Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Aluno: Guilherme Dias Vianna

Professor: Luis Fantozzi
Monitor: -
Disciplina: Verão de Estatística

Prova (2025) - Gabarito

1 (2 pontos) Enuncie e demonstre:

(a) (1 ponto) O primeiro lema de Borel-Cantelli.

Resolução:

(Primeiro lema de Borel–Cantelli).
Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de eventos em $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

então

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n.$$

Demonstração:
Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina

$$B_m := \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n.$$

Então $(B_m)_m$ é decrescente, pois $B_{m+1} \subseteq B_m$ para todo m, e

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Como $\mathbb{P}$ é uma medida finita, vale a continuidade por cima e, portanto,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(B_m).$$

Pela subaditividade enumerável,

$$\mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ converge, o resto $\sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ tende a 0 quando $m \to \infty$. Logo,

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(B_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0,$$

o que conclui a prova.

(b) (1 ponto) A desigualdade de Markov.

Resolução:

Seja X uma variável aleatória não negativa e seja $a > 0$. Então

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Em particular, para $p > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|X|^p\right]}{a^p}.$$

Demonstração: Como $X \geqslant 0$, vale ponto a ponto a desigualdade

$$X \geqslant a\,\mathbf{1}_{\{X \geqslant a\}}.$$

Tomando esperança e usando monotonicidade e linearidade,

$$\mathbb{E}[X] \geqslant a\,\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X \geqslant a\}}\right] = a\,\mathbb{P}(X \geqslant a),$$

o que implica $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}[X]/a$.
A segunda forma segue aplicando o caso anterior à variável não negativa $|X|^p$ e ao nível a^p:

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) = \mathbb{P}\left(|X|^p \geqslant a^p\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|X|^p\right]}{a^p}.$$

2 (2 pontos) Mostre os seguintes pontos.

(a) (0,5 ponto) Se uma sequência de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade converge quase certamente para uma outra variável aleatória, então ela converge em probabilidade para a mesma variável aleatória.

Resolução:

Fixe $\varepsilon > 0$ e defina:

$$B_n := \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Pela caracterização de convergência quase-certa via lim sup,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n B_n\right) = 0.$$

Para $m \in \mathbb{N}$, coloque

$$C_m := \bigcup_{n=m}^{\infty} B_n, \qquad \Longrightarrow \qquad \limsup_n B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m.$$

A sequência $(C_m)_m$ é decrescente. Logo, pela continuidade por cima,

$$0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} C_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(C_m).$$

Agora, se $n \geqslant m$, então $B_n \subseteq C_m$, portanto

$$\mathbb{P}(B_n) \leqslant \mathbb{P}(C_m).$$

Dado $\delta > 0$, escolha m tal que $\mathbb{P}(C_m) < \delta$; então para todo $n \geqslant m$, $\mathbb{P}(B_n) < \delta$. Conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos $X_n \xrightarrow{p} X$.

(b) (0,5 ponto) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de eventos com $\mathbb{P}[E_n] \to 0$, então $\mathbf{1}_{E_n} \xrightarrow{p} 0$.

Resolução:

Seja $\varepsilon > 0$. Como $|\mathbf{1}_{E_n}| \in \{0,1\}$, temos:

$$\{|\mathbf{1}_{E_n} - 0| > \varepsilon\} = \begin{cases} E_n, & 0 < \varepsilon \leqslant 1, \\ \varnothing, & \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbb{P}\left(|\mathbf{1}_{E_n} - 0| > \varepsilon\right) = \begin{cases} \mathbb{P}(E_n), & 0 < \varepsilon \leqslant 1, \\ 0, & \varepsilon > 1, \end{cases}$$

e, como $\mathbb{P}(E_n) \to 0$, segue que $\mathbb{P}\left(|\mathbf{1}_{E_n}| > \varepsilon\right) \to 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto, $\mathbf{1}_{E_n} \xrightarrow{p} 0$.

(c) (0,5 ponto) $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é uma σ-álgebra contendo todos os intervalos do tipo $(-\infty, c]$, em particular $(-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Além disso,

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right],$$

logo $(-\infty, a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Assim,

$$\{a\} = (-\infty, a] \cap (-\infty, a)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(d) (0,5 ponto) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se X é uma variável aleatória com função de distribuição F, então, para $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) = a\}] = F(a) - \lim_{\epsilon \uparrow 0} F(a + \epsilon)$.

Resolução:

Pela definição de função de distribuição, $F(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$. Note que

$$\{X < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \leqslant a - \frac{1}{n}\right\},$$

e essa é uma união crescente. Pela continuidade por baixo,

$$\mathbb{P}(X < a) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(X \leqslant a - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} F\left(a - \frac{1}{n}\right) = \lim_{\varepsilon \uparrow 0} F(a + \varepsilon).$$

Por outro lado, a decomposição disjunta $\{X \leqslant a\} = \{X < a\} \,\dot{\cup}\, \{X = a\}$ implica

$$F(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(X = a).$$

Portanto,

$$\mathbb{P}(X = a) = F(a) - \mathbb{P}(X < a) = F(a) - \lim_{\varepsilon \uparrow 0} F(a + \varepsilon).$$

③ (2 pontos) Seja Ω um espaço. Dizemos que $\mathcal{P} \subseteq 2^{\Omega}$ define uma partição finita sobre Ω se $\mathcal{P} = \{E_1, \ldots, E_n\}$, com $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\cup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$.

(a) (0,5 ponto) Defina a classe $\mathcal{S} = \{\cup_{j \in A} E_j : A \in 2^{\{1,2,\ldots,n\}}\}$. Mostre que $\mathcal{S}$ é uma σ-álgebra. Infira que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{S}$.

Resolução:

Defina

$$\mathcal{S} := \left\{ \bigcup_{j \in A} E_j : \ A \subseteq \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Temos $\emptyset = \bigcup_{j \in \emptyset} E_j \in \mathcal{S}$ e $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{S}$. Se $B = \bigcup_{j \in A} E_j \in \mathcal{S}$, então, usando que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é uma partição,

$$B^c = \left(\bigcup_{j \in A} E_j \right)^c = \Omega \setminus \bigcup_{j \in A} E_j = \bigcup_{j \in A^c} E_j \in \mathcal{S},$$

onde $A^c := \{1, \ldots, n\} \setminus A$.
Agora tome uma sequência $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$, com

$$B_k = \bigcup_{j \in A_k} E_j, \qquad A_k \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Então

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j \in A_k} E_j = \bigcup_{j \in \cup_{k \geqslant 1} A_k} E_j \in \mathcal{S},$$

pois $\cup_{k \geqslant 1} A_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Logo, $\mathcal{S}$ é uma σ-álgebra em Ω.
Além disso, para cada j,

$$E_j = \bigcup_{\ell \in \{j\}} E_\ell \in \mathcal{S},$$

isto é, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$. Como $\sigma(\mathcal{P})$ é a menor σ-álgebra que contém $\mathcal{P}$, segue que

$$\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{S}.$$

(b) (0,5 ponto) Argumente que qualquer σ-álgebra que contém $\mathcal{P}$ contém $\mathcal{S}$. Conclua que $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{P})$ e que, portanto, $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{P})$.

Resolução:

Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$. Então $E_j \in \mathcal{A}$ para todo j, e, para qualquer $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$,

$$\bigcup_{j \in A} E_j \in \mathcal{A}$$

pelo fechamento de $\mathcal{A}$ por uniões enumeráveis (em particular, uniões finitas). Logo, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$.
Aplicando isso a $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{P})$, obtemos $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{P})$. Combinando com o item (a), conclui-se

$$\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{P}).$$

(c) (1 ponto) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade tal que $\mathcal{P} \subseteq \Sigma$. Suponha que $\mathbb{P}[E_j] > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Para uma variável aleatória Y integrável definida sobre $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, mostre que a função $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{E_j}]}{\mathbb{P}[E_j]} \mathbf{1}_{E_j} \,,$$

é uma versão de $\mathbb{E}[Y|\sigma(\mathcal{P})]$.

Resolução:

Defina, para $j = 1, \ldots, n$,

$$c_j := \frac{\mathbb{E}\left[Y\mathbf{1}_{E_j}\right]}{\mathbb{P}(E_j)} \in \mathbb{R}, \qquad f(\omega) := \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mathbf{1}_{E_j}(\omega).$$

Como $Y \in L^1$, temos $\mathbb{E}\left[|Y|\mathbf{1}_{E_j}\right] < \infty$, logo $\left|\mathbb{E}\left[Y\mathbf{1}_{E_j}\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left[|Y|\mathbf{1}_{E_j}\right] < \infty$ e, pela hipótese $\mathbb{P}(E_j) > 0$, cada c_j é finito.

(i) f é $\sigma(\mathcal{P})$-mensurável. Para qualquer boreliano $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$\{f \in B\} = \bigcup_{j:\ c_j \in B} E_j,$$

que pertence a $\mathcal{S}$ e, pelo item (b), $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{P})$. Logo f é $\sigma(\mathcal{P})$-mensurável.

(ii) f é integrável. Usando que os E_j são disjuntos,

$$\mathbb{E}[|f|] = \sum_{j=1}^{n} |c_j| \, \mathbb{P}(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \left|\mathbb{E}\left[Y\mathbf{1}_{E_j}\right]\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[|Y|\mathbf{1}_{E_j}\right] = \mathbb{E}[|Y|] < \infty.$$

(iii) Identidade de caracterização. Seja $A \in \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{S}$. Então existe $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $A = \bigcup_{j \in I} E_j$, e portanto $\mathbf{1}_A = \sum_{j \in I} \mathbf{1}_{E_j}$. Assim,

$$\mathbb{E}\left[f \, \mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j \, \mathbf{1}_{E_j} \, \mathbf{1}_A\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \mathbb{P}(E_j \cap A) = \sum_{j \in I} c_j \, \mathbb{P}(E_j) = \sum_{j \in I} \mathbb{E}\left[Y\mathbf{1}_{E_j}\right].$$

Como os E_j são disjuntos e $A = \bigcup_{j \in I} E_j$,

$$Y\mathbf{1}_A = Y \sum_{j \in I} \mathbf{1}_{E_j} = \sum_{j \in I} Y\mathbf{1}_{E_j} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Y\mathbf{1}_A\right] = \sum_{j \in I} \mathbb{E}\left[Y\mathbf{1}_{E_j}\right].$$

Logo, para todo $A \in \sigma(\mathcal{P})$,

$$\mathbb{E}\left[f \, \mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[Y \, \mathbf{1}_A\right].$$

Dos itens (i) a (iii), f é $\sigma(\mathcal{P})$-mensurável, integrável e satisfaz $\mathbb{E}[f\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A]$ para todo $A \in \sigma(\mathcal{P})$. Portanto, f é uma versão de $\mathbb{E}[Y \mid \sigma(\mathcal{P})]$.

④ (2,75 pontos) Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias iid integráveis definidas no mesmo espaço de probabilidade. No que segue, defina $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ e $\mu := \mathbb{E}[X_1]$.

(a) (0,25 ponto) Fixe $K > 0$ e mostre que:

$$\|\bar{X}_n - \mu\|_1 \leqslant \|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 + \|\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\|_1 + \|\mu - \mu_K\|_1\,,$$

onde $\bar{X}_{n,K} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}_{\{|X_i|\leqslant K\}}$ e $\mu_K = \mathbb{E}[X_1\mathbf{1}_{\{|X_1|\leqslant K\}}]$.

Resolução:

Note que

$$\bar{X}_n - \mu = \left(\bar{X}_{n,K} - \mu_K\right) + \left(\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\right) + \left(\mu_K - \mu\right).$$

Pela desigualdade de Minkowski em L^1 (desigualdade triangular),

$$\|\bar{X}_n - \mu\|_1 \leqslant \|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 + \|\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\|_1 + \|\mu_K - \mu\|_1,$$

e como $\|\mu_K - \mu\|_1 = \|\mu - \mu_K\|_1$, obtemos a desigualdade desejada.

(b) (0,5 ponto) Mostre que $\|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 \leqslant \sqrt{\frac{\sigma_K^2}{n}}$, onde $\sigma_K^2 = \mathbb{V}[X_1\mathbf{1}_{\{|X_1|\leqslant K\}}]$. *Dica:* use a monotonicidade das normas L_p.

Resolução:

Como estamos em um espaço de probabilidade, pela monotonicidade das normas L_p temos

$$\|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 \leqslant \|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_2.$$

Defina

$$Y_i := X_i\mathbf{1}_{\{|X_i|\leqslant K\}} - \mu_K, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Então $Y_i \in L^2$ (pois $|X_i\mathbf{1}_{\{|X_i|\leqslant K\}}| \leqslant K$) e, como $(X_i)_i$ são iid,

$$\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}\left[X_i\mathbf{1}_{\{|X_i|\leqslant K\}}\right] - \mu_K = \mu_K - \mu_K = 0.$$

Além disso,

$$\bar{X}_{n,K} - \mu_K = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n Y_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Y_iY_j\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i^2] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{E}[Y_iY_j]\right).\end{aligned}$$

Fixe $i \neq j$ e ponha $\mathcal{H} := \sigma(Y_j)$. Como Y_i é função de X_i e Y_j é função de X_j, a independência de X_i e X_j implica que Y_i é independente de $\mathcal{H}$, e portanto

$$\mathbb{E}\left[Y_i \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[Y_i] = 0 \quad \text{quase certamente.}$$

Pela propriedade de “extrair o que é conhecido” (com $Z = Y_j$ e $X = Y_i$),

$$\mathbb{E}[Y_iY_j] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_iY_j \mid \mathcal{H}\right]\right] = \mathbb{E}\left[Y_j\,\mathbb{E}\left[Y_i \mid \mathcal{H}\right]\right] = 0.$$

Assim, todos os termos cruzados somem e

$$\|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_2^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i^2] = \frac{1}{n^2}\cdot n\,\mathbb{E}[Y_1^2].$$

Definindo

$$\sigma_K^2 := \mathbb{E}\left[\left(X_1\mathbf{1}_{\{|X_1|\leqslant K\}} - \mu_K\right)^2\right] = \mathbb{E}[Y_1^2],$$

obtemos

$$\|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_2^2 = \frac{\sigma_K^2}{n} \quad \Rightarrow \quad \|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_2 = \sqrt{\frac{\sigma_K^2}{n}}.$$

Portanto,

$$\|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 \leqslant \|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_2 = \sqrt{\frac{\sigma_K^2}{n}}.$$

(c) (0,5 ponto) Mostre que $\|\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\|_1 \leqslant \mathbb{E}[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}]$ e $\|\mu - \mu_K\|_1 \leqslant \mathbb{E}[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}]$.

Resolução:

Observe que

$$\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\left(1 - \mathbf{1}_{\{|X_i|\leqslant K\}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\mathbf{1}_{\{|X_i|>K\}}.$$

Logo, usando $|\sum a_i| \leqslant \sum |a_i|$ e linearidade da esperança,

$$\begin{aligned}\|\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\|_1 &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\mathbf{1}_{\{|X_i|>K\}}\right|\right] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_i|\mathbf{1}_{\{|X_i|>K\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}\right],\end{aligned}$$

pois $(X_i)_i$ são identicamente distribuídas.

Além disso,

$$\mu - \mu_K = \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}\left[X_1\mathbf{1}_{\{|X_1|\leqslant K\}}\right] = \mathbb{E}\left[X_1\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}\right],$$

e então

$$\|\mu - \mu_K\|_1 = |\mu - \mu_K| \leqslant \mathbb{E}\left[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}\right].$$

(d) (1 ponto) Use o teorema da convergência dominada para mostrar que $\lim_{K\uparrow\infty}\mathbb{E}[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}] = 0$.

Resolução:

Como $\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}} \to 0$ quase certamente quando $K \to \infty$, temos

$$|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}} \longrightarrow 0 \quad \text{quase certamente.}$$

Além disso,

$$0 \leqslant |X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}} \leqslant |X_1| \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[|X_1|] < \infty.$$

Pelo **Teorema da Convergência Dominada**,

$$\lim_{K\to\infty}\mathbb{E}\left[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}\right] = 0.$$

(e) (0,5 ponto) Conclua que $\limsup_{n\to\infty}\|\bar{X}_n-\mu\|_1 \leqslant 2\mathbb{E}[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}]$, e disso que $\lim_{n\to\infty}\|\bar{X}_n-\mu\|_1 = 0$. Conclua que $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

Resolução:

Fixe $K > 0$. Pelo item (a),

$$\|\bar{X}_n - \mu\|_1 \leqslant \|\bar{X}_{n,K} - \mu_K\|_1 + \|\bar{X}_n - \bar{X}_{n,K}\|_1 + \|\mu - \mu_K\|_1.$$

Tomando $\limsup_{n\to\infty}$ e usando (b) e (c),

$$\limsup_{n\to\infty}\|\bar{X}_n - \mu\|_1 \leqslant \limsup_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sigma_K^2}{n}} + 2\,\mathbb{E}\left[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}\right] = 2\,\mathbb{E}\left[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>K\}}\right].$$

Como isso vale para todo $K > 0$, pelo item (d) podemos passar $K \to \infty$ e obter

$$\limsup_{n\to\infty}\|\bar{X}_n - \mu\|_1 \leqslant 0.$$

Como $\|\bar{X}_n - \mu\|_1 \geqslant 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\|\bar{X}_n - \mu\|_1 = 0.$$

Finalmente, pela desigualdade de Markov aplicada à variável aleatória não negativa $|\bar{X}_n - \mu|$,

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[|\bar{X}_n - \mu|\right]}{\varepsilon} = \frac{\|\bar{X}_n - \mu\|_1}{\varepsilon} \longrightarrow 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Logo, $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

5 Exercício 5 (1,5 ponto) Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, e $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas de probabilidade sobre esse espaço. Suponha que cada medida P_n admite densidade g_n com respeito à medida de Lebesgue λ sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Suponha, ademais, que existe uma função $g0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)\,,$$

com $\int g(\omega)\lambda(d\omega) = 1$. No que segue, defina $\delta_n := g_n - g$.

(a) (0,25 ponto) Mostre que $\int \delta_n d\lambda = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Como g_n é densidade de P_n com respeito a λ, temos

$$1 = P_n(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\lambda(\mathrm{d}x).$$

Pela hipótese, $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) = 1$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} (g_n(x) - g(x))\,\lambda(\mathrm{d}x) = 1 - 1 = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) (0,5 ponto) Sejam $\delta_n^+ = \max\{\delta_n, 0\}$ e $\delta_n^- = -\min\{\delta_n, 0\}$ as partes positiva e negativa de δ_n. Mostre que $0 \leqslant \delta_n^- \leqslant g$ e $\delta_n^- \to 0$. Use o teorema da convergência dominada para concluir que $\lim_{n\to\infty} \int \delta_n^- d\lambda = 0$. Mostre em seguida que $\lim_{n\to\infty} \int \delta_n^+ d\lambda = 0$.

Resolução:

Defina, para cada n,

$$\delta_n^+(x) := \max\{\delta_n(x), 0\}, \qquad \delta_n^-(x) := -\min\{\delta_n(x), 0\} = \max\{-\delta_n(x), 0\}.$$

Então $\delta_n = \delta_n^+ - \delta_n^-$ e $|\delta_n| = \delta_n^+ + \delta_n^-$.
Fixe $x \in \mathbb{R}$. Se $\delta_n(x) \geqslant 0$, então $\delta_n^-(x) = 0 \leqslant g(x)$. Se $\delta_n(x) < 0$, então

$$\delta_n^-(x) = -\delta_n(x) = g(x) - g_n(x) \leqslant g(x),$$

pois $g_n(x) \geqslant 0$. Portanto,

$$0 \leqslant \delta_n^-(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n.$$

Além disso, como $\delta_n(x) \to 0$ para todo x e a função $t \mapsto \max\{-t, 0\}$ é contínua, segue que

$$\delta_n^-(x) \to 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $0 \leqslant \delta_n^- \leqslant g$ e $\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = 1 < \infty$, o Teorema da Convergência Dominada dá

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n^-(x) \, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} 0 \, \lambda(\mathrm{d}x) = 0.$$

Para concluir sobre a parte positiva, usamos o item (a) e a decomposição $\delta_n = \delta_n^+ - \delta_n^-$:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \delta_n \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \delta_n^+ \, \mathrm{d}\lambda - \int_{\mathbb{R}} \delta_n^- \, \mathrm{d}\lambda,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n^+ \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \delta_n^- \, d\lambda.$$

Passando ao limite em n e usando o resultado anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n^+(x) \, \lambda(\mathrm{d}x) = 0.$$

(c) (0,5 ponto) Use o item anterior para mostrar que para qualquer $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| P_n(A) - \int_A g(\omega)\lambda(d\omega) \right| = 0$$

Resolução:

Seja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como P_n tem densidade g_n,

$$P_n(A) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) \mathbf{1}_A(x) \, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_A g_n(x) \, \lambda(\mathrm{d}x).$$

Logo,

$$P_n(A) - \int_A g(x) \, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_A \delta_n(x) \, \lambda(\mathrm{d}x).$$

Assim,

$$\left|P_n(A) - \int_A g \, \mathrm{d}\lambda\right| = \left|\int_A \delta_n \, \mathrm{d}\lambda\right| \leqslant \int_A |\delta_n| \, \mathrm{d}\lambda = \int_A \left(\delta_n^+ + \delta_n^-\right) \mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \delta_n^+ \, \mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbb{R}} \delta_n^- \, \mathrm{d}\lambda = 2 \int_{\mathbb{R}} \delta_n^- \, \mathrm{d}\lambda,$$

onde na última igualdade usamos $\int \delta_n^+ \, \mathrm{d}\lambda = \int \delta_n^- \, \mathrm{d}\lambda$. Pelo item (b), $\int \delta_n^- \, \mathrm{d}\lambda \to 0$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \left|P_n(A) - \int_A g(x) \, \lambda(\mathrm{d}x)\right| = 0.$$

(d) (0,25 ponto) Usando o resultado anterior, mostre o seguinte resultado: seja $(X_n)_n$ uma sequência de variáveis aleatórias cujas medidas de probabilidade induzidas sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ admitem densidade $(h_n)_n$ com respeito à medida de Lebesgue λ. Seja X uma variável aleatória cuja probabilidade induzida admite densidade h com respeito a λ. Se $h_n(x) \to h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $X_n \xrightarrow{d} X$.

Resolução:

Para cada n, seja $\mathbb{P}_{X_n}$ a medida induzida por X_n em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, e suponha que $\mathbb{P}_{X_n}$ tem densidade h_n com respeito a λ. Seja $\mathbb{P}_X$ a medida induzida por X, com densidade h, e suponha $h_n(x) \to h(x)$ para todo x.

Aplicando o item (c) com $g_n = h_n$ e $g = h$, obtemos que, para todo conjunto boreliano A,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\mathbb{P}_{X_n}(A) - \int_A h(x) \, \lambda(\mathrm{d}x)\right| = 0.$$

Em particular, para cada $t \in \mathbb{R}$, tomando $A = (-\infty, t]$,

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leqslant t) = \mathbb{P}_{X_n}\left((-\infty, t]\right) \longrightarrow \int_{(-\infty,t]} h(x) \, \lambda(\mathrm{d}x) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = F_X(t).$$

Logo $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ para todo t, em particular em todo ponto de continuidade de F_X. Pela definição de convergência em distribuição, concluímos que

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

6 (1,75 pontos) Seja $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Definimos o completamento de Σ com respeito a $\mathbb{P}$, como a coleção de conjuntos da forma:

$$\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P}) \coloneqq \{N \cup A : A \in \Sigma,\ N \subseteq B,\ \text{com } B \in \Sigma \text{ e } \mathbb{P}[B] = 0\}.$$

Intuitivamente, o completamento de uma σ-álgebra com respeito a uma medida "adiciona" à σ-álgebra subconjuntos de eventos de probabilidade zero.

(a) (0,75 ponto) Mostre que $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ é uma σ-álgebra. *Dica:* Para qualquer $N \subseteq B$, $N^{\complement} = (B \setminus N) \cup B^{\complement}$.

Resolução:

Primeiro, $\emptyset \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ pois $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ com $A = \emptyset \in \Sigma$ e $N = \emptyset \subseteq B = \emptyset$, e $\mathbb{P}(B) = 0$. Também $\Omega \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ pois $\Omega = \emptyset \cup \Omega$ com $A = \Omega \in \Sigma$.

Agora, tome $E \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$. Então existe $A \in \Sigma$ e $N \subseteq B$ com $B \in \Sigma$ e $\mathbb{P}(B) = 0$ tais que

$$E = N \cup A.$$

Pelo dica, para $N \subseteq B$,
$$N^{\complement} = (B \setminus N) \cup B^{\complement}.$$
Logo,
$$\begin{aligned} E^{\complement} &= (N \cup A)^{\complement} = N^{\complement} \cap A^{\complement} \\ &= \Big((B \setminus N) \cup B^{\complement} \Big) \cap A^{\complement} \\ &= \Big((B \setminus N) \cap A^{\complement} \Big) \cup \Big(B^{\complement} \cap A^{\complement} \Big) . \end{aligned}$$
Defina
$$A' := B^{\complement} \cap A^{\complement} \in \Sigma, \qquad N' := (B \setminus N) \cap A^{\complement}.$$
Então $N' \subseteq B$ e $\mathbb{P}(B) = 0$, e portanto
$$E^{\complement} = N' \cup A' \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P}).$$
Assim, $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ é fechada por complementos.
Por fim, seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$, com
$$E_n = N_n \cup A_n, \qquad A_n \in \Sigma, \quad N_n \subseteq B_n, \quad B_n \in \Sigma, \quad \mathbb{P}(B_n) = 0.$$
Então
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) .$$
Como Σ é σ-álgebra, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. Além disso, se $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ e $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, então $N \subseteq B$ e $B \in \Sigma$. Usando a subaditividade enumerável,
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0,$$
logo $\mathbb{P}(B) = 0$. Portanto,
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = N \cup A \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P}).$$
Concluímos que $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ é uma σ-álgebra.

(b) (0,5 ponto) Considere a seguinte função P^* sobre $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$.
$$P^*[N \cup A] = \mathbb{P}[A] \,, A \in \Sigma, \ N \subseteq B, \ \text{com } B \in \Sigma \text{ e } \mathbb{P}[B] = 0 \,.$$
Mostre que P^* define uma medida de probabilidade sobre $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ que coincide com $\mathbb{P}$ nos eventos em Σ. Em outras palavras, P^* é uma extensão de $\mathbb{P}$ a $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$.

Resolução:

Primeiro, P^* está bem-definida. Para vermos isso, suponha que um mesmo conjunto $E \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ admita duas representações
$$E = N_1 \cup A_1 = N_2 \cup A_2,$$
com $A_i \in \Sigma$ e $N_i \subseteq B_i$, $B_i \in \Sigma$, $\mathbb{P}(B_i) = 0$. Se $\omega \in A_1 \setminus A_2$, então $\omega \in E$ e $\omega \notin A_2$, logo $\omega \in N_2 \subseteq B_2$. Assim,
$$A_1 \setminus A_2 \subseteq B_2.$$
Como $A_1 \setminus A_2 \in \Sigma$, pela monotonicidade,
$$\mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) \leqslant \mathbb{P}(B_2) = 0, \quad \text{isto é,} \quad \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) = 0.$$

Analogamente, $\mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) = 0$. Logo,

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(A_2),$$

e, portanto, $P^*(E) = \mathbb{P}(A)$ não depende da representação escolhida.
Agora verificamos que P^* é uma medida de probabilidade em $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$. Temos

$$P^*(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \qquad P^*(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ são dois a dois disjuntos e

$$E_n = N_n \cup A_n, \qquad A_n \in \Sigma, \quad N_n \subseteq B_n, \quad \mathbb{P}(B_n) = 0,$$

então, para $i \neq j$, se $\omega \in A_i \cap A_j$ teríamos $\omega \in E_i \cap E_j$, o que é impossível. Logo, os conjuntos A_n são dois a dois disjuntos.
Como no item (a),

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

com $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ e $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subseteq B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$ e $\mathbb{P}(B) = 0$. Portanto,

$$P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P^*(E_n),$$

onde usamos a aditividade enumerável de $\mathbb{P}$ em Σ e o fato de (A_n) serem disjuntos. Assim, P^* é medida em $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ e, como $P^*(\Omega) = 1$, é uma medida de probabilidade.
Além disso, se $A \in \Sigma$, então $A = \emptyset \cup A$ com $\emptyset \subseteq \emptyset$ e $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, logo

$$P^*(A) = \mathbb{P}(A).$$

Assim, P^* coincide com $\mathbb{P}$ em Σ, isto é, P^* estende $\mathbb{P}$.

(c) (0,5 ponto) Seria possível estender $\mathbb{P}$ a $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ de outra forma? Por quê?

Resolução:

Não. Se Q é uma medida de probabilidade em $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ tal que $Q|_{\Sigma} = \mathbb{P}$, então, para todo $N \subseteq B$ com $B \in \Sigma$ e $\mathbb{P}(B) = 0$, pela monotonicidade de medidas,

$$0 \leqslant Q(N) \leqslant Q(B) = \mathbb{P}(B) = 0,$$

logo $Q(N) = 0$.
Agora tome $E = N \cup A \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ com $A \in \Sigma$ e $N \subseteq B$, $\mathbb{P}(B) = 0$. Temos a união disjunta

$$E = A \cup (N \setminus A), \qquad A \cap (N \setminus A) = \emptyset, \qquad N \setminus A \subseteq N \subseteq B.$$

Portanto,

$$Q(E) = Q(A) + Q(N \setminus A) = \mathbb{P}(A) + 0 = \mathbb{P}(A) = P^*(E).$$

Como isso vale para todo $E \in \mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$, segue que $Q = P^*$. Logo, a extensão de $\mathbb{P}$ a $\mathcal{C}(\Sigma, \mathbb{P})$ é única.