Relatório de EP - MAP2220

Análise do crescimento populacional e consumo de petróleo

Nome: Guilherme Dias Vianna
NUSP: 9301429
Data de Entrega: 15 de março de 2024

1 Objetivo

O objetivo do seguinte trabalho é estimar, dado o crescimento populacional observado nas últimas décadas, quando as reservas de petróleo contabilizadas atualmente irão se esgotar.
Para isso, tendo em mãos a série histórica da população mundial, é feito uma aproximação do modelo logístico e um posterior ajuste através do **método dos mínimos quadrados(MMQ)** para estimarmos a dinâmica de crescimento populacional.
Com isso, de posse dos dados referentes às reservas de petróleo e o consumo de petróleo atual e com certas hipóteses adicionais, vemos quando as reservas serão totalmente consumidas.

2 Crescimento Populacional

2.1 Modelo Logístico

A evolução temporal da população $P(t)$ de um sistema fechado e com capacidade limitada de geração de alimentos é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha_0(M - P(t))P(t) \tag{1}$$

Nesta equação, os parâmetros α_0 e M são constantes associadas à aspectos estruturais da população.

2.2 O método dos mínimos quadrados

Dada uma série histórica $\{P_j = P(t_j)\}_{j=1}^{n}$ da população humana, vamos aproximar o lado esquerdo de (1) por:

$$\frac{\mathrm{d}P(t_j)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{P(t_j) - P(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = y((P(t_j)) \tag{2}$$

O lado direito pode ser posto como:

$$\alpha_0(M - P(t_j))P(t_j) = \alpha_0 MP(t_j) - \alpha_0 P^2(t_j) \equiv aP(t_j) + bP^2(t_j)$$

Com $a = \alpha_0 M$ e $b = -\alpha_0$. Tomando cada $P(t_j)$ como uma observação x_j de uma variável independente x, reduzimos o problema a um ajuste do modelo:

$$f(x) = ax + bx^2 \tag{3}$$

Com dados:

$$\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{n} \tag{4}$$

Para acharmos a e b, procederemos como visto em sala, o objetivo é encontrarmos parâmetros que minimizem a quantidade:

$$E_2(a,b) = \sum_{j=1}^{n} (f_j - y_j)^2 \tag{5}$$

Aonde $f_j = f(x_j)$ são os valores calculados através do modelo.
Vamos definir os seguintes vetores, seguindo a notação em [4]:

$$|f\rangle = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad |x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad |x^2\rangle = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$$

Com isso podemos escrever (5) de forma mais sintética através do produto interno:

$$E_2(a,b) = \langle f - y | f - y \rangle$$

Com:

$$|f\rangle = a\,|x\rangle + b\,|x^2\rangle$$

Isso nos dá:

$$E_2(a,b) = \langle y|y\rangle - 2a\,\langle y|x^2\rangle - 2b\,\langle y|x\rangle + a^2\,\langle x^2|x^2\rangle + 2ab\,\langle x^2|x\rangle + b^2\,\langle x|x\rangle$$

Procuramos a dupla (a,b) que minimiza E_2, portanto procuramos soluções de:

$$\nabla E_2 = \vec{\mathbf{0}} \tag{6}$$

Chegamos então ao sistema normal equivalente a (6):

$$\begin{cases} \langle x^2|x^2\rangle\, a + \langle x^2|x\rangle\, b = \langle y|x^2\rangle \\ \langle x^2|x\rangle\, a + \langle x|x\rangle\, b = \langle y|x\rangle \end{cases}$$

Ou ainda em formal matricial:

$$\begin{pmatrix} \langle x^2|x^2\rangle & \langle x^2|x\rangle \\ \langle x^2|x\rangle & \langle x|x\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle y|x^2\rangle \\ \langle y|x\rangle \end{pmatrix} \tag{7}$$

Abreviada pôr:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{y} \tag{8}$$

Com $\mathbf{M}$ a matriz dos coeficientes dadas pelos produtos escalares, $\boldsymbol{\beta}$ o vetor dos parâmetros a determinar e $\mathbf{y}$ o vetor de termos independentes.

2.3 Implementação computacional

Para calcular os parâmetros de fato via Python, fazemos o seguinte procedimento:

(i) De posse dos dados populacionais em [1], calculamos y_j para cada passagem de ano. Carregamos os dados e fazemos as operações através do uso da biblioteca (*pandas*).

(ii) Como as ordens de grandeza de x_j e y_j não são pequenas, a biblioteca usual para cálculos numéricos (*numpy*) se torna muito suscetível a arrendondamentos catastróficos. Para evitar erros do tipo, fazemos uso da mudança de escala:

$$X_j = \frac{x_j}{\max\{x_j\}} \qquad Y_j = \frac{y_j}{\max\{y_j\}} \tag{9}$$

Além disso, obtamos pela biblioteca (*mpmath*), aonde é possível escolher a precisão de casas decimais que será utilizada, evitando erros de arredondamento.

(iii) Procuramos um modelo como (3) para o conjunto de observações transformadas por (9):

$$g(X) = AX + BX^2$$

(iv) Montamos então o sistema normal associado a $|X\rangle$ e $|Y\rangle$:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{Y}$$

$$\begin{pmatrix} \langle X^2|X^2\rangle & \langle X^2|X\rangle \\ \langle X^2|X\rangle & \langle X|X\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle Y|X^2\rangle \\ \langle Y|X\rangle \end{pmatrix}$$

(v) Resolvendo o sistema normal:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.403 \\ 2.283 \end{pmatrix}$$

Vejamos como nosso modelo se ajusta visualmente:

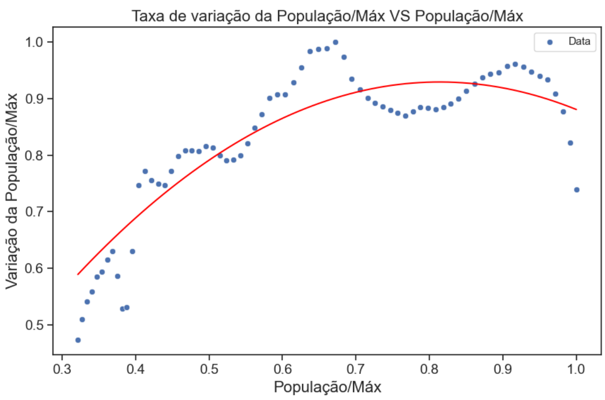

Figura 1: Conjunto de dados amostrais em azul e ajuste em vermelho.

(**vi**) Pegando o modelo ajustado e substituindo X_j e Y_j, podemos obter os parâmetros relevantes da equação original diretamente:

$$\alpha_0 = -\frac{A \max\{y_j\}}{\max^2\{x_j\}} \approx 2.0736 \cdot 10^{-12}$$

$$M = \frac{B \max\{y_j\}}{\max\{x_j\}\alpha_0} \approx 12.874.564.724$$

2.4 Interpretação dos parâmetros, consequências e adequação aos dados

Veja que o parâmetro M tem uma interpretação imediata, voltando para nossa primeira equação (1), caso a população se estabilize a partir de um momento t^*:

$$\left.\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t^*} \equiv 0 \Rightarrow P(t^*) = M$$

Portanto temos que nosso modelo já nos dá uma conclusão preliminar:

A população mundial, de acordo com nosso modelo, continuará crescendo até estabilizar em aproximadamente 13 bilhões de pessoas

Para avaliar quando isto acontecerá, podemos ver o comportamento global de $P(t)$ com nossos parâmetros obtidos anteriormente.
A equação logística pode ser resolvida explicitamente via separação de variáveis, o resultado é:

$$P(t) = \frac{M}{1 + \frac{M-P_0}{P_0}\exp(-\alpha_0 M(t-t_0))} \tag{10}$$

Com $P_0 = P(t_0)$ um ponto inicial arbitrário.
Vejamos a aderência de nosso modelo com os parâmetros obtidos aos dados do WB:

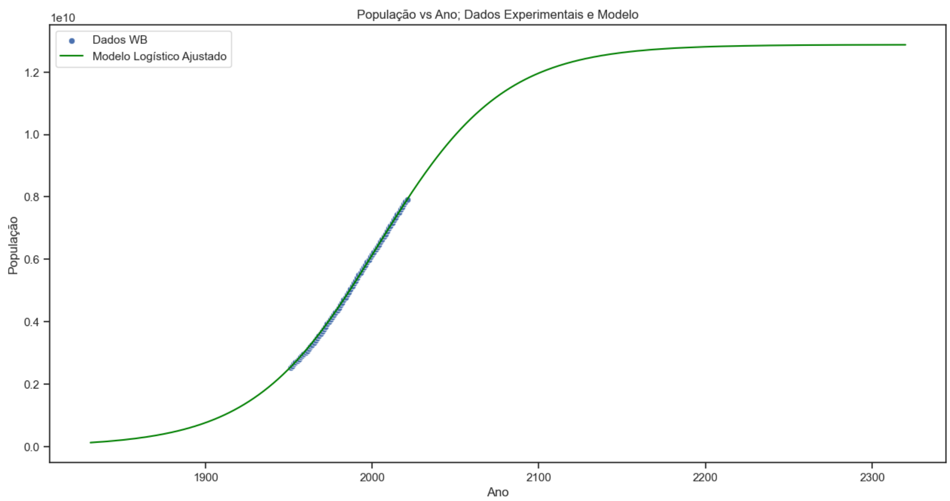

Figura 2: Aderência do modelo ajustado à série histórica original.

3 Consumo de Petróleo

De posse de uma função satisfatória para aproximar a população mundial, podemos então analisar a evolução do consumo de petróleo mundial.
Caso tenhamos o comportamento do consumo anual per capita médio no ano t dado pôr $\gamma(t)$, o consumo anual mundial no ano t, simbolizado pôr $\Gamma(t)$ é dado pôr:

$$\Gamma(t) = \gamma(t)P(t) \tag{11}$$

O consumo total de petróleo desde o instante t_1 até o instante t_2 é então calculado como:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \Gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

A partir de agora tomaremos como hipótese adicional que $\gamma(t)$ é uma função constante que é igual ao consumo anual per capita de petróleo dos EUA, contabilizado hoje em dia [?] como em torno de **20.85 barris de petróleo**.
A integral da função $P(t)$, a título de ilustração, é:

$$\int \frac{M}{1 + \frac{M-P_0}{P_0}\exp(-\alpha_0 M(t-t_0))}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{P_0(\exp M\alpha_0(t-t_0) - 1) + M}{\alpha_0}\right| + k$$

Tomando como t_0 o ano de 2021, podemos ver em qual ano teremos Q atingindo o total de reservas contabilizadas hoje (calculado a partir dos dados em [2]).

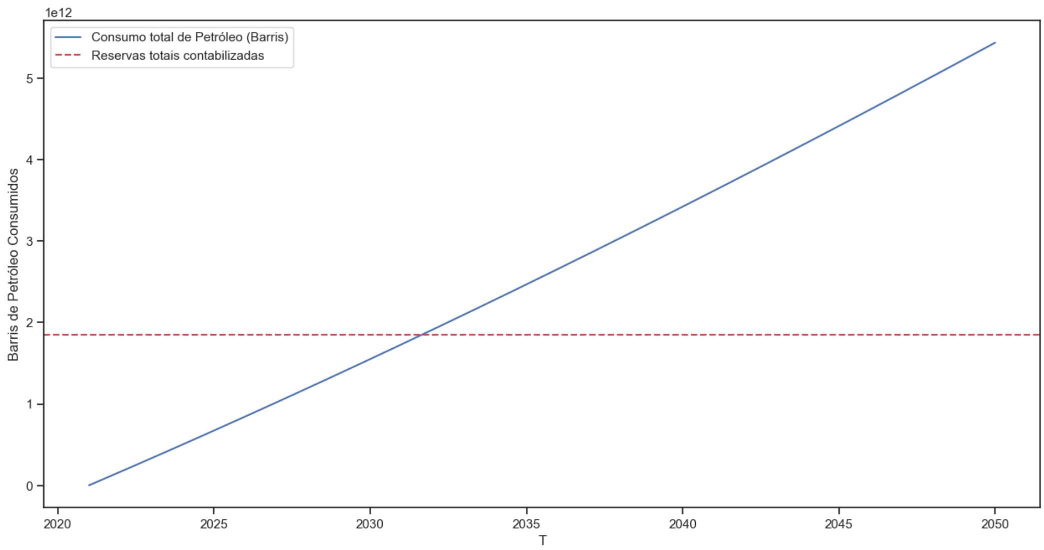

Figura 3: Gráfico de Q partindo de 2021.

A partir do gráfico vemos que, **dadas nossas hipóteses relacionadas ao consumo per capita mundial e a não-descoberta de novas reservas**, a totalidade das reservas remanescentes em 2021 será consumida por completo em 2031.

Referências

[1] https://databank.worldbank.org/source/population-estimates-and-projections.
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_proven_oil_reserves
[3] https://www.worldometers.info/oil/oil-consumption-by-country
[4] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu and Franck Laloe, *Quantum Mechanics: Volume 1*, *Wiley-VCH; 2nd edition* 2019