



Механико-математический факультет

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, 2 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Преподаватель: Чубаров Игорь Андреевич

Студенты: Молчанов Вячеслав  
Соколов Егор

Группа: 108

Контакт: [Мой телеграм для связи](#)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Векторное пространство</b>	<b>3</b>
1.1	Изменение координат вектора при замене базиса . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Векторные подпространства</b>	<b>6</b>
2.1	Примеры . . . . .	6
2.2	Два основных способа задания подпространства в $V$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Пересечение и сумма подпространств</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Прямая сумма подпространств и пространств</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Линейные отображения и функции</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Линейные функции</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Линейные отображения и их матрицы</b>	<b>20</b>
<b>8</b>	<b>Матрицы линейного отображения</b>	<b>22</b>
8.1	Изменение матрицы линейного отображения при замене координат . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Линейные операторы</b>	<b>24</b>
<b>10</b>	<b>Действия над линейными отображениями</b>	<b>27</b>
<b>11</b>	<b>Собственные векторы и собственные значения оператора</b>	<b>29</b>
<b>12</b>	<b>Диагонализируемость</b>	<b>30</b>
12.1	Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением . . . . .	31
<b>13</b>	<b>Анулирующие многочлены линейных операторов</b>	<b>35</b>
13.1	Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора . . . . .	37
<b>14</b>	<b>Корневые подпространства</b>	<b>39</b>
<b>15</b>	<b>Теорема Жордана</b>	<b>41</b>
15.1	Изображение разложения корневых подпространств . . . . .	46
15.2	Решение СЛАУ . . . . .	48
15.3	Решение СЛДУ . . . . .	49
15.4	Функции от матриц . . . . .	49
15.5	Вычисление корня и экспоненты . . . . .	50
<b>16</b>	<b>Билинейные и квадратичные формы</b>	<b>51</b>
16.1	Запись билинейной функции в координатах . . . . .	52
16.2	Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса . . . . .	52
16.3	Квадратичные формы . . . . .	55
16.4	Знакоопределённые квадратичные формы . . . . .	57
16.5	Кососимметрические билинейные формы . . . . .	60
<b>17</b>	<b>Евклидовы пространства и их обобщения</b>	<b>62</b>
17.1	Основные понятия и утверждения . . . . .	62

17.2	Линейные операторы в евклидовом пространстве . . . . .	68
17.3	Самосопряжённые операторы . . . . .	69
17.4	Ортогональные операторы . . . . .	71
<b>18</b>	<b>Общие линейные операторы</b>	<b>74</b>
<b>19</b>	<b>Квадратичные формы</b>	<b>76</b>
<b>20</b>	<b>Полуторалинейные, эрмитовы формы. Унитарные (эрмитовы) пространства</b>	<b>78</b>
20.1	Линейные операторы в унитарном пространстве . . . . .	80
<b>21</b>	<b>Аффинные пространства и их преобразования</b>	<b>82</b>
21.1	Аффинные плоскости (подпространства) . . . . .	83
<b>22</b>	<b>Евклидовы аффинные пространства</b>	<b>86</b>
22.1	Аффинные отображения и преобразования . . . . .	88
<b>23</b>	<b>Тензоры</b>	<b>95</b>
23.1	Основные определения и первоначальные конструкции . . . . .	95
23.2	Свёртка тензора . . . . .	99
23.3	Симметрические, кососимметрические тензоры . . . . .	100
23.4	Тензоры на евклидовом пространстве . . . . .	103
<b>24</b>	<b>Факультативный материал</b>	<b>104</b>
24.1	Некоторые группы линейных и аффинных операторов . . . . .	105

# 1 Векторное пространство

**Определение.** Множество  $V$  называется *векторным пространством* над полем  $F$ , если заданы операции  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  и  $\cdot$  :  $F \times V \rightarrow V$  и выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V : (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2.  $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V : v + \vec{0} = v$
3.  $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4.  $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6.  $\forall v \in V : 1_F \cdot v = v$
7.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8.  $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

*Загадка:* Одна из этих аксиом - следствие других. Какая? *Ответ:* Аксиома коммутативности.

*Доказательство.* Сначала докажем два свойства.

1.  $0 \cdot \bar{a} = 0 \cdot \bar{a} + \vec{0} = 0 \cdot \bar{a} + (0 \cdot \bar{a} + (-0 \cdot \bar{a})) = (0 \cdot \bar{a} + 0 \cdot \bar{a}) + (-0 \cdot \bar{a})$  (по аксиоме ассоциативности)  $= 0 \cdot \bar{a} + (-0 \cdot \bar{a}) = \vec{0}$
2.  $(-1)\bar{a} + \vec{0} = (-1)\bar{a} + (\bar{a} + (-\bar{a})) = ((-1)\bar{a} + \bar{a}) + (-\bar{a})$  (по аксиоме ассоциативности)  $= 0 \cdot \bar{a} + (-\bar{a}) = -\bar{a}$ .

Теперь докажем первую аксиому (аксиому коммутативности).

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \vec{0} = (\bar{a} + \bar{b}) + (-(\bar{b} + \bar{a}) + (-(-(\bar{b} + \bar{a})))) =$$

(по второму свойству)

$$= (\bar{a} + \bar{b}) + (-(\bar{b} + \bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a})) =$$

(по аксиоме ассоциативности)

$$\begin{aligned} &= (\bar{a} + \bar{b} + (-(\bar{b} + \bar{a}))) + (\bar{b} + \bar{a}) = (((\bar{a} + \bar{b}) + (-\bar{b}))) + (-\bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a}) = \\ &= ((\bar{a} + (\bar{b} + (-\bar{b})))) + (-\bar{a}) + (\bar{b} + \bar{a}) = ((\bar{a} + \vec{0}) + (-\bar{a})) + (\bar{b} + \bar{a}) = \\ &(\bar{a} + (-\bar{a})) + (\bar{b} + \bar{a}) = \vec{0} + (\bar{b} + \bar{a}) = \bar{b} + \bar{a} \end{aligned}$$

□

*Замечание.* Любое поле можно рассматривать как векторное пространство над собой - все аксиомы будут выполнены из аксиом поля.

**Определение.**  $U \subset V$  - векторное подпространство пространства  $V$ , если оно само является пространством относительно тех же операций в  $V$ .

**Утверждение.** Определение 2 эквивалентно:

1.  $U \neq \emptyset$
2.  $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$
3.  $\forall u \in U, \lambda \in F : \lambda u \in U$

**Определение.** Векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  называются линейно зависимыми, если  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$  (не все равные 0) :  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$ . В противном случае векторы  $v_1, \dots, v_n$  называются линейно независимыми.

**Утверждение.** Определение 3  $\iff (n \geq 2)$  хотя бы один вектор из векторов  $v_i$  выражается как линейная комбинация остальных.

**Определение.** Упорядоченный набор векторов  $e = (e_1, \dots, e_n), e_k \in V$  называется базисом  $V$ , если  $e$  - максимальный ЛНЗ набор векторов из  $V$ .

**Утверждение.**  $e$  - базис в  $V \iff$

1.  $e_1, \dots, e_n$  - ЛНЗ
2.  $\forall x \in V \exists x_1, \dots, x_n \in F : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

**Следствие.** Разложение любого вектора в базисе единственно.

*Доказательство.* Если  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$ , то  $\vec{0} = x - x = \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) e_i$

Из ЛНЗ все коэффициенты равны □

Обозначаем:  $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$ , тогда  $x = eX_e = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$

$$\boxed{x = eX_e} \tag{1}$$

**Теорема.** Если в  $V \exists$  базис из  $k$  векторов, то любой базис  $V$  содержит  $k$  векторов.

*Доказательство.*

Если  $\exists$  базис  $e'_1, \dots, e'_m \in V$ , где  $m > n$ , то по ОЛЛЗ  $e'_1, \dots, e'_m$  - ЛЗ, т.е. не базис. Если же  $m < n$ , то по ОЛЛЗ (в другую сторону)  $e_1, \dots, e_n$  - ЛЗ  $\implies$  не базис.  $\square$

**Свойства.** матриц перехода

$$1. \det C \neq 0$$

$$2. C_{e' \rightarrow e} = (C_{e \rightarrow e'})^{-1}$$

$$3. C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} \cdot C_{e' \rightarrow e''}$$

*Доказательство.*

1) Столбцы - координаты ЛНЗ векторов  $e'_1, \dots, e'_n \implies rk C = n \implies \det C \neq 0$

2) Перепишем определение матрицы перехода в матричный вид.

По определению:

$$e' = (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) C_{e \rightarrow e'}, \text{ т.е. } e' = e C_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{e' = e C_{e \rightarrow e'}} \quad (2)$$

С другой стороны

$$e = e' C_{e' \rightarrow e} = e C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} \implies C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e} = E$$

ввиду единственности разложения векторов по базису, т.е.

$$C_{e \rightarrow e'} = (C_{e' \rightarrow e})^{-1}$$

3)

$$e'' = e' C_{e' \rightarrow e''} = e (C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}) = e C_{e \rightarrow e''}$$

В силу единственности разложения  $C_{e \rightarrow e''} = C_{e \rightarrow e'} C_{e' \rightarrow e''}$

$\square$

**Алгоритм.** Как вычислить матрицу перехода, если известны координаты векторов  $e_i$  и  $e'_j$  в некотором универсальном базисе?

$e' = e C_{e \rightarrow e'}$  можно рассмотреть как матричное уравнение:

$$(e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow) C = (e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow)$$

$$[e_1^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow \mid e'_1{}^\uparrow, \dots, e'_n{}^\uparrow] \overset{\text{строк}}{\rightsquigarrow} [E \mid C_{e \rightarrow e'}]$$

## 1.1 Изменение координат вектора при замене базиса

**Теорема.** Формула изменения координат вектора при замене базиса:

$$\boxed{X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}} \quad (3)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall x \in V : x &= eX_e = e'X_{e'} = eC_{e \rightarrow e'}X_{e'} \\ \implies X_e &= C_{e \rightarrow e'}X_{e'} \end{aligned}$$

□

## 2 Векторные подпространства

### 2.1 Примеры

1. Геометрические векторы
2.  $F^n$  - пространство столбцов (строк) высоты (длины)  $n$  с естественными операциями  $(+, \cdot \lambda)$

Базис  $\vartheta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  (можно взять столбцы любой

невыврожденной матрицы порядка  $n$ )

*Замечание.* Доказать, что если  $e$  - базис,  $C$  - невырожденная матрица, то  $eC$  - тоже базис (из (2))

**Упражнение.** Пусть  $|F| = q$ ,  $\dim_F V = n \implies |V| = q^n$

$\dim M_{m,n} = mn$ , стандартный базис -  $\{E_{ij}\}$ , где  $E_{ij}$  содержит 1 на  $ij$ -ой позиции и 0 на остальных.

3.  $V = \{F : \underset{(X \subseteq \mathbb{R})}{X} \rightarrow \mathbb{R}\}$  с операциями сложения и умножения на скаляр

Оно бесконечномерно, если  $X$  бесконечно.

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - попарно различные числа, то  $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$  ЛНЗ

Допустим, что:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \\ C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + \lambda_n^{n-1} C_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0 \implies C_1 = \dots = C_n = 0$$

4.  $F[t]$  с естественными операциями сложения и умножения на скаляр - бесконечномерное пространство, т.к.:  $\forall n \in N_0 : 1, t, t^2, \dots$  - линейно независимы.  
 $F[t]_n = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \mid a_k \in F, k = 0, \dots, n; n \in N_0\}$  - подпространство,  $\dim U = n + 1$ , базис:  $1, t, \dots, t^n$

Тейлоровский базис:  $1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n; \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k$

5.  $\Omega \neq \emptyset, V = 2^\Omega$  с операциями вместо сложения:

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \quad \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$F = \mathbb{Z}_2, 0 \cdot A = \emptyset, 1 \cdot A = A$$

**Упражнение.** Доказать, что  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{Z}_2$

## 2.2 Два основных способа задания подпространства в $V$

1. Линейная оболочка семейства векторов  $S \subset V$ :

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i s_i \text{ (канонические суммы)} \mid s_i \in S, \lambda_i \in F \right\}$$

Частный случай:

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in F \right\} = U$$

**Утверждение.**  $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \subseteq V \implies \dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle = rk\{a_1, \dots, a_m\}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mu \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu \lambda_i) a_i \\ \sum_{i=1}^m \mu_i a_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i &= \sum_{i=1}^m (\mu_i + \lambda_i) a_i \in U \end{aligned}$$

Если  $r = rk\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ , то  $a_{j1}, \dots, a_{jr}$  - базисные, то  $\forall a_i$  через них тоже выражается

$$\forall \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \implies \{a_{j1}, \dots, a_{jr}\} - \text{базис } U$$

□



**Алгоритм.** Алгоритм вычисления  $\dim \langle a_1, \dots, a_m \rangle$  и базиса, если известны координаты этих векторов:

1) Составить матрицу:

$$(a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left( \begin{array}{ccc|c} & \overbrace{j_1 \dots j_r} & & \\ 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

2) Столбцы с номерами  $j_1, \dots, j_r$  - базис в  $U$ , разложение оставшихся векторов можно сразу считать из преобразованной матрицы

**2.** ( $\dim V = n$ , известны координаты в некотором базисе)

$$\forall \sum_{i=1}^n x_i e_i = eX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$W = \{x \in V \mid x = eX : AX = 0\} - \text{задание с помощью ОСЛУ}$$

**Утверждение.**  $W$  - подпространство в  $V$ ,  $\dim W = n - rkA$ , базис - любая ФСР (это переход от **2.** к **1.** способу задания подпространства).

**Теорема.** Линейную оболочку конечного числа векторов в конечномерном векторном пространстве  $V$  можно задать с помощью ОСЛУ.

*Доказательство.* Два способа:

1) Вектор  $x$  (со столбцом координат  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ):

$$x \in \langle a_1, \dots, a_m \rangle = U$$

$$\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = x, \text{ или в координатах: } \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i^\uparrow = x$$

т.е. СЛУ с  $\tilde{A} = (a_1^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix})$  совместна  $\iff$  после алгоритма Гаусса:

$$\tilde{A} \longrightarrow \left( \begin{array}{c|c} K & \sum_j C_{kj} x_j \\ \hline 0 & \sum C_{r+1,j} x_j = 0 \\ & \sum C_{nj} x_j = 0 \end{array} \right)$$

$(K)$  имеет ступенчатый вид, а  $\begin{pmatrix} \sum C_{r+1,j}x_j = 0 \\ \sum C_{nj}x_j = 0 \end{pmatrix}$  - нужная нам система.

**Упражнение.** Доказать, что эти уравнения ЛНЗ.

2) Пусть дана ОСЛУ:  $\underset{(r \times n)}{C} X = 0, rkC = r$

$$C \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (E_r \mid D) = C'$$

$$\begin{cases} x_1 = -(d_{1,r+1}x_{1,r+1} + \dots + d_{1n}x_n) \\ \vdots \\ x_k = -(d_{k,r+1}x_{k,r+1} + \dots + d_{kn}x_n) \end{cases} \quad k = 1, \dots, r$$

Фундаментальная матрица:  $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -D \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$

$$C' \cdot \mathcal{F} = E_r \cdot (-D) + D \cdot E_{n-r} = -D + D = 0$$

Рассмотрим матрицу из строк координат векторов  $a_1, \dots, a_r$ :

$$\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_r} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{ступенчатый вид}]{\text{улучшенный}} (M \mid E_r) \xrightarrow{\text{Транспонируем}} \begin{pmatrix} M^T \\ E_r \end{pmatrix} = \mathcal{F}$$

Тогда искомая система будет иметь матрицу:  $C = (E_{n-r} \mid -M^T)$   
 Пространство  $\{X \mid CX = 0\}$  имеет размерность  $n - (n - r) = r$

□

### 3 Пересечение и сумма подпространств

**Утверждение.**

1. Если  $U_i$  ( $i \in I$ ) - подпространство  $V$ , то  $W = \bigcap_{i \in I} U_i$  тоже подпространство в  $V$ ;
2. Объединение подпространств может НЕ быть подпространством даже для двух подпространств.



*Доказательство.* 1.  $\bar{0} \in W$ , т.к.  $\bar{0} \in U_i, \forall i \in I$ .

Если  $x, y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in U_i, \forall i \in I \implies x + y \in \bigcap_{i \in I} U_i$

Если  $x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \implies \lambda x \in U_i, \forall i \in I \implies \lambda x \in \bigcap_{i \in I} U_i$  □

*Замечание.* Если  $U_1, U_2$  - подпространства в  $V$  и  $Q$  - любое подпространство, которое содержит  $U_1$  и  $U_2$ , то оно содержит и сумму  $u_1 + u_2$ , если  $u_i \in U_i, i = 1, 2$

**Определение.** Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_m \subseteq V$  назовем:

$$U_1 + \dots + U_m = \{x_1 + \dots + x_m \mid x_i \in U_i\}$$

**Утверждение.**  $U_1 + \dots + U_m$  - подпространство в  $V$

**Теорема.** (Формула Грассмана)

Если  $U_1, U_2$  - подпространства в  $V$ ,  $\dim U_1 < \infty, \dim U_2 < \infty$ , то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

*Доказательство.* Пусть  $\dim U_i = n_i, \dim(U_1 \cap U_2) = s$  Выберем  $c_1, \dots, c_s$  - базис  $U_1 \cap U_2$ , дополним до базиса в  $U_1$  векторами  $a_1, \dots, a_{n_1-s}$  и до базиса в  $U_2$  векторами  $b_1, \dots, b_{n_2-s}$ .

Тогда векторы  $c_1, \dots, c_s, a_1, \dots, a_{n_1-s}, b_1, \dots, b_{n_2-s}$  - образуют базис в  $U_1 + U_2$

1. Они порождают  $U_1 + U_2$  :

$$\forall u = u_1 + u_2 = (\sum \alpha_i a_i + \sum x_i c_i) + (\sum \beta_i b_i + \sum \delta_i c_i)$$

2. Они ЛНЗ. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = - \sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k - \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j \in U_1 \cap U_2$$

Левая часть должна раскладываться по  $\{c_j\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n_1-s} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow a_i$  - ЛНЗ

$$\Rightarrow \forall i : \alpha_i = 0$$

Тогда  $\sum_{k=1}^{n_2-s} \beta_k b_k + \sum_{j=1}^s \gamma_j c_j = 0 \Rightarrow \{b_k, \gamma_j\}$  - ЛНЗ  $\Rightarrow \forall k, j : \beta_k = \gamma_j = 0$

**Алгоритм.** Пусть  $U_1 = \langle a_1, \dots, a_{n_1} \rangle$ ,  $U_2 = \langle b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$ , известны координаты всех этих векторов. Составим матрицу:

$$(A \mid B) = (a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid b_1^\uparrow, \dots, b_{n_2}^\uparrow)$$

$$\dim(U_1 + U_2) = rk(A|B)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left( a_1^\uparrow, \dots, a_{n_1}^\uparrow \mid \underbrace{b_1^\uparrow, \dots, b_m^\uparrow}_{\text{попало в базис}}, b_{m+1}^\uparrow, \dots, b_{n_2-m}^\uparrow \right)$$

Можно записать:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k \Rightarrow b_j - \sum_{k=1}^m \beta_{k_j} b_k = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i \in U_1 \cap U_2$$

□

**Упражнение.** Верна ли аналогичная формула для трех подпространств?

## 4 Прямая сумма подпространств и пространств

**Определение.** Сумма  $U_1 + \dots + U_m$  подпространств  $U_i \subset V$ ,  $1 \leq i \leq m$  называется прямой суммой, если  $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$  представим в виде:

$u = u_1 + \dots + u_m$  ( $u_i \in U_i$ ) единственным образом

Пусть  $m = 2$ ,  $V$  - конечномерное пространство,  $U_{1,2}$  - подпространства  $V$

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

1.  $U = U_1 + U_2$  - прямая сумма

$$2. U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$3. \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

4. Базис  $U_1 + U_2$  - объединение базисов слагаемых

*Доказательство.*

$$1. \rightarrow 2. \text{ Допустим } v \in U_1 \cap U_2 \implies v = \underset{\in U_1}{v} + 0 = 0 + \underset{\in U_2}{v} \implies v = 0$$

2.  $\rightarrow$  3. По формуле Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_0$$

3.  $\rightarrow$  4. Ввиду доказательства формулы Грассмана. Если

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j = 0 \implies \sum_i \alpha_i a_i = \sum_j (-\beta_j) b_j \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$\implies \text{все } \alpha_i \text{ и } \beta_i \text{ равны нулю}$$

4.  $\rightarrow$  1.  $\forall u \in U_1 + U_2$  :

$$u = \left( \sum_i \alpha_i a_i \right) + \left( \sum_j \beta_j b_j \right)$$

- разложение по базису единственно

□

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

1.  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  - прямая сумма

2.  $\forall i, 1 \leq i \leq m, U_i \cap \left( \sum_{j \neq i} U_j \right) = \{0\}$

3.  $\dim(U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dots + \dim U_n$

4. Базис  $U_1 + U_2 + \dots + U_n$  - объединение базисов слагаемых

**Упражнение.** Доказать

**Пример.** того, что условия  $U_i \cap U_j = \{0\}, i \neq j$  недостаточно для прямой суммы:



$v_1, v_2, v_3$  - ЛЗ  $\implies$  представление не единственным образом

**Лемма.** Любой ЛНЗ набор векторов  $a_1, \dots, a_m$  в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  ( $m < n$ ) можно дополнить до базиса в  $V$ .

*Доказательство.* 1. Пусть известны координаты векторов в некотором базисе  $e_1, \dots, e_n \implies rk\{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_n\} = n$

2. Составим матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_1^\uparrow & \dots & a_m^\uparrow & E_n \end{array} \right) \xrightarrow[\text{выделяем базисные столбцы}]{\text{ЭП строк матрицы}} \left( \begin{array}{ccc|c|c} a_1^\uparrow & \dots & a_m^\uparrow & e_{i,1}^\uparrow & e_{j,n-m}^\uparrow & \dots \end{array} \right)$$

Тогда к векторам  $a_1, \dots, a_m$  надо добавить  $e_{j,1}, \dots, e_{j,n-m}$

□

**Определение.** Если  $U$  - подпр-во в  $V$  ( $0 \neq U \neq V$ ) и  $\exists W \subset V : V = U \oplus W$ , то  $W$  - прямое дополнение к  $U$ .

**Следствие.** Для любого подпространства в конечномерном векторном пространстве  $\exists$  прямые дополнения.

*Доказательство.*  $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \implies \exists a_{m+1}, \dots, a_n : \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  - базис в  $V$ , тогда  $W = \langle a_{m+1}, \dots, a_n \rangle$  □

**Определение.** Пусть  $V_1, \dots, V_k$  ( $k \geq 2$ ) - векторы пространства над одним и тем же полем  $\mathbb{F}$ , тогда:

$$V = V_1 \times \dots \times V_k = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\} - \text{внешняя прямая сумма}$$

Обозначение:  $\oplus$

*Замечание.* Внешнюю прямую сумму  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  можно превратить в прямую сумму подпространства:

$$\forall i \text{ рассмотрим } V_i' = \{0, \dots, v_i, \dots, 0\} - \text{подпространство в } V$$

Запись  $v_1, \dots, v_k \stackrel{\text{единственно}}{=} (v_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, 0, \dots, v_k)$  показывает, что  $V = V_1' \oplus \dots \oplus V_k'$  - единственно.

$$\text{В частности } \dim(V_1 \oplus \dots \oplus V_k) = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

## Факторпространства

**Определение.** Пусть  $U \subset V$  - подпространство,  $v_1, v_2 \in V$ . Говорят, что  $v_1 \sim v_2$  по модулю  $U$ , если  $v_1 - v_2 \in U$ . Классы эквивалентности имеют вид:

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

- смежные классы по  $U$ , где  $v$  - представитель

$$* \quad V/U = \{\underbrace{v + U}_{\bar{v}} \mid v \in V\}$$

**Утверждение.**  $v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 + U = v_2 + U$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  : Если  $v_1 \sim v_2$ , то  $\exists u_0 \in U : v_2 = v_1 + u_0$

$$\forall u \in U \quad v_2 + u = v_1 + (u_0 + u) \Rightarrow v_2 + U \subseteq v_1 + U$$

$$v_1 = v_2 - u_0; \quad \forall u \in U \quad v_1 + u = v_2 + (u - u_0) \Rightarrow v_1 + U \subseteq v_2 + U$$

$\Leftarrow$  : Если  $v_1 + U = v_2 + U$ , то  $\exists u_1 \in U : v_1 = v_2 + u_1 \Rightarrow v_1 - v_2 = u_1 \in U$

□

**Определение.**  $v + U$  - смежный класс элемента  $v$  по  $U$  :  $\bar{v} := v + U$

**Определение.**  $V/U = \{\bar{v} \mid v \in V\}$  - факторпространство  $V$  по  $U$ .

**Определение.** Структура векторного пространства на  $V/U$ :

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}; \quad \lambda \bar{v}_1 = \overline{\lambda v_1};$$

**Определение.**  $\dim(V/U)$  называется коразмерностью подпространства  $U$  в  $V$   
Обозначается:  $\text{Codim}_V U$

**Пример.** Пусть  $V = C[a, b]$

$$U = \{f(x) \mid f(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]\} \Rightarrow \text{Codim}_V U = 1$$

**Теорема.**

1. Данные операции задают на  $V/U$  векторное пр-во;

2. Если  $\dim V < \infty$ , то  $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

*Доказательство.*

1) Проверим корректность введенных операций:

Если  $v'_1 = v_1 + u_1$ ,  $v'_2 = v_2 + u_2$ ,  $u_1, u_2 \in U$  :

$$v'_1 + v'_2 = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2)$$

$$v'_1 + v'_2 \sim v_1 + v_2, \text{ т.е. } v'_1 + v'_2 + U = v_1 + v_2 + U \Rightarrow \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2}$$

$$\overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v'_1 + v'_2} = \overline{v_1 + v_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$$

т.е. сложение не зависит от выбора элементов в классах.

Если

$$v' = v + u, u \in U \implies \lambda v' = \lambda v + \lambda u \in \lambda v + U$$

$$v \sim v' \implies \lambda v \sim \lambda v'; \quad \bar{0} \in U; \quad -\bar{v} = \overline{-v}$$

Все аксиомы выполнены, т.к. действия над смежными классами выражаются через действия над векторами.

2) Выберем базис  $a_1, \dots, a_m$  в  $U$

Если  $U = V$ , т.е.  $m = n = \dim V$ , то  $V/U = \{0\} \implies \dim(V/U) = n - n = 0$

Если же  $m < n$ , то можно дополнить базис  $U$  векторами  $a_{m+1}, \dots, a_n$  до базиса в  $V$ , тогда классы  $\overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  образуют базис в  $V/U$  :

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j$$

$$\bar{v} = v + U = \sum_{j=m+1}^n \overline{\alpha_j a_j} = \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \bar{a_j}$$

$\implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  порождают  $V/U$

Проверим ЛНЗ:

$$\exists \lambda_j \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \lambda_j \bar{a_j} = \bar{0} \iff \sum_{j=m+1}^n \lambda_j a_j \in U$$

$$\exists \mu_i \in \mathbb{F} : \sum_{j=m+1}^n \alpha_j a_j - \sum_{i=1}^m \mu_i a_i = 0$$

Т.к.  $\{a_1, \dots, a_n\}$  ЛНЗ, то  $\lambda_j = 0$ ,  $\mu_i = 0$ ,  $\forall i, j \implies \overline{a_{m+1}}, \dots, \overline{a_n}$  - ЛНЗ

□



## 5 Линейные отображения и функции

Пусть  $V_1, V_2$  - векторные пространства над полем  $\mathbb{F}$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  называется линейным отображением  $V_1$  в  $V_2$ , если:

1.  $\forall v_1, v'_1 \in V_1 : \varphi(v_1 + v'_1) = \varphi(v_1) + \varphi(v'_1)$ ;
2.  $\forall v \in V_1, \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ ;

Из курса I семестра известно, что  $\varphi(0_{V_1}) = 0_{V_2}$

**Определение.** Ядром  $\varphi$  называется множество  $\text{Ker}(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0_{V_2}\}$ . Образом  $\varphi$  называется множество  $\text{Im}(\varphi) = \varphi(V_1)$ .

**Утверждение.** 1.  $\text{Ker}\varphi$  - подпространство в  $V_1$

2. Отображение  $\varphi$  инъективно  $\iff \text{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\}$

3.  $\text{Im}\varphi$  - подпространство в  $V_2$

*Доказательство.* 1.

$$\forall u_1, u_2 \in \text{Ker}\varphi : \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = 0_{V_2} + 0_{V_2} = 0_{V_2}$$

$$\forall u \in \text{Ker}\varphi, \forall \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = \lambda \cdot 0_{V_2} = 0_{V_2}$$

- подпространство по определению.

2.  $\implies$  Пусть отображение  $\varphi$  инъективно, то есть если  $\varphi(v) = \varphi(w)$  для  $v, w \in V$ , то  $v = w$ . Возьмём  $v = 0_{V_1}$ ,  $w \in \text{Ker}\varphi$ . Так как  $0_{V_1} \in \text{Ker}\varphi$ , то  $\varphi(v) = 0_{V_2} = \varphi(w) \implies v = w = 0_{V_1}$ , так как отображение  $\varphi$  инъективно  $\implies \text{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\}$

$\impliedby$  Пусть  $\text{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\}$  и  $v, w \in V_1 : \varphi(v) = \varphi(w) \Leftrightarrow \varphi(v - w) = 0_{V_2}$ , то есть  $(v - w) \in \text{Ker}\varphi = \{0_{V_1}\} \implies w = v$

3.  $\forall w_1, w_2 \in V_2 \exists v_1, v_2 \in V_1 : \varphi(v_1) = w_1, \varphi(v_2) = w_2 \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \text{Im}\varphi$

□

**Определение.** Линейное отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  называется изоморфизмом, если  $\varphi$  линейно и биективно.  $V_1$  и  $V_2$  называются изоморфными, если существует изоморфизм  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ . Обозначается:  $V_1 \cong V_2$ .

**Теорема.** (Об изоморфизме) Конечномерные векторные пространства  $V_1$  и  $V_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\dim V_1 = \dim V_2$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Пусть  $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ . Выберем  $e_1, \dots, e_n$  - базис в  $V_1$ , а  $f_1, \dots, f_n$  - базис в  $V_2$ , тогда  $\forall v \in V_1 \quad v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

Определим отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  формулой  $\varphi(v) := \sum_{i=1}^n x_i f_i$ .

1. (линейность) Пусть  $v_1, v_2 \in V_1$ ,  $v_1 = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  и  $v_2 = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , тогда

$$v_1 + v_2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) e_i \implies$$

$$\implies \varphi(v_1 + v_2) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) f_i = \sum_{i=1}^n x_i f_i + \sum_{i=1}^n y_i f_i = \varphi(v_1) + \varphi(v_2).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} \text{ и } \forall v \in V_1 \quad \varphi(\lambda v) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i) f_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i f_i = \lambda \varphi(v).$$

2. (инъективность)  $\text{Ker} \varphi = \{v \in V_1 | \varphi(v) = 0_{V_2}\}$ . Пусть  $v \in V_1$  и  $v \in \text{Ker} \varphi$ ,

$$\text{тогда } v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \implies$$

$$\implies \varphi(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0, \text{ а так как } f_1, \dots, f_n \text{ - линейно независимы } \implies \forall i$$

$$\alpha_i = 0 \implies v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 \implies \text{Ker} \varphi = \{0\}.$$

3. (сюръективность)  $\forall w \in V_2 \quad w = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \implies w = \varphi(v), \quad v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \implies \varphi(V_1) = V_2.$

$\implies$  Пусть  $V_1 \cong V_2$ ,  $\dim V_1 = n$ ,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - изоморфизм  $V_1$  и  $V_2$ . Выберем базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $V_1$  и покажем, что  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  - базис в  $V_2$ .

$\forall w \in V_2 \quad \exists v \in V_1 : \varphi(v) = w$ . Пусть  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , тогда  $\varphi(v) = w = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) \implies$

$\implies V_2 = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ . Проверим линейную независимость

Предположим, что  $\exists \mu_i \in \mathbb{F} : 0_{V_2} = \sum_{i=1}^n \mu_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n \mu_i e_i) \implies \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \in \text{Ker} \varphi = \{0\}$ , так как  $\varphi$  - биекция.

Так как  $\{e_i\}$  линейно независимы  $\implies \mu_i = 0 \quad \forall i \implies \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  линейно независимы.  $\square$

## 6 Линейные функции

Пусть  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{F}$

**Определение.** Отображение  $f : V \rightarrow \mathbb{F}$  - линейная функция со значениями в  $\mathbb{F}$ , если:

1.  $\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2.  $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} : f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Обозначается:  $V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{F}\}$  - множество линейных функций на  $V$

**Лемма.** Если  $f \neq 0$ , то  $\dim(V/\text{Ker } f) = 1$ .

*Доказательство.*  $f \neq 0 \Rightarrow \exists v_1 \in V, f(v_1) \neq 0$ . Пусть  $v \in V$ , тогда либо  $v \in \text{Ker}(f)$ , либо  $f(v) = \alpha \neq 0$

$$\beta = f(v_1) \neq 0 \Rightarrow f\left(\frac{v_1}{\beta}\right) = 1, f\left(\frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = \alpha$$

Рассмотрим выражение  $f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1)$ :

$$f(v - \frac{\alpha}{\beta}v_1) = f(v) - f\left(\frac{\alpha}{\beta}v_1\right) = \alpha - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow v - \frac{\alpha}{\beta}v_1 \in \text{Ker}(f) \text{ и } v = \frac{\alpha}{\beta}v_1 + u, u \in \text{Ker}(f) \quad \square$$

*Замечание.*  $\forall x \in V : (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$  и  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

**Лемма.** Множество  $V^*$  с введенными операциями - векторное пространство.

**Определение.**  $V^*$  - векторное пространство, сопряженное с  $V$  (двойственное для  $V$ )

Зафиксируем базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в  $V$  и линейную функцию  $f : V \rightarrow F$

$$\forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \text{ где } a_i = f(e_i)$$

Удобно записывать это так: 
$$f(x) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Определение.** Координатные функции - функции вида:

$$f_i : f_i(x) = x_i$$

Будем использовать обозначение:  $e^i = f_i$

В частности: 
$$f_i(e_j) = e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**Утверждение.** Функции  $e^i$  - базис в  $V^*$

*Доказательство.*

Докажем ЛНЗ: Пусть  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i \equiv 0$ . Подставим  $e_j$ :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^i\right)(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j = 0$$

Отсюда после подстановки всех  $e_1, \dots, e_n$  получим, что  $\forall i = 1, \dots, n : \lambda_i = 0$ . Разложим произвольную функцию  $f \in V^*$ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i e^i(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i e^i\right)(x) \Rightarrow f \equiv \sum_{i=1}^n a_i e^i$$

□

**Следствие.** Если  $\dim V < \infty$ , то  $V^* \cong V$ , т.к.  $\dim V^* = \dim V$ .

**Определение.** Базис  $e^* = (e^1, \dots, e^n)$  называется базисом  $V^*$ , сопряжённым (дуальным, двойственным, биортогональным) к базису  $e$  в  $V$ .

Посмотрим, как изменится строка координат функции  $f \in V^*$  при замене базиса  $e$  в  $V$ .

Пусть  $e' = (e'_1, \dots, e'_n) = e \cdot C_{e \rightarrow e'}$  - новый базис в  $V$ . Как известно,  $X = C_{e \rightarrow e'} \cdot X'$ . Отсюда если  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ , то  $\forall f \in V^*$ :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a'_i x'_i = (a'_1, \dots, a'_n) X'$$

С другой стороны

$$f(x) = (a_1, \dots, a_n) X = (a_1, \dots, a_n) (C_{e \rightarrow e'} X') = ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X'$$

Отсюда

$$\forall X' \in \mathbb{F}^n \quad ((a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'}) X' = ((a'_1, \dots, a'_n)) X'$$

Подставляя по очереди  $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , в итоге получим равенство

$$(a_1, \dots, a_n) C_{e \rightarrow e'} = (a'_1, \dots, a'_n)$$

**Пример.** Возьмём  $V = \mathbb{R}[t]_n = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \deg p = n\}$

Выберем в нём базис  $\{1, (t - t_0), \dots, (t - t_0)^n\} \Rightarrow p(t) = \sum_{i=0}^n \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!} (t - t_0)^i$

Если  $e_i = (t - t_0)^i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , то  $e^i(p) = \frac{p^{(i)}(t_0)}{i!}$

**Определение.** Вторым сопряжённым пространством к  $V$  (обозначается  $V^{**}$ ) называется пространство, сопряженное к  $V^*$  - пространство линейных функций от линейных функций над  $V$ .

$$V^{**} = \{\varphi : V^* \rightarrow \mathbb{F}\}$$

**Лемма.**  $f$  - инъекция  $\iff \text{Ker}(f) = \{0\}$

**Теорема.** Если  $\dim V < \infty$ , то  $V^{**} \cong V$ , причём изоморфизм не зависит от выбора базиса (такой изоморфизм называется каноническим).

*Доказательство.* Рассмотрим отображение:

$$\varphi : V \rightarrow V^{**} : \varphi(x) = \varphi_x \in V^{**} : \forall f \in V^*, \varphi_x(f) = f(x)$$

Это линейное отображение:

- $\forall f \in V^*, \varphi_{x_1+x_2}(f) = f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi_{x_1}(f) + \varphi_{x_2}(f) \implies \varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$
- $\forall f \in V^*, \varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f) \implies \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x);$

Чтобы проверить, что  $\varphi$  - биекция, достаточно проверить, что  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  (так как сюръекцию имеем из  $\dim V^{**} = \dim V$ ).

Пусть  $x \in \text{Ker}(\varphi)$ , т.е.  $\varphi_x \equiv 0$ . Значит,  $\forall f \in V^* : f(x) = 0$

Если  $x \neq 0$ , то его можно дополнить до базиса:  $x, e_2, \dots, e_n$ , где  $n = \dim V$ .

Тогда  $e^1(x) = 1 \neq 0$  - противоречие с условием  $\forall f \in V^* : f(x) = 0$ .  $\square$

*Задача.* Доказать, что  $a_1, \dots, a_n \in V$  ЛНЗ  $\iff \exists$  лин. ф-ции  $f^1, \dots, f^n \in V^*$  такие, что  $\det(f^i(a_j)) \neq 0$ .

*Замечание.* Если  $\dim V = \infty$ , то  $V^* \not\cong V$  в общем случае.

**Пример.**  $V = \mathbb{Q}[t]$  -  $V$  счётно. Зафиксируем число  $t \in \mathbb{Q}$  и рассмотрим произвольную  $f \in V^*$ :

$$f(t^k) = b_k \implies f \leftrightarrow (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots) \implies V^* \text{ континуально.}$$

Отсюда мощность  $V^*$  больше мощности  $V$ , и они, очевидно, не изоморфны.

## 7 Линейные отображения и их матрицы

Пусть  $V_1, V_2$  - векторные пространства,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение.

**Пример.**

$V_1 = D(a, b)$  - множество функций над полем  $\mathbb{R}$ , дифференцируемых на  $(a, b)$ ;

$V_2 = F(a, b)$  - множество функций над полем  $\mathbb{R}$ , определенных на  $(a, b)$ ;

$\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ ,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение,  $\text{Ker}(\varphi) = \{const\}$

Частный случай:  $V_1 = \mathbb{R}[t]_n$ ,  $V_2 = \mathbb{R}[t]_{n-1}$

$\varphi(f) = f'$  - линейное отображение (взяли производную)

$\text{Ker}(\varphi) = \{const\}$ . Является ли  $\varphi$  сюръекцией?

$\forall p(t) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$

$\exists f(t) = a_0t + a_1\frac{t^2}{2} + \dots + a_{n-1}\frac{t^n}{n} : f'(t) = p(t) \implies \varphi$  - сюръекция

**Теорема.** Если  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение,  $\dim V_1 < \infty$ , то

$$\dim(\text{Im } \varphi) = \dim V_1 - \dim(\text{Ker } \varphi)$$

*Доказательство.* Пусть  $\dim(\text{Im } \varphi) = m$  ( $m \leq n = \dim V_1$ )

Выберем  $c_1, \dots, c_m$  - базис в  $\text{Im } \varphi \implies \exists a_1, \dots, a_m \in V_1 : \varphi(a_i) = c_i, i = \overline{1, m}$

Так же выберем базис  $b_1, \dots, b_k$  в  $\text{Ker } \varphi$  (если  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ , то  $\text{Im } \varphi \cong V_1$ )

Покажем, что  $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k\}$  - базис в  $V_1$ :

Пусть  $\alpha_i, \beta_j : \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j = 0_{v_1}$ , тогда:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(a_i) + \underbrace{\sum_{j=1}^k \beta_j \varphi(b_j)}_{0_{v_2}} = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i = \varphi(0_{v_1}) = 0_{v_2}$$

Т.к.  $c_i$  - ЛНЗ  $\implies \forall i = \overline{1, m} : \alpha_i = 0 \implies \sum_{j=1}^k \beta_j b_j = 0$

Т.к.  $b_j$  - ЛНЗ  $\implies \forall j = \overline{1, k} : \beta_j = 0$

$$\forall v \in V_1 : \varphi(v) = \sum_{l=1}^m \gamma_l c_l = \varphi\left(\sum_{l=1}^m \gamma_l a_l\right) \implies v - \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l \in \text{Ker } \varphi$$

$$\implies \exists \beta_j \in \mathbb{F} : v = \sum_{l=1}^m \gamma_l a_l + \sum_{j=1}^k \beta_j b_j$$

□

## 8 Матрицы линейного отображения

Пусть:  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  - базис в  $V_1$ ;  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$  - базис в  $V_2$

$$\begin{aligned} \forall x \in V_1 : x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \implies \varphi(x) &= \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \\ &= \{\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i\} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} f_i \end{aligned}$$

**Определение.** Назовем  $A = (a_{ij}) = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}}$  - матрицей  $\varphi$  в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{F}$ .  
Обозначается:  $Y_f = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot X_e$  (где  $Y$  - столбец координат  $\varphi(x)$ ).

*Замечание.* Для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ ,  $A_{\varphi, e} \equiv A_{\varphi, e, e}$

**Алгоритм.** Вычисление  $\text{Ker } \varphi$  и  $\text{Im } \varphi$  с помощью матрицы  $A_\varphi$  :

1.  $\text{Ker } \varphi = \{x = \mathcal{E} \cdot x_\mathcal{E} : A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = 0\}$ ;  $\dim(\text{Ker } \varphi) = n - \text{rk} A_\varphi$
2.  $\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle = \{y = \mathcal{F} \cdot Y_f : Y_f = A_\varphi \cdot x_\mathcal{E}\}$   
 $Y \in \text{Im } \varphi \iff \text{СЛУ } A_\varphi \cdot x_\mathcal{E} = Y \text{ совместна} \implies \dim(\text{Im } \varphi) = \text{rk} A_\varphi$   
*(т.е. не зависит от базиса);*
3.  $\dim(\text{Im } \varphi) + \dim(\text{Ker } \varphi) = \dim V_1$

### 8.1 Изменение матрицы линейного отображения при замене координат

**Утверждение.** Пусть  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  - старый, а  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  - новый базисы в  $V_1$  и  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$  - старый, а  $\mathcal{F}' = (f'_1, \dots, f'_m)$  - новый базисы в  $V_2$ ,  
 $C$  - матрица перехода из  $\mathcal{E}$  в  $\mathcal{E}'$ , а  $D$  - матрица перехода из  $\mathcal{F}$  в  $\mathcal{F}'$ . Тогда:

$$A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} = D^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулами связи координат векторов:

$$\forall x \in V_1 : x_\mathcal{E} = \underbrace{C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}}_C \cdot x_{\mathcal{E}'} \text{ и } \forall y \in V_2 : y_\mathcal{F} = \underbrace{C_{\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'}}_D \cdot y_{\mathcal{F}'}$$

Тогда формулы имеют вид:

$$Y_\mathcal{F} = A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot x_\mathcal{E} \text{ и } Y_{\mathcal{F}'} = A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} \cdot x_{\mathcal{E}'} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

Умножим  $(*)$  слева на  $D^{-1}$ , а также запишем выражение  $x_{\mathcal{E}}$  через  $x_{\mathcal{E}'}$ :  
 $\forall x_{\mathcal{E}'} \in F^n :$

$$D^{-1} \cdot Y_{\mathcal{F}} = D^{-1} \cdot (A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'} \iff Y_{\mathcal{F}'} = (D^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot C) \cdot x_{\mathcal{E}'}$$

Возьмем  $x_{\mathcal{E}'} = E_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  □

*Замечание.* Для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  :

$$A_{\varphi, \mathcal{E}'} = C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}^{-1} \cdot A_{\varphi, \mathcal{E}} \cdot C_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'}$$

**Следствие.**

1. Для любого линейного отображения ранг его матрицы инвариантен при замене базиса

$$\text{rk } A_{\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}'} = \text{rk } A_{\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}};$$

2. Для любого линейного оператора определитель и след его матрицы инвариантны при замене базиса

$$\det(A_{\varphi, \mathcal{E}'}) = \det(A_{\varphi, \mathcal{E}})$$

$$\text{tr}(A_{\varphi, \mathcal{E}'}) = \text{tr}(A_{\varphi, \mathcal{E}})$$

*Доказательство.*

1. Матрицы  $C$  и  $D$  невырождены, значит достаточно доказать, что  $\text{rk } A = \text{rk } (AC)$ , где  $C$  - невырождена.

$$\begin{cases} B = A \cdot C \implies \text{rk } B \leq \text{rk } A \\ A = (A \cdot C) \cdot C^{-1} \implies \text{rk } A \leq \text{rk } (AC) \end{cases} \implies \underbrace{\text{rk } (AC) \leq \text{rk } A \leq \text{rk } (AC)}_{\text{rk } (AC) = \text{rk } A}$$

$$2. \det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = \det A$$

$$3. \text{tr}(AC) = \text{tr}(CA) \implies \text{tr}[C^{-1} \cdot (AC)] = \text{tr}[(AC) \cdot C^{-1}] = \text{tr } A$$

□

**Теорема.** Пусть  $a_1, \dots, a_n$  - ЛНЗ векторы в  $V_1$  ( $\dim V_1 = n$ ),  $b_1, \dots, b_n$  - случайные векторы в  $V_2$  ( $\dim V_2 = m$ ). Тогда  $\exists!$  линейное отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  :  $\varphi(a_j) = b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$



*Доказательство.*

Пусть в некотором базисе  $\mathcal{E}$  пространства  $V_1$  вектор  $a_j \sim a_j^\uparrow$  - столбец координат, в базисе  $f$  пространства  $V_2$  вектор  $b_j \sim b_j^\uparrow$

По условию,  $\forall j = 1, \dots, n : A_\varphi \cdot a_j^\uparrow = b_j^\uparrow \implies A_\varphi(a_1^\uparrow, \dots, a_n^\uparrow) = (b_1^\uparrow, \dots, b_n^\uparrow)$  или  $A_\varphi \cdot A = B$ , где  $A_\varphi$  - искомая матрица.

Отсюда получаем, что  $A_\varphi = B \cdot A^{-1}$  (т.к.  $a_1, \dots, a_n$  ЛНЗ).

$$\left( \frac{A}{B} \right) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эп}} \left( \frac{E}{A_\varphi} \right), \quad \left( \frac{A}{B} \right) \rightarrow \left( \frac{A}{B} \right) \cdot C_{\text{эл}} = \left( \frac{AC}{BC} \right)$$

Если  $AC = E$ , то  $C = A^{-1}$  и  $BC = BA^{-1} = A_\varphi$

□

**Теорема.** Если  $\dim V_1 < \infty$ ,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение, то

$$\text{Im } \varphi \cong V_1 / \text{Ker } \varphi$$

*Доказательство.* Базис ядра дополним до базиса пространства  $V_1$  векторами  $e_1, \dots, e_s$ . Тогда любой  $v \in V_1$  можно записать в виде:

$$v = \sum_{i=1}^s x_i e_i + u, \text{ где } u \in \text{Ker } \varphi$$

По этому в факторпространстве базис составляет классы  $\bar{v} + u = \sum_{i=1}^s x_i \bar{e}_i$

Рассмотрим отношение  $\bar{\varphi} : V_1/u \rightarrow V_2$ , где  $\bar{\varphi}(\bar{v}) = \bar{\varphi}(v + u) := \varphi(v)$

Отсюда  $w = \bar{\varphi}(\bar{v})$ . Получаем, что  $\varphi$  - сюръективное линейное отображение (т.к.  $\forall w \in V_2 \exists v \in V_1 : \varphi(v) = w$ ). Также  $\text{Ker } \bar{\varphi} = \{0\} = \{\text{Ker } \varphi\}$ , потому что если  $\bar{\varphi}(\bar{v}) = 0$ , то  $\varphi(v) = 0$ , т.е.  $v \in \text{Ker } \varphi = u \implies v \in U \implies \bar{v} = u = \{0\}$  □

## 9 Линейные операторы

**Определение.** Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$  называется линейным оператором

Далее рассматриваем линейные операторы.

**Утверждение.**

1.  $\text{Ker } \varphi$  - подпространство в  $V$
2.  $\text{Im } \varphi$  - подпространство в  $V$

3. Если  $U \subset V$ , то  $\varphi(U)$  - подпространство в  $V$

**Определение.** Подпространство  $U \subset V$  называется инвариантным относительно  $\varphi$  (или  $\varphi$  - инвариантным), если:

$$\forall u \in U : \varphi(u) \in U, \text{ т.е. } \varphi(U) \subseteq U$$

**Примеры.**

1. Пусть  $V = U \oplus W$ . Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  такое, что  $\varphi(v) = \varphi(u + w) = u$  - проекция  $V$  на  $U$  вдоль  $W$ . Тогда  $U$  и  $W$  - инвариантные подпространства относительно  $\varphi$  и  $\forall u \in U : \varphi(u) = u$ , а также  $\forall w \in W : \varphi(w) = 0$ . Отсюда  $U \cong V/W$

2. Пусть  $V = \mathbb{R}[t]$ ,  $\varphi(f) = \frac{df}{dt} \Rightarrow p(t) \rightarrow p'(t)$ . Здесь инвариантным является подпространство  $\mathbb{R}[t]_n \supset \mathbb{R}[t]_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

**Теорема.** Если  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор,  $\dim V = n$ ,  $U$  - инвариантное подпространство, то существует базис, в котором  $A_\varphi$  имеет блочный вид:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Где  $B$  и  $C$  - квадратные:  $B_{m \times m}$ ,  $m = \dim U$

*Доказательство.* Выберем базис  $e_1, \dots, e_m$  в  $U$  и дополним до базиса в  $V$ . Тогда в полученном базисе  $A_\varphi$  имеет нужный вид.  $\square$

*Замечание.* Пусть  $U \subset V$  - инвариантное подпространство для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$

Ограничение  $\varphi$  на подпространство  $U$ :

$$\varphi|_U : U \rightarrow U; \quad \forall u \in U : \varphi|_U(u) = \varphi(u)$$

Рассмотрим факторпространство:

$$\bar{V} = V/U : \{v + u \mid u \in U\}$$

и фактор-оператор:

$$\bar{\varphi}(\bar{v}) := \overline{\varphi(v)}$$

$$\forall \bar{v} \in \bar{V} : v' = v + u, u \in U \implies \varphi(\bar{v}) = \varphi(v) + \varphi(u) \in U \implies \varphi(\bar{v}) = \varphi(v)$$

Т.о.  $\bar{\varphi} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  - линейный оператор.

**Теорема.**

1. Если существует инвариантное подпространство  $U \subset V$ , то в подходящем базисе:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad (I)$$

Где  $B_{m \times m}$ ,  $m = \dim U$ , а точнее:  $B$  - матрица оператора  $\varphi|_U$ ,  
 $C$  - матрица оператора  $\bar{\varphi}$

2. Если  $V = U \oplus W$ ,  $U$  и  $W$  - инвариантные для  $\varphi$ , то в подходящем базисе:

$$A_\varphi = \left( \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad (II)$$

Причем  $B = A_{\varphi|_U}$ ,  $C = A_{\bar{\varphi}|_W}$ .

Верно и обратное, если в некотором базисе матрица  $A_\varphi$  имеет вид (I), то для  $\varphi \exists$  инвариантное подпространство, а если  $A_\varphi$  имеет вид (II), то  $V$  - прямая сумма двух инвариантных подпространств.

*Доказательство.* Обозначим  $\dim V = n$ ,  $\dim U = m$ ,  $0 < m < n$

1. Выберем базис в  $U$  :  $e_1, \dots, e_m$  и произвольно дополним его до базиса  $V$  векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n$ .

$$\forall u \in U : u = \sum_{i=1}^m u_i e_i \implies \varphi(u) = \sum_{i=1}^m u_i \varphi(e_i)$$

В частности, столбцы  $\varphi(e_1)^\uparrow, \dots, \varphi(e_m)^\uparrow$  имеют вид:  $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \implies$  они составляют матрицу  $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ . Столбцы матрицы  $\varphi(e_{m+1}^\uparrow, \dots, e_n^\uparrow)$  соответствуют номерам координат. Видно, что:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = A_{\varphi|_U}$$

$\bar{e}_j = e_j + U$ ,  $j = m+1, \dots, n$  - базис в факторпространстве  $\bar{V} = V/U$ .

$$\overline{\varphi(e_j)} = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i + \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj} e_k + U = \sum_{k=m+1}^n a_{kj} \bar{e}_k$$

$$\implies C = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица оператора } \bar{\varphi}$$

2. Если  $V = U \oplus W$ , векторы  $e_{m+1}, \dots, e_n$  надо выбирать в  $W$ . Остальное аналогично.

□

**Теорема. (Обратная)**

Для второго случая, если в базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрица имеет вид (II), то положим  $U := \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ ,  $W := \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$

Из определения матрицы  $A_{\varphi, e}$  следует, что  $U, W$  - инвариантные относительно  $\varphi$ ,  $\varphi|_u$  имеет матрицу  $B$ ,  $\varphi|_w$  - матрицу  $C$ .

*Замечание.* В общем случае, если  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ ,  $U_i$  - инвариантны относительно  $\varphi : V \rightarrow V$ , то в базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_s \end{pmatrix}$$

где  $B_i$  - матрица  $\varphi|_{u_i}$ .

**Примеры.**  $\varphi : V \rightarrow V$

1.  $\text{Ker } \varphi$ ,  $\text{Im } \varphi$ , любое подпространство  $U \supseteq \text{Im } \varphi$  - инвариантны.
2. Если  $U_1, U_2$  -  $\varphi$ -инвариантные подпространства, то  $U_1 + U_2$  и  $U_1 \cap U_2$  - инвариантны

## 10 Действия над линейными отображениями

Пусть  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  - линейное отображение,  $\forall x \in V_1$

1.  $\forall \lambda \in \mathbb{F} : (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$
2. Если  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ , то  $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

**Утверждение. (1)** Относительно этих операций множество  $Z(V_1, V_2)$  линейных отображений из  $V_1$  в  $V_2$  является векторным пространством.

**Утверждение. (2)** Если  $\dim V_1 = n$ ,  $\dim V_2 = m$ , то  $Z(V_1, V_2) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$

*Доказательство.* Зафиксируем базисы в  $V_1$  и  $V_2$ :  $e$  и  $f$  соответственно, тогда  $\forall \varphi$  взаимнооднозначно соответствует его матрица  $A_{\varphi, e, f}$  относительно базисов  $e$

и  $f$ .  $A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad (\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) \implies$  все столбцы  $A_\varphi$  умножаются на  $\lambda \implies A_\varphi$  умножается на  $\lambda$ .

$$\forall j = 1, \dots, m : (\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j)$$

$\implies$  столбцы  $A_{\varphi+\psi}$  имеют вид  $\varphi(e_j) + \psi(e_j)$ . □

Обозначение:  $L(V_1, V_2) = \mathfrak{T}(V_1, V_2) = \text{Hom}(V_1, V_2)$ .

$\mathfrak{T}(V)$  - множество линейных операторов на  $V$ .

**Определение.** Произведением линейных операторов  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  и  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  называется их композиция:

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x)), \text{ где } x \in V_1$$

**Утверждение. (3)** *Композиция линейных отображений является линейным отображением, а композиция линейных операторов - линейным оператором.*

**Утверждение. (4)** *Пусть  $V_1, V_2, V_3$  - конечномерные векторные пространства,  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $\psi : V_2 \rightarrow V_3$  - линейные отображения, тогда, если зафиксировать базисы в этих пространствах, матрица композиции:*

$$A_{\psi \circ \varphi} = A_\psi \cdot A_\varphi$$

*Доказательство.*

Утверждение (3) - упражнение.

Утверждение (4): Пусть  $e$  - базис в  $V_1$ ,  $f$  - базис в  $V_2$ ,  $g$  - базис в  $V_3$ .

$$A_\varphi = (\varphi(e_1)^\uparrow \dots \varphi(e_n)^\uparrow) \text{ в базисе } f$$

$$A_\psi = (\psi(f_1)^\uparrow \dots \psi(f_m)^\uparrow) \text{ в базисе } g$$

$\forall x = eX$ , обозначим  $y = \varphi(x)$ ,  $z = \psi(y)$  со столбцами координат  $Y$  и  $Z$  соответственно. Тогда:

$$Y = A_\varphi X, \quad Z = A_\psi Y = A_\psi(A_\varphi X) = (A_\psi A_\varphi)X = A_{\psi \circ \varphi} X$$

□

**Теорема.** *Множество  $L(V)$  с операциями  $+$ ,  $\cdot \lambda$ ,  $\cdot$  является ассоциативной алгеброй с единицей, равной  $\text{id } V$ . Если  $\dim V = n$ , то  $L(V) \cong M_n(\mathbb{F})$ .*

*Доказательство.* Следует из утверждений (1) - (4). □

**Утверждение.** *Если  $\varphi$  - линейный оператор на  $V$ , то  $\forall k \in \mathbb{N}$  подпространства  $\text{Ker } \varphi^k$  и  $\text{Im } \varphi^k$  инвариантны. При этом:*

$$\{0\} \subseteq \text{Ker } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi^2 \subseteq \dots$$

$$V \supseteq \text{Im } \varphi \supseteq \text{Im } \varphi^2 \dots$$

## 11 Собственные векторы и собственные значения оператора

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор над полем  $\mathbb{F}$

**Определение.** Вектор  $x \in V$  называется собственным вектором оператора  $\varphi$ , если  $x \neq 0$  и

$$\exists \lambda \in \mathbb{F} : \varphi(x) = \lambda \cdot x \quad (1)$$

Где  $\lambda$  - называется собственным значением оператора  $\varphi$ , соответствующим вектору  $x$ .

Пусть  $\dim V = n$ ,  $e$  - базис в  $V$ , в нём  $\forall x = e \cdot X$ , тогда равенство из вышеуказанного определения равносильно:

$$A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0 \quad (2)$$

- это СЛУ для нахождения вектора  $x$ , если известна  $\lambda$ . Система (2) имеет ненулевое решение, только если:

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \quad (3)$$

Равенство (3) называется характеристическим уравнением. Собственными значениями могут быть только корни характеристического уравнения.

### Примеры.

1.  $V = D^\infty(\mathbb{R})$  - множество бесконечно дифференцируемых функций.

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \quad \forall f(x) : \varphi(f) = f'(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$$

*Доказательство.* Если  $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$ , то  $f(x) = C \cdot e^{\lambda x}$ , где  $C \neq 0$ .  
Рассмотрим  $(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \implies f(x)e^{-\lambda x} = C$ .  $\square$

2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

**Упражнение.** Какие существуют собственные векторы и собственные значения у  $\varphi$  во втором примере?

**Определение.**

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{11} - \lambda) + \cdots = (-\lambda)^n + (a_{11} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det A$$

$\chi_A(\lambda)$  - характеристический многочлен матрицы  $A$

**Утверждение. (1)**  $\chi_A(\lambda)$  - не зависит от базиса.

*Доказательство.* В новом базисе:  $A'_\varphi = C^{-1} \cdot A_\varphi \cdot C$

$$\chi_{A'_\varphi}(\lambda) = \det(C^{-1}A_\varphi C - \lambda E) = \det(C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C) = \det(A_\varphi - \lambda E)$$

□

**Определение.** Вместо  $\chi_{A_\varphi}(\lambda) = \chi_\varphi(\lambda)$  и называется характеристическим многочленом оператора  $\varphi$

## 12 Диагонализируемость

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор

**Лемма.** Если  $a_1, \dots, a_m \in V$  - собственные векторы оператора  $\varphi$  с собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , причем  $\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j$ , то  $a_1, \dots, a_m$  - ЛНЗ.

*Доказательство.*

$m = 1$  : Один вектор  $a_1 \neq 0$  ЛНЗ

$m > 1$  : Предположение индукции: Любые  $m - 1$  вектор, отвечающих попарно различным собственным значениям - ЛНЗ

Запишем:

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\alpha_m = 0 \quad (1)$$

Пододействуем оператором

$$\varphi : a_1\lambda_1\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\lambda_{m-1}\alpha_{m-1} + a_m\lambda_m\alpha_m = 0 \quad (2)$$

Домножим (1) на  $\lambda_m$  и вычтем его из (2):

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0$$

По предположению индукции  $\forall i = 1, \dots, m - 1 : \alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \implies \alpha_i = 0$

Остается  $\alpha_m a_m = 0 \implies \alpha_m = 0$

□

**Следствие.** Если  $\varphi$  имеет  $n$  попарно различных собственных значений ( $\dim V = n$ ), то соответствующие собственные векторы, взятые по одному для каждого собственного значения, образуют базис в  $V$  (Базис из собственных векторов или собственный базис).

**Вид матрицы  $A_\varphi$  в базисе из собственных векторов:**

Обозначаем базис  $\{e_1, \dots, e_n\} \in V$ ,  $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j$ ,  $j = \overline{1, n}$   
 $\forall x \in V : \varphi(x) = A_{\varphi, e} \cdot X_e$ . Столбец вектора  $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

$$A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- диагональная, причем на диагонали находятся собственные значения с учетом нумерации векторов

## 12.1 Собственное подпространство линейного оператора, заданное собственным значением

Фиксируем собственное значение  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  так, что  $\exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda_0 v$   
 Обозначается:  $V_{\lambda_0} = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda_0 v\}$

**Утверждение. (1)**  $V_{\lambda_0}$  - подпространство в  $V$ ,  $V_{\lambda_0} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 \cdot \text{id})$

*Доказательство.* Если  $A_\varphi$  - матрица оператора  $\varphi$ , то в координатах  $V_{\lambda_0}$  - множество всех решений СЛУ.

$$(A_\varphi - \lambda_0 E) \cdot X = 0 \implies \dim V_{\lambda_0} = n - \text{rk}(A_\varphi - \lambda_0 E)$$

□

**Определение.**

$\dim V_{\lambda_0}$  - геометрическая кратность характеристического корня  $\lambda = \lambda_0$ . Имеет смысл и алгебраическая кратность  $\lambda_0$  характеристического корня  $\chi_\varphi(\lambda)$  :

$$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p(\lambda_0), \quad P(\lambda_0) \neq 0, \quad k - \text{алгебраическая кратность}$$

**Лемма.** Для любого собственного значения  $\lambda_0$  оператора  $\varphi$  :

$$\dim V_{\lambda_0} \leq \text{алгебраическая кратность корня } \lambda = \lambda_0 \text{ в } \chi_\varphi(\lambda)$$



*Доказательство.* Пусть  $\dim V_{\lambda_0} = m \leq n$ , выберем базис в  $V_{\lambda_0}$  :  $\{e_1, \dots, e_m\}$  и произвольно дополним его до базиса в  $V$  (при  $m < n$ ) векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n \Rightarrow$

$$A_{\varphi,e} = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & 0 & C \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & B \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$|A_{\varphi,e} - \lambda E| = \det \left( \begin{array}{ccc|c} (\lambda_0 - \lambda) & & 0 & C \\ & \ddots & & \\ 0 & & (\lambda_0 - \lambda) & \\ \hline & 0 & & B - \lambda E \end{array} \right) = (\lambda_0 - \lambda)^m \cdot |B - \lambda E| = 0$$

Не исключено, что  $\lambda = \lambda_0$  - корень уравнения  $|B - \lambda E| = 0$  □

*Замечание.* Любое собственное подпространство  $V_{\lambda_0}$  является  $\varphi$  - инвариантным:

$$\forall v \in V_{\lambda_0} : \varphi(v) = w : \varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = \lambda_0 \varphi(v) = \lambda_0 w$$

Либо  $w = 0$ , либо является собственным вектором.

**Следствие. 2 из Леммы о ЛНЗ:**

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  - все попарно различные собственные значения оператора  $\varphi$ , тогда  $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_r}$  - является прямой суммой, т.е.:

$$\forall i = 1, \dots, n : V_{\lambda_i} \cap \left( \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right) = \{0\}$$

*Доказательство.* Допустим, что  $\exists w \in V_{\lambda_i} \cap \left( \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right)$ , тогда:

$$w = v_i = \sum_{j \neq i} v_j \Rightarrow \left( \sum_{j \neq i} v_j \right) - v_i = 0$$

Где  $\left( \sum_{j \neq i} v_j \right)$  - попарно различные собственные векторы, т.е. либо 0, либо противоречие с ЛНЗ  $\Rightarrow v_i = w = 0$  □

**Определение.** Скажем, что  $\varphi$  (или его матрица) приводится к диагональному виду (т.е. диагонализируема), если в  $V \exists$  базис, в котором  $A_\varphi$  диагональна.

**Теорема.** Для линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  ( $\dim V < \infty$ ) следующие условия эквивалентны:

1.  $A_\varphi$  - диагонализируема

2. В  $V$   $\exists$  базис из собственных векторов

3. Все характеристические корни принадлежат  $\mathbb{F}$  и  $\forall i = 1, \dots, r$  :

$$\dim V_{\lambda_i} = \text{алгебраической кратности корня } \lambda_i$$

$$4. V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$$

*Доказательство.*

1  $\Rightarrow$  2 : Если  $A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , это значит, что:

$$\varphi(e_j)^\uparrow = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi(e_j) = \lambda_j e_j$ , т.е.  $e_j$  - собственный вектор с собственным значением  $\lambda_j$

2  $\Rightarrow$  1 : В базисе из собственных векторов матрица  $A_\varphi$  диагональна

1  $\cup$  2  $\Rightarrow$  3 : Выберем базис из собственных векторов  $\{f_1, \dots, f_n\}$  так, чтобы:

$$\{f_1, \dots, f_{m_1}, f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+m_2}, \dots\}$$

В этом базисе матрица  $A_{\varphi, f}$  выглядит:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_r \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m_1}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m_2}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m_r}$

$\Rightarrow m_1 + \dots + m_r = n$ . С другой стороны, если  $k_i$  - алгебраическая кратность корня  $\lambda_i$ , то:

$$n = \sum_{i=1}^r m_i \leq \sum_{i=1}^r k_i = \deg[\chi_\varphi(\lambda)] = n$$

3  $\Rightarrow$  4 :  $\sum_{i=1}^r \dim V_{\lambda_i} = n \Rightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$

4  $\Rightarrow$  1 : Базис в  $V$  - объединение базисов слагаемых

□

**Существование двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора над  $\mathbb{R}$ , отвечающего мнимому корню характеристического многочлена.**

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор,  $\dim V = n$ , тогда в некотором базисе  $V$ ,  $\varphi$  действует матрицей  $Y = A_\varphi \cdot X$ , где  $X \in \mathbb{R}^n$ , а  $Y$  - столбец образа этого вектора ( $y = \varphi(x)$ ). Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ) - корень характеристического многочлена.

Рассмотрим линейный оператор над полем  $\mathbb{C}$ , действующий при той же матрице:

$$A_\varphi : \forall Z \in \mathbb{C}^n, Z \rightarrow A_\varphi \cdot Z$$

Соответствующий оператор будем обозначать той же буквой. Так как  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто, то  $\exists$  собственный вектор  $Z_0$ , отвечающий выбранному  $\lambda$ . Это значит, что:

$$A_\varphi Z_0 = \lambda Z_0, \quad Z_0 = X_0 + iY_0, \quad \text{где } X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \implies A_\varphi Z_0 &= A_\varphi X_0 + iA_\varphi Y_0 = (\alpha + i\beta)(X_0 + iY_0) = \\ &= (\alpha X_0 - \beta Y_0) + i(\beta X_0 + \alpha Y_0) \implies \\ &\implies \begin{cases} A_\varphi X_0 = \alpha X_0 - \beta Y_0 \\ A_\varphi Y_0 = \beta X_0 + \alpha Y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим  $x_0$  и  $y_0 \in V$  векторы со столбцами координат  $X_0$  и  $Y_0$  соответственно, тогда:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \alpha x_0 - \beta y_0 \\ \varphi(y_0) = \beta x_0 + \alpha y_0 \end{cases} \implies \text{подпространство } U := \langle x_0, y_0 \rangle \subset V$$

$\implies U$  является инвариантным подпространством для  $\varphi$ .

Теперь докажем, что  $\dim U = 2$

*Доказательство.* Предположим, что  $\dim U = 1$ , то есть  $y_0 = \mu x_0$ , где  $\mu \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\varphi(x_0) = (\alpha - \beta\mu)x_0 \implies$  если  $x_0 \neq 0$ , то  $x_0$  - собственный вектор для  $\varphi$  (для  $y_0$  аналогично). Но эти векторы не были собственными для  $\varphi$ .

$$A_{\varphi|_U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ имеет корни } \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R} - \text{противоречие}$$

□

**Теорема.** Любой линейный оператор в конечномерном вещественном векторном пространстве имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

*Доказательство.* Если  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  - корень характеристического многочлена, ему отвечает собственный вектор  $u_i \in V$ ,  $u_i \neq 0$ ,  $\implies \langle u_i \rangle$  - одномерное инвариантное подпространство.

Если  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , то  $\exists U$  - двумерное инвариантное подпространство.  $\square$

Вместо диагонализированности можно использовать следующее утверждение:

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \alpha_1 & \beta_1 & \\ & & & -\beta_1 & \alpha_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \alpha_m & \beta_m \\ & & & & & & -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}$$

где  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, r}$ , а  $\beta_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, m}$

## 13 Анулирующие многочлены линейных операторов

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор над полем  $\mathbb{F}$ .

**Определение.** Линейный оператор  $\varphi : V \rightarrow V$  такой, что  $\forall v \in V : \varphi(v) = v$ , называется тождественным оператором и обозначается  $\text{id}$ .

**Определение.** Многочлен  $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \mathbb{F}[t]$ , где  $a_1 \dots a_m \in \mathbb{F}$ , называется анулирующим многочленом оператора  $\varphi$

$$f(\varphi) = a_0 \cdot \text{id} + a_1 \varphi + \dots + a_m \varphi^m = 0 \implies f(A_\varphi) = 0$$

$$\implies A_{f(\varphi)} = f(A_\varphi) = a_0 E + a_1 A_\varphi + \dots + a_m A_\varphi^m.$$

**Пример.**  $V = \mathbb{R}[t]_n$ ,  $\varphi = \frac{d}{dt}$

$$\varphi^n(t^n) = n!, \quad \varphi^{n+1} \equiv 0 \implies \text{для } \varphi = \frac{d}{dt} \quad t^{n+1} - \text{анулирующий многочлен}$$

**Утверждение.** Если  $\dim V = n \implies \exists$  многочлен  $\deg \leq n^2$ , анулирующий  $\varphi$ .

*Доказательство.*  $\dim L(V) = n^2$ ,  $L(V) \cong M_n(\mathbb{F}) \implies$  операторы  $\{Id, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n^2}\}$  - линейно зависимы, так как их больше  $n^2 \implies$

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{F} : a_0 \cdot \text{id} + a_1 \varphi + \dots + a_{n^2} \varphi^{n^2} = 0$$

$\implies a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2}$  - анулирующий многочлен для  $\varphi$   $\square$

**Определение.** Многочленной матрицей (матричным многочленом) называется матрица  $P = (P_{ij}(\lambda))$ , где  $P_{ij}(\lambda)$  - многочлены над полем, над которым задано векторное пространство.

**Пример.**

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda^2$$

- многочлен от  $\lambda$  с матричными коэффициентами.

**Определение.** Оператор  $\varphi : V \rightarrow V$  называется нулевым оператором, если образом любого вектора является нулевой вектор.

**Определение.** Для матрицы  $A = (a_{ij})$  присоединённой матрицей называется матрица  $\widehat{A} = (A_{ji})$ , то есть  $\widehat{a_{ij}} = A_{ji}$ .

**Свойство.**

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

**Теорема. Гамильтона-Кэли**

*Характеристический многочлен  $\chi_\varphi(\lambda)$  является аннулирующим многочленом для линейного оператора  $\varphi$ , то есть  $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ , где  $0$  - нулевой оператор.*

*В матричной форме:*

$$\forall A \in M_n(\mathbb{F}) : \chi_A(A) = 0$$

*Доказательство.* Пусть  $A$  - данная матрица, тогда:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \sum_{i=0}^n p_i \lambda^i$$

$$p_i \in \mathbb{F}, p_n = (-1)^n, \chi_A(A) = \sum_{i=0}^n p_i A^i \text{ (считаем, что } A^0 = E)$$

Составим матрицу:

$$\widehat{A - \lambda E} = \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j, \text{ где } D_j \in M_n(\mathbb{F})$$

Рассмотрим равенство:

$$(A - \lambda E)(\widehat{A - \lambda E}) = \chi_A(\lambda)E$$

$$\begin{aligned}
(A - \lambda E) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^j &= \sum_{j=0}^{n-1} (AD_j \lambda^j) - \sum_{j=0}^{n-1} D_j \lambda^{j+1} = \\
&= AD_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (AD_j - D_{j-1}) \lambda^j - D_{n-1} \lambda^n = \chi_A(\lambda) E = \left( \sum_{j=0}^n p_j \lambda^j \right) E
\end{aligned}$$

Приравняем матричные коэффициенты при соответствующих степенях  $\lambda$ :

$$\begin{array}{l|l}
E \cdot & \lambda^0 : \quad AD_0 = p_0 E \\
A \cdot & \lambda^1 : \quad AD_1 - D_0 = p_1 E \\
\vdots & \\
A^j \cdot & \lambda^j : \quad AD_j - D_{j-1} = p_j E \\
\vdots & \\
A^n \cdot & \lambda^n : \quad -D_{n-1} = p_n E
\end{array}$$

Домножим равенства с любой стороны на соответствующие степени  $A$  и сложим:

$$\implies \chi_A(A) E = 0$$

□

### 13.1 Минимальный анулирующий многочлен линейного оператора

**Определение.** Минимальным анулирующим многочленом линейного оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  называется анулирующий многочлен  $\varphi$  минимальной степени. Обозначается:  $\mu_\varphi(\lambda)$  (Зачастую его выбирают со старшим коэффициентом = 1) Ясно, что:

$$m = \deg \mu_\varphi(\lambda) \leq n \leq \deg \chi_\varphi(\lambda)$$

**Теорема.**

1.  $\mu_\varphi(\lambda)$  делит анулирующий многочлен оператора  $\varphi$  (в частности  $\chi_\varphi(\lambda)$ );
2. Если  $\mu'_\varphi(\lambda)$  тоже минимальный многочлен  $\varphi$ , то:

$$\mu'_\varphi(\lambda) = \alpha \mu_\varphi(\lambda), \quad \alpha \neq 0$$

Он определен единственным образом с условием, что старший коэффициент = 1;

3. Если все корни  $\lambda_i$  характеристического многочлена принадлежат  $\mathbb{F}$ , то они являются и корнями минимального многочлена.

*Доказательство.*

1. Пусть  $p(\varphi) = 0$ , для некоторого  $p(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$

Разделим  $p$  с остатком на  $\mu_\varphi$ :

$$p(\lambda) = \mu_\varphi(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow p(\varphi) = \mu_\varphi(\varphi) \cdot q(\varphi) + r(\varphi) = 0 \Rightarrow r(\varphi) = 0$$

Т.к.  $\deg r(\lambda) < \deg(\mu_\varphi(\lambda))$ ,  $r(\lambda) \equiv 0$ .

2. Т.к.  $\mu_\varphi(\lambda) \mid \mu'_\varphi(\lambda)$  и  $\mu'_\varphi(\lambda) \mid \mu_\varphi(\lambda) \Rightarrow \frac{\mu'_\varphi}{\mu_\varphi} = \alpha \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$

Если  $\mu_\varphi(\lambda) = \lambda^m + \dots$  и  $\mu'_\varphi(\lambda) = \lambda^m + \dots \Rightarrow \alpha = 1$

3. Допустим, что  $\exists j : \mu_\varphi(\lambda_j) \neq 0$ , т.е. в разложение  $\mu_\varphi$  не входит  $(\lambda - \lambda_j)$   
 $\Rightarrow \exists$  вектор  $v \in V : \varphi(v) = \lambda_j v$

$$0 = \mu_\varphi(\varphi)(v) = \mu_\varphi(\varphi(v)) = \mu_\varphi(\lambda_j v) = \mu_\varphi(\lambda_j) v \neq 0$$

- противоречие

□

## Примеры.

1.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi_\varphi(\lambda) = (2 - \lambda)^3$$

$$A_\varphi - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2E)^2 \neq 0, \quad (A - 2E)^3 = 0 \Rightarrow \mu_\varphi = -\chi_\varphi$$

2.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_\varphi = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

$$(A_\varphi - 2E)(A_\varphi - E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mu_\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

*Вопросы:*

1. Для каких операторов  $\varphi$  (или  $A_\varphi$ )  $\chi_\varphi(\lambda) = \pm \mu_\varphi(\lambda)$ ?

2. Для каких  $\varphi$  корни  $\mu_\varphi(\lambda)$  простые?

**Определение.** Оператор  $\varphi$  нильпотентный, если:

$$\exists L \in \mathbb{N} : \varphi^L = 0$$

Если  $L$  - минимальный с этим условием, то  $L$  - индекс нильпотентности

**Пример.**  $D = \frac{d}{dt}$  в пространстве  $\mathbb{R}[t]_n$ , то  $D^{n+1} = 0$

**Утверждение.** Все собственные значения нильпотентного оператора  $= 0$

*Доказательство.* Если  $v \neq 0$ ,  $\varphi(v) = \lambda v$ :

$$\implies \varphi^L(v) = \lambda^L v = 0 \implies \lambda = 0 \implies \chi_\varphi(\lambda) = \pm \lambda^n$$

□

## 14 Корневые подпространства

$\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор над  $\mathbb{F}$ ,  $\dim V = n$

Все корни характеристического многочлена для  $\varphi$  принадлежат  $F$  так, что:

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{k_p} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}, \quad \forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \sum_{i=1}^s k_i = n$$

Рассмотрим:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(\lambda)} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}} \mid \cdot \chi_\varphi(\lambda)$$

$$\implies 1 = f_1(\lambda) \prod_{i \neq 1} (\lambda - \lambda_i)^{k_i} + \dots + f_s(\lambda) \prod_{i \neq s} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$

$$1 = q_1(\lambda) + \dots + q_s(\lambda) \implies \text{id} = q_1(\varphi) + \dots + q_s(\varphi) = Q_1 + \dots + Q_s$$

$$\forall x \in V : x = Q_1(x) + \dots + Q_s(x) \implies V = \text{Im}(Q_1) + \dots + \text{Im}(Q_s)$$

Обратим внимание, что:

$$\forall i \neq j : Q_i Q_j = Q_j Q_i = 0$$

Т.к. в  $q_i(\lambda)q_j(\lambda)$  входят все множители, входящие в разложение  $\chi_\varphi(\lambda) \implies$  по теореме Гамильтона-Кэли:

$$q_i(\varphi)q_j(\varphi) = 0$$

Умножим равенство  $\text{id} = Q_1 + \dots + Q_i + \dots + Q_s$  на  $Q_i$ :

$$\implies Q_i \text{id} = Q_i = Q_i Q_1 + \dots + Q_i Q_i + \dots + Q_i Q_s = Q_i^2 \implies Q_i^2 = Q_i$$



**Определение.**  $Q_i^2 = Q_i$  - идемпотентный оператор.

Введем обозначение  $K_i = \text{Im}Q_i$

**Утверждение.**  $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$

*Доказательство.* Пусть  $x = y_1 + \dots + y_s$ ,  $y_i = Q_i(x_i)$ . Тогда:

$$Q_i(x) = Q_i(Q_1(x_1)) + \dots + Q_s(Q_i(x_s)) = Q_i(Q_i(x_i)) = Q_i(x_i) = y_i$$

Отсюда разложение любого вектора из  $V$  в сумму векторов из  $K_1, \dots, K_s$  единственно, т.е.  $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$ .  $\square$

**Определение.** Подпространство  $K_i = \text{Im}Q_i$  назовем корневым подпространством, отвечающим корню  $\lambda_i$ .

*Замечание.*  $q_i(\lambda) = \frac{f_i(\lambda) \cdot \chi_\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{k_i}} = f_i(\lambda) \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$ ;  $Q_i = q_i(\varphi)$ ;  $K_i = \text{Im}Q_i$ .

**Утверждение.**

1. Корневые подпространства инвариантны
2.  $K_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$ ,  $1 \leq i \leq s$

*Доказательство.*

1. Докажем, что для линейного оператора  $\varphi$  и многочлена  $q(\lambda)$  подпространство  $q(\varphi)(V)$  инвариантно:

$$q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m, \quad q(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + \dots + a_m\varphi^m$$

Возьмем  $v \in \text{Im}q(\varphi) \implies \exists u \in V : v = q(\varphi)(u) \implies \varphi(v) = (\varphi \cdot q(\varphi))(u) = q(\varphi)(\varphi(u)) \in \text{Im}q(\varphi)$ , так как оператор  $\varphi$  и любой  $q(\varphi)$  перестановочны.

Так как  $K_i = Q_i(V) = q_i(\varphi)(V)$ , из доказанного выше следует, что  $K_i$  инвариантно.

2.  $\forall x_i \in \text{Im}Q_i \implies x_i = Q_i(u_i)$

$$(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}(x_i) = f_i(\varphi) \cdot (\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i} \cdot \underbrace{\prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j E)^{k_j}}_{\chi_\varphi(\varphi)}(u_i) = 0$$

$$\implies K_i \subseteq \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$$

Обратно: пусть  $y_i \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$ . Знаем, что  $y_i = Q_1(y_i) + \dots + Q_s(y_i)$ , причём в  $Q_j$  при  $j \neq i$  содержится множитель  $(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$ . Отсюда  $Q_j(y_i) = 0$  при  $j \neq i$ , т.е.  $y_i = Q_i(y_i) \implies y_i \in K_i \implies \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i} \subseteq K_i$ .

□

**Теорема.** *Размерность  $K_i$  равна алгебраической кратности корня  $\lambda_i$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим ограничение оператора  $\varphi - \lambda_i \cdot \text{id}$  на  $K_i$ . Так как полученный оператор нильпотентный (из предыдущей теоремы), его единственное собственное значение равно 0, т.е. оператор  $\varphi$  в ограничении на  $K_i$  имеет единственное собственное значение  $\lambda_i$ , причём его алгебраическая кратность для ограничения равна размерности  $K_i$ .

Выберем базис в  $K_i$ , дополним его до базиса  $V$  и рассмотрим матрицу оператора в нём. Из инвариантности  $K_i$  она будет иметь вид

$$\left( \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

где  $B$  - матрица  $\varphi|_{K_i}$ . Из её характеристического многочлена очевидно, что алгебраическая кратность  $\lambda_i$  для ограничения не может превосходить алгебраической кратности  $\lambda_i$  для всего оператора. Значит,  $\dim K_i$  не превосходит алгебраической кратности  $\lambda_i$ .

Осталось заметить, что  $\dim V$  равна сумме алгебраических кратностей всех собственных значений и  $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s \Rightarrow \dim V = \dim K_1 + \dots + \dim K_s$ . Значит,  $\dim K_i$  равна алг. кратности  $\lambda_i$ . □

## 15 Теорема Жордана

Основное условие:  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор, все его корни  $\in \mathbb{F}$

$$\chi_\varphi(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \quad (\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j \text{ и } \sum_{i=1}^s k_i = \dim V)$$

$V = K_1 \oplus \dots \oplus K_s$ , где  $K_i = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \cdot \text{id})^{k_i}$  - корневое подпространство

$$V_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda_i x\}, \quad \dim V_{\lambda_i} \leq k_i = \dim K_i$$

Так как  $K_i$  - инвариантное подпространство относительно оператора  $\varphi$ , можно рассмотреть ограничение:

$$(\varphi - \lambda_i \text{id})|_{K_i} := B_i$$

Из определения  $K_i$  следует, что  $B_i^{k_i} = 0$ , то есть  $B_i$  - нильпотентный оператор. В базисе, согласованном с этим разложением:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

где  $A_i = A_{\varphi_{k_i}}$  - матрица порядка  $k_i$ ,  $A_i - \lambda_i E_{k_i} = B_i$ ,  $B_i^{k_i} = 0$   
Обозначим  $K_i := K$ ,  $B_i := B$ ,  $k_i := k$ , тогда:

$$\forall x \in K : B^k(x) = 0$$

если  $x \neq 0$ , то  $\exists$  наименьшее значение  $m$ :

$$B^m(x) = 0, B^{m-1}(x) \neq 0 \ (m \leq h)$$

Назовём это высотой вектора  $x$ .

Для фиксированного вектора  $x \neq 0$  (высоты  $m$ ) рассмотрим векторы:

$$x, Bx, \dots, B^{m-1}x, B^m x = 0$$

**Определение.** Векторы  $\{x, Bx, \dots, B^{m-1}x\}$  называются жордановой цепочкой.

**Лемма.** Вышеуказанные векторы являются линейно независимыми.

*Доказательство.* Предположим, что:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Bx + \dots + \alpha_{m-1} B^{m-1}x = 0$$

Поддействуем на это равенство оператором  $B^{m-1}$ :

$$\alpha_0 B^{m-1}x = 0 \implies \alpha_0 = 0$$

На оставшиеся векторы поддействуем оператором  $B^{m-2}$ :

$$\alpha_1 B^{m-1}x = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

и т.д. Получим, что  $\forall i = \overline{0, m-1} : \alpha_i = 0 \implies$  векторы являются линейно независимыми.  $\square$

**Определение.** Подпространство, натянутое на эти векторы:

$$\langle x, Bx, \dots, B^{m-1}x \rangle$$

называется циклическим подпространством, порождённым жордановой цепочкой. Данное подпространство обозначим  $U_x$ ,  $\dim U_x = m$ .

Обычно векторы жордановой цепочки нумеруют с конца, то есть:

$$a_1 = B^{m-1}x, a_2 = B^{m-2}x, \dots, a_m = x$$

Тогда  $a_1$  - собственный вектор для  $B$ , и для  $\forall j = \overline{2, m} : a_{j-1} = Ba_j$ .

Вектор  $a_j$  называется **присоединённым** к вектору  $a_{j-1}$ .

К вектору  $a_1$ :  $a_2$  - присоединённый,  $a_3$  - второй присоединённый и т.д.

### Определение.

Матрица ограничения оператора  $B$  на подпространство  $U_x = \langle a_1 \dots a_m \rangle$  :

$$B|_{U_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

называется жордановой клеткой с собственным значением  $\lambda = 0$

$$\lambda = \lambda_i : A_{\varphi|_{U_x}} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} = J_k(\lambda_i)$$

- жорданова клетка с собственным значением  $\lambda = \lambda_i$ , где:

$$\varphi(a_2) = a_1 + \lambda_i a_2, \varphi(a_{j+1}) = a_j + \lambda_i a_{j+1}$$

Перед доказательством теоремы докажем лемму:

**Лемма.** Если  $B$  - такой оператор в пространстве  $V$ , что:

$$\text{Im} B = B(V) \subset V$$

то  $V$  обладает  $(n-1)$ -мерным инвариантным подпространством  $W$ , таким что  $\text{Im} B \subseteq W$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_m$  - базис в  $\text{Im} B$ ,  $m < n = \dim V$

Дополним его до базиса в  $V$  векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n$ .

Тогда  $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  - искомое инвариантное подпространство:

$$\forall w = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i e_i \implies Bw = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i B e_i \in \text{Im} B \subseteq W$$

□

### Теорема. Жордана

Если все характеристические корни оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  принадлежат полю  $\mathbb{F}$ , то  $V$  является прямой суммой циклических подпространств для оператора  $\varphi$ . Это равносильно тому, что в  $V$  существует базис, составленный из жордановых цепочек. Такой базис называется жордановым базисом.

Если жорданов базис уже построен: Пусть имеются  $r$  жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , необязательно различным, длины которых  $m_1, \dots, m_r$  соответственно, тогда в этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{m_2}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{m_r}(\lambda_r)} \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^r m_i = n = \dim V$$

- жорданова матрица - жорданова нормальная форма (ЖНФ) матрицы  $A_\varphi$ .

### Теорема. Жордана (матричная формулировка)

Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , все характеристические корни которой  $\in \mathbb{F}$ ,  $\exists$  матрица  $C$  ( $\det C \neq 0$ ) такая, что:

$$C^{-1}AC = J$$

- жорданова матрица. При этом жордановы клетки определены для матрицы  $A$  единственным образом с точностью до расположения клеток на диагонали жордановой матрицы.

Замечание. Матрицу  $A$  можно интерпретировать как матрицу линейного оператора  $\varphi$ , для него верна теорема Жордана.

Доказательство. (См. Шафаревич И.Р. "Линейная алгебра")

Доказательство достаточно провести для ограничения оператора на каждое корневое подпространство  $K_i$ .

Введем обозначения:  $B : V \rightarrow V$  - нильпотентный оператор,  $\dim V = n$ ,  $W$  -  $(n-1)$ -мерное инвариантное подпространство в  $V$ , содержащее  $\text{Im} B$  (существует по лемме 1).

Докажем теорему индукцией по  $n$ :

База: если  $n = 1$ , то  $B = 0$  и любой базис - жорданов.

Пусть  $n > 1$ , тогда по предположению индукции в  $W \exists$  базис для  $B|_w$ , т.е.

$$W = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$$

Выберем вектор  $a \in V \setminus W$ , тогда  $a$  ЛНЗ с векторами из  $W$ .

Рассмотрим  $Ba \in W$  (т.к.  $\text{Im} B \subseteq W$ ) так, что  $Ba = u_1 + \dots + u_r$ ,  $u_i \in U_i$  (\*).

Если  $Ba = 0$ , то:

$$V = \langle a \rangle \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_r - \text{искомое разложение пространства}$$

Если  $Ba \neq 0$ , то найдется  $i$ , что  $u_i \neq 0$ .

Если в разложении есть  $u_i \in B(U_i)$ , то  $\exists v_i \in U_i : u_i = Bv_i$ .

Рассмотрим вместо  $a$  вектор  $a - v_i : B(a - v_i) = u_1 + \dots + u_i + \dots + u_r - u_i \implies$   
в разложение такого вектора  $u_i$  не входит.

Заменив  $a$  на нужные разности  $a - v_i$ , получим новый вектор  $e \in V \setminus W$ , при этом занулив все  $u_i \in B(U_i)$ , т.е.

$$Be = u'_1 + \dots + u'_r, \forall i \text{ либо } u'_i \notin B(U_i), \text{ либо } u'_i = 0$$

Хотя бы один из векторов  $u'_i \neq 0$ , выберем из них вектор, имеющий максимальную высоту  $m$ . Заметим, что  $m = \max(\dim U_i)$ , так как каждый  $u'_i$  по построению нового разложения имеет максимальную высоту в своём подпространстве. Тогда  $h(e) = m + 1$ , т.к.  $h(Be) = m$ .

Без ограничения общности выбрали вектор  $u_1$ . Докажем, что:

$$V = \langle e, Be, \dots, B^m e \rangle \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$$

Сумма размерностей подпространств в правой части:

$$(m_1 + 1) + \dots + m_r = n = \dim V$$

Поэтому для прямой суммы достаточно доказать, что:

$$\langle e, Be, \dots, B^m e \rangle \cap (U_2 \oplus \dots \oplus U_r) = \{0\}$$

Пусть  $v = \lambda_1 e + \dots + \lambda_{m+1} B^m e \in U_2 \oplus \dots \oplus U_r$

Т.к.  $e \notin W$ ,  $\lambda_1 = 0$ .  $Be = u'_1 + \dots + u'_r \implies$  проекция  $Be$  на  $U_1$  равна  $u'_1$ .

Спроецируем всё разложение на  $U_1$ :

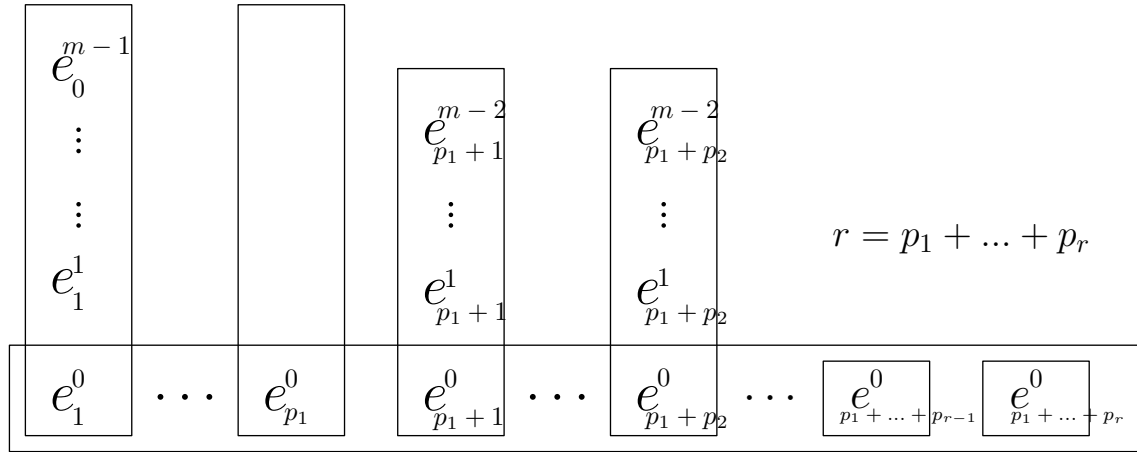
$$\lambda_2 u_1 + \lambda_3 Bu_1 + \dots + \lambda_{m+1} B^{m-1} u_1 = 0 \implies \lambda_2 = \dots = \lambda_{m+1} = 0 \implies v = 0$$

Существование ЖНФ доказано. Доказательство единственности приводится в следующем пункте.  $\square$

*Замечание.*  $r$  - количество циклических подпространств в разложении корневого подпространства  $K$ , отвечающего корню  $\lambda_0$ , равно геометрической кратности корня  $\lambda_0$  характеристического многочлена.

## 15.1 Изображение разложения корневых подпространств

Обозначим:  $r = \dim \text{Ker } B$  - размерность собственного подпространства  
 Занумеруем собственные векторы, входящие в цепочки, располагая цепочки по убыванию высоты.  $m$  - максимальная высота цепочки,  $1$  - минимальная  
 Также введем обозначение для последовательных присоединённых векторов:  
 есть  $p_1$  цепочек высоты  $m$ ,  $p_2$  - высоты  $m - 1, \dots, r - (p_1 + \dots + p_{r-1})$  - высоты  $1$



$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r, \dim U_{i+1} \leq \dim U_i$$

$$\begin{aligned} BV &= BU_1 \oplus \dots \oplus BU_r \\ &\vdots \\ B^k V &= B^k U_1 \oplus \dots \oplus B^k U_r \end{aligned}$$

$$\text{Если } \dim U_i = m_i, \dim(B^k U_i) = \begin{cases} m_i - k, & \text{если } k < m_i \\ 0, & \text{если } k \geq m_i \end{cases} \implies$$

$$\dim(B^k V) = \sum_{i=1}^r \dim B^k U_i = q_{k+1} + 2q_{k+2} + \dots + (m - k)q_m$$

Пусть  $q_i$  - число циклических подпространств размерности  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$

Обозначим  $r_k = \text{rk } B^k$

Для  $k = 0$  до  $m - 1$  получим равенства:

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad q_1 + 2q_2 + \dots + mq_m = n \\ k = 1 : & \quad q_2 + 2q_3 + \dots + (m - 1)q_m = r_1 = \text{rk } B \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

$$q_m = r_{m-1} = \text{rk } B^{m-1} \neq 0$$

$B^m = 0$  на корневом подпространстве

Вычитая из каждого уравнения следующее, получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 + \dots + q_m = n - r_1 \implies q_1 = n - 2r_1 + r_2 \\ q_2 + \dots + q_m = r_1 - r_2 \implies q_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 \\ \dots \\ q_m = r_{m-1} - r_m \quad (r_m = 0) \end{array} \right.$$

$$\implies q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1} \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

Вывод: количество и порядок (высоты цепочек) однозначно определяется по матрице  $B = A|_{\varphi - \lambda \text{id}}$  - эти ранги не зависят от конкретного разложения  $\implies$  определяются единственным образом, т.е. **ЖНФ единственна с точностью до перестановки клеток на диагонали.**

**Следствие. Пусть:**

$$\chi_\varphi = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

- характеристический многочлен

$$\mu_\varphi = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

- минимальный многочлен

Тогда  $\forall i = \overline{1, s}$ :  $m_i$  равна тах размерности жордановой клетки, отвечающей корню  $\lambda_i$

**Следствие. Критерий диагонализируемости в терминах  $\min$  многочлена:**

Оператор  $\varphi$  диагонализируем  $\iff m_1 = \dots = m_s = 1$

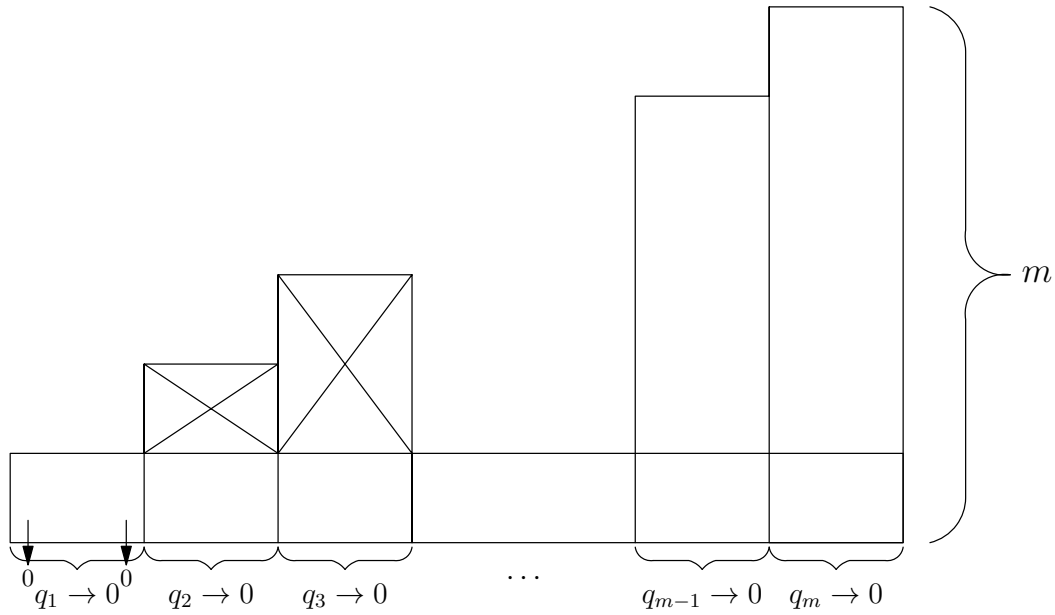
*Доказательство.* Достаточно доказать для каждого корневого подпространства  $K_i$

$$B = A_{\varphi - \lambda_i \text{id}}|_{K_i}$$

- блочно-диагональная матрица с клетками размера  $m_j$  □

Переделываем:





Применим оператор  $B$ :

$$\begin{cases} \dim V = q_1 + 2q_2 + \dots + (m-1)q_{m-1} + mq_m = n \\ \dim \operatorname{Im} B = q_2 + \dots + (m-2)q_{m-1} + (m-1)q_m = r_1 \\ \vdots \\ \dim \operatorname{Im} B^{m-1} = q_m = r_{m-1} \end{cases}$$

Некоторые применения приведут матрицу к жордановой форме (в частности, диагонализируемости)

## 15.2 Решение СЛАУ

Пусть дана система  $AX = B$  с квадратной матрицей  $A$ , все характеристические корни которой  $\in \mathbb{R}$ .

Сделаем замену:

$$X = CY \implies (AC)Y = B \iff \underbrace{(C^{-1}AC)}_Y Y = C^{-1}b = b'$$

Можно взять  $C$  - матрицу перехода к жорданову базису

$$y = \begin{pmatrix} \boxed{Y_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{Y_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Если  $y$  жорданова клетка, то уравнения:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = b'_1 \\ \lambda x_2 + x_3 = b'_2 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{легко решить}$$

### 15.3 Решение СЛДУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$\dot{X} = AX$ , где  $A$  - квадратная

$$X = CY \implies \dot{X} = C\dot{Y}$$

$$C\dot{Y} = (AC)Y \implies \dot{Y} = (C^{-1}AC)Y$$

Если матрица  $C^{-1}AC$  диагональная:  $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_i \neq 0$  получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \lambda_n y_n \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Тогда  $X = CY$

Если

$$C^{-1}AC = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_0 & 1 \\ 0 & & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = \lambda_0 y_{n-1} + y_n \\ \dot{y}_n = \lambda_0 y_n \end{cases}$$

решаем снизу вверх.

### 15.4 Функции от матриц

$$(C^{-1}AC) = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}(\lambda_i)} \end{pmatrix} \implies A = CYC^{-1}$$

$$\Rightarrow A^n = (CYC^{-1})(CYC^{-1})...(CYC^{-1}) = CY^n C^{-1}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}^n(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_i}^n(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} & 1 \\ & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \left( \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 + \dots = \begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1} C_n^1 & \lambda^{n-2} C_n^2 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \lambda^n & \lambda^{n-1} C_n^1 & \lambda^{n-2} C_n^2 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

**Упражнение.** Пусть  $f(t)$  - многочлен,  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

Доказать, что:

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

## 15.5 Вычисление корня и экспоненты

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

Для  $J_n(\lambda) = \lambda E + B \Rightarrow$

$$\exp(J_n(\lambda)t) = e^{t\lambda E} \cdot e^{tB} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{A+B} = e^A \cdot e^B \iff AB = BA)$$

**Примеры.**

1.

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)t^2 + \dots$$

2.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = E + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2!}C_{\frac{1}{2}}^2 B^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \neq 0$$

## 16 Билинейные и квадратичные формы

**Определение.** Функция  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  называется билинейной функцией, если:

1. аддитивность:

$$\forall x_1, x_2, y : b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2 : b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$$

2. однородность:

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} : b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y)$$

**Определение.**  $b(x, y)$  - называется симметрической, если:

$$\forall x, y \in V : b(y, x) = b(x, y)$$

**Примеры.**

1. Симметрическая билинейная функция - скалярное произведение

2.  $V = M_n(\mathbb{F}) : b(X, Y) = \text{tr}(XY)$

3.  $\beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

## 16.1 Запись билинейной функции в координатах

Пусть в  $V$  задан базис  $e_1, \dots, e_n$ , тогда:

$$b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n b(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j)$$

**Определение.** Обозначим  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ , тогда  $B_e = b_{ij}$  - матрица билинейной функции  $b(x, y)$  в базисе  $e$

Тогда:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B_e \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B_e Y \quad (1)$$

## 16.2 Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса

Пусть  $e' = eC$ , т.е.  $C$  - матрица перехода от  $e$  к  $e'$

Тогда:

$$X = CX', \quad Y = CY' \quad (2)$$

По определению матрицы билинейной функции, в новом базисе:

$$b(x, y) = X'^T B' Y' \quad (B' = B_{e'})$$

Подставим в формулу (1) выражение (2):

$$\begin{aligned} b(x, y) &= X'^T C^T B C Y' = X'^T (C^T B C) Y' = X'^T B' Y' \quad (\forall X', Y' \in \mathbb{F}^n) \\ \implies B' &= C^T B C \quad (\forall i, j : X' := E_i, Y' := E_j) \end{aligned}$$

**Следствие.**

$$1. \operatorname{rk} B' = \operatorname{rk} B$$

$$2. \mathbb{F} = \mathbb{R} \implies \operatorname{sgn}(\det B') = \operatorname{sgn}(\det B)$$

**Определение.** Билинейная функция  $b(x, y)$  называется кососимметрической (при  $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ ), если:

$$\forall x, y \in V : b(x, y) = -b(y, x)$$

**Утверждение.** (\*) Любая билинейная функция над  $\mathbb{F} : \operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$  единственным образом представляется в виде:

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y), \quad \text{где } b_+(x, y) \equiv b_+(y, x), \quad b_-(x, y) \equiv -b_-(y, x)$$

*Доказательство.*

$$\begin{cases} b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \\ b(y, x) = b_+(x, y) - b_-(x, y) \end{cases} \implies$$

$$b_+(x, y) = \frac{b(x, y) + b(y, x)}{2}, \quad b_-(x, y) = \frac{b(x, y) - b(y, x)}{2}$$

□

**Утверждение.** Билинейная функция  $b(x, y)$  симметрична (кососимметрична)  $\iff$  в любом базисе  $e$ :

$$B_e^T = B_e \quad (B_e^T = -B_e)$$

*Доказательство.* (Докажем для симметрической, для кососимметрической аналогично)

$\implies$  Пусть  $B = (b_{ij})$ , тогда  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ .

$$\forall x, y \in V, \quad b(x, y) = b(y, x) \implies b(e_j, e_i) = b(e_i, e_j)$$

$\iff$

$$b(x, y) = X^T B Y, \quad b(y, x) = Y^T B X = (X^T B^T Y)^T = (X^T B Y)^T = b(x, y)$$

□

Утверждение (1)  $\iff \forall$  матрицы  $B$  некоторой билинейной функции верно, что  $B = B_+ + B_-$ , где  $B_+$  - матрица симметрической билинейной функции, а  $B_-$  - матрица кососимметрической билинейной функции.

**Определение.** Квадратичная функция, порождённая билинейной функцией  $b(x, y)$  - это функция на  $V$ .

Обозначаем:  $k(x) := b(x, x)$ , если  $k(x) \neq 0$ .

Если  $b$  - кососимметрическая функция, то  $b(x, x) = 0 \implies k(x) \equiv 0$ . В общем случае существует бесконечно много билинейных функций, порождающих одну и ту же квадратичную, таких, что:

$$b(x, y) = b_+(x, y) + b_-(x, y) \implies b(x, x) = b_+(x, x)$$

**Теорема.**  $\forall$  квадратичной функции  $\exists!$  симметрическая билинейная функция, которая её порождает.

*Доказательство.* Допустим, что  $b(x, y) = b(y, x)$  - симметрическая билинейная функция и  $k(x) = b(x, x)$ . Тогда  $\forall x, y \in V$ :

$$\begin{aligned} k(x+y) &= b(x+y, x+y) = b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) = \\ &= b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = k(x) + 2b(x, y) + k(y) \end{aligned}$$

Так как  $\text{char} \mathbb{F} \neq 2$ , то:

$$b(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$$

□

**Определение.** Билинейная функция  $b(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$  называется поляризацией квадратичной функции  $k$ .

Далее будем считать матрицу квадратичной формы матрицей её полярной симметрической билинейной функции  $b(x, y)$

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_iy_i + \sum_{i < j} b_{ij}x_iy_j + \sum_{i > j} b_{ij}x_iy_j$$

$$\forall i, j : b_{ij} = b_{ji} \implies b(x, x) = k(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_ix_j \quad (1)$$

**Пример.** Пусть  $k(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 - 7x_3^2$ , тогда:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Пусть  $b(x, y)$  - симметрическая или кососимметрическая билинейная функция и  $\emptyset \neq L \subset V$  - подпространство. Ортогональным дополнением к  $L$  относительно билинейной формы  $b(x, y)$  называется:

$$L^\perp := \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in L\}$$

*Замечание.* Запись  $x \perp y$  означает, что  $b(x, y) = 0$ .

**Определение.**  $V^\perp = \{y \in V \mid b(x, y) = 0, \forall x \in V\}$  - ядро формы.

**Определение.** Билинейная функция  $b(x, y)$  называется невырожденной, если:

$$\text{Ker}(b) = V^\perp = \{0\}$$

**Упражнение.**  $b(x, y)$  - невырожденная функция  $\iff \det B \neq 0$ .

## 16.3 Квадратичные формы

**Определение.** Квадратичная форма в некотором базисе называется диагональной, если в этом базисе:

$$k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2, \text{ где } \alpha_i \in \mathbb{F}$$

**Теорема.** В конечномерном пространстве  $V$  ( $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ )  $\exists$  базис, в котором эта форма диагональна.

*Доказательство.* (Алгоритм Лагранжа - метод выделения полных квадратов)  
По формуле (1):

$$k(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j$$

1. Основной случай:

$\exists i : b_{ii} \neq 0 \implies$  можно перенумеровать неизвестные  $x_1, \dots, x_n$  так, что  $b_{11} \neq 0$ . Выделим в  $k(x)$  все одночлены, содержащие  $x_1$ :

$$k(x) = b_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n b_{1i} x_i + \tilde{k}(x_2, \dots, x_n)$$

и дополним выражение до квадрата:

$$\begin{aligned} k(x) &= b_{11} \left( x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i + \left( \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i \right)^2 - \frac{\left( \sum_{i=2}^n b_{1i} x_i \right)^2}{b_{11}} \right) + \tilde{k} = \\ &= b_{11} \left( x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i \right)^2 + k_2(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Затем для формы  $k_2(x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^n b'_{ii} x_i^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} b'_{ij} x_i x_j$  найдём коэффициент  $b'_{jj} \neq 0$  и выделим квадрат как на предыдущем шаге. На каждом шаге число переменных уменьшается на единицу, а значит, за конечное число шагов (а именно  $\leq n - 2$ ) форма приобретёт диагональный вид.

2. Особый случай:

$\forall i : b_{ii} = 0$ , но так как  $k(x) \not\equiv 0 \implies \exists$  индексы  $i$  и  $j$  такие, что  $b_{ij} \neq 0$ , то есть в выражение  $k(x)$  входит одночлен  $2b_{ij} x_i x_j$ .

Пусть  $x_i = x'_i + x'_j$  и  $x_j = x'_i - x'_j$ , тогда  $x_i x_j = x'^2_i - x'^2_j$ , то есть появился квадрат с коэффициентом, не равным нулю  $\implies$  можно перейти к общему



случаю. (Квадраты появятся только в этом одночлене, т.к.  $x'_i$  и  $x'_j$  ни в одном другом не встретятся дважды, поэтому и после приведения подобных коэффициенты перед ними будут ненулевые)

□

*Замечание.* В благоприятном случае, когда на первом шаге коэффициент при  $x_1$  не равен нулю, на втором шаге коэффициент при  $x_2$  не равен нулю и т.д., матрица замены будет иметь вид:

$$C_{e \rightarrow e'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- матрица с 1 на диагонали  $\implies |C_{e \rightarrow e'}^{-1}| = 1 \neq 0$ .

**Определение.** Форма  $k(x_1, \dots, x_n)$  называется канонической (нормальной), если:

1. (над  $\mathbb{R}$ ) в диагональном виде  $\forall \alpha_i$  принимает только значения: -1, 0, 1
2. (над  $\mathbb{C}$ ) в диагональном виде  $\forall \alpha_i$  принимает только значения: 0, 1

### Примеры.

1. Пусть  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ :

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \dots + \alpha_nx_n^2$$

Если  $rkB = r \implies k(x) = \alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \dots + \alpha_rx_r^2 (\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0)$ .

Если  $\alpha_i > 0$ , то введём обозначение:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\alpha_i}x_i \implies k = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_p^2 - \hat{x}_{p+1}^2 - \dots - \hat{x}_r^2$$

где  $p$  - количество коэффициентов  $\alpha_i > 0$ .

Если  $\alpha_i < 0 \implies \hat{x}_i = -\sqrt{\alpha_i}x_i$ .

2. Пусть  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ :

$$\forall i = \overline{1, r} : \hat{x}_i = \sqrt{\alpha_i}x_i \implies k = \hat{x}_1^2 + \dots + \hat{x}_r^2$$

Таким образом, в вещественном случае для любой квадратичной формы  $k(x)$  существует замена координат  $X = CY (|C| \neq 0)$  такая, что в новых координатах

$$k = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2.$$

**Определение.**  $p$  в такой записи называется положительным индексом инерции,  $q$  - отрицательным индексом инерции.

**Теорема. единственности (закон инерции)**

Если в некоторых базисах  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_n$  квадратичная форма  $k$  имеет канонические виды

$$k = \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2 = \sum_{i=1}^{p'} z_i^2 - \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} z_j^2$$

то  $p = p', q = q'$ .

*Доказательство.* Так как  $p+q = rkB = p'+q'$ , достаточно доказать, что  $p = p'$ . От противного: пусть  $p' < p$ . Рассмотрим подпространства  $U_1 = \langle e_1, \dots, e_p \rangle, U_2 = \langle f_{p'+1}, \dots, f_n \rangle$ . Очевидно,  $\dim U_1 = p, \dim U_2 = n - p'$ .

$$\dim U_1 + \dim U_2 = p - p' + n > n; \quad U_1 + U_2 \subset V \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) \leq n$$

Из формулы Грассмана:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) > 0$$

Рассмотрим вектор  $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$ :

$$v = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i \Rightarrow k(v) = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \geq 0$$

С другой стороны:

$$v = \sum_{k=p'+1}^n \beta_k f_k \Rightarrow k(v) = - \sum_{k=p'+1}^n \beta_k^2 \leq 0$$

Отсюда  $k(v) = 0 \Rightarrow \forall i = 1, \dots, p \quad \alpha_i = 0 \Rightarrow v = 0$  - противоречие. □

## 16.4 Знакоопределённые квадратичные формы

**Определение.** Пусть  $b(x, y)$  - симметрическая билинейная форма. Векторы  $u, v$  называются *ортгональными*, если  $b(u, v) = 0$ . Обозначается  $u \perp v$ .

**Определение.** Базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$  - *ортгональный*, если  $b(e_i, e_j) = 0 (i \neq j)$ .

**Определение.** Для квадратной матрицы  $B$  главными минорами (угловыми

минорами) называются миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ , где  $\Delta_i = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$ . Опре-

делим  $\Delta_n = |B|, \Delta_0 = 1$ .

**Теорема. Якоби** Пусть  $k(x)(=b(x, x), b - \text{симм. б. ф.})$  такова, что главные миноры её матрицы  $B$  в нек. базисе  $e : \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$  Тогда в  $V$  существует базис (и замена координат  $X = CY$ ), в котором

$$k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$$

*Доказательство.* Будем строить базис  $e'$  из базиса  $e$ , ортогональный относительно  $b(x, y)$  (алгоритм ортогонализации Грама/Шмидта).

$$e'_1 := e_1; \quad \forall k \geq 1 \quad \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

причём  $b(e'_i, e'_j) = 0 (1 \leq i \neq j \leq k)$

Шаг алгоритма: допустим, что  $k > 1$  и векторы  $e'_1, \dots, e'_{k-1}$  уже построены.

Будем искать  $e'_k$  в виде

$$e'_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e'_i$$

где  $\lambda_i$  найдём из условия  $b(e'_k, e'_j) = 0, \quad j = 0, \dots, k-1$

$$b(e'_k, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_j b(e'_i, e'_j) = b(e_k, e'_j) + \lambda_j b(e'_j, e'_j) = 0 \Rightarrow \lambda_j = -\frac{b(e_k, e'_j)}{b(e'_j, e'_j)}$$

Покажем по индукции, что  $b(e'_j, e'_j) = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \neq 0$ .

Обратим внимание, что матрица перехода от  $e_1, \dots, e_{k-1}$  к  $e'_1, \dots, e'_{k-1}$  - верхняя треугольная с 1 по диагонали (предп. индукции). Запишем:  $C_{(e_1, \dots, e_k) \rightarrow (e'_1, \dots, e'_k)} =$

$$\begin{pmatrix} C_{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где по предположению индукции } C_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad B - \text{матрица}$$

билин. формы  $b(x, y)$  в базисе  $e$ ,  $B'$  - в базисе  $e'$ , который мы строим.

$$B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle} = C_k^T B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle} C_k \Rightarrow \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = (\det C_k)^2 \cdot \det B_{k|\langle e_1, \dots, e_k \rangle}$$

$$\Delta'_k = \det(B'_{k|\langle e'_1, \dots, e'_k \rangle}) = b'_{11} \dots b'_{kk} = \Delta_k$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \dots \cdot \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}} \cdot b'_{kk} = \Delta_k \Rightarrow b'_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

□

Далее рассматриваем  $F = \mathbb{R}$ .

**Определение.** Квадратичная форма  $k(x)$  на пр-ве  $V$  над  $\mathbb{R}$  называется

- положительно определённой, если  $\forall x \neq 0 \ k(x) > 0$  (обозн.  $k > 0$ );
- отрицательно определённой, если  $\forall x \neq 0 \ k(x) < 0$  (обозн.  $k < 0$ );
- неотрицательно определённой, если  $\forall x \ k(x) \geq 0$  (обозн.  $k \geq 0$ );
- неположительно определённой, если  $\forall x \ k(x) \leq 0$  (обозн.  $k \leq 0$ ).

**Утверждение.** Квадратичная форма  $k(x)$  является

1. положительно определённой  $\Leftrightarrow p = n, q = 0$ ;
2. отрицательно определённой  $\Leftrightarrow p = 0, q = n$ ;
3. неотрицательно определённой  $\Leftrightarrow q = 0$ ;
4. неположительно определённой  $\Leftrightarrow p = 0$ ;
5. знаконеопределённой  $\Leftrightarrow p, q > 0$ .

*Доказательство.* Очевидно. □

**Лемма.** Если кв. форма  $k > 0$ , то  $\det B = \Delta_n \neq 0$ .

*Доказательство.* Т.к.  $k > 0$ ,  $p = n$ , т.е. существует базис, в котором  $k(x') = x_1'^2 + \dots + x_n'^2 \Rightarrow \Delta'_n = 1 > 0$ .

А так как  $B' = C^T B C$ ,  $|B'| = |C|^2 \cdot |B| \Rightarrow \det B > 0$ . □

**Теорема. Критерий Сильвестра**

Квадратичная форма  $k(x)$ , имеющая в некотором базисе матрицу  $B$ , является

1. положительно определённой  $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ .
2. отрицательно определённой  $\Leftrightarrow \forall k \ (-1)^k \Delta_k > 0$ .

*Доказательство.* Для положительной определённости:

$\Leftarrow$ : По теореме Якоби  $\exists$  базис, в котором  $k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$ . Т.к. все  $\Delta_i > 0$  (знакопередающиеся для отрицательного случая), все коэффициенты  $> 0 (< 0)$ , т.е. значение формы на любом ненулевом векторе имеет необходимый нам знак.

$\Rightarrow$ :  $k > 0 \Rightarrow \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \dots \cdot \Delta_n \neq 0$  ( $k$ -ый минор ненулевой по лемме для угловой подматрицы)  $\Rightarrow$  применима т. Якоби, из которой следуют необходимые нам знаки на всех  $\Delta$ .

Для отрицательной определённости:  $k < 0 \Leftrightarrow -k > 0$ , причём при домножении матрицы на  $-1$  знак меняют только миноры нечётного порядка. □

*Замечание.* Т.к.  $b_{ii} = k(e_i)$ , у положительно определённой формы все  $b_{ii} > 0$ , у отрицательной все  $b_{ii} < 0$ .

*Замечание.* Пусть  $k(x)$  такая, что  $\Delta_1, \dots, \Delta_r \neq 0, \Delta_{r+1} = \dots = \Delta_n = 0$ . Тогда  $p$  - число сохранений знака в последовательности  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_r$ , а  $q$  - число перемен знака в этой последовательности.

*Доказательство.* Из теоремы Якоби в подходящем базисе

$$k(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \dots + \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} y_k^2 + \dots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} y_r^2$$

Тогда каждое сохранение знака соответствует положительному коэффициенту, а каждая перемена знака - отрицательному коэффициенту, откуда и следует необходимое равенство.  $\square$

## 16.5 Кососимметрические билинейные формы

$$\forall x, y \in V : b(y, x) = -b(x, y) \quad (\text{char } \mathbb{F} \neq 2)$$

Заметим, что  $\forall x \in V : b(x, x) = 0$ . Если же  $b(x, x) \equiv 0$ :

$$0 = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + b(x, y) + b(y, x) \Rightarrow b(x, y) = -b(y, x)$$

Поэтому условие  $b(x, x) \equiv 0$  не только эквивалентно кососимметричности формы, но и применимо в случае  $\text{char } F = 2$ .

**Лемма.** Пусть  $b(x, y)$  - симметрическая или кососимметрическая билинейная форма на  $V$  ( $\dim V = n < \infty$ ),  $U \subset V$ . Тогда если  $e_1, \dots, e_m$  - базис  $U$ , то  $y \in U^\perp \iff b(e_i, y) = 0, i = 1, \dots, m$ .

*Доказательство.*  $U^\perp = \{y \in V : b(x, y) = 0 \forall x \in U\}$ .

$$\Rightarrow: y \in U^\perp \implies b(x, y) = 0 \forall x \in U \implies b(e_i, y) = 0, i = 1, \dots, m;$$

$$\Leftarrow: b(e_i, y) = 0 \implies \forall x \in U b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i, y\right) = \sum_{i=1}^m x_i b(e_i, y) = \sum_{i=1}^m 0 = 0 \implies y \in U^\perp. \quad \square$$

**Теорема.** Пусть  $b(x, y)$  - симметрическая или кососимметрическая билинейная форма на  $V$  ( $\dim V = n < \infty$ ),  $U \subset V$  такое, что  $b|_U$  невырождена. Тогда  $V = U \oplus U^\perp$ .

*Доказательство.* Из леммы  $y \in U^\perp \iff b(e_i, y) = 0, i = 1, \dots, m$ .

Запишем систему уравнений для нахождения  $y$ , выбрав базис  $e_1, \dots, e_m \in U$

и дополнив его до базиса  $e_1, \dots, e_n \in V$ . В этом базисе  $e_i^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $b(e_i, y) =$

$$(0, \dots, 1, \dots, 0)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (b_{i1}, \dots, b_{in})Y^\uparrow$$

Система имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} Y = 0$$

Т.к. матрица  $B|_U$  невырождена,  $\text{rk} B = m$ , т.е. система имеет  $n - m$  ЛНЗ решений, а значит,  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ .

Если же  $v \in U \cap U^\perp$ , то  $\forall x \in U b(x, v) = 0$ , а из невырожденности формы  $b|_U$  тогда следует, что  $v = 0$ .  $\square$

**Теорема.** Для любой кососимметрической билинейной формы  $b(x, y) \not\equiv 0$   $\exists$  такой базис  $f_1, \dots, f_n \in V$ , в котором матрица этой формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \boxed{I_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{I_s} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{где } I_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{rk} B = 2s$$

*Доказательство.* Т.к.  $b(x, y) \not\equiv 0$ ,  $\exists$  векторы  $e_1, e_2 \in V$  такие, что  $b(e_1, e_2) = \beta_{12} \neq 0$ . Рассмотрим

$$f_1 = \frac{e_1}{\beta_{12}}, f_2 = e_2 \Rightarrow b(f_1, f_2) = 1, b(f_2, f_1) = -b(f_1, f_2) = -1$$

Пусть  $U = \langle e_1, e_2 \rangle$ . Возьмём  $W = U^\perp$  в пр-ве  $V$ . Тогда  $V = U \oplus U^\perp$  и  $\tilde{b} = b|_{U^\perp}$  также кососимметрическая форма, т.е. можем провести индукцию по  $n = \dim V$

(базу  $n = 2$  доказали).  $\dim W = n - 2$ , т.е.  $\exists$  базис  $f_3, \dots, f_n$ , в котором матрица

$$b|_{U^\perp} \text{ имеет вид } \begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{I} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. в базисе } f_1, \dots, f_n \text{ матрица } b \text{ имеет}$$

нужный вид. □

## 17 Евклидовы пространства и их обобщения

### 17.1 Основные понятия и утверждения

Основное поле -  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

**Определение.** Вещественное конечномерное векторное пространство  $\mathcal{E}$  называется евклидовым, если на  $\mathcal{E}$  задано скалярное произведение  $(x, y)$ .

**Определение.** Скалярное произведение  $(x, y)$  - симметрическая билинейная функция такая, что соответственная квадратичная форма  $(x, x)$  положительно определена.

**Определение.** Длина (норма) вектора  $x \in \mathcal{E}$ :  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ .

**Теорема. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца**

$\forall x, y \in \mathcal{E} : |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$ , причём равенство выполнено  $\iff x \parallel y$  (либо  $x = 0$  или  $y = 0$ , либо  $y = \lambda x$ ).

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $f(t) = (tx - y, tx - y) = t^2(x, x) - 2t(x, y) + (y, y) \geq 0$ . Это квадратичная функция относительно  $t$ :

$$f(t) \geq 0 \iff \frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \Rightarrow (x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)} = |x| \cdot |y|$$

Равенство выполнено  $\iff (tx - y, tx - y) = 0 \Rightarrow y = tx$ . □

**Теорема. Неравенство треугольника**

$\forall x, y \in \mathcal{E} : |x + y| \leq |x| + |y|$  (равенство выполнено  $\iff x \uparrow\uparrow y$ )

*Доказательство.*

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \iff |x + y| \leq |x| + |y|$$

□

Координатная запись: пусть в  $V$  фиксированный базис  $e_1, \dots, e_n$ , то:

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j)$$

**Определение.**  $G_e = ((e_i, e_j))$  - матрица Грама базиса  $e$

$$G_e^T = G_e$$

Т.к.  $(x, x)$  - положительно определенная квадратичная форма, то матрица:

$$G_e = (g_{ij})$$

может служить матрицей Грама  $\iff \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

В частности:  $\det G_e > 0$  (определитель Грама)

$$(x, y) = X^T G_e Y$$

**Определение.**

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

**Определение.** Базис  $e_1, \dots, e_n$  называется ортогональным, если:

$$e_i \perp e_j \text{ при } i \neq j$$

Если при этом длина каждого вектора  $e_1, \dots, e_n$  равна 1, то базис называется ортонормированным.

**Следствие.**  $e_1, \dots, e_n$  - ортонормированный базис, если  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ .

**Следствие.** Если базис ортонормированный, то  $G = E$  и  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

**Теорема.** Пусть  $e' = e C_{e \rightarrow e'}$  - новый базис. Тогда:

1. Если  $e$  и  $e'$  - ортонормированные базисы, то  $C_{e \rightarrow e'}$  ортогональна;
2. Если  $e$  - ортонормированный базис и  $C_{e \rightarrow e'}$  ортогональная матрица  $\implies e' = e C$  - ортонормированный базис.

**Замечание.**  $C$  - ортогональная, если  $C^T C = E$

*Доказательство.*



1. По определению матрицы перехода  $C_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} e_1'^\uparrow & \dots & e_n'^\uparrow \end{pmatrix}$

$$C_{e \rightarrow e'}^T = \begin{pmatrix} e_1'^\rightarrow \\ \vdots \\ e_n'^\rightarrow \end{pmatrix} \text{ Обозначим } d_{ij} - (ij)\text{элемент матрицы } C^T C :$$

$$d_{ij} = e_i'^\rightarrow \cdot e_j'^\uparrow = (e_i', e_j') = \delta_{ij}$$

т.к. базис  $e$  ортонормированный  $\implies d_{ij} = \delta_{ij} \implies C^T C = E$

2. Рассмотрим  $e' = e C_{e \rightarrow e'}$ , тогда  $e_j'^\uparrow$  - это  $j$  столбец матрицы  $C_{e \rightarrow e'}$

По условию  $C^T C = E \iff e_i'^\rightarrow \cdot e_j'^\uparrow = \delta_{ij} = (e_i', e_j')$

□

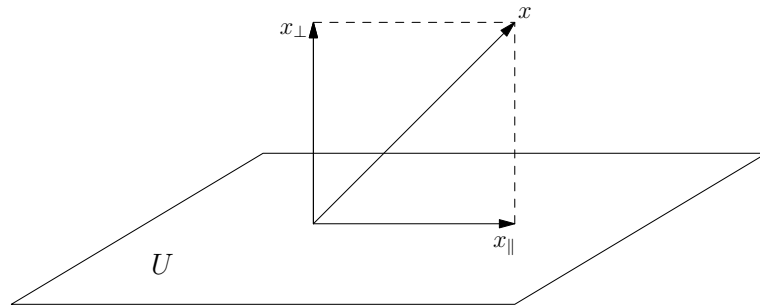
**Лемма.** Если  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  - ортогональная система векторов, то  $a_1, \dots, a_m$  ЛНЗ.

*Доказательство.* Пусть  $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0$ . Скалярно умножим обе части на  $a_j$ :

$$\left( \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, a_j \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (a_i, a_j) = \lambda_j (a_j, a_j) = 0 \implies \lambda_j = 0$$

Проведя такие рассуждения для  $j = 1, \dots, m$ , получим, что все коэффициенты должны быть равны 0, т.е.  $a_1, \dots, a_m$  ЛНЗ. □

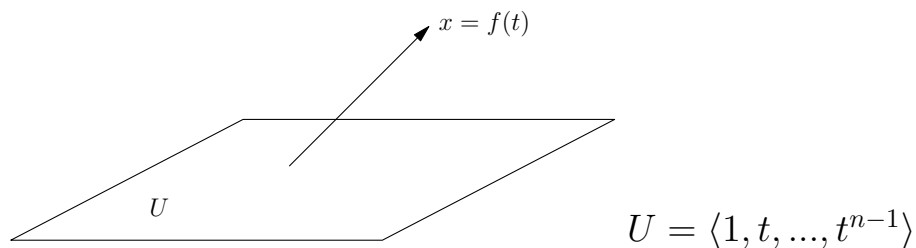
Т.о.  $\forall x \in \mathcal{E}$  единственным образом разлагается в сумму  $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$



$x_{\parallel} \in U$ ,  $x_{\parallel}$  - ортогональная проекция вектора  $x$  на  $U$

$x_{\perp} \in U^{\perp}$ ,  $x_{\perp}$  - ортогональная составляющая  $x$  относительно  $U$

**Пример.**



Надо подобрать такой многочлен  $p(t) \in U$ , чтобы:

$$\| f(t) - p(t) \| = \min$$

Где  $p(t) = f(t)$  - псевдорешение

## Как конкретно находить такое разложение?

**1 способ:** Выбрать ортогональный базис в  $U$  и дополнить его до ортогонального базиса в  $\mathcal{E}$

Тогда:

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^m (x_i, e_i) e_i}_{x_{\parallel}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^n (x_i, e_i) e_i}_{x_{\perp}} = x_{\parallel} + x_{\perp}$$

**2 способ:** Выбрать в  $U$  произвольный базис  $a_1, \dots, a_m$  и искать разложение в виде:

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + x_{\perp} \quad | \cdot a_j \implies (x_i, a_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (a_i, a_j) + \underbrace{(x_{\perp}, a_j)}_{=0}$$

Неоднородная СЛУ с неизвестными  $\alpha_i$ , основная матрица:

$$((a_i, a_j)) = G_{\{a_1, \dots, a_m\}}$$

где  $\det G \neq 0 \implies$  по теореме Крамера  $\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_m \implies \exists! x_{\parallel} \implies x_{\perp} = x - x_{\parallel}$

**Определение.** Ортогональное дополнение подпространства  $U \subset \mathcal{E}$  - ортогональное дополнение  $U$  относительно скалярного произведения как симметрической билинейной формы.

*Замечание.* Доказательство разложения  $\mathcal{E} = U \oplus U^{\perp}$  см. в разделе [16.5](#).

### Свойства. операций ортогонального дополнения

$$1. (U^{\perp})^{\perp} = U$$

$$2. (U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

$$3. (U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$$

*Доказательство.*

1. Пусть  $x \in U$ ,  $y \in U^\perp$ , тогда:

$$(y, x) = 0 \quad \forall y \in U^\perp \Rightarrow x \in (U^\perp)^\perp \Rightarrow U \subseteq (U^\perp)^\perp$$

Причем:

$$\dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = n - (n - \dim U) = \dim U \Rightarrow U = (U^\perp)^\perp$$

2. Пусть  $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp \Rightarrow v \perp U_1$  и  $v \perp U_2 \Rightarrow \forall x = u_1 + u_2$ :

$$(v, x) = (v, u_1) + (v, u_2) = 0 \Rightarrow v \in (U_1 + U_2)^\perp \Rightarrow U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$$

Если  $w \in (U_1 + U_2)^\perp$ , то  $\forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2 : (w, u_1 + u_2) = 0$

В частности:

$$\begin{cases} \forall u_1 \in U_1 : (w, u_1) = 0 \Rightarrow w \in U_1^\perp \\ \forall u_2 \in U_2 : (w, u_2) = 0 \Rightarrow w \in U_2^\perp \end{cases} \Rightarrow w \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

То есть  $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp \Rightarrow$  имеет место равенство:

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

3. Возьмем  $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$

$$\Rightarrow ((U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp)^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp \Rightarrow U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$$

□

**Утверждение.** Вектор наименьшей длины, соединяющий точку из подпространства  $U$  с концом вектора  $x$  -  $x_\perp$ .

*Доказательство.* Обозначим  $x_\parallel = y$ ,  $x_\perp = z$ , а вектор из начала  $x$  в произвольную точку  $U$  - вектор  $v$

Какой тут рисунок то?

Докажем, что  $|x - v| \geq |z|$ , причём равенство достигается при  $v = y$ :

$$x - v = x - y + y - v = z + y - v$$

Т.к.  $z \in U^\perp, (y - v) \in U$ ,

$$z \perp (y - v) \Rightarrow |x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geq |z|^2$$

причём равенство при  $|y - v| = 0 \Rightarrow y = v$ .

□

Это подтверждает осмысленность определения  $\rho(x, U) = |x_\perp|$ .

**Упражнение.** Докажите отсюда, что  $\angle(x, v) \geq \angle(x, y)$ .

**Определение.** Углом между вектором и подпространством будем называть:

$$\angle(x, U) = \angle(x, y)$$

Частный случай:  $\dim U = n - 1$  ("гиперплоскость"):

В ортонормированном базисе  $U$  задаётся уравнением  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ , а ортогональное дополнение  $U^\perp = \langle n = (a_1, \dots, a_n) \rangle$  ( $n$  - вектор нормали). Тогда:

$$\rho(x, U) = |x_\perp| = \frac{V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1}, x \rangle}}{V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle}}$$

где  $V_{\langle a_1, \dots, a_k \rangle}$  - объём параллелепипеда, натянутого на  $a_1, \dots, a_k$ .

**Определение.**  $n$ -мерным параллелепипедом с рёбрами  $e_1, \dots, e_n$  называется:

$$\Pi_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle} = \{v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

**Определение.** В общем случае объём параллелепипеда определяется рекурсивно:

$$V_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle} = V_{\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle} \cdot |e_{n\perp}|, \text{ где } e_{n\perp} - \text{проекция } e_n \text{ на } \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$$

Заметим, что если  $e_1, \dots, e_n$  попарно ортогональны, то  $V_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle} = |e_1| \cdot \dots \cdot |e_n|$ .

Объём не изменится, если к векторам применить процесс ортогонализации (с унитарной матрицей перехода).

Тогда:

$$V_{\langle e'_1, \dots, e'_n \rangle} = |e'_1| \cdot \dots \cdot |e'_n| = \sqrt{|G_{\{e'_1, \dots, e'_n\}}|}$$

В ортогональном базисе:

$$G_{\{e'_1, \dots, e'_n\}} = \begin{pmatrix} |e'_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |e'_n|^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |G_{\{e'_1, \dots, e'_n\}}| = |e'_1|^2 \cdot \dots \cdot |e'_n|^2$$

$$G_{e'} = C^T G_e C \Rightarrow |G_{e'}| = |C|^2 |G_e| = |G_e|$$

**Упражнение.** Доказать отсюда, что если  $U = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ , то:

$$\rho^2(x, U) = \frac{|G_{\{e_1, \dots, e_n\}}|}{|G_{\{e_1, \dots, e_{n-1}\}}|}$$

## 17.2 Линейные операторы в евклидовом пространстве

Пусть  $\mathcal{E}$  - евклидово пр-во,  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - лин. оператор в  $\mathcal{E}$ .

**Определение.**

1. Оператор  $\varphi^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - сопряжённый к  $\varphi$ , если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

2. Оператор  $\varphi$  - самосопряжённый, если:

$$\varphi^* = \varphi \implies \forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \quad (2)$$

3. Оператор  $\varphi$  - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad (3)$$

В частности, для ортогонального  $\varphi : \forall x \in \mathcal{E} \quad |\varphi(x)| = |x|$ .

**Условия (1)-(3) через матрицу Грама**

Пусть в  $\mathcal{E}$  зафиксирован базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  ( $\dim \mathcal{E} = n$ ). Пусть  $x = eX$ ,  $y = eY$ ,  $G_e = ((e_i, e_j))$  - матрица Грама базиса  $e$ ,  $A_\varphi$  - матрица  $\varphi$  в базисе  $e$ .  
(1):  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ :

$$(A_\varphi X)^T G_e Y = X^T A_\varphi^T G_e Y = X^T G_e A_{\varphi^*} Y \implies A_\varphi^T G_e = G_e A_{\varphi^*} \quad (1')$$

(2): В частности,

$$\varphi^* = \varphi \iff A_\varphi^T G_e = G_e A_\varphi \quad (2')$$

Если  $e$  - ортонормированный, то  $G_e = E$ , и  $A_\varphi^T = A_\varphi$ , т.е.  $A_\varphi$  - симметрическая матрица.

(3):  $\varphi$  - ортогональный  $\iff \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$  выполнено:

$$(A_\varphi X)^T G_e (A_\varphi Y) = X^T G_e Y \implies A_\varphi^T G_e A_\varphi = G_e \quad (3')$$

Если  $G_e = E$ , то  $A_\varphi^T A_\varphi = E$ , т.е.  $A_\varphi$  - ортогональная матрица.

**Теорема. Свойства сопряжённых операторов**

1.  $(\varphi^*)^* = \varphi$ ;

2.  $\text{Ker} \varphi^* = (\text{Im} \varphi)^\perp$

3.  $\text{Ker} \varphi = (\text{Im} \varphi^*)^\perp$

*Доказательство.*

1. В ортонормированном базисе:

$$A_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T \implies A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = (A_{\varphi}^T)^T = A_{\varphi}$$

Т.к. в фиксированном базисе имеется взаимно однозначное соответствие операторов и их матриц,  $(\varphi^*)^* = \varphi$ .

2. Сравним размерности:

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi^* = n - \operatorname{rk}(A_{\varphi^*}) = n - \operatorname{rk}(A_{\varphi}^T) = n - \operatorname{rk}(A_{\varphi})$$

$$\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rk} A_{\varphi} \implies \dim(\operatorname{Im} \varphi)^{\perp} = n - \operatorname{rk} A_{\varphi}$$

Докажем, что  $\operatorname{Im} \varphi \subseteq (\operatorname{Ker} \varphi^*)^{\perp}$  (отсюда  $\operatorname{Ker} \varphi^* \subseteq (\operatorname{Im} \varphi)^{\perp}$ ):

Пусть  $v \in \operatorname{Im} \varphi \implies v = \varphi(x)$ ,  $y \in \operatorname{Ker} \varphi^*$ . Тогда:

$$(v, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) = (x, 0) = 0 \implies v \perp \operatorname{Ker} \varphi^*$$

Т.к. размерности равны и  $\operatorname{Ker} \varphi^* \subseteq (\operatorname{Im} \varphi)^{\perp}$ , то  $\operatorname{Ker} \varphi^* = (\operatorname{Im} \varphi)^{\perp}$ .

3. Следует из (2) подстановкой  $\varphi^*$  вместо  $\varphi$ .

□

**Следствие. Теорема Фредгольма** СЛУ  $AX = b$  с квадратной матрицей  $A$  порядка  $n$  совместна  $\iff$  для любого  $Y$  - решения однородной сопряжённой системы - выполнено условие  $Y \perp b$ .

*Доказательство.*  $AX = b$  совместна  $\iff b \in \operatorname{Im} A$

$$Y \in \operatorname{Ker} \varphi^* = \operatorname{Ker} A^T$$

Т.к.  $\operatorname{Ker} \varphi^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$ , то система совместна  $\iff b \perp \operatorname{Ker} \varphi^*$

□

### 17.3 Самосопряжённые операторы

**Лемма.** Пусть  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - лин. оператор,  $U \subset \mathcal{E} : \varphi(U) \subseteq U$ .

Тогда  $\varphi^*(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$ .

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall y \in U^{\perp}, x \in U$  выполнено  $(x, \varphi^*(y)) = 0$ :

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = 0, \text{ т.к. } \varphi(x) \in U, y \in U^{\perp}$$

□

**Утверждение.** 1. Если  $\lambda_1, \lambda_2$  - различные собственные значения самосопряжённого оператора  $\varphi$ ,  $x_1, x_2$  - соответствующие им собственные векторы, то  $x_1 \perp x_2$ ;

2. Все характеристические числа самосопряжённого оператора  $\in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\varphi^* = \varphi$ . Тогда:

$$(\varphi(x_1), x_2) = \lambda_1(x_1, x_2); (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

Из  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  следует  $(x_1, x_2) = 0$ .

2. От противного: пусть  $\exists \lambda_1 = \alpha + i\beta$  - характеристическое число для самосопряжённого  $\varphi$  с  $\beta \neq 0$ .

Как было доказано ранее,  $\exists$   $\varphi$ -инвариантное подпространство  $U$  размерности 2, на котором  $\varphi|_U$  имеет собственные значения  $\alpha \pm i\beta$ .  $U$  можно рассматривать как евклидово пр-во со скалярным произведением  $(x, y)|_U$ . Тогда  $\varphi|_U$  - также самосопряжённый на  $U$ .

Выберем ортонормированный базис в  $U$ . Тогда в этом базисе  $\varphi|_U$  имеет симметрическую матрицу  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Её характеристические числа:

$$|A - \lambda E| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$\mathcal{D} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

Отсюда корни характеристического многочлена вещественные, что противоречит предположению.

□

**Теорема.** Для любого самосопряжённого оператора  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  в  $\mathcal{E}$  существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора.

*Доказательство.* Индукция по  $\dim \mathcal{E} = n$ :

База:  $n = 1$ . Тогда  $\forall x \in \mathcal{E} : \varphi(x) = \lambda_1 x$ , т.е. любой вектор длины 1 подойдёт в качестве ортонормированного базиса.

Шаг: Пусть  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  - какое-либо собственное значение для  $\varphi$ . Рассмотрим  $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \{0\}$  - оно является  $\varphi$ -инвариантным подпространством.

Если  $\mathcal{E}_{\lambda_1} = \mathcal{E}$ , то  $\forall x \in \mathcal{E} : \varphi(x) = \lambda_1 x$ , т.е. в ортонормированном базисе матрица

оператора -  $\lambda_1 E$ ;

Если  $\mathcal{E}_{\lambda_1} \neq \mathcal{E}$ , то по лемме  $\mathcal{E}_{\lambda_1}^\perp$  также  $\varphi$ -инвариантно и  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{E}_{\lambda_1}^\perp$ . К ограничению  $\varphi$  на инвариантные подпространства  $\mathcal{E}_{\lambda_1}, \mathcal{E}_{\lambda_1}^\perp$  можно применить предположение индукции, если рассмотреть их как отдельные евклидовы пространства. Тогда в них есть ортонормированные базисы из собственных векторов, а тогда их объединение будет искомым ортонормированным базисом для  $\mathcal{E}$  (ортогональность векторов из разных базисов следует из утверждения выше).  $\square$

**Следствие.** Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  - все попарно различные собственные значения самосопряжённого оператора  $\varphi$ , то  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{\lambda_s}$ .

*Замечание.* Если все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  самосопряжённого оператора  $\varphi$  положительны, то  $\exists$  самосопряжённый оператор  $\psi$  с положительными собственными значениями такой, что  $\psi^2 = \varphi$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - ортонормированный базис из собственных векторов для  $\varphi$ . Тогда:

$$A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \text{оператор с матрицей } \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = \psi$$

$\square$

**Пример.** Пусть  $\mathcal{E} = U \oplus U^\perp$ , т.е.  $\forall x = x_{||} + x_\perp$ .

$\varphi_1(x) = x_{||}$  - ортогональное проектирование на  $U$ ;

$\varphi_2(x) = x_{||} - x_\perp$  - ортогональная симметрия, или отражение  $\mathcal{E}$  относительно  $U$ .

Покажем, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  самосопряжённые:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : x = x_{||} + x_\perp, y = y_{||} + y_\perp :$$

$$(\varphi_1(x), y) = (x_{||}, y_{||} + y_\perp) = (x_{||}, y_{||}) = (x_{||} + x_\perp, y_{||}) = (x, \varphi_1(y))$$

$$(\varphi_2(x), y) = (x_{||} - x_\perp, y_{||} + y_\perp) = (x_{||}, y_{||}) - (x_\perp, y_\perp) = (x_{||} + x_\perp, y_{||} - y_\perp) = (x, \varphi_2(y))$$

## 17.4 Ортогональные операторы

**Определение.**  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - ортогональный, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

Из определения следует, что  $\forall x \in \mathcal{E} : |\varphi(x)| = |x|$  -  $\varphi$  сохраняет длины  $\implies \text{Ker } \varphi = \{0\} \implies \varphi$  инъективный, а так как  $\varphi : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n$ , получаем, что  $\varphi$  - биективный (и обратимый) оператор.



**Утверждение.** Пусть  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - ортогональный оператор.

Тогда  $\varphi^{-1}$  также ортогональный, причём  $\varphi^{-1} = \varphi^*$ .

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall x, y \in \mathcal{E} (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x, y)$ . Выберем  $x' = \varphi^{-1}(x), y' = \varphi^{-1}(y)$ . Тогда:

$$(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = (x', y') = (\varphi(x'), \varphi(y')) = (x, y)$$

По определению  $\varphi^*$ :  $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)), \forall x, y \in \mathcal{E}$

Т.к.  $\varphi$  обратим,  $\exists y' \in E : y = \varphi(y')$

$$(\varphi(x), y) = (\varphi(x), \varphi(y')) = (x, y') = (x, \varphi^{-1}(y)) \implies (x, \varphi^*(y)) = (x, \varphi^{-1}(y))$$

$$(x, \varphi^*(y) - \varphi^{-1}(y)) = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{E} \implies \varphi^*(y) = \varphi^{-1}(y) \quad \forall y \in \mathcal{E}$$

т.е.  $\varphi^* = \varphi^{-1}$

□

**Лемма.** Пусть  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - ортогональный оператор,  $U \subset E : \varphi(U) \subseteq U$ .

Тогда:

$$\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$$

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall y \in U^\perp, x \in U$  выполнено  $(x, \varphi(y)) = 0$ .

Т.к.  $\varphi$  обратим,  $\exists x' : x = \varphi(x')$ , т.е.  $x' = \varphi^{-1}(x) \in U$ . Отсюда:

$$(x, \varphi(y)) = (\varphi(x'), \varphi(y)) = (x', y) = 0, \quad \text{т.к. } x' \in U, y \in U^\perp$$

□

**Определение.** В пространстве  $\mathcal{C}^n$  введем скалярное произведение с требованиями:

1. Линейность по 1 аргументу
2. Вместо симметричности потребуем:

$$(y, x) = \overline{(x, y)}$$

3.  $(x, x) \neq 0, (x, x) = 0$ , если  $x = 0$

Следовательно, если  $\lambda \in \mathbb{C}$ , то  $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$

**Теорема.** Пусть  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - ортогональный оператор.

1. Собственные значения  $\varphi$  - только  $\pm 1$ , причём отвечающие этим значениям собственные векторы  $\perp$ .

2. Все характеристические числа для  $\varphi$  над  $\mathbb{C}$  имеют модуль 1.

*Доказательство.*

1. Пусть  $\varphi(x) = \lambda x, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ . Тогда:

$$(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2(x, x) \implies \lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1$$

Если  $\varphi(x) = x, \varphi(y) = -y (x, y \neq 0)$ , то

$$(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y)) = -(x, y) \implies (x, y) = 0$$

2. Будем обозначать через  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  заданной матрицей  $A_\varphi$

Если  $\lambda = \alpha + i\beta$  - характеристическое число для  $\varphi$ , то:

$$\exists v \in \mathbb{C}^n : \varphi(v) = \lambda(v)$$

Тогда  $(v, v) = (\varphi(v), \varphi(v)) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda \bar{\lambda}(v, v) \implies \lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$ , или  $\lambda = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$ .

□

**Теорема.** Если  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  - ортогональный оператор, то в  $\mathcal{E} \exists$  ортонормированный базис, в котором:

$$A^{\varphi, f} = \begin{pmatrix} \boxed{\Phi_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boxed{\Phi_s} & & & & \\ & & & \boxed{1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \boxed{1} & \\ & & & & & & \boxed{-1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \boxed{-1} \end{pmatrix}, \quad \Phi_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$$

Порядок матрицы равен  $n = \dim \mathcal{E}$  ( $s$  - количество пар сопряжённых собственных значений, а также количество 1 и -1 определены однозначно).

*Доказательство.* Заметим, что если все собственные значения  $\varphi$  вещественные, то для  $\varphi$  существует ортонормированный базис из собственных векторов - это объединение ортонормированных базисов подпространств  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_{-1}$  (в частности,  $\varphi$  будет ещё и самосопряжённым).

Индукция по  $n$ :

База:  $n = 2$ . Случай, если все собственные значения  $\varphi$  вещественные, разобран. Если у  $\varphi$  есть комплексное собственное значение  $\lambda$ , то  $\bar{\lambda}$  - также собственное значение для  $\varphi$ . Рассмотрим произвольный ортонормированный базис  $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ . В нём  $\varphi(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$ . Так как  $\varphi$  сохраняет длины,  $|\varphi(e_1)| = 1$ , т.е.

$$(\alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha^2 + \beta^2 = 1 \implies \exists \psi_1 : \alpha = \cos(\psi_1), \beta = \sin(\psi_1)$$

Аналогично  $\exists \psi_2 : \varphi(e_2) = \cos(\psi_2)e_1 + \sin(\psi_2)e_2$ . При этом  $(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = (e_1, e_2) = 0$ , т.е.

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 = \cos(\psi_1 - \psi_2) = 0$$

Отсюда  $\psi_2 = \psi_1 + \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , т.е. при необходимости заменив  $e_2$  на  $-e_2$  в базисе, получим матрицу  $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 \\ \sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{pmatrix}$ . База доказана.

Переход: пусть  $n > 2$ . Случай, если все собственные значения  $\varphi$  вещественные, разобран. Если у  $\varphi$  есть комплексное собственное значение  $\lambda$ , то из доказанного ранее знаем, что существует  $\varphi$ -инвариантное подпространство  $U$  такое, что  $\varphi|_U$  имеет собственные значения  $\lambda, \bar{\lambda}$ . Тогда  $U^\perp$  - также  $\varphi$ -инвариантно, причём  $\mathcal{E} = U \oplus U^\perp$ . Для  $U$  и  $U^\perp$  искомые ортонормированные базисы есть по предположению индукции, а тогда искомый ортонормированный базис для  $\mathcal{E}$  будет объединением двух найденных (возможно, с перестановкой векторов для правильного порядка элементов на диагонали матрицы).  $\square$

**Определение.** Оператор  $\varphi$  собственный, если  $\det \varphi = 1$ , при  $\det \varphi = -1$  - не собственный

Частный случай теоремы:  $\forall$  собственный оператор  $\varphi$  в трехмерном пространстве - это поворот вокруг оси на некоторый угол.

Объяснение: Т.к. 3 - нечетное число, то у  $\varphi$  есть вещественное собственное значение  $\lambda = \pm 1$ , т.к.  $\det \varphi > 0$ , то  $\lambda = 1$  и  $e_3$  - собственный вектор для этого  $\lambda$ , тогда плоскость  $\langle e_3 \rangle^\perp$  - инвариантная плоскость, и она поворачивается на некоторый угол.

## 18 Общие линейные операторы

**Утверждение.**

$$(\psi \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot \psi^*$$

*Доказательство.* Следует из равенства  $(AB)^T = B^T A^T$  в ортонормированном базисе.  $\square$

**Лемма.** Если оператор  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  невырожденный, то все собственные значения оператора  $\varphi^* \cdot \varphi$  положительны.

*Доказательство.* Оператор  $\varphi^* \cdot \varphi$  - самосопряжённый:

$$(\varphi^* \cdot \varphi)^* = \varphi^* \cdot (\varphi^*)^* = \varphi^* \cdot \varphi$$

$\implies$  все его собственные значения  $\in \mathbb{R}$ . Пусть  $\mu$  - какое-то из них:  $(\varphi^* \cdot \varphi)(v) = \mu v$  для подходящего  $v \neq 0$ . Вычислим  $\mu$ :

$$((\varphi^* \cdot \varphi)(v), v) = \mu(v, v) = (\varphi(v), (\varphi^*)^*(v)) = (\varphi(v), \varphi(v)) \implies \mu = \frac{(\varphi(v), \varphi(v))}{(v, v)}$$

$\implies \mu > 0$   $\square$

**Теорема.** Любой невырожденный линейный оператор  $\varphi$  в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$  единственным образом может быть представлен в виде:  $\varphi = \theta \cdot \rho$ , где  $\theta$  - ортогональный оператор и  $\rho$  - самосопряжённый оператор с положительными собственными значениями.

**Теорема. Матричная версия**

Любую вещественную матрицу  $A$  с  $\det A \neq 0$  можно представить в виде произведения  $A = Q \cdot R$ , где  $Q$  - ортогональная,  $R$  - симметричная с положительными собственными значениями.

*Замечание.* Для любой вещественной матрицы  $A$  она является  $A = A_\varphi$  в подходящем базисе (этот базис можно выбрать ортонормированным). Будем доказывать матричную версию, используя тот факт, что в ортонормированном базисе:  $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$ .

*Доказательство.* Предположим, что разложение  $A = QR$  уже найдено:

$$\implies A^T = R^T Q^T = R Q^T \implies A^T A = R \underbrace{(Q^T Q)}_{=E} R = R^2$$

- это симметричная матрица с положительными собственными значениями.

$\implies R^2$  можно привести к диагональному виду:  $\exists$  ортогональная матрица  $C$  такая, что:

$$C^{-1}(R^2)C = \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \implies R^2 = C \Lambda^2 C^{-1} = C \Lambda^2 C^T \implies R = C \Lambda C^T$$

Где  $\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$  имеет положительные собственные значения.

Тогда  $Q = A \cdot R^{-1}$

Проверка:

$$Q^T = (R^{-1})^T A^T = R^{-1} A^T \implies Q^T Q = R^{-1} (A^T A) R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} = E$$

□

**Определение.** Разложение  $\varphi = \theta\rho$  или  $A = Q \cdot R$  - полярное разложение оператора  $\varphi$  с собственной матрицей  $A$

**Определение.** Сингулярное разложение:  $A = (QC)\Lambda C^T = U\Lambda V$ , где  $\Lambda$  - диагональная матрица с положительными собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ,  $U, V$  - ортогональные матрицы ( $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  - сингулярные числа матрицы  $A$ )

## 19 Квадратичные формы

Пусть  $k(x) = b(x, x)$  - квадратичная форма на пространстве  $\mathcal{E}$ ,  $B$  - её матрица в некотором базисе ( $B^T = B$ ).

**Теорема.** В  $\mathcal{E}$   $\exists$  ортонормированный базис  $f = eC$ , в котором эта форма имеет вид  $k(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - собственные значения  $B$ .

*Замечание.* Векторы базиса  $f$  называются главными осями для квадратичной формы  $k$ , а сама замена - приведением формы к главным осям.

*Доказательство.* Примем  $B$  за матрицу самосопряжённого оператора  $\varphi$  в некотором ортонормированном базисе. Тогда  $\exists$  ортонормированный базис  $f_1, \dots, f_n$  из собственных векторов оператора  $\varphi$ , т.е.  $\exists C$  - ортогональная матрица такая, что

$$C^{-1}BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies C^T BC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

т.е.  $C$  - матрица перехода к главным осям.

□

**Утверждение.** Если  $\mathcal{E}$  - евклидово пр-во, то  $\mathcal{E}^*$  изоморфно  $E$ .

*Доказательство.* Достаточно показать, что  $\forall f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists! a \in \mathcal{E}$  такой, что  $\forall x \in \mathcal{E}, f(x) = (a, x)$ .

Выберем в  $\mathcal{E}$  ортонормированный базис  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ , тогда в нём  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a, x)$ , где  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

□

**Лемма.** Для любой билинейной функции  $b(x, y)$  на евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$   $\exists!$  линейный оператор  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  такой, что

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : b(x, y) = (x, \varphi(y)) \quad (1)$$

*Доказательство.* Выберем произвольный базис  $e$  в  $\mathcal{E}$  с матрицей Грама  $G$  ( $\dim \mathcal{E} = n$ ). Тогда:

$$(1) \iff \forall X, Y \in \mathbb{R}^n : X^T B Y = X^T (G A_\varphi) Y \implies A_\varphi = G^{-1} B$$

□

*Замечание.* Пусть  $b(x, y) = b(y, x)$ . Тогда:

$$(x, \varphi^*(y)) = (\varphi(x), y) = (y, \varphi(x)) = b(y, x) = b(x, y) = (x, \varphi(y)) \implies \varphi^* = \varphi$$

**Теорема.** Пусть  $V$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$  ( $\dim V = n$ ),  $f, g$  - квадратичные формы на  $V$ , причём  $g$  знакоопределена (в частности,  $g > 0$ ). Тогда  $\exists$  базис, в котором  $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ ;  $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$  (для  $g < 0$   $g(x) = -\sum_{i=1}^n x_i^2$ ).

*Доказательство.* Рассмотрим порождающие  $f, g$  симметрические билинейные формы  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , т.е.  $f(x, x) \equiv f(x)$ ,  $g(x, x) \equiv g(x)$ , и обозначим за  $F, G$  матрицы этих форм в некотором базисе. Тогда можем задать на пр-ве  $V$  скалярное произведение с помощью формы  $g$ :  $(x, y) = g(x, y)$ .

По лемме  $\exists!$   $\varphi : V \rightarrow V$  - самосопряжённый оператор такой, что  $f(x, y) \equiv g(x, \varphi(y))$ . Заметим также, что  $G$  - матрица Грама для базиса, в котором функция  $g(x, y)$  имеет матрицу  $E$ . Тогда  $A_\varphi = G^{-1} F$ .

Так как  $\varphi \equiv \varphi^*$ , в  $V$  существует ортонормированный базис, в котором  $A_{\varphi, e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Если  $C = C_{e \rightarrow e'}$ , то  $A_{\varphi, e'} = C^{-1} A_\varphi C$ ,  $F_{e'} = C^T F C$ .

Тогда во-первых,  $C^T G C = G_{e'} = E$ , т.к. базис ортонормированный, а во-вторых

$$C^{-1} A_{\varphi, e} C = C^{-1} G^{-1} F C = C^{-1} (C C^T) F C = (C^{-1} C) C^T F C = C^T F C = F_{e'}$$

т.е. в новых координатах  $F_{e'} = A_{\varphi, e'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  и  $f(x') = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2$  □

*Замечание.*  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - корни характеристического ур-я

$$|A_\varphi - \lambda E| = 0 \iff |G^{-1} F - \lambda E| = 0 \iff |F - \lambda G| = 0 \quad (2)$$

т.е. соответствующие собственные векторы будут решениями СЛУ

$$(F - \lambda G)X = 0 \quad (3)$$

Для каждого собственного значения  $\lambda_i$  нужно найти ФСР для (3) и ортонормировать относительно  $g(x, y)$ .

## 20 Полуторалинейные, эрмитовы формы. Унитарные (эрмитовы) пространства

Далее всюду  $F = \mathbb{C}$ ,  $V$  - в.п. над  $\mathbb{C}$ .

**Определение.** Функция  $f(x, y) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  называется полуторалинейной, если:

1.  $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ ;  
 $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ );
2.  $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$ ;  
 $f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y)$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ )

**Определение.**  $f(x, y)$  называется эрмитово симметричной (эрмитовой), если

1.  $f(x, y)$  линейна по  $x$ ;
2.  $f(y, x) \equiv \overline{f(x, y)}$  ( $\implies f(x, \lambda y) = \bar{\lambda} f(x, y) \forall \lambda \in \mathbb{C}$ )

Заметим, что если  $f(x, y)$  эрмитова, то  $f(x, x) \equiv \overline{f(x, x)} \Rightarrow f(x, x) \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Квадратичная функция, порождённая эрмитовой формой - это функция  $k(x) \equiv f(x, x)$ .

**Упражнение.** Доказать, что для любой квадратичной формы  $k(x) \exists!$  эрмитова форма  $f(x, y)$  такая, что  $f(x, x) \equiv k(x)$ .

Если  $f(x, y)$  полуторалинейна и эрмитова, то обозначим  $F = (f(e_i, e_j))$ , и тогда  $f(e_j, e_i) = \overline{f(e_i, e_j)} \implies F^T = \bar{F} \iff \bar{F}^T = F$ .

**Определение.**  $F^* = \bar{F}^T$  - эрмитово сопряжённая матрица к  $F$ .

Если  $F^* = F$ , то  $F$  - эрмитова матрица.

**Определение.** Скалярное произведение на пр-ве  $V$  - функция  $(x, y)$  такая, что

1.  $(x, y)$  линейна по  $x$ ;
2.  $(y, x) \equiv \overline{(x, y)}$ ;
3.  $(x, x) > 0 \forall x \neq 0$

Скалярное произведение в координатах:

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{k=1}^n x_k (e_k, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{k,j=1}^n x_k \bar{y}_j (e_k, e_j)$$

Матрица Грама базиса  $e$ :  $G_e = ((e_k, e_j))$ .  $G_e^* = \bar{G}_e^T = G_e$ .

**Определение.**  $x \perp y \iff (x, y) = 0$ .

Базис  $e_1, \dots, e_n$  ортогональный, если  $(e_k, e_j) = 0, k \neq j$ .

Базис  $e_1, \dots, e_n$  ортонормированный, если  $(e_k, e_j) = \delta_{ij}$ .

В ортонормированном базисе  $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$ .

Изменение матрицы полуторалинейной формы при замене базиса:

Если  $f(x, y)$  - полуторалинейная форма, то в некотором базисе  $e : f(x, y) = X^T F \overline{Y}$ , где  $F = (f(e_i, e_j))$ . Если  $f$  эрмитово симметричная, т.е.  $\overline{f(y, x)} = f(x, y)$ , то  $\overline{F}^T = F$ .

Тогда если  $e' = Ce$ , то в случае полуторалинейной формы:

$$X = CX', Y = CY' \Rightarrow f(x, y) = (X')^T (C^T F \overline{C}) \overline{Y'} = (X')^T F' \overline{Y'}$$

В случае эрмитовой квадратичной формы  $k(x) = f(x, x)$ :

$$k(x) = \sum_{k,j=1}^n x_k \overline{x_j} f_{kj} = \dots + f_{kj} x_k \overline{x_j} + \dots, \quad f_{jk} = \overline{f_{kj}}$$

Отсюда  $f_{ii} = \overline{f_{ii}}$ , т.е.  $f_{ii} \in \mathbb{R}$ .

**Теорема.** Эрмитову квадратичную форму можно привести к диагональному виду  $\alpha_1 |x_1|^2 + \dots + \alpha_r |x_r|^2$ , где  $r = rkF$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}, \alpha_j \neq 0$ . Количества положительных коэффициентов  $p$  и отрицательных коэффициентов  $q$  - инварианты для данной формы.

*Доказательство.* Применим следующий вариант алгоритма Лагранжа: Основ-ной случай. Если  $b_{11} \neq 0$ , то необходимо выделить все одночлены, содержащие  $x_1$  и  $\overline{x_1}$ :

$$\begin{aligned} k(x_1, \dots, x_n) &= (b_{11}x_1\overline{x_1} + \dots + b_{n1}x_n\overline{x_1}) + (b_{12}x_1\overline{x_2} + \dots + b_{1n}x_1\overline{x_n}) + \tilde{k}(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{\overline{b_{11}}}(b_{11}x_1 + \dots + b_{n1}x_n)(\overline{b_{11}x_1} + \dots + \overline{b_{n1}x_n}) + \tilde{k}(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{\overline{b_{11}}}|b_{11}x_1 + \dots + b_{n1}x_n|^2 + \tilde{k}(x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Заменяем  $y_1 = b_{11}x_1 + \dots + b_{n1}x_n$  и далее преобразуем  $\tilde{k}$ . Особый случай:  $b_{ii} = 0, i = 1, \dots, n$ . По условию  $k \not\equiv 0$ , т.е.  $\exists b_{ij} = \overline{b_{ji}} \neq 0$  и форма содержит члены

$$b_{ij}x_i\overline{x_j} + b_{ji}x_j\overline{x_i} = 2b_{ij}^2|y_i|^2 - 2b_{ij}^2|y_j|^2 \text{ при замене } \begin{cases} x_i = b_{ji}(y_i + y_j) \\ x_j = y_i - y_j \end{cases}$$

Далее можем продолжать по основному случаю. □



Сохраняют силу следующие утверждения и понятия:

1. Теорема Якоби:  $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0 \implies k = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}|y_1|^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}|y_n|^2$ ;
2. Критерий Сильвестра:  $k > 0 \iff \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n$ ;
3. Понятие  $u^\perp$  и утверждение  $V = U \oplus U^\perp$ .

*Замечание.* Если  $A^* = \overline{A}^T = A$ , то  $|A| = |\overline{A}^T| = |\overline{A}| = \overline{|A|}$ , т.е.  $|A| \in \mathbb{R}$

**Алгоритм.** Процесс ортогонализации:

Дан произвольный базис  $e_1, \dots, e_n \in V$ . необходимо построить ортогональный базис  $e'_1, \dots, e'_n$  такой, что  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$ .

Возьмём  $e'_1 = e_1$ .

**Шаг алгоритма:** если  $k > 1$  и  $e'_1, \dots, e'_{k-1}$  уже построены, то будем искать  $e'_k$  в виде  $e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(k)} e'_j$ . Тогда:

$$0 = (e'_k, e'_i) = (e_k, e'_i) - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j^{(k)} (e'_j, e'_i) = (e_k, e'_i) - \lambda_i^{(k)} (e'_i, e'_i) \implies \lambda_i^{(k)} = \frac{(e_k, e'_i)}{(e'_i, e'_i)}$$

## 20.1 Линейные операторы в унитарном пространстве

1. Сопряжённый оператор  $\varphi^*$  к линейному оператору  $\varphi : V \rightarrow V$ :

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

2. Самосопряжённый оператор:  $\varphi = \varphi^*$  (2)

3. Унитарный оператор:

$$\forall x, y \in V, (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad (3)$$

Для самосопряжённого оператора:

$$(2) \iff (\varphi(x), y) \equiv (x, \varphi(y)) \implies (A_\varphi X)^T G \overline{Y} = X^T (A_\varphi^T G) \overline{Y} = X^T (G \overline{A}_\varphi) \overline{Y}$$

Отсюда

$$A_\varphi^T G = G \overline{A}_\varphi \quad (2')$$

Если базис ортонормированный, то  $A_\varphi^T = \overline{A}_\varphi \iff A = A^*$

Для унитарного оператора:

$$(3) \iff X^T G \overline{Y} = (A_\varphi X)^T G \overline{A}_\varphi \overline{Y} = X^T (A_\varphi^T G \overline{A}_\varphi) \overline{Y} \implies A_\varphi^T G \overline{A}_\varphi = G \quad (3')$$

Если базис ортонормированный, то  $A_\varphi^T \overline{A}_\varphi = E \iff A^{-1} = A^*$  (унитарная матрица).

**Теорема.** Если  $\varphi$  - самосопряжённый линейный оператор в  $V$ , то

1. Все его характеристические корни  $\in \mathbb{R}$ ;
2. Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;
3. Если  $U$  -  $\varphi$ -инвариантно в  $V$ , то  $U^\perp$  также  $\varphi$ -инвариантно;
4. В  $V \exists$  ортонормированный базис из собственных векторов  $\varphi \iff \varphi = \varphi^*$   
( $\implies$  при условии, что все собственные значения  $\in \mathbb{R}$ )

**Теорема.** Если  $\varphi$  - унитарный линейный оператор в  $V$ , то

1. Все собственные значения имеют модуль 1;
2. Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, ортогональны;
3. Если  $U$  -  $\varphi$ -инвариантно в  $V$ , то  $U^\perp$  также  $\varphi$ -инвариантно;
4. В  $V \exists$  базис из собственных векторов  $\varphi$ , причём в этом базисе

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\omega_n} \end{pmatrix}$$

*Доказательство.* За исключением примечаний ниже доказательство аналогично случаю евклидова пространства.

**К пункту 1 обеих теорем:**

Так как  $\mathbb{C}$  замкнуто, любой корень  $\lambda$  характеристического многочлена для  $\varphi$  является собственным значением и имеет отвечающий ему собственный вектор.

Для самосопряжённого оператора:

$$\lambda(x, x) = (\varphi(x), x) = (x, \varphi(x)) = \bar{\lambda}(x, x) \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

Для унитарного оператора:

$$(x, x) = (\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda \bar{\lambda}(x, \varphi(x)) \implies \lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \implies |\lambda| = 1$$

**К пункту 4 теоремы 2:**

Индукция по  $n$ :

База:  $n = 1 \implies \varphi(x) = e^{i\omega}x$ ; Шаг: Выберем собственное значение  $\lambda_1 = e^{i\omega_1}$ ,

найдем для него собственный вектор  $e_1$  и нормируем его.  $\langle e_1 \rangle - \varphi$ -инвариантное подпространство  $\implies \langle e_1 \rangle^\perp - \varphi$ -инвариантно, и тогда по предположению индукции  $\exists$  ортонормированный базис  $e_2, \dots, e_n$  нужного вида для  $\varphi|_{\langle e_1 \rangle^\perp}$ , а из ортогональности  $e_1$  всем векторам этого базиса получаем, что  $e_1, \dots, e_n$  - искомый базис.  $\square$

## 21 Аффинные пространства и их преобразования

**Определение.** Аффинным пространством над полем  $\mathbb{F}$  называется пара  $(\mathbb{A}, V)$ , где  $\mathbb{A}$  - множество точек,  $V$  - ассоциированное с ним векторное пространство (над  $\mathbb{F}$ ), если задано отображение  $\mathbb{A} \times V \rightarrow \mathbb{A}$  - операция прибавления вектора к точке (откладывание вектора от точки) со следующими аксиомами:

1.  $\forall p \in \mathbb{A}, x, y \in V : p + (x + y) = (p + x) + y;$
2.  $\forall p \in \mathbb{A} : p + 0 = p;$
3.  $\forall p, q \in \mathbb{A} \exists! x \in V : p + x = q$

Размерность аффинного пространства:  $\dim \mathbb{A} = \dim V$ .

*Замечание.* Если имеется векторное пространство  $V$ , то можно принять  $\mathbb{A} = V$ , понимая точки как радиус-векторы, если задать начальную точку  $0 \in V$ .

**Утверждение.**  $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs} = \overrightarrow{ps}$

*Доказательство.*  $q = p + x; s = q + y = (p + x) + y = p + (x + y)$   $\square$

### Аффинная система координат

Задаётся точкой  $o \in \mathbb{A}$  - началом координат и базисом  $e$  ассоциированного векторного пространства  $V$ . Обозначается  $(o, e_1, \dots, e_n)$ .

Координаты точки  $p$  - координаты радиус-вектора  $\overrightarrow{op}$  в базисе  $e$ .

$$\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^n x_i e_i \implies \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) e_i$$

Также можно задать точки  $o, p_1, \dots, p_n$  общего положения (т.е.  $\overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_n}$  линейно независимы) - тогда  $(o, \overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_n})$  - система координат.

### Изменение координат точки при замене системы координат

Пусть  $(o, e)$  - старая система координат,  $(o', e')$  - новая система координат.

Заметим, что  $\vec{op} = \vec{oo'} + \vec{o'p}$ . Поэтому если  $X$  - столбец координат точки  $p$  в старых координатах,  $X'$  - в новых координатах, а  $X_o$  - столбец старых координат точки  $o'$ , то

$$X = X_o + CX, \quad (C = C_{e \rightarrow e'}) \quad (1)$$

Можно ввести аффинную матрицу перехода  $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & X_o \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  порядка  $n + 1$  ( $n = \dim V$ ) и дополненный столбец  $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$  высоты  $n + 1$ . Тогда из (1):

$$\tilde{X} = \tilde{C}\tilde{X}' \quad (1')$$

### Барицентрическая комбинация точек

Пусть даны  $p_0, p_1, \dots, p_m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) с коэффициентами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ ,  $\sum \lambda_i = 1$ .

Барицентрической комбинацией будем называть

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i p_i := p + \sum_{i=0}^m \lambda_i \vec{pp_i} = p + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p) \text{ для некоторой точки } p$$

Покажем, что результат не зависит от выбора точки  $p$ : если  $q = p + v$  - другая точка, то

$$q + \sum_{i=0}^m \lambda_i \vec{qp_i} = p + v + \sum_{i=0}^m \lambda_i (-v) + \sum_{i=0}^m \lambda_i \vec{pp_i} = p + \sum_{i=0}^m \lambda_i \vec{pp_i}$$

**Следствие.** Если  $m = n$  и  $p_0, \dots, p_n$  - точки общего положения, то любую точку можно единственным образом представить в виде барицентрической комбинации этих точек:  $p = \sum_{i=0}^m x_i p_i$ ,  $\sum_{i=0}^m x_i = 1$ .

$(x_0, \dots, x_n)$  называются барицентрическими координатами точки  $p$ .

## 21.1 Аффинные плоскости (подпространства)

**Определение.** Зафиксируем точку  $p_0 \in \mathbb{A}$  и подпространство  $U \subseteq V$ .

Аффинная плоскость  $P$  с начальной точкой  $p_0$  и направляющим подпространством  $U$  - это множество точек  $P := p_0 + U = \{p_0 + u | u \in U\}$ .

Размерность плоскости:  $\dim P = \dim U$ .

**Утверждение.**  $P$  не зависит от выбора точки  $p_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $P = p_0 + U, p'_0 \in P$ . Тогда:

$$p'_0 = p_0 + u_0, u_0 \in U \implies P' = p'_0 + U = p_0 + u_0 + U = p_0 + U = P$$

□

**Утверждение.** Если  $P = p_0 + U = p'_0 + U'$ , то  $U = U'$  (т.е. направляющее подпространство для плоскости определено однозначно).

*Доказательство.*  $p'_0 \in p_0 + U \implies p_0 + U = p'_0 + U = p'_0 + U' \implies U = U'$   $\square$

**Утверждение.**  $(P, U)$  является аффинным пространством относ. операции  $p \rightarrow p + x$  для  $x \in U$ .

*Доказательство.* Проверим аксиомы:

1.  $p + u \in p + U$  - операция определена на  $P$  и  $U$ ;
2.  $p + (u_1 + u_2) = (p + u_1) + u_2 \in p' + U = P$ ;
3. Если  $p, q \in P$ , то  $P = p + U, q = p + u \implies \overrightarrow{pq} = u \in U$  - существует и единственный.

$\square$

$$\forall p \in P : p = p_0 + \sum_{i=1}^m x_i e_i \quad (e_1, \dots, e_m - \text{базис в } U).$$

Вместо точки  $p_0$  и базиса  $e_1, \dots, e_m$  можно рассмотреть точки  $p_0, p_1, \dots, p_m$  общего положения - любую точку  $p \in P$  можно представить в виде барицентрической комбинации точек  $p_0, \dots, p_n$ .

### Задание аффинной плоскости неоднородной СЛУ

Пусть  $P = p_0 + U, \dim U = m, \dim V = n$ . Тогда  $\exists$  матрица  $A$  такая, что  $U = \{x = eX | AX = 0\}$  ( $e$  - базис  $V$ ).

$\forall p \in P$  имеет координаты  $X_0 + X$ , где  $X_0$  - столбец координат  $p_0$ , а  $X$  - координаты  $u \in U$ . Тогда  $A(X_0 + X) = AX_0 + AX = AX_0 := b \implies$  координаты  $p \in P$  удовлетворяют системе  $AX = b$ .

Если  $p_0$  заменить на  $p'_0$  с координатами  $X_0 + X', AX' = 0$ , то  $A(X_0 + X') = AX_0 = b$ . Отсюда получаем следующее утверждение:

**Утверждение.** Любую аффинную плоскость можно задать (неоднородной) системой линейных уравнений.

**Определение.** Аффинная оболочка множества точек  $M$  - это наименьшая по включению аффинная плоскость, содержащая все точки  $M$ . В частности, если  $M = \{p_0, \dots, p_k\}$ , то  $\langle M \rangle = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_k} \rangle$ .

*Замечание.* Аффинная плоскость  $P = p_0 + U$  представляет собой некоторый смежный класс пространства  $V$  по  $U$ :

$$p'_0 + U = p_0 + U = P \iff \overline{p_0 p'_0} \in U$$

### Взаимное расположение двух плоскостей:

Пусть  $P_1 = p_1 + U_1$ ,  $P_2 = p_2 + U_2$

1.  $P_1 \parallel P_2$  (в широком смысле), если  $U_1 \subseteq U_2$  или  $U_2 \subseteq U_1$ . В истинном смысле: если они параллельны в широком смысле и не пересекаются.
2.  $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ , но не параллельны.
3.  $P_1$  и  $P_2$  скрещиваются:  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$  и  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ .

**Утверждение.**  $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset \iff \overline{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$

*Доказательство.*

$\implies$  Пусть  $p = p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \Rightarrow \overline{p_1 p_2} = u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$

$\impliedby$  Пусть существуют  $u_i \in U_i$ ,  $i = 1, 2$ :  $\overline{p_1 p_2} = u_1 - u_2$ . Значит:

$$p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \in P_1 \cap P_2$$

□

**Определение.** Аффинная оболочка подмножества  $M \subset \mathbb{A}$  - это

$$\text{Aff}(M) \equiv \langle M \rangle := p_0 + \langle \overline{pq} \mid p, q \in M \rangle, \quad p_0 \in M$$

Видно, что  $\langle M \rangle$  - аффинная плоскость с направляющим подпространством

$$U_0 = \langle \overline{pq} : p, q \in M \rangle$$

Если  $P = p_0 + U \supseteq M \implies P \ni p_0 + \overline{pq}$ ,  $p, q \in M \implies P \supseteq \langle M \rangle$ . Если  $P_1, P_2$  - аффинные плоскости, то:

$$\langle P_1, P_2 \rangle = p_0 + \langle \overline{p_1 p_2}, U_1, U_2 \rangle$$

**Теорема.**

$$\dim \langle P_1, P_2 \rangle = \begin{cases} \dim(U_1 + U_2), & \text{если } P_1 \cap P_2 \neq \emptyset, \\ \dim(U_1 + U_2) + 1, & \text{если } P_1 \cap P_2 = \emptyset \end{cases}$$

*Доказательство.*  $\langle P_1, P_2 \rangle$  имеет направляющее подпространство:

$$\langle \overline{p_1 p_2}, U_1, U_2 \rangle, \forall p_1 \in P_1, p_2 \in P_2$$

$$\dim \langle \overline{p_1 p_2}, U_1, U_2 \rangle = \begin{cases} \dim(U_1 + U_2), & \text{если } \overline{p_1 p_2} \in U_1 + U_2 \iff P_1 \cap P_2 \neq \emptyset, \\ \dim(U_1 + U_2) + 1, & \text{если } \overline{p_1 p_2} \notin U_1 + U_2. \end{cases}$$

□

## 22 Евклидовы аффинные пространства

**Определение.** Аффинное пространство  $(\mathbb{A}, \mathcal{E})$  - евклидово, если  $\mathcal{E}$  - евклидово пространство (над  $\mathbb{R}$ ),  $\mathcal{E}$  ассоциировано с пространством точек  $\mathbb{A}$ .

Расстояние определяется как

$$\rho(p, q) = |\overline{pq}|$$

Для трех точек  $a, b, c$  угол между лучами  $(ab)$  и  $(ac)$  - это угол между векторами  $\overline{ab}$  и  $\overline{ac}$  (если они ненулевые).

**Определение.**

Расстояние от точки  $p_1 \in \mathbb{A}$  до плоскости  $P = p_0 + U$ ,  $V \supset U \neq \{0\}$ .

Либо  $p_1 \in P$ , либо  $\overline{p_0 p_1} \notin U$ .

Можно рассматривать подпространство:

$$\tilde{U} = \langle \overline{p_0 p_1} + U \rangle \supset V, \overline{p_0 p_1} = y + z, y \in U, z \in U^\perp \implies \min |\overline{p_1 q}| = |z|$$

**Определение.** Параллелепипед с одной вершиной  $p_0$  и ребрами  $a_1, \dots, a_m$ , где  $m \leq n$ ,  $a_i \in \mathcal{E}$ :

$$\Pi_{\langle p_0, a_1, \dots, a_m \rangle} = \{p_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

Определим  $m$ -мерный объем рекурсивно: для  $m = 1$ :

$$V(\Pi_1) = |a_1|$$

$$V(\Pi_m) = (a_m)_\perp \cdot V_{\{p_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}}$$

где  $(a_m)_\perp$  - ортогональная составляющая ребра  $a_m$  относительно подпространства  $\langle a_1, \dots, a_{m-1} \rangle$ .

Пусть  $a_1, \dots, a_m$  линейно независимы. Тогда:

$$V_{p_0, a_1, \dots, a_m} = \sqrt{|G_{\{a_1, \dots, a_m\}}|}$$

Можно ортогонализировать векторы  $a_1, \dots, a_m$ , причем матрица перехода от  $a_1, \dots, a_m$  к  $b_1, \dots, b_m$ , где  $b_1, \dots, b_m$  получены из алгоритма ортогонализации, выглядит так:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$|G_{\{a_1, \dots, a_m\}}| = |G_{\{b_1, \dots, b_m\}}| = \begin{vmatrix} |b_1^2| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |b_m^2| \end{vmatrix} = |b_1|^2 \cdot \dots \cdot |b_m|^2$$

Значит:

$$\rho(p_1, P) = \frac{\sqrt{|G_{\{a_1, \dots, a_m, \overline{p_0 p_1}\}}|}}{\sqrt{|G_{\{a_1, \dots, a_m\}}|}}$$

Если  $P_1 = p_1 + U_1, P_2 = p_2 + U_2$  - две аффинные плоскости в аффинном пространстве, то назовем:

$$\rho(P_1, P_2) = \inf\{|\overline{pq}| : p \in P_1, q \in P_2\}$$

**Теорема.**  $\rho(P_1, P_2)$  равно длине ортогональной составляющей вектора  $\overline{p_1 p_2}$  относительно  $U_1 + U_2$

*Замечание.* Если  $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ , то  $\rho(P_1, P_2) = 0$ ,  $\overline{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$ , так что  $(p_1, p_2)_\perp = 0$ , что не противоречит утверждению теоремы.

*Доказательство.* Обозначим  $W = U_1 + U_2$ , тогда  $\mathcal{E} = W \oplus W^\perp$ . Обозначим

$$\overline{p_1 p_2} = v = v_\parallel + v_\perp, \quad v_\parallel \in W, \quad v_\perp \in W^\perp$$

Попробуем доказать, что существуют

$$a = p_1 + u_1^0 \in P_1, \quad b = p_2 + u_2^0 \in P_2$$

такие, что  $\overline{ab} = v_\perp$ .

Выберем произвольные точки  $x = p_1 + u_1 \in P_1, y = p_2 + u_2 \in P_2$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \rho^2(x, y) &= |\overline{yx}|^2 = |\overline{p_2 p_1} + u_1 - u_2|^2 = |v + u_2 - u_1|^2 = \\ &= |(v_\parallel + u_2 - u_1) + v_\perp|^2 = |v_\parallel + u_2 - u_1|^2 + |v_\perp|^2 \geq |v_\perp|^2 \end{aligned}$$

где  $v_\perp \in (U_1 + U_2)^\perp$ . Равенство достигается, если  $v_\parallel = u_2 - u_1 \Rightarrow \exists u_1, u_2$  такие, что  $a = p_1 + u_1, b = p_2 + u_2 : |\overline{ab}| = |v_\perp|$ .  $\square$

**Следствие.** Прямая  $l = a + \langle \overline{ab} \rangle = (p_1 + u_1) + \langle (\overline{p_1 p_2})_\perp \rangle$  является общим перпендикуляром этих двух плоскостей.



## 22.1 Аффинные отображения и преобразования

Пусть  $(\mathbb{A}_1, V_1)$  и  $(\mathbb{A}_2, V_2)$  - аффинные пространства над одним и тем же полем.

**Определение.** Отображение  $\Phi : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$  называется аффинно-линейным отображением, если существует линейное отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  такое, что

$$\forall a, b \in \mathbb{A}_1 : \overline{\Phi(a)\Phi(b)} = \varphi(\overline{ab}) \quad (1)$$

Такое определение равносильно следующему:

$$\forall a, b \in \mathbb{A}_1 : \Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overline{ab}) \quad (2)$$

Если задано  $\Phi$  и какая-то точка  $a$ , то  $\varphi$  определяется однозначно.

Если  $\overline{ab} = \overline{a_1b_1} = v$

$$\Phi(a_1) + \varphi'(v) = \Phi(b_1) = \Phi(a_1) + \varphi'(\overline{a_1b_1}) \Rightarrow \varphi = \varphi'$$

**Утверждение.**

1. Пусть

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  - аффинно-линейны, тогда

$$\Phi = \Phi_2 \cdot \Phi_1 : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_3$$

тоже аффинно-линейно с линейной частью  $\varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1$

2.  $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}_2$  биективно  $\iff \varphi$  - биективно, при этом  $\Phi^{-1}$  является аффинно-линейным с линейной частью  $\varphi^{-1}$ .

### Координатная запись

Выберем систему координат с началом в точке  $O$  и базисом  $e$

$$\forall b(x_1, \dots, x_n) = \overline{Ob}, \quad \Phi(O) = O'(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

$$\Phi(b) = \Phi(O) + \varphi(\overline{Ob})$$

Обозначим  $\Phi(b)(y_1, \dots, y_m)$ , тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix} + A_{\varphi, e, f} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

где  $f$  - базис в  $V_2$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_\varphi & X_0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \iff \tilde{Y} = \tilde{A} \cdot \tilde{X}$$

где

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Подробная запись:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^0, \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_m^0 \end{cases} \implies \begin{cases} dy_1 = a_{11}dx_1 + \dots + a_{1n}dx_n, \\ \vdots \\ dy_m = a_{m1}dx_1 + \dots + a_{mn}dx_n \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Значит,  $A_\varphi$  действует на столбцы

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

как оператор  $\varphi$ . Обозначим

$$DY = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix}, \quad D : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$$

**Утверждение.**

1. Пусть

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  - аффинно-линейны, тогда

$$\Phi = \Phi_2 \cdot \Phi_1 : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_3$$

тоже аффинно-линейны, причем

$$D(\Phi_2 \cdot \Phi_1) = D\Phi_2 \cdot D\Phi_1 = \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

2.  $\Phi_1$  - биективно  $\iff \varphi_1$  - биективно, и линейная часть  $\Phi_1^{-1}$  есть  $\varphi_1^{-1}$

*Доказательство.* 1. Пусть  $b_1, a_1 \in \mathbb{A}_1$

$$\Phi_1(b_1) = \Phi_1(a_1) + \varphi_1(\overline{a_1 b_1})$$

$$\Phi_2(\Phi_1(b_1)) = \Phi_2(\Phi_1(a_1)) + \varphi_2(\varphi_1(\overline{a_1 b_1}))$$

2. Если  $\varphi_1$  - биективно, то  $\forall \overline{a_2 b_2} \in V_2$  существует единственный вектор

$$\overline{a_1 b_1} \in V_1 : \varphi(\overline{a_1 b_1}) = \overline{a_2 b_2}$$

Определим отображение

$$\Phi' : \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1$$

$$\Phi'(a_2) = a_1, \quad \Phi'(b_2) = \Phi'(a_2) + \varphi^{-1}(\overline{a_2 b_2})$$

Значит,  $\Phi'$  - аффинно-линейное отображение.

$$\Phi(a_1) = a_2, \quad \Phi(b_1) = \Phi(a_1) + \varphi(\overline{a_1 b_1}) = \Phi(a_1) + \overline{a_2 b_2} = b_2$$

$$(\Phi'\Phi)(a_1) = \Phi'(a_2) = a_1 \implies \Phi'\Phi = \text{Id}_{\mathbb{A}_1}$$

Аналогично в другом порядке.

□

## Аффинные преобразования

**Определение.** Пусть  $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  - аффинно-линейное преобразование. Если  $\Phi$  биективно, то будем называть его просто аффинным.

**Примеры.** 1. Параллельный перенос на вектор  $v \in V$ :

$$\forall a \in \mathbb{A} : t_v(a) = a + v$$

ясно что

$$t_v^{-1} = t_{-v}, \quad Dt_v = \text{Id}$$

2. Гомотетия с центром в точке  $O$ :

$$\forall v \in V : \Phi(O + v) = O + \lambda v$$

где  $\lambda \neq 0$  - коэффициент гомотетии. Например, при  $\lambda = -1$  - это центральная симметрия.

**Теорема.** Любое (биективное) аффинное преобразование  $\Phi$  для любой точки  $a \in A$  представляется единственным образом в виде композиции

$$\Phi = t_v \cdot \Psi$$

где  $\Psi$  - аффинное преобразование такое, что  $\Psi(a) = a$ .

*Доказательство.* Для заданной точки  $a$  обозначим  $v := \overline{a\Phi(a)}$ . Рассмотрим преобразование  $\Psi = t_{-v} \cdot \Phi$ , тогда  $\Psi$  - аффинное.

$$\Psi(a) = \Phi(a) - v = a \implies \Phi = t_v \cdot \Psi$$

Докажем единственность: Пусть

$$\Phi = t_v \cdot \Psi = t_{v'} \cdot \Psi', \quad \Psi'(a) = a$$

значит,

$$t_{v-v'} = \Psi' \cdot \Psi^{-1}, \quad \text{т.к. } \Psi'(a) = \Psi(a) = a$$

отсюда

$$\Psi' \cdot \Psi^{-1}(a) = a = a + (v - v') \implies v' = v$$

следовательно,

$$\Psi' \cdot \Psi^{-1} = t_0 = \text{Id}$$

□

**Теорема.** Для любых двух наборов точек общего положения  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  и  $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$  существует единственное аффинное преобразование  $\Psi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$   $n$ -мерного аффинного пространства такое, что

$$\Phi(a_i) = b_i, \quad \forall i = 0, \dots, n$$

*Доказательство.* По условию  $\{\overline{a_0 a_1}, \dots, \overline{a_0 a_n}\}$  и  $\{\overline{b_0 b_1}, \dots, \overline{b_0 b_n}\}$  - базисы в ассоциированном с  $\mathbb{A}$  векторном пространстве  $V$ . Значит, существует единственный линейный оператор  $\varphi : V \rightarrow V$  такой, что

$$\varphi(\overline{a_0 a_i}) = \overline{b_0 b_i}, \quad i = 0, \dots, n$$

Тогда  $\Phi(a_0 + v) = b_0 + \varphi(v)$  - требуемое преобразование.

□

## Ортогональные преобразования (движения, изометрии)

**Определение.** Пусть  $(\mathbb{A}, V)$  - аффинное евклидово пространство, то есть  $V$  - евклидово пространство.

Аффинное преобразование  $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  называется ортогональным или движением, если  $\forall a, b \in \mathbb{A}$  :

$$\rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho(a, b), \text{ т.е. } |\overline{\Phi(a), \Phi(b)}| = |\overline{ab}|$$

**Упражнение.** Доказать, что если преобразование  $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  сохраняет расстояния между точками, то оно является аффинным, то есть  $\forall a$  :

$$\Phi(a + v) = \Phi(a) + \varphi(v)$$

где  $\varphi$  - линейный оператор.

На этом основании можно называть  $\Phi$  изометрией

*Замечание.* Если  $\Phi$  - движение, то  $D\Phi = \varphi$  - ортогональный оператор:

$$|\overline{\Phi(a), \Phi(b)}| = |\overline{ab}|, \quad \Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overline{ab})$$

значит,

$$|\varphi(\overline{ab})| = |\overline{ab}|, \quad b - a + v, \quad \forall v \in V$$

следовательно,  $\varphi$  сохраняет длины векторов, а отсюда и скалярное произведение.

Запишем  $\Phi$  в координатах в ортонормированной системе координат.

$$Y = X_0 + A_\varphi \cdot X, \quad A_\varphi^T = A_\varphi^{-1} \implies \det A_\varphi = \pm 1$$

поскольку

$$A_\varphi^T \cdot A_\varphi = E \implies (\det A_\varphi)^2 = 1 \implies \det A_\varphi = \pm 1$$

**Определение.** Движение называется собственным, если  $\det A_\varphi = 1$  и несобственным, если  $\det A_\varphi = -1$

*Замечание.* (Уточнение к теореме о разложении:  $\Phi = t_v \cdot \Psi$ )

Для любой точки  $a$  и любого движения  $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  с линейной частью  $\varphi$  существует  $u \in V$  такой, что

$$\Phi = t_u \cdot \Psi$$

причем  $\varphi(u) = u$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in \mathbb{A}$  - произвольная точка. Обозначим  $v := \overline{a\Phi(a)}$ . Пусть  $\lambda = 1$  является собственным значением оператора  $\varphi$ , а также:

$$U = \{u \in V : \varphi(u) = u\} \neq \{0\}, \quad W = U^\perp$$

тогда

$$V = U \oplus W$$

$v = u + w$ , где  $\varphi(u) = u$ ,  $(w, u) = 0$ . Определим  $\Psi = t_{-u} \cdot \Phi$ . Поищем для  $\Psi$  неподвижную точку в виде  $b = a + \tilde{w}$ ,  $\tilde{w} \in W$ . Вычислим

$$\Psi(b) = (t_{-u}\Phi)(b)$$

$$\begin{aligned} \Psi(a + \tilde{w}) &= t_{-u}(\Phi(a) + \varphi(\tilde{w})) = t_{-u}(a + v + \varphi(\tilde{w})) = \\ &= a + (v - u) + \varphi(\tilde{w}) = a + w + \varphi(\tilde{w}) = a + (w + \tilde{w}) + (\varphi(\tilde{w}) - \tilde{w}) = \\ &= a + \tilde{w} + w + (\varphi - \text{Id})(\tilde{w}) = a + \tilde{w} \end{aligned}$$

Полезнее равенство выполнено  $\iff (\varphi - \text{Id})\tilde{w} = -w$ ,  $\tilde{w} \in W$  - инвариантное подпространство для  $\varphi - \text{Id}$ , но у  $\varphi|_W$  нет собственного значения  $\lambda = 1 \implies \exists (\varphi - \text{Id})^{-1}$  и  $\tilde{w} = -(\varphi - \text{Id})^{-1}(w) \implies \Psi(b) = b$ . Если  $\lambda = 1$  не является собственным значением, то рассуждения сохраняют силу с  $U = 0$  и  $W = V$ ,  $t_u = \text{Id}$ ,  $\Psi = \Phi$  имеет неподвижную точку.  $\square$

Наблюдение: Если  $\lambda = 1$  - не собственное значение оператора  $\varphi$ , то  $\Phi$  имеет неподвижную точку. Если же  $\lambda = 1$  - собственное значение,  $u_0$  - собственный вектор:  $\varphi(u_0) = u_0$ , то все точки прямой

$$l = b + \langle u_0 \rangle$$

неподвижны, а  $\Psi$  определяется своим действием в гиперплоскости, ортогональной этой прямой:

$$P = b + \langle u_0 \rangle^\perp$$

### Классификация движений при $n = 1, 2, 3$

1.  $n = 1$ :  $\Phi$  - либо параллельный перенос, либо центральная симметрия относительно неподвижной точки.
2.  $n = 2$ : Координатная запись одна из следующих:

(a) Параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b \end{cases}$$

(b) Композиция параллельного переноса вдоль оси и симметрии относительно оси:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y + b \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{x}' = x' + a, \\ \tilde{y}' = -y' \end{cases}$$

(c) Поворот:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$$

Согласно общей теореме, существует неподвижная точка такая, что после переноса в эту точку остается только поворот.

3.  $n = 3$ : Четыре варианта в каноническом базисе для оператора  $\varphi$ :

(a) Параллельный перенос ( $\lambda_{1,2,3} = 1$ )

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c \end{cases}$$

(b)  $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Можно заменить координаты  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$  и получить

$$\begin{cases} \xi' = \xi + a, \\ \eta' = \eta + b, \\ \zeta' = -\zeta \end{cases}$$

- композиция ортогональной симметрии относительно плоскости  $\xi = \eta = 0$  и параллельного переноса на вектор  $(a, b, 0)$ , параллельно этой плоскости.

(с)

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b, \\ z' = z + c \end{cases}$$

Можно сделать замену координат  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ , чтобы осталось (упражнение):

$$\begin{cases} \xi' = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ \eta' = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \\ \zeta' = \zeta + c \end{cases}$$

- композиция поворота вокруг прямой, параллельной  $(0, 0, 1)$ , на угол  $\alpha$  и переноса на вектор  $(0, 0, c)$  вдоль этой прямой (винтовое движение).

(d)

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b, \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Можно сделать замену координат  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ , чтобы осталось:

$$\begin{cases} \xi' = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ \eta' = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \\ \zeta' = -\zeta + c \end{cases}$$

что является композицией симметрии относительно плоскости  $\zeta = c$ , поворота вокруг прямой, перпендикулярной этой плоскости, и параллельного переноса на вектор  $(0, 0, c)$ , который параллелен этой плоскости.

## 23 Тензоры

### 23.1 Основные определения и первоначальные конструкции

Если векторное пространство  $V$  над  $F$  конечномерно, то  $(V^*)^* \simeq V$ . Соглашение: векторное пространство  $V$  отождествляется с пространством линейных функций на  $V^*$ . Пока что будем считать, что поле  $F$  - произвольное.



**Определение.** Пусть  $p, q \in \mathbb{N}_0$ . Тензор типа  $(p, q)$  - это полилинейная функция

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow F$$

$p$  - ковариантная валентность тензора  $f$ ,  $q$  - контрвариантная валентность тензора  $f$ ,  $p + q$  - ранг тензора  $f$ . Множество всех тензоров типа  $(p, q)$  обозначают

$$T_p^q(v) = T_p^q$$

По определению  $T_0^0 := F$ .

### Линейные операции на $T_p^q$

1. Сложение:

$$\begin{aligned} f_1(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) + f_2(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) = \\ = (f_1 + f_2)(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) \end{aligned}$$

2. Умножение на  $\lambda \in F$ :

$$(\lambda f)(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) = \lambda f(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q)$$

3. Произведение тензоров:

Пусть  $f_1 \in T_p^q(V)$ ,  $f_2 \in T_r^s(V)$ , определим функцию:

$$\begin{aligned} (f_1 \otimes f_2)(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}, u_1, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_{q+s}) = \\ = f_1(v_1, \dots, v_p, u_1, \dots, u_q) \cdot f_2(v_{p+1}, \dots, v_{p+r}, u_{q+1}, \dots, u_{q+s}) \end{aligned}$$

**Утверждение.**  $T_p^q$  с введенными операциями - векторное пространство над полем  $F$ .

**Утверждение.**

1.  $f_1 \otimes f_2 \in T_{p+r}^{q+s}(V)$
2. Операция  $\otimes$  ассоциативна
3.  $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \otimes f_3 = \alpha_1 (f_1 \otimes f_3) + \alpha_2 (f_2 \otimes f_3)$

## Отождествление тензоров малых валентностей с известными объектами из линейной алгебры

**Теорема.**

1.  $T_1^0(V) = V^*$
2.  $T_0^1(V) = (V^*)^* \equiv V$
3.  $T_2^0(V)$  - билинейные функции
4.  $T_1^1(V) \equiv L(V)$  - линейные операторы на  $V$ .

*Доказательство.* Докажем, что тензор типа  $(1,1)$  - это линейный оператор.

Пусть  $f \in T_1^1(V)$ , то есть  $f = f(v, u)$ , где  $v \in V$ ,  $u \in V^*$ . Изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$  задавался правилом:

$$\forall v \in V : \varphi_v - \text{линейная функция на } V^* : \forall u \in V^* \quad \varphi_v(u) = u(v)$$

При фиксированном  $v$   $f(v, u)$  - линейная функция на  $V^*$ , а значит,

$$\exists y_v = \varphi^{-1}(f(v, u))$$

где  $y_v \in V$ . Соответствие  $v \xrightarrow{\psi} y_v$  является линейным оператором на  $V$ , так как

$$f(v_1 + v_2, u) = u(y_{v_1+v_2})$$

и

$$f(v_1 + v_2, u) = f(v_1, u) + f(v_2, u) = u(y_{v_1}) + u(y_{v_2}) = u(y_{v_1} + y_{v_2})$$

Также очевидно, что

$$\psi(\lambda v) = \lambda \psi(v)$$

Обратно: если  $\varphi : V \rightarrow V$  - линейный оператор, то  $f(v, u) := u(\varphi(v))$  - функция, линейная по  $v$  и  $u$ , то есть  $f \in T_1^1(V)$ . Значит, можем установить изоморфизм

$$T_1^1(V) \simeq L(V)$$

□

## Правило Эйнштейна

Некоторые индексы пишутся снизу, а некоторые сверху: например, базисные векторы записываются как  $e_i$  ( $= (e_1, \dots, e_n)$ ), а координаты векторов имеют верхние индексы, а также  $e^i (= (e^1, \dots, e^n))$  - дуальный базис.

Также опускается знак суммирования, если один и тот же индекс повторяется сверху и снизу:  $x = x^i e_i$  подразумевает  $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

Матрицы линейных операторов по этому правилу можно записывать так:  $A_\varphi = (a_j^i)$ , где  $i$  - номер строки,  $j$  - номер столбца. Также:

1.  $\text{tr} A_\varphi = a_i^i$  (след матрицы);
2.  $Y = A_\varphi X \implies y^i = a_j^i x^j$  (умножение матрицы на вектор);
3.  $b(x, y) = b_{ij} x^i y^j$  (билинейная форма)

### Построение базиса в пространстве $T_p^q(V)$

Для любых значений  $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\} \in \{1, \dots, n\}$  и чисел  $p, q \in \mathbb{N}_0$  можно определить тензоры:

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \in T_p^q(V)$$

$$\begin{aligned} (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}, e^{l_1}, \dots, e^{l_q}) = \\ = e^{i_1}(e_{k_1}) \cdot \dots \cdot e^{i_p}(e_{k_p}) \cdot e_{j_1}(e^{l_1}) \cdot \dots \cdot e_{j_q}(e^{l_q}) = \delta_{k_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot \delta_{k_p}^{i_p} \cdot \delta_{j_1}^{l_1} \cdot \dots \cdot \delta_{j_q}^{l_q} (*) \end{aligned}$$

**Теорема.** Тензоры вида  $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}\}$  образуют базис в пространстве  $T_p^q(V)$ , причем

$$\dim(T_p^q(V)) = n^{p+q}$$

*Доказательство.* Пусть  $f \in T_p^q(V)$ . Вычислим  $f(v_1, \dots, v_p; u^1, \dots, u^q)$ :

$$v_i = v_i^{k_i} e_{k_i}, \quad i = 1, \dots, p; \quad u^j = u_{l_j}^j e^{l_j}, \quad j = 1, \dots, q;$$

Тогда:

$$\begin{aligned} f(\dots, v_i^{k_i} e_{k_i}, \dots; \dots, u_{l_j}^j e^{l_j}, \dots) = f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}; e^{l_1}, \dots, e^{l_q}) v_1^{k_1} \dots v_p^{k_p} u_{l_1}^1 \dots u_{l_q}^q = \\ = f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}; e^{l_1}, \dots, e^{l_q}) e^{k_1} \otimes \dots \otimes e^{k_p} \otimes e_{l_1} \otimes \dots \otimes e_{l_q} (v_1, \dots, v_p; u^1, \dots, u^q) \end{aligned}$$

в силу равенства (\*). Это значит, что

$$f = f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}; e^{l_1}, \dots, e^{l_q}) (e^{k_1} \otimes \dots \otimes e^{k_p} \otimes e_{l_1} \otimes \dots \otimes e_{l_q})$$

Коэффициенты, очевидно, определены однозначно при фиксированном базисе  $e_1, \dots, e_n$ , а значит,  $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}\}$  - базис в пространстве  $T_p^q(V)$ .  $\square$

**Определение.** Матрицей тензора  $f$  называется матрица  $A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  такая, что  $a_{k_1, \dots, k_p}^{l_1, \dots, l_q} := f(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}; e^{l_1}, \dots, e^{l_q})$ .

## Закон изменения матрицы координат тензора при замене базиса

Пусть  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ ,  $\begin{pmatrix} e'^1 \\ \vdots \\ e'^n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$ . Тогда:

$$DC = D \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n)C = \begin{pmatrix} e'^1 \\ \vdots \\ e'^n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) = E \Rightarrow D = C^{-1}$$

Отсюда:

$$f = A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} u_{j_1}^1 \dots u_{j_q}^q$$

$$x_k^{i_k} = c_{i'_k}^{i_k} x'_k{}^{i'_k}; \quad u_{j_l}^l = d_{j'_l}^{j_l} u'^l_{j'_l}$$

Отсюда новые коэффициенты линейной формы:

$$(u'_1, \dots, u'_n) = (u_1, \dots, u_n)C \Rightarrow (u_1, \dots, u_n) = (u'_1, \dots, u'_n)D$$

Итак, в новом базисе

$$f = A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} c_{i'_1}^{i_1} \dots c_{i'_p}^{i_p} d_{j'_1}^{j_1} \dots d_{j'_q}^{j_q} x_1^{i'_1} \dots x_p^{i'_p} u_{j'_1}^1 \dots u_{j'_q}^q$$

Пупу.

## 23.2 Свёртка тензора

**Примеры.** 1.  $A = a_j^i \in T_1^1(V)$ :  $\text{tr} A = a_i^i$

Из тензора  $a_j^i$  получили тензор  $\text{tr} A \in T_0^0$ .

2. Действие оператора на вектор, т.е. умножение матрицы на столбец:

$$A = a_k^i, \quad x = x^j \Rightarrow A \otimes X = a_k^i x^j, \quad j := k \Rightarrow a_k^i x^k$$

$A \in T_1^1, X \in T_0^1 \Rightarrow A \otimes X \in T_1^2$  - из него получили тензор  $\in T_0^1$ .

3. Произведение матриц:

$$A = a_k^i, \quad B = b_j^l \Rightarrow A \otimes B = a_k^i b_j^l, \quad l := k \Rightarrow a_k^i b_j^k = (AB)_j^i$$

Из тензора  $\in T_2^2$  получили тензор  $T_1^1$ .

**Определение.** Пусть  $f \in T_p^q(V)$ , причём  $p \geq 1, q \geq 1$ , т.е.  $f(x_1, \dots, x_p, u^1, \dots, u^q)$ .

Выберем пару индексов  $s \in \{1, \dots, p\}, r \in \{1, \dots, q\}$  и рассмотрим функцию

$$\bar{f}(x_1, \dots, \hat{x}_s, \dots, x_p, u^1, \dots, \hat{u}^r, \dots, u^q) := \sum_{k=1}^n f(x_1, \dots, \underbrace{e_k}_s, \dots, x_p, u^1, \dots, \underbrace{e_k}_r, \dots, u^q)$$

Ясно, что  $\bar{f} \in T_{p-1}^{q-1}$ .

Типичное обозначение:  $\bar{f} = \text{tr}_s^r(f)$

В матрицах:  $\bar{A}_{\dots}^{\dots}$  - матрица тензора  $\bar{f}$ , тогда

$$\bar{A}_{i_1, \dots, \hat{i}_s, \dots, i_p}^{j_1, \dots, \hat{j}_r, \dots, j_q} = A_{i_1, \dots, k, \dots, i_p}^{j_1, \dots, k, \dots, j_q}$$

Если  $p = q$ , то тензор можно свернуть по всем парам индексов и получить инвариант (тензор  $\in T_0^0$ ).

Можно сначала рассмотреть произведение тензоров, а после этого свернуть получившийся тензор.

**Пример.** Пусть  $\mathcal{A}$  - конечномерная (как векторное пространство) алгебра с операциями  $+$ ,  $\lambda \cdot$ ,  $\cdot$ ,  $e_1, \dots, e_n$  - линейный базис (базис в.п.).

Тогда  $\forall i, j e_i e_j = a_{ij}^k e_k$ , где  $a_{ij}^k$  - структурные константы - составляют структурный тензор типа  $(2, 1)$ .

**Упражнение.** Найдите структурный тензор для  $M_n(F)$ .

### 23.3 Симметрические, кососимметрические тензоры

**Определение.** Тензор  $f \in T_p^0(V)$  - симметрический, если  $\forall x_1, \dots, x_p \in V, \sigma \in S_p$

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p) \quad (1)$$

Аналогично, если  $g \in T_0^q(V)$ , то  $g$  - симметрический, если  $\forall u^1, \dots, u^q \in V^*, \sigma \in S_p$

$$f(u^{\sigma(1)}, \dots, u^{\sigma(p)}) = f(u^1, \dots, u^p) \quad (1')$$

Тензор  $f \in T_p^0(V)$  ( $\text{char } F \neq 2$ ) - кососимметрический, если  $\forall x_1, \dots, x_p \in V, \sigma \in S_p$

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \text{sgn}(\sigma) f(x_1, \dots, x_p) \quad (2)$$

Аналогично для  $T_0^q(V)$ . Обозначения:

$T_p^+$  - симметрические тензоры типа  $(p, 0)$ ;

$T^{q,-}$ , либо  $\Lambda^q(V^*)$  - кососимметрические тензоры типа  $(0, q)$

Очевидно, для определения кососимметричности достаточно выполнения условия (2) только для транспозиций.

Очевидно, что  $T_2^0 = T_2^+ \oplus T_2^-$

**Упражнение.** Доказать, что такого разложения для  $T_p^0$  нет при  $p > 2$ .

## Тензорная алгебра пространства $V$

Определим  $T(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T_0^q(V)$  - множество финитных последовательностей тензоров  $(f_0, \dots, f_s, 0, \dots)$ .  $f_i \in T_0^i, f_j \in T_0^j \implies f_i \otimes f_j \in T_0^{i+j}$ . Последовательности перемножаются по правилу перемножения многочленов (от одной переменной).

## Симметризация и альтернирование

Далее  $\text{char } F = 0$ .

1. Симметризация: для тензора  $f \in T_p^0(V)$ :

$$\text{Sym}(f)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

Свойства:

- (a)  $\text{Sym} : T_p^0(V) \rightarrow T_p^0(V)$  - линейное отображение,  $\text{Im } \text{Sym} = T_p^+(V)$ ;
- (b)  $\text{Sym}(\text{Sym}(f)) = \text{Sym}(f)$ , т.е.  $\text{Sym}^2 = \text{Sym}$ .

2. Альтернирование: для тензора  $f \in T_p^0(V)$ :

$$\text{Alt}(f)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

$\text{Alt}(f)$  - кососимметрический тензор, обозначим  $g = \text{Alt}(f)$  - полилинейная функция  $\in T_p^0(V)$ .

Тогда  $g(x_1, \dots, x_p)$ ;  $\forall \pi \in S_p$  рассмотрим

$$\begin{aligned} g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(p)}) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(\pi(1))}, \dots, x_{\sigma(\pi(p))}) = \\ &= \frac{1}{p!} \text{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\tau) f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = \text{sgn}(\pi) g(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Свойства:

- (a)  $\text{Alt} : T_p^0(V) \rightarrow T_p^0(V)$  - линейное отображение,  $\text{Im } \text{Alt} = \Lambda_p$
- (b)  $\text{Alt}^2 = \text{Alt}$ .

## Внешнее произведение кососимметрических тензоров

**Определение.** Пусть  $f \in T_p^0, g \in T_r^0$ . Тогда  $\text{Alt}(f) \in \Lambda_p, \text{Alt}(g) \in \Lambda_r$ , и

$$f \wedge g := \text{Alt}(f \otimes g) \in \Lambda_{p+r}$$

*Замечание.* Если  $f, g$  кососимметрические, то  $f \otimes g$  не обязано быть кососимметрическим.

Из определения следует, что  $\Lambda_p \wedge \Lambda_q \subseteq \Lambda_{p+q}$   
(Вообще говоря, внешнее произведение существует для произвольных тензоров, но в данном курсе операции внешнего/внутреннего произведения рассматриваются исключительно на кососимметрических/симметрических тензорах соответственно)

Пусть  $x_i = x_i^j e_j, i = 1, \dots, q = n$ . Вычислим  $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ :

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_n = (x_1^{j_1} e_{j_1}) \wedge (x_2^{j_2} e_{j_2}) \wedge \dots \wedge (x_n^{j_n} e_{j_n}) = x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n})$$

Также  $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n} = 0$ , если  $\exists j_k = j_l$ . Остаются только слагаемые, в которых  $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ , поэтому

$$x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n} (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = (\text{sgn}(j_1 \dots j_n) x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n}) e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} e_1 \wedge \dots \wedge e_n$$

Очевидно, что существует только одномерное подпространство, содержащее  $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \forall x_i \in V$ , т.е.  $\dim \Lambda^n(V) = 1$ .

Рассмотрим теперь  $\Lambda^q(V)$ . Оно содержит произведения  $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q}$ , причём они линейно независимы и любой тензор типа  $\Lambda^q$  линейно выражается через них  $\implies \dim \Lambda^q(V) = C_n^q$ .

Обозначим  $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda_p = \{(f_0, f_1, \dots, f_n) | f_i \in \Lambda^i(V)\} \implies \dim \Lambda(V) = 2^n$ .

$\Lambda(V)$  называется внешней алгеброй пространства  $V$  или алгеброй Грассмана.

## Внутреннее произведение симметрических тензоров

Обозначим  $S(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_p^+(V)$ .

В качестве операции умножения используем операцию внутреннего произведения:

$$f \vee g = \text{Sym}(f \otimes g)$$

Несложно показать, что данная операция ассоциативна, дистрибутивна со сложением и коммутативна.

Тензоры  $e^{j_1} \vee \dots \vee e^{j_p} \in T_p^+(V)$  (допускается равенство индексов). При этом

$$\forall u \in T_p^0(V) \quad u = u_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

Если  $u \in T_p^+$ , то

$$u = \text{Sym}(u) = u_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_p} \implies T_p^+ = \langle e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_p} \mid i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\} \rangle$$

Также из линейной независимости  $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$  следует линейная независимость тензоров  $e^{i_1} \vee \dots \vee e^{i_p}$

Сопоставим  $e^1 \leftrightarrow x_1, \dots, e^n \leftrightarrow x_n$ , где  $x_1, \dots, x_n$  - коммутирующие независимые переменные. Получаем биекцию  $T_p^+(V) \leftrightarrow \{ \sum a_{i_1, \dots, i_p} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \mid \sum_{k=1}^n i_k = p \}$  (операция внутреннего произведения в этом случае сопоставляется операции умножения:  $e^{i_1} \vee e^{i_2} \leftrightarrow x_{i_1} \cdot x_{i_2}$ )

Вычислим размерность пространства однородных многочленов степени  $p$ . Для этого необходимо подсчитать количество выборов  $i_1, \dots, i_p$  с повторениями из  $\{1, \dots, n\}$  без учёта порядка. Для этого воспользуемся методом шаров и перегородок - пусть шарами являются числа  $1, \dots, n$ , а перегородками - элементы выборки, причём  $i_k$  равен числу, соответствующему ближайшему слева шару от перегородки  $i_k$ . Тогда шаров  $n$ , перегородок  $p$ , причём первый элемент строки - не перегородка, т.е. индексы не принимают значение 0. Тогда всего способов  $C_{n+p-1}^p$  (выбираем  $p$  элементов как перегородки из  $n + p - 1$  элемента)  $\implies \dim T_p^+ = C_{n+p-1}^p$

## 23.4 Тензоры на евклидовом пространстве

Скалярное произведение - тензор типа  $(2, 0)$ :  $(x, y) = g_{ij} x^i x^j$ .  $g_{ij}$  - метрический тензор.

Далее полагаем базис ортонормированным.

Обозначим  $G^{-1} = g^{kl}$ . Тогда  $G^{-1}G = E \Leftrightarrow g^{kl} g_{lj} = \delta_j^k$ .  $g^{kl}$  называется контравариантным метрическим тензором.

Рассмотрим вектор  $x^i$  (типа  $(0, 1)$ ) и свёртку  $g_{ij} x^j = a_i$  - это линейная функция, т.е. тензор типа  $(1, 0)$ . В результате верхний индекс переместился вниз:

$$V_i \longrightarrow V_i^* : \quad x_i \mapsto g_{ij} x^j = a_j$$

- изоморфизм между  $V$  и  $V^*$ . Аналогично можно рассмотреть свёртку  $g^{ij} a_j = y^i$  - индекс поднимается вверх. Эти операции, очевидно, взаимно обратны:



$$g_{ij}(g^{ij}a_j) = (g_{ij}g^{ij})a_j = a_j.$$

Общий случай: пусть  $q \geq 1$ ,  $f \in T_p^q(V)$  - тензор,  $A_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  - его матрица. Рассмотрим свёртку

$$g_{ij} A_{i_1, \dots, i_s, \dots, i_p}^{j_1, \dots, \overbrace{j}^k, \dots, j_q} = \tilde{A}_{i_1, \dots, i_s, \dots, i_p, i}^{j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_q} \in T_{p+1}^{q-1}$$

- операция опускания индекса тензора. Аналогично, свёртка

$$g^{ij} A_{i_1, \dots, \underbrace{i}_s, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_k, \dots, j_q} = \tilde{\tilde{A}}_{i_1, \dots, i_{s-1}, i_{s+1}, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_q, j} \in T_{p-1}^{q+1}$$

- операция поднятия индекса тензора (для  $p \geq 1$ ).

## 24 Факультативный материал

### Попарно коммутирующие линейные операторы

Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow V$  над полем  $\mathbb{F}$  и  $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$ . Если  $\varphi_1(U) \subseteq U$ , то  $\varphi_2(U) \subseteq U$ , где  $U$  — собственное подпространство для  $\varphi_1$ , то есть  $\varphi_1(u) = \lambda_1 u \forall u \in U$ .

Возьмём  $u \in U \implies \varphi_1(u) \in U$ .

$$\varphi_1(\varphi_2(u)) = \varphi_2(\varphi_1(u)) = \lambda\varphi_2(u)$$

$\implies \varphi_2(u)$  - собственный вектор для  $\varphi_1 \implies \varphi_2(u) \in U$ .

**Теорема.** Если  $\{\varphi_i \mid i \in I\}$  - семейство попарно коммутирующих операторов в пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{F}$ ,  $\dim V < \infty$ , то все  $\varphi_i$  имеют общий собственный вектор.

*Доказательство.* Индукция по  $n = \dim V$ .

$n = 1$ :  $\forall i \varphi_i(v) = \lambda_i v, \forall v \neq 0$ .

$n > 1$ : Предположение индукции: в пространстве  $U$ ,  $0 < \dim U < \dim V$  у попарно коммутирующих операторов есть общий собственный вектор. Если  $\forall i \in I, \varphi_i = \lambda_i Id \implies$  любой ненулевой вектор - собственный для всех  $\varphi_i$ .

Если существует  $\varphi_1$  - не скалярный, он имеет собственное значение  $\lambda_1$  и  $U = V_{\lambda_1}$  - собственное подпространство для  $\varphi_1$ , то  $\forall i \in I$   $U$  инвариантно относительно  $\varphi_i$ , причём  $0 < \dim U < \dim V \implies$  у операторов  $\varphi_i|_U$  есть общий собственный вектор, исходя из предположения индукции (включая  $\varphi_1$ , по построению).  $\square$

### Следствие.

1. Если  $G$  - коммутативная группа линейных операторов в пространстве  $V$ ,  $\overline{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$  (то есть  $\mathbb{F}$  алгебраически замкнуто), то все элементы этой группы имеют общий собственный вектор.
2. Если в  $V$  не существует инвариантного подпространства относительно всех  $g \in G$ , кроме  $\{0\}$  и  $V$ , то  $\dim V = 1$ .

По теореме, если  $v_0$  - собственный вектор  $\forall g \in G$ , то подпространство  $\langle v_0 \rangle$  инвариантно  $\forall g \in G \implies$  по условию 2  $\implies \langle v_0 \rangle = V$ .

## 24.1 Некоторые группы линейных и аффинных операторов

**Определение.** Множество  $G$  называется группой, если на  $G$  задана бинарная операция:

$$\forall (a, b) \in G \times G \mapsto a \circ b \in G :$$

1. операция ассоциативна;
2.  $\exists e \in G : eg = ge = g \forall g \in G$ ;
3.  $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1}g = gg^{-1} = e$ .

Более того,  $G$  коммутативна, если  $\forall g_1, g_2 \in G : g_1g_2 = g_2g_1$ .

Мы будем рассматривать  $G \subseteq GL(V)$ , где  $GL(V)$  - множество обратимых линейных операторов.

**Пример.** Множество всех обратимых линейных операторов на  $V$  с операцией « $\circ$ » - группа.

Знаем: если  $\varphi, \psi$  - линейные операторы, то  $\varphi \circ \psi$  - тоже,  $e = \text{Id}$  - тождественный оператор. Если  $\varphi$  - обратимый линейный оператор, то есть  $\varphi \in GL(V)$ , то  $\varphi^{-1} \in GL(V)$ .

**Определение.** Подмножество  $H \subseteq G$  - подгруппа группы  $G$ , если:

1.  $H \neq \emptyset$ ;
2.  $\forall h_1, h_2 \in H \implies h_1 \cdot h_2 \in H$ ;
3.  $\forall h \in H \implies h^{-1} \in H \implies hh^{-1} = e_G \in H$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  называется гомоморфизмом, если  $\forall a, b \in G : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi$  - изоморфизм, если  $\varphi$  - биективный гомоморфизм.

Обозначение:  $G_1 \cong G_2$  - изоморфны, если существует изоморфизм  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ .

**Пример.** Обозначим  $GL(n, \mathbb{F})$  - множество всех матриц  $A$  над  $\mathbb{F}$  порядка  $n$  с  $\det A \neq 0$ ;  $GL(n, \mathbb{F})$  - группа с операцией умножения матриц.

Если  $\dim V = n$ , в  $V$  фиксируем базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , то  $\forall \varphi \in GL(V)$ ,  $\varphi \longleftrightarrow A_\varphi \in GL(n, \mathbb{F})$  и  $A_{\varphi\psi} = A_\varphi A_\psi \implies$  группы  $GL(V)$  и  $GL(n, \mathbb{F})$  изоморфны.

Рассмотрим некоторые подгруппы в  $GL(n, \mathbb{F})$ :

$$SL(n, \mathbb{F}) = \{A \in GL(n, \mathbb{F}) \mid \det A = 1\} -$$

подгруппа в группе  $GL(n, \mathbb{F})$ .

$GL(n, \mathbb{F})$  - полная (= общая) линейная группа,  $SL(n, \mathbb{F})$  - специальная линейная группа.

## Группы, сохраняющие билинейную форму

**Определение.** Билинейная функция на  $V$   $f(x, y)$  инвариантна относительно оператора  $\varphi : V \rightarrow V$  (то есть  $\varphi$  сохраняет эту билинейную форму), если

$$\forall x, y \in V : f(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y).$$

В частности, если  $f(x, y)$  - скалярное произведение, то  $\varphi$  — ортогональный оператор.

**Лемма.** Множество  $G_f = \{\varphi \in GL(V)\}$ , где  $\varphi$  сохраняет форму  $f$  - подгруппа в  $GL(V)$ .

*Доказательство.*  $Id \in G_f$ ; если  $\varphi_1, \varphi_2$  таковы, что

$$f(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y),$$

то

$$f(\varphi_1(\varphi_2(x)), \varphi_1(\varphi_2(y))) = f(\varphi_2(x), \varphi_2(y)) = f(x, y).$$

Если  $\varphi \in G_f$ , то  $\varphi^{-1} \in G_f$ .

Проверим, что  $f(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y)$ , где  $x' = \varphi(x)$ ,  $y' = \varphi(y)$ . Тогда  $x = \varphi^{-1}(x')$ ,  $y = \varphi^{-1}(y')$ .

$$f(x', y') = f(\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(y')),$$

так как  $\varphi$  биективно, а  $x', y'$  любые. Следовательно,  $\varphi^{-1} \in G_f$ .  $\square$

Если  $V$  - евклидово пространство,  $f = (x, y)$ , то  $G_f$  - группа всех ортогональных операторов. Обозначение:  $O(V)$  - ортогональная группа.

Если в  $V$  выбрать ортонормированный базис, то в нём  $\forall \varphi \in O(V)$ ,  $\varphi \longleftrightarrow A_\varphi$  - ортогональная матрица и  $O(n, \mathbb{R})$  - группа ортогональных матриц.

Таким образом,  $O(V) \cong O(n, \mathbb{R})$ . Введём следующую группу:

$$O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) -$$

специальная ортогональная группа.

При  $n = 3$  получается группа  $SO(3)$  - группа вращения трёхмерного пространства (другие поля здесь не рассматриваем, поэтому  $\mathbb{R}$  не пишем).

## Общий случай

В общем случае условие

$$f(\varphi(x), \varphi(y)) = f(x, y)$$

записывается в матричном виде следующим образом:

$$X^T (A_\varphi^T F A_\varphi) Y = X^T F Y \iff A_\varphi^T F A_\varphi = F, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,$$

где  $F$  - некоторая матрица.

Будем предполагать, что  $f$  невырожденна, то есть  $|F| \neq 0$ , тогда

$$(\det A_\varphi)^2 \cdot |F| = |F| \implies \det A_\varphi = \pm 1.$$

## Симплектическая группа

$\text{char} \mathbb{F} \neq 2$ , достаточно считать, что  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

Если на  $V$  задана кососимметрическая невырожденная билинейная форма, то  $\dim V = n = 2m$  и существует базис, в котором матрица

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & & \dots & \\ & & & 0 & -1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначение:

$$Sp(2m, \mathbb{F}) = \{A \in GL(2m, \mathbb{F}) \mid A^T F A = F\}.$$

## Некоторые аффинные группы

$A$  - аффинное пространство над пространством  $V$ ,  $Aff(A)$  - множество всех аффинных биективных преобразований  $A$ .

Было доказано, что для любого биективного аффинного преобразования  $\Phi t_v \Psi$ ,  $\Psi(0) = O$ , ( $O$  - начало координат), причём разложение единственно.

$\{\Psi : \Psi(0) = O\}$  - подгруппа в  $Aff(A)$ ,  $T(V) = \{t_v \mid v \in V\}$  - подгруппа параллельных переносов.

$T(V) \cong V$  - как группе с операцией « $+$ ».