TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

- Tập hợp
- Ánh xạ

TẬP HỢP

- Các khái niệm và ký hiệu
- Các phép toán trên tập hợp
- Tập các tập con của một tập hợp
- Tính chất các phép toán trên tập hợp

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

- Tập hợp là một khái niệm toán học cơ bản không được định nghĩa
- Có thể mô tả tập hợp, chẳng hạn, tập các học sinh trong lớp CSMT2011, tập các số nguyên tố vv..
- Một tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu $\varnothing$

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

- Biểu diễn tập hợp
  - Liệt kê: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
  - Theo tính chất của các phần tử: $A = \{x \in \Omega \mid p(x)\}$
  - Ví dụ $A = \{x \in R \mid 2x^2 + 3x - 5 = 0\}$

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

- Cho A, B là hai tập hợp, nếu $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ thì A là tập con của B, ký hiệu $A \subset B$
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì tập A bằng tập B, ký hiệu A = B
- Số phần tử của tập hợp A được gọi là bản số của nó (cardinality), ký hiệu là $|A|$

  Ví dụ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, thì $|A| = n$

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

Định Lý Cho ba tập hợp A, B và C, khi đó ta có:

- Nếu A B và B C thì A C
- A = B nếu và chỉ nếu A B và B A

CÁC KHÁI NIỆM VÀ KÝ HIỆU

Chứng minh

- $\forall x \in A$, do $A \subset B$ nên $x \in B$, lại do $B \subset C$ nên $x \in C$. Vì vậy $A \subset C$
- Vì A = B nên mọi phần tử trong A cũng là phần tử trong B và ngược lại nên $A \subset B$ và $B \subset A$. Mặt khác nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì mọi phần tử thuộc A cũng thuộc B và ngược lại nên A = B

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Cho tập Ω (gọi là tập vũ trụ) và A, B các tập con của Ω

- Hợp của hai tập: $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$
- Giao của hai tập: $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A$ và $x \in B\}$
- Hiệu của hai tập: $A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A$ và $x \notin B\}$

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

- Phần bù $\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$
- Tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i=1,\ldots, n\}$

TẬP CÁC TẬP CON CỦA MỘT TẬP HỢP

- Cho tập X, tập $\wp(X) = \{A \mid A \subset X\}$ gọi là tập các tập con của tập X
  - Tập các tập con còn được ký hiệu $\wp(X) = 2^X$
  - Ví dụ X ={a_1, a_2, a_3}, thì $\wp(X) = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$

TÍNH CHẤT CÁC PHÉP TOÁN

Cho tập Ω và A, B các tập con của Ω

- Các phép toán $\cup$, $\cap$ trên tập hợp có tính giao hoán, kết hợp và phân bố
- Luật De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Tính chất của phần bù: $A \cup \overline{A} = \Omega$

  $A \cap \overline{A} = \varnothing$

ÁNH XẠ

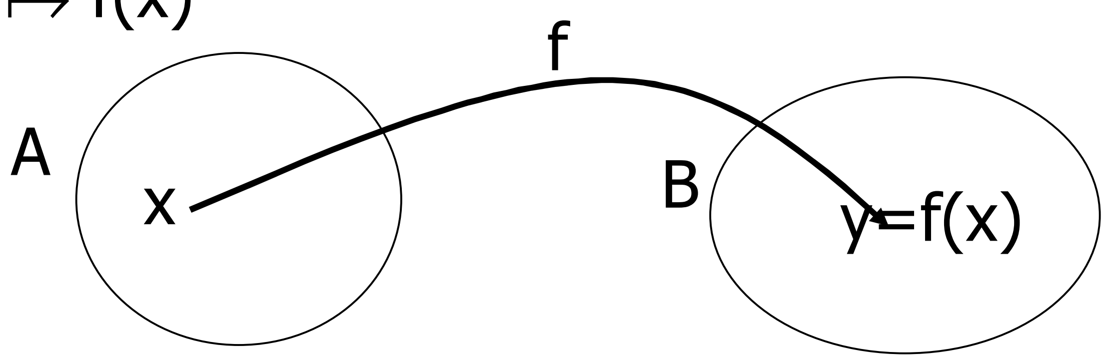
- Các khái niệm
- Ánh xạ ngược
- Ánh xạ hợp
- Ánh xạ đồng nhất
- Các tính chất

CÁC KHÁI NIỆM

- Một ánh xạ f từ tập A vào tập B là phép gán tương ứng mỗi phần tử x của A với một phần tử duy nhất y của B, ký hiệu là f(x), gọi là ảnh của x qua f

$$f:\ A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

➢ $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



CÁC KHÁI NIỆM

Ví dụ 1 Cho A = {1, 2}, B = {a, b, c}, tương ứng

$1 \mapsto c$

$2 \mapsto a$

xác định một ánh xạ f từ A vào B

CÁC KHÁI NIỆM

Ví dụ 2 Gọi R là tập hợp số thực và Z là tập hợp số nguyên, với mỗi số thực x ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x, thì tương ứng

$$x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

xác định một ánh xạ f: R   Z (nghĩa là $y=f(x)= \lfloor x \rfloor$)

CÁC KHÁI NIỆM

- Hai ánh xạ f và g từ A vào B được gọi là bằng nhau nếu

  $\forall x \in A, f(x) = g(x)$

- Nếu E là một tập con của A thì ảnh của E qua f là tập

  $f(E) = \{y \in B \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$

  Nghĩa là $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$

CÁC KHÁI NIỆM

- Nếu F là tập con của B thì ảnh ngược (tạo ảnh) của F là tập $f^{-1}(F) = \{x \in A \mid f(x) \in F\}$
- Nếu $y \in B$, $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$

CÁC KHÁI NIỆM

- Giả sử f: A $\rightarrow$ B là ánh xạ từ A vào B, khi đó
  - f là toàn ánh nếu f(A) = B ($\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$)
  - f là đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của A có ảnh khác nhau

    $\forall x, x' \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
  - f là song ánh nếu đồng thời là đơn ánh và toàn ánh

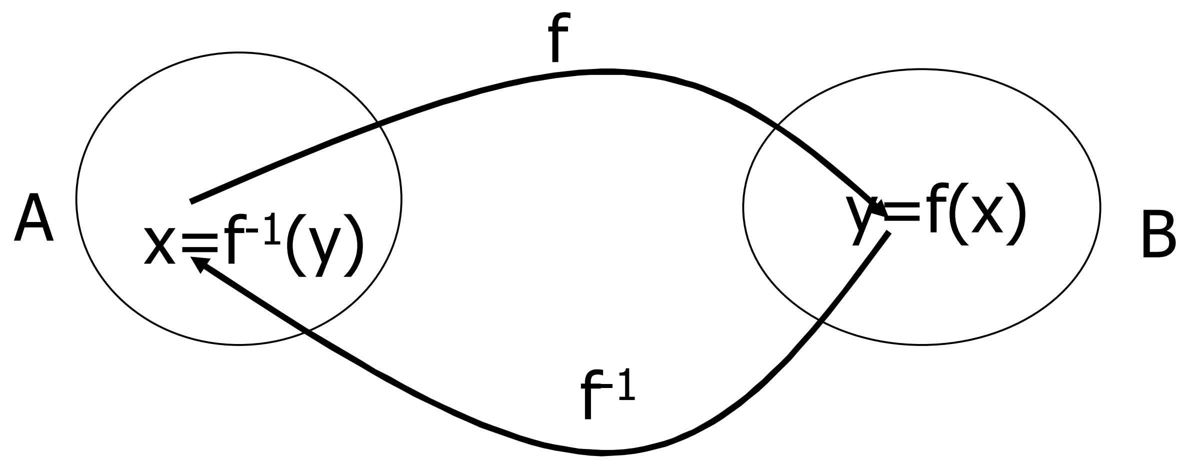
CÁC KHÁI NIỆM

Cho $A = \{a_1, a_2\}$, $B= \{b_1, b_2, b_3\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3\}$

- $f: A \to B$; $f(a_1)= b_1$, $f(a_2)= b_3$ là một đơn ánh
- $g: C \to A$; $g(c_1)= a_1$, $g(c_2)= a_1$, $g(c_3)= a_2$ là một toàn ánh
- $h: B \to C$; $h(b_1)= c_2$, $h(b_2)= c_1$, $h(b_3)= c_3$ là một song ánh
- Tìm một ánh xạ không đơn ánh, không toàn ánh?

ÁNH XẠ NGƯỢC

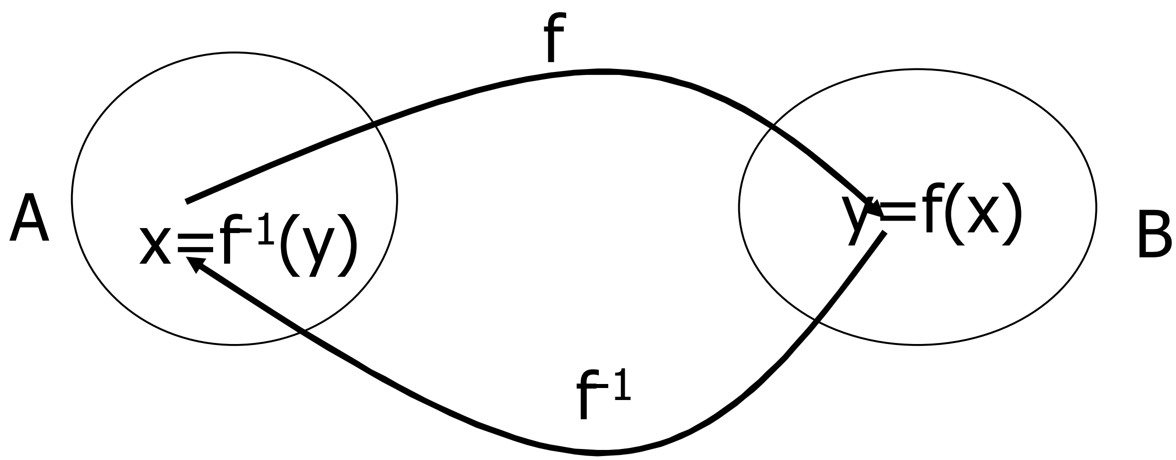
- Cho f: A B là một song ánh từ A vào B, tương ứng f^{-1}: B A sao cho với mỗi y ⌊ B ứng với x ⌊ A mà f(x) = y, được gọi là ánh xạ ngược của f



➢ $f^{-1}(y) = x$ khi và chỉ khi $f(x) = y$

ÁNH XẠ NGƯỢC

- Từ định nghĩa suy ra $\forall y \in B$, $f(f^{-1}(y)) = y$ và $\forall x \in A$, $f^{-1}(f(x)) = x$



ÁNH XẠ NGƯỢC

- Cho f: R $\to$ R, x $\mapsto$ x^3 +1 là một song ánh

  Tìm ánh xạ ngược f^{-1}: R $\to$ R

  $$y \mapsto f^{-1}(y)$$

  Gọi x là ảnh của y qua f^{-1} thì

  $f^{-1}(y) = x$ (*)

  Theo định nghĩa ta có f(x) = y, hay $x^3 + 1 = y \Leftrightarrow$

  $x = \sqrt[3]{y-1}$, thay vào (*) ta có $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$

ÁNH XẠ HỢP

- Cho hai ánh xạ f: $A \to B$ và g: $B \to C$, ánh xạ hợp (tích) của hai ánh xạ f và g là ánh xạ h: $A \to C$ xác định bởi

$$h: A \to C$$

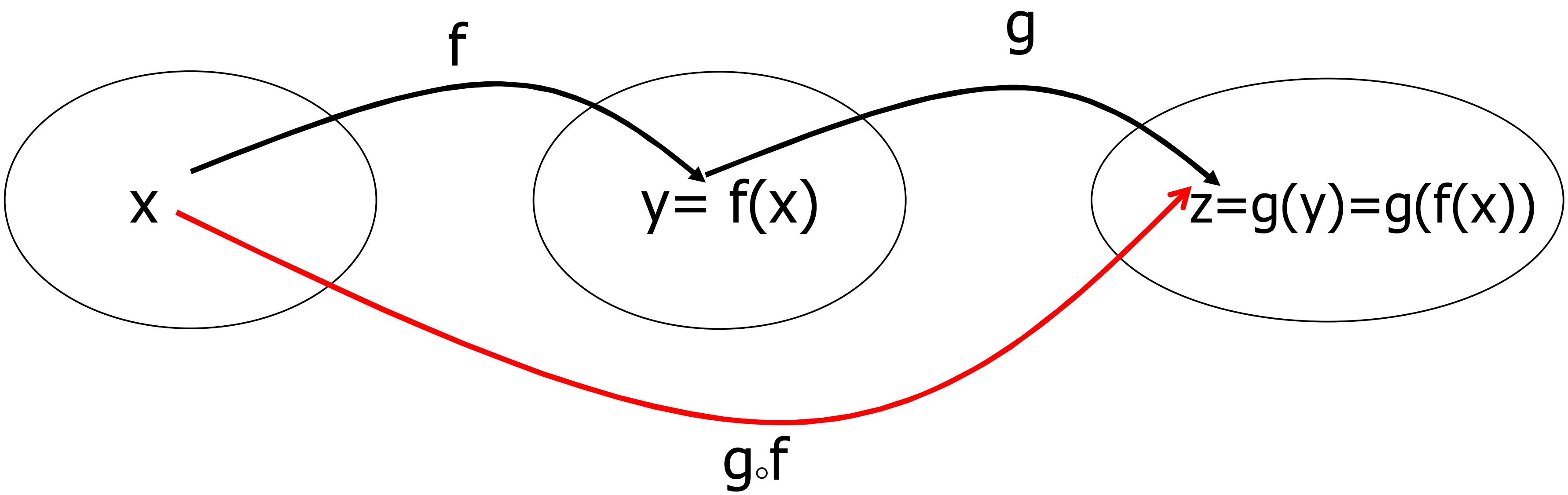
$$x \mapsto h(x)=g(f(x))$$

Ta viết $h = g \circ f : A \to B \to C$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) = h(x)$$

ÁNH XẠ HỢP

- Ánh xạ hợp h = g f : A   B   C của hai ánh xạ f: A   B và g: B   C



ÁNH XẠ ĐỒNG NHẤT

- Cho X là tập bất kỳ, ánh xạ

$$id_X: \; X \to X$$

$$x \mapsto x$$

$\forall x \in A$, được gọi là ánh xạ đồng nhất trên X

CÁC TÍNH CHẤT

- Cho các ánh xạ f: $A \to B$, g: $B \to C$ và h: $C \to D$
  - $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (kết hợp)
  - $f \circ id_A = f$ và $id_B \circ f = f$

Chứng minh: $\forall x \in A$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h \circ [(g \circ f)(x)]$

$$= h \circ [g(f(x))]$$

$$= (h \circ g)(f(x))$$

$$= ((h \circ g) \circ f)(x)$$

lưu ý: nói chung là $f \circ g \neq g \circ f$ (không giao hoán)

CÁC TÍNH CHẤT

- Cho f: A   B, g: B   C là các song ánh

  $f\ f^{-1} = id_B$ và $f^{-1}\ f = id_A$

  $(g\ f)^{-1} = f^{-1}\ g^{-1}$ (xem như bài tập).

Chứng minh: rõ rang $f\ f^{-1}$ là ánh xạ từ B vào B và

$\forall y \lfloor\ B, f\ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$

Vậy: $f\ f^{-1} = id_B$

CÁC TÍNH CHẤT

Gọi $f: A \to B$, $E_1, E_2 \subset A$ và $F_1, F_2 \subset B$ ta có

- $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$
- $f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$
- $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$
- $f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$

Chứng minh: Xem như bài tập

BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Đọc chương 2 (sách Nguyễn Hòa, Nguyễn Nhựt Đông)
- Làm các bài tập chương 2 đã cho theo nhóm và cá nhân