Probabilidade e Estatística
Monitoria 3 - Resolução da Lista 3

Guilherme Vianna

12 de fevereiro de 2026

Exercício 1 — Enunciado

Enunciado

Considere o espaço de probabilidade $(\{0,1\}, 2^{\{0,1\}}, \mathbb{P})$, com $\mathbb{P}[\{0\}] = 1/2$. Considere a sequência de variáveis aleatórias $X_n = \mathbf{1}_{\{1\}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $X = \mathbf{1}_{\{0\}}$. Mostre que $X_n \xrightarrow{d} X$, mas que não há convergência em probabilidade de X_n a X.

Exercício 1 — Resolução

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $X_n = \mathbf{1}_{\{1\}}$ e $X = \mathbf{1}_{\{0\}}$. Logo,

$$X_n(0) = 0, \quad X_n(1) = 1, \qquad \text{e} \qquad X(0) = 1, \quad X(1) = 0.$$

Exercício 1 — Resolução

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $X_n = \mathbf{1}_{\{1\}}$ e $X = \mathbf{1}_{\{0\}}$. Logo,

$$X_n(0) = 0, \quad X_n(1) = 1, \qquad \text{e} \qquad X(0) = 1, \quad X(1) = 0.$$

Primeiro, calculemos as funções de distribuição. Para $c \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_n}(c) = \mathbb{P}(X_n \leqslant c).$$

Exercício 1 — Resolução: $X_n \xrightarrow{d} X$

Como X_n assume apenas os valores 0 e 1, segue que

$$F_{X_n}(c) = \begin{cases} 0, & c < 0, \\ \mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(\{0\}) = \dfrac{1}{2}, & 0 \leqslant c < 1, \\ 1, & c \geqslant 1. \end{cases}$$

Exercício 1 — Resolução: $X_n \xrightarrow{d} X$ (continuação)

De modo análogo, como X também assume apenas os valores 0 e 1, com $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{2}$, obtemos

$$F_X(c) = \begin{cases} 0, & c < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \leqslant c < 1, \\ 1, & c \geqslant 1. \end{cases}$$

Exercício 1 — Resolução: $X_n \xrightarrow{d} X$ (continuação)

De modo análogo, como X também assume apenas os valores 0 e 1, com $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{2}$, obtemos

$$F_X(c) = \begin{cases} 0, & c < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \leqslant c < 1, \\ 1, & c \geqslant 1. \end{cases}$$

Em particular, $F_{X_n}(c) = F_X(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo n, portanto:

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(c) = F_X(c),$$

logo $X_n \xrightarrow{d} X$.

Exercício 1 — Resolução: não há convergência em probabilidade

Agora, verifiquemos a convergência em probabilidade. Para qualquer $\omega \in \Omega$,

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| = \begin{cases} |0-1| = 1, & \omega = 0, \\ |1-0| = 1, & \omega = 1, \end{cases}$$

portanto $|X_n - X| = 1$ em todo Ω. Assim, para todo ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$,

$$\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = \Omega \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

para todo n.

Exercício 1 — Resolução: não há convergência em probabilidade

Agora, verifiquemos a convergência em probabilidade. Para qualquer $\omega \in \Omega$,

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| = \begin{cases} |0-1| = 1, & \omega = 0, \\ |1-0| = 1, & \omega = 1, \end{cases}$$

portanto $|X_n - X| = 1$ em todo Ω. Assim, para todo ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$,

$$\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = \Omega \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

para todo n.
Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 1 \neq 0,$$

o que contradiz a definição de convergência em probabilidade. Logo, X_n não converge em probabilidade para X.

Exercício 2 — Enunciado

Enunciado

Considere o espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, com λ a medida uniforme. Considere a sequência de variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \mathbf{1}_{[0,1]} \\
X_2 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[0,1/2]} \\
X_3 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[1/2,1]} \\
X_4 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[0,1/3]} \\
X_5 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[1/3,2/3]} \\
X_6 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[2/3,1]} \\
X_7 &= \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{[0,1/4]} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Exercício 2(a) — Enunciado

Enunciado

Mostre que, para todo $\omega \in [0, 1]$, a sequência $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ **não converge**. Conclua que X_n não converge quase certamente.

Exercício 2(a) — Resolução

$$X_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}.$$

Para cada $m \geqslant 2$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, defina

$$I_{m,j} := \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right].$$

Exercício 2(a) — Resolução

$$X_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}.$$

Para cada $m \geqslant 2$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, defina

$$I_{m,j} := \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right].$$

Pelo padrão indicado na definição da sequência, os termos após X_1 percorrem, para cada m, todos os intervalos $I_{m,1}, \dots, I_{m,m}$. Em particular, se

$$N_m := 1 + \sum_{k=2}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2},$$

então, para $m \geqslant 2$ e $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$X_{N_{m-1}+j} = \mathbf{1}_{[0,1]} + \mathbf{1}_{I_{m,j}}.$$

Exercício 2(a) — Resolução

Fixe $\omega \in [0, 1]$. Para cada $m \geqslant 2$, existe ao menos um índice $j_m \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\omega \in I_{m,j_m}$, pois

$$[0, 1] = \bigcup_{j=1}^{m} I_{m,j}.$$

Exercício 2(a) — Resolução

Fixe $\omega \in [0,1]$. Para cada $m \geqslant 2$, existe ao menos um índice $j_m \in \{1,\dots,m\}$ tal que $\omega \in I_{m,j_m}$, pois

$$[0,1] = \bigcup_{j=1}^{m} I_{m,j}.$$

Logo,

$$X_{N_{m-1}+j_m}(\omega) = \mathbf{1}_{[0,1]}(\omega) + \mathbf{1}_{I_{m,j_m}}(\omega) = 1 + 1 = 2,$$

o que mostra que 2 ocorre infinitas vezes ao longo da sequência $(X_n(\omega))_n$.

Exercício 2(a) — Resolução (conclusão)

Além disso, para cada $m \geqslant 3$, o ponto ω pertence a no máximo dois dos intervalos $I_{m,1}, \ldots, I_{m,m}$ (apenas no caso em que ω é um ponto de fronteira $\omega = k/m$), de modo que existe algum $i_m \in \{1, \ldots, m\}$ com $\omega \notin I_{m,i_m}$. Para esse i_m,

$$X_{N_{m-1}+i_m}(\omega) = \mathbf{1}_{[0,1]}(\omega) + \mathbf{1}_{I_{m,i_m}}(\omega) = 1 + 0 = 1,$$

isto é, 1 também ocorre infinitas vezes.

Exercício 2(a) — Resolução (conclusão)

Além disso, para cada $m \geqslant 3$, o ponto ω pertence a no máximo dois dos intervalos $I_{m,1}, \ldots, I_{m,m}$ (apenas no caso em que ω é um ponto de fronteira $\omega = k/m$), de modo que existe algum $i_m \in \{1, \ldots, m\}$ com $\omega \notin I_{m,i_m}$. Para esse i_m,

$$X_{N_{m-1}+i_m}(\omega) = \mathbf{1}_{[0,1]}(\omega) + \mathbf{1}_{I_{m,i_m}}(\omega) = 1 + 0 = 1,$$

isto é, 1 também ocorre infinitas vezes.
Portanto, existem duas subsequências $(X_{n_m}(\omega))_m$ e $\left(X_{n'_m}(\omega)\right)_m$ tais que

$$X_{n_m}(\omega) = 2 \quad \text{para todo } m, \qquad \text{e} \qquad X_{n'_m}(\omega) = 1 \quad \text{para todo } m.$$

Se $(X_n(\omega))_n$ tivesse limite, então todas as subsequências teriam o mesmo limite, o que é impossível pois as duas subsequências acima são constantes com valores distintos. Logo, $(X_n(\omega))_n$ não converge para nenhum $\omega \in [0,1]$.

Exercício 2(a) — Resolução (conclusão)

Além disso, para cada $m \geqslant 3$, o ponto ω pertence a no máximo dois dos intervalos $I_{m,1}, \ldots, I_{m,m}$ (apenas no caso em que ω é um ponto de fronteira $\omega = k/m$), de modo que existe algum $i_m \in \{1, \ldots, m\}$ com $\omega \notin I_{m,i_m}$. Para esse i_m,

$$X_{N_{m-1}+i_m}(\omega) = \mathbf{1}_{[0,1]}(\omega) + \mathbf{1}_{I_{m,i_m}}(\omega) = 1 + 0 = 1,$$

isto é, 1 também ocorre infinitas vezes.
Portanto, existem duas subsequências $(X_{n_m}(\omega))_m$ e $\big(X_{n'_m}(\omega)\big)_m$ tais que

$$X_{n_m}(\omega) = 2 \quad \text{para todo } m, \qquad \text{e} \qquad X_{n'_m}(\omega) = 1 \quad \text{para todo } m.$$

Se $(X_n(\omega))_n$ tivesse limite, então todas as subsequências teriam o mesmo limite, o que é impossível pois as duas subsequências acima são constantes com valores distintos. Logo, $(X_n(\omega))_n$ não converge para nenhum $\omega \in [0,1]$.
Assim,

$$\{\omega \in [0,1] : X_n(\omega) \text{ não converge}\} = [0,1],$$

e como $\lambda([0,1]) = 1$, segue que X_n não converge quase certamente.

Exercício 2(b) — Enunciado

Enunciado

Mostre que $X_n \xrightarrow{p} X_1$.

Exercício 2(b) — Resolução

Note que, para $n \geqslant 2$, existe um par (m, j) com $m \geqslant 2$ tal que $n = N_{m-1} + j$ e

$$X_n = X_1 + \mathbf{1}_{I_{m,j}}.$$

Logo,

$$|X_n - X_1| = \mathbf{1}_{I_{m,j}}.$$

Exercício 2(b) — Resolução

Note que, para $n \geqslant 2$, existe um par (m, j) com $m \geqslant 2$ tal que $n = N_{m-1} + j$ e

$$X_n = X_1 + \mathbf{1}_{I_{m,j}}.$$

Logo,

$$|X_n - X_1| = \mathbf{1}_{I_{m,j}}.$$

Fixe $\epsilon > 0$. Se $\epsilon \geqslant 1$, então $|X_n - X_1| \leqslant 1$ implica

$$\lambda\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_1(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0.$$

Exercício 2(b) — Resolução

Note que, para $n \geqslant 2$, existe um par (m, j) com $m \geqslant 2$ tal que $n = N_{m-1} + j$ e

$$X_n = X_1 + \mathbf{1}_{I_{m,j}}.$$

Logo,

$$|X_n - X_1| = \mathbf{1}_{I_{m,j}}.$$

Fixe $\epsilon > 0$. Se $\epsilon \geqslant 1$, então $|X_n - X_1| \leqslant 1$ implica

$$\lambda\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_1(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0.$$

Se $0 < \epsilon < 1$, então

$$\{\omega : |X_n(\omega) - X_1(\omega)| > \epsilon\} = \left\{\omega : \mathbf{1}_{I_{m,j}}(\omega) = 1\right\} = I_{m,j},$$

e portanto

$$\lambda\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_1(\omega)| > \epsilon\}\right) = \lambda(I_{m,j}) = \frac{1}{m}.$$

Exercício 2(b) — Resolução (conclusão)

Para concluir o limite, dado $\delta > 0$, escolha $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \geqslant 2$ e $\frac{1}{M} < \delta$. Se $n > N_M = \frac{M(M+1)}{2}$, então o índice n já está em algum bloco com $m \geqslant M + 1$, de modo que

$$\lambda\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_1(\omega)| > \epsilon\}\right) = \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{M+1} < \delta.$$

Exercício 2(b) — Resolução (conclusão)

Para concluir o limite, dado $\delta > 0$, escolha $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \geqslant 2$ e $\frac{1}{M} < \delta$. Se $n > N_M = \frac{M(M+1)}{2}$, então o índice n já está em algum bloco com $m \geqslant M + 1$, de modo que

$$\lambda\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_1(\omega)| > \epsilon\}\right) = \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{M+1} < \delta.$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_1(\omega)| > \epsilon\}\right) = 0 \quad \text{para todo } \epsilon > 0,$$

isto é,

$$X_n \xrightarrow{p} X_1.$$

Exercício 3 — Enunciado

Enunciado

Seja X_n uma sequência de variáveis aleatórias, que converge em distribuição a uma variável aleatória X. Mostre que, se a função distribuição F_X de X é contínua, então:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in(-\infty,\infty)} \left|F_{X_n}(s) - F_X(s)\right| = 0.$$

Dica: considere $k \in \mathbb{N}$ e use continuidade para encontrar pontos $s_1, s_2, \ldots, s_k$ tais que $F_X(s_j) = \frac{j}{k+1}$. Use esses pontos para limitar por cima o supremo.

Exercício 3 — Resolução

$$F_n(s) := F_{X_n}(s) = \mathbb{P}(X_n \leqslant s), \qquad F(s) := F_X(s) = \mathbb{P}(X \leqslant s).$$

Como $X_n \xrightarrow{d} X$ e F é contínua, temos

$$\lim_{n\to\infty} F_n(s) = F(s) \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Exercício 3 — Resolução: discretização por quantis

Fixe $k \in \mathbb{N}$. Para $j = 1, \ldots, k$, defina

$$s_j := \inf \left\{ s \in \mathbb{R} : \; F(s) \geqslant \frac{j}{k+1} \right\}.$$

Pelas propriedades básicas de função de distribuição, F é não-decrescente e satisfaz

$$\lim_{s \to -\infty} F(s) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to +\infty} F(s) = 1,$$

logo o conjunto acima é não-vazio e limitado inferiormente, de modo que $s_j \in \mathbb{R}$ está bem-definido.

Exercício 3 — Resolução: discretização por quantis

Fixe $k \in \mathbb{N}$. Para $j = 1, \ldots, k$, defina

$$s_j := \inf \left\{ s \in \mathbb{R} : \; F(s) \geqslant \frac{j}{k+1} \right\}.$$

Pelas propriedades básicas de função de distribuição, F é não-decrescente e satisfaz

$$\lim_{s \to -\infty} F(s) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to +\infty} F(s) = 1,$$

logo o conjunto acima é não-vazio e limitado inferiormente, de modo que $s_j \in \mathbb{R}$ está bem-definido.
Além disso, pela continuidade de F,

$$F(s_j) = \frac{j}{k+1} \qquad \text{para todo } j = 1, \ldots, k.$$

Exercício 3 — Resolução: propriedades dos s_j

De fato, por definição de ínfimo e monotonicidade, $F(s_j) \geqslant \frac{j}{k+1}$. Se $F(s_j) > \frac{j}{k+1}$, pela continuidade existiria $t < s_j$ com $F(t) > \frac{j}{k+1}$, contrariando a minimalidade de s_j. Portanto vale a igualdade.

Em particular, como $\frac{j}{k+1} < \frac{j+1}{k+1}$ e F é não-decrescente, segue que

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_k.$$

Exercício 3 — Resolução: controle em malha finita

Defina

$$M_n := \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |F_n(s_j) - F(s_j)| \,.$$

Como $F_n(s_j) \to F(s_j)$ para cada j e o máximo é sobre um conjunto finito, temos

$$M_n \to 0.$$

Exercício 3 — Resolução: estimativa uniforme (caso $s < s_1$)

Agora mostremos a estimativa uniforme. Fixe $s \in \mathbb{R}$.

Se $s < s_1$, então $F(s) \leqslant F(s_1) = \frac{1}{k+1}$ e, por monotonicidade de F_n, $F_n(s) \leqslant F_n(s_1)$. Logo,

$$F_n(s) - F(s) \leqslant F_n(s_1) = F(s_1) + (F_n(s_1) - F(s_1)) \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n,$$

e também $F(s) - F_n(s) \leqslant F(s) \leqslant \frac{1}{k+1}$. Portanto,

$$|F_n(s) - F(s)| \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n.$$

Exercício 3 — Resolução: estimativa uniforme (caso $s \geqslant s_k$)

Se $s \geqslant s_k$, então $F(s) \geqslant F(s_k) = \frac{k}{k+1}$, logo $1 - F(s) \leqslant \frac{1}{k+1}$, e

$$F_n(s) - F(s) \leqslant 1 - F(s) \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

Além disso, por monotonicidade, $F_n(s) \geqslant F_n(s_k)$, então

$$F(s) - F_n(s) \leqslant F(s) - F_n(s_k) \leqslant 1 - F_n(s_k) = 1 - F(s_k) + (F(s_k) - F_n(s_k)) \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n.$$

Logo, novamente,

$$|F_n(s) - F(s)| \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n.$$

Exercício 3 — Resolução: estimativa uniforme (caso $s \in [s_j, s_{j+1})$)

Por fim, se $s \in [s_j, s_{j+1})$ para algum $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, então, por monotonicidade,

$$F_n(s_j) \leqslant F_n(s) \leqslant F_n(s_{j+1}) \quad \text{e} \quad F(s_j) \leqslant F(s) \leqslant F(s_{j+1}).$$

Assim,

$$F_n(s) - F(s) \leqslant F_n(s_{j+1}) - F(s) \leqslant (F_n(s_{j+1}) - F(s_{j+1})) + (F(s_{j+1}) - F(s)) \leqslant M_n + \frac{1}{k+1}$$

pois $F(s_{j+1}) - F(s) \leqslant F(s_{j+1}) - F(s_j) = \frac{1}{k+1}$.

Analogamente,

$$F(s) - F_n(s) \leqslant F(s) - F_n(s_j) \leqslant (F(s) - F(s_j)) + (F(s_j) - F_n(s_j)) \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n.$$

Concluímos que, também aqui,

$$|F_n(s) - F(s)| \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n.$$

Exercício 3 — Resolução: bound para o supremo

Como os três casos cobrem todo $s \in \mathbb{R}$, temos, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|F_n(s) - F(s)| \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n.$$

Portanto,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |F_n(s) - F(s)| \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n.$$

Exercício 3 — Resolução: conclusão

Agora, dado $\epsilon > 0$, escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k+1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $M_n \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant N$,

$$M_n < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para todo $n \geqslant N$,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |F_n(s) - F(s)| \leqslant \frac{1}{k+1} + M_n < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \mathbb{R}} |F_{X_n}(s) - F_X(s)| = 0.$$

Exercício 3 — Comentário

Acabamos de provar uma versão mais fraca do **Teorema de Glivenko–Cantelli**.

Este teorema afirma que, se $Y_1, Y_2, \ldots$ são iid com função de distribuição F e

$$\widehat{F}_n(s) \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_i \leqslant s\}},$$

então $\sup_{s\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(s) - F(s)| \to 0$ quase certamente.

Exercício 8 — Enunciado

Enunciado

Seja $(X_n)_n$ uma sequência de variáveis aleatórias. Suponha que $X_n \xrightarrow{d} c$, onde $c \in \mathbb{R}^k$ é uma **constante**. Mostre que $X_n \xrightarrow{p} c$.

Exercício 8 — Resolução

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k \quad \text{(constante)}.$$

Considere a função

$$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \qquad g(\boldsymbol{x}) \coloneqq \left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} \right\|,$$

Exercício 8 — Resolução

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k \quad \text{(constante)}.$$

Considere a função

$$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \qquad g(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|,$$

que é contínua em $\mathbb{R}^k$. Pelo **Teorema do Mapa Contínuo** (para convergência em distribuição),

$$g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{d} g(\boldsymbol{c}) = 0.$$

Exercício 8 — Resolução

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k \quad \text{(constante).}$$

Considere a função

$$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \qquad g(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|,$$

que é contínua em $\mathbb{R}^k$. Pelo **Teorema do Mapa Contínuo** (para convergência em distribuição),

$$g(\boldsymbol{X}_n) \xrightarrow{d} g(\boldsymbol{c}) = 0.$$

Defina $Y_n := g(\boldsymbol{X}_n) = \|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{c}\|$. Então $Y_n \xrightarrow{d} 0$, onde 0 denota a variável aleatória constante e igual a 0.

Exercício 8 — Resolução (convergência em probabilidade)

Seja $\epsilon > 0$. Como $Y_n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{c}\| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(Y_n > \epsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \epsilon\right).$$

Exercício 8 — Resolução (convergência em probabilidade)

Seja $\epsilon > 0$. Como $Y_n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{c}\| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(Y_n > \epsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \epsilon\right).$$

Denote por $F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant t)$ a função de distribuição de Y_n, e por F_0 a função de distribuição da constante 0:

$$F_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Exercício 8 — Resolução (conclusão)

Pela definição de convergência em distribuição, para todo ponto de continuidade de F_0,

$$F_{Y_n}(t) \to F_0(t).$$

Como $\epsilon > 0$, o ponto $t = \epsilon$ é ponto de continuidade de F_0 e $F_0(\epsilon) = 1$. Logo,

$$\mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \epsilon\right) = F_{Y_n}(\epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Exercício 8 — Resolução (conclusão)

Pela definição de convergência em distribuição, para todo ponto de continuidade de F_0,

$$F_{Y_n}(t) \to F_0(t).$$

Como $\epsilon > 0$, o ponto $t = \epsilon$ é ponto de continuidade de F_0 e $F_0(\epsilon) = 1$. Logo,

$$\mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \epsilon\right) = F_{Y_n}(\epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}\left(\|\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{c}\| > \epsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \epsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{c}$.