QUAN HỆ
(Relation)

- Các khái niệm
- Quan hệ tương đương
- Quan hệ tứ tự

CÁC KHÁI NIỆM

- Quan hệ hai ngôi
- Quan hệ n-ngôi

QUAN HỆ HAI NGÔI

- Một quan hệ hai ngôi giữa tập A và tập B (từ A đến B) là một tập con R của tập $A \times B$
  - Nếu $(a, b) \in R$, ký hiệu a R b, ta nói a quan hệ R với b
  - Một quan hệ giữa A và A được gọi là quan hệ trên A

QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 1**: Cho A = {0, 1, 2}, B = {a, b}

  thì R= {(0, a), (0, b), (1, a)}

  là một quan hệ hai ngôi giữa A và B

- **Ví dụ 2**: Quan hệ bằng nhau "=" là một quan hệ hai ngôi R trên tập A bất kỳ: a R b khi và chỉ khi a = b

QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 3**: Cho $n > 1$, định nghĩa quan hệ:

  $a\ R\ b \Leftrightarrow a - b$ chia hết cho n

  thì R là một quan hệ hai ngôn trên Z

Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư modulo n trên Z

Nếu $a\ R\ b$ thì ta viết $a \equiv b \pmod{n}$

Với $n = 5$, $2\ R\ 7$ vì $2 - 7$ chia hết cho 5 hay $2 \equiv 7 \pmod{5}$

QUAN HỆ n-NGÔI

- Một quan hệ n-ngôi trên n tập hợp A_1, A_2,…,A_n là một tập con R của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, ký hiệu $R(A_1, A_2, \dots A_n)$
- **Ví dụ**: Quan hệ R(Z, Z, Z), tập con của $Z \times Z \times Z$, gồm các bộ ba (a, b, c), trong đó a, b, c là các số nguyên sao cho $a^2 = b^2 + c^2$ là một quan hệ 3-ngôi trên Z, các phần tử (5, 4, 3), (5, 3, 4), (10, 8, 6),… $\in$ R

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Một quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất
  - Phản xạ: nếu $\forall x \in A \Rightarrow x\ R\ x$
  - Đối xứng: nếu $\forall x, y \in A$, $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$
  - Bắc cầu: nếu $\forall x, y, z \in A$, $x\ R\ y$ và $y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$
- Quan hệ R có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu được gọi là quan hệ tương đương, ký hiệu là $\sim$; nếu xRy thì ta nói x tương đương với y và viết $x \sim y$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 1:

- Quan hệ "=" là các quan hệ tương đương
- Cho ánh xạ f: A$\rightarrow$ B, định nghĩa quan hệ R trên A như sau:

  $$x \; R \; y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

  thì R là một quan hệ tương đương (bài tập)

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 2:

- Cho quan hệ φ trên tập số thực R được xác định như sau: $\forall x, y \in R$, $x \varphi y \Leftrightarrow x - y \in Z$. Chứng minh φ là một quan hệ tương đương
- **Chứng minh**: φ có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu
  - $\forall x \in R$, $x - x \in Z \Rightarrow x \varphi x$ (phản xạ).
  - $\forall x, y \in R$ và $x \varphi y$ thì $x - y \in Z \Rightarrow y - x \in Z \Rightarrow y \varphi x$ (đối xứng)
  - $\forall x, y, z \in R$ và $x \varphi y$, $y \varphi z$ thì $x - y \in Z$, $y - z \in Z \Rightarrow x - z = (x-y)+(y-z) \in Z \Rightarrow x \varphi z$ (bắc cầu)

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Cho R là một quan hệ tương đương trên A và $x \in A$, tập hợp $\{y \in A \mid y \sim x\}$ được gọi là lớp tương đương chứa x, ký hiệu [x]. Tập tất cả các lớp tương đương gọi là tập thương, ký hiệu $A/\sim$
- **Ví dụ**: xét quan hệ $xRy \Leftrightarrow x - y$ nguyên, thì
  - $[x] = \{y \in A \mid y - x \text{ nguyên}\}$
  - $[1.5]=\{..., -1.5, -0.5, 0.5, 1.5,...\}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- **Định lý 1**: Giả sử R là một quan hệ tương đương trên A khi ấy:
  - $\forall x \in A, x \in [x]$
  - $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$
  - Hai lớp tương đương của x và y sao cho $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ thì $[x] = [y]$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Chứng minh:
  - Do tính phản xạ $x \sim x \Rightarrow x \in [x]$
  - Giả sử xRy và $z \in [x]$ suy ra $z \sim x$ nên $z \sim y \Rightarrow z \in [y]$. Vậy $[x] \subset [y]$. Chứng minh tương tự $[y] \subset [x]$
  - Giả sử $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ thì có $z \in [x] \cap [y]$, nghĩa là $z \sim x$ và $z \sim y$. Từ kết quả phần hai ta suy ra $[x] = [z] = [y]$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 3: Xét quan hệ $\equiv$ (mod 3) trên Z thì

- Lớp [0] = {..., -6, -3, 0, 3, ...}
- Lớp [1] = {..., -5, -2, 1, 4, ...}
- Lớp [2] = {..., -4, -1, 2, 5, ...}
  - **Lưu ý**: mọi x $\in$ Z đều thuộc một trong 3 lớp trên. Tập Z bị phân hoạch thành 3 lớp đôi một rời nhau. Z/~ = {[0], [1], [2]}
  - Khái quát: quan hệ $\equiv$ (mod n) phân hoạch Z thành n lớp tương đương, ký hiệu Z_n = {[0], [1], ...[n-1]}

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Một quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất phản đối xứng nếu $\forall x, y \in A$, x R y và y R x $\Rightarrow$ x=y
- Quan hệ R có tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu được gọi là quan hệ thứ tự, ký hiệu là $\prec$
- Nếu xRy thì ta nói x "nhỏ hơn y" và viết $x \prec y$
- Tập A với quan hệ thứ tự R gọi là một tập có thứ tự

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 1:

- Quan hệ "$\leq$" thông thường trên tập số thực **R** là một quan hệ thứ tự
- Trên tập $\wp(X)$ ta định nghĩa quan hệ

$$A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$$

thì quan hệ "$\prec$" là một quan hệ thứ tự trên $\wp(X)$ (bài tập)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 2:

- Trên tập $U_n = \{a \in N$ và $a|n\}$, n là số tự nhiên cho trước, ta định nghĩa quan hệ

  $x \prec y \Leftrightarrow x|y$, thì $\prec$ là một quan hệ thứ tự (bài tập)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 3:

- Gọi R là quan hệ hai ngôi trên tập các số tự nhiên N khác 0, xác định: $\forall m, n \in N$, $n R m \Leftrightarrow n|m$ (n chia hết m), chứng minh R là một quan hệ thứ tự trên N
- **Chứng minh**: R có tính phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu
  - $\forall n \in N$, $n|n \Rightarrow n R n$ (phản xạ)
  - $\forall m, n \in N$ và nRm, mRn $\Rightarrow$ $n|m$, $m|n$ thì n = m (phản đối xứng)
  - $\forall m, n, p \in N$ và nRm, mRp thì $n|m$, $m|p \Rightarrow n|p \Rightarrow$ nRp (bắc cầu)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Lưu ý:

- Một quan hệ thứ tự $\prec$ trên A gọi là toàn phần nếu $\forall x, y \in A$ thì $x \prec y$ hoặc $y \prec x$, ngược lại gọi là quan hệ thứ tự bộ phận
- **Ví dụ**: Quan hệ "$\leq$" trên **R** là toàn phần còn quan hệ "|" (chia hết) là bộ phận

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $\prec$ trên A, giả sử $B \subset A$
  - Phần tử $m \in B$ gọi là nhỏ nhất của B ký hiệu min(B) nếu $\forall x \in B$ ta có $m \prec x$
  - Phần tử $n \in B$ gọi là lớn nhất của B ký hiệu max(B) nếu $\forall x \in B$ ta có $x \prec n$
  - Phần tử $a \in A$ gọi là một chặn trên của B nếu $\forall x \in B$ ta có $x \prec a$
  - Phần tử $b \in A$ gọi là một chặn dưới của B nếu $\forall x \in B$ ta có $b \prec x$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- **Nhận xét**
  - Phần tử bé nhất (lớn nhất) của B nếu có là duy nhất
  - Thật vậy: gọi m và m′ là 2 phần tử bé nhất của B $\Rightarrow \forall x \in B$ ta có $m' \prec x$ và $m \prec x \Rightarrow m' \prec m$ và $m \prec m'$ suy ra $m = m'$ (tính phản đối xứng)
  - Chứng minh tương tự cho phần tử lớn nhất

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 4:

- Cho tập $X = \{a, b, c\}$, $A = \wp(X)$ và quan hệ thứ tự trên A là: $\forall x, y \in A$, $x \prec y \Leftrightarrow x \subset y$ (x và y là các tập con của X)
- Xét $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, thì

➢ $\min(B) = \{a\}$, không có $\max(B)$

➢ Chặn dưới của B là $\varnothing$ và $\{a\}$, B có một chặn trên là $\{a, b, c\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $\prec$ trên A, giả sử $B \subset A$
  - Tập B được gọi là bị chặn trên nếu B có ít nhất một chặn trên
  - Tập B được gọi là bị chặn dưới nếu B có ít nhất một chặn dưới
  - Tập B được gọi là bị chặn nếu B vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $\prec$ trên A, giả sử $B \subset A$
  - Giả sử B bị chặn trên, thì phần tử bé nhất nếu có của tập các chặn trên của B gọi là chặn trên nhỏ nhất của B, ký hiệu supB
  - Giả sử B bị chặn dưới, thì phần tử lớn nhất nếu có của tập các chặn dưới của B gọi là chặn dưới lớn nhất của B, ký hiệu infB

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 5:

- Cho tập X = {a, b, c}, A= P(X) và quan hệ tứ tự trên A là: $\forall x, y \in A, x \prec y \Leftrightarrow x \subset y$
- Xét B = {{a}, {a, b}, {a, c}}, thì
  - Tập các chặn trên của B là {{a, b, c}}, supB = {a, b, c}
  - Tập các chặn dưới của B là {∅, {a}}, infB = {a}

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $\prec$ trên A, giả sử $B \subset A$
  - Nếu min(B) tồn tại thì infB = min(B)
  - Nếu max(B) tồn tại thì supB = max(B)
  - Nếu infB tồn tại và infB $\in$ B thì min(B) tồn tại và min(B) = infB
  - Nếu supB tồn tại và supB $\in$ B thì max(B) tồn tại và max(B) = supB

QUAN HỆ THỨ TỰ

- **Chứng minh**: mệnh đề thứ nhất và thứ ba
  - Gọi L là tập các chặn dưới của B, ta có min(B) $\in$ L. Mặt khác $\forall x \in$ L thì $x \prec$ minB (do minB $\in$ B). Theo định nghĩa $\Rightarrow$ min(B) là chặn dưới lớn nhất hay min(B) =infB.
  - Giả sử infB tồn tại và infB $\in$ B $\Rightarrow$ $\forall x \in$ B, infB $\prec$ x. Theo định nghĩa infB = min(B).

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Xét một tập có thứ tự $(A, \prec)$, x và y là hai phần tử bất kỳ của A
  - Nếu $x \prec y$ ta nói y là trội của x (y lớn hơn x) hay x được trội bởi y
  - y là trội trực tiếp của x nếu y trội x và không tồn tại một trội z của x sao cho:

$$x \prec z \prec y \text{ và } x \neq z \neq y$$

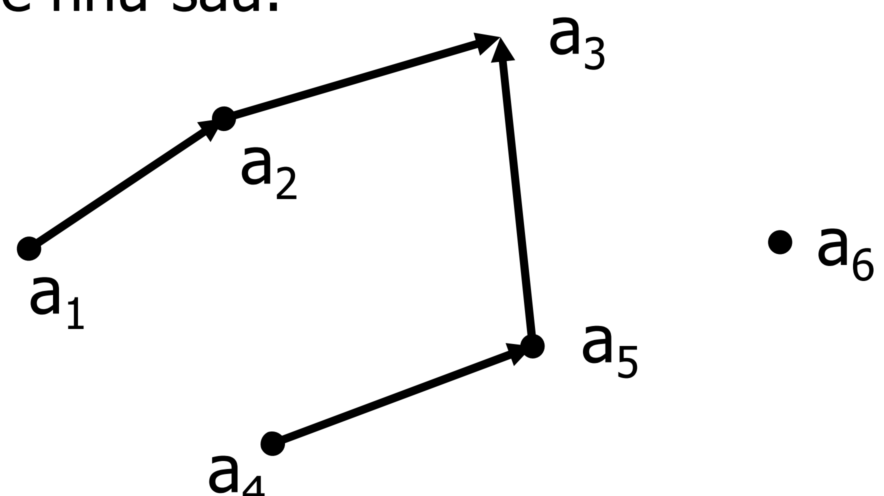
QUAN HỆ THỨ TỰ

- Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn có thứ tự $(A, \prec)$ bao gồm:
  - Một tập các điểm trong mặt phẳng tương ứng 1-1 với tập A, gọi là các đỉnh
  - Một tập các cung có hướng nối một số đỉnh: hai đỉnh x, y được nối bởi một cung có hướng từ x tới y nếu y là trội trực tiếp của x

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 6:

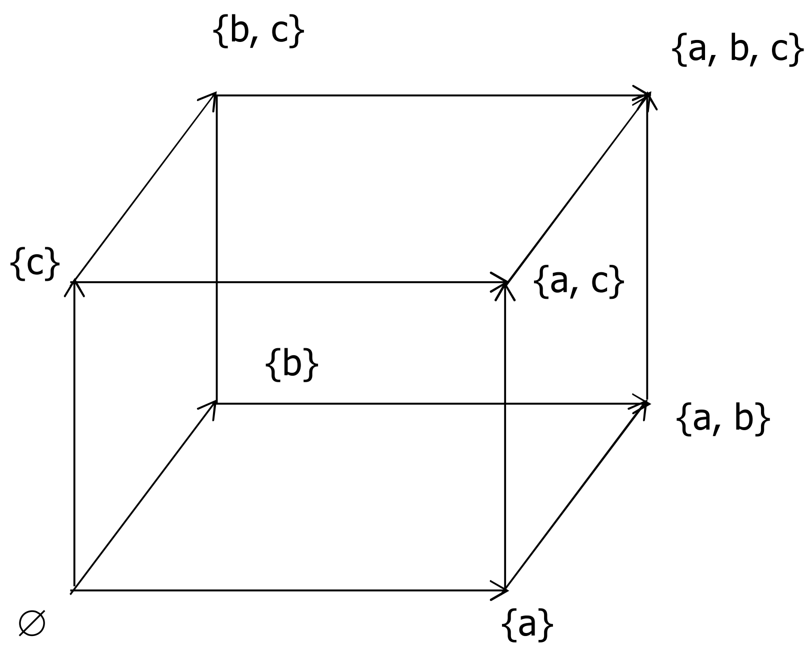
- Cho tập $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ trong đó $a_1 \prec a_2 \prec a_3$ và $a_4 \prec a_5 \prec a_3$, thì biểu đồ Hasse như sau:



- Phần tử a_6 không "so sánh" được với các phần tử khác nên không có cung nào đến và ra khỏi nó

QUAN HỆ THỨ TỰ

Với E={a, b, c}, biểu đồ Hasse của $\wp$(E) có dạng



BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Đọc chương 5 (sách Nguyễn Hòa, Nguyễn Nhựt Đông)
- Làm các bài tập chương 5 đã cho theo nhóm và cá nhân