
Lista 2 (Integração e Expectativa) - Comentário sobre o Exercício 2

Setup.

Seja X uma v.a. real absolutamente contínua, com densidade f_X (em relação à medida de Lebesgue). Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (mensurável) e defina

$$Y = g(X).$$

Queremos comparar dois jeitos de calcular $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[Y]$:

$$(A) \quad \mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \, dx \quad (\text{Resultado do Exercício 2})$$

e

$$(B) \quad \mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) \, dy \quad (\text{via densidade de } Y = g(X)).$$

Perguntaram na monitoria: *por que (A) e (B) coincidem exatamente?*

Como passar de uma densidade pra outra?

Caso 1: g é bijetora, C^1 e estritamente monótona

Assuma que g é estritamente crescente (ou decrescente), diferenciável, e que $g'(x) \neq 0$ no suporte relevante. Então g admite inversa g^{-1} e podemos derivar a densidade de $Y = g(X)$.

Derivação da fórmula de transformação (via CDF). Para $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y).$$

Se g é estritamente crescente, $g(X) \leq y \iff X \leq g^{-1}(y)$, logo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Derivando em y (regra da cadeia),

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y).$$

Se g é decrescente, aparece um sinal de $-$; a forma unificada é

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) |(g^{-1})'(y)|} \quad (g \text{ bijetora}).$$

Agora calcule $\mathbb{E}[Y]$ usando f_Y .

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} y f_X(g^{-1}(y)) |(g^{-1})'(y)| \, dy.$$

Faça a substituição $y = g(x)$. Então $dy = g'(x) \, dx$ e

$$(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} \quad \Rightarrow \quad |(g^{-1})'(g(x))| = \frac{1}{|g'(x)|}.$$

Substituindo tudo,

$$\int_{\mathbb{R}} y f_X(g^{-1}(y)) |(g^{-1})'(y)| \, dy = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \frac{1}{|g'(x)|} |g'(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \, dx.$$

Portanto,

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \, dx}$$

isto é, **calcular pela densidade de Y dá exatamente o mesmo que usar o Teorema do Estatístico Inconsciente.**

Caso 2: g não é bijetora / (o caso típico na prática)

Na prática, muitas funções de interesse não são bijetoras: $g(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, etc. Nesses casos, a densidade de $Y = g(X)$ (quando existe) precisa ser obtida *quebrando em intervalos onde ela é bijetora*.

Ideia (múltiplas pré-imagens). Fixe y . Em geral, o conjunto:

$$g^{-1}(\{y\}) = \{x : g(x) = y\}$$

pode ter várias soluções $x_1(y), x_2(y), \dots$ (em regiões onde g é localmente invertível). Sob hipóteses regulares (por exemplo g C^1 e *por partes* estritamente monótona, com número finito de intervalos relevantes), vale a fórmula:

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_i \frac{f_X(x_i(y))}{|g'(x_i(y))|}}$$

Então

$$\mathbb{E}[Y] = \int y f_Y(y) \, dy = \sum_i \int y \frac{f_X(x_i(y))}{|g'(x_i(y))|} \, dy.$$

Em cada intervalo i , faça a substituição $y = g(x)$ naquele intervalo (onde g é bijetora). O jacobiano cancela exatamente como no caso bijetor, e você obtém

$$\int_{\text{intervalo } i} y \frac{f_X(x_i(y))}{|g'(x_i(y))|} \, dy = \int_{\text{intervalo } i} g(x) f_X(x) \, dx.$$

Somando os ramos:

$$\boxed{\int y f_Y(y) \, dy = \int g(x) f_X(x) \, dx.}$$

Mesmo quando f_Y existe, *derivá-la* pode ser trabalhoso porque exige lidar com: (i) inversa de g (ou várias inversas locais), (ii) valores críticos onde $g'(x) = 0$, (iii) suporte e multiplicidade de soluções, (iv) casos por partes.

Em contraste, o Teorema do Exercício 2 evita tudo isso: para qualquer função mensurável integrável φ ¹,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int \varphi(x)f_X(x) \, dx,$$

sem precisar saber a densidade de $\varphi(X)$.

Exemplo clássico: variância. Para variância de X , por definição:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

e pelo Teorema:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int x^2 f_X(x).$$

Note que aqui achar a densidade de $Y = X^2$ seria bastante chato, já que estamos fora do caso bijetor.

¹No caso em que X é absolutamente contínua, claro.