ĐẠI SỐ BOOL VÀ HÀM BOOLE (Boole Algebra and Bool Function)

- Đại số boole
- Hàm boole
- Mạng các cổng và đa thức tối tiểu
- Đơn giản hàm boole

ĐẠI SỐ BOOLE

- Định nghĩa
- Các ví dụ
- Tính chất

ĐỊNH NGHĨA

Một đại số boole là một tập A cùng 2 phép toán, ký hiệu v, A,
 thốa mãn các tính chất sau:

■
$$\forall x, y, z \in A$$
: $x \lor (y \lor z) = (x \lor y) \lor z$
 $x \land (y \land z) = (x \land y) \land z$
■ $\forall x, y \in A$: $x \lor y = y \lor x$
 $x \land y = y \land x$
■ $\forall x, y \in A$: $x \lor (y \land z) = (x \lor y) \land (x \lor z)$
 $x \land (y \lor z) = (x \land y) \lor (x \land z)$

ĐỊNH NGHĨA

- Tồn tại 2 phần tử trung hòa đối với ∨ và ∧, ký hiệu là 0 và
 1, sao cho ∀ x ∈ A, x ∨ 0 = x và x ∧ 1 = x
- \forall $x \in A$, tồn tại một phần tử gọi là phần tử bù của x, ký hiệu \overline{x} sao cho $x \vee \overline{x} = 1$ và $x \wedge \overline{x} = 0$

- Tập M gồm các mệnh đề với các phép toán ∨, ∧ là một đại số boole
 - Tính kết hợp, giao hoán, phân bố là hiển nhiên
 - Hai phần tử trung hoà là 0 (false) và 1 (true), trong M ta có

$$\forall x \in A, x \lor 0 = x \lor a \lor x \land 1 = x$$

• $\forall x \in A$, phần tử bù của $x \stackrel{.}{la} \overline{x} = \neg x \stackrel{.}{va}$ ta có

$$x \vee \overline{x} = x \vee \neg x = 1 \text{ và } x \wedge \overline{x} = x \wedge \neg x = 0$$

- Cho X ≠ Ø, tập ℘(X) cùng 2 phép toán ∨, ∧ tương ứng là phép toán hợp và giao là một đại số boole
 - \forall A, B \in \wp (X), A \vee B = A \cup B, A \wedge B = A \cap B
 - Phần tử 0 là \varnothing , phần tử 1 là X, phần tử bù của A là \overline{A} = X-A
- Chứng minh?

- Xét tập B = {0, 1}, trên B xây dựng 2 phép toán ∨, ∧ như sau
 - $\forall x, y \in B$:

```
x \wedge y = x.y (phép nhân thông thường)
```

$$x \vee y = x + y - x.y$$
 (phép cộng thông thường)

- Phần tử bù $\overline{x} = 1 x$
- Các phần tử trung hoà là 0 và 1
- Tập B là một đại số boole

• Gọi U_{30} là tập các ước số của 30 thì U_{30} là một đại số bool với hai phép toán , như sau

```
\forall x, y U_{30}:

x y = USCLN(x, y)

x y= BSCNN(x, y)

\overline{x} = 30/x
```

Định lý 1: Trong một đại số bool A bất kỳ, có

Luật thống trị

$$x \wedge 0 = 0$$
$$x \vee 1 = 1$$

Luật lũy đẳng

$$x \wedge x = x$$

 $x \vee x = x$

• Luật bù kép $\overline{\overline{x}} = x$

- Luật bù trung hòa $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$
- Luật De Morgan

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$
$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

Luật hấp thụ

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

Định lý 2: Trong một đại số bool $B=\{0,1\}$

Luật lũy đẳng

$$x + x = x$$
, $x \cdot x = x$

Luật đồng nhất

$$x + 0 = x$$
, $x \cdot 1 = x$

Luật thống trị

$$x + 1 = 1, \quad x \cdot 0 = 0$$

• Luật bù kép $\overline{\overline{x}} = x$

Luật giao hoán

$$x + y = y + x$$

 $x \cdot y = y \cdot x$

Luật kết hợp

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Luật phân bố

$$(x + y) \cdot z = (x.z) + (y \cdot z)$$

 $(x.y) + z = (x + z) \cdot (y + z)$

Luật De Morgan

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$
$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Luật hấp thụ

$$x \cdot (x + y) = x, x + x.y = x$$

• Luật bù đơn $x + \overline{x} = 1$, $x.\overline{x} = 0$

HÀM BOOLE

- Định nghĩa hàm boole
- Các cổng logic
- Đơn giản hàm boole

 Một hàm boole n biến là một ánh xạ f: Bⁿ B, trong đó B là đại số boole trên tập {0, 1}

• Lưu ý:

Các hàm boole còn được gọi là hàm logic hay hàm nhị phân Trong hàm boole, các phép toán , còn gọi là tổng và tích (dùng + và . thay cho và)

Các biến xuất hiện trong hàm boole được gọi là biến boole Mọi hàm boole liên kết với một bảng chân trị cho biết giá trị của hàm tại $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, bảng này cũng được gọi là bảng chân trị của hàm boole

15

 F_n là tập tất cả các hàm Boole n biến $x_1, x_2, ..., x_n$

- Một biến Boole x_i hoặc phần bù của nó $\overline{x_i}$ là một từ đơn
- Một tích của n từ đơn y₁.y₂ ...y_n là một từ tối tiểu

- Chỉ có một tổ hợp giá trị duy nhất của các giá trị của các biến
 x₁, x₂, ..., x_n để một từ tối tiểu có giá trị bằng 1
- Cụ thể, một từ tối tiểu $y_1.y_2...y_n = 1$ nếu và chỉ nếu mọi $y_i = 1$, nghĩa là nếu và chỉ nếu $x_i = 1$ khi $y_i = x_i$ và $x_i = 0$ khi $y_i = \overline{x_i}$
- Với một hàm Boole bốn biến, từ tối tiểu có giá trị bằng 1 ứng với $x_1 = x_3 = 0$ và $x_2 = x_4 = 1$ là $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4$

 Mọi hàm boole đều có thể viết dưới dạng tổng của các từ tối tiểu

 $f = m_1 + m_2 + ... + m_k$, gọi là dạng tuyển chính tắc của f

• Ví dụ: Tìm dạng tuyển chính tắc của

$$f = (x + y)\overline{z}$$

• Lập bảng chân trị:

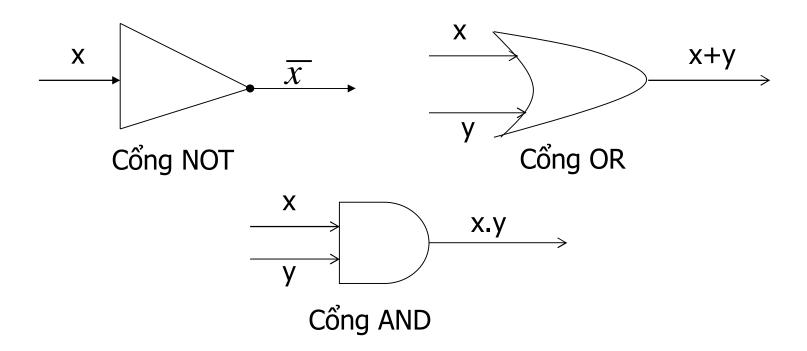
$$f = (x + y)\overline{z}$$

X	У	Z	x + y	\overline{z}	f
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

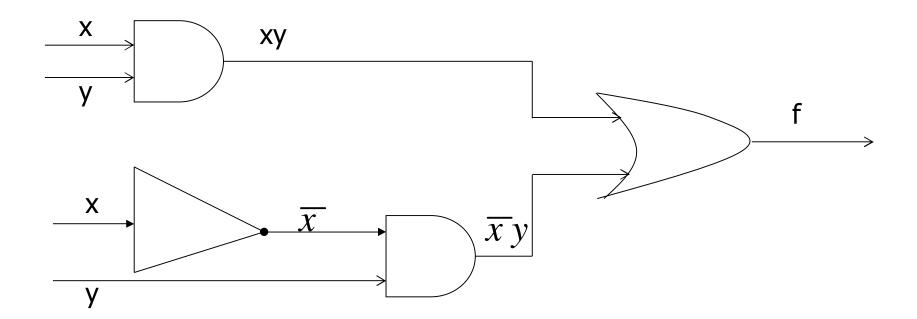
- f(x, y, z) = 1 khi x = 0, y = 1, z = 0 hoặc x = 1, y = 0, z = 0 hoặc x = 1, y = 1, z = 0
- Nghĩa là f(x, y, z) = 1 khi $\overline{x}y\overline{z}$ =1 hoặc $x\overline{y}\overline{z}$ =1 hoặc $xy\overline{z}$ =1
- Dạng tuyển chính tắc: $f = \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z}$

- Đại số các hàm boole được dùng để mô hình hoá các sơ đồ mạch trong các thiết bị điện tử (mỗi mạch là một hàm boole)
- Các phần tử cơ bản của một mạch điện tử gọi là các cổng
- Một loại cổng thực hiện một phép toán boole
- Các mạch mà tín hiệu ra (giá trị) chỉ phụ thuộc tín hiệu vào (không phụ thuộc trạng thái hiện thời của mạch) gọi là mạch tổ hợp

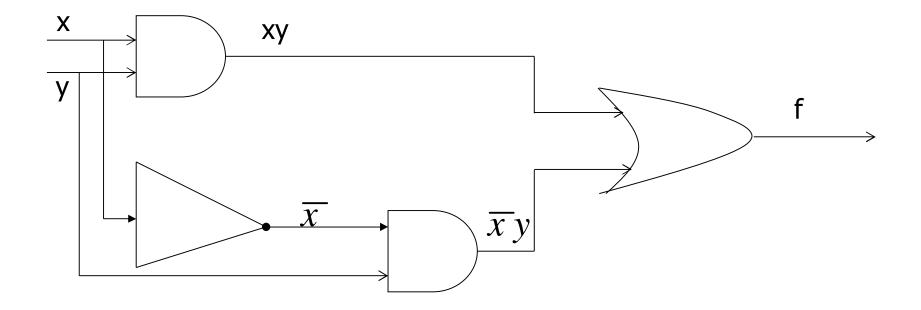
Các mạch tổ hợp được xây dựng bởi 3 cổng



• **Ví dụ**: Lập mạch tổ hợp $f = xy + \overline{x}y$



• Mạch tổ hợp (vẽ đơn giản hơn) $f = xy + \overline{x}y$



ĐƠN GIẢN HÀM BOOLE

- Các khái niệm
- Phương pháp biến đổi
- Phương pháp biểu đô Karnaugh

CÁC KHÁI NIỆM

- Một tích khác 0 của các từ đơn trong hàm boole f(x₁, x₂, ..., x_n) gọi là một đơn thức hay số hạng
- Một hàm boole luôn được biểu diễn như một tổng boole của các đơn thức (vì vậy, hàm boole còn được gọi là đa thức)

CÁC KHÁI NIỆM

- Bài toán: Với một hàm boole f, hãy tìm cách rút gọn để f đơn giản hơn ☐ mạch logic ít cổng hơn nên thực hiện tính toán nhanh hơn
- Hàm boole đơn giản nhất (cực tiểu) là hàm biểu diễn một tổng ít số hạng nhất, mỗi số hạng chứa ít từ đơn nhất

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

- Một công thức đa thức tối tiểu là công thức đơn giản nhất trong mọi biểu diễn có thể có của đa thức đó
- **Ví dụ**: Đơn giản $f = xyz + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$ (1) Ta có

$$f = xyz + x(\overline{y} + y)\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$$
$$= xyz + x\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$$
(2)

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

• Áp dụng hệ thức $g\overline{h} + h = g + h$ vào (2) ta có:

$$f = x(yz + \overline{z}) + \overline{x}y\overline{z}$$

$$= x(y + \overline{z}) + \overline{x}y\overline{z}$$

$$= xy + x\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$$

$$= xy + \overline{z}(x + \overline{x}y)$$

$$= xy + \overline{z}(x + y) = xy + x\overline{z} + y\overline{z}$$

- Tiện lợi cho hàm 2, 3,4, 5, 6 biến
- Áp dụng tìm hàm boole tối tiểu 4 biến

xt

 $\overline{x}t$

 $\overline{x} \overline{t}$

 $x\overline{t}$

 Biểu diễn một hàm boole bằng một tập các ô trên hình vuông 16 ô tương ứng với 16 từ tối tiểu có thể có của hàm boole (khi hàm boole bằng 1 ứng với một tổ hợp biến thì ô ứng với từ tối tiểu được tô xám và ghi số 1)

УZ	УZ	y z	\overline{y} z
xyzt	xy z t	$x\overline{y} \overline{z}t$	$x\overline{y}zt$
\overline{x} yz t	\overline{x} y $\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}zt$
\overline{x} yz \overline{t}	\overline{x} y $\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}z\overline{t}$
$xyz\overline{t}$	$xy\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}z\overline{t}$

xt

 $\overline{x}t$

 $\overline{x} \overline{t}$

 $x\overline{t}$

- Hai ô là kề nhau trong biểu đồ của hàm Boole 4 biến nếu hai từ tối tiểu tương ứng chỉ khác nhau một từ đơn
- Ví dụ hai ô tương ứng với xyzt và xyzt Hoặc với xyzt xyzt

	yz	УZ	y z	y z
X	yzt	xy \overline{z} t	$x\overline{y} \overline{z}t$	$x\overline{y}zt$
$\overline{\chi}$	yzt	\overline{x} y $\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}zt$
2	\overline{c} yz \overline{t}	\overline{x} y $\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}z\overline{t}$
2	$xyz\overline{t}$	$xy\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}z\overline{t}$

\/7

xt

 $\overline{x}t$

 $\overline{x} \overline{t}$

 $x\overline{t}$

- Khi kết hợp các từ tối tiểu trong hai ô kề nhau theo phép lấy tổng Boole thì được một tích ba từ đơn tương ứng với hình chữ nhật có được bằng cách ghép hai ô đó
- \overline{x} yz $t + \overline{x}$ y \overline{z} $t = \overline{x}$ yt(Z + \overline{z})= \overline{x} yt

y∠	yz	y z	y z
xyzt	xy z t	$x\overline{y} \overline{z}t$	$x\overline{y}zt$
\overline{x} yz t	\overline{x} y \overline{z} t	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}zt$
\overline{x} yz \overline{t}	\overline{x} y $\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}z\overline{t}$
$xyz\overline{t}$	$xy\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}z\overline{t}$

 Khái quát, khi chúng ta kết hợp các từ tối tiểu trong một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô, 4 ô hoặc 8 ô kề nhau bằng phép lấy tổng Boole thì được một tích gồm 4, 3, 2 hoặc 1 từ đơn

	УZ	УZ	y z	\overline{y} z
xt	xyzt	xy \overline{z} t	$x\overline{y} \overline{z}t$	$x\overline{y}zt$
$\overline{x}t$	\overline{x} yz t	\overline{x} y $\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}zt$
$\overline{x} t$	\overline{x} yz \overline{t}	\overline{x} y $\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}z\overline{t}$
$x\overline{t}$	$xyz\overline{t}$	$xy\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}z\overline{t}$

xt

 $\overline{x}t$

 $\overline{x} \overline{t}$

 $x\overline{t}$

- Một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô, 4 ô hoặc 8 ô kề nhau trên biểu đồ Karnaugh của hàm Boole được gọi là một khối và tương ứng biểu diễn một tích 4, 3, 2 hoặc 1 từ đơn
- Khối gồm toàn bộ 16 ô biểu diễn hàm Boole bằng 1 với mọi x, y, z, t

yΖ	у 	y z	\overline{y} z
xyzt	xy z t	$x\overline{y} \overline{z}t$	$x\overline{y}zt$
\overline{x} yz t	\overline{x} y \overline{z} t	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}t$	$\overline{x}\overline{y}zt$
\overline{x} yz \overline{t}	\overline{x} y $\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\overline{x}\overline{y}z\overline{t}$
$xyz\overline{t}$	$xy\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$x\overline{y}z\overline{t}$

• Khối gồm 2 ô

$$\overline{x}$$
z t = \overline{x} yz t + \overline{x} \overline{y} z t

	yz	у Z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$				
$\overline{x} \overline{t}$				
$x\overline{t}$				

• Khối gồm 4 ô

$$\overline{x}\overline{t} = \overline{x}yz\overline{t} + \overline{x}y\overline{z}\overline{t} + \overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t} + \overline{x}\overline{y}z\overline{t} + \overline{x}\overline{y}z\overline{t}$$

	yz	у Z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$				
$\overline{x} \overline{t}$				
$x\overline{t}$				

• Khối gồm 4 ô

$$xz = xyzt + x\overline{y}zt + xyz\overline{t} + x\overline{y}z\overline{t}$$

	yz	у Z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$				
$\overline{x} \overline{t}$				
$x\overline{t}$				

Khối gồm 8 ô

$$\overline{z} = xy\overline{z}t + x\overline{y} \overline{z}t + ... + xy\overline{z} \overline{t} + x\overline{y} \overline{z} \overline{t}$$

Khối càng lớn thì tích boole (đơn thức tương ứng càng đơn giản

	yz	у Z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$				
$\overline{x} \overline{t}$				
$x\overline{t}$				

Các bước xác định hàm boole tối tiểu

Ghi số 1 vào các ô trong các khối trên biểu đồ Karnaugh tương ứng với các tích Boole (đơn thức) trong hàm Boole

Tìm tất cả các khối lớn nhất bao gồm các ô chứa số 1

Xác định hàm Boole cực tiểu bằng cách lấy tổng các tích (đơn thức) tương ứng với các khối lớn nhất phủ kín các ô chứa số 1 trên biểu đồ Karnaugh của nó

Lưu ý: một khối bao gồm các ô chứa số 1 được gọi là lớn nhất nếu nó
 không bị chứa trong bất kỳ một khối nào bao gồm các số 1 khác

Ví dụ

$$f=x\overline{y}\,\overline{z}t+\overline{x}yzt+\overline{x}y\overline{z}t+\\\overline{x}\overline{y}\,\overline{z}t+\overline{x}y\overline{z}\overline{t}+\overline{x}\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}+\\x\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}$$

Có 3 khối lớn nhất

	yz	у Z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt			1	
$\overline{x}t$	1	1	1	
$\overline{x} \overline{t}$		1	1	
$x\overline{t}$			1	

• Khối thứ nhất ứng với đơn thứ \overline{x} yt

	УZ	УZ	y z	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$	1	1		
$\overline{x} \overline{t}$				
$x\overline{t}$				

• Khối thứ hai ứng với đơn thức $\overline{x} \overline{z}$

	yz	y z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$		1	1	
$\overline{x} \overline{t}$		1	1	
$x\overline{t}$				

• Khối thứ hai ứng với đơn thức \overline{y} \overline{z}

	yΖ	УZ	y z	y z
xt			1	
$\overline{x}t$			1	
$\overline{x} \overline{t}$			1	
$x\overline{t}$			1	

- Kết quả hàm boole cực tiểu
- $f=x\overline{y} \overline{z}t+\overline{x}yzt+\overline{x}y\overline{z}t+$ $\overline{xy} \, \overline{z}t + \overline{x}y\overline{z}\overline{t}$ $+\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t} + x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$ $= \overline{x} y t + \overline{x} \overline{z} + \overline{y} \overline{z}$

	yz	УZ	y z	уz
xt			1	
$\overline{x}t$	1	1	1	
$\overline{x} \overline{t}$		1	1	
$x\overline{t}$			1	

xt

 $\overline{x}t$

 $\overline{x} t$

 $x\overline{t}$

Vi dụ 2
 f = z̄(xȳ ∨ yt) ∨ y(xz̄ ∨ x̄z)
 = xȳz̄ ∨ yz̄t ∨ xyz̄ ∨ x̄yz
 Có 4 khối lớn nhất

	УZ	УZ	y z	\overline{y} z
		1	1	
1		1		
1				
		1	1	

xt

 $\overline{x}t$

 $\overline{x} t$

 $x\overline{t}$

• Vi dụ 2 Khối thứ nhất ứng với đơn thức $x\bar{z}$

УZ	УZ	y z	\overline{y} z
	1	1	
	•	4	
	1	1	

• Vi dụ 2 Khối thứ hai ứng với đơn thức $y\bar{z}t$

	УZ	y z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt		1		
$\overline{x}t$		1		
$\overline{x} \overline{t}$				
$x\overline{t}$				

• Vi dụ 2 Khối thứ ba ứng với đơn thức $\bar{x}yt$

	yz	y z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$	1	1		
$\overline{x} t$				
$x\overline{t}$				

• Vi dụ 2 Khối thứ tư ứng với đơn thức $\bar{x}yz$

	yz	y z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt				
$\overline{x}t$	1			
$\overline{x} t$	1			
$x\overline{t}$				

Vi dụ 2
 Kết quả có hai nghiệm

$$f_1 = x\bar{z} + y\bar{z}t + \bar{x}yz$$
$$f_2 = x\bar{z} + \bar{x}yt + \bar{x}yz$$

	yz	у Z	$\overline{y} \overline{z}$	\overline{y} z
xt		1	1	
$\overline{x}t$	1	1		
$\overline{x} \overline{t}$	1			
$x\overline{t}$		1	1	

BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Đọc chương 6 (sách Nguyễn Hòa, Nguyễn Nhựt Đông)
- Làm các bài tập chương 6 đã cho theo nhóm và cá nhân