Probabilidade e Estatística
Monitoria 1 - Resolução da Lista 1

Guilherme Vianna

19 de janeiro de 2026

Exercício 1 — Enunciado

Contexto

Seja Ω um conjunto **finito**. Considere números não-negativos $\{p_\omega : \omega \in \Omega\}$ tais que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

Cada p_ω pode ser visto como a probabilidade do elemento $\omega \in \Omega$ ocorrer.

Definição

No espaço mensurável $(\Omega, 2^\Omega)$, defina

$$S(A) := \sum_{\omega \in A} p_\omega, \qquad A \in 2^\Omega.$$

Exercício 1(a) — Enunciado

Enunciado

Considere $(\Omega, 2^\Omega)$ e a função $S : 2^\Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$S(A) \coloneqq \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Mostre que S é uma **medida de probabilidade** sobre 2^Ω.

Exercício 1(a) — Resolução (roteiro)

Para provar que S é uma medida de probabilidade em 2^{Ω}, precisamos verificar:

1. **Não-negatividade:** $S(A) \geqslant 0$ para todo $A \subseteq \Omega$;
2. **Normalização:** $S(\Omega) = 1$;
3. σ**-aditividade:** se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são dois a dois disjuntos,

$$S\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} S(A_n).$$

Exercício 1(a) — Resolução

- Para todo $A \in 2^{\Omega}$,

$$S(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \geqslant 0 \qquad \text{(termos não-negativos).}$$

Exercício 1(a) — Resolução

- Para todo $A \in 2^{\Omega}$,

$$S(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \geqslant 0 \qquad \text{(termos não-negativos).}$$

- Além disso, como $A \subseteq \Omega$,

$$S(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 \qquad \text{(monotonicidade da soma).}$$

Exercício 1(a) — Resolução

- Para todo $A \in 2^\Omega$,

$$S(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \geqslant 0 \qquad \text{(termos não-negativos).}$$

- Além disso, como $A \subseteq \Omega$,

$$S(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 \qquad \text{(monotonicidade da soma).}$$

- Casos extremos:

$$S(\varnothing) = \sum_{\omega \in \varnothing} p_\omega = 0 \qquad \text{(soma vazia),}$$

Exercício 1(a) — Resolução

- Para todo $A \in 2^{\Omega}$,

$$S(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \geqslant 0 \qquad \text{(termos não-negativos).}$$

- Além disso, como $A \subseteq \Omega$,

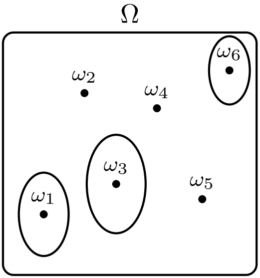
$$S(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 \qquad \text{(monotonicidade da soma).}$$

- Casos extremos:

$$S(\varnothing) = \sum_{\omega \in \varnothing} p_\omega = 0 \qquad \text{(soma vazia),}$$

$$S(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1 \qquad \Big(\text{hipótese } \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1\Big).$$

Exercício 1(a) - Resolução



Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são **dois a dois disjuntos** e $A_n \neq \varnothing$:

- cada A_n contém *pelo menos* um elemento $\omega \in \Omega$ (não vazio);
- por serem disjuntos, esses elementos precisam ser **distintos** (disjunção);
- como Ω tem apenas $|\Omega|$ elementos, existem **no máximo** $|\Omega|$ conjuntos A_n não vazios:

$$\#\{n : A_n \neq \varnothing\} \leqslant |\Omega| \qquad \text{(contagem)}.$$

Exercício 1(a) — Resolução (σ-aditividade)

Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq 2^\Omega$ são dois a dois disjuntos, então (pelo argumento anterior) apenas finitos A_n podem ser não vazios.

Exercício 1(a) — Resolução (σ-aditividade)

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^\Omega$ são dois a dois disjuntos, então (pelo argumento anterior) apenas finitos A_n podem ser não vazios.
Defina $I \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \varnothing\}$. Então I é finito e

$$|I| \leqslant |\Omega| \qquad \text{(cada } A_n \neq \varnothing \text{ “consome” um } \omega \text{ distinto).}$$

Exercício 1(a) — Resolução (σ-aditividade)

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^\Omega$ são dois a dois disjuntos, então (pelo argumento anterior) apenas finitos A_n podem ser não vazios.
Defina $I := \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \varnothing\}$. Então I é finito e

$$|I| \leqslant |\Omega| \qquad \text{(cada } A_n \neq \varnothing \text{ “consome” um } \omega \text{ distinto).}$$

Se $I = \varnothing$, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ e a igualdade é trivial. Caso contrário, seja $N := \max I$. Então $A_n = \varnothing$ para todo $n > N$ $\qquad$ (I finito $\Rightarrow$ tem máximo).

Exercício 1(a) — Resolução (σ-aditividade)

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^\Omega$ são dois a dois disjuntos, então (pelo argumento anterior) apenas finitos A_n podem ser não vazios.
Defina $I \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \varnothing\}$. Então I é finito e

$$|I| \leqslant |\Omega| \qquad \text{(cada } A_n \neq \varnothing \text{ “consome” um } \omega \text{ distinto).}$$

Se $I = \varnothing$, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ e a igualdade é trivial. Caso contrário, seja $N \coloneqq \max I$. Então $A_n = \varnothing$ para todo $n > N$ (I finito $\Rightarrow$ tem máximo).
Logo,

$$S\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = S\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \qquad \text{(apenas } A_1, \ldots, A_N \text{ podem ser não vazios).}$$

Exercício 1(a) — Resolução (σ-aditividade)

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^\Omega$ são dois a dois disjuntos, então (pelo argumento anterior) apenas finitos A_n podem ser não vazios.
Defina $I \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \varnothing\}$. Então I é finito e

$$|I| \leqslant |\Omega| \qquad \text{(cada } A_n \neq \varnothing \text{ “consome” um } \omega \text{ distinto).}$$

Se $I = \varnothing$, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ e a igualdade é trivial. Caso contrário, seja $N \coloneqq \max I$. Então $A_n = \varnothing$ para todo $n > N$ $\qquad$ (I finito $\Rightarrow$ tem máximo).
Logo,

$$S\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = S\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \qquad \text{(apenas } A_1, \ldots, A_N \text{ podem ser não vazios).}$$

Como $A_1, \ldots, A_N$ são disjuntos,

$$S\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{\omega \in \cup_{n=1}^{N} A_n} p_\omega = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega \in A_n} p_\omega \qquad \text{(união disjunta).}$$

Exercício 1(a) — Resolução (σ-aditividade)

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^{\Omega}$ são dois a dois disjuntos, então (pelo argumento anterior) apenas finitos A_n podem ser não vazios.
Defina $I \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \varnothing\}$. Então I é finito e

$$|I| \leqslant |\Omega| \qquad \text{(cada } A_n \neq \varnothing \text{ “consome” um } \omega \text{ distinto).}$$

Se $I = \varnothing$, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ e a igualdade é trivial. Caso contrário, seja $N \coloneqq \max I$. Então $A_n = \varnothing$ para todo $n > N$ $\qquad$ (I finito $\Rightarrow$ tem máximo).
Logo,

$$S\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = S\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \qquad \text{(apenas } A_1, \ldots, A_N \text{ podem ser não vazios).}$$

Como $A_1, \ldots, A_N$ são disjuntos,

$$S\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{\omega\in\cup_{n=1}^{N} A_n} p_\omega = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\omega\in A_n} p_\omega \qquad \text{(união disjunta).}$$

Exercício 1(b) — Enunciado

Enunciado

Mostre que a medida S é a única extensão possível de $\{\{a\} : a \in \mathcal{A}\}$ para 2^Ω que preserva as probabilidades $\{p_a\}_a$, no seguinte sentido: qualquer outra medida H sobre 2^Ω que satisfaz $H[\{a\}] = p_a, \, , \forall a \in \Omega \,$, é tal que $H = S$.

Exercício 1(b) — Resolução (unicidade)

Se $A = \varnothing$, então

$$H(A) = H(\varnothing) = 0 = S(\varnothing) \qquad \text{(propriedade de medida).}$$

Exercício 1(b) — Resolução (unicidade)

Se $A = \varnothing$, então

$$H(A) = H(\varnothing) = 0 = S(\varnothing) \qquad \text{(propriedade de medida).}$$

Se $A \neq \varnothing$, como Ω é finito, escreva $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant |\Omega|$

Exercício 1(b) — Resolução (unicidade)

Se $A = \varnothing$, então

$$H(A) = H(\varnothing) = 0 = S(\varnothing) \qquad \text{(propriedade de medida).}$$

Se $A \neq \varnothing$, como Ω é finito, escreva $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant |\Omega|$
Os conjuntos $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_k\}$ são dois a dois disjuntos e $A = \bigcup_{i=1}^{k}\{\omega_i\}$.
Assim,

$$H(A) = H\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} H(\{\omega_i\}) \qquad (\sigma\text{-aditividade}).$$

Exercício 1(b) — Resolução (unicidade)

Se $A = \varnothing$, então

$$H(A) = H(\varnothing) = 0 = S(\varnothing) \qquad \text{(propriedade de medida).}$$

Se $A \neq \varnothing$, como Ω é finito, escreva $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant |\Omega|$
Os conjuntos $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_k\}$ são dois a dois disjuntos e $A = \bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}$.
Assim,

$$H(A) = H\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} H(\{\omega_i\}) \qquad (\sigma\text{-aditividade}).$$

Usando $H(\{\omega\}) = p_\omega$,

$$H(A) = \sum_{i=1}^{k} p_{\omega_i} = \sum_{\omega \in A} p_\omega = S(A) \qquad \text{(definição de } S\text{).}$$

Exercício 1(b) — Resolução (unicidade)

Se $A = \varnothing$, então

$$H(A) = H(\varnothing) = 0 = S(\varnothing) \qquad \text{(propriedade de medida).}$$

Se $A \neq \varnothing$, como Ω é finito, escreva $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant |\Omega|$
Os conjuntos $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_k\}$ são dois a dois disjuntos e $A = \bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}$.
Assim,

$$H(A) = H\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} H(\{\omega_i\}) \qquad (\sigma\text{-aditividade}).$$

Usando $H(\{\omega\}) = p_\omega$,

$$H(A) = \sum_{i=1}^{k} p_{\omega_i} = \sum_{\omega \in A} p_\omega = S(A) \qquad \text{(definição de } S\text{).}$$

Logo, $H(A) = S(A)$ para todo $A \subseteq \Omega$, isto é, $H \equiv S$.

Exercício 1(c) — Enunciado

Enunciado

Mostre que, tomando como base o espaço mensurável $(\Omega, 2^{\Omega})$, qualquer função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ constitui uma variável aleatória.

Exercício 1(c) — Resolução (mensurabilidade)

Para f ser variável aleatória, basta verificar que f é $2^\Omega/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável:

$$f^{-1}(B) \in 2^\Omega, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(definição)}.$$

Exercício 1(c) — Resolução (mensurabilidade)

Para f ser variável aleatória, basta verificar que f é $2^\Omega/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável:

$$f^{-1}(B) \in 2^\Omega, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(definição)}.$$

Mas, para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(B) \subseteq \Omega \qquad \text{(imagem inversa vive no domínio)}.$$

Exercício 1(c) — Resolução (mensurabilidade)

Para f ser variável aleatória, basta verificar que f é $2^\Omega/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável:

$$f^{-1}(B) \in 2^\Omega, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(definição)}.$$

Mas, para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(B) \subseteq \Omega \qquad \text{(imagem inversa vive no domínio)}.$$

Como 2^Ω é o conjunto de *todos* os subconjuntos de Ω,

$$f^{-1}(B) \subseteq \Omega \implies f^{-1}(B) \in 2^\Omega \qquad \text{(definição de } 2^\Omega\text{)}.$$

Exercício 1(c) — Resolução (mensurabilidade)

Para f ser variável aleatória, basta verificar que f é $2^\Omega/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável:

$$f^{-1}(B) \in 2^\Omega, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(definição).}$$

Mas, para qualquer $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(B) \subseteq \Omega \qquad \text{(imagem inversa vive no domínio).}$$

Como 2^Ω é o conjunto de *todos* os subconjuntos de Ω,

$$f^{-1}(B) \subseteq \Omega \implies f^{-1}(B) \in 2^\Omega \qquad \text{(definição de } 2^\Omega\text{).}$$

Assim, $f^{-1}(B) \in 2^\Omega$ para todo boreliano B, e f é variável aleatória.

Construção de $((0,1], \mathcal{B}(0,1], \widetilde{\text{Leb}})$

Exercício 2

O objetivo destes exercícios consiste em construir o espaço $((0,1], \mathcal{B}(0,1], \widetilde{\text{Leb}})$.

Exercício 2(a) — Enunciado

Enunciado

Considere o conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $(0,1]$ da forma:

$$\cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\,,$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq 1$. Mostre que esse conjunto $\mathcal{A}$ forma uma **álgebra**, no seguinte sentido: (1) $(0,1], \emptyset \in \mathcal{A}$; (2) se $A \in \mathcal{A}$, então $A^{\complement} \in \mathcal{A}$; e (3) sejam $A_1, A_2, \ldots A_k$ elementos de $\mathcal{A}$, com $k < \infty$, então $\cup_{l=1}^{k} A_l \in \mathcal{A}$.

Item 2(a) — Resolução: a álgebra $\mathcal{A}$

Defina

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \subset (0,1] : n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant 1 \right\}.$$

Item 2(a) — Resolução: a álgebra $\mathcal{A}$

Defina

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \subset (0,1] : n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant 1 \right\}.$$

- A ordenação $b_i \leqslant a_{i+1}$ garante que os intervalos são **disjuntos**:

$$(a_i, b_i] \cap (a_{i+1}, b_{i+1}] = \varnothing \qquad (b_i \leqslant a_{i+1} \text{ e lado esquerdo aberto}).$$

Item 2(a) — Resolução: (1) $(0,1], \varnothing \in \mathcal{A}$

- Temos $(0,1] = (0,1]$ com $n = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, logo $(0,1] \in \mathcal{A}$ (definição de $\mathcal{A}$).

Item 2(a) — Resolução: (1) $(0,1], \varnothing \in \mathcal{A}$

- Temos $(0,1] = (0,1]$ com $n = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, logo $(0,1] \in \mathcal{A}$ (definição de $\mathcal{A}$).
- Além disso, para qualquer $a \in [0,1]$,

$$(a,a] = \varnothing \qquad \text{(intervalo degenerado)},$$

logo $\varnothing \in \mathcal{A}$ (definição de $\mathcal{A}$).

Item 2(a) — Resolução: (2) fechamento por complemento

Se $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathcal{A}$, então o complemento relativo em $(0,1]$ é

$$(0,1] \setminus A = (0, a_1] \ \cup \ \bigcup_{i=1}^{n-1}(b_i, a_{i+1}] \ \cup \ (b_n, 1].$$

Item 2(a) — Resolução: (2) fechamento por complemento

Se $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathcal{A}$, então o complemento relativo em $(0,1]$ é

$$(0,1] \setminus A = (0, a_1] \;\cup\; \bigcup_{i=1}^{n-1}(b_i, a_{i+1}] \;\cup\; (b_n, 1].$$

- Cada parcela é do tipo $(\alpha, \beta]$ com $\alpha \leqslant \beta$ (forma dos termos).

Item 2(a) — Resolução: (2) fechamento por complemento

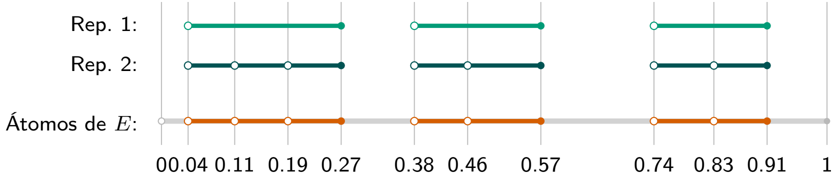
Se $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \in \mathcal{A}$, então o complemento relativo em $(0,1]$ é

$$(0,1] \setminus A = (0, a_1] \;\cup\; \bigcup_{i=1}^{n-1}(b_i, a_{i+1}] \;\cup\; (b_n, 1].$$

- Cada parcela é do tipo $(\alpha, \beta]$ com $\alpha \leqslant \beta$ (forma dos termos).
- A ordenação dos extremos é preservada:

$0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad (0,1]\backslash A \in \mathcal{A}$ (definição de $\mathcal{A}$).

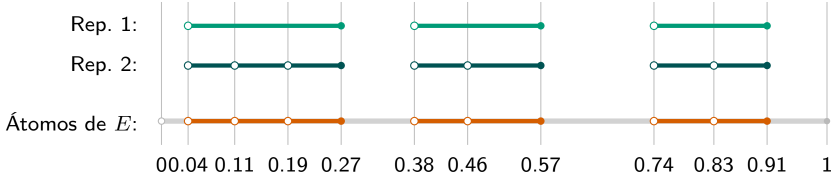
Conjunto de extremos: exemplo numérico (refinamento comum)



Aquecimento

A Rep. 2 só "granulariza" a Rep. 1: os pontos extras $0.11, 0.19, 0.46, 0.83$ apenas *quebram* intervalos, sem mudar A.

Conjunto de extremos: exemplo numérico (refinamento comum)



Aquecimento

A Rep. 2 só "granulariza" a Rep. 1: os pontos extras $0.11, 0.19, 0.46, 0.83$ apenas *quebram* intervalos, sem mudar A.
Forme o conjunto finito de extremos

$$E = \{0, 1, 0.04, 0.11, 0.19, 0.27, 0.38, 0.46, 0.57, 0.74, 0.83, 0.91\}.$$

Ordenando: $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{11} = 1$ (ordenação finita). Os átomos são $I_j = (x_{j-1}, x_j]$ e

$$A = I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_9 \cup I_{10} \qquad \text{(refinamento comum das duas reps.)}.$$

Item 2(a) — Resolução: (3) fechamento por uniões finitas

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, com $k < \infty$, e escreva

$$A_r = \bigcup_{i=1}^{n_r} \left(a_i^{(r)},\, b_i^{(r)}\right], \qquad r = 1, \ldots, k,$$

com os extremos ordenados em cada A_r (definição de $\mathcal{A}$).

Item 2(a) — Resolução: (3) fechamento por uniões finitas

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, com $k < \infty$, e escreva

$$A_r = \bigcup_{i=1}^{n_r} \left(a_i^{(r)},\, b_i^{(r)}\right], \qquad r = 1, \ldots, k,$$

com os extremos ordenados em cada A_r (definição de $\mathcal{A}$).
Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \bigcup_{r=1}^{k} \left\{a_i^{(r)}, b_i^{(r)} : 1 \leqslant i \leqslant n_r\right\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ (ordenação finita).

Item 2(a) — Resolução: (3) fechamento por uniões finitas

Sejam $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, com $k < \infty$, e escreva

$$A_r = \bigcup_{i=1}^{n_r} \left(a_i^{(r)},\, b_i^{(r)}\right], \qquad r = 1, \dots, k,$$

com os extremos ordenados em cada A_r (definição de $\mathcal{A}$).
Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \bigcup_{r=1}^{k} \left\{a_i^{(r)}, b_i^{(r)} : 1 \leqslant i \leqslant n_r\right\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ (ordenação finita).
Defina os *átomos*:

$$I_j := (x_{j-1}, x_j], \qquad j = 1, \dots, m.$$

Eles particionam $(0, 1]$ (partição por extremos).

Item 2(a) — Resolução: (3) fechamento por uniões finitas

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, com $k < \infty$, e escreva

$$A_r = \bigcup_{i=1}^{n_r} \left(a_i^{(r)},\, b_i^{(r)}\right], \qquad r = 1, \ldots, k,$$

com os extremos ordenados em cada A_r (definição de $\mathcal{A}$).
Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \bigcup_{r=1}^{k} \left\{a_i^{(r)}, b_i^{(r)} : 1 \leqslant i \leqslant n_r\right\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ (ordenação finita).
Defina os *átomos*:

$$I_j := (x_{j-1}, x_j], \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Eles particionam $(0, 1]$ (partição por extremos).

Item 2(a) — Resolução: (3) fechamento por uniões finitas

Como todo extremo de todo intervalo de cada A_r pertence a E, cada A_r é união de alguns I_j:

$$A_r = \bigcup_{j \in K_r} I_j \qquad \text{(refinamento comum)}.$$

Item 2(a) — Resolução: (3) fechamento por uniões finitas

Como todo extremo de todo intervalo de cada A_r pertence a E, cada A_r é união de alguns I_j:

$$A_r = \bigcup_{j \in K_r} I_j \qquad \text{(refinamento comum)}.$$

Logo,

$$\bigcup_{r=1}^{k} A_r = \bigcup_{r=1}^{k} \bigcup_{j \in K_r} I_j,$$

uma união **finita** de intervalos do tipo $(\alpha, \beta]$. Reordenando e, se quiser, agrupando intervalos consecutivos, obtemos um elemento de $\mathcal{A}$ (definição de $\mathcal{A}$).

Item 2(b) — Enunciado

Enunciado

Defina a função $\widetilde{\mathrm{Leb}} : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$, da seguinte forma. Se $A = \cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$, então

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(A) = \sum_{l=1}^{n}(b_i - a_i)\,.$$

Mostre que $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ está bem definida, isto é, que o valor de $\widetilde{\mathrm{Leb}}(A)$ é o mesmo para duas representações distintas de um mesmo conjunto A em termos de união de intervalos disjuntos; e que $\widetilde{\mathrm{Leb}}(\emptyset) = 0$ e $\widetilde{\mathrm{Leb}}(0,1] = 1$.

Item 2(b) — Resolução: definição de $\widetilde{\text{Leb}}$

Para $A \in \mathcal{A}$ com representação

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i],$$

definimos

$$\widetilde{\text{Leb}}(A) := \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \qquad \text{(soma dos comprimentos).}$$

Item 2(b) — Resolução: definição de $\widetilde{\mathrm{Leb}}$

Para $A \in \mathcal{A}$ com representação

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i],$$

definimos

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(A) := \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \qquad \text{(soma dos comprimentos).}$$

A questão é: esse valor depende (ou não) da *representação* escolhida?

Item 2(b) — Resolução: bem-definição (via extremos)

Suponha que o mesmo conjunto A tenha duas representações disjuntas:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j].$$

Item 2(b) — Resolução: bem-definição (via extremos)

Suponha que o mesmo conjunto A tenha duas representações disjuntas:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j].$$

Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{c_j, d_j : 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$ (ordenação finita).

Item 2(b) — Resolução: bem-definição (via extremos)

Suponha que o mesmo conjunto A tenha duas representações disjuntas:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j].$$

Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{c_j, d_j : 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$ (ordenação finita).
Defina os átomos $I_k := (x_{k-1}, x_k]$. Então

$$(0, 1] = \bigcup_{k=1}^{r} I_k \quad \text{(união disjunta)}.$$

Item 2(b) — Resolução: bem-definição (via extremos)

Suponha que o mesmo conjunto A tenha duas representações disjuntas:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j].$$

Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{c_j, d_j : 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$ (ordenação finita).
Defina os átomos $I_k := (x_{k-1}, x_k]$. Então

$$(0, 1] = \bigcup_{k=1}^{r} I_k \quad \text{(união disjunta)}.$$

Como A é o mesmo conjunto nas duas representações, existe $K \subseteq \{1, \ldots, r\}$ tal que

$$A = \bigcup_{k \in K} I_k \qquad \text{(refinamento comum)}.$$

Item 2(b) — Resolução: bem-definição (via extremos)

Suponha que o mesmo conjunto A tenha duas representações disjuntas:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \qquad \text{e} \qquad A = \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j].$$

Considere o conjunto finito de extremos

$$E := \{0, 1\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{c_j, d_j : 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

e ordene E como $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = 1$ (ordenação finita).
Defina os átomos $I_k := (x_{k-1}, x_k]$. Então

$$(0, 1] = \bigcup_{k=1}^{r} I_k \quad \text{(união disjunta).}$$

Como A é o mesmo conjunto nas duas representações, existe $K \subseteq \{1, \dots, r\}$ tal que

$$A = \bigcup_{k \in K} I_k \qquad \text{(refinamento comum).}$$

Item 2(b) — Resolução: bem-definição (via extremos)

Pela primeira representação:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}).$$

Pela segunda

$$\sum_{j=1}^{m}(d_j - c_j) = \sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}).$$

Item 2(b) — Resolução: bem-definição (via extremos)

Pela primeira representação:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}).$$

Pela segunda

$$\sum_{j=1}^{m}(d_j - c_j) = \sum_{k\in K}(x_k - x_{k-1}).$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{j=1}^{m}(d_j - c_j),$$

e $\widetilde{\mathrm{Leb}}(A)$ independe da representação (bem-definição).

Item 2(b) — Resolução: $\widetilde{\text{Leb}}(\varnothing)$ e $\widetilde{\text{Leb}}((0,1])$

- $\varnothing = (a, a]$, então

$$\widetilde{\text{Leb}}(\varnothing) = a - a = 0 \qquad \text{(intervalo degenerado)}.$$

Item 2(b) — Resolução: $\widetilde{\text{Leb}}(\varnothing)$ e $\widetilde{\text{Leb}}((0,1])$

- $\varnothing = (a, a]$, então

$$\widetilde{\text{Leb}}(\varnothing) = a - a = 0 \qquad \text{(intervalo degenerado).}$$

- $(0,1] = (0,1]$, então

$$\widetilde{\text{Leb}}((0,1]) = 1 - 0 = 1 \qquad \text{(definição).}$$

Item 2(b) — Resolução: $\widetilde{\mathrm{Leb}}(\varnothing)$ e $\widetilde{\mathrm{Leb}}((0,1])$

- $\varnothing = (a, a]$, então

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(\varnothing) = a - a = 0 \qquad \text{(intervalo degenerado).}$$

- $(0,1] = (0,1]$, então

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}((0,1]) = 1 - 0 = 1 \qquad \text{(definição).}$$

- Se $A = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ é união disjunta, então

$$0 \leqslant \widetilde{\mathrm{Leb}}(A) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant 1 \qquad \text{(disjunção e } A \subseteq (0,1]\text{).}$$

Item 2(c) — Enunciado

Enunciado

Mostre que $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é **aditiva** em $\mathcal{A}$, isto é, para $A_1, A_2, \ldots A_k$, $k < \infty$, elementos **disjuntos** de $\mathcal{A}$:

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(\cup_{l=1}^{k} A_l) = \sum_{l=1}^{k} \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_l)$$

Item 2(c) — Resolução: aditividade finita em $\mathcal{A}$

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Escolha representações disjuntas

$$A_\ell = \bigcup_{i=1}^{n_\ell} (a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}], \qquad \ell = 1, \ldots, k.$$

Item 2(c) — Resolução: aditividade finita em $\mathcal{A}$

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Escolha representações disjuntas

$$A_\ell = \bigcup_{i=1}^{n_\ell} (a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}], \qquad \ell = 1, \ldots, k.$$

Como os A_ℓ são disjuntos, toda a família de intervalos $\{(a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}]\}_{\ell,i}$ é disjunta.

Item 2(c) — Resolução: aditividade finita em $\mathcal{A}$

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Escolha representações disjuntas

$$A_\ell = \bigcup_{i=1}^{n_\ell} (a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}], \qquad \ell = 1, \ldots, k.$$

Como os A_ℓ são disjuntos, toda a família de intervalos $\{(a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}]\}_{\ell,i}$ é disjunta.
Logo,

$$\bigcup_{\ell=1}^{k} A_\ell = \bigcup_{\ell=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{n_\ell} (a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}] \quad \text{(união disjunta)}.$$

Item 2(c) — Resolução: aditividade finita em $\mathcal{A}$

Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos. Escolha representações disjuntas

$$A_\ell = \bigcup_{i=1}^{n_\ell} (a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}], \qquad \ell = 1, \ldots, k.$$

Como os A_ℓ são disjuntos, toda a família de intervalos $\{(a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}]\}_{\ell,i}$ é disjunta.
Logo,

$$\bigcup_{\ell=1}^{k} A_\ell = \bigcup_{\ell=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{n_\ell} (a_i^{(\ell)}, b_i^{(\ell)}] \quad \text{(união disjunta).}$$

Pela definição de $\widetilde{\mathrm{Leb}}$,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(\bigcup_{\ell=1}^{k} A_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_\ell} (b_i^{(\ell)} - a_i^{(\ell)}) = \sum_{\ell=1}^{k} \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell)$$

Item 2(d) — Enunciado

Enunciado

Usando o resultado anterior, mostre que $\widetilde{\text{Leb}}$ é enumeravelmente **aditiva** em $\mathcal{A}$, isto é, para $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^\infty$, $A_j \cap A_i = \emptyset$ se $i \neq j$, e tal que $\cup_{l=1}^\infty A_l \in \mathcal{A}$:

$$\widetilde{\text{Leb}}(\cup_{l=1}^\infty A_l) = \sum_{l=1}^\infty \widetilde{\text{Leb}}(A_l)$$

Dica: para os itens (c) e (d), veja o Teorema 1.3 em Billingsley (1995), "Probability and Measure".

Item 2(d) — Resolução: ideia (reduzir ao caso de intervalos)

Sejam $(A_\ell)_{\ell\geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e

$$U := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \in \mathcal{A}.$$

Item 2(d) — Resolução: ideia (reduzir ao caso de intervalos)

Sejam $(A_\ell)_{\ell \geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e

$$U := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \in \mathcal{A}.$$

Como $U \in \mathcal{A}$, existe uma decomposição finita disjunta:

$$U = \bigcup_{s=1}^{m} J_s, \qquad J_s = (\alpha_s, \beta_s] \qquad \text{(definição de } \mathcal{A}\text{)}.$$

Item 2(d) — Resolução: ideia (reduzir ao caso de intervalos)

Sejam $(A_\ell)_{\ell \geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e

$$U := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \in \mathcal{A}.$$

Como $U \in \mathcal{A}$, existe uma decomposição finita disjunta:

$$U = \bigcup_{s=1}^{m} J_s, \qquad J_s = (\alpha_s, \beta_s] \qquad \text{(definição de } \mathcal{A}\text{)}.$$

Defina, para cada s e ℓ,

$$A_\ell^{(s)} := A_\ell \cap J_s.$$

Então, para cada ℓ,

$$A_\ell = \bigcup_{s=1}^{m} A_\ell^{(s)} \quad \text{(união disjunta)} \qquad \text{(pois } J_1, \dots, J_m \text{ são disjuntos)}.$$

Item 2(d) — Resolução: ideia (reduzir ao caso de intervalos)

Sejam $(A_\ell)_{\ell \geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e

$$U := \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell \in \mathcal{A}.$$

Como $U \in \mathcal{A}$, existe uma decomposição finita disjunta:

$$U = \bigcup_{s=1}^{m} J_s, \qquad J_s = (\alpha_s, \beta_s] \qquad \text{(definição de } \mathcal{A}\text{)}.$$

Defina, para cada s e ℓ,

$$A_\ell^{(s)} := A_\ell \cap J_s.$$

Então, para cada ℓ,

$$A_\ell = \bigcup_{s=1}^{m} A_\ell^{(s)} \quad \text{(união disjunta)} \qquad \text{(pois } J_1, \dots, J_m \text{ são disjuntos)}.$$

Item 2(d) — Resolução: ideia (reduzir ao caso de intervalos)

E, para cada s,

$$J_s = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell^{(s)} \quad \text{(união disjunta)} \qquad \text{(pois } U = \cup_\ell A_\ell\text{)}.$$

Item 2(d) — Resolução: concluir a aditividade enumerável

Pelo Teorema 1.3 (Billingsley, 1995), para cada s,

$$\widetilde{\text{Leb}}(J_s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\text{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right) \qquad \text{(união disjunta com união } J_s\text{)}.$$

[1] Propriedade de séries absolutamente convergentes (como todos os termos são não-negativos, é o caso).

Item 2(d) — Resolução: concluir a aditividade enumerável

Pelo Teorema 1.3 (Billingsley, 1995), para cada s,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(J_s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right) \qquad \text{(união disjunta com união } J_s\text{)}.$$

Somando em s e usando que $m < \infty$,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(U) = \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\mathrm{Leb}}(J_s) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right).$$

[1] Propriedade de séries absolutamente convergentes (como todos os termos são não-negativos, é o caso).

Item 2(d) — Resolução: concluir a aditividade enumerável

Pelo Teorema 1.3 (Billingsley, 1995), para cada s,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(J_s) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right) \qquad \text{(união disjunta com união } J_s\text{)}.$$

Somando em s e usando que $m < \infty$,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}(U) = \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\mathrm{Leb}}(J_s) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right).$$

Como os termos são não-negativos, podemos trocar a ordem das somas[1]:

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{m} \widetilde{\mathrm{Leb}}\left(A_\ell^{(s)}\right)$$

[1] Propriedade de séries absolutamente convergentes (como todos os termos são não-negativos, é o caso).

Item 2(d) — Resolução: concluir a aditividade enumerável

Pela aditividade finita (item (c)),

$$\sum_{s=1}^{m} \widetilde{\mathrm{Leb}}\Big(A_\ell^{(s)}\Big) = \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell) \qquad \text{(pois } A_\ell = \cup_{s=1}^{m} A_\ell^{(s)} \text{ é disjunta).}$$

Item 2(d) — Resolução: concluir a aditividade enumerável

Pela aditividade finita (item (c)),

$$\sum_{s=1}^{m} \widetilde{\mathrm{Leb}}\Big(A_\ell^{(s)}\Big) = \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell) \qquad \text{(pois } A_\ell = \cup_{s=1}^{m} A_\ell^{(s)} \text{ é disjunta).}$$

Logo,

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}\left(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} A_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{Leb}}(A_\ell),$$

isto é, $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é enumeravelmente aditiva em $\mathcal{A}$ sob a hipótese $U \in \mathcal{A}$.

Item 2(e) — Enunciado

Enunciado

Recorra ao Teorema 1.7 de Williams (1991), "Probability with Martingales" para concluir que existe uma única medida de probabilidade que estende $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ a $\mathcal{B}(0, 1]$.

Item 2(e) — Resolução: Extensão de Carathéodory (Williams)

O Teorema 1.7 (Williams) diz, em essência:

Carathéodory (forma útil aqui)

Se Σ_0 é uma *álgebra* em S e $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0, \infty]$ é uma *pré-medida* (enumeravelmente aditiva quando a união pertence a Σ_0), então existe uma medida μ em $(S, \sigma(\Sigma_0))$ tal que $\mu = \mu_0$ em Σ_0. Se $\mu_0(S) < \infty$, essa extensão é **única**.

Item 2(e) — Resolução: Extensão de Carathéodory (Williams)

O Teorema 1.7 (Williams) diz, em essência:

Carathéodory (forma útil aqui)

Se Σ_0 é uma *álgebra* em S e $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0, \infty]$ é uma *pré-medida* (enumeravelmente aditiva quando a união pertence a Σ_0), então existe uma medida μ em $(S, \sigma(\Sigma_0))$ tal que $\mu = \mu_0$ em Σ_0. Se $\mu_0(S) < \infty$, essa extensão é **única**.

Aqui, tomamos:

$$S = (0, 1], \quad \Sigma_0 = \mathcal{A}, \quad \mu_0 = \widetilde{\mathrm{Leb}}.$$

Item 2(e) — Resolução: Extensão de Carathéodory (Williams)

O Teorema 1.7 (Williams) diz, em essência:

Carathéodory (forma útil aqui)

Se Σ_0 é uma *álgebra* em S e $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0, \infty]$ é uma *pré-medida* (enumeravelmente aditiva quando a união pertence a Σ_0), então existe uma medida μ em $(S, \sigma(\Sigma_0))$ tal que $\mu = \mu_0$ em Σ_0. Se $\mu_0(S) < \infty$, essa extensão é **única**.

Aqui, tomamos:

$$S = (0, 1], \quad \Sigma_0 = \mathcal{A}, \quad \mu_0 = \widetilde{\mathrm{Leb}}.$$

Dos itens (a)–(d): $\mathcal{A}$ é álgebra, $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é pré-medida e

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}((0, 1]) = 1 < \infty \qquad \text{(item (b))}.$$

Item 2(e) — Resolução: Extensão de Carathéodory (Williams)

O Teorema 1.7 (Williams) diz, em essência:

Carathéodory (forma útil aqui)

Se Σ_0 é uma *álgebra* em S e $\mu_0 : \Sigma_0 \to [0, \infty]$ é uma *pré-medida* (enumeravelmente aditiva quando a união pertence a Σ_0), então existe uma medida μ em $(S, \sigma(\Sigma_0))$ tal que $\mu = \mu_0$ em Σ_0. Se $\mu_0(S) < \infty$, essa extensão é **única**.

Aqui, tomamos:

$$S = (0, 1], \quad \Sigma_0 = \mathcal{A}, \quad \mu_0 = \widetilde{\mathrm{Leb}}.$$

Dos itens (a)–(d): $\mathcal{A}$ é álgebra, $\widetilde{\mathrm{Leb}}$ é pré-medida e

$$\widetilde{\mathrm{Leb}}((0, 1]) = 1 < \infty \qquad \text{(item (b))}.$$

Logo, existe uma **única** medida de probabilidade μ em $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $\mu|_{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathrm{Leb}}$ (Williams 1.7).

Item 2(e) — Resolução: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0, 1]$

Resta provar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0, 1]$.

Item 2(e) — Resolução: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$

Resta provar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$.

- Primeira inclusão é simples,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(0,1] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(0,1] \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}.$$

Item 2(e) — Resolução: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$

Resta provar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$.

- Primeira inclusão é simples,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(0,1] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(0,1] \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}.$$

- Para a inclusão oposta, basta ver que *abertos* de $(0,1]$ pertencem a $\sigma(\mathcal{A})$, pois eles geram $\mathcal{B}(0,1]$.

Item 2(e) — Resolução: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$

Resta provar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$.

- Primeira inclusão é simples,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(0,1] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(0,1] \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}.$$

- Para a inclusão oposta, basta ver que *abertos* de $(0,1]$ pertencem a $\sigma(\mathcal{A})$, pois eles geram $\mathcal{B}(0,1]$.
- Se $a < b$, então

$$(a,b) = \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q} \\ a<p<q<b}} (p,q] \qquad \text{(base racional; união enumerável)}.$$

Como cada $(p,q] \in \mathcal{A}$, segue que $(a,b) \in \sigma(\mathcal{A})$ (fechamento por uniões enumeráveis).

Item 2(e) — Resolução: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$

Resta provar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$.

- Primeira inclusão é simples,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(0,1] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(0,1] \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}.$$

- Para a inclusão oposta, basta ver que *abertos* de $(0,1]$ pertencem a $\sigma(\mathcal{A})$, pois eles geram $\mathcal{B}(0,1]$.
- Se $a < b$, então

$$(a,b) = \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q} \\ a<p<q<b}} (p,q] \qquad \text{(base racional; união enumerável)}.$$

  Como cada $(p,q] \in \mathcal{A}$, segue que $(a,b) \in \sigma(\mathcal{A})$ (fechamento por uniões enumeráveis).
- Todo aberto de $(0,1]$ é união enumerável de intervalos abertos da forma (a,b), logo pertence a $\sigma(\mathcal{A})$, e portanto

$$\mathcal{B}(0,1] \subseteq \sigma(\mathcal{A}).$$

Item 2(e) — Resolução: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$

Resta provar que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$.

- Primeira inclusão é simples,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(0,1] \quad \Longrightarrow \quad \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(0,1] \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}.$$

- Para a inclusão oposta, basta ver que *abertos* de $(0,1]$ pertencem a $\sigma(\mathcal{A})$, pois eles geram $\mathcal{B}(0,1]$.
- Se $a < b$, então

$$(a,b) = \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q} \\ a<p<q<b}} (p,q] \qquad \text{(base racional; união enumerável)}.$$

  Como cada $(p,q] \in \mathcal{A}$, segue que $(a,b) \in \sigma(\mathcal{A})$ (fechamento por uniões enumeráveis).
- Todo aberto de $(0,1]$ é união enumerável de intervalos abertos da forma (a,b), logo pertence a $\sigma(\mathcal{A})$, e portanto

$$\mathcal{B}(0,1] \subseteq \sigma(\mathcal{A}).$$

Item 2(e) — Resolução: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1]$

Provamos:

$$\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(0,1],$$
$$\sigma(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{B}(0,1].$$

Concluímos então:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(0,1].$$

Assim, a extensão μ é uma medida de probabilidade em $((0,1], \mathcal{B}(0,1])$ que estende $\widetilde{\mathrm{Leb}}$.

Exercício 3 — fora de $\mathcal{B}(0,1]$

Enunciado

O objetivo deste exercício consiste em mostrar que existem conjuntos que não estão em $\mathcal{B}(0,1]$. Para começar, definamos a seguinte operação entre dois números $x, y \in (0,1]$.

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y\,, & \text{se } x+y \leqslant 1 \\ x+y-1\,, & \text{se } x+y > 1 \end{cases}$$

É possível mostrar (não faremos isso) que, para todo $x \in (0,1]$ e $A \in \mathcal{B}[0,1)$, o conjunto $A \oplus x := \{a \oplus x : x \in A\}$ é mensurável (i.e. $A \oplus x \in \mathcal{B}[0,1)$) e que $\mathrm{Leb}(A \oplus x) = \mathrm{Leb}(A)$ (a medida de Lebesgue é invariante a translações).

(Obs.: interpretaremos $A \oplus x = \{a \oplus x : \ a \in A\}$.)

Item 3(a) — Enunciado

Enunciado

Defina a relação $\sim$ sobre $[0,1)$ da forma: $x \sim y \iff \exists r \in \mathbb{Q} \cap (0,1], x \oplus r = y$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência, i.e. reflexiva, simétrica e transitiva.

Item 3(a) — Resolução (roteiro)

Vamos provar: **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.

Item 3(a) — Resolução (roteiro)

Vamos provar: **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.
Pela definição, concluimos que:

- $x \oplus 1 = x$ para todo $x \in (0, 1]$:

$$x \oplus 1 = x + 1 - 1 = x \qquad (x + 1 > 1).$$

Item 3(a) — Resolução (roteiro)

Vamos provar: **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.
Pela definição, concluimos que:

- $x \oplus 1 = x$ para todo $x \in (0, 1]$:

$$x \oplus 1 = x + 1 - 1 = x \qquad (x + 1 > 1).$$

- $\oplus$ é associativa: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ ($\oplus$ só envolve $+$e $-$).

Item 3(a) — Resolução: reflexiva

Fixe $x \in (0,1]$. Tome $r = 1 \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$.

Item 3(a) — Resolução: reflexiva

Fixe $x \in (0, 1]$. Tome $r = 1 \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$.
Então

$$x \oplus r = x \oplus 1 = x$$

Item 3(a) — Resolução: reflexiva

Fixe $x \in (0,1]$. Tome $r = 1 \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$.
Então
$$x \oplus r = x \oplus 1 = x$$

Logo $x \sim x$.

Item 3(a) — Resolução: simétrica

Suponha $x \sim y$. Então existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$y = x \oplus r$$

Item 3(a) — Resolução: simétrica

Suponha $x \sim y$. Então existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$y = x \oplus r$$

Defina

$$r^* = \begin{cases} 1 - r, & r \in (0,1), \\ 1, & r = 1. \end{cases} \qquad (r^* \in \mathbb{Q} \cap (0,1]).$$

Item 3(a) — Resolução: simétrica

Suponha $x \sim y$. Então existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$y = x \oplus r$$

Defina

$$r^* = \begin{cases} 1 - r, & r \in (0,1), \\ 1, & r = 1. \end{cases} \qquad (r^* \in \mathbb{Q} \cap (0,1]).$$

Veja que

$$r \oplus r^* = 1$$

Item 3(a) — Resolução: simétrica

Suponha $x \sim y$. Então existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$y = x \oplus r$$

Defina

$$r^* = \begin{cases} 1 - r, & r \in (0,1), \\ 1, & r = 1. \end{cases} \qquad (r^* \in \mathbb{Q} \cap (0,1]).$$

Veja que

$$r \oplus r^* = 1$$

Então, pela associatividade:

$$y \oplus r^* = (x \oplus r) \oplus r^* = x \oplus (r \oplus r^*) = x \oplus 1 = x$$

Item 3(a) — Resolução: simétrica

Suponha $x \sim y$. Então existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$y = x \oplus r$$

Defina

$$r^* = \begin{cases} 1 - r, & r \in (0,1), \\ 1, & r = 1. \end{cases} \qquad (r^* \in \mathbb{Q} \cap (0,1]).$$

Veja que

$$r \oplus r^* = 1$$

Então, pela associatividade:

$$y \oplus r^* = (x \oplus r) \oplus r^* = x \oplus (r \oplus r^*) = x \oplus 1 = x$$

Logo $y \sim x$.

Item 3(a) — Resolução: transitiva

Suponha $x \sim y$ e $y \sim z$. Então existem $r, s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ tais que

$$y = x \oplus r \quad \text{e} \quad z = y \oplus s \qquad \text{(definição de } \sim\text{)}.$$

Item 3(a) — Resolução: transitiva

Suponha $x \sim y$ e $y \sim z$. Então existem $r, s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ tais que

$$y = x \oplus r \quad \text{e} \quad z = y \oplus s \qquad \text{(definição de } \sim\text{)}.$$

Defina $t := r \oplus s$. Explicitamente,

$$t = \begin{cases} r + s, & r + s \leqslant 1, \\ r + s - 1, & r + s > 1, \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]).$$

Item 3(a) — Resolução: transitiva

Suponha $x \sim y$ e $y \sim z$. Então existem $r, s \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tais que

$$y = x \oplus r \quad \text{e} \quad z = y \oplus s \qquad \text{(definição de } \sim\text{)}.$$

Defina $t := r \oplus s$. Explicitamente,

$$t = \begin{cases} r+s, & r+s \leqslant 1, \\ r+s-1, & r+s > 1, \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Q} \cap (0,1]).$$

Então, de novo pela associdade:

$$z = (x \oplus r) \oplus s = x \oplus (r \oplus s) = x \oplus t$$

Item 3(a) — Resolução: transitiva

Suponha $x \sim y$ e $y \sim z$. Então existem $r, s \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tais que

$$y = x \oplus r \quad \text{e} \quad z = y \oplus s \qquad \text{(definição de } \sim\text{)}.$$

Defina $t := r \oplus s$. Explicitamente,

$$t = \begin{cases} r + s, & r + s \leqslant 1, \\ r + s - 1, & r + s > 1, \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Q} \cap (0,1]).$$

Então, de novo pela associdade:

$$z = (x \oplus r) \oplus s = x \oplus (r \oplus s) = x \oplus t$$

Logo $x \sim z$.

Item 3(a) — Resolução: transitiva

Suponha $x \sim y$ e $y \sim z$. Então existem $r, s \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tais que

$$y = x \oplus r \quad \text{e} \quad z = y \oplus s \qquad \text{(definição de } \sim\text{)}.$$

Defina $t := r \oplus s$. Explicitamente,

$$t = \begin{cases} r+s, & r+s \leqslant 1, \\ r+s-1, & r+s > 1, \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Q} \cap (0,1]).$$

Então, de novo pela associdade:

$$z = (x \oplus r) \oplus s = x \oplus (r \oplus s) = x \oplus t$$

Logo $x \sim z$.
Concluímos que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva; portanto, uma relação de equivalência.

Item 3(b) — Enunciado

Enunciado

Para $x \in [0,1)$, defina a classe de equivalência $[x]_\sim = \{a \in [0,1] : a \sim x\}$. Mostre que, se $[x]_\sim \neq [y]_\sim$, então $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$, e que $\cup_{a \in (0,1]} [a]_\sim = (0,1]$. Conclua que a coleção $\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$ forma uma partição de $(0,1]$.

Item 3(b) — Resolução: classes distintas são disjuntas

Suponha, por contradição, que exista

$$z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim .$$

Item 3(b) — Resolução: classes distintas são disjuntas

Suponha, por contradição, que exista

$$z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim.$$

Então

$$z \sim x \quad \text{e} \quad z \sim y \qquad \text{(definição de } [x]_\sim\text{).}$$

Item 3(b) — Resolução: classes distintas são disjuntas

Suponha, por contradição, que exista

$$z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim .$$

Então

$$z \sim x \quad \text{e} \quad z \sim y \qquad \text{(definição de } [x]_\sim\text{)}.$$

Pela simetria (item (a)), $x \sim z$. Logo,

$$x \sim z \text{ e } z \sim y \implies x \sim y \qquad \text{(transitividade)}.$$

Item 3(b) — Resolução: classes distintas são disjuntas

Suponha, por contradição, que exista

$$z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim.$$

Então

$$z \sim x \quad \text{e} \quad z \sim y \qquad \text{(definição de } [x]_\sim\text{)}.$$

Pela simetria (item (a)), $x \sim z$. Logo,

$$x \sim z \text{ e } z \sim y \implies x \sim y \qquad \text{(transitividade)}.$$

Se $x \sim y$, então, para todo t,

$$t \sim x \iff t \sim y \qquad \text{(simetria + transitividade)}.$$

Item 3(b) — Resolução: classes distintas são disjuntas

Suponha, por contradição, que exista

$$z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim.$$

Então

$$z \sim x \quad \text{e} \quad z \sim y \qquad \text{(definição de } [x]_\sim\text{)}.$$

Pela simetria (item (a)), $x \sim z$. Logo,

$$x \sim z \text{ e } z \sim y \implies x \sim y \qquad \text{(transitividade)}.$$

Se $x \sim y$, então, para todo t,

$$t \sim x \iff t \sim y \qquad \text{(simetria + transitividade)}.$$

Portanto $[x]_\sim = [y]_\sim$, contradição.

Item 3(b) — Resolução: classes distintas são disjuntas

Concluímos: se $[x]_\sim \neq [y]_\sim$, então

$$[x]_\sim \cap [y]_\sim = \varnothing.$$

Item 3(b) — Resolução: união e partição

- A inclusão $\bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim \subseteq (0,1]$ é imediata, pois cada $[a]_\sim \subseteq (0,1]$.

Item 3(b) — Resolução: união e partição

- A inclusão $\bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim \subseteq (0,1]$ é imediata, pois cada $[a]_\sim \subseteq (0,1]$.
- Para a inclusão oposta, fixe $x \in (0,1]$. Pela reflexividade (item (a)), $x \sim x$, então
$$x \in [x]_\sim \subseteq \bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim$$

Item 3(b) — Resolução: união e partição

- A inclusão $\displaystyle\bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim \subseteq (0,1]$ é imediata, pois cada $[a]_\sim \subseteq (0,1]$.
- Para a inclusão oposta, fixe $x \in (0,1]$. Pela reflexividade (item (a)), $x \sim x$, então

$$x \in [x]_\sim \subseteq \bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim$$

- Logo

$$\bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim = (0,1].$$

Item 3(b) — Resolução: união e partição

- A inclusão $\bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim \subseteq (0,1]$ é imediata, pois cada $[a]_\sim \subseteq (0,1]$.
- Para a inclusão oposta, fixe $x \in (0,1]$. Pela reflexividade (item (a)), $x \sim x$, então
$$x \in [x]_\sim \subseteq \bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim$$
- Logo
$$\bigcup_{a\in(0,1]} [a]_\sim = (0,1].$$
- Como cada classe é não vazia, classes distintas são disjuntas e a união cobre $(0,1]$, concluímos que
$$\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$$
forma uma partição de $(0,1]$.

Item 3(c) — Enunciado

Enunciado

Considere o conjunto $H = \{h \in s : s \in \mathcal{S}\}$ que consiste em coletar um elemento de cada uma das classes de equivalência distintas de $\sim$. Considere os conjuntos $H_n = H \oplus r_n$, $n \in \mathbb{N}$, onde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma enumeração dos números racionais em $(0, 1]$. Mostre que os H_n são disjuntos, e que $\cup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0, 1]$.

Item 3(c) — Resolução: construção de H e dos H_n

Seja $\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$ a partição de $(0,1]$ do item (b).

Item 3(c) — Resolução: construção de H e dos H_n

Seja $\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$ a partição de $(0,1]$ do item (b). Escolha um representante $h_s \in s$ para cada $s \in \mathcal{S}$ e defina

$$H := \{h_s : \ s \in \mathcal{S}\}.$$

ITEM 3(C) — RESOLUÇÃO: CONSTRUÇÃO DE H E DOS H_n

Seja $\mathcal{S} = \{[a]_\sim : a \in (0,1]\}$ a partição de $(0,1]$ do item (b).
Escolha um representante $h_s \in s$ para cada $s \in \mathcal{S}$ e defina

$$H := \{h_s : \ s \in \mathcal{S}\}.$$

Fixe uma enumeração sem repetição $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q} \cap (0,1]$ e ponha

$$H_n := H \oplus r_n = \{h \oplus r_n : \ h \in H\}, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad \text{(definição)}$$

Item 3(c) — Resolução: os H_n são disjuntos

Suponha, por contradição, que exista

$$x \in H_m \cap H_n \quad \text{com} \quad m \neq n.$$

Item 3(c) — Resolução: os H_n são disjuntos

Suponha, por contradição, que exista

$$x \in H_m \cap H_n \quad \text{com} \quad m \neq n.$$

Então existem $h, h' \in H$ tais que

$$x = h \oplus r_m = h' \oplus r_n \qquad \text{(definição de } H_m, H_n\text{)}.$$

Item 3(c) — Resolução: os H_n são disjuntos

Suponha, por contradição, que exista

$$x \in H_m \cap H_n \quad \text{com} \quad m \neq n.$$

Então existem $h, h' \in H$ tais que

$$x = h \oplus r_m = h' \oplus r_n \qquad \text{(definição de } H_m, H_n\text{)}.$$

Logo $x \sim h$ e $x \sim h'$, então $h \sim h'$ (simetria + transitividade).

Item 3(c) — Resolução: os H_n são disjuntos

Suponha, por contradição, que exista

$$x \in H_m \cap H_n \quad \text{com} \quad m \neq n.$$

Então existem $h, h' \in H$ tais que

$$x = h \oplus r_m = h' \oplus r_n \qquad \text{(definição de } H_m, H_n\text{)}.$$

Logo $x \sim h$ e $x \sim h'$, então $h \sim h'$ (simetria + transitividade).
Como H tem *um único* representante por classe, segue que $h = h'$.

Item 3(c) — Resolução: os H_n são disjuntos

Suponha, por contradição, que exista

$$x \in H_m \cap H_n \quad \text{com} \quad m \neq n.$$

Então existem $h, h' \in H$ tais que

$$x = h \oplus r_m = h' \oplus r_n \qquad \text{(definição de } H_m, H_n\text{)}.$$

Logo $x \sim h$ e $x \sim h'$, então $h \sim h'$ (simetria + transitividade).
Como H tem *um único* representante por classe, segue que $h = h'$.
Escolha $s \in (0, 1]$ tal que $s \oplus h = 1$ (por exemplo, $s = 1 - h$ se $h < 1$ e $s = 1$ se $h = 1$). Então

$$s \oplus x = s \oplus (h \oplus r_m) = (s \oplus h) \oplus r_m = 1 \oplus r_m = r_m,$$

Item 3(c) — Resolução: os H_n são disjuntos

Suponha, por contradição, que exista

$$x \in H_m \cap H_n \quad \text{com} \quad m \neq n.$$

Então existem $h, h' \in H$ tais que

$$x = h \oplus r_m = h' \oplus r_n \qquad \text{(definição de } H_m, H_n\text{)}.$$

Logo $x \sim h$ e $x \sim h'$, então $h \sim h'$ (simetria + transitividade).
Como H tem *um único* representante por classe, segue que $h = h'$.
Escolha $s \in (0, 1]$ tal que $s \oplus h = 1$ (por exemplo, $s = 1 - h$ se $h < 1$ e $s = 1$ se $h = 1$). Então

$$s \oplus x = s \oplus (h \oplus r_m) = (s \oplus h) \oplus r_m = 1 \oplus r_m = r_m,$$

e também

$$s \oplus x = s \oplus (h \oplus r_n) = (s \oplus h) \oplus r_n = 1 \oplus r_n = r_n.$$

Item 3(c) — Resolução: os H_n são disjuntos

Suponha, por contradição, que exista

$$x \in H_m \cap H_n \quad \text{com} \quad m \neq n.$$

Então existem $h, h' \in H$ tais que

$$x = h \oplus r_m = h' \oplus r_n \qquad \text{(definição de } H_m, H_n\text{)}.$$

Logo $x \sim h$ e $x \sim h'$, então $h \sim h'$ (simetria + transitividade).
Como H tem *um único* representante por classe, segue que $h = h'$.
Escolha $s \in (0,1]$ tal que $s \oplus h = 1$ (por exemplo, $s = 1 - h$ se $h < 1$ e $s = 1$ se $h = 1$). Então

$$s \oplus x = s \oplus (h \oplus r_m) = (s \oplus h) \oplus r_m = 1 \oplus r_m = r_m,$$

e também

$$s \oplus x = s \oplus (h \oplus r_n) = (s \oplus h) \oplus r_n = 1 \oplus r_n = r_n.$$

Portanto $r_m = r_n$, contradizendo $m \neq n$. Logo, $H_m \cap H_n = \varnothing$ se $m \neq n$.

Item 3(c) — Resolução: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]$

Fixe $x \in (0,1]$. Considere sua classe $s = [x]_\sim \in \mathcal{S}$ e o representante $h_s \in H$.

Item 3(c) — Resolução: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]$

Fixe $x \in (0,1]$. Considere sua classe $s = [x]_\sim \in \mathcal{S}$ e o representante $h_s \in H$.
Como $h_s \sim x$, existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$x = h_s \oplus r \qquad \text{(definição de } \sim\text{)}.$$

Item 3(c) — Resolução: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]$

Fixe $x \in (0,1]$. Considere sua classe $s = [x]_\sim \in \mathcal{S}$ e o representante $h_s \in H$.
Como $h_s \sim x$, existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$x = h_s \oplus r \qquad \text{(definição de } \sim\text{).}$$

Escolha n tal que $r_n = r$. Então $x \in H \oplus r_n = H_n$ (definição de H_n).

Item 3(c) — Resolução: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]$

Fixe $x \in (0,1]$. Considere sua classe $s = [x]_\sim \in \mathcal{S}$ e o representante $h_s \in H$.
Como $h_s \sim x$, existe $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ tal que

$$x = h_s \oplus r \qquad \text{(definição de } \sim\text{)}.$$

Escolha n tal que $r_n = r$. Então $x \in H \oplus r_n = H_n$ (definição de H_n).
Logo,

$$(0,1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n.$$

A inclusão oposta é clara, então

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1].$$

Item 3(d) — Enunciado

Enunciado

Conclua que $H \notin \mathcal{B}(0,1]$. *Dica:* suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}(0,1]$, e use a igualdade do item anterior.

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Do item (c), os conjuntos $H_n := H \oplus r_n$ são dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]. \qquad \text{(item (c))}$$

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Do item (c), os conjuntos $H_n := H \oplus r_n$ são dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]. \qquad \text{(item (c))}$$

Suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}(0,1]$. Então, para todo n,

$$H_n = H \oplus r_n \in \mathcal{B}(0,1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Leb}(H_n) = \mathrm{Leb}(H) =: c,$$

Pois Leb é invariante por translações.

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Do item (c), os conjuntos $H_n := H \oplus r_n$ são dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]. \qquad \text{(item (c))}$$

Suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}(0,1]$. Então, para todo n,

$$H_n = H \oplus r_n \in \mathcal{B}(0,1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Leb}(H_n) = \mathrm{Leb}(H) =: c,$$

Pois Leb é invariante por translações.
Como os H_n são disjuntos, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Leb}(H_n) = \sum_{n=1}^{N} c = Nc$$

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Do item (c), os conjuntos $H_n := H \oplus r_n$ são dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]. \qquad \text{(item (c))}$$

Suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}(0,1]$. Então, para todo n,

$$H_n = H \oplus r_n \in \mathcal{B}(0,1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Leb}(H_n) = \mathrm{Leb}(H) =: c,$$

Pois Leb é invariante por translações.

Como os H_n são disjuntos, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Leb}(H_n) = \sum_{n=1}^{N} c = Nc$$

Mas $\bigcup_{n=1}^{N} H_n \subseteq (0,1]$, então

$$Nc = \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) \leqslant \mathrm{Leb}((0,1]) = 1 \qquad \text{(monotonicidade).}$$

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Do item (c), os conjuntos $H_n := H \oplus r_n$ são dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]. \qquad \text{(item (c))}$$

Suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}(0,1]$. Então, para todo n,

$$H_n = H \oplus r_n \in \mathcal{B}(0,1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Leb}(H_n) = \mathrm{Leb}(H) =: c,$$

Pois Leb é invariante por translações.
Como os H_n são disjuntos, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Leb}(H_n) = \sum_{n=1}^{N} c = Nc$$

Mas $\bigcup_{n=1}^{N} H_n \subseteq (0,1]$, então

$$Nc = \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) \leqslant \mathrm{Leb}((0,1]) = 1 \qquad \text{(monotonicidade).}$$

Logo $Nc \leqslant 1$ para todo N, o que implica $c = 0$.

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Do item (c), os conjuntos $H_n := H \oplus r_n$ são dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n = (0,1]. \qquad \text{(item (c))}$$

Suponha, por contradição, que $H \in \mathcal{B}(0,1]$. Então, para todo n,

$$H_n = H \oplus r_n \in \mathcal{B}(0,1] \quad \text{e} \quad \mathrm{Leb}(H_n) = \mathrm{Leb}(H) =: c,$$

Pois Leb é invariante por translações.
Como os H_n são disjuntos, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Leb}(H_n) = \sum_{n=1}^{N} c = Nc$$

Mas $\bigcup_{n=1}^{N} H_n \subseteq (0,1]$, então

$$Nc = \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) \leqslant \mathrm{Leb}((0,1]) = 1 \qquad \text{(monotonicidade)}.$$

Logo $Nc \leqslant 1$ para todo N, o que implica $c = 0$.

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Então, pela continuidade por baixo,

$$1 = \mathrm{Leb}((0,1]) = \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} Nc = 0$$

contradição.

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Então, pela continuidade por baixo,

$$1 = \mathrm{Leb}((0,1]) = \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} Nc = 0$$

contradição.
Portanto,

$$H \notin \mathcal{B}(0,1].$$

Item 3(d) — Resolução: $H \notin \mathcal{B}(0,1]$

Então, pela continuidade por baixo,

$$1 = \mathrm{Leb}((0,1]) = \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Leb}\left(\bigcup_{n=1}^{N} H_n\right) = \lim_{N\to\infty} Nc = 0$$

contradição.
Portanto,

$$H \notin \mathcal{B}(0,1].$$

Comentário matemático:

H é um conjunto especial chamado **Conjunto de Vitali**.

A construção de H exige escolher *um representante* de cada classe de equivalência (uma família não enumerável de escolhas), o que é exatamente onde entra o **Axioma da Escolha**. Em modelos sem AC, pode ser consistente que *todo* subconjunto de $\mathbb{R}$ seja mensurável (em particular, não há conjuntos do tipo Vitali).

Exercício 4 – Extensão do lema do π-sistema — Enunciado

Enunciado

Prove a seguinte extensão do lema do π-sistema. Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável, e μ_1 e μ_2 duas medidas sobre Σ que são σ-finitas num conjunto $\mathcal{I}$, i.e. tais que existem $E_1, E_2, E_3 \ldots \in \mathcal{I}$ disjuntos com $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ com $\mu_1(E_i) < \infty$ e $\mu_2(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Prove que, se $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$, e $\mathcal{I}$ é um π-sistema que gera Σ, então $\mu_1 = \mu_2$.

Prova — ideia

Estratégia

1. Usar a decomposição $\Omega = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$ (com $E_i \in \mathcal{I}$ disjuntos e medidas finitas em cada E_i) para **localizar** as medidas em blocos finitos.

Prova — ideia

Estratégia

1. Usar a decomposição $\Omega = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$ (com $E_i \in \mathcal{I}$ disjuntos e medidas finitas em cada E_i) para **localizar** as medidas em blocos finitos.
2. Em cada bloco E_i, definir medidas finitas

$$\nu_k^{(i)}(A) := \mu_k(A \cap E_i), \quad k = 1, 2.$$

e aplicar o **lema do π-sistema no caso finito**.

Prova — ideia

Estratégia

1. Usar a decomposição $\Omega = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$ (com $E_i \in \mathcal{I}$ disjuntos e medidas finitas em cada E_i) para **localizar** as medidas em blocos finitos.
2. Em cada bloco E_i, definir medidas finitas

$$\nu_k^{(i)}(A) := \mu_k(A \cap E_i), \quad k = 1, 2.$$

   e aplicar o **lema do π-sistema no caso finito**.
3. Colar as igualdades usando σ-aditividade na decomposição disjunta por (E_i).

Prova — passo 1: medidas finitas em cada E_i

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina, para $k = 1, 2$,

$$\nu_k^{(i)}(A) := \mu_k(A \cap E_i), \qquad A \in \Sigma. \qquad \text{(definição)}$$

Prova — passo 1: medidas finitas em cada E_i

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina, para $k = 1, 2$,

$$\nu_k^{(i)}(A) := \mu_k(A \cap E_i), \qquad A \in \Sigma. \qquad \text{(definição)}$$

- Se $(A_j)_{j \geqslant 1} \subset \Sigma$ são dois a dois disjuntos, então $(A_j \cap E_i)_{j \geqslant 1}$ também são disjuntos e

$$\nu_k^{(i)}\left(\bigcup_{j \geqslant 1} A_j\right) = \mu_k\left(\bigcup_{j \geqslant 1}(A_j \cap E_i)\right) = \sum_{j \geqslant 1} \mu_k(A_j \cap E_i) = \sum_{j \geqslant 1} \nu_k^{(i)}(A_j)$$

Prova — passo 1: medidas finitas em cada E_i

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina, para $k = 1, 2$,

$$\nu_k^{(i)}(A) := \mu_k(A \cap E_i), \qquad A \in \Sigma. \qquad \text{(definição)}$$

- Se $(A_j)_{j \geqslant 1} \subset \Sigma$ são dois a dois disjuntos, então $(A_j \cap E_i)_{j \geqslant 1}$ também são disjuntos e

$$\nu_k^{(i)}\left(\bigcup_{j \geqslant 1} A_j\right) = \mu_k\left(\bigcup_{j \geqslant 1}(A_j \cap E_i)\right) = \sum_{j \geqslant 1} \mu_k(A_j \cap E_i) = \sum_{j \geqslant 1} \nu_k^{(i)}(A_j)$$

- Além disso,

$$\nu_k^{(i)}(\Omega) = \mu_k(\Omega \cap E_i) = \mu_k(E_i) < \infty \qquad (\sigma\text{-finitude em } \mathcal{I}).$$

Logo, $\nu_k^{(i)}$ é uma **medida finita** em (Ω, Σ).

PROVA — PASSO 2: $\nu_1^{(i)} = \nu_2^{(i)}$ EM $\mathcal{I}$

Fixe $i \in \mathbb{N}$. Como $E_i \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ é um π-sistema, para todo $I \in \mathcal{I}$,

$$I \cap E_i \in \mathcal{I} \qquad (\pi\text{-sistema: fechado por interseção}).$$

Prova — passo 2: $\nu_1^{(i)} = \nu_2^{(i)}$ em $\mathcal{I}$

Fixe $i \in \mathbb{N}$. Como $E_i \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ é um π-sistema, para todo $I \in \mathcal{I}$,

$$I \cap E_i \in \mathcal{I} \qquad (\pi\text{-sistema: fechado por interseção}).$$

Como $\mu_1 = \mu_2$ em $\mathcal{I}$, obtemos, para todo $I \in \mathcal{I}$,

$$\nu_1^{(i)}(I) = \mu_1(I \cap E_i) = \mu_2(I \cap E_i) = \nu_2^{(i)}(I) \qquad (\text{hipótese } \mu_1 = \mu_2 \text{ em } \mathcal{I}).$$

Prova — passo 3: aplicar o lema do π-sistema (finito)

Temos, para cada i:

- $\nu_1^{(i)}$ e $\nu_2^{(i)}$ são **medidas finitas** em (Ω, Σ);
- $\nu_1^{(i)}(I) = \nu_2^{(i)}(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$;
- $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma$ (hipótese: $\mathcal{I}$ gera Σ).

Prova — passo 3: aplicar o lema do π-sistema (finito)

Temos, para cada i:

- $\nu_1^{(i)}$ e $\nu_2^{(i)}$ são **medidas finitas** em (Ω, Σ);
- $\nu_1^{(i)}(I) = \nu_2^{(i)}(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$;
- $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma$ (hipótese: $\mathcal{I}$ gera Σ).

Pelo **lema do π-sistema no caso finito**, conclui-se que

$$\nu_1^{(i)}(A) = \nu_2^{(i)}(A) \quad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Prova — passo 3: aplicar o lema do π-sistema (finito)

Temos, para cada i:

- $\nu_1^{(i)}$ e $\nu_2^{(i)}$ são **medidas finitas** em (Ω, Σ);
- $\nu_1^{(i)}(I) = \nu_2^{(i)}(I)$ para todo $I \in \mathcal{I}$;
- $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma$ (hipótese: $\mathcal{I}$ gera Σ).

Pelo **lema do π-sistema no caso finito**, conclui-se que

$$\nu_1^{(i)}(A) = \nu_2^{(i)}(A) \quad \text{para todo } A \in \Sigma.$$

Isto é,

$$\mu_1(A \cap E_i) = \mu_2(A \cap E_i), \quad \forall\, A \in \Sigma,\ \forall\, i \in \mathbb{N}. \qquad \text{(definição de } \nu_k^{(i)}\text{)}$$

Prova — passo 4: colar nos blocos E_i e concluir

Seja $A \in \Sigma$. Como $(E_i)_{i \geqslant 1}$ são disjuntos e $\Omega = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$,

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i \right) = \bigcup_{i \geqslant 1} (A \cap E_i),$$

e a união é disjunta!.

Prova — passo 4: colar nos blocos E_i e concluir

Seja $A \in \Sigma$. Como $(E_i)_{i\geqslant 1}$ são disjuntos e $\Omega = \bigcup_{i\geqslant 1} E_i$,

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i\geqslant 1} E_i \right) = \bigcup_{i\geqslant 1} (A \cap E_i),$$

e a união é disjunta!.
Assim,

$$\mu_1(A) = \mu_1 \left(\bigcup_{i\geqslant 1} (A \cap E_i) \right) = \sum_{i\geqslant 1} \mu_1(A \cap E_i).$$

Prova — passo 4: colar nos blocos E_i e concluir

Seja $A \in \Sigma$. Como $(E_i)_{i \geqslant 1}$ são disjuntos e $\Omega = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$,

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i \right) = \bigcup_{i \geqslant 1} (A \cap E_i),$$

e a união é disjunta!.
Assim,

$$\mu_1(A) = \mu_1 \left(\bigcup_{i \geqslant 1} (A \cap E_i) \right) = \sum_{i \geqslant 1} \mu_1(A \cap E_i).$$

Como $\mu_1(A \cap E_i) = \mu_2(A \cap E_i)$ para todo i,

$$\sum_{i \geqslant 1} \mu_1(A \cap E_i) = \sum_{i \geqslant 1} \mu_2(A \cap E_i)$$

Prova — passo 4: colar nos blocos E_i e concluir

Seja $A \in \Sigma$. Como $(E_i)_{i \geqslant 1}$ são disjuntos e $\Omega = \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$,

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i \right) = \bigcup_{i \geqslant 1} (A \cap E_i),$$

e a união é disjunta!.
Assim,

$$\mu_1(A) = \mu_1 \left(\bigcup_{i \geqslant 1} (A \cap E_i) \right) = \sum_{i \geqslant 1} \mu_1(A \cap E_i).$$

Como $\mu_1(A \cap E_i) = \mu_2(A \cap E_i)$ para todo i,

$$\sum_{i \geqslant 1} \mu_1(A \cap E_i) = \sum_{i \geqslant 1} \mu_2(A \cap E_i)$$

Prova — passo 4: colar nos blocos E_i e concluir

Logo,

$$\mu_1(A) = \sum_{i \geqslant 1} \mu_2(A \cap E_i) = \mu_2\left(\bigcup_{i \geqslant 1} (A \cap E_i)\right) = \mu_2(A)$$

Prova — passo 4: colar nos blocos E_i e concluir

Logo,

$$\mu_1(A) = \sum_{i \geqslant 1} \mu_2(A \cap E_i) = \mu_2\left(\bigcup_{i \geqslant 1} (A \cap E_i)\right) = \mu_2(A)$$

Como $A \in \Sigma$ foi arbitrário, concluímos $\mu_1 = \mu_2$ em Σ.

Exercício 5 - Medida de Lebesgue na reta — Enunciado

Enunciado

Considere o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{Leb})$, onde Leb é a medida de Lebesgue sobre a reta, que satisfaz:

$$\mathrm{Leb}(a, b] = b - a, \quad \forall -\infty < a \leqslant b < \infty\,.$$

Item 5(a) — Enunciado

Enunciado

Use o resultado da questão anterior para concluir que as medidas dos intervalos $(a, b]$ caracterizam a medida de Lebesgue na reta.

Item 5(a) — Resolução: o π-sistema dos semiabertos

Considere

$$\mathcal{I} := \{\varnothing\} \cup \{(a,b] : a < b\}. \qquad \text{(definição)}$$

Item 5(a) — Resolução: o π-sistema dos semiabertos

Considere

$$\mathcal{I} := \{\varnothing\} \cup \{(a, b] : a < b\}. \qquad \text{(definição)}$$

Para $(a, b], (c, d] \in \mathcal{I}$,

$$(a, b] \cap (c, d] = \begin{cases} (\max\{a, c\}, \min\{b, d\}]\,, & \max\{a, c\} < \min\{b, d\}, \\ \varnothing, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Item 5(a) — Resolução: o π-sistema dos semiabertos

Considere

$$\mathcal{I} := \{\varnothing\} \cup \{(a,b] : a < b\}. \qquad \text{(definição)}$$

Para $(a,b], (c,d] \in \mathcal{I}$,

$$(a,b] \cap (c,d] = \begin{cases} (\max\{a,c\}, \min\{b,d\}], & \max\{a,c\} < \min\{b,d\}, \\ \varnothing, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $\mathcal{I}$ é um π-sistema (fechamento por interseção).

Item 5(a) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Como $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, segue que

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{).}$$

Item 5(a) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Como $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, segue que

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}.$$

Para $a < b$,

$$(a, b) = \bigcup_{m,n \geqslant 1} \left(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\right] \qquad \text{(união enumerável)}.$$

Item 5(a) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Como $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, segue que

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}.$$

Para $a < b$,

$$(a, b) = \bigcup_{m,n \geqslant 1} \left(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\right] \qquad \text{(união enumerável)}.$$

Cada termo $\left(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\right]$ pertence a $\mathcal{I}$.

Item 5(a) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Como $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, segue que

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{).}$$

Para $a < b$,

$$(a,b) = \bigcup_{m,n \geqslant 1} \left(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\right] \qquad \text{(união enumerável).}$$

Cada termo $\left(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\right]$ pertence a $\mathcal{I}$.
Logo $(a,b) \in \sigma(\mathcal{I})$ para todo $a < b$. Como os abertos geram $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}) \qquad \text{(abertos geram borelianos).}$$

Item 5(a) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Como $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, segue que

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{).}$$

Para $a < b$,

$$(a, b) = \bigcup_{m,n \geqslant 1} \left(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\right] \qquad \text{(união enumerável).}$$

Cada termo $\left(a + \tfrac{1}{m},\, b - \tfrac{1}{n}\right]$ pertence a $\mathcal{I}$.
Logo $(a, b) \in \sigma(\mathcal{I})$ para todo $a < b$. Como os abertos geram $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}) \qquad \text{(abertos geram borelianos).}$$

Concluímos $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Item 5(a) — Resolução: aplicar o resultado anterior

Seja μ uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mu(a,b] = b - a, \quad \forall -\infty < a \leqslant b < \infty. \qquad \text{(hipótese)}$$

Item 5(a) — Resolução: aplicar o resultado anterior

Seja μ uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mu(a, b] = b - a, \quad \forall -\infty < a \leqslant b < \infty. \qquad \text{(hipótese)}$$

As medidas μ e Leb coincidem em todo $I \in \mathcal{I}$ (definição de $\mathcal{I}$ e hipótese acima).

Item 5(a) — Resolução: aplicar o resultado anterior

Seja μ uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mu(a,b] = b - a, \quad \forall -\infty < a \leqslant b < \infty. \qquad \text{(hipótese)}$$

As medidas μ e Leb coincidem em todo $I \in \mathcal{I}$ (definição de $\mathcal{I}$ e hipótese acima).
Além disso, ambas são σ-finitas em $\mathcal{I}$: por exemplo, os conjuntos

$$E_i = (i-1, i] \in \mathcal{I}, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

são disjuntos e satisfazem

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} E_i \qquad \text{(cobertura disjunta; } \mathbb{Z} \text{ é enumerável).}$$

Item 5(a) — Resolução: aplicar o resultado anterior

Seja μ uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mu(a,b] = b - a, \quad \forall -\infty < a \leqslant b < \infty. \qquad \text{(hipótese)}$$

As medidas μ e Leb coincidem em todo $I \in \mathcal{I}$ (definição de $\mathcal{I}$ e hipótese acima).
Além disso, ambas são σ-finitas em $\mathcal{I}$: por exemplo, os conjuntos

$$E_i = (i-1, i] \in \mathcal{I}, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

são disjuntos e satisfazem

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} E_i \qquad \text{(cobertura disjunta; } \mathbb{Z} \text{ é enumerável).}$$

Item 5(a) — Resolução: aplicar o resultado anterior

E, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Leb}(E_i) = 1 < \infty \quad \text{e} \quad \mu(E_i) = 1 < \infty \qquad \text{(comprimento do intervalo).}$$

Item 5(a) — Resolução: aplicar o resultado anterior

E, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Leb}(E_i) = 1 < \infty \quad \text{e} \quad \mu(E_i) = 1 < \infty \qquad \text{(comprimento do intervalo).}$$

Como $\mathcal{I}$ é π-sistema e $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, o resultado da questão anterior implica

$$\mu = \mathrm{Leb} \text{ em } \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Item 5(a) — Resolução: aplicar o resultado anterior

E, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Leb}(E_i) = 1 < \infty \quad \text{e} \quad \mu(E_i) = 1 < \infty \qquad \text{(comprimento do intervalo).}$$

Como $\mathcal{I}$ é π-sistema e $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, o resultado da questão anterior implica

$$\mu = \mathrm{Leb} \ \text{em } \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Portanto, os valores em intervalos do tipo $(a, b]$ caracterizam unicamente a medida de Lebesgue na reta.

Item 5(b) — Enunciado

Enunciado

Considere a sequência de conjuntos mensuráveis $E_n = (n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\mu(E_n) = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 0$. Por que o teorema de convergência visto em aula não vale nesse caso?

Item 5(b) — Resolução: $\mu(E_n) = \infty$

1) $\mu(E_n) = \infty$ **para todo** n**.**

Item 5(b) — Resolução: $\mu(E_n) = \infty$

1) $\mu(E_n) = \infty$ para todo n.

Escreva

$$E_n = (n, \infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (n+k,\, n+k+1],$$

veja que é uma união disjunta!

Item 5(b) — Resolução: $\mu(E_n) = \infty$

1) $\mu(E_n) = \infty$ **para todo** n**.**

Escreva

$$E_n = (n, \infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (n+k,\, n+k+1],$$

veja que é uma união disjunta!

Então, pela σ-aditividade,

$$\mu(E_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\big((n+k,\, n+k+1]\big)$$

Item 5(b) — Resolução: $\mu(E_n) = \infty$

1) $\mu(E_n) = \infty$ para todo n.

Escreva

$$E_n = (n, \infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (n+k,\, n+k+1],$$

veja que é uma união disjunta!

Então, pela σ-aditividade,

$$\mu(E_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\big((n+k,\, n+k+1]\big)$$

Como $\mu(a,b] = b - a$,

$$\mu\big((n+k,\, n+k+1]\big) = (n+k+1) - (n+k) = 1.$$

Item 5(b) — Resolução: $\mu(E_n) = \infty$

1) $\mu(E_n) = \infty$ **para todo** n**.**

Escreva

$$E_n = (n, \infty) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (n + k,\, n + k + 1],$$

veja que é uma união disjunta!

Então, pela σ-aditividade,

$$\mu(E_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\big((n + k,\, n + k + 1]\big)$$

Como $\mu(a, b] = b - a$,

$$\mu\big((n + k,\, n + k + 1]\big) = (n + k + 1) - (n + k) = 1.$$

Logo,

$$\mu(E_n) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Item 5(b) — Resolução: $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 0$

2) $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 0$**.**

Item 5(b) — Resolução: $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 0$

2) $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 0$**.**
Note que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (n, \infty) = \varnothing,$$

pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(propriedade arquimediana!)

ITEM 5(B) — RESOLUÇÃO: $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 0$

2) $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 0$**.**
Note que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (n, \infty) = \varnothing,$$

pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(propriedade arquimediana!)
Assim,

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu(\varnothing) = 0 \qquad \text{(medida do vazio).}$$

Item 5(b) — Resolução: por que o teorema não vale aqui?

3) Por que o "teorema de convergência" visto em aula não vale nesse caso?

Item 5(b) — Resolução: por que o teorema não vale aqui?

3) Por que o “teorema de convergência” visto em aula não vale nesse caso?

A sequência (E_n) é *decrescente* e

$$E_n \downarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing. \qquad \text{(interseção de uma sequência decrescente)}$$

Item 5(b) — Resolução: por que o teorema não vale aqui?

3) Por que o "teorema de convergência" visto em aula não vale nesse caso?

A sequência (E_n) é *decrescente* e

$$E_n \downarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing. \qquad \text{(interseção de uma sequência decrescente)}$$

O teorema de *continuidade por cima* diz: se $E_n \downarrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$, então

$$\mu(E_n) \downarrow \mu(E).$$

Item 5(b) — Resolução: por que o teorema não vale aqui?

3) Por que o "teorema de convergência" visto em aula não vale nesse caso?

A sequência (E_n) é *decrescente* e

$$E_n \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \varnothing. \qquad \text{(interseção de uma sequência decrescente)}$$

O teorema de *continuidade por cima* diz: se $E_n \downarrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$, então

$$\mu(E_n) \downarrow \mu(E).$$

Aqui, porém,

$$\mu(E_1) = \infty,$$

o que invalida pensar no teorema.

Exercício 6 - Macaco na máquina de escrever — contexto

Modelo

Seja $\mathcal{V}$ o conjunto de teclas de uma máquina de escrever. Considere um experimento em que um macaco digita sequencialmente em uma máquina de escrever, infinitamente no tempo. O espaço amostral é dado por $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}$, o espaço de sequências com valores em $\mathcal{V}$. Considere a σ-álgebra $\mathcal{F}$ gerada pelos eventos $\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_k = v\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ $v \in \mathcal{V}$. Esses são os eventos em que o macaco digita um caractere v na k-ésima posição do texto.

Item 6(a) — Enunciado

Enunciado

Considere o subconjunto $\mathcal{I}$ de eventos da forma $\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_{i_1} = v_1, \omega_{i_2} = v_2, \ldots, \omega_{i_k} = v_k\}$, para todo $k < \infty$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e $v_1, v_2 \ldots, v_k \in \mathcal{V}$. Inclua também o conjunto vazio em $\emptyset$ em $\mathcal{I}$. Mostre que $\mathcal{I}$ é um π-sistema e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$.

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I}$ é um π-sistema

Para $k \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathcal{V}$, denote

$$C(k, v) := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ \omega_k = v\}.$$

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I}$ é um π-sistema

Para $k \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathcal{V}$, denote

$$C(k, v) := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ \omega_k = v\}.$$

Tome $A, B \in \mathcal{I}$, escritos como interseções finitas:

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r), \qquad B = \bigcap_{s=1}^{n} C(j_s, w_s), \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}\text{)}$$

com $i_1 < \cdots < i_m$ e $j_1 < \cdots < j_n$.

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I}$ é um π-sistema

Para $k \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathcal{V}$, denote

$$C(k,v) := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ \omega_k = v\}.$$

Tome $A, B \in \mathcal{I}$, escritos como interseções finitas:

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r), \qquad B = \bigcap_{s=1}^{n} C(j_s, w_s), \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}\text{)}$$

com $i_1 < \cdots < i_m$ e $j_1 < \cdots < j_n$.
Considere o conjunto finito de índices

$$M = \{i_1, \ldots, i_m\} \cup \{j_1, \ldots, j_n\}. \qquad \text{(união finita)}$$

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I}$ é um π-sistema

Para $k \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathcal{V}$, denote

$$C(k, v) := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ \omega_k = v\}.$$

Tome $A, B \in \mathcal{I}$, escritos como interseções finitas:

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r), \qquad B = \bigcap_{s=1}^{n} C(j_s, w_s), \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}\text{)}$$

com $i_1 < \cdots < i_m$ e $j_1 < \cdots < j_n$.
Considere o conjunto finito de índices

$$M = \{i_1, \ldots, i_m\} \cup \{j_1, \ldots, j_n\}. \qquad \text{(união finita)}$$

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$

Para cada $t \in M$:

- se t aparece nas duas listas e há conflito ($v \neq w$), então

  $$C(t, v) \cap C(t, w) = \varnothing \qquad \text{(valores distintos na mesma coordenada)}$$

  e, portanto, $A \cap B = \varnothing \in \mathcal{I}$ $\qquad$ ($\varnothing \in \mathcal{I}$).

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$

Para cada $t \in M$:

- se t aparece nas duas listas e há conflito ($v \neq w$), então

$$C(t, v) \cap C(t, w) = \varnothing \qquad \text{(valores distintos na mesma coordenada)}$$

  e, portanto, $A \cap B = \varnothing \in \mathcal{I} \qquad (\varnothing \in \mathcal{I})$.
- caso contrário, existe no máximo uma restrição para cada t, e podemos escrever

$$A \cap B = \bigcap_{t \in M} C(t, u_t), \qquad \text{(reunindo restrições compatíveis)}$$

  onde u_t é o valor prescrito por A ou por B (e coincide se ambos prescrevem). Reordenando os índices, isso é novamente um evento do tipo de $\mathcal{I}$.

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$

Para cada $t \in M$:

- se t aparece nas duas listas e há conflito ($v \neq w$), então

  $$C(t, v) \cap C(t, w) = \varnothing \qquad \text{(valores distintos na mesma coordenada)}$$

  e, portanto, $A \cap B = \varnothing \in \mathcal{I} \qquad (\varnothing \in \mathcal{I})$.
- caso contrário, existe no máximo uma restrição para cada t, e podemos escrever

  $$A \cap B = \bigcap_{t \in M} C(t, u_t), \qquad \text{(reunindo restrições compatíveis)}$$

  onde u_t é o valor prescrito por A ou por B (e coincide se ambos prescrevem). Reordenando os índices, isso é novamente um evento do tipo de $\mathcal{I}$.

Em qualquer caso, $A \cap B \in \mathcal{I}$, logo $\mathcal{I}$ é um π-sistema.

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$

Seja $A \in \mathcal{I}$, com

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r). \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}\text{)}$$

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$

Seja $A \in \mathcal{I}$, com

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r). \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}\text{)}$$

Cada $C(i_r, v_r)$ pertence ao conjunto de geradores de $\mathcal{F}$, logo

$$C(i_r, v_r) \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } r. \qquad \text{(definição de } \mathcal{F}\text{)}$$

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$

Seja $A \in \mathcal{I}$, com

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r). \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}\text{)}$$

Cada $C(i_r, v_r)$ pertence ao conjunto de geradores de $\mathcal{F}$, logo

$$C(i_r, v_r) \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } r. \qquad \text{(definição de } \mathcal{F}\text{)}$$

Como toda σ-álgebra é fechada por interseções finitas,

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r) \in \mathcal{F}.$$

Item 6(a) — Resolução: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$

Seja $A \in \mathcal{I}$, com

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r). \qquad \text{(definição de } \mathcal{I}\text{)}$$

Cada $C(i_r, v_r)$ pertence ao conjunto de geradores de $\mathcal{F}$, logo

$$C(i_r, v_r) \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } r. \qquad \text{(definição de } \mathcal{F}\text{)}$$

Como toda σ-álgebra é fechada por interseções finitas,

$$A = \bigcap_{r=1}^{m} C(i_r, v_r) \in \mathcal{F}.$$

Portanto, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$.

Item 6(b) — Enunciado

Enunciado

Suponha agora que o macaco digita as teclas de forma uniforme e independente no tempo, isto é, considere a probabilidade $\mathbb{P}$ sobre $(\mathcal{V}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ da forma:

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \omega_{i_1} = v_1, \omega_{i_2} = v_2, \ldots, \omega_{i_k} = v_k\}] = \frac{1}{|\mathcal{V}|^k}$$

para todo evento em $\mathcal{I}$ não vazio, e $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$. Use o lema do π-sistema para concluir que as probabilidades sobre $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$.

Item 6(b) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}$

Pelo item (a), $\mathcal{I}$ é um π-sistema e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$. Logo,

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{F}. \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}$$

Item 6(b) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}$

Pelo item (a), $\mathcal{I}$ é um π-sistema e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$. Logo,

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{F}. \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}$$

Por outro lado, cada gerador $C(k,v) = \{\omega : \omega_k = v\}$ pertence a $\mathcal{I}$ (tome $k = 1$ restrição, isto é, $k < \infty$), então o σ-gerado pelos $C(k,v)$ está contido em $\sigma(\mathcal{I})$:

$$\mathcal{F} = \sigma\big(\{C(k,v) : k \in \mathbb{N},\, v \in \mathcal{V}\}\big) \subseteq \sigma(\mathcal{I}). \qquad \text{(definição de } \mathcal{F}\text{)}$$

Item 6(b) — Resolução: $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}$

Pelo item (a), $\mathcal{I}$ é um π-sistema e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$. Logo,

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{F}. \qquad \text{(monotonicidade de } \sigma(\cdot)\text{)}$$

Por outro lado, cada gerador $C(k, v) = \{\omega : \omega_k = v\}$ pertence a $\mathcal{I}$ (tome $k = 1$ restrição, isto é, $k < \infty$), então o σ-gerado pelos $C(k, v)$ está contido em $\sigma(\mathcal{I})$:

$$\mathcal{F} = \sigma\big(\{C(k, v) : k \in \mathbb{N},\ v \in \mathcal{V}\}\big) \subseteq \sigma(\mathcal{I}). \qquad \text{(definição de } \mathcal{F}\text{)}$$

Concluímos

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}.$$

Item 6(b) — Resolução: as probabilidades em $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$

Seja $\mathbb{Q}$ uma probabilidade em $(\mathcal{V}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ tal que

$$\mathbb{Q}(I) = \mathbb{P}(I) \quad \text{para todo } I \in \mathcal{I}. \qquad \text{(hipótese)}$$

Item 6(b) — Resolução: as probabilidades em $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$

Seja $\mathbb{Q}$ uma probabilidade em $(\mathcal{V}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ tal que

$$\mathbb{Q}(I) = \mathbb{P}(I) \quad \text{para todo } I \in \mathcal{I}. \qquad \text{(hipótese)}$$

Do slide anterior, $\mathcal{I}$ é um π-sistema que gera $\mathcal{F}$:

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}. \qquad \text{(geração)}$$

Item 6(b) — Resolução: as probabilidades em $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$

Seja $\mathbb{Q}$ uma probabilidade em $(\mathcal{V}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ tal que

$$\mathbb{Q}(I) = \mathbb{P}(I) \quad \text{para todo } I \in \mathcal{I}. \qquad \text{(hipótese)}$$

Do slide anterior, $\mathcal{I}$ é um π-sistema que gera $\mathcal{F}$:

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}. \qquad \text{(geração)}$$

Como $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são probabilidades, são medidas finitas. Em particular, são σ-finitas em $\mathcal{I}$. Uma decomposição conveniente é

$$E_v := C(1, v) \in \mathcal{I}, \quad v \in \mathcal{V},$$

com E_v disjuntos e

$$\mathcal{V}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{v \in \mathcal{V}} E_v, \qquad \text{(partição pela primeira tecla)}$$

Item 6(b) — Resolução: as probabilidades em $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$

Seja $\mathbb{Q}$ uma probabilidade em $(\mathcal{V}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ tal que

$$\mathbb{Q}(I) = \mathbb{P}(I) \quad \text{para todo } I \in \mathcal{I}. \qquad \text{(hipótese)}$$

Do slide anterior, $\mathcal{I}$ é um π-sistema que gera $\mathcal{F}$:

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}. \qquad \text{(geração)}$$

Como $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são probabilidades, são medidas finitas. Em particular, são σ-finitas em $\mathcal{I}$. Uma decomposição conveniente é

$$E_v := C(1, v) \in \mathcal{I}, \quad v \in \mathcal{V},$$

com E_v disjuntos e

$$\mathcal{V}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{v \in \mathcal{V}} E_v, \qquad \text{(partição pela primeira tecla)}$$

Item 6(b) — Resolução: as probabilidades em $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(E_v) = \mathbb{Q}(E_v) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} < \infty. \qquad \text{(definição de } \mathbb{P}\text{)}$$

Item 6(b) — Resolução: as probabilidades em $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(E_v) = \mathbb{Q}(E_v) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} < \infty. \qquad \text{(definição de } \mathbb{P}\text{)}$$

Pelo **lema do π-sistema**, segue que

$$\mathbb{P} = \mathbb{Q} \quad \text{em } \mathcal{F}.$$

Item 6(b) — Resolução: as probabilidades em $\mathcal{I}$ caracterizam $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(E_v) = \mathbb{Q}(E_v) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} < \infty. \qquad \text{(definição de } \mathbb{P}\text{)}$$

Pelo **lema do π-sistema**, segue que

$$\mathbb{P} = \mathbb{Q} \quad \text{em } \mathcal{F}.$$

Logo, os valores de $\mathbb{P}$ sobre $\mathcal{I}$ caracterizam unicamente $\mathbb{P}$.

Item 6(c) — Enunciado

Enunciado

Seja S_n o evento em que, a partir da enésima posição do texto, o macaco digita as obras completas de Shakespeare. Use o segundo lema de Borell-Cantelli para concluir que a probabilidade de que o macaco digita as obras completas de Shakespeare infinitas vezes é 1.

Item 6(c) — Resolução: eventos S_n e suas probabilidades

Fixe uma palavra *finita* $W = (w_1, \ldots, w_L) \in \mathcal{V}^L$ que codifica as obras completas de Shakespeare no alfabeto $\mathcal{V}$.

Item 6(c) — Resolução: eventos S_n e suas probabilidades

Fixe uma palavra *finita* $W = (w_1, \ldots, w_L) \in \mathcal{V}^L$ que codifica as obras completas de Shakespeare no alfabeto $\mathcal{V}$.
Para $n \geqslant 1$, defina

$$S_n := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ (\omega_n, \ldots, \omega_{n+L-1}) = W\},$$

Item 6(c) — Resolução: eventos S_n e suas probabilidades

Fixe uma palavra *finita* $W = (w_1, \dots, w_L) \in \mathcal{V}^L$ que codifica as obras completas de Shakespeare no alfabeto $\mathcal{V}$.
Para $n \geqslant 1$, defina

$$S_n := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ (\omega_n, \dots, \omega_{n+L-1}) = W\},$$

, eventos em que ocorre W a partir da casa n.
Como as teclas são i.i.d. e uniformes, temos

$$\mathbb{P}(S_n) = |\mathcal{V}|^{-L} =: p \quad \text{para todo } n. \qquad \text{(i.i.d. uniforme)}$$

Item 6(c) — Resolução: eventos S_n e suas probabilidades

Fixe uma palavra *finita* $W = (w_1, \dots, w_L) \in \mathcal{V}^L$ que codifica as obras completas de Shakespeare no alfabeto $\mathcal{V}$.
Para $n \geqslant 1$, defina

$$S_n := \{\omega \in \mathcal{V}^{\mathbb{N}} : \ (\omega_n, \dots, \omega_{n+L-1}) = W\},$$

, eventos em que ocorre W a partir da casa n.
Como as teclas são i.i.d. e uniformes, temos

$$\mathbb{P}(S_n) = |\mathcal{V}|^{-L} =: p \quad \text{para todo } n. \qquad \text{(i.i.d. uniforme)}$$

Os eventos (S_n) *não* são independentes em geral quando $|n - m| < L$ (pois compartilham coordenadas) (sobreposição de blocos).

Item 6(c) — Resolução: subfamília independente e 2º Borel–Cantelli

Considere a subfamília

$$T_m := S_{1+(m-1)L}, \qquad m \geqslant 1. \qquad \text{(saltos de tamanho } L\text{)}$$

Item 6(c) — Resolução: subfamília independente e 2º Borel–Cantelli

Considere a subfamília

$$T_m := S_{1+(m-1)L}, \qquad m \geqslant 1. \qquad \text{(saltos de tamanho } L\text{)}$$

Cada T_m depende apenas do bloco de coordenadas $\{1 + (m-1)L, \ldots, mL\}$, e esses blocos são disjuntos. Logo, $(T_m)_{m \geqslant 1}$ é uma família de eventos *independentes* (independência por blocos disjuntos).

Item 6(c) — Resolução: subfamília independente e 2º Borel–Cantelli

Considere a subfamília

$$T_m := S_{1+(m-1)L}, \qquad m \geqslant 1. \qquad \text{(saltos de tamanho } L\text{)}$$

Cada T_m depende apenas do bloco de coordenadas $\{1 + (m-1)L, \ldots, mL\}$, e esses blocos são disjuntos. Logo, $(T_m)_{m \geqslant 1}$ é uma família de eventos *independentes*
(independência por blocos disjuntos).
Além disso,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_m) = \sum_{m=1}^{\infty} p = \infty$$

Item 6(c) — Resolução: subfamília independente e 2º Borel–Cantelli

Considere a subfamília

$$T_m := S_{1+(m-1)L}, \qquad m \geqslant 1. \qquad \text{(saltos de tamanho } L\text{)}$$

Cada T_m depende apenas do bloco de coordenadas $\{1+(m-1)L, \dots, mL\}$, e esses blocos são disjuntos. Logo, $(T_m)_{m\geqslant 1}$ é uma família de eventos *independentes*
(independência por blocos disjuntos).
Além disso,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_m) = \sum_{m=1}^{\infty} p = \infty$$

Pelo **2º lema de Borel–Cantelli** (independência + soma infinita),

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{m\to\infty} T_m\Big) = 1, \qquad \limsup_{m\to\infty} T_m = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m\geqslant N} T_m.$$

Item 6(c) — Resolução: subfamília independente e 2º Borel–Cantelli

Considere a subfamília

$$T_m := S_{1+(m-1)L}, \qquad m \geqslant 1. \qquad \text{(saltos de tamanho } L\text{)}$$

Cada T_m depende apenas do bloco de coordenadas $\{1 + (m-1)L, \dots, mL\}$, e esses blocos são disjuntos. Logo, $(T_m)_{m\geqslant 1}$ é uma família de eventos *independentes*
(independência por blocos disjuntos).
Além disso,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_m) = \sum_{m=1}^{\infty} p = \infty$$

Pelo **2º lema de Borel–Cantelli** (independência + soma infinita),

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{m\to\infty} T_m\Big) = 1, \qquad \limsup_{m\to\infty} T_m = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m\geqslant N} T_m.$$

Item 6(c) — Resolução: subfamília independente e 2º Borel–Cantelli

Como $T_m = S_{1+(m-1)L}$, temos $\limsup_{m\to\infty} T_m \subseteq \limsup_{n\to\infty} S_n$. Logo,

$$1 = \mathbb{P}\Big(\limsup_{m\to\infty} T_m\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} S_n\Big) \leqslant 1$$

Item 6(c) — Resolução: subfamília independente e 2º Borel–Cantelli

Como $T_m = S_{1+(m-1)L}$, temos $\limsup_{m\to\infty} T_m \subseteq \limsup_{n\to\infty} S_n$. Logo,

$$1 = \mathbb{P}\left(\limsup_{m\to\infty} T_m\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} S_n\right) \leqslant 1$$

Portanto,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} S_n\right) = 1,$$

isto é, o macaco digita as obras completas de Shakespeare **infinitas vezes** com probabilidade 1.

Comentário: escala de tempo

Comentário sobre escalas de tempo

Se $q := |\mathcal{V}|$ e o texto tem comprimento L, a ocorrência de W no início de um bloco de L posições tem probabilidade $p = q^{-L}$. Em blocos disjuntos, o número de blocos até a *primeira* ocorrência é geométrico com esperança $1/p = q^L$.

Assim, o número esperado de toques até ver W uma única vez é da ordem de q^L.

Comentário: escala de tempo

Comentário sobre escalas de tempo

Se $q := |\mathcal{V}|$ e o texto tem comprimento L, a ocorrência de W no início de um bloco de L posições tem probabilidade $p = q^{-L}$. Em blocos disjuntos, o número de blocos até a *primeira* ocorrência é geométrico com esperança $1/p = q^L$.

Assim, o número esperado de toques até ver W uma única vez é da ordem de q^L. Tomando valores conservadores (por exemplo, $q \approx 50$ para uma máquina de escrever comum e $L \approx 5 \times 10^6$ caracteres para todas as obras), temos

$$\log_{10}\left(q^L\right) = L \log_{10} q \approx 5 \cdot 10^6 \times 1{,}699 \approx 8{,}5 \times 10^6.$$

Ou seja, a **espera média** é cerca de $10^{8{,}5 \text{ milhões}}$ toques. Mesmo a 10 toques por segundo, em toda a idade do universo ($\sim 4{,}3 \times 10^{17}$ s) cabem apenas $\sim 10^{19}$ toques.

Comentário: escala de tempo

Comentário sobre escalas de tempo

Se $q := |\mathcal{V}|$ e o texto tem comprimento L, a ocorrência de W no início de um bloco de L posições tem probabilidade $p = q^{-L}$. Em blocos disjuntos, o número de blocos até a *primeira* ocorrência é geométrico com esperança $1/p = q^L$.

Assim, o número esperado de toques até ver W uma única vez é da ordem de q^L. Tomando valores conservadores (por exemplo, $q \approx 50$ para uma máquina de escrever comum e $L \approx 5 \times 10^6$ caracteres para todas as obras), temos

$$\log_{10}\left(q^L\right) = L \log_{10} q \approx 5 \cdot 10^6 \times 1{,}699 \approx 8{,}5 \times 10^6.$$

Ou seja, a **espera média** é cerca de $10^{8{,}5 \text{ milhões}}$ toques. Mesmo a 10 toques por segundo, em toda a idade do universo ($\sim 4{,}3 \times 10^{17}$ s) cabem apenas $\sim 10^{19}$ toques.

Concluir que $\mathbb{P}(\cdot) = 1$ via Borel-Cantelli é um resultado assintótico (horizonte infinito), mas não é uma previsão operacional em horizontes físicos finitos (extrapolação deve ser pensada com cuidado).

Exercício 7 - Mensurabilidade: operações básicas

Enunciado

Seja (Ω, Σ) um espaço mensurável, e $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ uma função $\Sigma/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável. Mostre que as seguintes funções são mensuráveis:

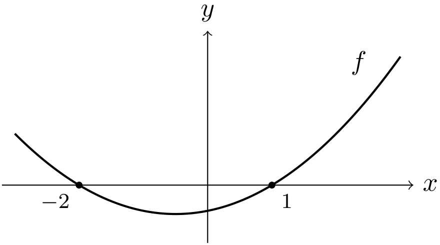
$g = \max\{f, 0\}$.

$g = \min\{f, 0\}$.

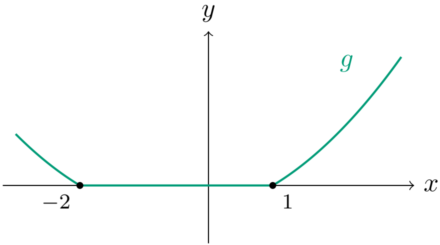
$g = s \circ f$, onde $s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Item 7(a): $g = \max\{f, 0\}$ — gráfico (intuição)

f (exemplo ilustrativo)



$g = \max\{f, 0\}$ (parte positiva)



Ideia: $g(\omega) = \max\{f(\omega), 0\} \geqslant 0$ (“zera” onde $f < 0$).

Item 7(a): $g = \max\{f, 0\}$ — mensurabilidade

Defina $g(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}$. Para mostrar que g é mensurável, basta verificar que

$$g^{-1}(-\infty, a) = \{\omega \in \Omega : g(\omega < a)\} \equiv \{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

ITEM 7(A): $g = \max\{f, 0\}$ — MENSURABILIDADE

Defina $g(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}$. Para mostrar que g é mensurável, basta verificar que

$$g^{-1}(-\infty, a) = \{\omega \in \Omega : g(\omega < a)\} \equiv \{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$ e considere o conjunto

$$\{g < a\} = \{\max(f, 0) < a\}.$$

ITEM 7(A): $g = \max\{f, 0\}$ — MENSURABILIDADE

Defina $g(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}$. Para mostrar que g é mensurável, basta verificar que

$$g^{-1}(-\infty, a) = \{\omega \in \Omega : g(\omega < a)\} \equiv \{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$ e considere o conjunto

$$\{g < a\} = \{\max(f, 0) < a\}.$$

- Se $a \leqslant 0$, como $g \geqslant 0$, logo

$$\{g < a\} = \varnothing \in \Sigma$$

Item 7(a): $g = \max\{f, 0\}$ — mensurabilidade

Defina $g(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}$. Para mostrar que g é mensurável, basta verificar que

$$g^{-1}(-\infty, a) = \{\omega \in \Omega : g(\omega < a)\} \equiv \{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$ e considere o conjunto

$$\{g < a\} = \{\max(f, 0) < a\}.$$

- Se $a \leqslant 0$, como $g \geqslant 0$, logo

$$\{g < a\} = \varnothing \in \Sigma$$

- Se $a > 0$, então

$$\{g < a\} = \{f < a\} \in \Sigma,$$

Item 7(a): $g = \max\{f, 0\}$ — mensurabilidade

Defina $g(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}$. Para mostrar que g é mensurável, basta verificar que

$$g^{-1}(-\infty, a) = \{\omega \in \Omega : g(\omega < a)\} \equiv \{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$ e considere o conjunto

$$\{g < a\} = \{\max(f, 0) < a\}.$$

- Se $a \leqslant 0$, como $g \geqslant 0$, logo

$$\{g < a\} = \varnothing \in \Sigma$$

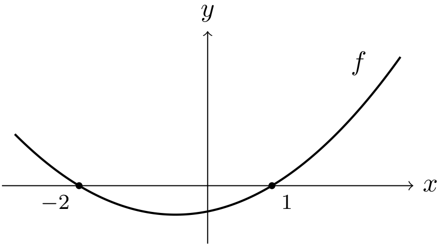
- Se $a > 0$, então

$$\{g < a\} = \{f < a\} \in \Sigma,$$

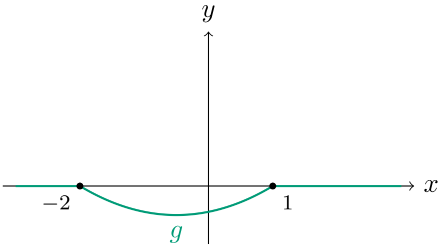
pois f é mensurável. Logo $\{g < a\} \in \Sigma$ para todo a, e g é mensurável.

Item 7(b): $g = \min\{f, 0\}$ — gráfico (intuição)

f (mesmo exemplo ilustrativo)



$g = \min\{f, 0\}$ (parte negativa)



Ideia: $g(\omega) = \min\{f(\omega), 0\} \leqslant 0$ ("zera" onde $f > 0$).

Item 7(b): $g = \min\{f, 0\}$ — mensurabilidade

Defina $g(\omega) = \min\{f(\omega), 0\}$.

Da mesma forma, precisamos verificar que:

$$\{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

ITEM 7(B): $g = \min\{f, 0\}$ — MENSURABILIDADE

Defina $g(\omega) = \min\{f(\omega), 0\}$.
Da mesma forma, precisamos verificar que:

$$\{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$. Então

$$\{g < a\} = \{\min(f, 0) < a\}.$$

ITEM 7(B): $g = \min\{f, 0\}$ — MENSURABILIDADE

Defina $g(\omega) = \min\{f(\omega), 0\}$.
Da mesma forma, precisamos verificar que:

$$\{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$. Então

$$\{g < a\} = \{\min(f, 0) < a\}.$$

- Se $a > 0$, como $g \leqslant 0$, temos $g(\omega) < a$ para todo ω, isto é,

$$\{g < a\} = \Omega \in \Sigma.$$

Item 7(b): $g = \min\{f, 0\}$ — mensurabilidade

Defina $g(\omega) = \min\{f(\omega), 0\}$.
Da mesma forma, precisamos verificar que:

$$\{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$. Então

$$\{g < a\} = \{\min(f, 0) < a\}.$$

- Se $a > 0$, como $g \leqslant 0$, temos $g(\omega) < a$ para todo ω, isto é,

$$\{g < a\} = \Omega \in \Sigma.$$

- Se $a \leqslant 0$, então

$$\{g < a\} = \{f < a\} \in \Sigma,$$

Item 7(b): $g = \min\{f, 0\}$ — mensurabilidade

Defina $g(\omega) = \min\{f(\omega), 0\}$.
Da mesma forma, precisamos verificar que:

$$\{g < a\} \in \Sigma, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Fixe $a \in \mathbb{R}$. Então

$$\{g < a\} = \{\min(f, 0) < a\}.$$

- Se $a > 0$, como $g \leqslant 0$, temos $g(\omega) < a$ para todo ω, isto é,

$$\{g < a\} = \Omega \in \Sigma.$$

- Se $a \leqslant 0$, então

$$\{g < a\} = \{f < a\} \in \Sigma,$$

pois f é mensurável.
Logo $\{g < a\} \in \Sigma$ para todo a, e g é mensurável.

Item 7(c): $g = s \circ f$ com s contínua — mensurabilidade

Seja $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e defina $g = s \circ f$. Para qualquer aberto $O \subset \mathbb{R}$,

$$g^{-1}(O) = \{\omega : \ s(f(\omega)) \in O\} = f^{-1}\big(s^{-1}(O)\big).$$

[2] Propriedade de funções contínuas (Análise)

Item 7(c): $g = s \circ f$ com s contínua — mensurabilidade

Seja $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e defina $g = s \circ f$. Para qualquer aberto $O \subset \mathbb{R}$,

$$g^{-1}(O) = \{\omega : \ s(f(\omega)) \in O\} = f^{-1}\big(s^{-1}(O)\big).$$

Como s é contínua, $s^{-1}(O)$ é aberto[2], logo $s^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

[2] Propriedade de funções contínuas (Análise)

Item 7(c): $g = s \circ f$ com s contínua — mensurabilidade

Seja $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e defina $g = s \circ f$. Para qualquer aberto $O \subset \mathbb{R}$,

$$g^{-1}(O) = \{\omega : \ s(f(\omega)) \in O\} = f^{-1}\big(s^{-1}(O)\big).$$

Como s é contínua, $s^{-1}(O)$ é aberto[2], logo $s^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
Como f é $\Sigma/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável,

$$f^{-1}\big(s^{-1}(O)\big) \in \Sigma$$

[2] Propriedade de funções contínuas (Análise)

Item 7(c): $g = s \circ f$ com s contínua — mensurabilidade

Seja $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e defina $g = s \circ f$. Para qualquer aberto $O \subset \mathbb{R}$,

$$g^{-1}(O) = \{\omega : \; s(f(\omega)) \in O\} = f^{-1}\big(s^{-1}(O)\big).$$

Como s é contínua, $s^{-1}(O)$ é aberto[2], logo $s^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
Como f é $\Sigma/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável,

$$f^{-1}\big(s^{-1}(O)\big) \in \Sigma$$

Portanto $g^{-1}(O) \in \Sigma$ para todo aberto O, e g é mensurável.

[2] Propriedade de funções contínuas (Análise)