Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Aluno: Guilherme Dias Vianna

Professor: Luis Fantozzi
Monitor: -
Disciplina: Verão de Estatística

Lista 1 (Probabilidade e Medida)

1 Nesse exercício, veremos como construir probabilidades em espaços elementares.

Seja Ω um conjunto **finito**. Considere um conjunto de números não-negativos $\{p_\omega : \omega \in \Omega\}$ tal que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$. Cada p_ω pode ser visto como a probabilidade de que cada um dos $\omega \in \Omega$ seja sorteado pela incerteza do problema em questão.

(a) Considere o espaço mensurável $(\Omega, 2^\Omega)$. Mostre que a função $S : 2^\Omega \mapsto \mathbb{R}$ dada por:

$$S(A) := \sum_{a\in A} p_a\,, \quad A \in 2^\Omega\,,$$

define uma medida de probabilidade sobre 2^Ω.

Resolução:

Para todo $A \in 2^\Omega$, $S(A) \geqslant 0$ pois é soma de termos não negativos. Além disso, como $A \subseteq \Omega$,

$$S(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1,$$

logo $S(A) \in [0, 1]$.

Veja também que:

$$S(\varnothing) = \sum_{\omega\in\varnothing} p_\omega = 0,$$

e, pela hipótese, $S(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^\Omega$ são dois a dois disjuntos, então, como Ω é finito, apenas um número finito dos A_n são não vazios. De fato, no máximo $|\Omega|$ deles podem ser não vazios, pois conjuntos disjuntos não vazios contêm elementos distintos. Assim, existe $N \leqslant |\Omega|$ tal que $A_n = \varnothing$ para todo $n > N$, e

$$S\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = S\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{\omega\in\bigcup_{n=1}^{N} A_n} p_\omega = \sum_{n=1}^{N}\sum_{\omega\in A_n} p_\omega = \sum_{n=1}^{N} S(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} S(A_n).$$

Todas as propriedades necessárias para uma medida de probabilidade estão provadas.

(b) Mostre que a medida S é a única extensão possível de $\{\{a\} : a \in \mathcal{A}\}$ para 2^Ω que preserva as probabilidades $\{p_a\}_a$, no seguinte sentido: qualquer outra medida H sobre 2^Ω que satisfaz $H[\{a\}] = p_a,\ , \forall a \in \Omega$, é tal que $H = S$.

Resolução:

Se $A = \varnothing$, então $H(A) = 0 = S(A)$.

Para $A \neq \varnothing$, escreva $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$, com $1 \leqslant k \leqslant |\Omega|$. Os conjuntos $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_k\}$ são dois a dois disjuntos, logo, pela σ-aditividade (que implica aditividade finita),

$$H(A) = H\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} H\left(\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} p_{\omega_i} = S(A).$$

Portanto, $H(A) = S(A)$ para todo $A \subseteq \Omega$, isto é, $H \equiv S$.

(c) Mostre que, tomando como base o espaço mensurável $(\Omega, 2^\Omega)$, qualquer função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ constitui uma variável aleatória.

Resolução:

Para provar que f é uma variável aleatória basta mostrar que f é $2^\Omega/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável, isto é, que

$$f^{-1}(B) \in 2^\Omega \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Mas $f^{-1}(B) \subseteq \Omega$ para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$, e 2^Ω é exatamente o conjunto de *todos* os subconjuntos de Ω. Logo, $f^{-1}(B) \in 2^\Omega$ para todo boreliano B, e conclui-se que f é mensurável. Portanto, toda função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória quando o domínio é munido de 2^Ω.

2 O objetivo destes exercícios consiste em construir o espaço $((0,1], \mathcal{B}(0,1], \widetilde{\text{Leb}})$.

(a) Considere o conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $(0,1]$ da forma:

$$\cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\,,$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq 1$. Mostre que esse conjunto $\mathcal{A}$ forma uma **álgebra**, no seguinte sentido: (1) $(0,1], \emptyset \in \mathcal{A}$; (2) se $A \in \mathcal{A}$, então $A^\complement \in \mathcal{A}$; e (3) sejam $A_1, A_2, \ldots A_k$ elementos de $\mathcal{A}$, com $k < \infty$, então $\cup_{l=1}^{k} A_l \in \mathcal{A}$.

Resolução:

Defina

$$\mathcal{A} := \left\{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \subset (0,1] : n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant 1\right\}.$$

Os intervalos estão ordenados e são disjuntos (admitindo-se junção na fronteira, pois o lado esquerdo é aberto).

(1) $(0,1], \varnothing \in \mathcal{A}$:

Temos $(0,1] = (0,1]$ com $n = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. E $\varnothing = (a, a]$ para qualquer $a \in [0,1]$, logo $\varnothing \in \mathcal{A}$.

(2) Fechamento por complemento relativo a $(0,1]$:

Se $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathcal{A}$, com $0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant 1$, então

$$(0,1] \setminus A = (0, a_1] \ \cup \ \bigcup_{i=1}^{n-1}(b_i, a_{i+1}] \ \cup \ (b_n, 1].$$

Cada parcela é do tipo $(\alpha, \beta]$ com $\alpha \leqslant \beta$; logo $(0,1] \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) Fechamento por uniões finitas:
Sejam $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, onde

$$A_r = \bigcup_{i=1}^{n_r} \left(a_i^{(r)}, b_i^{(r)} \right], \qquad r = 1, \dots, k,$$

com as famílias em cada A_r ordenadas como acima.
Considere o conjunto finito de pontos extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \bigcup_{r=1}^{k} \left\{ a_i^{(r)}, b_i^{(r)} : 1 \leqslant i \leqslant n_r \right\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ (eliminando repetições). Os intervalos $(x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, m$, formam uma partição finita de $(0, 1]$. Como os extremos de cada $(a_i^{(r)}, b_i^{(r)}]$ pertencem a E, cada A_r é união de alguns destes intervalos $(x_{j-1}, x_j]$. Logo $\bigcup_{r=1}^{k} A_r$ é união de certos intervalos da partição; agrupando intervalos consecutivos, obtemos uma união finita de intervalos disjuntos do tipo $(\alpha, \beta]$, isto é, um elemento de $\mathcal{A}$.

Conclui-se que $\mathcal{A}$ contém $(0, 1]$ e $\varnothing$, é fechada por complemento relativo a $(0, 1]$ e por uniões finitas; portanto, $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $(0, 1]$.

(b) Defina a função $\widetilde{\mathrm{Leb}} : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$, da seguinte forma. Se $A = \cup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$, então

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(A) = \sum_{l=1}^{n} (b_i - a_i) .$$

Mostre que $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ está bem definida, isto é, que o valor de $\widetilde{\mathrm{Leb}}(A)$ é o mesmo para duas representações distintas de um mesmo conjunto A em termos de união de intervalos disjuntos; e que $\widetilde{\mathrm{Leb}}(\emptyset) = 0$ e $\widetilde{\mathrm{Leb}}(0, 1] = 1$.

Resolução:

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(A) := \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Bem-definição:
Suponha que o mesmo conjunto A admita também

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j], \qquad 0 \leqslant c_1 \leqslant d_1 \leqslant \cdots \leqslant c_m \leqslant d_m \leqslant 1.$$

Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{c_j, d_j : 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

e ordene-o como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$. Os intervalos

$$I_k := (x_{k-1}, x_k], \qquad k = 1, \dots, r,$$

formam uma partição disjunta de $(0, 1]$. Como as fronteiras de todos os intervalos de ambas as representações pertencem a E, cada $(a_i, b_i]$ (e cada $(c_j, d_j]$) é união disjunta de alguns I_k. Logo, para algum conjunto de índices $K \subset \{1, \dots, r\}$,

$$A = \bigcup_{k \in K} I_k \quad \text{e} \quad b_i - a_i = \sum_{k:\ I_k \subset (a_i, b_i]} (x_k - x_{k-1}) \quad \text{para cada } i.$$

Somando em i e usando a disjunção, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}).$$

O mesmo raciocínio aplicado à segunda representação dá

$$\sum_{j=1}^{m}(d_j - c_j) = \sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}).$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{j=1}^{m}(d_j - c_j),$$

e o valor de $\widetilde{\mathrm{Leb}}(A)$ independe da representação de A como união finita de intervalos disjuntos de tipo $(\cdot,\cdot]$.

Valores em $\varnothing$ e $(0,1]$, e imagem em $[0,1]$:

Temos $\widetilde{\mathrm{Leb}}(\varnothing) = 0$, pois $\varnothing = (a,a]$ e então $b_1 - a_1 = 0$. Além disso, $\widetilde{\mathrm{Leb}}((0,1]) = 1$ escolhendo $n = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Finalmente, para $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ como acima,

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = (b_n - a_1) - \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - b_i) \leqslant b_n - a_1 \leqslant 1,$$

logo $\widetilde{\mathrm{Leb}} : \mathcal{A} \to [0,1]$ está bem definida.

(c) Mostre que $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é **aditiva** em $\mathcal{A}$, isto é, para $A_1, A_2, \dots A_k$, $k < \infty$, elementos **disjuntos** de $\mathcal{A}$:

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(\cup_{l=1}^{k} A_l) = \sum_{l=1}^{k} \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_l)$$

Resolução:

Sejam $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos, com

$$A_\ell = \bigcup_{i=1}^{n_\ell}\left(a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}\right], \qquad 0 \leqslant a_1^{(\ell)} \leqslant b_1^{(\ell)} \leqslant \cdots \leqslant a_{n_\ell}^{(\ell)} \leqslant b_{n_\ell}^{(\ell)} \leqslant 1.$$

Como os A_ℓ são disjuntos, toda a família de intervalos $\left\{\left(a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}\right]\right\}_{\ell,i}$ é também disjunta.

Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0,1\} \cup \bigcup_{\ell=1}^{k}\left\{a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)} : 1 \leqslant i \leqslant n_\ell\right\}$$

e ordene-o como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$. Os átomos $I_j := (x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, m$, particionam $(0,1]$. Como os extremos de cada $\left(a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}\right]$ pertencem a E, para cada ℓ existe um conjunto de índices $K_\ell \subset \{1, \dots, m\}$ tal que

$$A_\ell = \bigcup_{j\in K_\ell} I_j \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell) = \sum_{j\in K_\ell}(x_j - x_{j-1}).$$

A disjunção dos A_ℓ implica $K_\ell \cap K_r = \varnothing$ se $\ell \neq r$. Logo

$$\bigcup_{\ell=1}^{k} A_\ell = \bigcup_{\ell=1}^{k}\bigcup_{j\in K_\ell} I_j = \bigcup_{j\in\cup_\ell K_\ell} I_j,$$

uma união disjunta de intervalos. Usando a definição de $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ e reordenando somas finitas,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(\bigcup_{\ell=1}^{k} A_\ell\right) = \sum_{j\in\cup_\ell K_\ell} (x_j - x_{j-1}) = \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{j\in K_\ell}(x_j - x_{j-1}) = \sum_{\ell=1}^{k}\widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell).$$

Portanto, $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é aditiva em $\mathcal{A}$ para uniões finitas de conjuntos disjuntos.

(d) Usando o resultado anterior, mostre que $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é enumeravelmente **aditiva** em $\mathcal{A}$, isto é, para $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^\infty$, $A_j \cap A_i = \emptyset$ se $i \neq j$, e tal que $\cup_{l=1}^\infty A_l \in \mathcal{A}$:

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(\cup_{l=1}^\infty A_l) = \sum_{l=1}^{\infty}\widetilde{\mathrm{Leb}}(A_l)$$

Dica: para os itens (c) e (d), veja o Teorema 1.3 em Billingsley (1995), "Probability and Measure".

Resolução:

Sejam $(A_\ell)_{\ell\geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e

$$U := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \in \mathcal{A}.$$

Escreva U como união finita e disjunta de intervalos do tipo $(\alpha_s, \beta_s]$:

$$U = \bigcup_{s=1}^{m} J_s, \qquad J_s = (\alpha_s, \beta_s],\ \ s = 1, \dots, m.$$

Para cada s e ℓ, ponha $A_\ell^{(s)} := A_\ell \cap J_s$. Então $A_\ell = \bigcup_{s=1}^m A_\ell^{(s)}$ com uniões disjuntas, e $J_s = \bigcup_{\ell=1}^\infty A_\ell^{(s)}$ com uniões disjuntas.

Como $A_\ell \in \mathcal{A}$, cada $A_\ell^{(s)}$ é união finita de intervalos $(a, b]$. Logo, para cada s, a família de intervalos que compõe os $A_\ell^{(s)}$ é enumerável, disjunta e tem união J_s. Pelo teorema da dica (Billingsley, Teorema 1.3 (iii)),

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(J_s) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right).$$

Somando em s e usando que as somas são de termos não negativos,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(U) = \sum_{s=1}^{m}\widetilde{\mathrm{Leb}}(J_s) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{\infty}\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{m}\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right).$$

Por aditividade finita de $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ (resultado anterior),

$$\sum_{s=1}^{m}\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right) = \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell) \quad \text{para todo } \ell.$$

Logo

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell),$$

isto é, $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é enumeravelmente aditiva em $\mathcal{A}$ sob a hipótese de que a união pertence a $\mathcal{A}$.

(e) Recorra ao Teorema 1.7 de Williams (1991), "Probability with Martingales" para concluir que existe uma única medida de probabilidade que estende $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ a $\mathcal{B}(0,1]$.

Resolução:

Teorema 1.7 do Williams (Extensão de Carathéodory; tradução).

Seja S um conjunto, Σ_0 uma *álgebra* em S e ponha $\Sigma := \sigma(\Sigma_0)$. Se $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0,\infty]$ é enumeravelmente aditiva (isto é, uma *pré-medida*), então existe uma medida μ em (S,Σ) tal que $\mu = \mu_0$ em Σ_0. Se, além disso, $\mu_0(S) < \infty$, essa extensão é única (*uma álgebra é um π-sistema*). Nos itens anteriores mostramos:

(i) $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de $(0,1]$.

(ii) $\widetilde{\mathrm{Leb}} : \mathcal{A} \to [0,1]$ está bem definida, $\widetilde{\mathrm{Leb}}(\varnothing) = 0$ e $\widetilde{\mathrm{Leb}}((0,1]) = 1$.

(iii) $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é enumeravelmente aditiva em $\mathcal{A}$ (uniões disjuntas cuja união pertence a $\mathcal{A}$).

Logo, tomando $S = (0,1]$, $\Sigma_0 = \mathcal{A}$ e $\mu_0 = \widetilde{\mathrm{Leb}}$, todas as hipóteses do Teorema de Extensão de Carathéodory estão satisfeitas.

Conclui-se que existe uma medida μ em $\sigma(\mathcal{A})$ com $\mu|_{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathrm{Leb}}$.

Como $\widetilde{\mathrm{Leb}}((0,1]) = 1 < \infty$, a extensão é **única** e, portanto, é uma **medida de probabilidade**.

Por fim, ainda precisamos provar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}((0,1])$:

De um lado, $(a,b] \in \mathcal{B}((0,1])$ pois $(a,b] = \bigcap_{n\geqslant 1}(a, b+1/n)$; logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}((0,1])$ e $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}((0,1])$.

Do outro lado, para $a < b$,

$$(a,b) = \bigcup_{m\geqslant 1}(a+1/m,\ b-1/m] = \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q}\\ a<p<q<b}} (p,q],$$

uma união enumerável de intervalos do tipo $(\cdot,\cdot]$, de modo que todo aberto de $(0,1]$ pertence a $\sigma(\mathcal{A})$ e, portanto, $\mathcal{B}((0,1]) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Assim, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}((0,1])$.

Concluímos então: existe **uma única** medida de probabilidade μ em $\big((0,1], \mathcal{B}((0,1])\big)$ que estende $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ (em particular, $\mu((a,b]) = b - a$ para todo $(a,b] \subset (0,1]$)

Exemplo numérico (partição via extremos).

$$\underbrace{A = (0.1,0.3]\ \cup\ (0.5,0.7]\ \cup\ (0.8,0.9]}_{\text{Rep. 1}} \quad = \quad \underbrace{(0.1,0.2]\ \cup\ (0.2,0.3]\ \cup\ (0.5,0.7]\ \cup\ (0.8,0.9]}_{\text{Rep. 2}}.$$

Forme o conjunto de extremos

$$E = \{0,1\} \cup \{0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9\}.$$

Ordenando E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_8 = 1$, os *átomos* são

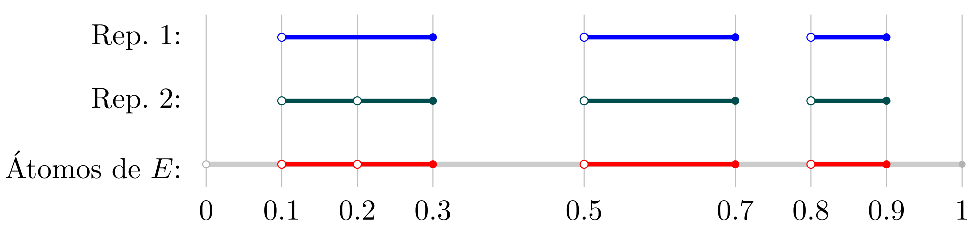
$$I_j = (x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \ldots, 8,$$

isto é:

$$I_1 = (0, 0.1],\ I_2 = (0.1, 0.2],\ I_3 = (0.2, 0.3],\ I_4 = (0.3, 0.5],$$
$$I_5 = (0.5, 0.7],\ I_6 = (0.7, 0.8],\ I_7 = (0.8, 0.9],\ I_8 = (0.9, 1].$$

Independentemente da representação, tem-se

$$A = I_2\ \cup\ I_3\ \cup\ I_5\ \cup\ I_7.$$



(3) O objetivo deste exercício consiste em mostrar que existem conjuntos que não estão em $\mathcal{B}(0,1]$. Para começar, definamos a seguinte operação entre dois números $x, y \in (0,1]$.

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y\,, & \text{se } x+y \leqslant 1 \\ x+y-1\,, & \text{se } x+y > 1 \end{cases}$$

É possível mostrar (não faremos isso) que, para todo $x \in (0,1]$ e $A \in \mathcal{B}[0,1)$, o conjunto $A \oplus x := \{a \oplus x : x \in A\}$ é mensurável (i.e. $A \oplus x \in \mathcal{B}[0,1)$) e que $\text{Leb}(A \oplus x) = \text{Leb}(A)$ (a medida de Lebesgue é invariante a translações).

(a) Defina a relação $\sim$ sobre $[0,1)$ da forma: $x \sim y \iff \exists r \in \mathbb{Q} \cap (0,1], x \oplus r = y$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência, i.e. reflexiva, simétrica e transitiva.

Resolução:

Reflexiva.

Para todo $x \in (0,1]$, tomando $r = 1 \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$, temos $x \oplus r = x$, logo $x \sim x$.

Simétrica.

Se $x \sim y$, existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ com $y = x \oplus r$. Defina

$$r^* = \begin{cases} 1-r, & r \in (0,1), \\ 1, & r = 1. \end{cases}$$

Então $r^* \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$,

$$y \oplus r^* = (x \oplus r) \oplus r^* = x \oplus \big(r \oplus r^*\big) = x \oplus 1 = x,$$

isto é, $y \sim x$.

Transitiva.

Se $x \sim y$ e $y \sim z$, existem $r, s \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tais que $y = x \oplus r$ e $z = y \oplus s$. Ponha $t := r \oplus s$, que pertence a $\mathbb{Q} \cap (0,1]$ porque

$$t = \begin{cases} r+s, & r+s \leq 1, \\ r+s-1, & r+s > 1. \end{cases}$$

Veja também que,

$$z = (x \oplus r) \oplus s = x \oplus (r \oplus s) = x \oplus t,$$

logo $x \sim z$.

Conclui-se que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva; portanto, uma relação de equivalência em $(0,1]$.

(b) Para $x \in [0,1)$, defina a classe de equivalência $[x]_\sim = \{a \in [0,1] : a \sim x\}$. Mostre que, se $[x]_\sim \neq [y]_\sim$, então $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$, e que $\cup_{a \in (0,1]} [a]_\sim = (0,1]$. Conclua que a coleção $\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$ forma uma partição de $(0,1]$.

Resolução:

Suponha que exista $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$.

Então $x \sim z$ e $y \sim z$; pela simetria, $z \sim y$, e pela transitividade, $x \sim y$.

Logo, para todo t, $t \in [x]_\sim \iff t \sim x \iff t \sim y \iff t \in [y]_\sim$, o que dá $[x]_\sim = [y]_\sim$, uma contradição.

Portanto, classes distintas são disjuntas.

Para vermos que a união é equivalente a $(0,1]$, veja que:

A inclusão $\subseteq$ é óbvia, pois cada $[a]_\sim \subset (0,1]$. Para a inclusão $\supseteq$, dado $x \in (0,1]$, pela reflexividade $x \sim x$, logo $x \in [x]_\sim$; portanto, todo ponto de $(0,1]$ pertence à união.

Como cada classe $[a]_\sim$ é não vazia (contém o próprio a), classes distintas são disjuntas e a união de todas elas é $(0,1]$, concluímos que

$$\mathcal{S} := \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$$

é uma partição de $(0,1]$.

(c) Considere o conjunto $H = \{h \in s : s \in \mathcal{S}\}$ que consiste em coletar um elemento de cada uma das classes de equivalência distintas de $\sim$. Considere os conjuntos $H_n = H \oplus r_n$, $n \in \mathbb{N}$, onde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma enumeração dos números racionais em $(0,1]$. Mostre que os H_n são disjuntos, e que $\cup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]$.

Resolução:

Seja $\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$ a partição de $(0,1]$ dada no item (b).

Escolha um representante $h_s \in s$ para cada classe $s \in \mathcal{S}$ e defina

$$H := \{h_s : \; s \in \mathcal{S}\}.$$

Fixe uma enumeração sem repetição $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q} \cap (0,1]$ e ponha

$$H_n := H \oplus r_n = \{h \oplus r_n : \; h \in H\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Disjunção.

Suponha $x \in H_m \cap H_n$ com $m \neq n$. Então existem $h, h' \in H$ tais que

$$x = h \oplus r_m = h' \oplus r_n.$$

Assim $x \sim h$ e $x \sim h'$, logo $h \sim h'$; como H tem exatamente um representante por classe, conclui-se $h = h'$. Agora escolha $s \in (0,1]$ tal que $s \oplus h = 1$ (por exemplo, $s = 1 - h$ se $h < 1$ e $s = 1$ se $h = 1$), veja que:

$$s \oplus x = s \oplus (h \oplus r_m) = (s \oplus h) \oplus r_m = 1 \oplus r_m = r_m,$$

e, do mesmo modo,

$$s \oplus x = s \oplus (h \oplus r_n) = (s \oplus h) \oplus r_n = 1 \oplus r_n = r_n.$$

Logo $r_m = r_n$, contrariando $m \neq n$. Portanto, $H_m \cap H_n = \varnothing$ para $m \neq n$.

Cobertura de $(0,1]$.

Se $x \in (0,1]$, seja $s = [x]_\sim \in \mathcal{S}$ e tome seu representante $h_s \in H$. Por definição de classe de equivalência, existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que $x = h_s \oplus r$. Escolhendo n com $r_n = r$, obtemos $x \in H \oplus r_n = H_n$. Assim,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1].$$

Conclui-se que os conjuntos $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são dois a dois disjuntos e sua união é todo $(0,1]$.

(d) Conclua que $H \notin \mathcal{B}(0,1]$. *Dica:* suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}(0,1]$, e use a igualdade do item anterior.

Resolução:

Do item (c) temos conjuntos $H_n := H \oplus r_n$ dois a dois disjuntos, com $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]$, onde (r_n) é uma enumeração de $\mathbb{Q} \cap (0,1]$.

Suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}((0,1])$. Pela invariância por translações e preservação de mensurabilidade dadas no enunciado, cada $H_n = H \oplus r_n$ pertence a $\mathcal{B}((0,1])$ e

$$\mathrm{Leb}(H_n) = \mathrm{Leb}(H) =: c \in [0,1].$$

Como os H_n são disjuntos, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Leb}(H_n) = \sum_{n=1}^{N} c = Nc \leq \mathrm{Leb}((0,1]) = 1.$$

Logo $Nc \leq 1$ para todo N, o que só é possível se $c = 0$. Então, pela continuidade da medida,

$$1 = \mathrm{Leb}((0,1]) = \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} Nc = 0,$$

uma contradição. Conclui-se que $H \notin \mathcal{B}((0,1])$.

Comentário matemático: *H é um conjunto especial chamado* **Conjunto de Vitali**, sua existência é equivalente ao Axioma da Escolha, você consegue ver o porquê?

(4) Prove a seguinte extensão do lema do π-sistema. Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável, e μ_1 e μ_2 duas medidas sobre Σ que são σ-finitas num conjunto $\mathcal{I}$, i.e. tais que existem $E_1, E_2, E_3 \ldots \in \mathcal{I}$ disjuntos com $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ com $\mu_1(E_i) < \infty$ e $\mu_2(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Prove que, se $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$, e $\mathcal{I}$ é um π-sistema que gera Σ, então $\mu_1 = \mu_2$.

Resolução:

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina medidas finitas em (Ω, Σ) por

$$\nu_k^{(i)}(A) := \mu_k(A \cap E_i)\,, \qquad A \in \Sigma,\ k = 1, 2.$$

De fato, para conjuntos disjuntos $(A_j)_{j\geqslant 1} \subset \Sigma$,

$$\nu_k^{(i)}\left(\bigcup_{j\geqslant 1} A_j\right) = \mu_k\left(\bigcup_{j\geqslant 1}(A_j \cap E_i)\right) = \sum_{j\geqslant 1} \mu_k(A_j \cap E_i) = \sum_{j\geqslant 1} \nu_k^{(i)}(A_j),$$

veja que $\nu_k^{(i)}(\Omega) = \mu_k(E_i) < \infty$.

Como $E_i \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ é um π-sistema, para todo $I \in \mathcal{I}$ vale $I \cap E_i \in \mathcal{I}$. Logo,

$$\nu_1^{(i)}(I) = \mu_1(I \cap E_i) = \mu_2(I \cap E_i) = \nu_2^{(i)}(I), \qquad I \in \mathcal{I}.$$

Aplicando o **lema do π-sistema no caso finito** às medidas finitas $\nu_1^{(i)}$ e $\nu_2^{(i)}$ obtemos

$$\nu_1^{(i)}(A) = \nu_2^{(i)}(A) \quad \text{para todo } A \in \Sigma,$$

isto é,

$$\mu_1(A \cap E_i) = \mu_2(A \cap E_i) \quad \text{para todo } A \in \Sigma \text{ e todo } i \in \mathbb{N}.$$

Por fim, para $A \in \Sigma$, usando que os E_i são disjuntos e cobrem Ω,

$$\mu_1(A) = \mu_1\left(\bigcup_{i\geqslant 1}(A \cap E_i)\right) = \sum_{i\geqslant 1} \mu_1(A \cap E_i) = \sum_{i\geqslant 1} \mu_2(A \cap E_i) = \mu_2\left(\bigcup_{i\geqslant 1}(A \cap E_i)\right) = \mu_2(A).$$

Portanto, $\mu_1 = \mu_2$ em Σ.

(5) Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{Leb})$, onde Leb é a medida de Lebesgue sobre a reta, que satisfaz:

$$\mathrm{Leb}(a,b] = b - a, \quad \forall -\infty < a \leqslant b < \infty\,.$$

(a) Use o resultado da questão anterior para concluir que as medidas dos intervalos $(a,b]$ caracterizam a medida de Lebesgue na reta.

Resolução:

Considere

$$\mathcal{I} := \{\varnothing\} \cup \{(a,b] : a < b\}.$$

Veja $\mathcal{I}$ é um π-sistema: para $(a,b], (c,d] \in \mathcal{I}$,

$$(a,b] \cap (c,d] = \begin{cases} (\max\{a,c\},\, \min\{b,d\}]\,, & \max\{a,c\} < \min\{b,d\}, \\ \varnothing, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

logo a interseção pertence a $\mathcal{I}$. Além disso, $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$: de fato, $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e, para $a < b$,

$$(a,b) = \bigcup_{m,n \geqslant 1} \big(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\big] \in \sigma(\mathcal{I}),$$

de modo que todo aberto é união enumerável de elementos de $\mathcal{I}$ e, portanto, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{I})$.

As medidas Leb e μ são σ-finitas em $\mathcal{I}$: tomando $E_i = (i-1, i] \in \mathcal{I}$, $i \in \mathbb{Z}$, temos $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} E_i$ com $\mathrm{Leb}(E_i) = \mu(E_i) = 1 < \infty$. Por hipótese, μ e Leb coincidem em todo $I \in \mathcal{I}$ (e em particular em $\varnothing$).

Aplicando o resultado da questão anterior (extensão do lema do π-sistema), conclui-se que, por coincidirem em um π-sistema gerador no qual são σ-finitas, as medidas devem coincidir em toda a σ-álgebra gerada:

$$\mu = \mathrm{Leb} \quad \text{em } \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Logo, os valores em intervalos do tipo $(a,b]$ caracterizam unicamente a medida de Lebesgue na reta.

(b) Considere a sequência de conjuntos mensuráveis $E_n = (n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\mu(E_n) = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$. Por que o teorema de convergência visto em aula não vale nesse caso?

Resolução:

1) $\mu(E_n) = \infty$ para todo n.

Escreva

$$E_n = \bigcup_{k=0}^{\infty} (n+k,\, n+k+1],$$

união disjunta. Pela σ-aditividade e pelo fato de $\mu((a,b]) = b - a$,

$$\mu(E_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu((n+k,\, n+k+1]) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

2) $\mu\big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\big) = 0$.

Note que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \varnothing$, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ com $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu(\varnothing) = 0.$$

3) Por que o "teorema de convergência" não vale aqui? A sequência (E_n) é *decrescente* e $E_n \downarrow \varnothing$.

O teorema de *continuidade de medidas por cima* (ou "convergência monótona para conjuntos") diz que, se $E_n \downarrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$, então $\mu(E_n) \downarrow \mu(E)$. Aqui, porém, $\mu(E_1) = \infty$, isto é, a hipótese de finitude *falha*; de fato,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty \qquad \text{enquanto} \qquad \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 0.$$

Portanto o teorema não se aplica e a igualdade pode falhar exatamente como neste exemplo.

6 Seja $\mathcal{V}$ o conjunto de teclas de uma máquina de escrever. Considere um experimento em que um macaco digita sequencialmente em uma máquina de escrever, infinitamente no tempo. O espaço amostral é dado por $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}$, o espaço de sequências com valores em $\mathcal{V}$. Considere a σ-álgebra $\mathcal{F}$ gerada pelos eventos $\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_k = v\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ $v \in \mathcal{V}$. Esses são os eventos em que o macaco digita um caractere v na k-ésima posição do texto.

(a) Considere o subconjunto $\mathcal{I}$ de eventos da forma $\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_{i_1} = v_1, \omega_{i_2} = v_2, \ldots, \omega_{i_k} = v_k\}$, para todo $k < \infty$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e $v_1, v_2 \ldots, v_k \in \mathcal{V}$. Inclua também o conjunto vazio em $\emptyset$ em $\mathcal{I}$. Mostre que $\mathcal{I}$ é um π-sistema e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$.

Resolução:

Para $k \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathcal{V}$, denote

$$C(k, v) := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ \omega_k = v\}.$$

Sejam

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r), \qquad B = \bigcap_{s=1}^{n} C(j_s, w_s) \in \mathcal{I},$$

com os índices já em ordem crescente. Considere o conjunto de índices $M = \{i_1, \ldots, i_m\} \cup \{j_1, \ldots, j_n\}$. Para cada $t \in M$:

- se t aparece em ambas as listas e há conflito $v \neq w$, então $C(t, v) \cap C(t, w) = \varnothing$ e portanto $A \cap B = \varnothing \in \mathcal{I}$;
- caso contrário, há no máximo uma restrição para t, e

  $$A \cap B = \bigcap_{t\in M} C(t, u_t)$$

  com u_t o valor prescrito em A ou em B (e, quando t aparece em ambas, os valores coincidem). Reordenando os índices, obtemos novamente um elemento de $\mathcal{I}$.

Assim, $A \cap B \in \mathcal{I}$ em qualquer caso, logo $\mathcal{I}$ é um π-sistema.

$\boldsymbol{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}}$.

Para $A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r) \in \mathcal{I}$, temos que A é interseção finita de conjuntos geradores $C(i_r, v_r)$. Como toda σ-álgebra é fechada por interseções finitas e $\mathcal{F}$ contém cada $C(i_r, v_r)$, conclui-se $A \in \mathcal{F}$. Logo, $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$.

(b) Suponha agora que o macaco digita as teclas de forma uniforme e independente no tempo, isto é, considere a probabilidade $\mathbb{P}$ sobre $(\mathcal{V}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ da forma:

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_{i_1} = v_1, \omega_{i_2} = v_2, \ldots, \omega_{i_k} = v_k\}] = \frac{1}{|\mathcal{V}|^k}$$

para todo evento em $\mathcal{I}$ não vazio, e $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$. Use o lema do π-sistema para concluir que as probabilidades sobre $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$.

Resolução:

Do item (a), o conjunto

$$\mathcal{I} := \{\varnothing\} \cup \left\{ \bigcap_{r=1}^{k} C(i_r, v_r) : k < \infty,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k,\ v_r \in \mathcal{V} \right\}$$

é um π-sistema e, como contém cada $C(i, v)$ e é feito de interseções finitas deles, vale $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}$.

Defina a probabilidade $\mathbb{P}$ em $\mathcal{F}$ impondo, para todo evento não vazio de $\mathcal{I}$,

$$\mathbb{P}(\{\omega : \omega_{i_1} = v_1, \ldots, \omega_{i_k} = v_k\}) = \frac{1}{|\mathcal{V}|^{k}}, \qquad \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

Mostremos que esses valores em $\mathcal{I}$ determinam unicamente $\mathbb{P}$. Se $\mathbb{Q}$ é *qualquer* probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ que coincide com $\mathbb{P}$ em $\mathcal{I}$, então:

1) $\mathcal{I}$ é um π-sistema que gera $\mathcal{F}$;

2) $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são medidas finitas (probabilidades). Logo são σ-finitas em $\mathcal{I}$; por exemplo, os conjuntos $E_v := C(1, v) \in \mathcal{I}$, $v \in \mathcal{V}$, são disjuntos, $\Omega = \bigcup_{v \in \mathcal{V}} E_v$ e $\mathbb{P}(E_v) = \mathbb{Q}(E_v) = 1/|\mathcal{V}| < \infty$.

Pelo **lema do π-sistema**, segue que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ em toda $\mathcal{F}$. Portanto, os valores prescritos em $\mathcal{I}$ **caracterizam** unicamente a probabilidade $\mathbb{P}$ no espaço $(\Omega, \mathcal{F})$.

(c) Seja S_n o evento em que, a partir da enésima posição do texto, o macaco digita as obras completas de Shakespeare. Use o segundo lema de Borell-Cantelli para concluir que a probabilidade de que o macaco digita as obras completas de Shakespeare infinitas vezes é 1.

Resolução:

Fixe uma palavra (finita) $W = (w_1, \ldots, w_L) \in \mathcal{V}^L$ que codifica as obras completas de Shakespeare no alfabeto $\mathcal{V}$ (com espaços, pontuação etc.). Para $n \geqslant 1$, defina o evento

$$S_n := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} :\ (\omega_n, \ldots, \omega_{n+L-1}) = W\}.$$

Pela definição de $\mathbb{P}$ (teclas i.i.d. e uniformes),

$$\mathbb{P}(S_n) = |\mathcal{V}|^{-L} =: p \quad \text{para todo } n.$$

Os eventos (S_n) não são independentes em geral (quando $|n - m| < L$ eles compartilham coordenadas), mas a subfamília

$$T_m := S_{1+(m-1)L}, \qquad m \geqslant 1,$$

depende de blocos disjuntos de coordenadas e, portanto, é formada por eventos *independentes*.

Pelo 2º Borel–Cantelli aplicado à subfamília independente (T_m),

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{m\to\infty} T_m\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m \geqslant N} T_m\right) = 1.$$

Como $T_m = S_{1+(m-1)L}$, para todo N vale

$$\bigcup_{m \geqslant N} T_m = \bigcup_{m \geqslant N} S_{1+(m-1)L} \subseteq \bigcup_{n \geqslant 1+(N-1)L} S_n,$$

e, ao intersectar em N,

$$\limsup_{m\to\infty} T_m \subseteq \limsup_{n\to\infty} S_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geqslant N} S_n.$$

Logo,

$$1 = \mathbb{P}\Big(\limsup_{m\to\infty} T_m\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} S_n\Big) \leq 1,$$

e concluímos

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} S_n\Big) = 1.$$

Comentário sobre escalas de tempo. Se $q := |\mathcal{V}|$ e o texto tem comprimento L, a ocorrência de W ao início de um dado bloco de L posições tem probabilidade $p = q^{-L}$. Em blocos disjuntos, o número de blocos até a *primeira* ocorrência é geométrico com esperança $1/p = q^L$. Assim, o número esperado de toques até ver W uma única vez é da ordem de q^L.

Tomando valores conservadores (por exemplo, $q \approx 50$ para uma máquina de escrever comum e $L \approx 5 \times 10^6$ caracteres para todas as obras), temos

$$\log_{10}\left(q^L\right) = L \log_{10} q \approx 5 \cdot 10^6 \times 1{,}699 \approx 8{,}5 \times 10^6.$$

Ou seja, a **espera média** é cerca de $10^{8{,}5 \text{ milhões}}$ toques. Mesmo a 10 toques por segundo, em toda a idade do universo ($\sim 4{,}3 \times 10^{17}$ s) cabem apenas $\sim 10^{19}$ toques. Portanto, embora o resultado $\mathbb{P}(\cdot) = 1$ assegure que a ocorrência seja certa no sentido probabilístico (infinitas vezes no horizonte infinito), ele não é uma previsão operacional em escalas físicas razoáveis. Portanto vemos como conclusões assintóticas dos lemas de Borel–Cantelli não devem ser extrapoladas ingenuamente para experimentos concretos de duração finita.

7 Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável, e $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ uma função $\Sigma/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável. Mostre que as seguintes funções são mensuráveis:

(a) $g = \max\{f, 0\}$.

Resolução:

Para $a \in \mathbb{R}$,

$$g^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega : g(\omega) < a\} \equiv \{g < a\} = \{\max(f, 0) < a\} = \begin{cases} \varnothing, & a \leq 0, \\ \{f < a\}, & a > 0, \end{cases}$$

pois, se $a > 0$, então $f < 0 \Rightarrow \max(f, 0) = 0 < a$, logo $\{g < a\} = \{f < a\}$. Como f é mensurável, $\{f < a\} \in \Sigma$, e portanto $\{g < a\} \in \Sigma$ para todo a. Logo g é mensurável.

(b) $g = \min\{f, 0\}$.

Resolução:

$$\{g < a\} = \{\min(f, 0) < a\} = \begin{cases} \{f < a\}, & a \leq 0, \\ \Omega, & a > 0, \end{cases}$$

pois, se $a > 0$, então $f \leq 0 \Rightarrow \min(f, 0) = f < a$ e $f > 0 \Rightarrow \min(f, 0) = 0 < a$, o que dá a totalidade de Ω. Assim $\{g < a\} \in \Sigma$ para todo a, mostrando que g é mensurável.

(c) $g = s \circ f$, onde $s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Resolução:

Para todo aberto $O \subset \mathbb{R}$,

$$g^{-1}(O) = \{\omega : s(f(\omega)) \in O\} = f^{-1}\big(s^{-1}(O)\big)\,.$$

Como s é contínua, $s^{-1}(O)$ é aberto; como f é mensurável, $f^{-1}(\,\cdot\,)$ envia abertos em conjuntos mensuráveis de Σ. Logo $g^{-1}(O) \in \Sigma$ para todo aberto O, e g é mensurável.