Relatório de EP - MAP2220

Comparação de Investimentos: Renda Fixa VS Retornos Logísticos

Nome: Guilherme Dias Vianna
NUSP: 9301429
Data de Entrega: 15 de março de 2024

1 Objetivo

O objetivo do seguinte relatório é comparar os retornos acumulados de duas modalidades teóricas de investimentos: renda fixa e retornos logísticos. Para tal, são empregados métodos numéricos para achar raízes de funções.

2 A escolha de investimentos

2.1 Renda Fixa e Modelo Logístico

Serão comparados dois investimentos, cujo montante inicial investido é o mesmo (denotado por S_0) e cujos retornos S são calculados de forma distinta:

- Renda Fixa:
$$S_f(t) = S_0 \exp(rt) \tag{1}$$
- Retornos Logísticos:
$$S_\ell(t) = \frac{\bar{S}}{1 + \frac{\bar{S} - S_0}{S_0} \exp(-r_0 \bar{S} t)} \tag{2}$$

Veja que não há dúvidas sobre qual investimento é melhor no longo prazo, já que:

$$\lim_{t \to \infty} S_f(t) = \infty$$
$$\lim_{t \to \infty} S_\ell(t) = \bar{S}$$

Então a comparação se resume a discutir qual investimento é mais interessante no curto/longo prazo.
Faremos todas as simulações considerando: $S_0 = 2$**,** $r = 0.045$**,** $r_0 = 0.02$ **e** $\bar{S} = 5$

2.2 Qual investimento é melhor no início?

Veja que:

$$\frac{\mathrm{d}S_f(t)}{\mathrm{d}t} = S_0 \frac{\mathrm{d} \exp rt}{\mathrm{d}t} = rS_0 \exp rt = rS_f(t) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_\ell(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\bar{S} r_0 \left(-S_0 + \bar{S}\right) e^{-S_0 r_0 t}}{\left(1 + \frac{\left(-S_0 + \bar{S}\right) e^{-S_0 r_0 t}}{S_0}\right)^2} = r_0 (\bar{S} - S_\ell(t)) S_\ell(t) \tag{4}$$

Inicialmente, ambas as aplicações partem do mesmo lugar, porém com os parâmetros da simulação:

$$\frac{\mathrm{d}S_f}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = rS_0 = 0.09$$
$$\frac{\mathrm{d}S_\ell}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = r_0(\bar{S} - S_0)S_0 = 0.12$$

Veja então que o investimento logístico inicialmente tem um retorno maior que o de renda fixa (já que ambas partem do mesmo ponto mas a primeira opção cresce mais rapidamente no início). Como estamos lidando com funções contínuas, é de se esperar que esse comportamento continue dentro de um intervalo $[0, \tau]$, sendo τ o ponto não-trivial aonde $S_f = S_\ell$.

2.3 Quando as duas escolhas empatam? Método da Dicotomia para encontrar τ

Resta descobrirmos então qual $\tau \neq 0$ que satisfaz:

$$S_f(\tau) = S_\ell(\tau) \tag{5}$$

Para isso definimos:

$$\mathcal{D}(t) = S_f(t) - S_\ell(t) \tag{6}$$

E nosso problema se reduz ao problema de encontrar as raízes não-nulas e positivas de $\mathcal{D}$. Procedemos então com o **Método da Dicotomia:**

1. Escolhemos um intervalo inicial $[a, b]$ onde a função muda de sinal, ou seja, $\mathcal{D}(a) \cdot \mathcal{D}(b) < 0$.
2. Calculamos o ponto médio do intervalo, $m = \dfrac{a+b}{2}$.
3. Avalia-se a função no ponto médio: $\mathcal{D}(m)$.
4. Se $\mathcal{D}(m)$ é suficientemente próximo de zero ou o intervalo $[a, b]$ é suficientemente pequeno, pare o procedimento; m é uma aproximação da raiz.
5. Caso contrário, olhamos para o sinal de $\mathcal{D}(m)$:
   - Se $\mathcal{D}(m)$ tem o mesmo sinal que $\mathcal{D}(a)$, defina o novo intervalo como $[m, b]$.
   - Se $\mathcal{D}(m)$ tem o mesmo sinal que $\mathcal{D}(b)$, defina o novo intervalo como $[a, m]$.
6. Repetem-se os passos 2 a 5 até atingir a precisão desejada.

O algoritmo foi implementado com $a = 0.01$, $b = 100$ e uma tolerância $\epsilon = 10^{-6}$

3 Resultados

Com os parâmetros já expostos, foi estimado que:

$$\tau \approx 12.25 \text{ unidades de tempo} \tag{7}$$

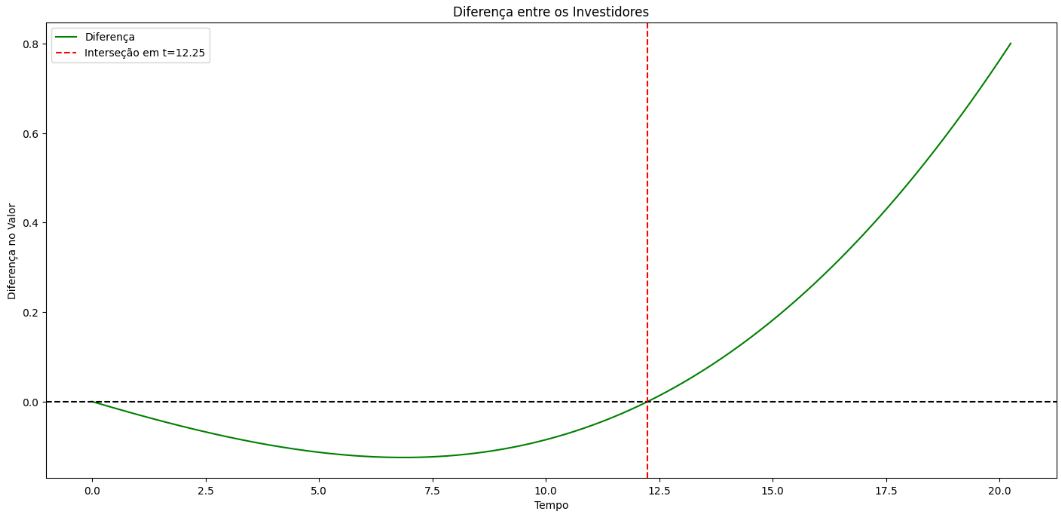

Figura 1: Gráfico de $\mathcal{D}(t)$.

E vemos que pela evolução temporal dos investimentos, nosso raciocínio anterior se encontrava correto:

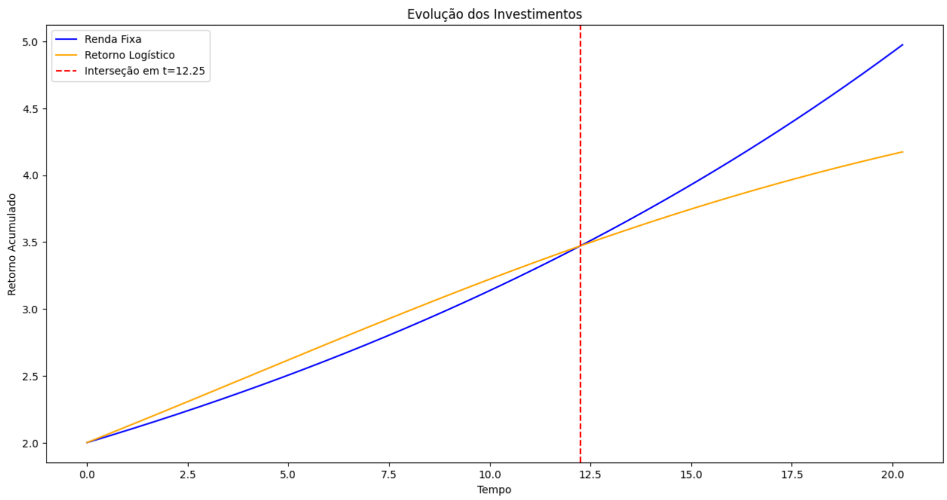

Figura 2: Comparativo entre investimentos.