HỆ THỨC TRUY HỒI

- Các khái niệm
- Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi
- Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

CÁC KHÁI NIỆM

- Hệ thức truy hồi đối với dãy $\{a_n\}$ là một phương trình có dạng $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k})$, $\forall n \geq n_0 \geq 0$
- **Ví dụ 1** $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$
  - Nếu cho $a_0=3$ và $a_1=5$ thì có thể xác định $a_2 = a_1 - a_0 = 5-3 = 2$, $a_3 = a_2 - a_1 = 2-5 = -3$,...

CÁC KHÁI NIỆM

- Dãy $\{a_n\}$ được gọi là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này
- **Ví dụ 2** Kiểm tra xem $a_n=3n$ và $a_n=5$ với $n=0, 1,\ldots$ có là các nghiệm của hệ thức $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \forall n \geq 2$ hay không
  - Với $a_n=3n$, ta có $2a_{n-1} - a_{n-2}=2(3(n-1))-3(n-2)=3n=a_n$ vậy $a_n=3n$ là một nghiệm
  - Với $a_n=5$, ta có $2a_{n-1} - a_{n-2}=2.5-5=5=a_n$ nên $a_n=5$ cũng là một nghiệm

CÁC KHÁI NIỆM

- Các điều kiện đầu là các giá trị của các số hạng của dãy đi trước số hạng đầu tiên kể từ đó hệ thức truy hồi có hiệu lực
- **Ví dụ 3** $a_0 = 3$, $a_1=5$ đối với hệ thức truy hồi $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$, là các điều kiện đầu

CÁC KHÁI NIỆM

- Hệ thức truy hồi với điều kiện đầu xác định một dãy (nghiệm) duy nhất của nó
- Điều kiện đầu và hệ thức truy hồi cung cấp một định nghĩa đệ qui cho một dãy

CÁC KHÁI NIỆM

- Có thể xác định mọi số hạng của dãy sau một số lần truy hồi nào đó khi có điều kiện đầu
- Hệ thức truy hồi $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k})$ xác định một dãy duy nhất khi có k điều kiện đầu $a_0 = C_0, a_1 = C_1, ..., a_{k-1} = C_{k-1}$

MÔ HÌNH HÓA BẰNG HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 1** Một người gửi 10.000$ vào tài khoản tại ngân hàng với lải kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản.
- **Giải** Gọi P_n là tổng số tiền có sau n năm, vì số tiền sau n năm bằng số tiền sau n-1 năm cộng với số tiền lải kép năm thứ n $(0.11.P_{n-1})$
  - ➢ $P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$, hay $P_n = 1.11P_{n-1}$, $P_0 = 10.000\$$
  - ➢ $P_1 = (1.11)P_0$, $P_2 = (1.11)P_1 = (1.11)^2P_0$, ... , $P_n = (1.11)^nP_0$
  - ➢ Vậy $P_{30} = (1.11)^{30}10.000\$ = 228922,97\$$

MÔ HÌNH HÓA BẰNG HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 2** Tìm tất cả các xâu nhị phân n bits không có 2 số 0 liên tiếp
- **Giải ?**

MÔ HÌNH HÓA BẰNG HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Giải** Gọi S_n là số xâu nhị phân n bits không có 2 số 0 liên tiếp. Chia tập các xâu như vậy thành 2 tập $B_1 = \{(b_1b_2...b_{n-1}1) \mid b_ib_{i+1} \neq 00\}$ và $B_2=\{(b_1b_2...b_{n-1}0) \mid b_ib_{i+1} \neq 00\}$.
  - $S_n = |B_1| + |B_2|$
  - $|B_1| = S_{n-1}$
  - $|B_2| = S_{n-2}$ (vì $b_n = 0$ nên $b_{n-1} = 1$, $B_2=\{(b_1b_2...b_{n-2}10) \mid b_ib_{i+1} \neq 00\}$)
  - Vậy $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, $s_1 = 2$, $s_2 = 3$
  - $S_3 = S_2 + S_1 = 3 + 2 = 5$
  - $S_4 = S_3 + S_2 = 5 + 3 = 8$, ….

MÔ HÌNH HÓA BẰNG HỆ THỨC TRUY HỒI

- **Ví dụ 3** Tìm công thức truy hồi cho C^k_n
- **Giải ?**

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k > 0$ là một hệ thức dạng
  - $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$, $n \geq k$ (1)
  - Với $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số thực, $c_k \neq 0$
- **Ví dụ** Hệ thức Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- Dãy $a_n = r^n$ là nghiệm của $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$
  - ➢ $r^n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$
  - ➢ $r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - ... - c_k = 0$ (2)
- Phương trình (2) được gọi là phương trình đặc trưng của (1), và nghiệm của nó được gọi là nghiệm đặc trưng
- Lưu ý: Hệ thức bậc hai $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$, $n \geq 2$ có PT đặc trưng là

$$r^2 - c_1r - c_2 = 0$$

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Định Lý 1** Cho c_1, c_2 là các hằng số. Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt r_1, r_2. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với n = 0,1, 2,.... Trong đó α_1, α_2 là các hằng số

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

Chứng minh

Giả sử $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với $\forall n \geq 0$, do r_1 và r_2 là nghiệm của $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ nên

$$
\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
&= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n
\end{aligned}
$$

Vậy dãy $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, $\forall \geq 0$ là một nghiệm của $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

Chứng minh

Giả sử dãy $\{a_n\}$ là một nghiệm của $a_n=c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ thỏa điều kiện đầu $a_0=C_0$, $a_1=C_1$, khi đó có α_1 và α_2 để $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ thỏa ĐKĐ này.

Thật vậy, với $a_0=C_0= \alpha_1 + \alpha_2$ và $a_1=C_1= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$

Ta suy ra $\alpha_1=(C_1-C_0r_2)/(r_1-r_2)$

$\alpha_2=(C_0r_1-C_1)/(r_1-r_2)$

Vậy $\{a_n\}$ và $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$, $\forall n \geq 0$ cùng là một nghiệm của hệ thức $a_n=c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$, hay $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Ví dụ 1** Tìm một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 2$ với $a_0 = 2$, $a_1 = 7$
- **Giải** Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 2 = 0$
  - Nghiệm phương trình đặc trưng $r_1 = 2$, $r_2 = -1$
  - Nghiệm hệ thức $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$, $n = 0,1,\ldots$
  - Thế điều kiện đầu $\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ và $\alpha_1 2 + \alpha_2(-1) = 7$
  - suy ra $\alpha_1 = 3$ và $\alpha_2 = -1$
  - Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là $a_n = 3.2^n - (-1)^n$, $n \geq 0$

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Ví dụ 2** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$
- **Giải ?**

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Định Lý 2** Cho c_1, c_2 là các hằng số. Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm kép r_0. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n\, r_0^n$ với n = 0,1, 2,.... Trong đó α_1, α_2 là các hằng số

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Ví dụ 3** Tìm một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $n \geq 2$ với $a_0 = 1$, $a_1 = 6$
- **Giải** Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$
  - Nghiệm kép phương trình đặc trưng $r = 3$
  - Nghiệm hệ thức $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$, $n = 0,1,\ldots$
  - Thế điều kiện đầu $\Rightarrow \alpha_1 = 1$ và $\alpha_1 3 + \alpha_2 3 = 6$
  - suy ra $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = 1$
  - Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là $a_n = 3^n + n3^n$, $n \geq 0$

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Định Lý 3** Cho c_1, c_2, ..., c_k là các hằng số. Giả sử phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$ với n= 0,1, ... Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các hằng số

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Ví dụ 4** Tìm một nghiệm của hệ thức truy hồi bậc ba $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $n \geq 3$, với $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$
- **Giải** Phương trình đặc trưng $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$
  - Nghiệm phương trình đặc trưng $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$
  - Nghiệm hệ thức $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$, $n = 0,1,...$
  - Thế điều kiện đầu $\Rightarrow$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$, $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5$ và $\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 15$
  - suy ra $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$
  - Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là $a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$, $n \geq 0$

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Định Lý 4** Cho $c_1, c_2, ..., c_k$ là các hằng số. Giả sử phương trình đặc trưng $r^k - c_1r^{k-1} - ... - c_k = 0$ có t nghiệm $r_1, r_2, ..., r_t$ bội tương ứng $m_1, m_2, ..., m_t$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$ nếu và chỉ nếu $a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + ... + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + ... + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n + ... + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + ... + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n$ với n= 0, 1, 2, ... Trong đó $\alpha_{i,j}$, i=1,..t, j=0..., m_t -1 là các hằng số

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Ví dụ 5** Giả sử phương trình đặc trưng có nghiệm là 2, 2, 2, 5, 5, 9 thì nghiệm của hệ thức truy hồi là:

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n$$

GIẢI HTTH TUYẾN TÍNH TN

- **Ví dụ 6** Tìm một nghiệm của

  $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, $n \geq 3$, với $a_0=1$, $a_1=-2$, $a_2=-1$

- **Giải** PT đặc trưng $r^3+3r^2+3r+1=0$
  - PT đặc trưng có một nghiệm là r=-1 bội 3
  - Nghiệm HT $a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)(-1)^n$
  - Thế điều kiện đầu $\alpha_{1,0}=1$, $\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} = 2$, $\alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} = -1$, suy ra $\alpha_{1,o}=1$, $\alpha_{1,1}=3$ và $\alpha_{1,2}=-2$
  - Vậy $a_n = (1 + 3n + -2n^2)(-1)^n$, $n \geq 3$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Đọc chương 4 (sách Nguyễn Hòa, Nguyễn Nhựt Đông)
- Làm các bài tập chương 4 đã cho theo nhóm và cá nhân