть  $A$  - данная матрица, тогда:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \sum_{i=0}^n p_i \lambda^i$$

$$p_i \in \mathbb{F}, p_n = (-1)^n, \chi_A(A) = \sum_{i=0}^n p_i A^i \text{ (считаем, что } A^0 = E)$$

Составим матрицу:

$$\widehat{A - \lambda E} = \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j, \text{ где } D_j \in M_n(\mathbb{F})$$

Рассмотрим равенство:

$$(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda)E$$

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j &= \sum_{j=0}^{n-1} (AD_j \lambda^j) - \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^{j+1} = \\
&= AD_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (AD_j - D_{j-1}) \lambda^j - D_{n-1} \lambda^n = \chi_A(\lambda) E = \left( \sum_{j=0}^n p_j \lambda^j \right) E
\end{aligned}$$

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях  $\lambda$ :

$$\begin{array}{l|l}
E \cdot & \lambda^0 : \quad AD_0 = P_0 E \\
A \cdot & \lambda^1 : \quad AD_1 - D_0 = P_1 E \\
\vdots & \\
A^j \cdot & \lambda^j : \quad AD_j - D_{j-1} = P_j E \\
\vdots & \\
A^n \cdot & \lambda^n : \quad AD_n - D_{n-1} = P_n E
\end{array}$$

Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени  $A$  и сложим:

$$\implies \chi_A(A) E = 0$$

□

### 13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора

**Определение.** Минимальным анулирующим многочленом линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  - это анулирующий многочлен минимальной степени, анулирующий  $\varphi$

Обозначается:  $\mu_\varphi(\lambda)$  (Зачастую его выбирают со старшим коэффициентом = 1)

Ясно, что:

$$m = \deg \mu_\varphi(\lambda) \leq n \leq \deg \chi_\varphi(\lambda)$$

**Теорема.**

1.  $\mu_\varphi(\lambda)$  делит анулирующий многочлен оператора  $\varphi$  (в частности  $\chi_\varphi(\lambda)$ )
2. Если  $\mu_\varphi(\lambda)$  - тоже минимальный многочлен  $\varphi$ , то:

$$\mu'_\varphi(\lambda) = \alpha \mu_\varphi(\lambda), \quad \alpha \neq 0$$

Он определен единственным образом с условием, что старший коэффициент = 1

3. Если все корни  $\lambda_i$  характеристического многочлена принадлежат  $\mathbb{F}$ , то они являются и корнями минимального многочлена

*Доказательство.*

1. Пусть  $p(\varphi) = 0$ , для некоторого  $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$

Разделим  $p$  с остатком на  $\mu_\varphi$ :

$$p(\lambda) = \mu_\varphi(\lambda) \cdot p(\varphi) + r(\varphi) \implies r(\varphi) = 0$$

$$\implies \deg \mu_\varphi(\lambda) = \min \implies r(\lambda) = 0$$

2. Т.к.  $\mu_\varphi(\lambda) \mid \mu'_\varphi(\lambda)$  и  $\mu'_\varphi(\lambda) \mid \mu_\varphi(\lambda) \implies \frac{\mu'_\varphi}{\mu_\varphi} = \alpha \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$

$$\text{Если } \mu_\varphi(\lambda) = \lambda^m + \dots \text{ и } \mu'_\varphi(\lambda) = \lambda^m + \dots \implies \alpha = 1$$

3. Допустим, что  $\exists j : \mu_\varphi(\lambda_j) \neq 0$ , т.е. в разложение  $\mu_\varphi$  не входит  $(\lambda - \lambda_j)$   
 $\implies \exists$  вектор  $v \in V : \varphi(v) = \lambda_j v$

$$0 = \mu_\varphi(\lambda)(v) = \prod_{i \neq j} (\varphi - \lambda_i)(v) \neq 0$$

- противоречие

□

## Примеры.

1.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \chi_\varphi(\lambda) = (2 - \lambda)^3$$

$$A_\varphi - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A - 2E)^2 \neq 0, (A - 2E)^3 = 0 \implies \mu_\varphi = -\chi_\varphi$$

2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \chi_\varphi = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

$$(A_\varphi - 2E)(A_\varphi - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \implies \mu_\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Вопросы:

1. Для каких операторов  $\varphi$  (или  $A_\varphi$ )  $\chi_\varphi(\lambda) = \pm \mu_\varphi(\lambda)$ ?
2. Для каких  $\varphi$  корни  $\mu_\varphi(\lambda)$  простые?

**Определение.** Оператор  $\varphi$  нильпотентный, если:

$$\exists L \in \mathbb{N} : \varphi^L = 0$$

Если  $L$  - минимальный с этим условием, то  $L$  - индекс нильпотентности

**Пример.**  $D = \frac{d}{dt}$  в пространстве  $\mathbb{R}[t]_n$ , то  $D^{n+1} = 0$

**Утверждение.** Все собственные значения нильпотентного оператора  $= 0$

*Доказательство.* Если  $v \neq 0$ ,  $\varphi(v) = \lambda v$ :

$$\implies \varphi^L = \lambda^L v \neq 0 \implies \lambda = 0 \implies \chi_\varphi(\lambda) = \pm \lambda^n$$

□

## 14 Корневые подпространства

$\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор над  $\mathbb{F}$ ,  $\dim V = n$

Все корни характеристического многочлена для  $\varphi$  принадлежат  $F$  так, что:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}, \quad (\lambda - \lambda_j)^{k_j}, \quad \forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \sum_{i=1}^s k_i = n$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}} \mid \cdot \chi_\varphi(\lambda)$$

$$\implies 1 = f_1(\lambda) \prod_{i \neq 1} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} + \dots + f_s(\lambda) \prod_{i \neq s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

$$1 = q_1(\lambda) + \dots + q_s(\lambda) \implies \text{id} = q_1(\lambda) + \dots + q_s(\lambda) = Q_1 + \dots + Q_s$$

$$\forall x \in V : Q_1(x) + \dots + Q_s(x) \implies V = \text{id}Q_1 + \dots + Q_s$$

Обратим внимание, что:

$$\forall i \neq j : Q_i Q_j = Q_j Q_i = 0$$

Т.к. в  $q_i(\lambda)q_j(\lambda)$  входят все множители, входящие в разложение  $\chi_\varphi(\lambda) \implies$  по теореме Гамильтона-Кэли:

$$q_i(\varphi)q_j(\varphi) = 0$$

Умножим равенство  $\text{id} = Q_1 + \dots + Q_i + \dots + Q_s$  на  $Q_i$  :

$$\implies \text{id}Q_i = Q_i = Q_iQ_1 + \dots + Q_iQ_i + \dots = Q_iQ_s \implies Q_i^2 = Q_i$$

**Определение.**  $Q_i^2 = Q_i$  - идемпотентный оператор

Разложение  $\forall$  вектора  $x$  в сумму:  $Q_1(x) + \dots + Q_s(x)$  - единственно

Докажем равенство:  $x = y_1 + \dots + y_s$ , надо доказать, что  $y_i = x_i$  Из равенства  $x = Q_1(x) + \dots + Q_s(x) \implies Q_i(x) = Q_i(Q_i(x)) = Q_i(x_i) \implies x_i = y_i$ , где  $y_i \in \text{Im}Q_i$

Введем обозначение  $K_i = \text{Im}Q_i$

Докажем, что  $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$

**Определение.** Подпространство  $K_i = \text{Im}Q_i$  назовем корневым подпространством, отвечающим корню  $\lambda_i$

$$q_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda) \cdot \chi_\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}}$$

**Утверждение.**

1. Корневые подпространства инвариантны

2.  $K_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$ ,  $1 \leq i \leq s$

*Доказательство.*

1. Для линейного оператора  $\varphi$  и линейного  $q(\lambda)$  подпространство  $q(\varphi)(V)$  инвариантно

$$q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m, \quad q(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + \dots + a_m\varphi^m$$

Возьмем  $v = \text{Im}q(v) \implies \exists u \in V : v = q(\varphi)(u) \implies \varphi(v) = (\varphi \cdot q(\varphi))(u) = q(\varphi)(\varphi(u)) \in \text{Im}q(u)$  Оператор  $\varphi$  и любой  $q(\varphi)$  перестановочны

2.  $\forall x_i \in \text{Im}Q_i \implies x_i = Q_i(u_i)$

$$(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i} = (\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i} \cdot \underbrace{\prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j E)^{k_j}}_{\chi_\varphi(\varphi)}(u_i) = 0$$

$$\implies K_i \subseteq \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$$

□

## 15 Теорема Жордана

Основное условие:  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор, все его корни  $\in \mathbb{F}$

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ и } \sum_{i=1}^s k_i = \dim V)$$

$V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$ , где  $K_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \text{id})^{k_i}$  - корневое подпространство

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V | \varphi(x) = \lambda_i x\}, \quad \dim V_{\lambda_i} \leq k_i = \dim K_i$$

Так как  $K_i$  - инвариантное подпространство относительно оператора  $\varphi$ , можно рассмотреть ограничение:

$$(\varphi - \lambda_i \text{id})|_{K_i} := B_i$$

Из определения  $k_i$  следует, что  $B_i^{k_i} = 0$ , то есть  $B_i$  - нильпотентный оператор.

Обозначим  $h_i$  - показатель нильпотентности оператора, т.е.  $B_i^{h_i} = 0$ ,

но  $B_i^k \neq 0 \quad \forall k < h_i$

В базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

где  $A_i = A_{\varphi|_{K_i}}$  - матрица порядка  $k_i$ ,  $A_i - \lambda_i E_{k_i} = B_i$ ,  $B_i^{k_i} = 0$

Обозначим  $K_i := K$ ,  $B_i := B$ ,  $k_i := k$ , тогда:

$$\forall \bar{x} \in K : B^k(x) = 0$$

если  $x \neq 0$ , то  $\exists$  наименьшее значение  $m$ :

$$B^m(x) = 0, \quad B^{m-1}(x) \neq 0 \quad (m \leq h)$$

Назовём это высотой вектора  $x$ .

Для фиксированного вектора  $x \neq 0$  (высоты  $m$ ) рассмотрим векторы:

$$x, B^0 x, Bx, \dots, B^{m-1} x, B^m x = 0$$

**Определение.** Векторы  $\{x, B^0 x, Bx, \dots, B^{m-1} x = 0\}$  называются жордановой цепочкой.

**Лемма.** Вышеуказанные векторы являются линейно независимыми.

*Доказательство.* Предположим, что:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 B^0 x + \dots + \alpha_{m-1} B^{m-1} x = 0$$

Подействуем на это равенство оператором  $B^{m-1}$ :

$$\alpha_0 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

На оставшиеся векторы подействуем оператором  $B^{m-2}$ :

$$\alpha_1 B^{m-1} x = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

и т.д. Получим, что  $\forall i = \overline{0, m-1} : \alpha_i = 0 \implies$  векторы являются линейно независимыми.  $\square$

**Определение.** Подпространство, натянутое на эти векторы:

$$\langle x, B^0 x, Bx, \dots, B^{m-1} x \rangle$$

называется циклическим подпространством, порождённым жордановой цепочкой. Данное подпространство обозначим  $U$ ,  $\dim U_x = m$ .

Обычно векторы жордановой цепочки нумеруют с конца, то есть:

$$a_1 = B^{m-1} x, a_2 = B^{m-2} x, \dots, a_m = x$$

Тогда  $a_1$  - собственный вектор для  $B$ , и для  $\forall j = \overline{2, m} : a_{j-1} = Ba_j$

Векторы  $a_j$  называются присоединёнными к вектору  $a_{j-1}$

К вектору  $a_1$ :  $a_2$  - присоединённый,  $a_3$  - второй присоединённый и т.д.

**Определение.**

Матрица ограничения оператора  $B$  на подпространство  $U_x = \langle a_1 \dots a_m \rangle$  :

$$B|_{U_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

называется жордановой клеткой с собственным значением  $\lambda = 0$

$$\lambda = \lambda_i : A_{\varphi|_{U_x}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = J_k(\lambda_i)$$

- жорданова клетка с собственным значением  $\lambda = \lambda_i$ , где:

$$\varphi(a_2) = a_1 + \lambda_i a_2, \varphi(a_{j+1}) = a_j + \lambda_i a_{j+1}$$



### Теорема. Жордана

Если все характеристические корни оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  принадлежат полю  $\mathbb{F}$ , то  $V$  является прямой суммой циклических подпространств для оператора  $\varphi$ . Это равносильно тому, что в  $V$  существует базис, составленный из жордановых цепочек. Такой базис называется жордановым базисом.

Если жордановый базис уже построен: Пусть имеются  $r$  жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , необязательно различным, длины которых  $m_1, \dots, m_r$  соответственно, тогда в этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{m_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^r m_i = n = \dim V$$

- жорданова матрица - жорданова нормальная форма (ЖНФ) матрицы  $A_\varphi$ .

### Теорема. Жордана (матричная формулировка)

Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , все характеристические корни которой  $\in \mathbb{F}$ ,  $\exists$  матрица  $C$  ( $\det C \neq 0$ ) такая, что:

$$C^{-1}AC = J$$

- жорданова матрица. При этом жордановы клетки определены для матрицы  $A$  единственным образом с точностью до расположения клеток на диагонали жордановой матрицы.

Замечание. Матрицу  $A$  можно интерпретировать как матрицу линейного оператора  $\varphi$ , для него верна теорема Жордана.

Доказательство. (См. Шафаревич И.Р. "Линейная алгебра")

Доказательство достаточно провести для ограничения оператора на каждое корневое подпространство  $K_i$ , в этом случае обозначаем  $B = (\varphi - \lambda_i \text{id})$ , где  $B$  - нильпотентный оператор

**Лемма.** Если  $B$  - такой оператор в пространстве  $V$ , что:

$$\text{Im} B = B(V) \subset V$$

то  $V$  обладает  $(n - 1)$ -мерным инвариантным подпространством.

Пусть  $e_1, \dots, e_m$  - базис в  $\text{Im} B$ ,  $m < n = \dim V$

Дополним его до базиса в  $V$  векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n$ , тогда:

$\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  — инвариантное подпространство:

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i \implies B_w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i B e_i \in \text{Im} B \subseteq W$$

$\implies W$  - инвариантное подпространство

Ниже будем считать, что  $B : V \rightarrow V$  - нильпотентный оператор,  $\dim V = n$ ,  $W$  -  $(n-1)$ -мерное инвариантное подпространство в  $V$

Будем проводить индукцию по  $n$ :

Если  $n = 1$ , то  $B = 0$  и любой базис - жорданов

Пусть  $n > 1$ , предположение индукции: в  $W$   $\exists$  базис для  $B|_W$

Выберем вектора  $a \in V \setminus W$ . По предположению индукции:

$$W = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

Если вектор  $a$  - собственный для  $B$ , а т.к. он ЛНЗ с векторами из  $W$ , то:

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \oplus \langle a \rangle$$

- нужное разложение пространства  $V$

Если  $a$  - не собственный, то он порождает жорданову цепочку некоторой длины  $m$ , которая не содержится в  $W$ . □

**Лемма.** Пусть  $U$  - циклическое подпространство, порожденное корневым вектором  $e$  высоты  $m$ . Тогда  $\forall u \in U$  представляется в виде:

$$u = f(B)e, \text{ где } f(t) - \text{минимальной степени } \leq m-1$$

**Лемма.** Если  $U = \langle e, Be, \dots, B^{m-1}e \rangle$ , то:

$$\forall u \in U \exists f(t) \in F[t] : u = f(B)e, \deg f \leq m-1$$

Если  $f(0) \neq 0$ , то высота  $u = m$ , то есть  $u$  порождает то же самое циклическое подпространство.

*Доказательство.* Пусть  $B : V \rightarrow V$  - нильпотентный оператор,  $\dim V = n$ ,  $W$  -  $(n-1)$ -мерное подпространство, содержащее  $\text{Im} B$ .

Предположение индукции:  $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ , т.е.  $\forall w \in W$ :

$$w = u_1 + \dots + u_r, U_i = \langle e_i, B e_i, \dots \rangle$$

Выбираем вектор  $e \in V \setminus W$ , тогда  $e$  ЛНЗ с векторами из  $W$ .

Рассмотрим  $Be \in W$  так, что  $(*) Be = u_1 + \dots + u_r, u_i \in U_i$ .

Если  $Be = 0$ , то:

$$V = \langle e \rangle \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_r - \text{то, что нам и надо}$$

Если  $Be \neq 0$ , то найдется  $i$ , что  $u_i \neq 0$ . Тогда  $h(e) = m + 1$ , т.к.  $h(Be) = m$  (это значит, что  $B^{m-1}e = 0$ ,  $B^m e \neq 0$ )

Если в разложении (\*)  $u_i \in B(U_i) \implies \exists v_i : u_i = Bv_i$

Рассмотрим вместо  $e$  вектор  $e - v_i : B(e - v_i) = u_1 + \dots + u_i + \dots + u_r - u_i \implies$  в разложение такого вектора  $u_i$  не входит.

Заменяя  $e$  на нужные разности  $e - v_i$ , можно считать либо  $u_i \notin B(U_i)$ , либо  $u_i = 0$

Хотя бы один из векторов  $u_i \neq 0$ , выберем из них вектор, имеющий максимальную высоту  $m$  ( $m = \max(\dim U_i)$ )

Скажем, пусть это будет вектор  $u_1$ , тогда  $h(e) = m + 1$

Докажем, что:

$$V = \langle e, Be, \dots, B^m e \rangle \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$$

Сумма размерностей подпространств в правой части:

$$(m_1 + 1) + \dots + m_r = n = \dim V$$

Достаточно доказать, что:

$$\langle e, Be, \dots, B^m e \rangle \cap (U_2 \oplus \dots \oplus U_r) = \{0\}$$

Пусть  $v = \lambda_1 e + \dots + \lambda_{m+1} B^m e \in U_2 \oplus \dots \oplus U_r$

Т.к.  $e \notin W$ , то  $\lambda_1 = 0$ , но  $Be_i = u_1 + \dots + u_r$  - проекция разложения на  $U_1 \implies$

$$\lambda_2 u_1 + \lambda_3 Bu_1 + \dots + \lambda_{n+1} B^{n-1} u_1 = 0 \implies \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0 \implies v_i = 0$$

□

*Замечание.*  $r$  - количество векторов циклического подпространства в разложении корневого подпространства  $K$ , отвечающего корню  $\lambda_0$ , равно геометрической кратности корня  $\lambda_0$  характеристического многочлена.

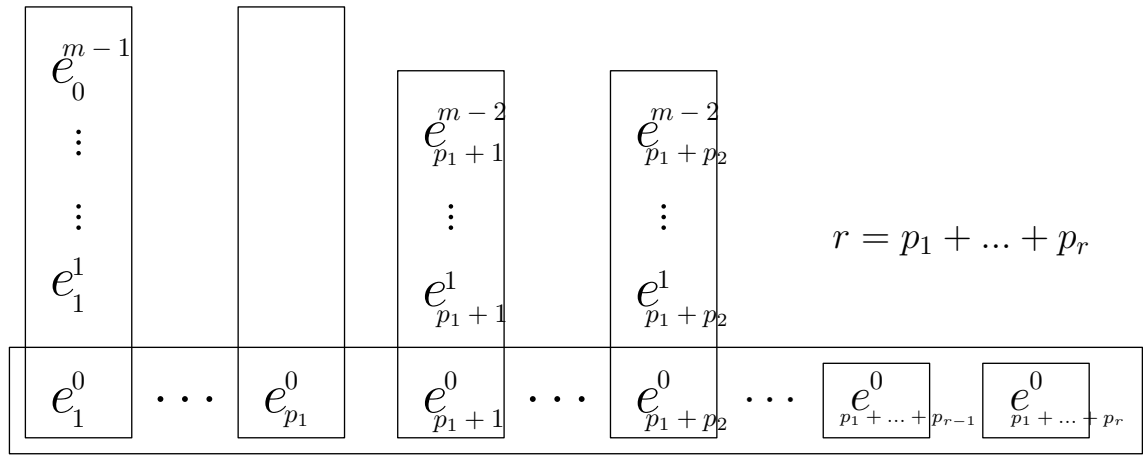
## 15.1 Изображение разложения корневых подпространств

Обозначим:  $r = \dim \text{Ker } B$  - размерность собственного подпространства

Занумеруем собственные векторы, входящие в цепочки, располагая цепочки по убыванию высоты.  $m$  - максимальная высота цепочки,  $1$  - минимальная

Также введем обозначение для последовательных присоединённых векторов:

есть  $p_1$  цепочек высоты  $m$ ,  $p_2$  - высоты  $m - 1, \dots, r - (p_1 + \dots + p_{r-1})$  - высоты  $1$



$$V = U_1 \oplus U_r, \dim U_{i+1} \leq \dim U_i$$

$$\begin{aligned} BV &= BU_1 \oplus \dots \oplus BU_r \\ &\vdots \\ B^k V &= B^k U_1 \oplus \dots \oplus B^k U_r \end{aligned}$$

$$\text{Если } \dim U_i = m_i, \dim(B_k U_i) = \begin{cases} m_i - k, & \text{если } k < m_i \\ 0, & \text{если } k \geq m_i \end{cases} \implies$$

$$\dim(B^k V) = \sum_{i=1}^r \dim B^k U_i = q_{k+1} + 2q_{k+2} + \dots + (m-1)q_m$$

Пусть  $q_i$  - число циклических подпространств размерности  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$

Обозначим  $r_k = \text{rk} B^k$

Для  $k = 0$  до  $m-1$  получим равенства:

$$\begin{aligned} k=0: & q_1 + 2q_2 + \dots + mq_m = n \\ k=1: & q_2 + 2q_3 + \dots + (m-1)q_m = r_1 = \text{rk} B \end{aligned}$$

...

$$q_m = r_{m-1} = \text{rk} B^{m-1} \neq 0$$

$B^m = 0$  на корневом подпространстве

Вычитая из каждого уравнения следующее, получим систему:

$$\left\{ \begin{aligned} q_1 + q_2 + \dots + q_m &= n - r_1 \implies q_1 = n - 2r_1 + r_2 \\ q_2 + \dots + q_m &= r_1 - r_2 \implies q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 \\ &\dots \\ q_m &= r_{m-1} - r_m \quad (r_m = 0) \end{aligned} \right.$$

$$\implies q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1} \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

Вывод: количество и порядок (высоты цепочек) однозначно определяется по матрице  $B = A|_{\varphi - \lambda \text{id}}$  - эти ранги не зависят от конкретного разложения  $\implies$  определяются единственным образом.

**Следствие. Пусть:**

$$\chi_\varphi = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

- характеристический многочлен

$$\mu_\varphi = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

- минимальный многочлен

Тогда  $\forall i = \overline{1, s}$  :  $m_i$  равна max размерности жордановой клетки, отвечающей корню  $\lambda_i$

**Следствие. Критерий диагонализуемости в терминах min многочлена:**

Оператор  $\varphi$  диагонализуем  $\iff m_1 = \dots = m_s = 1$

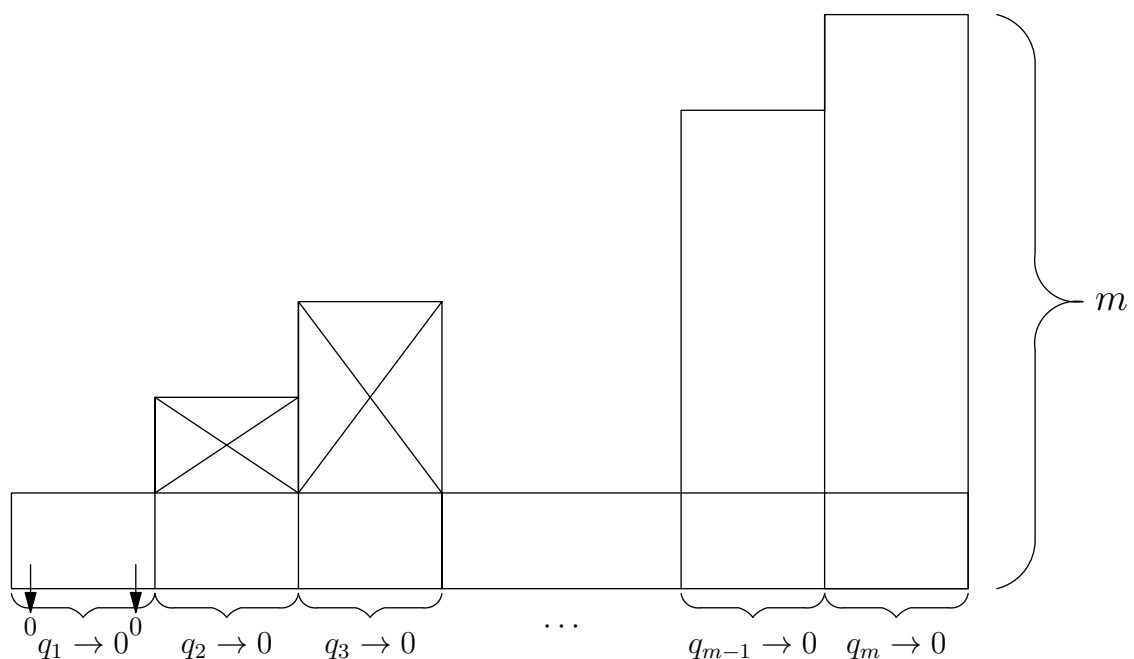
*Доказательство.* Достаточно доказать для каждого корневого подпространства  $k_i$

$$B = A_{\varphi - \lambda_i \text{id}}|_{k_i}$$

- блочно-диагональная матрица с клетками размера  $m_j$

□

Переделываем:



Применим оператор  $B$ :

$$\begin{cases} \dim V = q_1 + 2q_2 + \dots + (m-1)q_{m-1} + mq_m = n \\ \dim \operatorname{Im} B = q_2 + \dots + (m-2)q_{m-1} + (m-1)q_m = r_1 \\ \vdots \\ \dim \operatorname{Im} B^{m-1} = q_m = r_{m-1} \end{cases}$$

Некоторые применения приведут матрицу к жордановой форме (в частности, диагонализированности)

## 15.2 Решение СЛАУ

Пусть дана система  $AX = B$  с квадратной матрицей  $A$ , все характеристические корни которой  $\in \mathbb{R}$ .

Сделаем замену:

$$X = CY \implies (AC)Y = B \iff (\underbrace{C^{-1}AC}_y)Y = C^{-1}b = b'$$

Можно взять  $C$  - матрицу перехода к жорданову базису

$$y = \begin{pmatrix} \boxed{Y_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{Y_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Если  $y$  жорданова клетка, то уравнения:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = b'_1 \\ \lambda x_2 + x_3 = b'_2 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{легко решить}$$

## 15.3 Решение СЛДУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$\dot{X} = AX$ , где  $A$  - квадратная

$$X = CY \implies \dot{X} = C\dot{Y}$$

$$C\dot{Y} = (AC)Y \Rightarrow \dot{Y} = (C^{-1}AC)Y$$

Если матрица  $C^{-1}AC$  диагональная:  $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_i \neq 0$  получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \lambda_n y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = C_1^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Тогда  $X = CY$

Если

$$C^{-1}AC = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \lambda_0 y_{n-1} + y_n \\ \dot{y}_n = \lambda_0 y_n \end{cases}$$

решаем снизу вверх.

## 15.4 Функции от матриц

$$\begin{aligned} (C^{-1}AC) = J &= \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix} \Rightarrow A = CYC^{-1} \\ \Rightarrow A^n &= (CYC^{-1})(CYC^{-1})...(CYC^{-1}) = CY^n C^{-1} \\ J^n &= \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}^n(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}^n(\lambda_i)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для жордановой клетки:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^n &= \left( \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 + \dots = \begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1} C_n^1 & \lambda^{n-2} C_n^2 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \lambda^n & \lambda^{n-1} C_n^1 & \lambda^{n-2} C_n^2 \\ & & & \ddots & \lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Упражнение.** Пусть  $f(t)$  - многочлен,  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

Доказать, что:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

## 15.5 Вычисление корня и экспоненты

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Для  $J_n(\lambda) = \lambda E + B \implies$

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^{t\lambda E} \cdot e^{tB} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{A+B} = e^a \cdot e^b \iff AB = Ba)$$

**Примеры.**

1.

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)t^2 + \dots$$

2.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = E + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2!}C_{\frac{1}{2}}^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \neq 0$$



## 16 Билинейные и квадратичные формы

**Определение.** Функция  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  называется билинейной функцией, если:

1. аддитивность:

$$\forall x_1, x_2, y : b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2 : b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$$

2. однородность:

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} : b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$$

**Определение.**  $b(x, y)$  - называется симметрической, если:

$$\forall x, y \in V : b(y, x) = b(x, y)$$

**Примеры.**

1. Симметрическая билинейная функция - скалярное произведение

2.  $V = Mn(\mathbb{F}) : b(X, Y) = tr(XY)$

3.  $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

### 16.1 Запись билинейной функции в координатах

Пусть в  $V$  задан базис  $e_1, \dots, e_n$ , тогда:

$$b\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i, \sum_{j=1}^m y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^m b(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^m x_i y_j (e_i, e_j)$$

**Определение.** Обозначим  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ , тогда  $B_e = b_{ij}$  - матрица билинейной функции  $b(x, y)$  в базисе  $e$

Тогда:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B Y \quad (1)$$

## 16.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть  $e' = Ce$ ,  $C$  - матрица перехода от  $e$  к  $e'$

Тогда:

$$X = CX', Y = CY' \quad (2)$$

По определению матрицы билинейной функции, в новом базисе:

$$b(x, y) = X'^T B' Y' \quad (B' = Be')$$

Подставим в формулу (1) выражение (2):

$$\begin{aligned} b(x, y) &= X'^T C^T B C Y' = X'^T (C^T B C) Y' = X'^T B' Y' \quad (\forall X', Y' \in \mathbb{F}^n) \\ \implies B' &= C^T B C \quad (\forall i, j : X' := E_i, Y' := E_j) \end{aligned}$$

**Следствие.**

$$1. \operatorname{rk} B' = \operatorname{rk} B$$

$$2. \mathbb{F} = \mathbb{R} \implies \operatorname{sgn}(\det B') = \operatorname{sgn}(\det B)$$

**Определение.** Билинейная функция  $b(x, y)$  называется кососимметрической (при  $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ ), если:

$$\forall x, y \in V : b(x, y) = -b(y, x)$$

**Утверждение.** (\*) Любая билинейная функция над  $\mathbb{F} : \operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$  единственным образом представляется в виде:

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y), \quad \text{где } b_+(x, y) \equiv b_+(y, x), \quad b_-(x, y) \equiv -b_-(y, x)$$

*Доказательство.* Если же есть равенство:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \\ b(y, x) = b_+(y, x) - b_-(y, x) \end{cases} &\implies \\ b_+(x, y) = \frac{b(x, y) + b(y, x)}{2}, \quad b_-(x, y) = \frac{b(x, y) - b(y, x)}{2} \end{aligned}$$

□

**Утверждение.** Билинейная функция  $b(x, y)$  симметрична (кососимметрична)  $\iff$  в любом базисе  $e$ :

$$B_e^T = B_e \quad (B_e^T = -B_e)$$

*Доказательство.* (Докажем для симметрической, для кососимметрической аналогично)

$\implies$  Пусть  $B = (b_{ij})$ , тогда  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ .

$$\forall x, y \in V, b(x, y) = b(y, x) \implies b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$$

$\Longleftarrow$

$$b(x, y) = X^T B Y, b(y, x) = Y^T B X = (X^T B^T Y)^T = (X^T B Y)^T = b(x, y)$$

□

Утверждение (1)  $\iff \forall$  матрицы  $B$  некоторой билинейной функции верно, что  $B = B_+ + B_-$ , где  $B_+$  - матрица симметрической билинейной функции, а  $B_-$  - матрица кососимметрической билинейной функции.

**Определение.** Квадратичная функция, порождённая билинейной функцией  $b(x, y)$  - это функция на  $V$ . Обозначаем:  $k(x) := b(x, x)$ , если  $k(x) \not\equiv 0$ .

Если  $b$  - кососимметрическая функция, то  $b(x, x) = 0 \implies k(x) \equiv 0$ . В общем случае существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную, таких, что:

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \implies b(x, x) = b_+(x, x)$$

**Теорема.**  $\forall$  квадратичной функции  $\exists!$  симметрическая билинейная функция, которая её порождает.

*Доказательство.* Допустим, что  $b(x, y) = b(y, x)$  - симметрическая билинейная функция и  $k(x) = b(x, x)$ . Тогда  $\forall x, y \in V$ :

$$\begin{aligned} k(x+y) &= b(x+y, x+y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = \\ &= b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = k(x) + 2b(x, y) + k(y) \end{aligned}$$

Так как  $\text{char} \mathbb{F} \neq 2$ , то:

$$b(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$$

□

**Определение.** Билинейная функция  $b(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$  называется поляризацией квадратичной функции  $k$ .

Далее будем считать матрицу квадратичной формы матрицей её полярной симметрической билинейной функции  $b(x, y)$

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_iy_i + \sum_{i<j} b_{ij}x_iy_j + \sum_{i>j} b_{ij}x_iy_j$$

$$\forall i, j : b_{ij} = b_{ji} \implies b(x, x) = k(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_ix_j \quad (1)$$

**Пример.** Пусть  $k(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 - 7x_3^2$ , тогда:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Пусть  $b(x, y)$  - симметрическая или кососимметрическая билинейная функция и  $\emptyset \neq L \leq V$ . Ортогональным дополнением к  $L$  относительно билинейной формы  $b(x, y)$  называется:

$$L^\perp := \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in L\}$$

*Замечание.* Запись  $x \perp y$  означает, что  $b(x, y) = 0$ .

**Определение.**  $V^\perp = \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in V\}$  - ядро формы.

**Определение.** Билинейная функция  $b(x, y)$  называется невырожденной, если:

$$\text{Ker} b = V^\perp = \{0\}$$

**Упражнение.**  $b(x, y)$  - невырожденная функция  $\iff \det B \neq 0$ .

## 16.3 Квадратичные формы

**Определение.** Квадратичная форма в некотором базисе называется диагональной, если в этом базисе:

$$k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2, \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{F}$$

**Теорема.** В конечномерном пространстве  $V$  ( $\text{char} \mathbb{F} \neq 2$ )  $\exists$  базис, в котором эта форма диагональна.

*Доказательство.* (Алгоритм Лагранжа - метод выделения полных квадратов)

По формуле (1):

$$k(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij}x_ix_j$$

1. Основной случай:

$\exists i : b_{ii} \neq 0 \implies$  можно перенумеровать неизвестные  $x_1, \dots, x_n$ , так что  $b_{11} \neq 0$ . Выделим в  $k(x)$  все одночлены, содержащие  $x_1$ :

$$k(x) = \sum_{i=1}^n b_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n b_{1i} x_i + \tilde{k}(x_2, \dots, x_n)$$

и дополним выражение до квадрата:

$$\begin{aligned} k(x) &= b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i + (\sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i^2)) - \frac{(\sum_{i=2}^n b_{1i} x_i)^2}{b_{11}} + \tilde{k} = \\ &= b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i)^2 + k_2(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Затем для формы  $k_2(x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n b'_{ii} x_i^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} b'_{ij} x_i x_j$  найдём коэффициент  $b'_{jj} \neq 0$  и выделим квадрат как на предыдущем шаге. На каждом шаге число переменных уменьшается на единицу, а значит, за конечное число шагов (а именно  $\leq n - 2$ ) форма приобретёт диагональный вид.

2. Особый случай:

$\forall i : b_{ii} = 0$ , но так как  $k(x) \not\equiv 0 \implies \exists$  индексы  $i$  и  $j$  такие, что  $b_{ij} \neq 0$ , то есть в выражение  $k(x)$  входит одночлен  $2b_{ij} x_i x_j$ .

Пусть  $x_i = x'_i + x'_j$  и  $x_j = x'_i - x'_j$ , тогда  $x_i x_j = x'^2_i - x'^2_j$ , то есть появился квадрат с коэффициентом, не равным нулю  $\implies$  можно перейти к общему случаю.

□

*Замечание.* В благоприятном случае, когда на первом шаге коэффициент при  $x_1$  не равен нулю, на втором шаге коэффициент при  $x_2$  не равен нулю и т.д., матрица замены будет иметь вид:

$$C_{e \rightarrow e'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица с 1 на диагонали  $\implies |C_{e \rightarrow e'}^{-1}| = 1 \neq 0$ .

**Определение.** Форма  $k(x_1, \dots, x_n)$  называется канонической (нормальной), если:

1. (над  $\mathbb{R}$ ) в диагональном виде  $\forall \alpha_i$  принимает только значения: -1, 0, 1
2. (над  $\mathbb{C}$ ) в диагональном виде  $\forall \alpha_i$  принимает только значения: 0, 1

### Примеры.

1. Пусть  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ :

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \dots + \alpha_nx_n^2$$

Если  $rkB = r \implies k(x) = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \dots + \alpha_rx_r^2 (\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0)$ .

Если  $\alpha_i > 0$ , то введём обозначение:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\alpha_i}x_i \implies k = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_p^2 - \hat{x}_{p+1}^2 - \dots - \hat{x}_r^2$$

где  $p$  - количество коэффициентов  $\alpha_i > 0$ .

Если  $\alpha_i < 0 \implies \hat{x}_i = -\sqrt{\alpha_i}x_i$ .

2. Пусть  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ :

$$\forall i = \overline{1, r} : \hat{x}_i = \sqrt{\alpha_i}x_i \implies k = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_r^2$$

Таким образом, в вещественном случае для любой квадратичной формы  $k(x)$  существует замена координат  $X = CY (|C| \neq 0)$ , такая что в новых координатах

$$k = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2.$$

**Определение.**  $p$  в такой записи называется положительным индексом инерции,  $q$  - отрицательным индексом инерции.

### Теорема. единственности (закон инерции)

Если в некоторых базисах квадратичная форма  $k$  имеет канонический вид

$$k = \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2 = \sum_{i=1}^{p'} z_i^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} z_j^2$$

то  $p = p', q = q'$ .

*Доказательство.* Так как  $p + q = rkB = p' + q'$ , достаточно доказать, что  $p = p'$ . От противного. Пусть  $p' < p$ . Пусть параметры  $p, q$  форма имеет в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , а параметры  $p', q'$  - в базисе  $f_1, \dots, f_n$ . Рассмотрим подпространства  $U_1 = \langle e_1, \dots, e_p \rangle, U_2 = \langle f_{p'+1}, \dots, f_n \rangle$ . Очевидно,  $\dim U_1 = p, \dim U_2 = n - p'$ .

$$\dim U_1 + \dim U_2 = p - p' + n > n; \quad U_1 + U_2 \subset V \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \leq n$$

Из формулы Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) > 0$$

Рассмотрим вектор  $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$ :

$$v = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \Rightarrow k(v) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \geq 0$$

С другой стороны:

$$v = \sum_{k=p'+1}^n \beta_k f_k \Rightarrow k(v) = \sum_{k=p'+1}^n \beta_k \leq 0$$

Противоречие с  $v \neq 0$ . □

## 16.4 Знакоопределённые квадратичные формы

**Определение.** Пусть  $b(x, y)$  - симметрическая билинейная форма. Векторы  $u, v$  называются *ортгоналными*, если  $b(u, v) = 0$ . Обозначается  $u \perp v$ .

**Определение.** Базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$  - *ортгоналный*, если  $b(e_i, e_j) = 0 (i \neq j)$ .

**Определение.** Для квадратной матрицы  $B$  главными минорами (угловыми минорами) называются миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ , где  $\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$ . Опре-

делим  $\Delta_n = |B|, \Delta_0 = 1$ .

**Теорема. Якоби** Пусть  $k(x) (= b(x, x), b - \text{симм. б. ф.})$  такова, что главные миноры её матрицы  $B$  в нек. базисе  $e : \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$  Тогда в  $V$  существует базис (и замена координат  $X = CY$ ), в котором

$$k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$$

*Доказательство.* Будем строить базис  $e'$  из базиса  $e$ , ортгоналный относительно  $b(x, y)$  (алгоритм ортгонализации Грама/Шмидта).

$$e'_1 := e_1; \quad \forall k \geq 1 \quad \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

причём  $b(e'_i, e'_j) = 0 (1 \leq i \neq j \leq k)$

Шаг алгоритма: допустим, что  $k > 1$  и векторы  $e'_1, \dots, e'_{k-1}$  уже построены.

Будем искать  $e'_k$  в виде

$$e'_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e'_i$$

где  $\lambda_i$  найдём из условия  $b(e'_k, e'_j) = 0, j = 0, \dots, k-1$

$$b(e'_k, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i b(e'_i, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \lambda_j b(e'_j, e'_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = -\frac{b(e_k, e'_j)}{b(e'_j, e'_j)}$$

Покажем по индукции, что  $b(e'_j, e'_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \neq 0$ .

Обратим внимание, что матрица перехода от  $e_1, \dots, e_{k-1}$  к  $e'_1, \dots, e'_{k-1}$  - верхняя треугольная с 1 по диагонали (предп. индукции). Запишем:  $C_{(e_1, \dots, e_k) \rightarrow (e'_1, \dots, e'_k)} =$

$$\begin{pmatrix} C_{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где по предположению индукции } C_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} B - \text{ матрица}$$

билин. формы  $b(x, y)$  в базисе  $e$ ,  $B'$  - в базисе  $e'$ , который мы строим.

$$B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle} = C_k^T B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle} C_k \Rightarrow \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = (\det C_k)^2 \cdot \det B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle}$$

$$\Delta'_k = \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = b'_{11} \dots b'_{kk} = \Delta_k$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta_k - 1}{\Delta_k - 2} \cdot b_{kk} = \Delta_k \Rightarrow b_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

□

Далее рассматриваем  $F = \mathbb{R}$ .

**Определение.** Квадратичная форма  $k(x)$  на пр-ве  $V$  над  $\mathbb{R}$  называется положительно определённой, если  $\forall x \neq 0 k(x) > 0$  (обозн.  $k > 0$ ); отрицательно определённой, если  $\forall x \neq 0 k(x) < 0$  (обозн.  $k < 0$ ); неотрицательно определённой, если  $\forall x k(x) \geq 0$  (обозн.  $k \geq 0$ ); неположительно определённой, если  $\forall x k(x) \leq 0$  (обозн.  $k \leq 0$ ).

**Утверждение.** Квадратичная форма  $k(x)$  является

1. положительно определённой  $\Leftrightarrow p = n, q = 0$ ;
2. отрицательно определённой  $\Leftrightarrow p = 0, q = n$ ;
3. неотрицательно определённой  $\Leftrightarrow q = 0$ ;
4. неположительно определённой  $\Leftrightarrow p = 0$ ;
5. знаконеопределённой  $\Leftrightarrow p, q > 0$ .

*Доказательство.* Очевидно.

□

**Теорема. Критерий Сильвестра**

Квадратичная форма  $k(x)$  с матрицей  $B$  является



1. положительно определённой  $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ .

2. отрицательно определённой  $\Leftrightarrow \forall k (-1)^k \Delta_k > 0$ .

*Доказательство. Достаточность:* По теореме Якоби  $\exists$  базис, в котором  $k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$ . Т.к. все  $\Delta_i > 0$  (знакопередающиеся для отрицательного случая), все коэффициенты  $> 0 (< 0)$ , т.е. значение формы на любом ненулевом векторе имеет необходимый нам знак.

*Необходимость:*  $k > 0 \Rightarrow \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \dots \cdot \Delta_n \neq 0 \Rightarrow$  применима т. Якоби, из которой следуют необходимые нам знаки на всех  $\Delta$ .  $\square$

*Замечание.* Т.к.  $b_{ii} = k(e_i)$ , у положительно определённой формы все  $b_{ii} > 0$ , у отрицательной все  $b_{ii} < 0$ .