Lomonosov Moscow State University

Механико-математический факультет

Теоремы Силова

Преподаватель:	Куликова Ольга Викторовна
Студенты:	Молчанов Вячеслав
Группа:	208
Контакт:	Мой телеграм для связи

Москва

Последняя компиляция: 8 декабря 2025 г.

I Теорема Силова

Теорема. *Пусть G — конечная группа, $|G| = p^s m$, где p — простое и $(p, m) = 1$.*
Тогда $\exists\ H \leq G\ :\ |H| = p^s$ — p-группа силова.

Доказательство.

1. Если G — абелева $\Longrightarrow G \simeq \langle a_1 \rangle_{p_1^{s_1}} \times ... \times \langle a_k \rangle_{p_k^{s_k}}$. Без ограничения общности считаем, что $p_1 = ... = p_t = p,\ p_{t+1}, ..., p_k \neq p$. Тогда $H = \langle a_1 \rangle_{p^{s_1}} \times ... \times \langle a_t \rangle_{p^{s_t}}$ — искомая силовская p-группа
   Знаем, что $p^s m = |G| = |H| \cdot |G/H|$, где $p \nmid |G/H| \Longrightarrow |H| = p^s$

2. Если G - неабелева. Индукция по $|G| = n$
   База: $n = 1$ — очевидна
   Шаг: Пусть $G = Z(G) \sqcup x_1^G \sqcup ... \sqcup x_k^G$ - разложение G на сопряженные классы

   (a) $\exists i = \overline{1, ..., k}\ :\ p \nmid |x_i^G|$. Знаем, что $|C(x_i)| = \frac{|G|}{|x_i^G|}$. По предположению индукции в $C(x_i)$ $\exists$ силовская p-подгруппа $H \Longrightarrow |H| = p^s$ (так как степень вхождения p в порядок группы не уменьшилась), т.е. H — силовская p-подгруппа и для G;

   (b) $\forall i = \overline{1, ..., k}\ :\ p \mid |x_i^G|$. Тогда $p \mid |Z(G)| \Longrightarrow |Z(G)| = p^{s_0} m_0$ ($(p, m_0) = 1$). Так как $Z(G)$ — абелева, по 1 случаю $\exists$ силовская p-подгруппа $S_0 \leq Z(G),\ |S_0| = p^{s_0}$.
   По свойству центра $S_0 \leq Z(G) \Longrightarrow S_0 \trianglelefteq G$ — можем рассмотреть G/S_0. Так как $|G/S_0| < |G|$, по предположению индукции $\exists$ силовская p-подгруппа $S \leq G/S_0$. $|G/S_0| = p^{s - s_0} m \Longrightarrow |S| = p^{s - s_0}$
   Рассмотрим натуральный гомоморфизм $\pi : G \to G/S_0$, и $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$ — полный прообраз S при этом гомоморфизме.
   $S_0 \subset \tilde{S}$, так как $\forall s_0 \in S_0 : \pi(s_0) = eS_0$, причём $S_0 \trianglelefteq G \Longrightarrow S_0 \trianglelefteq \tilde{S}$, т.е. можем рассмотреть ограничение $\pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \to \tilde{S}/S_0$. $\pi|_{\tilde{S}}$ — натуральный гомоморфизм с ядром S_0 и образом $\pi(\tilde{S}) = S$.
   Натуральный гомоморфизм сюръективен, а отсюда по теореме о гомоморфизме $|\tilde{S}| = |S_0| \cdot |S| = p^{s_0} \cdot p^{s - s_0} = p^s \Longrightarrow \tilde{S}$ — искомая силовская p-подгруппа G.

$\square$

II Теорема Силова

Теорема. *Пусть G — группа, $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.*
Тогда любая p-подгруппа группы G лежит в некоторой силовской p-подгруппе.
Все силовские p-подгруппы группы G сопряжены.

Доказательство. Пусть $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.
По I теореме Силова $\exists$ силовская p-подгруппа $S \leq G$.
Рассмотрим $H \leq G$ - произвольную нетривиальную p-подгруппу (случай $H = \{e\}$ очевиден).

Рассмотрим множество $X = \{g_1 S, ..., g_m S\}$ смежных классов G по S и действие $H \curvearrowright X$, заданное по правилу $\alpha(h) g_i S = h g_i S$.

$$|\mathrm{Orb}(g_i S)| \mid |H| \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} |\mathrm{Orb}(g_i S)| = 1 \\ p \mid |\mathrm{Orb}(g_i S)| \end{array} \right. \ (|H| = p^m \text{по следствию из I th. Силова})$$

Предположим, что $\forall i = \overline{1, ..., m} : p \mid |\mathrm{Orb}(g_i S)|$. Тогда $p \mid |X|$, так как $|X|$ — сумма мощностей непересекающихся орбит. Однако $|X| = m$ — взаимно просто с p. Противоречие.
Отсюда $\exists i = \overline{1, ..., m} : |\mathrm{Orb}(g_i S)| = 1$, т.е. точка $g_i S$ неподвижна при $H \curvearrowright X$.
Значит, $\forall h \in H$ $h g_i S = g_i S \Longrightarrow h \in g_i S g_i^{-1} \Longrightarrow H \leq g_i S g_i^{-1}$. Т.к. $|g_i S g_i^{-1}| = |S|$, $g_i S g_i^{-1}$ — силовская p-подгруппа, т.е. H лежит в силовской p-подгруппе G.

Заметим, что в доказательстве выше подгруппа S зафиксирована.
Если рассмотреть H — произвольную силовскую p-подгруппу G, то $|H| = p^s$.
Так как $H \leq g_i S g_i^{-1}$, $|g_i S g_i^{-1}| = p^s \Longrightarrow H = g_i S g_i^{-1}$ — p-подгруппа сопряжена с S. Значит, все силовские p-подгруппы сопряжены. □

III Теорема Силова

Теорема. *Пусть G — группа, $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.*
Пусть N_p — число силовских p-подгрупп в G. Тогда $N_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, $N_p \mid m$.

Доказательство.
Пусть S — произвольная силовская p-подгруппа G (хотя бы одна существует по I теореме Силова). Рассмотрим $X = \{gSg^{-1} \mid g \in G\}$. По II теореме Силова все силовские p-подгруппы G сопряжены, а также порядок любой подгруппы вида gSg^{-1} равен $|S|$, т.е. gSg^{-1} — также силовкая p-подгруппа. Отсюда X — множество всех силовских подгрупп G.

$|X| = N_p \Longrightarrow$ по утверждению 1 получаем $N_p \mid |G|$. Осталось показать, что $N_p \equiv 1 (\bmod\ p)$ (если это так, то $N_p \mid |G| = p^s m \Longrightarrow N_p \mid m$).

Рассмотрим действие $S \curvearrowright X$ сопряжениями. Очевидно, S — неподвижная точка относительно него. Также $N_p = |X| = \sum\limits_{i=1}^{k} |\mathrm{Orb}(x_i)|$. При этом:

$$|\mathrm{Orb}(x_i)| \mid |S| = p^s \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} |\mathrm{Orb}(x_i)| = 1 \\ p \mid |\mathrm{Orb}(x_i)| \end{array}\right.$$

Значит, достаточно показать, что S — единственная неподвижная точка относительно данного движения (тогда $|X| = \sum\limits_{i=1}^{k} |\mathrm{Orb}(x_i)| \equiv |\mathrm{Orb}(S)| = 1 (\bmod\ p)$)

Допустим, что $\tilde{S}$ — неподвижная точка $\Longrightarrow \forall g \in S\ g\tilde{S}g^{-1} = \tilde{S}$.
Рассмотрим нормализатор $N_G(\tilde{S})$. Знаем, что $\tilde{S} \subseteq N_G(\tilde{S})$, а из неподвижности точки $\tilde{S}$ имеем $S \subseteq N_G(\tilde{S})$. Также $N_G(\tilde{S}) \leq G$, то есть степень вхождения p в $|N_G(\tilde{S})|$ также равна s.
Значит, $S, \tilde{S}$ — силовские p-подгруппы в $N_G(\tilde{S})$. Тогда по II теореме Силова S и $\tilde{S}$ сопряжены в $N_G(\tilde{S})$, т.е. $S = g\tilde{S}g^{-1}, g \in N_G(\tilde{S})$, а тогда по определению нормализатора $S = \tilde{S}$.
Получаем, что S — единственная неподвижная точка. $\square$

Список литературы

[1] "Алгебра, 3 семестр, лектор Куликова О.В.", команда 208 группы, 2025, https://github.com/Egorchess/Algebra-3sem/blob/master/Algebra.pdf