NGUYỄN HÒA *(Chủ biên)*
NGUYỄN NHỰT ĐÔNG

TOÁN RỜI RẠC

NHÀ XUẤT BẢN THANH NIÊN

LỜI NÓI ĐẦU

Toán rời rạc là một bộ phận của toán học chủ yếu nghiên cứu về các cấu trúc toán học có tính rời rạc như đại số mệnh đề, logic vị từ, ánh xạ, quan hệ, giải tích tổ hợp, đồ thị rời rạc, hệ thức truy hồi, lý thuyết automata và ngôn ngữ hình thức,...

Toán rời rạc là công cụ thiết yếu cho sự phát triển cả về lý thuyết và ứng dụng của nhiều ngành khoa học và kỹ thuật khác nhau như lý thuyết xác suất, điện tử viễn thông, xử lý tín hiệu... Đặc biệt, toán rời rạc được xem như là cơ sở lý thuyết nền tảng để xây dựng ngành khoa học máy tính, một lĩnh vực khoa học non trẻ với sự phát triển kỳ diệu đã làm thay đổi nhanh chóng khoa học, công nghệ cũng như kinh tế, văn hóa và xã hội trên toàn thế giới trong những năm gần đây. Cụ thể hơn, toán rời rạc vừa là công cụ để mô hình hóa, thiết kế và chế tạo các máy tính điện tử, những máy tính chỉ phù hợp với việc xử lý các tín hiệu rời rạc, vừa là cơ sở toán học để phân tích, thiết kế các giải thuật, mô hình hóa, hình thức hóa các hệ thống thông tin, tính toán và xử lý dựa trên máy tính điện tử một cách đúng đắn và hiệu quả.

Toán rời rạc là cơ sở toán học cho khoa học máy tính nhưng chính sự phát triển nhanh chóng vượt bậc của khoa học máy tính cũng thúc đẩy mạnh mẽ việc nghiên cứu, khám phá các kết quả mới trong toán rời rạc nhằm đáp ứng các công cụ biểu diễn, tính toán và xử lý mới của khoa học máy *tính. Với sự phát triển có tính tương hỗ, hữu cơ như vậy, các lý thuyết mới như logic đa trị, logic xác suất, lý thuyết tập mờ, logic mờ, quan hệ mờ,... đã được nghiên cứu và phát triển với nhiều kết quả được công bố trong những năm gần đây.*

Với đặc thù như một hệ thống toán học có tính công cụ thiết yếu cho khoa học máy tính, toán rời rạc được giảng dạy, và được xem như một môn học bắt buộc của các sinh viên, *trong các khoa công nghệ thông tin, khoa học máy tính của hầu hết các trường đại học trên thế giới.*

Quyển sách toán rời rạc này được biên soạn cho sinh viên chuyên *ngành khoa học máy tính, kỹ thuật máy tính, công nghệ thông tin và có thể được học tập và giảng dạy ngay học kỳ đầu của năm học thứ nhất của bậc đại học. Sinh viên các ngành điện tử viễn thông, toán tin học, toán ứng dụng cũng có thể xem quyển sách này như một tài liệu tham khảo bổ ích. Quyển sách tập trung trình bày các vấn đề cốt lõi có phạm vi ứng dụng chung, rộng rãi nhất vào khoa học máy tính và công nghệ thông tin của toán rời rạc như cơ sở* logic, *tập hợp, ánh xạ, quan hệ, các phương pháp đếm, giải tích tổ hợp, hệ thức truy hồi, đại số Boole và hàm Boole.*

Để trình bày các nội dung toán rời rạc, bao gồm cả những khái niệm trừu tượng cũng như các tính chất phức tạp của các đối tượng toán học một cách khoa học, có hệ thống sao cho dễ đọc và dễ hiểu, các tác giả đã kết hợp các dẫn nhập, diễn giải trực giác, không hình thức với các định nghĩa *hình thức, chính xác, các chứng minh chặt chẽ và các ví dụ minh họa có tính điển hình từ đơn giản đến phức tạp. Ngoài ra, để cho thấy toán rời rạc thực sự là công cụ cho khoa học máy tính và công nghệ thông tin, trong hầu hết các nội dung được trình bày, đặc biệt là trong các giới thiệu đầu mỗi chương, các tác giả đã liên hệ, nêu lên mối quan hệ cũng như khả năng ứng dụng của chúng trong các lĩnh vực của khoa học máy tính và công nghệ thông tin.*

Một hệ thống các bài tập phong phú có chọn lọc được giới thiệu sau mỗi chương giúp sinh viên củng cố kiến thức cơ bản, rèn luyện và nâng cao khả năng giải quyết vấn đề cũng như mở rộng hơn nữa các vấn đề chưa được đề cập trong lý thuyết.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng chắc chắn quyển sách toán rời rạc này không thể tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả mong nhận được những nhận xét, đóng góp quí giá của các sinh viên nói riêng và các độc giả nói chung.

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 10 năm 2014

Nguyễn Hòa

Nguyễn Nhựt Đông

Chương 1

CƠ SỞ LOGIC

Cơ sở logic bao gồm logic mệnh đề (propositional logic) và logic vị từ (predicate logic) là phương tiện cho các phát biểu và trình bày các lập luận một cách có hệ thống trong thực tế. Trong toán học, cơ sở logic là nền tảng cho các suy luận, chứng minh để giải quyết các bài toán, xây dựng và phát triển các lý thuyết mới. Với Khoa học Máy tính, logic mệnh đề và logic vị từ được ứng dụng rộng rãi từ việc xây dựng các hệ thống như hệ chứng minh tự động, hệ chuyên gia, hệ hỗ trợ quyết định, v.v. đến phát triển các cơ sở lý thuyết nền tảng như cơ sở trí tuệ nhân tạo, cơ sở tri thức, các ngôn ngữ lập trình logic, v.v.

Phần 1.1, 1.2, 1.3 và 1.4, 1.5 và 1.6 của chương này tương ứng trình bày khái niệm mệnh đề, các phép toán mệnh đề, dạng mệnh đề, sự tương đương logic, các qui tắc suy diễn và các phương pháp chứng minh với mệnh đề như một hệ thống lý thuyết nền tảng và nhất quán. Phần 1.7, 1.8 và 1.9 lần lượt trình bày các khái niệm vị từ, lượng từ và các qui tắc suy diễn với lượng từ như một cơ sở logic mở rộng của logic mệnh đề làm nền tảng cho các ứng dụng trong khoa học và thực tiễn mà logic mệnh đề không đáp ứng được.

1.1 Khái niệm mệnh đề

Mệnh đề (proposition) là một khái niệm cơ bản của toán học không được định nghĩa một cách hình thức dựa trên các khái niệm toán học khác. Những câu, hay phát biểu đúng hoặc sai trên cơ sở thực tế khách quan được gọi là những mệnh đề. Một mệnh đề không thể cùng đúng hoặc cùng sai. Mệnh đề là nền tảng của các phát biểu và chứng minh toán học. Các ví dụ sau minh họa cho khái niệm mệnh đề.

✓ **Ví dụ 1.1.1** Những câu sau đây là các mệnh đề:

1. Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
2. 1 + 3 = 4.
3. Trái đất quay quanh mặt trời.
4. Nếu a và b là các số chẵn thì tổng $a + b$ là một số chẵn.
5. 4 là số nguyên tố.
6. 7 không phải là số nguyên.

Các mệnh đề 1, 2, 3, 4 là đúng, còn các mệnh đề 5 và 6 là sai.

✓ **Ví dụ 1.1.2** Các câu sau đây không phải mệnh đề:

1. Bây giờ là mấy giờ ?
2. Trời đẹp quá !
3. x +1 = 2.

Câu 1 và 2 không phải là mệnh đề vì chúng là các câu hỏi hoặc câu cảm thán nên không xác định tính đúng sai của bất kỳ hiện thực khách quan nào. Câu 3 là một phát biểu mà tính đúng sai phụ thuộc và số x. Chúng ta cũng không biết câu này đúng hay sai nên nó cũng không phải là một mệnh đề.

Một *biến mệnh đề* (propositional variable) là biến mà giá trị của nó là một mệnh đề. Chúng ta sử dụng các chữ cái như p, q, r, s … để ký hiệu các biến mệnh đề. Một mệnh đề đúng ta nói mệnh đề có *giá trị chân lý* (truth value) hay chân trị đúng và được ký hiệu là **T** hay 1. Một mệnh đề sai ta nói mệnh đề có giá trị chân lý hay chân trị sai và được ký hiệu là **F** hay 0. Trong tài liệu này, chân trị của các mệnh đề đúng, sai tương ứng được biểu diễn là 1 và 0. Chúng ta cũng có thể viết $p = 0$, $p = 1$ để chỉ mệnh đề p có chân trị tương ứng bằng 0, 1.

Một mệnh đề biểu diễn các phát biểu hay suy luận có sử dụng các liên từ logic như "và", "hoặc", "không", "nếu…thì", v.v, được gọi là mệnh *đề phức hợp* (complex proposition). Ngược lại thì gọi là *mệnh đề nguyên thủy* hay *sơ cấp* (atomic proposition). Chẳng hạn, các mệnh đề 4 và 6 trong ví dụ 1.1.1 là các mệnh đề phức hợp.

1.2 Các phép toán mệnh đề

Các phép toán mệnh đề được định nghĩa bằng cách hình thức hóa các liên từ logic, làm cơ sở cho việc biểu diễn các mệnh đề phức hợp để mô hình hóa cho các phát biểu về các tính chất và mối quan hệ đa dạng của các đối tượng trong thực tế.

Các phép toán mệnh đề bao gồm phép phủ định, phép hội, phép tuyển, phép tuyển loại trừ, phép kéo theo và phép kéo theo hai chiều. Tập các mệnh đề cùng với các phép toán mệnh đề tạo thành một đại số gọi là *đại số các mệnh đề* (propositional algebra) làm cơ sở để xây dựng lý thuyết *logic hình thức* (formal logic) có nhiều ứng dụng trong nhiều ngành khoa học trong đó có Khoa học Máy tính. Các phép toán mệnh đề lần lượt được định nghĩa dưới đây.

▪ **Đinh nghĩa 1.2.1** Giả sử p là một mệnh đề, phép *phủ định* (negation) của p, được kí hiệu $\neg p$, là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi p sai.

Kết quả chân trị của phép phủ định $\neg p$ khi biết chân trị của mệnh đề p được thể hiện như trong Bảng 1.2.1.

Bảng 1.2.1. Chân trị của phép phủ định

p	$\neg p$
0	1
1	0

✓ **Ví dụ 1.2.1**

1. Cho p là mệnh đề "Trái đất quay", thì $\neg p$ là mệnh đề "Không phải Trái đất quay". Dễ thấy p là đúng, và $\neg p$ là sai.

2. Cho p là mệnh đề "5 + 2 = 9", thì $\neg p$ là mệnh đề "Không phải 5 + 2 = 9". Nghĩa là "$5 + 2 \neq 9$". Ở đây, p là sai và $\neg p$ là đúng.

▪ **Đinh nghĩa 1.2.2** Giả sử p và q là hai mệnh đề, phép *hội* (conjunction) của p và q, được ký hiệu $p \wedge q$, là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi cả p và q đúng.

Kết quả chân trị của phép hội $p \wedge q$ của hai mệnh đề p và q được thể hiện như trong Bảng 1.2.2.

Bảng 1.2.2. Chân trị của phép hội

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

✓ **Ví dụ 1.2.2**

1. Cho p là mệnh đề "12 là số nguyên" và q là mệnh đề "12 chia hết cho 5" thì $p \wedge q$ là mệnh đề "12 là số nguyên và 12 chia hết cho 5" hay ngắn gọn hơn "12 là số nguyên chia hết cho 5" là một mệnh đề sai. Ở đây, mệnh đề q là sai nên $p \wedge q$ sai.

2. Cho p là mệnh đề "7 là số lẻ" và q là mệnh đề "7 là số nguyên tố" thì $p \wedge q$ là mệnh đề "7 là số lẻ và là

số nguyên tố ” là một mệnh đề đúng. Ở đây, p và q đều đúng nên $p \wedge q$ đúng.

▪ **Đinh nghĩa 1.2.3** Giả sử p và q là hai mệnh đề, phép *tuyển* (disjunction) của p và q, được ký hiệu $p \vee q$, là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề p và q đúng.

Kết quả chân trị của phép tuyển $p \vee q$ của hai mệnh đề p và q được thể hiện như trong Bảng 1.2.3.

Bảng 1.2.3. Chân trị của phép tuyển

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

✓ **Ví dụ 1.2.3**

1. Cho p là mệnh đề “12 là số nguyên” và q là mệnh đề “12 chia hết cho 5” thì $p \vee q$ là mệnh đề “12 là số nguyên hoặc 12 chia hết cho 5” là một mệnh đề đúng. Ở đây, mệnh đề p là đúng nên $p \vee q$ đúng.

2. Cho p là mệnh đề “7 là số chẵn” và q là mệnh đề “7 >10” thì $p \vee q$ là mệnh đề “7 là số chẵn hoặc 7 >10” là một mệnh đề sai. Ở đây, p và q đều sai nên $p \vee q$ sai.

▪ **Đinh nghĩa 1.2.4** Giả sử p và q là hai mệnh đề, phép *tuyển loại trừ* (exclusive disjunction) của p và q, được ký hiệu $p \veebar q$, là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi chỉ có một trong hai mệnh đề p và q đúng.

Mệnh đề $p \veebar q$ được đọc "hoặc là p hoặc là q" để nhấn mạnh nó chỉ đúng khi và chỉ khi chỉ p đúng hoặc chỉ q đúng và sai trong trường hợp ngược lại.

Kết quả chân trị của phép tuyển loại trừ $p \veebar q$ của hai mệnh đề p và q được thể hiện như trong Bảng 1.2.4.

Bảng 1.2.4. Chân trị của phép tuyển loại trừ

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

✓ **Ví dụ 1.2.4** Cho p là mệnh đề "Nơi sinh của An là Hà Nội" và q là mệnh đề "Nơi sinh của An là TP.HCM". Thì $p \veebar q$ là mệnh đề "Hoặc là nơi sinh của An là Hà Nội hoặc là nơi sinh của An là TP.HCM". Nếu chúng ta biết chắc chắn An được sinh ra ở Việt Nam và không thuộc bất kỳ địa phương nào khác Hà Nội và TP.HCM thì mệnh $p \veebar q$ là đúng vì An chắc chắn được sinh ra tại một trong hai nơi là Hà Nội hoặc TP.HCM.

▪ **Đinh nghĩa 1.2.5** Giả sử p và q là hai mệnh đề, phép *kéo theo* (implication) q của p, được ký hiệu $p \to q$, là một mệnh đề sai khi và chỉ khi p đúng q sai (mệnh đề $p \to q$ đúng trong các trường hợp còn lại).

Mệnh đề $p \to q$ còn có thể được đọc một số cách khác như "p là điều kiện đủ của q", "q là điều kiện cần của p" hay "nếu p thì q". Mệnh đề $p \to q$ còn đươc gọi là *mệnh đề có điều kiện* (conditional proposition).

Kết quả chân trị của phép kéo theo $p \to q$ được thể hiện như trong Bảng 1.2.5.

Bảng 1.2.5. Chân trị của phép kéo theo

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

✓ **Ví dụ 1.2.5**

1. Cho p là mệnh đề "12 là một số nguyên" và q là mệnh đề "12 chia hết cho 5" thì $p \to q$ là mệnh đề "nếu 12 là một số nguyên thì 12 chia hết cho 5". Dễ thấy p đúng, q sai và $p \to q$ sai.

2. Cho p là mệnh đề "2<3" và q là mệnh đề "4<9" thì $p \rightarrow q$ là mệnh đề "nếu 2<3 thì 4<9". Dễ thấy p đúng, q đúng và $p \rightarrow q$ đúng.

3. Cho p là mệnh đề "3 + 2 = 6" và q là mệnh đề "4 × 2 = 8" thì $p \rightarrow q$ là mệnh đề "nếu 3 + 2 = 6 thì 4 × 2 = 8". Dễ thấy p sai, q đúng và $p \rightarrow q$ đúng.

▪ **Định nghĩa 1.2.6** Giả sử p và q là hai mệnh đề, phép *kéo theo hai chiều* (biconditional) của q và p, được ký hiệu $p \leftrightarrow q$, là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi p và q có cùng chân trị.

Có thể đọc $p \leftrightarrow q$ theo cách khác như "p nếu và chỉ nếu q", "p là cần và đủ của q" hay "nếu p thì q và ngược lại".

Kết quả chân trị của phép kéo theo hai chiều $p \leftrightarrow q$ của hai mệnh đề p và q được thể hiện như trong Bảng 1.2.6.

Bảng 1.2.6. Chân trị của phép kéo theo hai chiều

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

✓ **Ví dụ 1.2.6** Cho p là mệnh đề "Trái đất quay" và q là mệnh đề "2 × 2 = 4" thì $p \leftrightarrow q$ là mệnh đề "Trái đất quay nếu và chỉ nếu $2 \times 2 = 4$". Dễ thấy p và q là các mệnh đề đúng nên $p \leftrightarrow q$ là mệnh đề đúng.

1.3 Dạng mệnh đề

Các mệnh đề được kết hợp với nhau bằng các phép toán logic biểu diễn các lập luận đa dạng trong thực tế gọi là dạng mệnh đề. Dạng mệnh đề được định nghĩa như sau.

▪ **Đinh nghĩa 1.3.1** Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các biến mệnh đề, một biểu thức $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kết hợp các biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bằng các phép toán mệnh đề gọi là một *dạng mệnh đề* (propositional form).

Với định nghĩa này, có thể hiểu một dạng mệnh đề như là một hàm nhiều biến mệnh đề, mỗi biến chỉ nhận một trong hai giá trị 1 hoặc 0 (đúng hoặc sai). Chân trị của dạng mệnh đề $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ xác định khi biết chân trị của các mệnh đề p_i, $i = 1, \ldots, n$. Dạng mệnh đề còn được gọi là *công thức logic* (logic fomular).

Với E, F là hai dạng mệnh đề thì $\neg E$, $E \wedge F$, $E \vee F$, $(E \rightarrow F)$ và $(E \leftrightarrow F)$ cũng là các dạng mệnh đề.

✓ **Ví dụ 1.3.1** Với p, q và r là các mệnh đề thì $\neg p \wedge q$, $(\neg p \vee q) \wedge r$, $0 \vee (\neg p \wedge q)$ và $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ là các dạng mệnh đề.

Lưu ý: Thứ tự ưu tiên thực hiện các phép toán logic trong các dạng mệnh đề là ( ), $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ và $\leftrightarrow$.

Chân trị của dạng mệnh đề $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ có thể được xác định bằng một bảng 2^n dòng theo chân trị của $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gọi là bảng chân trị của (dạng) mệnh đề. Chẳng hạn, chân trị của $(p \to q) \wedge (q \to r)$ được tính toán như trong Bảng 1.3.1.

Bảng 1.3.1. Chân trị của dạng mệnh đề $(p \to q) \wedge (q \to r)$

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Một trong những dạng mệnh đề có nhiều ý nghĩa trong lập luận và suy diễn là dạng mệnh đề mà chân trị của nó luôn luôn đúng hoặc luôn luôn sai. Các dạng mệnh đề này tương ứng là những chân lý (tautology) và mâu thuẫn (contradiction) trong các lập luận.

- **Định nghĩa 1.3.2** Giả sử $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ là một dạng mệnh theo n biến mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

1. Dạng mệnh đề $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ được gọi là một hằng đúng nếu nó luôn luôn đúng với mọi chân trị của các mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

2. Dạng mệnh đề $E(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ được gọi là một hằng sai (hay một mâu thuẫn) nếu nó luôn luôn sai với mọi chân trị của các mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

✓ **Ví dụ 1.3.2** $E(p, q) = p \vee \neg p$ là một hằng đúng còn $F(p, q) = p \wedge \neg p$ là một hằng sai.

Dựa trên khái niệm hằng đúng, khái niệm hệ quả logic là cơ sở để xây dựng hệ thống quy tắc suy luận trong logic mệnh đề được định nghĩa như sau.

▪ **Định nghĩa 1.3.3** Giả sử E và F là các dạng mệnh đề, dạng mệnh đề F được gọi là hệ quả logic của dạng mệnh đề E, ký hiệu $E \Rightarrow F$, nếu $E \rightarrow F$ là một hằng đúng.

✓ **Ví dụ 1.3.3** Dễ thấy $(p \wedge q) \Rightarrow p$ vì mệnh đề $(p \wedge q) \rightarrow p$ là một hằng đúng.

1.4 Sự tương đương logic

Tính tương đương của các mệnh đề là cơ sở cho việc phát triển các lập luận khác nhau nhưng ý nghĩa logic của chúng vẫn không thay đổi. Đó cũng là cơ sở để tối ưu hóa các lệnh điều khiển trong các chương trình máy tính. Khái niệm tương đương của các dạng mệnh được định nghĩa như sau.

▪ **Đinh nghĩa 1.4.1** Hai dạng mệnh đề E và F được gọi là tương đương logic (logical equivalent), ký hiệu $E \Leftrightarrow F$, nếu chúng có cùng chân trị.

✓ **Ví dụ 1.4.1** Chúng ta dễ dàng chỉ ra hai dạng mệnh đề $p \to q$ và $\neg p \vee q$ là tương đương logic bằng cách lập bảng chân trị của chúng như trong Bảng 1.4.1. Trong bảng này, chân trị của $p \to q$ và $\neg p \vee q$ là bằng nhau.

Bảng 1.4.1. Chân trị của hai dạng mệnh đề tương đương

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Từ Định nghĩa 1.4.1 chúng ta cũng dễ dàng thấy rằng các dạng mệnh đề E và F là tương đương logic khi và chỉ khi dạng mệnh đề $E \leftrightarrow F$ là một hằng đúng.

Chúng ta lưu ý rằng, cũng như một mệnh đề, một dạng mệnh có chân trị đúng hoặc sai. Vì vậy, để đơn giản, khi chưa quan tâm đến chân trị cụ thể của dạng mệnh đề, chúng ta có thể dùng thuật ngữ "mệnh đề" thay cho thuật ngữ "dạng mệnh đề". Chúng ta có thể kết hợp một tương đương logic với một dạng mệnh đề bằng một phép toán logic để có một tương đương logic mới như được phát biểu trong định lý sau.

- **Định lý 1.4.1** Giả sử E, F và P là các dạng mệnh đề và $E \Leftrightarrow F$ thì

  1. $\neg E \Leftrightarrow \neg F$.
  2. $E \vee P \Leftrightarrow F \vee P$.
  3. $E \wedge P \Leftrightarrow F \wedge P$.
  4. $E \rightarrow P \Leftrightarrow F \rightarrow P$.
  5. $E \leftrightarrow P \Leftrightarrow F \leftrightarrow P$.

- **Chứng minh:** Do $E \Leftrightarrow F$ nên nếu E =1 thì F =1 do đó $\neg E = 0$ thì $\neg F = 0$ và nếu $E = 0$ thì F =0 do đó $\neg E = 1$ thì $\neg F = 1$. Vậy, $\neg E$ và $\neg F$ có cùng chân trị nên $\neg E \Leftrightarrow \neg F$. Phần 1 của định lý được chứng minh.

Nếu $P = 1$, thì $E \vee P = 1$ và $F \vee P$ =1, ngược lại nếu $P = 0$, thì $E \vee P = E$ và $F \vee P = F$ mà do $E \Leftrightarrow F$ nên $E \vee P = F \vee P$. Từ đó suy ra $E \vee P \Leftrightarrow F \vee P$. Phần 2 của định lý được chứng minh. Chứng minh các phần còn lại được xem như một bài tập dành cho người đọc.

Các phép toán logic có một số tính chất cơ bản, còn gọi là các luật. Cụ thể các tính chất cơ bản của các phép toán logic được phát biểu bằng định lý sau.

- **Định lý 1.4.2** Giả sử *p*, *q* và *r* là các mệnh đề, ta có

1. Luật phủ định:

   $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

2. Luật lũy đẳng:

   $p \wedge p \Leftrightarrow p$

   $p \vee p \Leftrightarrow p$

3. Luật trung hòa:

   $p \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow p$

   $p \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow p$

4. Luật về phần tử bù:

   $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{0}$

   $p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{1}$

5. Luật thống trị:

   $p \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$

   $p \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$

6. Luật giao hoán:

   $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

7. Luật kết hợp:

$(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow p \lor (q \lor r)$

$(p \land q) \land r \Leftrightarrow p \land (q \land r)$

8. Luật phân bố:

$p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$

$p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$

9. Luật De Morgan:

$\neg (p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$

$\neg (p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$

10. Luật hấp thụ:

$p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$

$p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$

Dễ dàng chứng minh các luật trong định lý bằng cách chỉ ra sự đồng nhất các giá trị của hai vế của các luật trong bảng chân trị của chúng. Việc này dành cho người đọc như một bài tập.

Các luật trên có ý nghĩa như các đồng nhất thức cơ bản trong đại số. Trong đại số chúng ta có thể dùng các đồng nhất thức cơ bản để chứng minh các đồng nhất thức mới. Tương tự như vậy, trong logic hình thức, chúng ta có thể dùng các luật tương đương cơ bản để chứng minh các tương đương mới mà không cần lập bảng chân trị như các ví dụ sau đây.

✓ **Ví dụ 1.4.2** Chứng minh rằng $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$.

▪ **Chứng minh:** Áp dụng Định lý 1.4.1, các luật tương đương cơ bản và tương đương $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ trong Ví dụ 1.4.1, chúng ta biến đổi vế trái thành vế phải của tương đương cần chứng minh như sau.

$$\begin{aligned}
p \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee r \\
&\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee r) \\
&\Leftrightarrow q \rightarrow (\neg p \vee r) \\
&\Leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)
\end{aligned}$$

Như vậy, tương đương logic đã được chứng minh.

✓ **Ví dụ 1.4.3** Chứng minh rằng $\neg(q \rightarrow p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow q$.

▪ **Chứng minh:** Ta có

$$\begin{aligned}
\neg(q \rightarrow p) \vee (p \wedge q) &\Leftrightarrow \neg (\neg q \vee p) \vee (p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge p) \\
&\Leftrightarrow q \wedge (\neg p \vee p) \\
&\Leftrightarrow q \wedge 1 \Leftrightarrow q
\end{aligned}$$

Như vậy, tương đương logic đã được chứng minh.

✓ **Ví dụ 1.4.4** Giả sử *r*, *s*, *t* và *u* là các mệnh đề, chứng minh rằng mệnh đề

$$[(r \to s) \wedge [(r \to s) \to (\neg\, t \vee u)]] \to (\neg\, t \vee u).$$

là một hằng đúng

▪ **Chứng minh:** Từ định nghĩa của hằng đúng, chúng ta nhận xét rằng tính hằng đúng của một dạng mệnh đề không thay đổi khi thay thế một dạng mệnh đề trong nó bởi một biến mệnh đề mới. Đặt $p = r \to s$ và $q = \neg\, t \vee u$, thì mệnh đề $[(r \to s) \wedge [(r \to s) \to (\neg\, t \vee u)]] \to (\neg\, t \vee u)$ là hằng đúng khi và chỉ khi mệnh đề $[p \wedge (p \to q)] \to q$ là hằng đúng. Bây giờ ta chứng minh $[p \wedge (p \to q)] \to q$ là hằng đúng bằng cách biến đổi tương đương như sau:

$$\begin{aligned}
[p \wedge (p \to q)] \to q \;&\Leftrightarrow [p \wedge (\neg\, p \vee q)] \to q \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge \neg\, p) \vee (p \wedge q)] \to q \\
&\Leftrightarrow [\mathbf{0} \vee (p \wedge q)] \to q \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \to q \\
&\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q \\
&\Leftrightarrow \neg\, p \vee \neg\, q \vee q \\
&\Leftrightarrow \neg \mathrm{p} \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề $[p \wedge (p \to q)] \to q$ là hằng đúng và do đó $[(r \to s) \wedge [(r \to s) \to (\neg\, t \vee u)]] \to (\neg\, t \vee u)$ là hằng đúng.

1.5 Quy tắc suy diễn với mệnh đề

Các quy tắc suy diễn là cơ sở cho các chứng minh toán học và các lập luận logic có hệ thống trong thực tế. Trong Khoa học Máy tính các quy tắc suy diễn là nền tảng cho các hệ chuyên gia và hệ chứng minh tự động.

- **Định nghĩa 1.5.1** Giả sử $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các mệnh đề, một quy tắc suy diễn trên các mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là một phương thức xác định một hệ quả logic q của các mệnh đề này**.**

Rõ ràng nếu chúng ta có một quy tắc suy luận xác định hệ quả logic q từ các mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ thì mệnh đề $(p_1 \wedge p_2 \wedge. . . \wedge p_n) \rightarrow q$ là một hằng đúng. Các mệnh mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ được gọi là tiền đề hay giả thiết, mệnh đề q được gọi là kết luận. Trong các chứng minh hay lập luận, để đảm bảo kết luận q đúng thì các tiền đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ phải đúng. Một quy tắc suy diễn có thể được biểu diễn một cách trực quan hơn như sau.

$$\frac{p_1, p_2, ..., p_n}{\therefore q} \quad \text{hoặc đơn giản hơn} \quad \frac{p_1, p_2, ..., p_n}{q}$$

Để có thể lập luận logic, thực hiện các chứng minh, chúng ta cần một tập các quy tắc suy diễn cơ bản như dưới đây.

Qui tắc 1.5.1 Nếu p và q là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p \to q,\ p}{\therefore q}$$

xác định q là hệ quả logic của $p \to q$ và p và được gọi là qui tắc khẳng định (Modus Ponens-MP).

Qui tắc 1.5.2 Nếu p và q là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p \to q,\ \neg q}{\therefore \neg p}$$

xác định $\neg p$ là hệ quả logic của $p \to q$ và $\neg q$ và được gọi là qui tắc phủ định (Modus Tollens-MT).

Qui tắc 1.5.3 Nếu p, q và r là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p \to q,\ q \to r}{\therefore p \to r}$$

xác định $p \to r$ là hệ quả logic của $p \to q$ và $q \to r$ và được gọi là qui tắc tam đoạn luận (Hypothetical Syllogism –HS).

Qui tắc 1.5.4 Nếu p và q là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p \vee q,\ \neg q}{\therefore p}$$

xác định p là hệ quả logic của $p \vee q$ và $\neg q$ và được gọi là qui tắc tam đoạn luận rời (Disjunctive Syllogism- DS).

Qui tắc 1.5.5 Nếu *p*, *q* và *r* là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p \to r,\ q \to r}{\therefore\ (p \vee q) \to r}$$

xác định $(p \vee q) \to r$ là hệ quả logic của $p \to r$ và $q \to r$ và được gọi là qui tắc chứng minh theo trường hợp (By Case - BC).

Qui tắc 1.5.6 Nếu *p* và *q* là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p,\ q}{\therefore\ p \wedge q}$$

xác định $p \wedge q$ là hệ quả logic của *p* và *q* và được gọi là qui tắc hội (Conjunction - Conj).

Qui tắc 1.5.7 Nếu *p* và *q* là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

xác định *p* là hệ quả logic của $p \wedge q$ và được gọi là qui tắc rút gọn (Simplification- Simp).

Qui tắc 1.5.8 Nếu *p* và *q* là các mệnh đề, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

xác định $p \vee q$ là hệ quả logic của p và được gọi là qui tắc cộng (Addition -Add).

▪ **Chứng minh:** Các qui tắc suy diễn được chứng minh bằng cách chỉ ra chúng tương đương với các hằng đúng. Ở đây, chúng ta sẽ chứng minh qui tắc phủ định. Chứng minh các qui tắc còn lại được xem như bài tập của người đọc. Ta có

$$
\begin{aligned}
[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p &\Leftrightarrow [(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \to \neg p \\
&\Leftrightarrow [(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)] \to \neg p \\
&\Leftrightarrow [(\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{0}] \to \neg p \\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \to \neg p\ q \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p \\
&\Leftrightarrow p \vee q \vee \neg p \\
&\Leftrightarrow \mathbf{1} \vee q \Leftrightarrow \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

Như vậy $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ là một hằng đúng. Nói cách khác qui tắc suy diễn phủ định

$$
\frac{p \to q, \neg q}{\therefore \neg p}
$$

được chứng minh.

✓ **Ví dụ 1.5.1** Dễ dàng tìm các ví dụ minh họa cho các qui tắc suy diễn trên. Ở đây chúng ta xem một ví dụ đơn giản minh họa cho qui tắc suy diễn khẳng định. Gọi p là mệnh đề

"An là một sinh viên" và q là mệnh đề "An đã tốt nghiệp PTTH". Vì mệnh đề $p \rightarrow q$ biểu diễn "Nếu An là một sinh viên thì An đã tốt nghiệp PTTH" là một mệnh đề đúng. Bây giờ nếu biết "An là sinh viên" là đúng, nghĩa là p đúng, thì áp dụng qui tắc suy diễn khẳng định ra ta suy ra q đúng, nghĩa là "An đã tốt nghiệp PTTH" là đúng.

1.6 Các phương pháp chứng minh

Chứng minh là một dãy hữu hạn các lập luận dựa trên các qui tắc suy diễn để đạt được các kết luận mong muốn. Phần này giới thiệu hai phương pháp chứng minh là *chứng minh trực tiếp* (direct proof) và *chứng minh gián tiếp* (indirect proof).

❖ Chứng minh trực tiếp

Chứng minh trong toán học nói riêng và trong thực tế nói chung thường được mô hình hóa thành một phát biểu dưới dạng "nếu p_1, p_2, …, p_k thì p". Có nghĩa là chứng minh $(p_1 \wedge p_2 \wedge. . . \wedge p_k) \rightarrow q$ hay cụ thể hơn là chứng minh $(p_1 \wedge p_2 \wedge. . . \wedge p_k) \rightarrow q$ là một hằng đúng. Như vậy việc chứng minh $(p_1 \wedge p_2 \wedge. . . \wedge p_k) \rightarrow q$ được chuyển thành chứng minh q là hệ quả logic của p_1, p_2, ..., p_k theo lược đồ suy diễn

$$\frac{p_1, p_2, ..., p_k}{q}.$$

Để dễ dàng theo dõi một chứng minh, chúng ta viết các giả thiết, các qui tắc suy diễn cần áp dụng và kết luận đã được chứng minh lần lượt trên các dòng theo ba cột như sau:

1. p_1	(giả thiết - premise)
2. p_2	(giả thiết)
…	….
k. p_k	(giả thiết)
…	….
…	(số dòng, qui tắc suy diễn)
…	….
n. q	(số dòng, qui tắc suy diễn).

✓ **Ví dụ 1.6.1** Chứng minh rằng $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg p \rightarrow q \wedge r$.

Chứng minh:

1. $p \vee q$	GT (giả thiết)
2. $p \vee r$	GT
3. $\neg p$	GT
4. q	1, 3, DS (qui tắc tam đoạn luận rời)
5. r	2, 3, DS
6. $q \wedge r$	Conj (qui tắc hội).

Chúng ta kết thúc chứng minh khi đã suy diễn được mệnh đề $q \wedge r$.

✓ **Ví dụ 1.6.2** Chúng ta xem suy luận “Đội nhà thắng hoặc Tôi buồn. Nếu đội nhà thắng thì Tôi đi xem phim. Nếu Tôi buồn thì con chó của tôi sủa. Chó của tôi yên lặng. Vì vậy, Tôi đi xem phim”.

Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Chứng minh: Trước hết chúng ta cần mô hình hóa suy luận trên bằng một mệnh đề cần chứng minh. Chúng ta cần đảm bảo tính nguyên thủy trong việc xác định tên mệnh trong các phát biểu của suy luận. Một mệnh đề nguyên thủy là mệnh đề không thể biểu diễn được theo các mệnh đề khác thông qua các phép toán mệnh đề. Vì vậy, trong suy luận trên, ta có các mệnh đề nguyên thủy như sau:

W: Đội nhà thắng.

S: Tôi buồn.

M: Tôi đi xem phim.

B: Chó của Tôi sủa.

Bây giờ mệnh đề cần chứng minh là $(W \vee S) \wedge (W \rightarrow M) \wedge (S \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow M$.

Chúng ta chứng minh mệnh đề này như sau:

1. $W \vee S$ GT

2. $W \rightarrow M$ GT

3. $S \rightarrow B$ GT

4. $\neg$B GT

5. $\neg$S 3, 4, MT (qui tắc phủ định)

6. W 1, 5, DS

7. M 2, 6, MP

Vậy ta có M, nghĩa là có kết luận "Tôi đi xem phim"

❖ Chứng minh gián tiếp

Phương pháp chứng minh mệnh đề $p \to q$ bằng cách sử dụng một trong hai tương đương logic $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$ và $p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to \mathbf{0}$ được gọi là chứng minh gián tiếp. Nếu chứng minh $p \to q$ bằng cách áp dụng tương đương $p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to \mathbf{0}$ thì chúng ta còn có cách gọi riêng là *chứng minh bằng phản chứng* (proof by contradiction). Trong phần này chúng ta chỉ xem xét cách chứng minh bằng phản chứng.

Để chứng minh mệnh đề $(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_k) \to q$, nghĩa là chứng minh $(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_k) \to q$ là một hằng đúng bằng phản chứng, ta phủ định kết luận q và xem $\neg q$ như một giả thiết, gọi là giả thiết phủ định. Sau đó, chúng ta áp dụng các qui tắc suy diễn để tìm một mâu thuẫn. Mâu thuẫn này cho phép phủ định $\neg q$ để có kết luận q.

Ví dụ 1.6.3 Chứng minh mệnh đề $(W \vee S) \wedge (W \to M) \wedge (S \to B) \wedge \neg B \to M$ (trong Ví dụ 1.6.2) bằng phản chứng.

Chứng minh: Phủ định kết luận M thành $\neg$M và coi $\neg$M là giả thiết phản chứng ta có:

1.	$W \vee S$	GT
2.	$W \to M$	GT
3.	$S \to B$	GT
4.	$\neg B$	GT
5.	$\neg M$	GT phản chứng
6.	$\neg W$	2, 5, MT
7.	$\neg S$	3, 4, MT
8.	$\neg W \wedge \neg S$	6, 7, Conj
9.	$\neg(W \vee S)$	8, Luật De Morgan
10.	$(W \vee S) \wedge \neg(W \vee S)$	1, 9 Conj
11.	**0**	10 (luật phần tử bù)

Dòng 11 xuất hiện một mâu thuẫn (hằng sai). Vì vậy, chúng ta có kết luận M.

1.7 Vị từ

Vị từ là khái niệm mở rộng của mệnh đề. Cụ thể hơn, một vị từ là một khẳng định liên quan đến một hoặc nhiều đối tượng và chân trị của vị từ chỉ xác định khi các đối tượng được xác định, trong khi mệnh đề luôn có chân trị xác định. Vị từ là cơ sở của các lập luận và chứng minh toán học. Trong khoa học máy tính vị từ là nền tảng toán học để xây dựng các *ngôn ngữ lập trình logic* (logic programming language). Trong các ngôn ngữ lập trình thủ tục (procedure programming language), vị từ được sử dụng để xác định số lần lặp trong các lệnh điều khiển vòng lặp. Vị từ được định nghĩa một cách hình thức như sau.

▪ **Đinh nghĩa 1.7.1** Một *vị từ* (predicate) là một phát biểu chứa một số hữu hạn các biến và trở thành một mệnh đề khi các giá trị cụ thể được thay thế cho các biến. *Miền giá trị* (value domain) của một biến là tập tất cả các giá trị có thể được thay thế cho biến này.

Như vậy, có thể xem vị từ $p(x, y,\ldots, z)$ là một hàm nhiều biến p: $X\times Y \times\ldots\times Z \to \{0, 1\}$ với $x \in X, y \in Y, \ldots, z \in Z$. Các biến $x, y, \ldots, z$ được gọi là *biến tự do* (free variable). Khi $x = a, y = b, \ldots, z = c$, nếu $p(a, b,\ldots, c) = 1$ thì vị từ trở thành một mệnh đề đúng, ngược lại thì trở thành một mệnh đề sai. Khi một biến tự do nhận một giá trị cụ thể thì ta nói biến này đã *bị buộc* (bound). Hàm p: $X\times Y \times\ldots\times Z \to \{0, 1\}$ còn được gọi là *hàm mệnh đề* (propositional function).

✓ **Ví dụ 1.7.1**

1. Giả sử x là một số tự nhiên và $p(x)$ là phát biểu "x là một số nguyên tố", thì $p(x)$ là một vị từ một biến x có miền giá trị là tập tất cả các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Với $x = 7$, $p(7)$ trở thành là mệnh đề "7 là một số nguyên tố". Đây là một mệnh đề đúng. Với $x = 15$, $p(15)$ trở thành là mệnh đề "15 là một số nguyên tố" là một mệnh đề sai.

2. Giả sử x, y là các số tự nhiên, gọi $q(x, y)$ là phát biểu "x là ước của y", thì $q(x, y)$ là một vị từ hai biến mà miền giá trị của các biến là tập tất cả các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Ta có $q(3, 9) = 1$, $q(5, 9) = 0$.

3. Gọi x là một biến thực và $r(x)$ là khẳng định "$x^2 \geq x$", thì $r(x)$ là một vị từ một biến x có miền giá trị là tập tất cả các số thực $\mathbb{R}$. Với $x = 1/2$, $p(1/2)$ trở thành mệnh đề "$(1/2)^2 \geq 1/2$" là một mệnh đề sai. Với $x = -1/2$, $p(-1/2)$ trở thành mệnh đề "$(-1/2)^2 \geq -1/2$" là một mệnh đề đúng.

✓ **Ví dụ 1.7.2** Để thấy cách mà các vị từ được sử dụng trong lập trình, chúng ta xem giải thuật tính ước số chung lớn nhất của hai số dương *a* và *b* được viết bằng ngôn ngữ C (C++) sau đây.

```
unsigned Greatest Common Divisor (unsigned a, unsigned b)
{
        unsigned x, y, r;
        x = a;
        y = b;
        while (y > 0)
        {
                r = x % y;
                x = y;
                y = r;
        }
        return x;
}
```

Trong giải thuật này, vị từ “$y>0$” với biến y nguyên không âm được sử dụng để xác định số lần thực hiện các lệnh lặp trong vòng lặp while. Đầu tiên giá trị của biến $y = b$, mỗi lần lặp sau đó, biến y nhận một giá trị mới, bằng lệnh gán $y = r$. Nếu vị từ trở thành mệnh đề đúng với $y = r$, nghĩa là “$r > 0$” thì vòng lặp vẫn tiếp tục làm việc. Ngược lại, nếu vị từ trở thành mệnh đề sai với $y = r$, nghĩa là “$r = 0$”, thì vòng kết thúc và giải thuật trả về số x như là ước số chung lớn nhất của hai số dương a và b.

Tương tự như sự kết hợp các hàm số với nhau bởi các phép toán đại số để có các hàm số mới, các vị từ có thể được kết hợp với nhau bởi các phép toán logic để tạo thành các vị từ mới như định nghĩa sau.

▪ **Đinh nghĩa 1.7.2** Giả sử P và Q là các vị từ thì $\neg P$ là vị từ chứa cùng một tập biến tự do như P và $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ là các vị từ chứa tập biến tự do là hợp của tập biến tự do của P và Q.

✓ **Ví dụ 1.7.3** Giả sử $p(x)$ là vị từ “x là một số nguyên tố” và $q(x, y)$ là vị từ “x là ước của y”, thì dùng phép toán kéo theo ta có vị từ $p(x) \rightarrow q(x, y)$ biểu diễn phát biểu “nếu x là một số nguyên tố thì x là ước của y”.

1.8 Lượng từ

Lượng từ là cơ sở cho các phát biểu mà tính đúng, sai được xác định bằng cách buộc các biến vị từ nhận giá trị trong một tập nào đó của miền giá trị. Lượng từ là phương tiện để phát biểu các bổ đề và định lý trong toán học nói riêng và các lập luận trong khoa học nói chung.

Có hai kiểu lượng từ là *lượng từ phổ dụng* (universal quantifier) và *lượng từ tồn tại* (existential quantifier).

▪ **Định nghĩa 1.8.1** Giả sử $Q(x)$ là một vị từ và D là miền giá trị của x. *Lượng từ phổ dụng* của $Q(x)$ theo x là một phát biểu "$\forall x \in D, Q(x)$". Lượng từ là đúng nếu và chỉ nếu $Q(c)$ đúng với mọi $c \in D$ được thay thế cho x và lượng từ là sai nếu và chỉ nếu $Q(c)$ sai với ít nhất một $c \in D$ được thay thế cho x.

Ký hiệu "$\forall$" được gọi là ký hiệu lượng từ phổ dụng, chúng ta đọc "$\forall x \in D$" là "với mọi x thuộc D" hay "bất kỳ x thuộc D".

✓ **Ví dụ 1.8.1**

1. Gọi $p(x)$ là vị từ "$x^2 \geq 0$" với $x \in \mathbb{R}$, thì lượng từ phổ dụng "$\forall x \in \mathbb{R}, p(x)$" hay "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" là một lượng từ đúng. Vì, hiển nhiên khi x được thay thế bởi bất kỳ số thực c nào ta đều có $c^2 \geq 0$.

2. Giả sử $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $p(x)$ là vị từ "$x^2 \geq x$" với x là một biến trong D. Khi đó lượng từ phổ dụng

"$\forall x \in D, p(x)$" hay "$\forall x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, x^2 \geq x$" là đúng vì bất kỳ số c nào là một trong các số 1, 2, 3, 4, 5 thì ta cũng có $c^2 \geq c$.

3. Với x là một số tự nhiên, $p(x)$ là vị từ "x là số nguyên tố", thì lượng từ phổ dụng "$\forall x \in \mathbb{N}, p(x)$" hay "$\forall x \in \mathbb{N}$, x là một số nguyên tố" là một lượng từ sai vì với $x = 4$ thì $p(4) = 0$.

▪ **Định nghĩa 1.8.2** Giả sử $Q(x)$ là một vị từ và D là miền giá trị của x. *Lượng từ tồn tại* của $Q(x)$ theo x là một phát biểu "$\exists x \in D, Q(x)$". Lượng từ là đúng nếu và chỉ nếu $Q(c)$ đúng với ít nhất một $c \in D$ được thay thế cho x và lượng từ sai nếu và chỉ nếu $Q(c)$ sai với mọi $c \in D$ được thay thế cho x.

Ký hiệu "$\exists$" được gọi là ký hiệu lượng từ tồn tại, chúng ta đọc "$\exists x \in D$" là "tồn tại x thuộc D" hay "có một x thuộc D".

✓ **Ví dụ 1.8.2**

1. Giả sử $p(x)$ là vị từ "$x^2 \leq x$" với x là một biến trong tập số thực $\mathbb{R}$. Khi đó lượng từ tồn tại "$\exists x \in \mathbb{R}, p(x)$" hay "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x$" là đúng vì $1^2 \leq 1$ là đúng. Nghĩa là có số thực $c = 1 \in \mathbb{R}$ mà $c^2 \leq c$.

2. Gọi $p(x)$ là vị từ "$x^2 < 0$" với $x \in \mathbb{R}$, thì lượng từ tồn tại "$\exists x \in \mathbb{R}, p(x)$" hay "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$" là một lượng từ sai. Vì, hiển nhiên khi x được thay thế bởi bất kỳ số

thực c nào ta đều có bất đẳng thức $c^2 < 0$ là sai.

3. Với x là một số tự nhiên, $p(x)$ là vị từ "x là số nguyên tố", thì lượng từ tồn tại "$\exists x \in \mathbb{N}, p(x)$" hay "$\exists x \in \mathbb{N}$, x là một số nguyên tố" là một lượng từ đúng vì có $x = 3$, để $p(3) = 1$.

Lưu ý rằng, trong cả hai Định nghĩa trên, ta còn gọi lượng từ phổ dụng "$\forall x \in D, Q(x)$" và lượng từ tồn tại "$\exists x \in D, Q(x)$" của vị từ $Q(x)$ là lượng từ hóa vị từ $Q(x)$. Hơn nữa, mỗi lượng từ hóa của vị từ một biến như vậy là một mệnh đề vì phát biểu lượng từ luôn luôn xác định tính đúng sai như một mệnh đề. Tính đúng sai của các lượng từ hóa được xác định là do biến tự do x đã bị buộc bởi các lượng từ $\forall$ và $\exists$. Lượng từ "$\exists x \in D, Q(x)$" còn được viết "$\exists x \in D$ sao cho $Q(x)$".

Các định nghĩa 1.8.1 và 1.8.2 chỉ xác định các lượng từ theo vị từ một biến. Đối với một vị từ $Q(x, y)$ hai biến $x \in X$ và $y \in Y$, chúng ta có thể có bốn lượng từ hóa của $Q(x, y)$ như sau:

1. $\forall x \in X, \forall y \in Y, Q(x, y)$
2. $\exists x \in X, \forall y \in Y, Q(x, y)$
3. $\forall x \in X, \exists y \in Y, Q(x, y)$
4. $\exists x \in X, \exists y \in Y, Q(x, y)$

Bằng cách tương tự, chúng ta có thể xác định các lượng từ hóa của các vị từ nhiều biến. Việc xác định giá trị chân lý của các lượng từ nhiều biến được thực hiện lần lượt theo các lượng từ một biến từ trái sang phải (hoặc phải sang trái) đối với vị từ được lượng từ hóa. Ví dụ, xét lượng từ $\exists x \in X, \forall y \in Y, Q(x, y)$, nếu lấy b bất kỳ trong Y thay cho y và có một giá trị a trong X thay cho x mà $Q(a, b)$ đúng thì lượng từ $\exists x \in X, \forall y \in Y, Q(x, y)$ đúng. Nếu có một giá trị b trong Y thay cho y và bất kỳ giá trị a nào trong X thay cho x mà $Q(a, b)$ sai thì lượng từ $\exists x \in X, \forall y \in Y, Q(x, y)$ sai.

✓ **Ví dụ 1.8.3** Giả sử "$x < y$" là vị từ với các biến số thực x, y, thì $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ là một lượng từ đúng. Vì bất kỳ $a \in \mathbb{R}$ bao giờ ta cũng tìm được $b \in \mathbb{R}$ để $a < b$.

Tương tự như mệnh đề, tính tương đương của hai lượng từ được định nghĩa dựa trên chân trị của chúng như sau.

▪ **Định nghĩa 1.8.3** Hai lượng từ α và β trên cùng một tập biến được gọi là tương đương logic, ký hiệu $\alpha \Leftrightarrow \beta$ nếu chúng có cùng chân trị theo cùng tập giá trị bị buộc tương ứng với các ký hiệu lượng từ phổ dụng và tồn tại trong α và β.

✓ **Ví dụ 1.8.4** Với D là một tập bất kỳ thì $\forall x \in D, (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in D, P(x)) \wedge (\forall x \in D, Q(x))$. Thật vậy, $\forall x \in D, (P(x) \wedge Q(x))$ đúng khi và chỉ khi với mọi $c \in D$, $P(c) \wedge Q(c)$ đúng, nghĩa là với mọi $c \in D$, $P(c)$ đúng và với mọi $c \in D$,

$Q(c)$ đúng. Điều này tương đương với $\forall x \in D, P(x)$ đúng và $\forall x\in D, Q(x)$ đúng, nghĩa là $(\forall x \in D, P(x)) \wedge (\forall x\in D, Q(x))$ đúng. Từ đây ta suy ra $\forall x \in D, (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in D, P(x) \wedge \forall x\in D, Q(x)$.

Với các lượng từ hai biến chúng ta dễ thấy có hai tương đương như được phát biểu trong định lý sau.

- **Định lý 1.8.1** Giả sử $Q(x, y)$ là vị từ hai biến $x \in X$ và $y \in Y$. Khi đó

    1. $\forall x \in X, \forall y \in Y, Q(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in Y, \forall x \in X, Q(x, y)$
    2. $\exists x \in X, \exists y \in Y, Q(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in Y, \exists x \in X, Q(x, y)$.

Chứng minh: Ở đây ta chỉ chứng minh phần 1 của định lý, chứng minh phần 2 xem như một bày tập dành cho người đọc. Ta có $\forall x\in X, \forall y \in Y, Q(x, y)$ đúng khi và chỉ khi $Q(a, b)$ đúng với a bất kỳ trong X và b bất kỳ trong Y, nghĩa là $Q(a, b)$ đúng với b bất kỳ trong Y và a bất kỳ trong X. Điều này tương đương với $\forall y \in Y, \forall x \in X, Q(x, y)$ đúng. Như vậy, $\forall x\in X, \forall y \in Y, Q(x, y)$ đúng khi và chỉ khi $\forall y \in Y, \forall x \in X, Q(x, y)$ đúng. Từ đó, phần 1 của định lý được chứng minh.

Với mỗi mệnh đề, chúng ta dễ dàng phát biểu mệnh đề phủ định của nó, với các lượng từ một biến, phủ định của chúng được thiết lập trên cơ sở định lý sau.

- **Định lý 1.8.2** Giả sử $Q(x)$ là vị từ một biến x lấy giá trị trong tập D, thì $\neg(\forall x \in D, Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \in D, \neg Q(x)$.

Chứng minh: $\neg(\forall x \in D, Q(x))$ đúng nếu và chỉ nếu $(\forall x \in D, Q(x))$ sai. $(\forall x \in D, Q(x))$ sai nếu và chỉ nếu $Q(c)$ sai với ít nhất một $c \in D$. $Q(c)$ sai với ít nhất một $c \in D$ nếu và chỉ nếu $\neg Q(c)$ đúng với ít nhất một $c \in D$. $\neg Q(c)$ đúng với ít nhất một $c \in D$ nếu và chỉ nếu $\exists x \in D, \neg Q(x)$ đúng. Như vậy ta có $\neg(\forall x \in D, Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \in D, \neg Q(x)$.

Định lý 1.8.2 có thể được mở rộng để thiết lập phát biểu phủ định của một lượng từ nhiều biến. Cụ thể, nếu $Q(x, y, \ldots, z)$ là một vị từ nhiều biến được lượng từ hóa thì phủ định của lượng từ này là một lượng từ có được bằng cách thay thế ký hiệu lượng từ $\forall$ bởi ký hiệu lượng từ $\exists$, ký hiệu lượng từ $\exists$ bởi ký hiệu lượng từ $\forall$ và vị từ $Q(x, y, \ldots, z)$ bởi phủ định của nó $\neg Q(x, y, \ldots, z)$.

✓ **Ví dụ 1.8.5**

1. Phủ định của lượng từ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" là lượng từ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$" nghĩa là phủ định của mệnh đề "với mọi số thực x ta có $x^2 \geq 0$" là mệnh đề "tồn tại số thực x sao cho $x^2 < 0$". Rõ ràng "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" đúng còn "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$" sai.

2. Với lượng từ hai biến $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$, ta có $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y)$ là lượng từ $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in$

$\mathbb{R}$, $x \geq y$. Lưu ý rằng mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x < y$ là đúng và phủ định của nó $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ là mệnh đề sai.

1.9 Qui tắc suy diễn với lượng từ

Cũng như các qui tắc suy diễn với mệnh đề, các qui tắc suy diễn với lượng từ là cơ sở cho các lập luận và chứng minh. Dựa trên cơ sở các định nghĩa lượng từ phổ dụng, lượng từ tồn tại, một số qui tắc suy diễn với các lượng từ được xác lập như dưới đây.

Qui tắc 1.9.1 Nếu $Q(x)$ là một vị từ biến x nhận giá trị trong tập D, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{\forall x\ Q(x)}{\therefore Q(x)}$$

xác định mệnh đề "có một x trong D sao cho $Q(x)$" là hệ quả logic của mệnh đề "$\forall x\ Q(x)$" và được gọi là qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng (Universal Instantiation Inference Rule-UI).

Ở đây, chúng ta lưu ý cách viết "$\forall x\ Q(x)$" là đơn giản hóa của cách viết "$\forall x \in D$, $Q(x)$". Trong một lượng từ nhiều biến, nếu chúng ta không đề cập đến miền giá trị các biến thì chúng ta hiểu mỗi biến có một miền giá trị nào đó. Qui tắc 1.9.1 còn được viết dưới dạng

$$\frac{\forall x\, Q(x)}{\therefore Q(c)}, \text{ với c là một hằng (trong } D).$$

Qui tắc 1.9.2 Nếu $Q(x)$ là một vị từ biến x nhận giá trị trong tập D, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{Q(c) \text{ với } c \text{ bất kỳ}}{\therefore \forall x\, Q(x)}$$

xác định mệnh đề "$\forall x\ Q(x)$" là hệ quả logic của mệnh đề "$Q(c)$ với c bất kỳ trong D" và được gọi là qui tắc khái quát hóa phổ dụng (Universal Generalization Inference Rule-UG).

Qui tắc 1.9.3 Nếu $Q(x)$ là một vị từ biến x nhận giá trị trong tập D, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{\exists x\, Q(x)}{\therefore\ Q(c)}$$

xác định mệnh đề "có c trong D sao cho $Q(c)$" là hệ quả logic của mệnh đề "$\exists x\ Q(x)$" và được gọi là qui tắc đặc biệt hóa tồn tại (Existential Instantiation Inference Rule-EI).

Qui tắc 1.9.4 Nếu $Q(x)$ là một vị từ biến x nhận giá trị trong tập D và $c \in D$, thì qui tắc suy diễn

$$\frac{Q(c)}{\therefore\ \exists x\, Q(x)}$$

xác định mệnh đề "$\exists x\ Q(x)$" là hệ quả logic của mệnh đề "có c trong D sao cho $Q(c)$" và được gọi là qui tắc khái quát hóa tồn tại (Existential Generalization Inference Rule-EG).

Bởi vì c là một giá trị cụ thể thay thế cho x trong $Q(c)$, nên Qui tắc 1.9.4 còn được viết dưới dạng

$$\frac{Q(x)}{\therefore\ \exists x\ Q(x)}$$

Chứng minh: Các qui tắc suy diễn với lượng từ được chứng minh bằng cách chỉ ra kết luận là hệ quả logic của giả thiết. Ở đây chúng ta chỉ chứng minh Qui tắc 1.9.1 các qui tắc khác được chứng minh tương tự và xem như là bài tập cho người đọc. Qui tắc 1.9.1 tương đương với khẳng định $(\forall x \in D, Q(x)) \to Q(x)$ là một hằng đúng. Để chứng minh $(\forall x \in D, Q(x)) \to Q(x)$ là hằng đúng, ta giả sử $(\forall x \in D, Q(x))$ đúng và chứng minh $Q(x)$ đúng. Thật vậy, nếu $(\forall x \in D, Q(x))$ đúng thì bất kỳ giá trị x nào trong D thì $Q(x)$ cũng đúng. Từ đây suy ra có một x trong D sao cho $Q(x)$ đúng. Vậy qui tắc 1.9.1 được chứng minh.

✓ **Ví dụ 1.9.1**

1. Bởi vì $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ nên $(-1/3)^2 \geq 0$ là một suy luận áp dụng qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng (Qui tắc suy luận 1.9.1).

2. Bởi vì $(-1/3)^2 \geq -1/3$ nên $\exists x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 \geq x$ là một suy luận áp dụng qui tắc khái quá hóa tồn tại (Qui tắc suy luận 1.9.4).

❖ Chứng minh với qui tắc suy diễn lượng từ

Các chứng minh bằng cách áp dụng các qui tắc suy diễn với lượng từ cũng có thể sử dụng phương pháp chứng minh trực tiếp và chứng minh phản chứng như với mệnh đề. Ngoài ra, khi các biến bị buộc giá trị cụ thể thì các vị từ trở thành các mệnh đề nên chúng ta cũng có thể áp dụng các qui tắc suy luận trong logic mệnh đề để suy diễn các mệnh đề mới.

✓ **Ví dụ 1.9.2** Giả sử $p(x)$ và $q(x)$ là các vị từ một biến. Chứng minh rằng

$$(\forall x\, p(x)) \wedge (\exists x\, q(x)) \rightarrow \exists x\, (p(x) \wedge q(x)).$$

Chứng minh:

1. $\forall x\, p(x)$	GT
2. $\exists x\, q(x)$	GT
3. $q(c)$	2, EI (đặc biệt hóa tồn tại)
4. $p(c)$	1, UI (đặc biệt hóa phổ dụng)
5. $p(c) \wedge q(c)$	3, 4 Conj
6. $\exists x\, (p(x) \wedge q(x))$	5, EG. (khái quát hóa tồn tại)

Kết quả dòng 6 cho phép là kết luận cần chứng minh (nghĩa là $\exists x\,(p(x) \wedge q(x))$ là hệ quả logic của $(\forall x\, p(x)) \wedge (\exists x\, q(x))$.

Lưu ý rằng, trong chứng minh này ta coi các giả thiết là đúng và chứng minh kết luận đúng. Vì vậy, chúng ta cần áp dụng qui tắc đặc biệt hóa tồn tại (dòng 3) trước khi áp dụng qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng (dòng 4). Nếu chúng ta thực hiện ngược lại, thì mệnh đề $q(c)$ có thể không đúng. Bởi vì, $q(c)$ chỉ đúng với giá trị c nào đó chứ không phải đúng với giá trị c được đặc biệt hóa trong $p(c)$ bởi lượng từ $\forall x\, p(x)$.

✓ **Ví dụ 1.9.3** Giả sử $p(x)$, $q(x)$ và $r(x)$ là các vị từ một biến. Chứng minh rằng

$$[(\forall x\,(p(x)\rightarrow q(x)) \wedge \forall x\,(q(x) \rightarrow r(x))] \rightarrow \forall x\,(p(x) \rightarrow r(x)).$$

Chứng minh:

1. $\forall x\,(p(x)\rightarrow q(x))$ GT
2. $\forall x\,(q(x) \rightarrow r(x))$ GT
3. $p(c) \rightarrow q(c)$ 1, UI (với c tùy ý)
4. $q(c) \rightarrow r(c)$ 2, 3, UI (với c trong 3)
5. $p(c) \rightarrow r(c)$ 3, 4 HS (với c tùy ý trong 3)
6. $\forall x\,(p(x) \rightarrow r(x))$ 5, UG.

Vậy, $[(\forall x\,(p(x)\rightarrow q(x)) \wedge \forall x\,(q(x) \rightarrow r(x))] \rightarrow \forall x\,(p(x) \rightarrow r(x))$ được chứng minh.

✓ **Ví dụ 1.9.4** Chúng ta xem suy luận "Mọi kỹ sư máy tính là một nhà logic học. Tâm là một kỹ sư máy tính. Vì vậy, có một số nhà logic học".

Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

Chứng minh: Trước hết chúng ta cần mô hình hóa suy luận trên bằng một mệnh đề cần chứng minh. Rõ ràng, suy luận trên dựa trên các lượng từ nên chúng ta cần xác định các vị từ trong các lượng từ. Dễ thấy, chỉ có hai vị từ trong suy luận là

$C(x)$: "x là một kỹ sư máy tính"

$L(x)$: "x là một nhà logic học".

Từ đó, chúng ta có mệnh đề cần chứng minh $\forall x\ (C(x) \to L(x)) \wedge C(\text{Tâm}) \to \exists x\ L(x)$. Mệnh đề này được chứng minh như sau:

1.	$\forall x\ (C(x) \to L(x))$	GT
2.	$C(\text{Tâm})$	GT
3.	$C(\text{Tâm}) \to L(\text{Tâm})$	1, UI
4.	$L(\text{Tâm})$	2, 3, MP
5.	$\exists x\ L(x)$	4, EG

Kết quả $\exists x\ L(x)$ ở dòng 5 chỉ ra rằng "có một số nhà logic học". Vậy kết luận của suy luận được chứng minh.

BÀI TẬP

1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề đó:

a. Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau

b. Một số âm không phải là số chính phương

c. Nếu số thực *x* lớn hơn 0 thì *x* là số dương Nếu *x* là số thực thì $x^2 < x$

e. 1+1 = 10.

f. x+1 = 2.

g. Bây giờ là mấy giờ ?

h. Hãy làm bài tập đi.

2. Hãy lấy phủ định các mệnh đề sau:

a. 2 + 3 = 5

b. Mùa hè ở TP HCM thì nắng và nóng

c. Nếu n là số nguyên lẻ thì n^2 cũng là số nguyên lẻ

d. Ngày mai nếu trời nóng tôi sẽ đi bơi.

3. Cho p và q là hai mệnh đề

p : "Tôi đã mua vé số".

q : "Tôi đã trúng giải đặc biệt".

Hãy phát biểu các mệnh đề sau bằng các câu thông thường:

$\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$, $q \to p$, $\neg p \to \neg q$, $\neg q \to \neg p$ và $\neg p \vee (p \wedge q)$.

4. Cho *p* và *q* là hai mệnh đề

p :"Nhiệt độ dưới 0^o "

q : "Tuyết rơi."

Dùng *p, q* và các liên từ logic viết các mệnh đề sau:

a. Nhiệt độ dưới 0^oC và tuyết rơi.

b. Nhiệt độ dưới 0^oC nhưng không có tuyết rơi.

c. Nhiệt độ không dưới 0^oC và không có tuyết rơi.

d. Nhiệt độ dưới 0^oC hoặc có tuyết rơi.

e. Nếu nhiệt độ dưới 0^oC thì cũng có tuyết rơi.

f. Hoặc nhiệt độ dưới 0^oC hoặc có tuyết rơi nhưng sẽ không có tuyết rơi nếu nhiệt độ đươi 0^oC.

g. Nhiệt độ dưới 0^oC là điệu kiện cần và đủ để có tuyết rơi.

5. Cho *p, q* và *r* là ba mệnh đề

p : "An nhận được điểm giỏi trong kì thi cuối khoá."

q : "An làm hết bài tập trong quyển sách này."

r : "An được công nhận là giỏi ở lớp này."

Dùng *p, q, r* và các liên từ lôgic để viết các mệnh đề sau:

a. An được công nhận là giỏi ở lớp này nhưng An không làm hết các bài tập ở quyển sách này.

b. An nhận được điểm giỏi ở kì thi cuối khoá, An làm hết bài tập trong quyền sách này và An được công nhận là giỏi ở lớp này.

c. Để được công nhận là giỏi ở lớp này, An cần phải được điểm giỏi ở kì thi cuối khoá.

d. An nhận được điểm giỏi ở kì thi cuối khoá và làm hết bài tập ở quyển sách này là đủ để An được công nhận là giỏi ở lớp này.

e. An được công nhận là giỏi ở lớp này, nếu và chỉ nếu An làm hết các bài tập. trong quyển sách này hoặc nhận được điểm giỏi ở kì thi cuối khoá.

6. Hãy xác định xem mỗi mệnh đề sau là đúng hay sai:

a. Nếu $1 + 1 = 2$ thì $1 + 2 = 0$

b. Nếu $1 + 1 = 3$ thì $1 + 2 = 10$

c. Nếu $1 + 1 = 4$ thì $1 + 2 = 3$

d. $0 > 1$ nếu và chỉ nếu $2 > 1$

e. $1+1=2$ nếu và chỉ nếu $1+2 =5$.

7. Nếu biết mệnh đề $p \to q$ là sai. Hãy cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

$p \vee q$, $q \vee \neg p$ và $q \to p$.

8. Nếu biết mệnh đề $((p \wedge q) \wedge r) \to s \vee t$ là sai. Hãy cho biết chân trị của các mệnh đề p, q, r, s và t.

9. Hãy chỉ ra hằng đúng trong các dạng mệnh đề sau:

a. $[\neg q \wedge (p \vee q)] \to q$

b. $(p \wedge q) \to p$

c. $p \to (p \vee q)$

f. $(p \wedge q) \to (p \to q)$

g. $\neg (p \to q) \to \neg q$

h. $[p \wedge (p \to q)] \to q$

d. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ i. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

e. $\neg (p \rightarrow q) \rightarrow p$ j. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

10. Không lập bảng chân trị, sử dụng các luật tương đương logic, chứng minh rằng các dạng mệnh đề sau là hằng đúng:

a. $(p\wedge q)\rightarrow p$ d. $\neg(p\vee\neg q)\rightarrow\neg p$

b. $p\rightarrow(\neg p\rightarrow p)$ e. $((p\rightarrow q) \wedge (q\rightarrow r)) \rightarrow (p\rightarrow r)$.

c. $p\rightarrow((q\rightarrow (p\wedge q))$

11. Không lập bảng chân trị, sử dụng các luật tương đương logic, kiểm tra dạng mệnh đề F có là hệ quả loic của dạng mệnh E không ?

a. $E = p\wedge (q\vee r)$ $F = (p\wedge q) \vee r$

b. $E = (p\rightarrow q) \wedge (q\rightarrow r)$ $F = p\rightarrow (q \rightarrow r)$

c. $E = p\wedge q$ $F =(\neg p\rightarrow q) \vee (p\rightarrow\neg q)$.

12. Chứng minh các tương đương logic sau đây:

a. $((p\vee q) \wedge (p\vee\neg q)) \vee q \Leftrightarrow p\vee q$

b. $\neg(p\vee q) \vee ((\neg p \wedge q) \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(q\wedge p)$

c. $(p\rightarrow q) \wedge (\neg q\wedge (r\vee\neg q)) \Leftrightarrow \neg(q\vee p)$

d. $p\vee q\vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r) \Leftrightarrow p\vee q\vee r$

e. $(p\vee q) \wedge\neg (\neg p\wedge q) \Leftrightarrow \mathrm{p}$

f. $\neg(\neg((p\vee q) \wedge r) \vee \neg q) \Leftrightarrow q\wedge r$

g. $p\wedge ((\neg q\rightarrow(r\wedge r)) \vee\neg(q\vee (r\wedge s) \vee (r\wedge\neg s)) \Leftrightarrow p$

h. $(p \lor q \lor r) \land (p \lor s \lor \neg q) \land (p \lor \neg s \lor r) \Leftrightarrow p \lor (r \land (s \lor \neg q)$

i. $((\neg p \lor \neg q) \to (p \land q \land r)) \Leftrightarrow p \land q$.

13. Vòng lặp **do** ... **while** trong một đoạn chương trình C như sau:

do

....

while $((x!=0)$ && $(y>0))$ || (! $((w>0)$ && $(t==4))$);

Hãy xác định trong trường hợp nào thì vòng lặp kết thúc nếu các biến được gán giá trị như sau

a. $x=8$, $y=3$, $w=5$, $t=4$

b. $x=0$, $y=3$, $w=-3$, $t=4$

c. $x=0$, $y=-1$, $w=1$, $t=4$

d. $x=1$, $y=-1$, $w=1$, $t=4$.

14. Trong một phiên tòa xử án ba bị can là anh An, chị Bình, anh Cung có liên quan đến vấn đề tài chánh, trước tòa cả ba bị cáo đều tuyên thệ khai đúng sự thật và lời khai như sau:

anh An nói: "Chị Bình có tội và anh Cung vô tội".

chị Bình nói : "Nếu anh An có tội thì anh Cung cũng có tội ".

anh Cung nói : "Tôi vô tội nhưng một trong hai người kia là có tội ".

Hãy xét xem ai là người có tội ?

15. Hãy kiểm tra các suy luận sau:

a.

$$\begin{array}{c} q \\ t \to p \\ (p \wedge q) \to s \\ \hline \therefore\ t \to s \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \neg q \vee r \\ s \to \neg r \\ \hline \therefore\ \neg s \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{c} p \to \neg q \\ (p \wedge \neg s) \vee t \\ t \to q \\ \hline \therefore\ \neg s \to t \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{c} t \to u \\ r \to (s \vee t) \\ (\neg p \vee q) \to r \\ \neg (s \vee u) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

e.

$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to (p \vee s) \\ (t \to p) \to r \\ \neg (q \vee s) \\ \hline \therefore\ t \end{array}$$

16. Chứng minh bằng các phương pháp trực tiếp và phản chứng rằng bình phương của một số chẵn là một số chẵn.

17. Xem suy luận sau: "Nếu tôi đang nhảy thì tôi hạnh phúc. Có một con chuột ở trong nhà hoặc tôi hạnh phúc. Nhưng tôi buồn. Vì vậy, có một con chuột ở trong nhà và tôi không nhảy"

a. Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.

b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

18. Xem suy luận sau: "nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An sẽ được tăng lương. nếu được tăng lương thì An sẽ mua xe mới. An không mua xe mới. vì vậy, An không được lên chức hoặc An không làm việc nhiều"

a. Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.

b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

19. Xem suy luận sau: "Nếu Bình đi học về muộn thì mẹ anh ta sẽ buồn. Nếu An thường xuyên vắng nhà thì cha anh ta sẽ giận. Nếu mẹ Bình buồn hoặc cha An giận thì cô Hà, bạn họ, sẽ nhận được lời than phiền. Mà Hà không nhận được lời than phiền. Vì vậy, Bình đi học về sớm và An ít khi vắng nhà".

a. Hãy dùng logic mệnh đề để mô hình hoá suy luận trên.

b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

20. Cho $P(x)$ là vị từ "$x = x^2$". Nếu miền giá trị của biến x là tập hợp các số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề P(0), P(1), P(2), P(-1), $\exists x\, P(x)$ và $\forall x\, P(x)$.

21. Cho $P(x)$ là vị từ "Sinh viên x học trên giảng đường hơn 6 giờ mỗi ngày trong tuần". Hãy phát biểu các lượng từ sau bằng ngôn ngữ tự nhiên:

a. $\exists x,\ P(x)$

b. $\forall x,\ P(x)$

c. $\forall x, \neg P(x)$

d. $\exists x,\ \neg P(x)$

22. Cho ba vị từ $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ với biến nguyên x được xác định như sau.

$P(x)$: "$x \leq 5$" $Q(x)$: "$x+1$ là số lẻ" $R(x)$: "$x > 0$"

Hãy cho biết chân trị của các mệnh đề dưới đây :

a. $P(5)$

b. $Q(5)$

c. $\neg P(5)$

d. $\neg P(5) \vee [Q(3) \vee \neg R(3)]$

e. $\neg P(2) \rightarrow [Q(2) \rightarrow \neg R(2)]$

f. $\neg P(2) \Leftrightarrow [Q(2) \rightarrow \neg R(2)]$.

23. Cho hai vị từ $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ hai biến số thực:

$P(x, y)$: "$x^2 \geq y$" $Q(x, y)$: "$x+2 < y$"

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề:

a. $P(2,2) \rightarrow Q(1,1)$

b. $P(2,4)$

c. $P(1,2) \Leftrightarrow \neg Q(1,2)$

d. $P(3,10) \wedge Q(1,3)$.

24. Giả sử x là biến số nguyên trong các vị từ

$P(x)$: "$x>0$" $Q(x)$: "x là số chẵn"

$S(x)$: "x chia hết cho 4" $R(x)$: "x là số chính phương".

$T(x)$: "x chia hết cho 3"

Hãy sử dụng các ký hiệu lượng từ và các phép toán logic để biểu diễn và xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a. Có ít nhất 1 số nguyên chẵn.

b. Nếu x chẵn, thì x không chia hết cho 3.

c. Không có số nguyên chẵn nào là chia hết cho 3.

d. Tồn tại 1 số nguyên dương là số chẵn.

e. Tồn tại 1 số nguyên chẵn chia hết cho 4.

f. Nếu x chẵn và x là số chính phương, thì x chia hết cho 4.

25. Giả sử x là biến số nguyên trong các vị từ

$P(x)$: "$x>0$" $Q(x)$: "x là số chẵn"

$S(x)$: "x chia hết cho 4" $R(x)$: "x là số chính phương".

$T(x)$: "x chia hết cho 3"

Phát biểu bằng ngôn ngữ tự nhiên các lượng từ sau

a. $\exists x, [S(x) \wedge \neg R(x)]$

b. $\forall x, [\neg R(x) \vee \neg Q(x) \vee S(x)]$

c. $\forall x, [R(x) \rightarrow P(x)]$

d. $\forall x, [S(x) \rightarrow Q(x)]$

e. $\forall x, [S(x) \rightarrow \neg T(x)]$

26. Cho x là biến số thực trong các vị từ

$P(x)$: "$x \geq 0$" $Q(x)$: "$x^2 \geq 0$"

$R(x)$: "$x^2 + x + 1 = 0$" $S(x)$: "$x^2 - 2 > 0$"

Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau:

a. $\exists x, [P(x) \wedge R(x)]$

b. $\forall x, [P(x) \rightarrow Q(x)]$

c. $\forall x, [Q(x) \rightarrow S(x)]$

d. $\forall x, [R(x) \vee S(x)]$

e. $\forall x, [R(x) \rightarrow P(x)]$

27. Cho $P(x, y)$ là câu "x đã học môn y", trong đó x là một trong các sinh viên của một trường đại học. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường:

a. $\exists x, \exists y, P(x, y)$

d. $\exists y, \forall x, P(x, y)$

b. $\exists x, \forall y, P(x, y)$ e. $\forall y, \exists x, P(x, y)$

c. $\forall x, \exists y, P(x, y)$ f. $\forall x, \forall y, P(x, y)$

28. Cho $P(x)$ là câu "x nói được tiếng Anh" và $Q(x)$ là câu "x biết ngôn ngữ JAVA ", trong đó x là một trong các sinh viên của một trường đại học. Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, các lượng từ và các liên từ logic.

a. Có một sinh viên trong trường nói được tiếng Anh và biết JAVA .

b. Có một sinh viên trong trường nói được tiếng Anh và không biết JAVA .

c. Mọi sinh viên trong trường đều nói được tiếng Anh hoặc biết JAVA .

29. Không có một sinh viên nào trong trường nói được tiếng Anh hoặc biết JAVA .Dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a. Tất cả các sinh viên tin học đều cần phải học môn toán học rời rạc

b. Có một sinh viên ở lớp này đã có laptop.

c. Tất cả các sinh viên ở lớp này đã học ít nhất một môn tin học

d. Có một sinh viên ở lớp này đã học ít nhất một môn tin học

e. Mỗi sinh viên ở lớp này ở một nhà trong ký túc xá

f. Có một sinh viên ở lớp này đã ở tất cả các phòng của ít nhất một nhà trong ký túc xá

g. Tất cả các sinh viên ở lớp này ít nhất đã ở một phòng trong tất cả các nhà trong ký túc xá.

30. Lớp toán học rời rạc có một sinh viên ngành toán năm thứ nhất, 12 sinh viên ngành toán năm thứ hai, 15 sinh viên tin học năm thứ hai, hai sinh viên toán năm thứ ba, hai sinh viên tin học năm thứ ba và một sinh viên tin học năm thứ tư . Diễn đạt các câu sau bằng cách dùng các lượng từ rồi sau đó xác định giá trị chân lý của chúng:

a. Có một sinh viên trong lớp là sinh viên năm thứ ba

b. Mọi sinh viên trong lớp đều là sinh viên ngành tin học.

c. Có một sinh viên trong lớp không phải là sinh viên ngành toán và cũng không phải sinh viên năm thứ ba.

d. Mọi sinh viên trong lớp hoặc là sinh viên năm thứ hai hoặc là sinh viên ngành tin.

e. Có một ngành học sao cho mỗi khóa học có một sinh viên ở lớp này học ngành đó.

31. Dùng các lượng từ diễn đạt phủ định các mệnh đề sau, rồi phát biểu các phủ định thành các câu thông thường.

a. Mọi sinh viên ở lớp này đều thích môn toán.

b. Có một sinh viên trong lớp này chưa hề bao giờ nhìn thấy cánh đồng lúa .

c. Có một sinh viên trong lớp này đã học tất cả các môn toán được dạy ở trường này.

d. Có một sinh viên ở lớp này đã ở ít nhất một phòng trong tát cả các tòa nhà ở ký túc xá.

32. Dùng các qui tắc suy diễn với lượng từ chứng minh mệnh đề

$[(\forall x, p(x) \vee q(x)) \wedge (\exists x, \neg p(x)) \wedge (\forall x, \neg q(x) \vee r(x)) \wedge (\forall x, s(x) \rightarrow \neg r(x))] \rightarrow \exists x, \neg s(x)$.

33. Xem suy luận sau: "Mọi số hữu tỉ là một số thực. Có một số hữu tỉ. Vì vậy, có một số thực"

a. Hãy dùng logic vị từ để mô hình hóa suy luận trên.

b. Hãy chứng minh kết luận của suy luận trên.

34. Chuyển các câu sau đây thành các vị từ. Sau đó chứng minh một cách hình thức câu kết luận.

Giả thiết: Không có sinh viên nào mà không ham học. Tâm không ham học.

Kết luận: Tâm không phải là sinh viên

35. $\exists! x \in X$, $P(x)$ là kí hiệu của mệnh đề "Tồn tại duy nhất một x trong X sao cho $P(x)$". $\exists! x \in X$, $P(x)$ là đúng khi có chỉ đúng một giá trị c trong X thay thế cho x sao cho $P(c)$ đúng. Nếu miền giá trị của biến x là các số nguyên Z, hãy xác định giá trị chân lý của các lượng từ sau:

a. $\exists! x \in Z$, $(x > 2)$.

b. $\exists! x \in Z$, $(x^2 = 4)$.

c. $\exists! x \in Z$, $(x + 5 = 2x)$.

d. $\exists! x \in Z$, $(x = x + 1)$.

Chương 2

TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

Tập hợp và ánh xạ là các khái niệm có tính cơ bản và nền tảng của toán học hiện đại. Toán học hiện đại sử dụng tập hợp và ánh xạ như những khái niệm cơ sở để định nghĩa các khái niệm toán học mới trong quá trình phát triển của nó. Khoa học máy tính và công nghệ thông tin sử dụng tập hợp để mô hình hóa và biểu diễn các đối tượng thông tin, dữ liệu trong khi ánh xạ là công cụ mô hình hóa các thao tác xử lý dữ liệu nói chung và giải thuật tính toán nói riêng.

Phần 2.1, 2.2 và 2.3 của chương này tương ứng trình bày khái niệm tập hợp, các phép toán đại số tập hợp và các tính chất của các phép toán đại số tập hợp như là nền tảng của lý thuyết tập hợp và là cơ sở để tập hợp được ứng dụng vào thực tế. Phần 2.4 định nghĩa khái niệm ánh xạ một cách hình thức. Phần 2.5 và 2.6 trình bày một số ánh xạ đặc biệt như đơn ánh, toàn ánh, song ánh, ánh xạ ngược và ánh xạ hợp. Phần 2.7 giới thiệu khái niệm độ tăng của hàm số, một khái niệm có nhiều ứng dụng trong lý thuyết phân tích độ phức tạp của giải thuật.

2.1 Khái niệm tập hợp

Tập hợp (set) là một khái niệm *cơ bản* (basic) của toán học, không được định nghĩa một cách hình thức dựa trên các khái niệm toán học khác. Những vật, những đối tượng toán học, v.v, được tụ tập theo một tính chất chung nào đó tạo thành những tập hợp. Ví dụ, tập hợp các nguyên âm trong tiếng Anh, tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các số nguyên, v.v.

Lý thuyết tập hợp là nền tảng của toán học hiện đại, được nhà toán học Georg Cantor nghiên cứu đặt nên móng đầu tiên vào những năm 1871-1883.

Các đối tượng thuộc (trong) tập hợp A được gọi là các phần tử của A. Nếu x là một phần tử của tập hợp A, ta viết $x \in A$. Ngược lại, nếu x không phải là một phần tử của A, ta viết $x \notin A$. Một tập hợp không có phần tử nào được gọi là *tập hợp rỗng* (empty set), ký hiệu $\varnothing$. Ví dụ, tập hợp các nghiệm số thực của phương trình $x^2+1 = 0$ là $\varnothing$. Một tập hợp $\mathcal{U}$ bao gồm tất cả các phần tử đang xét (trong một vấn đề nào đó) gọi là *tập hợp vũ trụ* (universal set). Ví dụ, trong khi xem xét dân số thế giới, thì tập hợp tất cả các người đang sống trên hành tinh là một tập hợp vũ trụ. Trong số học thì tập hợp vũ trụ là tất cả các số nguyên.

Một tập hợp A có n phần tử $a_1, a_2,\ldots, a_n$ được ký hiệu là $A = \{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$. Một tập hợp A bao gồm những phần tử x

trong vũ trụ $\mathcal{U}$ có tính chất $p(x)$ được ký hiệu là $A = \{x \in \mathcal{U} \mid p(x)\}$. Ví dụ, $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\}$ là tập hợp tất cả các số nguyên $\mathbb{Z}$ sao cho bình phương của chúng không lớn hơn 4. Nghĩa là $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Cho A là một tập hợp. Nếu A có đúng n phần tử, với n là số nguyên không âm, thì ta nói A là một *tập hợp hữu hạn* (finite set) và n là *bản số* (cardinality) của A. Bản số của A được ký hiệu $|A|$. Ví dụ A là tập số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 10, thì $|A| = 5$.

Một tập hợp được gọi là vô hạn nếu nó không phải là hữu hạn. Ví dụ, tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là một tập hợp vô hạn.

Hai *tập hợp A và B được gọi là bằng nhau*, ký hiệu $A = B$, nếu và chỉ nếu chúng có cùng các phần tử. Ví dụ, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq 2x \leq 6\}$ và $B = \{2, 3\}$, thì $A = B$.

▪ **Định nghĩa 2.1.1** Giả sử A và B là hai tập hợp, tập hợp A được gọi là tập hợp con của tập hợp B, ký hiệu $A \subset B$, nếu mọi phần tử $x \in A$ thì $x \in B$.

Ký hiệu $A \subset B$ còn được đọc là "A chứa trong B" hoặc "B chứa A" hoặc "A là một bộ phận của B". Ta còn có thể ký hiệu $B \supset A$ để thay cho $A \subset B$, phủ định của $A \subset B$ được viết là $A \not\subset B$. Lưu ý rằng, mọi tập hợp đều là tập con của chính nó, tập hợp $\varnothing$ là tập con của mọi tập hợp.

- **Định lý 2.1.1** Cho ba tập hợp A, B và C, khi đó ta có:

  1. Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$
  2. $A = B$ nếu và chỉ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

Chứng minh: $\forall x \in A$, do $A \subset B$ nên $x \in B$, lại do $B \subset C$ nên $x \in C$. Vì vậy $A \subset C$. Như thế mệnh đề 1 của định lý được chứng minh. Vì $A = B$ nên mọi phần tử trong A cũng là phần tử trong B và ngược lại nên $A \subset B$ và $B \subset A$. Mặt khác nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì mọi phần tử thuộc A cũng thuộc B và ngược lại nên $A = B$. Vậy, mệnh đề 2 của định lý được chứng minh.

Với một tập hợp A bất kỳ, tập hợp tất cả các tập hợp con của tập hợp A, được gọi là *tập hợp lũy thừa* (power set) của A, ký hiệu là $\mathscr{P}(A)$ hoặc $2^{|A|}$. Nói cách khác $\mathscr{P}(A)$ là tập hợp gồm các phần tử là những tập hợp con của tập hợp A. Ví dụ, $A = \{a, b, c\}$, thì $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Giả sử k là một số nguyên dương và $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập hợp khác rỗng, tập hợp *tích Descartes* (Descartes product) của $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ký hiệu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, là một tập hợp gồm tất cả các bộ có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sao cho $a_i \in A_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$. Nói cách khác $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$. Ví dụ, $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, thì $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

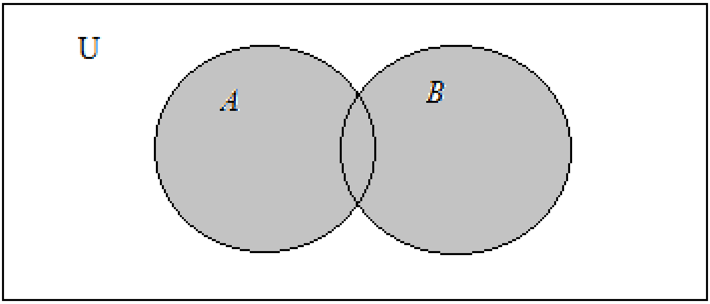
2.2 Các phép toán đại số tập hợp

Trên cơ sở các khái niệm về tập hợp đã được giới thiệu, các phép toán trên các tập hợp, như là một đại số tập hợp, sau đây là cơ sở để ứng dụng lý thuyết tập hợp vào khoa học và thực tiễn nói chung và khoa học máy tính nói riêng.

▪ **Định nghĩa 2.2.1** Giả sử A và B là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$, *phép toán hợp* (union operation) của A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A hay thuộc B. Nghĩa là

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Hình 2.2.1 thể hiện kết quả của phép toán hợp của hai tập hợp A và B bằng một biểu đồ (gọi là biểu đồ Venn).



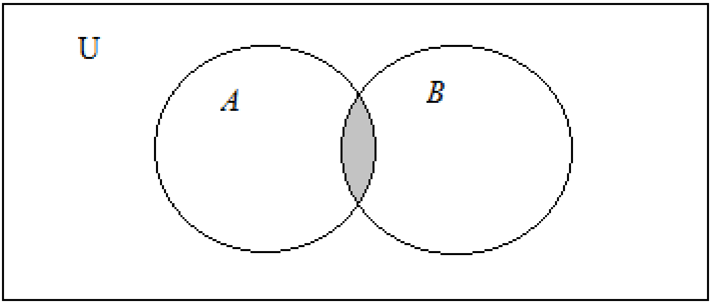
Hình 2.2.1: Hợp của hai tập hợp *A* và *B*

✓ **Ví dụ 2.2.1** Cho $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, thì $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$.

▪ **Định nghĩa 2.2.2** Giả sử A và B là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$, *phép toán giao* (intersection operation) của A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A và thuộc B. Nghĩa là

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Hình 2.2.2 là biểu đồ Venn thể hiện kết quả của phép toán giao của hai tập hợp A và B.



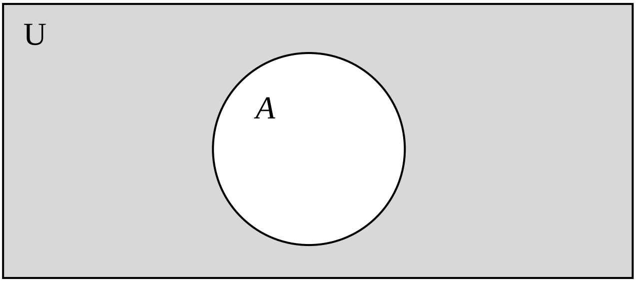
Hình 2.2.2: Giao của hai tập hợp *A* và *B*

✓ **Ví dụ 2.2.2** Cho $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, thì $A \cap B = \{1, 2\}$.

▪ **Định nghĩa 2.2.3** Giả sử A là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$, *phần bù* (complement) của A đối với $\mathcal{U}$, ký hiệu $\overline{A}$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc $\mathcal{U}$ và không thuộc A. Nghĩa là

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$

Hình 2.2.3 là biểu đồ Venn thể hiện kết quả của phép toán lấy phần bù của tập hợp *A* trong tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$.



Hình 2.2.3: Phần bù của tập hợp *A* trong vũ trụ $\mathcal{U}$

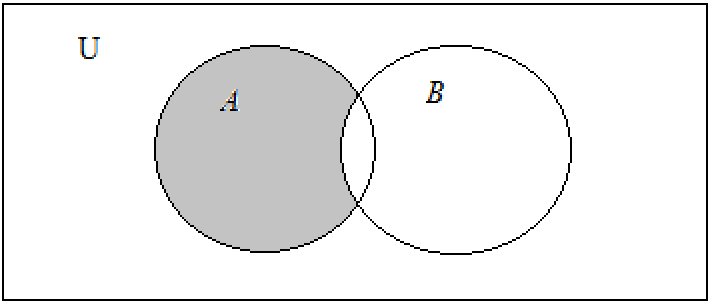
✓ **Ví dụ 2.2.3** Với tập vũ trụ $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn, thì $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin A\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ là tập hợp các số tự nhiên lẻ.

Dễ thấy, giao, hợp, trừ của hai tập hợp, phần bù của một tập hợp trên vũ trụ $\mathcal{U}$ cũng là một tập hợp trên $\mathcal{U}$. Nói cách khác, đại số tập hợp trên vũ trụ $\mathcal{U}$ là *đóng* (closure) trong $\mathcal{U}$.

▪ **Định nghĩa 2.2.4** Giả sử *A* và *B* là các tập hợp con của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$, *phép toán trừ* (difference operation) của *A* và *B*, ký hiệu *A* - *B*, là tập hợp gồm các phần tử thuộc *A* và không thuộc *B*. Nghĩa là

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Hình 2.2.4 là biểu đồ Venn thể hiện kết quả của phép toán giao của hai tập hợp *A* và *B*.



Hình 2.2.4: Hiệu của hai tập hợp *A* và *B*

✓ **Ví dụ 2.2.4** Cho $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, thì $A - B = \{5\}$.

Từ định nghĩa của phép trừ, chúng ta dễ thấy rằng $A - B = A \cap \overline{B}$. Nói cách khác, phép trừ của các tập hợp được suy dẫn từ phép giao và phép lấy phần bù. Tập đầy đủ các phép toán trên tập hợp chỉ gồm phép hợp, giao và phần bù. Vì vậy, các tính chất cơ bản của các phép toán đại số tập hợp sau đây không đề cập đến tính chất của phép trừ.

2.3 Tính chất của các phép toán tập hợp

Các phép toán đại số tập hợp có các tính chất cơ bản, còn gọi là luật, tương tự như các phép toán đại số mệnh đề. Cụ thể các tính chất cơ bản của các phép toán tập hợp được phát biểu bằng định lý sau.

▪ **Định lý 2.3.1** Giả sử *A*, *B*, *C* là các tập con bất kỳ của $\mathcal{U}$, khi đó ta có

1. Luật đồng nhất:

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

2. Luật thống trị:

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

3. Luật lũy đẳng:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

4. Luật bù: $(\overline{\overline{A}}) = A$

5. Luật giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

6. Luật kết hợp:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

7. Luật phân bố:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

8. Luật De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Chứng minh: Ở đây, chúng ta chỉ giới thiệu chứng minh luật De Mogan. Việc chứng minh các luật còn lại xem như là các bài tập. Giả sử $x \in \overline{A \cup B}$, thì $x \in \mathcal{U}$ và $x \notin A \cup B \Rightarrow (x \in \mathcal{U}$ và $x \notin A) \wedge (x \in \mathcal{U}$ và $x \notin B) \Rightarrow x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B}$, nên $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Vậy $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Ngược lại, giả sử $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, thì $x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B} \Rightarrow (x \in \mathcal{U}$ và $x \notin A) \wedge (x \in \mathcal{U}$ và $x \notin B)$ $\Rightarrow x \in \mathcal{U}$ và $x \notin A \cup B$, nên $x \in \overline{A \cup B}$. Vậy $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Từ đó, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Bằng cách chứng minh tương tự, ta cũng có $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.4 Khái niệm ánh xạ

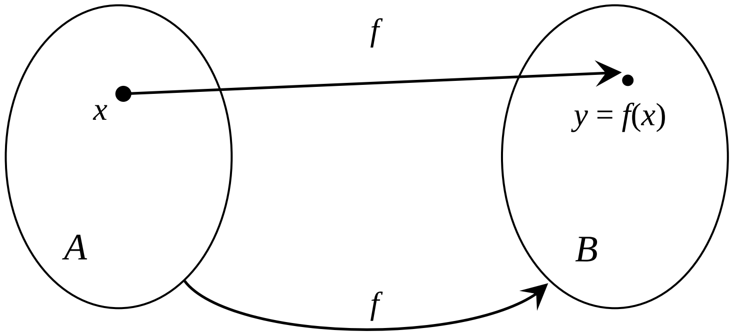
Cùng với tập hợp, ánh xạ là một trong những khái niệm có tính nền tảng của toán học hiện đại được ứng dụng rộng rãi trong hầu hết các lĩnh vực khoa học và công nghệ. Trong ngành Công nghệ Thông tin, ánh xạ là mô hình toán học của các giải thuật là cơ sở để tạo nên các chương trình máy tính.

- **Định nghĩa 2.4.1** Giả sử A và B là hai tập hợp khác rỗng, một *ánh xạ* (function) từ A vào B là một qui tắc cho tương ứng với mỗi phần tử x của A một phần tử duy nhất y của B, ký hiệu là $f(x)$ và gọi là ảnh của x bởi f. Ta viết

$$f:\ A \to B$$

$$x \mapsto f(x)$$

Tập hợp A gọi là nguồn hay miền xác định, tập hợp B gọi là đích hay là miền giá trị của ánh xạ f. Chúng ta cũng gọi ánh xạ từ *A vào B* là ánh xạ từ *A đến B*. Hình 2.4.1 là sơ đồ biểu diễn ánh xạ f từ tập hợp A vào tập hợp B.



Hình 2.4.1: Ánh xạ *f* từ tập hợp *A* vào tập hợp *B*

✓ Ví dụ 2.4.1

1. Giả sử $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, tương ứng

$$1 \mapsto c$$

$$2 \mapsto a$$

xác định một ánh xạ từ A vào B.

2. Giả sử $A = B = \{1, 2, 3\}$, tương ứng

$$1 \mapsto 3$$

$$2 \mapsto 2$$

$$3 \mapsto 1$$

xác định một ánh xạ từ A vào A.

3. Xét tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên và tập $\mathbb{Z}_m$ các số nguyên không âm nhỏ hơn một số nguyên dương đã cho *m*. Với mọi $x \in \mathbb{N}$, ta chia *x* cho *m* và được số dư $y \in Z_m$, ký hiệu là *x mod m*, thì tương ứng

$$x \mapsto x \bmod m$$

xác định một ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_m$ (nghĩa là $f(x) = x \bmod m$)

4. Xét tập *A* bất kỳ, thì tương ứng

$$x \mapsto x$$

xác định một ánh xạ từ *A* vào *A*, gọi là ánh xạ đồng nhất trên *A*, ký hiệu là 1_A

5. Xét tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$. Với mỗi số thực *x* ta xác định số nguyên *y* lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng *x*, ký hiệu là $\lfloor x \rfloor$. thì tương ứng

$$x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

xác định một ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

6. Xét tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và tập hợp số các nguyên $\mathbb{Z}$. Với mỗi số thực *x* ta xác định số nguyên *y* nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng *x*, ký hiệu là $\lceil x \rceil$. thì tương ứng

$$x \mapsto \lceil x \rceil$$

xác định một ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Chúng ta dễ thấy rằng, khái niệm ánh xạ là khái niệm mở rộng của khái niệm hàm số. Các hàm số là những ánh xạ mà nguồn và đích là các tập hợp con của tập hợp các số thực $\mathbb{R}$. Ví dụ, hàm số $y = f(x) = x^2$ là ánh xạ từ tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ đến tập hợp các số thực không âm $\mathbb{R}^*$.

▪ **Định nghĩa 2.4.2** Hai ánh xạ f và g từ A vào B được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Cũng như hàm số, mỗi ánh xạ xác định một đồ thị tương ứng. Khái niệm đồ thị của ánh xạ được mở rộng từ khái niệm đồ thị của hàm như sau.

▪ **Định nghĩa 2.4.3** Giả sử f: $A \to B$ là một ánh xạ, tập hợp con Γ của $A \times B$ bao gồm các cặp $(x, f(x))$ với $x \in A$ được gọi là *đồ thị* (graph) của ánh xạ f.

✓ **Ví dụ 2.4.2** Ánh xạ f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}_m$ trong ví dụ 2.4.1 có đồ thị là $\Gamma = \{(x, x \bmod m) \mid x \in \mathbb{N}\}$, trong đó $x \bmod m \in Z_m$ là số dư của phép chia x cho m.

▪ **Định nghĩa 2.4.4** Giả sử f là ánh xạ từ A vào B và E, F tương ứng là tập hợp con của A và B.

1. Ảnh của E được xác định bởi f là tập hợp $f(E) = \{y \in B \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$ (hay đơn giản hơn có thể viết $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$)
2. Tạo ảnh (ảnh ngược) của F được xác định bởi f là tập hợp $f^{1}(F) = \{x \in A \mid f(x) \in F\}$.

Đặc biệt, khi $F = \{y\}$, thì chúng ta ký hiệu $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(F) = f(\{y\})$. Ngoài ra, nếu $f^{-1}(y)=\{x\}$, thì x là phần tử duy nhất có ảnh là y (nói cách khác y có một tạo ảnh duy nhất là x).

✓ **Ví dụ 2.4.3** Xét ánh xạ f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$ với $f(x) = x^2$. Cho $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, thì $f(E) = \{0, 1, 4\}$. Cho $F = \{4, 9\}$, thì $f^{-1}(F) = \{-2, -3, 2, 3\}$, $f^{-1}(4)=\{-2, 2\}$.

▪ **Định lý 2.4.1** Giả sử f là một ánh xạ từ A vào B và E, F tương ứng là tập hợp con của A và B. Khi đó ta có:

1. $E \subset f^{-1}(f(E))$
2. $F \supset f(f^{-1}(F))$

Chứng minh: Từ Định nghĩa 2.4.4, ta có $f(E) = \{y \in B | \exists x \in E, y = f(x)\}$ nên $f^{-1}(f(E)) = \{x \in A \mid f(x) \in f(E)\}$. Vì vậy, nếu $x \in E$ thì $x \in A$ và $f(x) \in f(E)$ nên $x \in \{x \in A \mid f(x) \in f(E)\} = f^{-1}(f(E))$. Suy ra $E \subset f^{-1}(f(E))$, Vì vậy, phần 1 của định lý được chứng minh.

Từ định nghĩa 2.4.4, ta có $f(f^{-1}(F)) = \{y = f(x) | x \in f^{-1}(F)\} = \{y = f(x) | x \in A$ mà $f(x) \in F\} \subset F$. Vì vậy, phần 2 của định lý được chứng minh.

▪ **Định lý 2.4.2** Giả sử f là một ánh xạ từ A vào B và E_1, E_2 là các tập con của A, F_1 và F_2 là các tập con tùy ý của B. Ta có:

1. $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$

2. $f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$

3. $f^{-1}(E_1 \cup E_2) = f^{-1}(E_1) \cup f^{-1}(E_2)$

4. $f^{-1}(E_1 \cap E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$.

Chứng minh: $f(E_1 \cup E_2) = \{f(x) | x \in E_1 \cup E_2\} = \{f(x) | x \in E_1 \vee x \in E_2\} = \{f(x) | x \in E_1\} \cup \{f(x) | x \in E_2\} = f(E_1) \cup f(E_2)$. Như vậy, hệ thức thứ 1 của định lý được chứng minh. Các hệ thức còn lại chứng minh tương tự.

Lưu ý rằng trong hệ thức thứ 2, $f(E_1 \cap E_2)$ là tập hợp con thực sự của $f(E_1) \cap f(E_2)$. Thậy vậy, chúng ta xem ánh xạ f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(x) = |x|$. Lấy $E_1 = \mathbb{Z}^+$ và $E_2 = \mathbb{Z}^-$, tương ứng là các tập hợp các số nguyên dương và nguyên âm. Ta có $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, nên $f(E_1 \cap E_2) = \varnothing$, nhưng $f(E_1) = f(E_2) = \mathbb{Z}^+$ nên $f(E_1) \cap f(E_2) = \mathbb{Z}^+ \neq \varnothing$.

Trong lý thuyết cũng như ứng dụng, các phần tử của một tập hợp có thể cần phải được gán các *chỉ số* (index). Phép gán chỉ số cho các phần tử của một tập hợp được định nghĩa bởi một ánh xạ như dưới đây.

- **Định nghĩa 2.4.5** Giả sử X và I là hai tập hợp khác rỗng, một ánh xạ f: $I \to X$ xác định một *họ* (family) các phần tử của X được đánh số bởi I.

Một cách chi tiết hơn, với mỗi $i \in I$, phần tử $f(i) \in X$ được ký hiệu là f_i và họ các phần tử của X được đánh số bởi I được viết $(f_i)_{i \in I}$. Đặc biệt, nếu các f_i là những tập hợp thì ta gọi $(f_i)_{i \in I}$ là một họ tập hợp trong X được đánh số bởi tập hợp I. Nếu I là một tập hợp con của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ thì ta gọi $(f_i)_{i \in I}$ là một dãy các phần tử của X.

✓ **Ví dụ 2.4.4** Cho $I = \{1, 2, 3\}$ và $X = \{a, b\}$, khi đó $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Ta định nghĩa ánh xạ $f : I \to \mathscr{P}(X)$, với

$$1 \mapsto A_1 = \{b\}$$

$$2 \mapsto A_2 = \{a, b\}$$

$$3 \mapsto A_3 = \{a, b\}$$

thì f xác định một họ $(A_i)_{i\in I}$ gồm ba tập hợp A_1, A_2, A_3 trong đó $A_2 = A_3$.

Tương tự như phép hợp và giao của hai tập hợp, chúng ta cũng có thể thực hiện các phép hợp và giao của một họ các tập hợp bất kỳ. Cụ thể, cho $(X_i)_{i\in I}$ là một họ các tập hợp, phép hợp của họ $(X_i)_{i\in I}$, ký hiệu $\bigcup_{i\in I} X_i$, là một tập hợp gồm các phần tử x sao cho x thuộc ít nhất một tập hợp của họ $(X_i)_{i\in I}$. Phép giao của họ $(X_i)_{i\in I}$, ký hiệu $\bigcap_{i\in I} X_i$, là một tập hợp gồm các phần tử x sao cho x thuộc tất cả các tập hợp của họ $(X_i)_{i\in I}$.

2.5 Đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Một cách không hình thức, một ánh xạ mà mỗi phần tử của miền giá trị tương ứng với nhiều nhất một phần tử của miền xác định gọi là đơn ánh. Một ánh xạ mà ảnh của miền xác định là miền giá trị gọi là toàn ánh. Khi một ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toán ánh thì ánh xạ được gọi là song ánh. Đơn ánh, toàn ánh và song ánh là các trường hợp đặc biệt của ánh xạ và có nhiều ứng dụng trong toán học và thực tế. Các khái niệm hình thức của đơn ánh, toàn ánh và song ánh được định nghĩa lần lượt dưới đây.

▪ **Định nghĩa 2.5.1** Ánh xạ f: $A \to B$ được gọi là *đơn ánh* (injunction) nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Một đơn ánh còn được gọi là ánh xạ *một đối một* (one-to-one). Ngoài ra, từ tính tương đương logic của các mệnh đề $p \to q$ và $\neg q \to \neg p$, chúng ta có thể suy ra rằng f: $A \to B$ là đơn ánh nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$.

✓ **Ví dụ 2.5.1**

1. Có thể kiểm tra dễ dàng ánh xạ f từ $\{a, b, c, d\}$ đến $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ với $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$, và $f(d) = 3$ một là đơn ánh.

2. Ánh xạ f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ với $x \mapsto x^3$ là một đơn ánh, thật vậy, với mọi $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $(x_1)^3 \neq (x_2)^3$ hay $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Ánh xạ $f(x) = x^2$ từ tập hợp các số nguyên đến tập hợp các số nguyên không phải là đơn ánh vì $f(-1) = f(1) = 1$. Tuy nhiên ánh xạ $f(x) = x^2$ từ tập hợp các số nguyên không âm đến tập hợp các số nguyên không âm là đơn ánh.

▪ **Định nghĩa 2.5.2** Ánh xạ f: $A \to B$ được gọi là *toàn ánh* (surjection) nếu $f(A) = B$, nói cách khác nếu với mọi $y \in B$ có ít nhất một $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Một toàn ánh f: $A \to B$ còn được gọi là một ánh xạ từ *A lên* (onto) *B*.

✓ **Ví dụ 2.5.2**

1. Có thể kiểm tra dễ dàng ánh xạ f từ $\{a, b, c, d\}$ đến $\{1, 2, 3\}$ được xác định bởi $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ và $f(d) = 3$ là một toàn ánh.

2. Ánh xạ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x) = x^2$ không phải là toàn ánh. Vì thực $y = -1$ không có số thực x sao cho $f(x) = x^2 = y = -1$.

▪ **Định nghĩa 2.5.3** Ánh xạ f: $A \to B$ được gọi là *song ánh* (*bijection*) nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, nói cách khác nếu với $y \in B$ có một và chỉ một $x \in A$ sao cho $f(x) = y$.

✓ **Ví dụ 2.5.3**

1. Có thể kiểm tra dễ dàng ánh xạ f từ $\{a, b, c, d\}$ đến $\{1, 2, 3, 4\}$ được xác định bởi $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 4$ và $f(d) = 1$ là một song ánh.

2. Ánh xạ f: R→ R với $f(x) = x^3 + 1$ là một song ánh. Vì với mọi $x_1, x_2 \in$ R và $x_1 \neq x_2$ thì $x_1^3 + 1 \neq x_2^3 + 1$ hay $f(x_1) \neq f(x_2)$ nên f là đơn ánh. Mặt khác, với mọi $y \in$ R ta có $x = \sqrt[3]{y-1} \in$ R và $f(x) = x^3 + 1 = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y$ nên f là toàn ánh. Từ đó ánh xạ f là một song ánh.

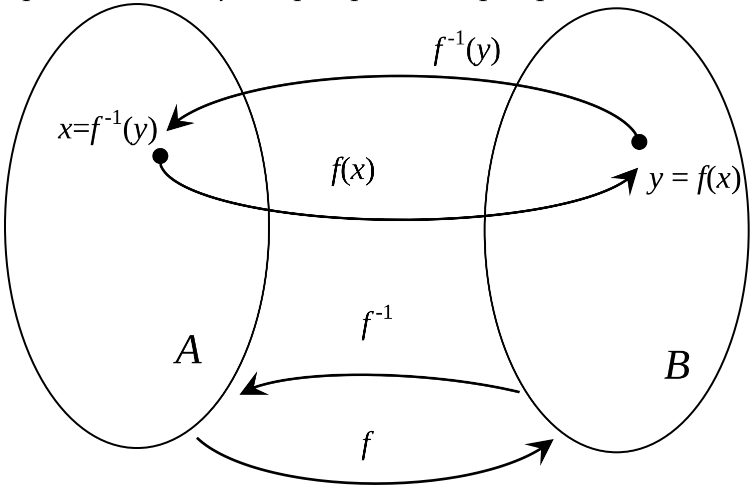
2.6 Ánh xạ ngược và ánh xạ hợp

Ánh xạ ngược và ánh xạ hợp là các khái niệm mở rộng tương ứng của khái niệm hàm số ngược và hàm số hợp. Ánh xạ ngược và ánh xạ hợp lần lượt được định nghĩa như sau.

- **Định nghĩa 2.6.1** Giả sử f là một song ánh từ tập hợp A vào tập hợp B, ánh xạ ngược của f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi $y \in B$ với một phần tử duy nhất $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Ánh xạ ngược của f được ký hiệu là f^{-1}.

Từ định nghĩa ta suy ra $f^{-1}(y) = x$ khi và chỉ khi $f(x) = y$. Do đó $f(f^{-1}(y)) = y$, với mọi $y \in B$ và $f^{-1}(f(x)) = x$ với mọi $x \in A$. Rõ ràng ánh xạ ngược f^{-1} của f cũng là song ánh. Thật vậy, $\forall y_1, y_2 \in B$ nếu $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ thì $f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$ hay $y_1 = y_2$ nên f^{-1} là đơn ánh. Hơn nữa, từ hệ thức $f^{-1}(f(x)) = x$ với mọi $x \in A$, ta suy ra $f^{-1}(f(A)) = A$. Do f là toàn ánh nên $f(A) = B$, từ đó $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B)$ hay $A = f^{-1}(B)$, vì vậy f^{-1} là toàn ánh. Như thế f^{-1} vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh nên f^{-1} là song ánh.

Hình 2.6.1 biểu diễn ánh xạ ngược f^{-1} từ tập hợp *B* đến tập hợp *A* của ánh xạ *f* từ tập hợp *A* đến tập hợp *B*.



Hình 2.6.1: Ánh xạ ngược f^{-1} của ánh xạ *f*

✓ **Ví dụ 2.6.1**

1. Xét song ánh từ $\{a, b, c\}$ đến $\{1, 2, 3\}$ sao cho $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, và $f(c) = 1$. Ánh xạ ngược f^{-1} từ $\{1, 2, 3\}$ đến $\{a, b, c\}$ là $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$ và $f^{-1}(3) = b$.
2. Xét ánh xạ $f(x) = x^3+1$ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$. Theo Ví dụ 2.5.3 *f* là một song ánh. Dễ dàng xác định được ánh xạ ngược của *f* là $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.

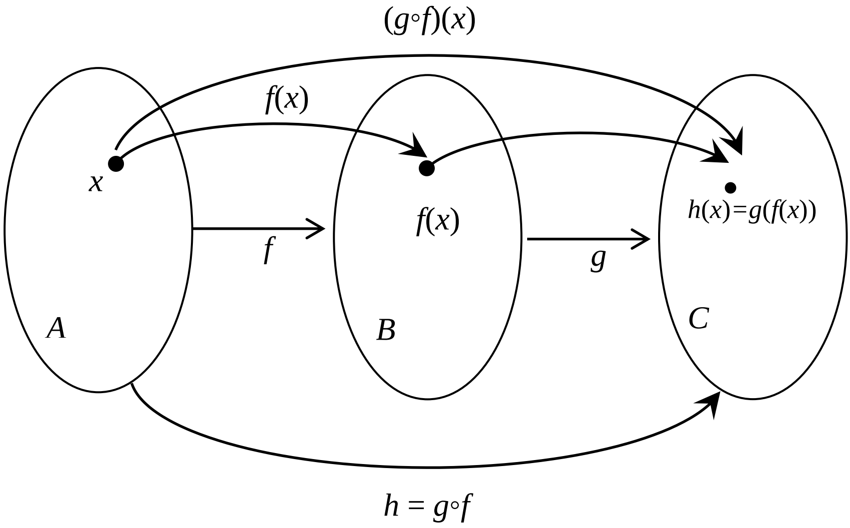
▪ **Định nghĩa 2.6.**2 Cho hai ánh xạ f: $A \to B$ và g: $B \to C$. Ánh xạ

$h: A \to C$

$x \mapsto h(x) = g(f(x))$

được gọi là ánh xạ hợp (tích) của f và g, ký hiệu là $g \circ f$.

Hình 2.6.2 biểu diễn ánh xạ hợp $g \circ f$ từ tập hợp A đến tập hợp C của hai ánh xạ f (từ A đến B) và g (từ B đến C).



Hình 2.6.2: Ánh xạ hợp $g \circ f$ của hai ánh xạ f và g

✓ Ví dụ 2.6.2

1. Giả sử f là ánh xạ từ tập hợp $\{a, b, c\}$vào chính nó với $f(a) = b$, $f(b) = c$ và $f(c) = a$ và g là ánh xạ từ $\{a, b, c\}$vào $\{1, 2, 3\}$ sao cho $g(a) = 3$, $g(b) = 2$ và $g(c) = 1$. Khi đó hàm hợp $g \circ f$ được xác định $(g \circ f)(a) =$

$g(f(a)) = g(b) = 2$, $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(c) = 1$ và $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(a) = 3$.

2. Giả sử $f(x) = 3x + 2$ và $g(x) = 2x + 3$ là hai ánh xạ từ tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ đến tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$. Thì $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$.

- **Định lý 2.6.1** Cho các ánh xạ $f: A \to B$, $g: B \to C$ và $h: C \to D$. Khi đó ta có

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Chứng minh: Rõ ràng các ánh xạ $h \circ (g \circ f)$ và $(h \circ g) \circ f$ cùng có miền xác định và miền giá trị.

Ta có $\forall x \in A$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h \circ [(g \circ f)(x)]$

$$= h \circ [g(f(x)]$$

$$= (h \circ g)(f(x))$$

$$= ((h \circ g) \circ f)(x)$$

Vậy $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

- **Định lý 2.6.2** Giả sử $f: A \to B$ là một song anh, gọi 1_A và 1_B tương ứng là các ánh xạ dồng nhất trên A và B thì ta có

1. $f \circ f^{-1} = 1_B$

2. $f^{-1} \circ f = 1_A$

Chứng minh: Rõ ràng $f \circ f^{-1}$ có miền xác định và giá trị là B. $\forall y \in B$, $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = 1_B(y)$. Nghĩa là $f \circ f^{-1} = 1_B$. Chứng minh tương tự cho $f^{-1} \circ f = 1_A$.

2.7 Độ tăng của hàm số

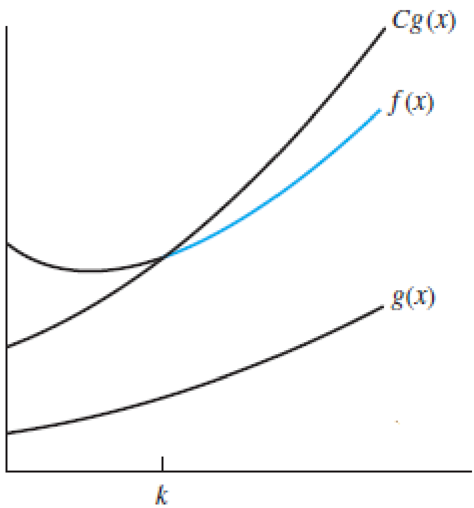
Các hàm số, như đã chỉ ra ở trên, là các ánh xạ đặc biệt, trong đó miền xác định và miền giá trị là các tập hợp số, có nhiều ứng dụng trong khoa học tính toán nói chung và khoa học máy tính nói riêng. Đặc biệt, các hàm số với miền xác định là các tập hợp con của tập hợp các số tự nhiên có nhiều ứng dụng trong việc biểu diễn độ phức tạp về thời gian của giải thuật. Một trong những khái niệm cơ bản làm cơ sở cho việc biểu diễn độ phức tạp về thời gian của các giải thuật là *độ tăng* (growth) của hàm số. Độ tăng của hàm số cho biết độ lớn của hàm số ứng với giá trị tương ứng của đối số. Độ tăng của một hàm số có thể được biểu diễn bởi một hàm số có độ lớn xấp xỉ với hàm số đó khi giá trị của đối số đủ lớn. Trong lý thuyết phân tích và thiết kế giải thuật, độ phức tạp về thời gian của một giải thuật được biểu diễn theo độ tăng của các hàm số phụ thuộc vào số thao tác được thực hiện trong giải thuật. Độ tăng của hàm số được định nghĩa dựa trên các ký hiệu O, Ω và Θ cho phép ước lượng độ lớn của hàm số theo các hàm số xấp xỉ khác nhau tùy thuộc vào các ứng dụng cụ thể.

- **Định nghĩa 2.7.1** Giả sử f và g là hai hàm số với đối số x là các số thực. Chúng ta nói rằng $f(x)$ là $O(g(x))$, và ký hiệu

$f(x) = O(g(x))$, nếu có hằng số dương C và số thực k sao cho $|f(x)| \le C|g(x)|$ với mọi $x \ge k$.

Khi $f(x)$ là $O(g(x))$ ta nói $f(x)$ có *độ tăng* không quá $g(x)$ hay nói $f(x)$ có *bậc* (order) không quá $g(x)$. Với $x \ge k$ đủ lớn thì $C|g(x)|$ không nhỏ hơn $|f(x)|$.

Hình 2.7.1 biểu diễn $f(x)$ là $O(g(x))$, quan hệ này thể hiện đồ thị của hàm số $|f(x)|$ luôn ở phía dưới hàm số $C|g(x)|$ khi giá trị của đối số x đủ lớn.



Hình 2.7.1: f(x) là O(g(x))

✓ **Ví dụ 2.7.1**

1. Hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 1$ có độ tăng không quá hàm số $g(x) = x^2$. Thật vậy, khi $x \ge 1$ thì $x \le x^2$ và $1 \le x^2$.

Suy ra, $0 \le x^2 + 2x + 1 \le x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$ với mọi $x \ge 1$. Vì vậy, nếu chọn $C = 4$ và $k = 1$, thì theo Định nghĩa 2.7.1 ta có $f(x) = x^2 + 2x + 1 = O(x^2)$.

2. Với n là số nguyên dương thì $1 + 2 + \ldots + n \le n + n + \ldots + n = n^2, \forall n \ge 1$. Từ đó ta suy ra $1 + 2 + \ldots + n = O(n^2)$. Ngoài ra, vì $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \le n \times n \times n \times \ldots \times n = n^n, \forall n \ge 1$ nên $n! = O(n^n)$. Ta cũng suy ra $\log_2 n! \le \log_2 n^n = n \log_2 n$, nên $\log_2 n! = O(n \log_2 n)$.

3. Xét hàm số $f(n) = n^2$ với đối số n nguyên không âm. Có thể thấy $f(n) \ne O(n)$. Thật vậy, giả sử $n^2 = O(n)$, thì có số dương $C > 0$ và số thực k sao cho $n^2 \le Cn$, $\forall n \ge k$. Từ đó $n \le C$, $\forall n \ge k$, điều này là vô lý, vì không phải mọi số nguyên không âm $n \ge k$ đều nhỏ hơn hoặc bằng hằng số C. Vậy, $f(n) = n^2 \ne O(n)$.

- **Định lý 2.7.1** Giả sử $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$, thì $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(max(|g_1(x)|,|g_2(x)|))$.

Chứng minh: Từ định nghĩa 2.7.1 ta có các hằng số C_1, C_2 dương và k_1, k_2 sao cho $|f_1(x)| \le C_1|g_1(x)|$ khi $x \ge k_1$ và $|f_2(x)| \le C_2|g_2(x)|$ khi $x \ge k_2$. Đặt $C = C_1 + C_2$ và $g(x) = max(|g_1(x)|, |g_2(x)|)$ *và* $k = max(k_1, k_2)$. Thì với mọi $x \ge k$ ta có

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(x)| &= |f_1(x) + f_2(x)| \\ &\le |f_1(x)| + |f_2(x)| \end{aligned}$$

$$\le C_1|g_1(x)| + C_2|g_2(x)|$$
$$\le C_1|g(x)| + C_2|g(x)|$$
$$= (C_1 + C_2)|g(x)|$$
$$= C|g(x)|,$$

Vì vậy $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(max(|g_1(x)|,|g_2(x)|))$.

▪ **Định lý 2.7.2** Giả sử $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$ thì $(f_1f_2)(x)$ là $O(g_1(x)g_2(x))$.

Chứng minh: Từ định nghĩa 2.7.1 ta có các hằng số C_1, C_2 dương và k_1, k_2 sao cho $|f_1(x)| \le C_1|g_1(x)|$ khi $x \ge k_1$ và $|f_2(x)| \le C_2|g_2(x)|$ khi $x \ge k_2$. Đặt $C = C_1C_2$ và $k = max(k_1, k_2)$. Thì với mọi $x \ge k$ ta có

$$|(f_1f_2)(x)| = |f_1(x)f_2(x)|$$
$$= |f_1(x)||f_2(x)|$$
$$\le C_1|g_1(x)|C_2|g_2(x)|$$
$$= C_1C_2|g_1(x)g_2(x)|$$
$$= C|g_1(x)g_2(x)|$$

Vì vậy $(f_1f_2)(x)$ là $O(g_1(x)g_2(x))$.

✓ **Ví dụ 2.7.2**

1. Xét hàm $f(n) = 3n\log_2(n!) + (n^2 + 3) \log_2 n$, với đối số n nguyên dương. Dễ thấy $3n = O(n)$ và $(n^2 +3) =$

$O(n^2)$, từ ví dụ 2.7.1 ta có $\log_2(n!) = O(n\log_2 n)$. Từ đó theo định lý 2.7.2 ta có $3n\log_2(n!) = O(n^2\log_2 n)$ và $(n^2 + 3)\log_2 n = O(n^2\log_2 n)$. Vì vậy theo định lý 2.7.1 ta được $f(n) = 3n\log_2(n!) + (n^2 + 3)\log_2 n = O(max(n^2\log_2 n, n^2\log_2 n) = O(n^2\log_2 n)$.

2. Xét hàm số $f(x) = (x + 1)\log_2(x^2 + 1) + 3x^2$ với x là các số dương. Rõ ràng $(x + 1) = O(x)$ và $3x^2 = O(x^2)$. Ta có $\log_2(x^2 + 1) \leq \log_2(2x^2) = \log_2 2 + \log_2 x^2 = 1 + 2\log_2 x \leq 3\log_2 x$, với mọi $x \geq 2$ nên $\log_2(x^2 + 1) = O(\log_2 x)$. Theo định lý 2.7.2 ta có $(x+1)\log_2(x^2 + 1) = O(x\log_2 x)$. Theo định lý 2.7.1 và do $x\log_2 x \leq x^2$, với mọi $x \geq 2$ nên ta có $f(x) = (x + 1)\log_2(x^2 + 1) + 3x^2 = O(max(x\log_2 x, x^2) = O(x^2)$.

- **Định nghĩa 2.7.2** Giả sử f và g là hai hàm số. Chúng ta nói rằng $f(x)$ là $\Omega(g(x))$, và ký hiệu $f(x) = \Omega(g(x))$, nếu có hằng số dương C và số thực k sao cho $|f(x)| \geq C|g(x)|$ với mọi $x \geq k$.

Khi $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ ta nói $f(x)$ có *độ tăng* ít nhất là $g(x)$ hay nói $f(x)$ có *bậc* ít nhất là $g(x)$.

✓ **Ví dụ 2.7.2**

1. Hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 1 \geq x^2$ có độ tăng ít nhất là x^2. Thật vậy, $x^2 + 2x + 1 \geq x^2$ với mọi $x \geq 1$, nên nếu chọn $C = 1$ và $k = 1$, thì theo Định nghĩa 2.7.2 ta có $f(x) = x^2 + 2x + 1 = \Omega(x^2)$.

2. Xét hàm số $f(n) = n^2$ với đối số n nguyên không âm. Dễ thấy rằng $f(n) = \Omega(n)$. Thật vậy $n^2 \geq n$ với mọi $n \geq 1$. Vì vậy từ Định nghĩa 2.7.2 ta có $f(n) = \Omega(n)$.

▪ **Định nghĩa 2.7.3** Giả sử f và g là hai hàm số. Chúng ta nói rằng $f(x)$ là $\Theta(g(x))$, và ký hiệu $f(x) = \Theta(g(x))$, nếu $f(x) = O(g(x))$ và $f(x) = \Omega(g(x))$.

Khi $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ ta nói $f(x)$ có *độ tăng* là $g(x)$ hay nói $f(x)$ có *bậc* là $g(x)$.

✓ **Ví dụ 2.7.3**

1. Từ các ví dụ 2.7.1. và 2.7.2 chúng ta suy ra $f(x) = x^2 + 2x + 1 = \Theta(x^2)$.

2. Xét hàm số $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2}$ với đối số nguyên không âm, dễ thấy rằng $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2} \leq \sqrt{n^2 + n^2 + 2n^2} = \sqrt{4n^2} = 2n$, $\forall n \geq 1$ nên $f(n) = O(n)$. Mặt khác ta cũng có $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2} \geq \sqrt{n^2} = n$, nên $f(n) = \Omega(n)$. Vì vậy $f(n) = \sqrt{n^2 + n + 2} = \Theta(n)$.

BÀI TẬP

1. Xét các tập hợp con tùy ý A, B, C, D của tập vũ trụ $\mathcal{U}$. Hãy chứng minh các khẳng định sau:

a. Nếu $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \cap C \subset B \cap D$ và $A \cup C \subset B \cup D$.

b. Nếu $A \subset C$ và $B \subset C$ thì $A \cap B \subset C$ và $A \cup B \subset C$.

c. $A \subset B$ khi và chỉ khi $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

2. Chứng minh rằng ta có A-(A-B) = B khi và chỉ khi $B \subset A$.

3. Biểu diễn hình học của tập hợp $A \times B$ trong các trường hợp:

a. $A = \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \mathbb{R}$

b. $A = B = \mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên

4. Chứng minh rằng:

a. $A \cup B = A$ khi và chỉ khi $B \subset A$.

b. $A \cap B = A$ khi và chỉ khi $A \subset B$.

c. $A \cup \varnothing = A$.

d. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5. Xét tập hợp $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ mà các phần tử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là những tập hợp. Chứng minh rằng có ít nhất một tập hợp A_i không chứa một tập hợp nào trong các tập hợp còn lại.

6. Với mỗi ánh xạ f: $A \to B$ sau đây, cho biết nó có là đơn ánh, toàn ánh, song ánh hay không?. Tìm ảnh của miền xác định ứng với mỗi ánh xạ. Trong trường hợp nó là song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược.

a. $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$

b. $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+2x-3$

c. $A = B$, $B = (0, +\infty)$, $f(x) = e^{x+1}$

7. Tập hợp $G = \{(x, x)\}|\ x < 0\} \cup \{(x, 0)|\ x \geq 0\}$ có phải là đồ thị của một ánh xạ từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ không?. Biểu diễn hình học tập hợp đó.

8. Giả sử f: $X \to Y$ là một ánh xạ, A là một tập hợp con của X và B là một tập hợp con của Y. Chứng minh:

a. $f(X-A) \supset f(X) - f(A)$.

b. $f^{-1}(Y-B) = X- f^{-1}(B)$.

9. Giả sử n là một số tự nhiên cho trước, f là một ánh xạ từ tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ đến chính nó được xác định bởi

$$f(k) = \begin{cases} n - k, \ \forall k < n \\ n + k, \ \forall k \geq n \end{cases}$$

f có phải là đơn ánh, toàn ánh, song ánh không?

10. Xét hai ánh xạ f: $A \to B$ và g: $B \to C$

a. Chứng minh rằng nếu $g \circ f$ đơn ánh thì f đơn ánh.

b. Chứng minh rằng nếu $g \circ f$ toàn ánh thì g toàn ánh

c. Chứng minh rằng nếu f và g song ánh thì $g \circ f$ là song ánh. Xác định ánh xạ ngược $(g \circ f)^{-1}$ của ánh xạ $g \circ f$.

11. Chứng minh rằng nếu có một song ánh từ X đến Y và có một song ánh từ X đến Z thì có một song ánh từ Y đến Z.

12. Kiểm tra xem các hàm số sau đây có là $O(x)$ hay không: $f(x) = 10$, $f(x) = 3x + 7$, $f(x) = x^2 + x + 1$, $f(x) = 5 \log_2 x$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ và $f(x) = \lceil x/2 \rceil$.

13. Kiểm tra xem các hàm số sau đây có là $O(x^2)$ hay không: $f(x) = 17x + 11$, $f(x) = x^2 + 1000$, $f(x) = x \log_2 x$, $f(x) = x^4/2$, $f(x) = 2^x$, $f(x) = \lfloor x \rfloor . \lceil x \rceil$.

14. Chứng minh rằng đa thức bậc k, $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_0$ là $\Theta(x^k)$.

15. Tìm số n nhỏ nhất để $f(x) = O(x^n)$ với mỗi hàm số $f(x)$ sau:

a. $f(x) = 2x^2 + x^3 \log_3 x$

b. $f(x) = 3x^5 + (\log_2 x)^4$

c. $f(x) = (x^4 + x^2 + 1)/(x^4 + 1)$

d. $f(x) = (x^3 + 5 \log_2 x)/(x^4 + 1)$

16. Chỉ ra rằng $f(x)$ là $O(x)$, thì $f(x)$ là $O(x^2)$.

17. Chỉ ra rằng x^3 is $O(x^4)$ nhưng x^4 không là $O(x^3)$.

18. Chỉ ra rằng 2^n là $O(3^n)$ nhưng 3^n không là $O(2^n)$.

19. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(h(x))$ thì $f(x)$ là $O(h(x))$.

20. Giả sử k là một số nguyên dương, chứng minh rằng $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ là $O(n^{k+1})$.

21. Với mỗi hàm $f(n)$ sau đây hãy xác định hàm $g(n)$ có bậc nhỏ nhất sao cho $f(n)$ là $O(g(n))$:

a. $n \log_2(n^2 + 1) + n^2 \log_2 n$

b. $(n \log_2 n + 1)^2 + (\log_2 n + 1)(n^2 + 1)$.

22. Giả sử f và g là các hàm số với đối số n nguyên đương. Chứng minh rằng:

a. Nếu $f(n) = O(g(n))$, thì $g(n) = \Omega(f(n))$.

b. $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, trong đó $\alpha > 0$.

23. Chứng minh rằng $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ khi và chỉ khi $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(f(x))$.

24. Chứng minh rằng nếu $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là các hàm số sao cho $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ và $g(x)$ là $\Theta(h(x))$ thì $f(x)$ là $\Theta(h(x))$.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Phương pháp đếm là cơ sở để giải quyết nhiều bài toán trong khoa học cũng như trong ứng dụng. Chẳng hạn, trong xác suất thống kê, để tính được xác suất cần phải đếm được các đối tượng cả trong không gian mẫu và không gian các đối tượng có khả năng xuất hiện trong các sự kiện liên quan. Trong khoa học máy tính, để phân tích được độ phức tạp các giải thuật, chúng ta cần phải đếm tất cả các lệnh mà giải thuật thực thi. Nền tảng của các phương pháp đếm là lý thuyết tập hợp và ánh xạ, lý thuyết tổ hợp, chỉnh hợp và hệ thức truy hồi (trong Chương 4).

Phần 3.1 giới thiệu các nguyên lý đếm cơ bản là cơ sở để giải các bài toán đếm thường gặp trong lý thuyết và ứng dụng. Phần 3.2 trình bày về tổ hợp và chỉnh hợp như những công cụ toán học hỗ trợ cho việc giải các bài toán đếm trong đó các đối tượng cần được đếm xuất hiện với những cấu trúc xác định. Phần 3.3 giới thiệu tổ hợp lặp và chỉnh hợp lặp như là một mở rộng của tổ hợp và chỉnh hợp cho phép giải các bài toán đếm phức tạp hơn. Phần 3.4 trình bày về nguyên lý

Chuồng chim Bồ câu, một nguyên lý được ứng dụng trong rất nhiều bài toán, chẳng hạn như bài toán xây dựng các bảng mã hóa ký tự, bài toán thiết kế không gian bộ nhớ máy tính, bài toán xác định số chữ số có thể được thuê bao của một hệ thống điện thoại, v.v.

3.1 Các nguyên lý đếm cơ bản

Nền tảng cho lý thuyết và phương pháp đếm nói chung và các nguyên lý đếm cơ bản nói riêng là các khái niệm về quan hệ giữa số phần tử của hai tập hợp hữu hạn được phát biểu trong các định nghĩa dưới đây.

- **Định nghĩa 3.1.1** Hai tập hợp hữu hạn A và B được gọi là có số phần tử bằng nhau, ký hiệu $|A|=|B|$, nếu có một song ánh f: $A \to B$.

✓ **Ví dụ 3.1.1** Giả sử $E = \{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ và $B = \{(b_1, b_2,\ldots, b_n) \mid b_i \in \{0, 1\}\}$, gọi $\wp(E)$ là tập hợp tất cả các tập hợp con của E, thì ta có $|\wp(E)|=|B|$. Thật vậy, chúng ta sẽ chỉ ra rằng ánh xạ f: $\wp(E) \to B$, xác định $\forall A \in \wp(E)$, $f(A) = (b_1, b_2,\ldots, b_n) \in B$ sao cho nếu $a_i \in A$ thì $b_i =1$, ngược lại thì $b_i = 0$ là một song ánh. Giả sử $C, D \in \wp(E)$, $f(C) = (c_1, c_2,\ldots, c_n)$ và $f(D) = (d_1, d_2,\ldots, d_n)$ nếu $C \neq D$, khi đó tồn tại $a_i \in C$ sao cho $a_i \notin D$ vì vậy $c_i \neq d_i$ nên $f(C) \neq f(D)$, do đó f là đơn ánh. Giả sử $(b_1, b_2,\ldots, b_n) \in B$, xác định tập hợp $A = \{a_i \in E \mid b_i \neq 0\}$, thì $f(A) = (b_1, b_2,\ldots, b_n) \in B$, do đó f là toàn ánh. Như vậy

f là song ánh nên theo Định nghĩa 3.1.1 ta có $|\wp(E)| = |B|$.

▪ **Định nghĩa 3.1.2** Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn, ta nói số phần tử của A nhỏ hơn hoặc bằng số phần tử của B, ký hiệu $|A| \leq |B|$, nếu có một đơn ánh ánh f: $A \to B$.

Từ Định nghĩa 3.1.2, chúng ta có kết quả hiển nhiên được phát biểu như trong Mệnh đề 3.1.1.

Mệnh đề 3.1.1 Hai tập hợp hữu hạn A và B có số phần tử bằng nhau nếu có một đơn ánh từ A đến B và một đơn ánh từ B đến A.

Mối quan hệ giữa số phần tử của hai tập hợp và số phần tử của hợp, giao cũng như tích Descartes của hai tập hợp đó, là cơ sở để giải nhiều bài toán đếm và cũng là cơ sở của các nguyên lý đếm cơ bản, được phát biểu như trong Định lý 3.1.1.

▪ **Định lý 3.1.1** Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn. Khi đó ta có:

1. $|A \cup B| = |A| + |B|$ nếu $A \cap B = \varnothing$
2. $|A \times B| = |A| \times |B|$

Chứng minh: Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, đặt $m = |A|$, $k = |B|$. Ta chứng minh lần lượt các phần 1 và 2 của định lý như sau:

Theo Định nghĩa 3.1.1, tồn tại các song ánh f: $J_m \to A$, g: $J_k \to B$. Đặt h: $J_{m+k} \to A \cup B$ xác định bởi

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & 1 \leq x \leq m \\ g(x-m) & m+1 \leq x \leq m+k \end{cases}$$

thì, do $A \cap B = \varnothing$, nên h là một song ánh, vì vậy $|A \cup B| = |J_{m+k}| = m + k = |A| + |B|$.

Như vậy, phần 1 của định lý đã được chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh phần 2 của định lý bằng qui nạp theo $m = |A|$.

Khi $m = 1$, A chỉ có một phần tử, giả sử $A = \{a\}$, thì ánh xạ p: $B \to A \times B$ sao cho $p(x) = (a, x)$ là một song ánh nên $|A \times B| = |B| = |\{a\}| \times |B| = |A| \times |B|$.

Giả sử $|A \times B| = |A| \times |B|$ khi $|A| = m$, bây giờ nếu $|A| = m+1$, lấy một phần tử $a \in A$ và đặt $C = A - \{a\}$ thì $A \times B = (C \times B) \cup (\{a\} \times B)$ và $(C \times B) \cap (\{a\} \times B) = \varnothing$. Áp dụng phần 1 và giả thiết qui nạp ta có

$$\begin{aligned} |A \times B| &= |C \times B| + |(\{a\} \times B)| \\ &= m \times |B| + |B| \\ &= (m+1) \times |B| \\ &= |A| \times |B|. \end{aligned}$$

Vì vậy, $|A \times B| = |A| \times |B|$ với mọi A mà $|A| = m > 1$.

Hệ quả 3.1.1 Giả sử A là một tập hợp hữu hạn, B là một tập hợp con của A và $\overline{B}$ là phần bù của B trong A thì $|A| = |B| + |\overline{B}|$.

Chứng minh: Bởi vì $\overline{B}$ là phần bù của tập hợp B trong A nên $A = B \cup \overline{B}$ và $B \cap \overline{B} = \varnothing$. Áp dụng phần 1 của Định lý 3.1.1 ta có $|A| = |B| + |\overline{B}|$.

✓ **Ví dụ 3.1.2** Một đoàn vận động viên tham gia thi hai môn bắn súng và bơi. Đoàn có 10 vận động viên nam. Số vận động viên thi bắn súng là 14 người. Số vận động viên nữ thi bơi bằng số vận động viên nam thi bắn súng. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu người.

Giải: Vì số vận động viên nam đã biết nên để tìm số vận động viên toàn đoàn chỉ cần tìm số vận động viên nữ (Hệ quả 3.1.1). Gọi A là tập hợp các vận động viên nữ, A_1 và A_2 lần lượt là tập hợp các vận động viên nữ thi bắn súng và thi bơi thì $|A| = |A_1| + |A_2|$. Gọi B là tập hợp các nam vận động viên thi bắn súng, theo giả thiết ta có $|A_2| = |B|$. Từ đây suy ra $|A| = |A_1| + |B|$. Nghĩa là, số vận động viên nữ bằng tổng số vận động viên nữ bắn súng và vận động viên nam bắn súng. Theo giả thiết tổng số này là 14. Vậy số nữ vận động viên là 14, do đó toàn đoàn có 10 + 14 = 24 vận động viên.

Chúng ta có thể mở rộng kết quả phần 1 và 2 của Định lý 3.1.1 cho nhiều tập hợp hữu hạn như sau.

- **Định lý 3.1.2** Giả sử n là một số ngyên dương, A_1, A_2, …, A_n là các tập hợp hữu hạn. Khi đó ta có:

  1. $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$ nếu $\forall i, j = 1, \ldots, n, i \neq j, A_i \cap B_j = \varnothing$

  2. $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$

Chứng minh: Áp dụng Định lý 3.1.1, cả hai phần 1 và 2 của Định lý 3.1.2 sẽ lần lượt được chứng minh bằng qui nạp. Lưu ý là khi $n = 1$ Định lý 3.1.2 hiển nhiên đúng.

Khi $n = 2$ hệ thức ở phần 1 là đúng theo Định lý 3.1.1. Giả sử hệ thức ở phần 1 đúng khi $n = k$. Nghĩa là $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$ nếu $A_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$.

Khi $n = k + 1$, với $A_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\forall i, j = 1, \ldots, k+1$, sử dụng giả thiết qui nạp và Định lý 3.1.1 một lần nữa ta có

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}| \\
&= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)| + |A_{k+1}| \\
&= (|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|) + |A_{k+1}| \\
&= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| + |A_{k+1}|.
\end{aligned}$$

Vậy, hệ thức ở phần 1 cũng đúng khi $n = k+1$. Từ đó hệ thức ở phần 1 đúng với mọi n nguyên dương.

Tương tự khi $n = 2$ hệ thức ở phần 2 đúng theo theo Định lý 3.1.1. Giả sử hệ thức ở phần 2 đúng khi $n = k$. Nghĩa là $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_k|$.

Khi $n = k + 1$, sử dụng giả thiết qui nạp và Định lý 3.1.1 ta có

$$
\begin{aligned}
|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}| &= |(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) \times A_{k+1}| \\
&= (|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k|) \times |A_{k+1}| \\
&= (|A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_k|) \times |A_{k+1}| \\
&= |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_k| \times |A_{k+1}|.
\end{aligned}
$$

Vậy, hệ thức ở phần 2 cũng đúng khi $n = k+1$. Từ đó hệ thức ở phần 2 đúng với mọi n nguyên dương.

✓ **Ví dụ 3.1.3** Với m, n là các số nguyên dương, tìm số ánh xạ từ tập hợp A có m phần tử đến tập B hợp có n phần tử.

Giải: Giả sử $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ và $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Đặt $F = \{f\colon A \to B\} = \{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)) \mid f(a_i) \in B, \forall i=1,\ldots, m\}$. Rõ ràng $\{(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)) \mid f(a_i) \in B, \forall i=1,\ldots, m\} = B \times B \times ... \times B$ (m lần). Do đó, $|F| = |B \times B \times ... \times B| = |B|^m = n^m$. Vậy, số ánh xạ từ tập hợp A có m phần tử đến tập hợp B có n phần tử là n^m.

Bây giờ, các nguyên lý đếm cơ bản bao gồm nguyên lý cộng và nguyên lý nhân được phát biểu dựa trên Định lý 3.1.2 như dưới đây.

Nguyên lý cộng: Nếu một công việc có thể được thực hiện theo k giai đoạn rời nhau sao cho giai đoạn thứ i, với i =1,.., k, có n_i cách thực hiện độc lập với các giai đoạn còn lại thì số cách để thực hiện công việc là $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

✓ **Ví dụ 3.1.4** Để chuẩn bị cho sinh viên làm khóa luận tốt nghiệp cuối khóa học, ban chủ nhiệm khoa Công nghệ Thông tin đã công bố danh sách đề tài bao gồm 20 đề tài về chuyên ngành "Kỹ thuật Phần mềm", 15 đề tài về chuyên ngành "Mạng Máy tính", 10 đề tài về chuyên ngành "Hệ thống Thông tin" và 10 đề tài về chuyên ngành "Khoa học Máy tính". Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài.

Giải: Sinh viên có 20 cách lựa chọn đề tài theo hướng "Kỹ thuật Phần mềm", 15 cách theo hướng "Mạng Máy tính", 10 cách theo hướng "Hệ thống Thông tin" và 10 cách theo hướng "Khoa học Máy tính" một cách độc lập. Theo nguyên lý cộng số khả năng lựa chọn đề tài tốt nghiệp là 20 + 15 + 10 + 10 = 75.

Nguyên lý nhân: Nếu một công việc có thể được thực hiện theo k giai đoạn liên tiếp nhau sao cho với mỗi i =1,.., k-1, giai đoạn thứ i có n_i cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện trong giai đoạn thứ i có n_{i+1} cách thực hiện trong giai đoạn thứ i+1 thì số cách để thực hiện công việc là $n_1.n_2\ldots n_k$.

✓ **Ví dụ 3.1.5** Giả sử n là một số nguyên dương, hãy đếm số lệnh gán $C[i][j] = C[i][j] + A[i][k]*B[k][j]$ trong giải thuật tính tích của hai ma trận vuông cấp n dưới đây.

```
MATRICES MatrixMulti (MATRICES A, MATRICES B, unsigned n)
{
        MATRICES C;
        unsigned i, j, k;
        for (i = 1; i <=n; i++)
            for (j = 1; j<=n; j++)
            {
                C[i][j] = 0;
                for (k = 1; k <=n; k++)
                    C[i][j] =C[i][j] + A[i][k]*B[k][j];
            }
        return C;
}
```

Giải: Mỗi một lệnh gán $C[i][j] = C[i][j] + A[i][k]*B[k][j]$ tương ứng với một công việc được thực hiện theo 3 giai đoạn liên tiếp. Giai đoạn 1 gán giá trị i trong vòng lặp thứ nhất, giai đoạn 2 gán giá trị j trong vòng lặp thứ 2 và giai đoạn 3 gán giá trị k trong vòng lặp thứ 3. Hơn nữa, mỗi giai đoạn thực hiện n lần gán giá trị và với mỗi lần gán giá trị trong giai đoạn trước có n lần gán giá trị trong giai đoạn sau. Vì vậy, theo nguyên lý nhân số cách thực hiện công việc là $n.n.n = n^3$ và do đó số cách thực hiện lệnh gán $C[i][j] = C[i][j] + A[i][k]*B[k][j]$ là n^3. Nói đơn giản hơn, số lệnh gán $C[i][j]$

$= C[i][j] + A[i][k]*B[k][j]$ là n^3.

✓ **Ví dụ 3.1.6** Với n là số nguyên dương, mỗi xâu nhị n bit có dạng $(b_1\ b_2\ldots b_n)$. Giá trị của xâu nhị phân là một chuỗi n số nhị phân 0, 1. Mỗi bit của xâu nhị phân có thể nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1, ứng với một khả năng nhận giá trị của bit thứ i có hai khả năng nhận giá trị nhận giá trị 0 hoặc 1 của bit thứ i+1. Theo nguyên lý nhân ta suy ra số giá trị khác nhau mà mỗi xâu nhị phân $(b_1\ b_2\ldots b_n)$ có thể nhận là 2.2…..2 (n lần). Nghĩa là, có 2^n xâu nhị phân n bit. Ngoài ra, như đã thấy trong Ví dụ 3.1.1, tồn tại một song ánh từ tập hợp các tập hợp con của tập hợp E có n phần tử đến tập hợp các xâu nhị phân n bit nên số tập hợp con của tập hợp E có n phần tử là 2^n.

Nguyên lý cộng chỉ áp dụng cho các bài toán đếm mà các tập hợp của các đối tượng cần đếm là không giao nhau. Khi các tập hợp này giao nhau khác rỗng, chúng ta áp dụng *nguyên lý bù trừ* (principle of inclusion–exclusion) được phát biểu như trong định lý dưới đây.

▪ **Định lý 3.1.3** Giả sử A và B là hai tập hợp hữu hạn, nếu $A \cap B \neq \varnothing$ thì $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

Chứng minh: Theo tính chất của các phép toán tập hợp ta có $A\cup B = [A - (A\cap B)]\cup B$ và $[A - (A\cap B)] \cap B = \varnothing$. Áp dụng kết quả phần 1 của Định lý 3.1.1 ta được

$$|A\cup B| = |A - (A\cap B)| + |B| \qquad (*)$$

Mặt khác, cũng theo tính chất của các phép toán tập hợp ta có $A = [A- (A\cap B)] \cup (A\cap B)$ và $([A- (A\cap B)]) \cap (A\cap B) = \varnothing$. Một lần nữa, áp dụng kết quả phần 1 của Định lý 3.1.1 ta được

$$|A| = |A- (A\cap B)| + |A\cap B| \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

✓ **Ví dụ 3.1.7** Có bao nhiêu xâu nhị phân 10 bit luôn luôn bắt đầu bởi hai bit 1 hoặc kết thúc bởi hai bit 0?

Giải: Đặt $B = \{(b_1b_2\ldots b_{10}) | b_i \in \{0, 1\}\}$, $B_1 = \{(11b_3\ldots b_{10}) | b_i \in \{0, 1\}\}$ và $B_2 = \{(b_1b_2\ldots b_8 00) | b_i \in \{0, 1\}\}$ thì $B = B_1\cup B_2$, $B_1\cap B_2 = \{(11b_3\ldots b_8 00) | b_i \in \{0, 1\}\}$ và số xâu nhị phân cần đếm là $|B|$. Từ kết quả của Ví dụ 3.1.6 và theo nguyên lý bù trừ ta có $|B| = |B_1\cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1\cap B_2| = 2^8 + 2^8 - 2^6 = 448$.

Chúng ta có thể mở rộng nguyên lý bù trừ để đếm số phần tử của một tập hợp là hợp của nhiều hơn hai tập hợp. Nguyên lý bù trừ mở rộng được phát biểu như trong Định lý 3.1.4. Việc chứng minh định lý này có thể được thực hiện bằng qui nạp (tương tự Định lý 3.1.2) và được xem như một bài tập dành cho người đọc.

▪ **Định lý 3.1.4** Giả sử n là một số ngyên dương, A_1, A_2, …, A_n là các tập hợp hữu hạn, thì

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

✓ **Ví dụ 3.1.8** Trong 10000 số tự nhiên khác 0 đầu tiên, có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số 3, 4, 7?.

Giải: Gọi A, B và C tương ứng là tập các số tự nhiên khác 0 nhỏ hơn hoặc bằng 10000 chia hết cho 3, 4 và 7. Theo nguyên lý bù trừ ta có $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$, trong đó

$$|A| + |B| + |C| = \lfloor 10000/3 \rfloor + \lfloor 10000/4 \rfloor + \lfloor 10000/7 \rfloor$$

$$= 3333 + 2500 + 1428 = 7261$$

$$|A \cap B| = \lfloor 10000/12 \rfloor = 833$$

$$|A \cap C| = \lfloor 10000/21 \rfloor = 476$$

$$|B \cap C| = \lfloor 10000/28 \rfloor = 357$$

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 10000/84 \rfloor = 119$$

nên $|A \cup B \cup C| = 7261 - (833 + 476 + 357) + 119 = 5716$. Vì $A \cup B \cup C$ tập các số khác 0 nhỏ hơn hoặc bằng 10000 chia hết cho 3 hoặc cho 4 hoặc hoặc 7 nên theo Hệ quả 3.1.1 ta suy ra số các số tự nhiên khác 0 nhỏ hơn hoặc bằng 10000 không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số 3, 4 và 7 là 10000 - 5716 = 4284.

3.2 Chỉnh hợp và tổ hợp

Một số bài toán đếm có thể được giải quyết bằng cách đếm các cấu trúc của các phần tử của một tập hợp được tổ chức theo một qui tắc nhất định. Các cấu trúc như thế có thể là những *chỉnh hợp* (arrange), nếu được tổ chức như một danh sách có thứ tự của các phần tử của tập hợp đó, hoặc những *tổ hợp* (combination) nếu được tổ chức như một tập hợp con của tập hợp đó.

▪ **Định nghĩa 3.2.1** Giả sử k và n là các số nguyên dương, $k \leq n$. Một *chỉnh hợp chập k* (k-permutation) của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần không được lặp lại.

✓ **Ví dụ 3.2.1** Một số chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử a_1, a_2, a_3, a_4 có thể là (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_4), (a_1, a_4, a_3), (a_4, a_2, a_3),…

Số chỉnh hợp chập k của một tập n phần tử, ký hiệu A_n^k, được xác định bởi định lý sau đây.

▪ **Định lý 3.2.1** Giả sử k và n là các số nguyên dương, $k \leq n$. Số chỉnh hợp chập k của n là $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

Chứng minh: Đặt $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Khi đó một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập hợp S có dạng $(r_1, r_2,..., r_k)$ với $r_i \in S$, $r_i \neq r_j$, $\forall i, j = 1...k$ và $i \neq j$. Vì vậy, r_1 có thể là một trong n phần tử của S. Ứng với r_1 được xác định, r_2 có thể là một trong n-1 phần tử còn lại của S,..., cuối cùng ứng với r_{k-1} được xác định, r_k có thể là một trong n-(k-1) phần tử còn lại của S. Theo nguyên lý nhân, ta suy ra số chỉnh hợp $(r_1, r_2,..., r_k)$ chập k của n là $n(n-1)...(n-k+1)$.

Với lưu ý rằng $n! = 1.2...n$ và $0! = 1$, chúng ta có thể viết số chỉnh hợp chập k của n dưới dạng

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

✓ **Ví dụ 3.2.2** Có 8 vận động viên chạy thi. Người thắng cuộc được trao huy chương vàng, người về đích thứ hai được trao huy chương bạc, người về thứ ba sẽ được nhận huy chương đồng. Hỏi có bao nhiêu cách trao bộ huy chương này, nếu tất cả các kết cục cuộc thi đều có thể xảy ra.

Giải: Một kết cục để trao bộ huy chương là một bộ ba $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ trong đó λ_1 là người nhận huy chương vàng, λ_2 là người nhận huy chương bạc và λ_3 là người nhận huy chương đồng. Rõ ràng $\lambda_i \neq \lambda_j$ hơn nữa thứ tự người nhận huy chương là quan trọng. Vì vậy, một kết cục là một chỉnh hợp chập 3 của 8. Số các chỉnh hợp này là số cách trao bộ huy chương. Nghĩa là có 8.7.6 = 336 cách trao bộ huy chương.

Trong một số bài toán chúng ta có thể phải đếm các cấu trúc là những danh sách gồm tất cả các phần tử của một tập hợp nào đó. Các danh sách như vậy được gọi là những hoán vị.

- **Định nghĩa 3.2.2** Giả sử *n* là các số nguyên dương, một hoán vị của *n* phần tử là một bộ có thứ tự của *n* phần tử đó.

- **Định lý 3.2.2** Số các hoán vị của *n* phần tử là *n*!.

Chứng minh: Ký hiệu số các hoán vị của *n* phần tử là P_n. Từ Định nghĩa 3.2.2, ta suy ra mỗi hoán vị của n phần tử là một chỉnh hợp chập *n* của *n* phần tử. Vì vậy theo Định lý 3.2.1 ta có $P_n = n(n-1)...(n-n+1) = n!$.

✓ **Ví dụ 3.2.3** Một thương nhân đi bán hàng tại tám thành phố. Chị ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một thành phố nào đó và có thể đến 7 thành phố còn kia theo bất kỳ lộ trình nào mà chị muốn sau đó trở về thành phố xuất phát. Hỏi chị này có thể đi qua tất cả các thành phố theo bao nhiêu lộ trình khác nhau.

Giải: Vì một thành phố bất kỳ phải thuộc mọi lộ trình nên có thể cố định một thành phố nào đó làm thành phố xuất phát. Khi đó, một lộ trình tương ứng với một bộ có thứ tự (t_1, t_2, ..., t_7) của 7 thành phố còn lại. Nghĩa là, mỗi lộ trình là một hoán vị của 7 phần tử. Vì vậy, số các lộ trình là $P_7 = 7! = 5040$.

Nhiều ứng dụng đòi hỏi chúng ta quan tâm đến các tập hợp con có số phần tử cố định của một tập hợp đã cho. Các tập hợp con như vậy gọi là những tổ hợp.

- **Định nghĩa 3.2.3** Giả sử k và n là các số nguyên không âm, $k \leq n$. Một *tổ hợp chập k* (k-combination) của n phần tử là một bộ phận không có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần không được lặp lại.

Như vậy, có thể coi một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập hợp con k phần tử của tập hợp n phần tử này. Một số tổ hợp chập 2 của tập 3 phần tử a_1, a_2, a_3 có thể là $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$,…

Số tổ hợp chập k của một tập n phần tử, ký hiệu C_n^k, được xác định bởi định lý sau đây.

- **Định lý 3.2.3** Giả sử k và n là các số nguyên không âm, $k \leq n$. Số tổ hợp chập k của n là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chứng minh: Mỗi tổ hợp $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$ chập k của n phần tử $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tương ứng với k! chỉnh hợp chập k của n phần tử này. Số tổ hợp chập k của n là C_n^k. Theo nguyên lý nhân ta suy ra $A_n^k = C_n^k .k!$. Vì vậy ta có $C_n^k = A_n^k /k!$, hay $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Từ Định nghĩa và Định lý 3.2.3 về số tổ hợp, chúng ta có hệ quả trực tiếp dưới đây.

Hệ quả 3.2.1 Giả sử *k* và *n* là các số nguyên không âm, $k \le n$. Khi đó ta có

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Việc chứng minh hệ quả này được xem như một bài tập dành cho người đọc.

✓ **Ví dụ 3.2.4** Một giải bóng đá gồm 12 đội, trong đó các trận đấu được tổ chức theo vòng tròn một lượt. Hỏi có bao nhiều trận đấu xẩy ra?.

Giải: Mỗi trận đấu tương ứng với một tập hợp hai phần tử $\{t_1, t_2\}$, trong đó t_i là một trong 12 đội bóng tham gia giải đấu. Nghĩa là, một trận đấu tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 12. Vậy số trận đấu là C_{12}^2 = 12!/[2!(12-2)!] = 11.12/2 = 66.

✓ **Ví dụ 3.2.5** Có bao nhiêu cách thành lập một hội đồng chấm khóa luận tốt nghiệp từ 15 ủy viên nam và 10 ủy viên nữ nếu mỗi hội đồng có 3 ủy viên nam và 2 ủy viên nữ.

Giải: Số cách chọn 3 ủy viên trong 15 ủy viên nam là C_{15}^3. Số cách chọn 2 ủy viên trong 10 ủy viên nữ là C_{10}^2. Hơn nữa, mỗi cách chọn 3 ủy viên nam có C_{10}^2 cách chọn 2 ủy viên nữ để thành lập hội đồng. Theo ngyên lý nhân, số cách thành lập hội đồng là $C_{15}^{3}.C_{10}^{2}$ = 20475.

✓ **Ví dụ 3.2.6** Cho tập hợp *E* ={1, 2,…, 11, 12}. Có bao nhiêu tập hợp con *A* gồm 6 phần tử của *E* sao cho phần tử bé nhất của *A* là 4.

Giải: Số tập hợp con *A* có 6 phần tử của *E* mà phần tử bé nhất là 4 là số tập hơp con dạng $\{4\}\cup B$, trong đó *B* là tập hợp con 5 phần tử của tập hợp {5, 6, ..., 12}. Nên số tập hợp con *A* thỏa mãn yêu cầu tương ứng với số tập hợp con có 5 phần tử của tập hợp {5, 6, ..., 12}. Vì vậy, số tập hợp con phải tìm là C_8^5= 8!/(5!(8-5)!) =56 (tập con).

Một trong những hệ thức có nhiều ứng dụng trong toán học là hệ thức khai triển lũy thừa của một tổng, còn gọi là công thức *nhị thức Newton* (Newton binomial). Công thức nhị thức Newton là mở rộng của công thức bình phương của một tổng và được phát biểu dựa trên các số tổ hợp như sau.

▪ **Định lý 3.2.4** Giả sử *x* và *y* là hai số thực, *n* là một số nguyên không âm, thì

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k .$$

Chứng minh: Các số hạng trong khai triển $(x+y)^n$ = $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$ có dạng $x^{n-k}y^k$ với k = 1, 2, ..., n. Mỗi $x^{n-k}y^k$

là kết quả của phép lấy tích của *n*-*k* thừa số (x+y) và *k* thừa số (x+y) còn lại trong *n* thừa số của $(x+y)^n$. Tích *n*-*k* thừa số (x+y) đầu xác định x^{n-k}, tích *k* thừa số (x+y) còn lại xác định y^k. Có C_n^{n-k} cách chọn *n*-*k* thừa số (x+y) trong *n* thừa số (x+y) và vì vậy hệ số của $x^{n-k}y^k$ trong khai triển $(x+y)^n$ là C_n^{n-k}. Từ đó ta suy ra công thức nhị thức Newton.

✓ **Ví dụ 3.2.7** Có bao nhiêu tập hợp con của một tập hợp *n* phần tử?.

Giải: Chúng ta chia tập hợp các các tập con của tập hợp *n* phần tử thành *n*+1 lớp. Lớp gồm các tập hợp 0 phần tử, lớp gồm các tập hợp 1 phần tử, lớp gồm các tập hợp 2 phần tử,…, lớp gồm các tập hợp *n* phần tử. Số tập hợp con 0 phần tử là C_n^0, số tập hợp con 1 phần tử là C_n^1, số tập hợp con 2 phần tử là C_n^2,..., số tập hợp con *n* phần tử là C_n^n. Vì vậy số tập hợp con của tập hợp *n* phần tử là

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+ C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum C_n^k 1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

3.3 Chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp

Chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp là những chỉnh hợp và tổ hợp trong đó một phần tử có thể xuất hiện nhiều lần. Nhiều bài toán trong khoa học và thực tiễn ứng dụng các chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp.

▪ **Định nghĩa 3.3.1** Giả sử k và n là các số nguyên dương. Một *chỉnh hợp lặp chập k* (k- repetitive permutation) của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho.

✓ **Ví dụ 3.3.1** Một số chỉnh hợp lặp chập 3 của 4 phần tử a_1, a_2, a_3, a_4 có thể là (a_1, a_2, a_1), (a_1, a_3, a_4), (a_1, a_3, a_3), (a_4, a_2, a_3),…

Số chỉnh hợp chập k của một tập n phần tử, ký hiệu $\overline{A_n^k}$, được xác định bởi định lý sau đây.

▪ **Định lý 3.3.1** Giả sử k và n là các số nguyên dương. Số chỉnh hợp chập k của n là $\overline{A_n^k} = n^k$.

Chứng minh: Đặt $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Khi đó một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập hợp S có dạng $(r_1, r_2,..., r_k)$ với $r_i \in S$, $i =1...k$. Như vậy, một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của S là một phần tử của tích Descartes của k tập hợp mà mỗi tập hợp chính là S. Do đó số chỉnh hợp lặp $\overline{A_n^k} = |S \times S \times ... \times S|$ (k lần). Từ đó $\overline{A_n^k} = |S|^k = n^k$.

✓ **Ví dụ 3.3.2** Có bao nhiêu xâu ký tự độ dài n được tạo thành từ bảng chữ cái viết hoa của tiếng Anh.

Giải: Bảng chữ cái tiếng Anh viết hoa gồm 26 kí tự ‘A’,..., ’Z’. Một xâu ký tự độ dài n là một chỉnh hợp lặp chập n của 26 chữ cái này. Vì vậy, số xâu ký tự độ dài n được tạo thành từ bảng chữ cái viết hoa của tiếng Anh là 26^n.

✓ **Ví dụ 3.3.3** Tính xác xuất để lấy liên tiếp được 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả đỏ và 7 quả xanh nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra ta lại bỏ nó trở lại bình.

Giải: Số kết cục có lợi để ta lấy ra liên tiếp 3 quả bóng đỏ là 5^3 vì có 5 quả đỏ ta phải lấy 3 quả (chú ý vì có hoàn lại). Toàn bộ kết cục có thể để lấy ra ba quả bóng bất kỳ trong 12 quả bóng là 12^3. Như vậy, xác suất để có thể lấy ra 3 quả bóng đỏ liên tiếp là $5^3/12^3$.

▪ **Định nghĩa 3.3.2** Giả sử *k* và *n* là các số nguyên không âm. Một *tổ hợp lặp chập k* (*k*- repetitive combination) của *n* phần tử là một bộ phận không có thứ tự gồm *k* thành phần lấy từ *n* phần tử đã cho.

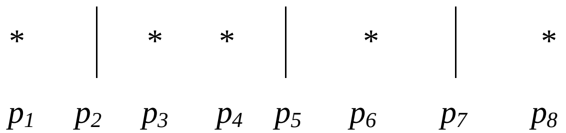
Như vậy, có thể coi một tổ hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là một *đa tập hợp con* (submultiset) *k* phần tử của tập hợp *n* phần tử này. Một đa tập hợp là một tập hợp có một số phần tử xuất hiện nhiều lần. Ví dụ [a_1, a_2, a_1] là một đa tập hợp. Một số tổ hợp lặp chập 2 của tập 3 phần tử a_1, a_2, a_3 có thể là [a_1, a_2], [a_3, a_3], [a_2, a_2],…

Số tổ hợp lặp chập *k* của một tập *n* phần tử được ký hiệu là $\overline{C_n^k}$. Trước khi phát biểu công thức tổng quát tính $\overline{C_n^k}$ chúng ta xét bài toán đếm trong ví dụ sau.

✓ **Ví dụ 3.3.4** Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ tiền từ một két đựng tiền gồm những tờ 10$, 20$, 50$ và 100$. Giả sử, thứ tự mà các tờ tiền được chọn không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

Giải: Rõ ràng một cách chọn 5 tờ tiền trong 4 loại tiền mà thứ tự các tờ tiền được chọn không quan trọng và các tờ tiền cùng loại là không phân biệt là một tổ hợp lặp chập 5 của 4. Vì vậy, để giải bài toán ta tính $\overline{C_4^5}$. Giả sử két đựng tiền có 4 ngăn, mỗi ngăn đựng 1 loại tiền, một cách chọn 5 tờ tiền có thể được biểu diễn như Hình 3.3.1. Ở đây, chúng ta đặt tương ứng một tờ tiền được chọn hoặc một vách ngăn các loại tiền với một phần tử p_i, i =1,.., 8 của tập hợp $\{p_1, ..., p_8\}$.

10$	20$	50$	100$



Hình 3.3.1: Một cách chọn 5 tờ tiền từ 4 loại tiền

Như vậy một cách chọn 5 tờ tiền trong 4 loại tiền theo yêu cầu của bài toán tương ứng với một tập hợp con 5 phần tử của tập hợp 8 phần tử $\{p_1, ..., p_8\}$. Do đó lời giải của bài toán là $\overline{C_4^5} = C_8^5$ = 8!/(5!.3!) = 56 (cách chọn).

Từ kết quả của lời giải bài toán trên, chúng ta mở rộng để có công thức tính số tổ hợp lặp chập k của n như trong định lý 3.3.2.

▪ **Định lý 3.3.2** Giả sử k và n là các số nguyên không âm. Số tổ hợp lặp chập k của n là $\overline{C_n^k} = C_{k+n-1}^k$.

Chứng minh: Mỗi tổ hợp lặp $[r_1, r_2, ..., r_k]$ chập k của n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tương ứng với một cách chọn k vị trí trong $k + n$-1 vị trí $p_1, p_2, ..., p_{k+n-1}$. Trong đó mỗi vị trí p_m, với $m = 1, 2, \ldots, k + n-1$ biểu diễn một phần tử r_j trong k phần tử của $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ hoặc biểu diễn một ký hiệu phân biệt giữ hai dãy phần tử $p_i, ..., p_{m-1}$ và $p_{m+1}, .., p_r$ (trong ví dụ trên p_m là ký hiệu vách ngăn giữa hai loại tiền). Có n-1 ký hiệu như vậy, được biểu diễn bởi n-1 vị trí trong $p_1, p_2, ..., p_{k+n-1}$. Do đó, mỗi tổ hợp lặp chập k của n tương ứng với một tổ hợp chập k của $k+n$-1. Vì vậy, $\overline{C_n^k} = C_{k+n-1}^k$.

✓ **Ví dụ 3.3.5** Có bao nhiêu cách chọn mua 4 cái bút bi trong 3 loại bút bi có màu xanh, đỏ và đen.

Giải: Rõ ràng, theo đầu bài thì mỗi cách chọn mua 4 cái bút trong 3 loại màu không quan tâm đến thứ tự chọn bút và các bút có thể có màu giống nhau, nên mỗi cách chọn mua tương ứng với một tổ hợp lặp chập 4 của 3. Vì vậy, có $\overline{C_3^4} = C_6^4 = 15$ cách chọn mua 4 bút bi trong 3 loại bút bi có có màu xanh, đỏ và đen.

✓ **Ví dụ 3.3.6** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$.

Giải: Mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình đã cho là một bộ $[x_1, x_2, x_3]$ sao cho $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ và $x_1 + x_2 + x_3 = 11$. Suy ra, mỗi nghiệm tương ứng với một cách chọn 11 trong 3 phần tử, không thứ tự, có thể lặp lại. Nói cách khác mỗi nghiệm tương ứng với một tổ hợp lặp chập 11 của 3. Vậy số nghiệm là $\overline{C_3^{11}} = C_{13}^{11} = 78$.

3.4 Nguyên lý chuồng chim bồ câu

Nguyên lý chuồng chim bồ câu (pigeonhole principle) được phát biểu dựa trên sự liên tưởng với cách một đàn chim bồ câu bay về và đi vào các cửa chuồng của chúng trong một lần mà số con chim nhiều hơn số cửa của chuồng. Cụ thể hơn, nếu chuồng chim chỉ có 10 cửa, trong một lần có 11 con chim bay về và vào chuồng thì có ít nhất có 2 con chim cùng đi vào 1 cửa. Nguyên lý chuồng chim bồ câu chỉ xác định số lượng tối thiểu các đối tượng đang tồn tại trong một tình huống cụ thể mà không cho biết chính xác bao nhiêu đối tượng đang xuất hiện trong tình huống đó. Nguyên lý chuồng chim bồ câu còn được gọi là *nguyên lý Dirichlet* (Dirichlet principle) bởi vì nhà toán học Đức G. Lejeune Dirichlet (1805–1859) được xem như là người đầu tiên sử dụng nguyên lý này trong các công trình toán học của mình. Trước khi phát biểu nguyên lý chuồng chim bồ câu tổng quát, chúng ta xem xét một trường hợp riêng của nó như trong Định lý 3.4.1.

▪ **Định lý 3.4.1** Nếu k là một số nguyên dương và có không ít hơn $k+1$ đối tượng được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp chứa ít nhất 2 đối tượng.

Chứng minh: Giả sử không tồn tại hộp nào trong k hộp chứa ít nhất 2 đối tượng thì suy ra số đối tượng nhiều nhất có trong k hộp là ít hơn hoặc bằng k. Điều này mâu thuẫn với việc $k+1$ đối tượng được đã đặt vào trong k hộp. Vì vậy, định lý được chứng minh.

✓ **Ví dụ 3.4.1** Một bài kiểm tra tiếng Anh được tính theo thang điểm 100. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu người tham gia kiểm tra để chắc chắn có ít nhất 2 người cùng số điểm?.

Giải: Vì điểm bài kiểm tra của một người tham gia có thể là một trong 101 điểm thi, từ 0 cho đến 100. Nên theo nguyên lý chuồng chim bồ câu, phải có ít nhất 102 người tham gia bài kiểm tra thì có ít nhất 2 người cùng số điểm thi.

Định lý 3.4.1 được mở rộng thành nguyên lý chuồng chim bồ câu (nguyên lý Dirichlet) tổng quát như sau.

▪ **Định lý 3.4.2** Nếu có N đối tượng được đặt vào trong k hộp thì tồn tại ít nhất một hộp chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ đối tượng.

Chứng minh: Giả sử N đối tượng được đặt vào trong k hộp và mọi hộp đều chứa ít hơn $\lceil N/k \rceil$ đối tượng. Khi đó, tổng số các đối tượng được chứa trong k hộp không vượt quá $k(\lceil N/k \rceil$ -1). Mặt khác ta lại có $k(\lceil N/k \rceil -1) < k[(N/k +1) - 1] = N$. Từ đó, suy ra số đối tượng được đặt vào trong k hộp ít hơn N. Điều này mâu thuẫn với giả thiết N đối tượng được đặt vào trong k hộp. Mâu thuẫn này chứng tỏ phải có ít nhất một hộp chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ đối tượng. Định lý đã được chứng minh.

✓ **Ví dụ 3.4.2** Giả sử điểm thi của một môn học là một số nguyên không âm không vượt quá 10, cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên ghi tên vào lớp Toán Rời rạc để chắc chắn có ít nhất 6 sinh viên cùng điểm thi.

Giải: Gọi số sinh viên ghi tên vào lớp Toán Rời rạc N. Vì điểm thi của một sinh viên có thể là một trong 11 số từ 0 đến 10, theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất $\lceil N/11 \rceil$ sinh viên có cùng điểm thi. Để chắc chắn ít nhất 6 sinh viên cùng điểm thi ta phải có $\lceil N/11 \rceil \geq 6$. Vì $\lceil N/11 \rceil < N/11 +1$ nên $6 < N/11 +1$ hay $N > 55$. Do đó, phải có tối thiểu là 56 sinh viên ghi tên vào lớp Toán Rời rạc để chắc chắn có ít nhất 6 sinh viên cùng điểm thi.

✓ **Ví dụ 3.4.3** Trong Khoa học máy tính, để xử lý các ký hiệu cần phải mã hóa chúng bằng các số nhị phân. Giả sử mỗi ký hiệu được mã hóa bởi một số nhị phân 8 bit, hãy cho biết một bảng mã các ký hiệu như vậy có thể mã hóa được tối đa bao nhiêu ký hiệu?

Giải: Gọi số ký hiệu có thể được mã hóa trong bảng mã là N. Chúng ta có $2^8 = 256$ số nhị phân 8 bit bắt đầu từ 00000000 đến 11111111. Để đảm bảo các ký hiệu được mã hóa bởi các mã khác nhau, theo nguyên lý chuồng chim bồ câu ta phải có $\lceil N/256 \rceil \leq 1$. Từ đây ta suy ra $N/256 \leq \lceil N/256 \rceil \leq 1$ hay $N \leq 256$. Vậy bảng mã 8 bit mã hóa được tối đa 256 ký hiệu.

✓ **Ví dụ 3.4.4** Chứng minh rằng trong $n + 1$ số nguyên dương không lớn hơn $2n$ luôn luôn tìm được hai số sao cho số này chia hết cho số kia.

Giải: Gọi $n + 1$ số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Chúng ta có thể viết mỗi số a_i trong $n+1$ số dưới dạng $a_i = 2^{k_i} q_i$, $i = 1, \ldots, n+1$, trong đó k_i là một số nguyên không âm, q_i là một số lẻ. Vì mỗi số $a_i \leq 2n$ nên mỗi số $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ đều không lớn hơn $2n$.

Do mỗi q_i là lẻ và trong đoạn từ 1 đến $2n$ chỉ có n số lẻ, nên theo nguyên lý chuồng chim bồ câu ắt có hai số trong $n+1$ số $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ là bằng nhau. Nói cách khác, tồn tại i và j, $i \neq j$ sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i = 2^{k_i} q$ và $a_j = 2^{k_j} q$ nên nếu $k_i < k_j$ thì a_j chia hết cho a_i, ngược lại nếu $k_i \geq k_j$ thì a_i chia hết cho a_j.

BÀI TẬP

1. Tính số xâu nhị phân độ dài 10 trong các trường hợp sau:

a. Có bit đầu và bit cuối cùng bằng 1.

b. Có 2 bit đầu là 0 hoặc 3 bit cuối bằng 1.

c. Có số các bit 0 bằng số các bit 1.

d. Có nhiều nhất bốn bit 1.

e. Luôn có 4 bit 0.

2. Có bao nhiêu đơn ánh từ tập A có m phần tử đến tập B có n phần tử.

3. Cho tập các chữ số {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

a. Có bao nhiêu số có 3 chữ số mà các chữ số khác nhau được tạo thành từ tập trên.

b. Có bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số mà các chữ số khác nhau được tạo thành từ tập trên.

4. Có bao nhiêu số nguyên dương không lớn hơn 100 chia hết cho 4 hoặc cho 6?

5. Trong một đám cưới có 10 người. Các ảnh có 6 người được chụp bằng cách xếp 6 người thành một hàng. Hỏi có bao nhiêu ảnh có thể được chụp trong các trường hợp sau:

a. Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu.

b. Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu và chú rể.

c. Chỉ có hoặc là cô dâu hoặc là chú rể xuất hiện trong mọi kiểu ảnh

6. Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái trong xâu ABCDEF sao cho có chứa ba chữ cái D, E, F đứng cạnh nhau.

7. Có bao nhiêu số có bốn chữ số có thể tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 thỏa mãn:

a. Không có chữ số nào lặp lại.

b. Các chữ số có thể được lặp lại.

c. Chỉ các số chẵn có thể được lặp lại.

8. Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ thành một hàng ngang sao cho không có hai nữ sinh nào đứng cạnh nhau.

9. Có 3 giỏ đựng các quả cầu xanh, đỏ, tím. Mỗi giỏ chứa ít nhất là 8 quả cầu và các quả cầu trong một giỏ là cùng màu.

a. Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quả cầu

b. Có bao nhiêu cách chọn ra 8 quả cầu mà trong đó có ít nhất một quả cầu đỏ, một quả cầu xanh, một quả cầu tím.

10. Khóa 13 khoa Công nghệ Thông tin có 120 sinh viên học môn Java, 130 sinh viên học môn C# , 40 sinh viên học cả Java và C#.

a. Có bao nhiêu sinh viên khóa 13 khoa CNTT, biết rằng sinh viên nào cũng phải học ít nhất một môn.

b. Biết tổng số sinh viên khóa 13 khoa CNTT là 235, hỏi có bao nhiêu sinh viên không học Java hoặc C#.

11. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 10000 chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 5 và 2.

12. Mỗi người sử dụng máy tính có một password 6 đến 8 ký tự. Các ký tự có thể là chữ số hoặc chữ cái, mỗi password phải có ít nhất một chữ số. Tìm tổng số password có thể có.

13. Trong tổng số 2504 sinh viên của một khoa CNTT, có 1876 theo học môn ngôn ngữ Pascal, 999 học môn ngôn ngữ Java và 345 học ngôn ngữ C. Ngoài ra, còn biết 876 sinh viên học cả Pascal và Java, 232 học cả Java và C, 290 học cả Pascal và C. Nếu 189 sinh viên học cả 3 môn Pascal, Java và C thì trong trường hợp đó có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong 3 môn ngôn ngữ lập trình kể trên.

14. Một cuộc họp gồm 12 người tham dự để bàn về 3 vấn đề. Có 8 người phát biểu về vấn đề I, 5 người phát biểu về vấn đề II và 7 người phát biểu về vấn đề III. Ngoài ra, có đúng 1 người không phát biểu vấn đề nào. Hỏi tối đa có bao nhiêu người phát biểu cả 3 vấn đề.

15. Xét tập $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Có bao nhiêu tập con A của S thỏa mãn

a. $|A| = 5$

b. $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của A là 3.

c. $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của A bé hơn hay bằng 3.

16. Xét các tập hợp $A = \{1, 2, \ldots, 11\}$ và $B = \{1, 2, \ldots, 12\}$.

a. Có bao nhiêu tập con của A chứa ít nhất một số chẵn.

b. Có bao nhiêu tập con của B chứa ít nhất một số chẵn.

c. Tổng quát hóa các kết quả trong câu a và b.

17. Cho tập hợp X gồm n phần tử. Có bao nhiêu bộ có thứ tự (A, B) thỏa mãn

a. $A \subseteq X$, $B \subseteq X$.

b. $A \subseteq B \subseteq X$.

18. Một câu lạc bộ gồm 25 thành viên

a. Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực.

b. Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỷ.

19. Cho phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$.

a. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm.

b. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_1 \geq 2$.

c. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_i \geq 2$, với i =1,.., 5.

d. Phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm và $x_1 < 2$.

20. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 12$, $x_3 \leq 5$, $x_4 \leq 10$.

21. Một học sinh đến cửa hàng mua 5 cây bút chọn trong 4 màu khác nhau xanh, đỏ, tím, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để chọn mua hàng.

22. Một tổ của một lớp học có 7 sinh viên

a. Có bao nhiêu cách chia họ thành 2 nhóm?. Nếu yêu cầu mỗi nhóm có ít nhất 2 sinh viên thì có bao nhiêu cách chia?.

b. Tổng quát hóa các kết quả trả lời của câu trên khi số sinh viên trong tổ là một số n tùy ý.

23. Có bao nhiêu cách chia 10 hòn bi cho 5 đứa trẻ trong các trường hợp sau:

a. Không có hạn chế nào cả.

b. Đứa trẻ lớn nhất được ít nhất 2 hòn bi.

c. Mỗi đứa trẻ được ít nhất một hòn bi.

24. Chỉ ra rằng nếu chọn 5 số từ tập các số {1, 2, …, 7, 8} thì bao giờ cũng có ít nhất một cặp số có tổng là 9.

25. Chứng minh rằng trong bất kỳ một nhóm 27 từ tiếng Anh nào cũng có ít nhất 2 từ bắt đầu từ cùng một chữ cái.

26. Có 5 loại học bổng khác nhau. Hỏi phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên được hưởng các loại học bổng này để chắc chắn có ít nhất 6 sinh viên được nhận cùng loại học bổng.

27. Giả sử n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong mọi tập hợp n số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho n.

28. Cần tung con xúc sắc bào nhiêu lần để có một mặt xuất hiện ít nhất:

a. 2 lần

b. 3 lần

c. n lần với $n \geq 4$.

29. Chứng minh rằng trong một phòng họp bao giờ cũng tìm được hai người có số người quen trong số những người dự họp là bằng nhau.

30. Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?

Chương 4

HỆ THỨC TRUY HỒI

Hệ thức truy hồi là một trong những công cụ toán học có nhiều ứng dụng trong việc mô hình hóa để giải các bài toán khoa học và đời sống thực tế. Trong Khoa học Máy tính, hệ thức truy hồi là mô hình toán học của các *giải thuật đệ quy* (recursive algorithm). Hệ thức truy hồi cũng chính là phương tiện để biểu diễn và tính toán độ phức tạp của các giải thuật đệ qui. Ngoài ra, hệ thức truy hồi còn là cơ sở toán học cho một phương pháp thiết kế giải thuật hiệu quả, là phương pháp *qui hoạch động* (dynamic programming).

Phần 4.1 định nghĩa khái niệm hệ thức truy hồi và nghiệm của một hệ thức truy hồi. Phần 4.2 trình bày một số bài toán có thể được giải bằng mô hình hóa bởi một hệ thức truy hồi. Phần 4.3 giới thiệu các phương pháp giải các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất và không thuần nhất. Cuối cùng, phần 4.4 trình bày khái niệm hệ thức truy hồi chia để trị và cách xác định độ tăng của hàm số được biểu diễn bởi hệ thức truy hồi này, làm cơ sở cho các áp dụng phân tích độ phức tạp về thời gian của các giải thuật được thiết kế bằng phương pháp *chia để trị* (divide-and-conquer).

4.1 Định nghĩa hệ thức truy hồi

Một dãy các số hạng có thể được biểu diễn một cách tương minh nhờ một qui luật xác định mỗi số hạng của dãy hoặc không tường minh bởi một hệ thức truy hồi mà có thể xác định mỗi số hạng của dãy thông qua một số các số hạng đi trước nó. Hệ thức truy hồi cho một dãy số được định nghĩa như sau.

- **Định nghĩa 4.1.1** Giả sử n là một biến số nguyên không âm, $\{a_n\}$ là một dãy số và n_0 là một số tự nhiên khác 0. Một *hệ thức truy hồi* (recurrence relation) cho dãy $\{a_n\}$ ứng với $n \geq n_0$, là một công thức biểu diễn a_n theo các số hạng a_0, a_1, …, a_{n-1}.

Từ Định nghĩa 4.1.1 chúng ta suy ra rằng, mọi hệ thức truy hồi là một phương trình có dạng $a_n = \Gamma(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ biểu diễn số hạng thứ n theo các số hạng đi trước nó trong dãy $\{a_n\}$. Vì vậy, khi một dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa bởi một hệ thức truy hồi và các số hạng a_0, a_1, …, a_{n-1} được cho trước giá trị, thì số hạng a_n với $n \geq n_0$ có thể được tính toán từ các số hạng a_0, a_1, …, a_{n-1}. Nói cách khác, a_n được tính toán một cách truy hồi qua các số hạng đi trước nó trong dãy. Từ đó, dễ thấy hệ thức truy hồi là mô hình toán học của các giải thuật đệ qui trong Khoa học Máy tính.

✓ **Ví dụ 4.1.1**

1. Công thức biểu diễn $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ là một hệ thức truy hồi cho dãy $\{a_n\}$ khi $n \geq n_0 = 2$, trong đó đã cho trước giá trị $a_0 = 3$, $a_1 = 5$. Chúng ta có thể tính $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$, $a_3 = a_2 - a_1 = 2 – 5 = -3$, v.v.

2. Công thức $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$ là một hệ thức truy hồi cho dãy $\{a_n\}$ khi $n \geq n_0 = 2$. Giá trị a_0 và a_1 chưa xác định, vì vậy ta cũng chưa thể tính được giá trị cụ thể của a_2, a_3, v.v.

▪ **Định nghĩa 4.1.2** Nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = \Gamma(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ với $n \geq n_0$ là một dãy $\{a_n\}$ các số hạng thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

✓ **Ví dụ 4.1.2** Hệ thức truy hồi thứ 2 trong Ví dụ 4.1.1 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$ có các nghiệm là $\{3n\}$ hoặc $\{5\}$ với mọi n nguyên không âm. Thật vậy, với dãy $a_n = 3n$, khi $n \geq 2$ ta có $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n = a_n$. Như thế dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3n$ thỏa mãn hệ thức truy hồi đã cho nên là một nghiệm của thức truy hồi này. Với dãy $a_n = 5$, khi $n \geq 2$ ta có $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2.5 - 5 = 5 = a_n$. Vì vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 5$ cũng là một nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Từ Định nghĩa 4.1.1, chúng ta suy ra rằng hệ thức truy hồi xác định một dãy $\{a_n\}$ duy nhất theo các giá trị của a_0, a_1,

…, a_{n-1} cho trước. Các giá trị a_0, a_1, …, a_{n-1} như vậy gọi là các điều kiện đầu của hệ thức truy hồi như định nghĩa sau.

▪ **Định nghĩa 4.1.3** Các *điều kiện đầu* (initial condition) của hệ thức truy hồi cho một dãy $\{a_n\}$ là các giá trị của các số hạng đi trước số hạng đầu tiên kể từ đó hệ thức truy hồi có hiệu lực.

✓ **Ví dụ 4.1.3** Trong hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ thì các điều kiện đầu là $a_0 = 3$, $a_1 = 5$. Số hạng đầu tiên có hiệu lực với hệ thức truy hồi này là a_2. Áp dụng các điều kiện đầu $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, chúng ta xác định được một dãy $\{a_n\}$ duy nhất $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$, $a_4 = -5$, v.v thỏa mãn hệ thức thức truy hồi.

4.2 Một số bài toán ứng dụng hệ thức truy hồi

Hệ thức truy hồi được ứng dụng để mô hình hóa và giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau như lý thuyết đếm trong Toán học hay thiết kế và phân tích giải thuật trong Khoa học Máy tính, v.v. Sau đây là một số bài toán đơn giản được mô hình hóa và giải bằng hệ thức truy hồi để minh họa cho khả năng ứng dụng của nó.

✓ **Bài toán 4.2.1** Giả sử một người gửi 10000 $ vào ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm người đó có bao nhiêu tiền trong ngân hàng.

Giải: Gọi P_n là số tiền có được trong ngân hàng của người gửi sau n năm thì số tiền có được sau n-1 năm là P_{n-1} và số tiền lãi có được ở năm thứ n là 11%. P_{n-1}. Vì số tiền có được sau n năm bằng số tiền có được sau n-1 năm cộng với số tiền lãi có được ở năm thứ n nên ta có $P_n = P_{n-1} + 11\%.\ P_{n-1} = (1.11)P_{n-1}$. Số tiền ban đầu 10000 \$ của người gửi được coi là số tiền có được ở năm thứ 0 nên $P_0 = 10000$ và chúng ta có hệ thức truy hồi để tính số tiền năm thứ n là:

$$P_n = (1.11)P_{n-1},\ \forall\ n \geq 1,\ P_0 = 10000.$$

Chúng ta có thể tìm P_n theo n và P_0 như sau:

$$P_1 = (1.11)P_0$$

$$P_2 = (1.11)P_1 = (1.11)(1.11)P_0 = (1.11)^2P_0$$

$$P_3 = (1.11)P_2 = (1.11)(1.11)^2P_0 = (1.11)^3P_0$$

…

$$P_n = (1.11)P_{n-1} = (1.11)(1.11)^{n-1}P_0 = (1.11)^nP_0$$

Chúng ta có thể chứng minh hệ thức $P_n = (1.11)^nP_0$ bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy, với $n = 0$ hệ thức hiển nhiên đúng. Giả sử $P_n = (1.11)^nP_0$ đúng với $n \geq 0$. Khi đó $P_{n+1} = (1.11)P_n = (1.11)(1.11)^nP_0 = (1.11)^{n+1}P_0$. Vậy hệ thức $P_n = (1.11)^nP_0$ được chứng minh. Thay $n = 30$, $P_0 = 10000$ ta có $P_{30} = (1.11)^{30}10000$ \$ = 228922.97 \$. Đó là số tiền người gửi thu được sau 30 năm.

✓ **Bài toán 4.2.2** Xem bài toán vui của nhà toán học Fibonacii (1170 – 1250). Một cặp thỏ mới sinh (một con đực một con cái) được thả lên một hòn đảo hoang. Giả sử rằng thỏ chưa thể sinh con khi chưa đủ 2 tháng tuổi. Tuy nhiên, sau 2 tháng tuổi một cặp thỏ sinh mỗi tháng một cặp thỏ con. Hỏi, nếu cặp thỏ mới sinh vào đầu tháng thứ nhất, thì cho đến tháng thứ n trên đảo có bao nhiêu cặp thỏ (giả thiết rằng tất cả các cặp thỏ sinh ra đều sống đến sau tháng thứ n).

Giải: Gọi f_n là số cặp thỏ có trên đảo cho đến tháng thứ n, thì số cặp thỏ có trên đảo đến tháng thứ n-2 và n-1 lần lượt là f_{n-2} và f_{n-1}. Rõ ràng, số cặp thỏ có trên đảo cho đến tháng thứ n bằng số cặp thỏ có trên đảo cho đến tháng thứ n-1 cộng với số cặp thỏ được sinh ra thêm trong thứ n. Theo điều kiện của bài toán, chỉ có các cặp thỏ có trên đảo đến tháng thứ n-2 mới có thể sinh ra các cặp thỏ con ở tháng thứ n. Nghĩa là, có thêm đúng f_{n-2} cặp thỏ con mới được sinh ra trong tháng thứ n. Với lưu ý rằng, đến tháng thứ 2 trên đảo vẫn chỉ có một cặp thỏ ban đầu, chúng ta có hệ thức truy hồi để tính số cặp thỏ trên đảo cho đến tháng thứ n là

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ với mọi } n \geq 3 \text{ và } f_1 = 1, f_2 = 1.$$

Với hệ thức truy hồi này chúng ta có thể tính số cặp thỏ có được trên đảo cho đến tháng thứ 3, 4, 5, v.v.

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2,$$

$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3,$

$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5.$

…

Với mỗi n = 1, 2, 3, ..., giá trị tương ứng của f_n gọi là số Fibonacii. Phần sau của chương này sẽ trình bày cách giải hệ thức truy hồi trên để có thể tính trực tiếp các giá trị của dãy $\{f_n\}$ theo giá trị của n.

✓ **Bài toán 4.2.3** Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một *từ mã hợp lệ* (valid codeword) nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Chẳng hạn, xâu 1230407869 là hợp lệ, trong khi xâu 120987045608 là không hợp lệ. Hãy tìm hệ thức truy hồi để tính số từ mã hợp lệ độ dài n (từ mã hợp lệ có đúng n chữ số).

Giải: Gọi W là tập các từ mã hợp lệ độ dài n, thì $W = \{(d_1d_2\ldots d_{n-1}d_n) \mid d_i \in \{0,1,..,9\}$ và $(d_1d_2\ldots d_{n-1}d_n)$ chứa một số chẵn số 0$\}$. Chia W thành 2 tập hợp con W_1 và W_2 rời nhau theo giá trị của d_n khác 0 hay bằng 0.

$$W_1 = \{(d_1d_2\ldots d_{n-1}d_n) \mid d_n \in \{1,..,9\}\} \subset W,$$

$$W_2 = \{(d_1d_2\ldots d_{n-1}d_n) \mid d_n = 0\} \subset W.$$

Khi đó, $W = W_1 \cup W_2$ và $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Gọi S_n là số từ mã hợp lệ độ dài n, thì

$$S_n = |W| = |W_1| + |W_2|$$

Xét tập W_1, do $d_n \in \{1,..,9\}$ nên mỗi từ mã hợp lệ trong W_1 tương ứng với một phép chọn $d_n \in \{1,..,9\}$ và một từ mã $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ độ dài n-1 hợp lệ. Số từ mã hợp lệ $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ độ dài n-1 là S_{n-1}, nên số từ mã hợp lệ trong W_1 là $9.S_{n-1}$.

Xét tập W_2, do $d_n = 0$ nên $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ sẽ chứa một số lẻ số 0. Do đó, mỗi từ mã trong W_2 tương ứng với một từ $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ độ dài n-1 chứa một số lẻ số 0. Tập các từ $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ chứa một số lẻ số 0 sẽ bằng tập các từ $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ trừ đi tập các từ chứa một số chẵn số 0. Số phần tử của tập các từ $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ chứa một số chẵn số 0, nghĩa là các từ mã hợp lệ độ dài n-1, là S_{n-1}. Số phần tử của tập các từ $(d_1d_2\ldots d_{n-1})$ là 10^{n-1}. Vì vậy, số từ mã hợp lệ trong W_2 là $10^{n-1} - S_{n-1}$.

Kết hợp việc tính toán số phần tử của W_1 và W_2 ở trên ta có hệ thức truy hồi để tính số từ mã hợp lệ độ dài n là $S_n = |W_1| + |W_2| = 9.S_{n-1} + 10^{n-1} - S_{n-1} = 8.S_{n-1} + 10^{n-1}$. Dễ thấy rằng số từ mã hợp lệ độ dài 1 là $S_1 = 9$. Vậy, ta có hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số từ mã hợp lệ độ dài n là $S_n = 8.S_{n-1} + 10^{n-1}, \forall n \geq 2, S_1 = 9$.

4.3 Giải hệ thức truy hồi

Giải một hệ thức truy hồi là tìm các nghiệm của nó. Đó là quá trình tính toán, biến đổi hệ thức truy hồi để đạt đươc *công thức tường minh* (explicit formula) biểu diễn trực tiếp số hạng a_n chỉ phụ thuộc vào giá trị n mà không phụ thuộc vào các số hạng đi trước nó. Chẳng hạn, trong Ví dụ 4.2.1, chúng ta biến đổi để đạt được $P_n = (1.11)^n P_0$ từ hệ thức truy hồi $P_n = (1.11)P_{n-1}$ với $P_0 = 10000$ là chúng ta đã giải hệ thức truy hồi này.

Ý nghĩa của việc giải hệ thức truy hồi là cho phép tính toán một cách nhanh chóng mọi số hạng của dãy được định nghĩa bởi hệ thức truy hồi. Phần này trình bày cách giải một lớp các hệ thức truy hồi thường gặp và có nhiều ứng dụng là *hệ thức truy hồi tuyến tính* (linear recurrence relation). Trước hết, chúng ta sẽ xem xét cách giải một lớp đơn giản nhất của hệ thức truy hồi tuyến tính gọi là *hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất* (linear homogeneous recurrence relation).

❖ Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất cho một dãy $\{a_n\}$ là một hệ thức truy hồi trong đó số hạng a_n chỉ phụ thuộc tuyến tính vào các số hạng đi trước nó như định nghĩa sau.

▪ **Định nghĩa 4.3.1** Giả sử k là một số tự nhiên khác 0. Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k là hệ thức truy hồi có dạng

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}, \qquad (1)$$

trong đó $c_1, c_2, ..., c_k$ là các hằng số thực, $c_k \neq 0$.

Chúng ta lưu ý rằng, nếu tồn tại k điều kiện đầu $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$, thì một dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi trong Định nghĩa 4.3.1 và k điều kiện đầu này sẽ xác định duy nhất.

✓ **Ví dụ 4.3.1**

1. Hệ thức $P_n = (1.11)P_{n-1}$ là một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 1. Hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2. Hệ thức $a_n = a_{n-5}$ là một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 5.

2. Hệ thức $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ không phải là hệ thức truy hồi tuyến tính. Các hệ thức $H_n = 2H_{n-1} + 1$ và $S_n = 8.S_{n-1} + 10^{n-1}$ là những hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất.

Như đã thấy trong các Ví dụ 4.1.2 và 4.2.1, hệ thức truy hồi có thể có nhiều nghiệm. Một trong những dạng nghiệm đơn giản nhất của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là một dãy biểu diễn lũy thừa bậc n của một hằng số. Nói cách khác, đó là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$, trong đó r là một hằng số. Để tìm mối quan hệ giữa r và các hệ số $c_1, c_2, ..., c_k$ và từ đó tìm được các nghiệm khác của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k, chúng ta giả sử $a_n = r^n$ với $n = 0, 1, \ldots$, là một nghiệm của nó. Khi đó, từ hệ thức (1) chúng ta có:

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + ... + c_k r^{n-k}.$$

Chia cả hai vế cho r^{n-k} và chuyển tất cả các số hạng sang vế trái ta được hệ thức tương đương:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - ... - c_{k-1} r - c_k = 0 \qquad (2)$$

Hệ thức (2) được gọi là *phương trình đặc trưng* (characteristic equation) của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất. Rõ ràng, nếu dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi thì r là một nghiệm của phương trình đặc trưng (2). Các nghiệm của phương trình đặc trưng được gọi là các *nghiệm đặc trưng* (characteristic root) của hệ thức truy hồi.

Sử dụng các nghiệm của phương trình đặc trưng, chúng ta có thể tìm được nghiệm của các hệ thức truy hồi tuyến tính. Trước hết, nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai được xác định bởi định lý sau.

- **Định lý 4.3.1** Giả sử c_1, c_2 là các hằng số thực, phương trình $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt r_1 và r_2. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với $n = 0, 1, 2,....,$ trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Chứng minh: Trước hết, chúng ta chỉ ra rằng nếu r_1 và r_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ và α_1, α_2 là các hằng số, thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi. Thật vậy, do r_1 và r_2 là các nghiệm của $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ nên $r_1^2 = c_1r_1 + c_2$ và $r_2^2 = c_1r_2 + c_2$. Từ đó ta có:

$$
\begin{aligned}
c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
&= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n.
\end{aligned}
$$

Vì vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi.

Ngược lại, chúng ta chỉ ra rằng nếu $\{a_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ thì $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với $n = 0, 1, 2,...$, trong đó α_1, α_2 là các hằng số. Thậy vậy, giả sử $\{a_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi thỏa mãn các điều kiện đầu $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$, khi đó, tồn tại các hằng số α_1, α_2 để dãy $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ cũng thỏa mãn các điều kiện đầu này. Điều này tương đương với $a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2$ và $a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$ hay $\alpha_1 + \alpha_2 = C_0$ và $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = C_1$. Giải hệ hai phương trình này đối với α_1 và α_2, với lưu ý $r_1 \neq r_2$ ta có:

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2} \text{ và } \alpha_2 = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2}.$$

Như vậy, với các hằng số α_1, α_2 đã được xác định, cả hai nghiệm $\{a_n\}$ và $\{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ đều thỏa mãn các điều kiện đầu ứng với $n = 0$

và $n = 1$. Bởi vì chỉ có một nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi thỏa mãn các điều kiện đầu nên $a_n \equiv \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với n = 0, 1, 2,...Vậy, mọi nghiệm $\{a_n\}$ của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n1} + c_2 a_{n-2}$ đều có dạng $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với n = 0, 1, 2,..., trong đó α_1, α_2 là các hằng số. Định lý đã được chứng minh.

✓ **Ví dụ 4.3.2** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 2$ với $a_0 = 2$, $a_1 = 7$.

Giải: Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 2 = 0$ của hệ thức truy hồi có hai nghiệm phân biệt $r_1 = 2$ và $r_2 = -1$. Áp dụng Định lý 4.3.1, thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi. Từ điều kiện đầu ta có

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

$$\alpha_1 2 + \alpha_2(-1) = 7.$$

Giải hệ này ta được $\alpha_1 = 3$ và $\alpha_2 = -1$. Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3.2^n + -(-1)^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

✓ **Ví dụ 4.3.3** Tìm công thức tường minh của dãy số Fibonacii từ hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ thỏa mãn các điều kiện đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$.

Giải: Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 1 = 0$ của hệ thức truy hồi có hai nghiệm phân biệt $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ và $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Do đó dãy $\{f_n\}$ với

$$f_n = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

là nghiệm của hệ thức truy hồi. Sử dụng các điều kiện đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$ ta có

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_1(1 + \sqrt{5})/2 + \alpha_2(1 - \sqrt{5})/2 = 1.$$

Giải hệ phương trình này ta được $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Vì vậy công thức tường minh biểu diễn dãy số Fibonacii là

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Định lý 4.3.1 chỉ được áp dụng để giải các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai mà phương trình đặc trưng của nó có hai nghiệm phân biệt. Trường hợp phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi có nghiệm kép, định lý sau đây sẽ được áp dụng.

▪ **Định lý 4.3.2** Giả sử c_1, c_2 là các hằng số thực, phương trình $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có nghiệm kép r_0. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ với $n = 0, 1, 2, ...$, trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Có thể áp dụng cách chứng minh định lý Định lý 4.3.1 để chứng minh định lý này. Phần chứng minh định lý xem như một bài tập dành cho người đọc.

✓ **Ví dụ 4.3.4** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $n \geq 2$ với $a_0 = 1$ và $a_1 = 6$.

Giải: Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$ của hệ thức truy hồi có một nghiệm kép $r = 3$. Áp dụng Định lý 4.3.2, thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n.3^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi. Từ điều kiện đầu ta có

$$\alpha_1 = 1,$$
$$3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6.$$

Giải hệ này ta được $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = 1$. Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3^n + n3^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Định lý 4.3.1 và 4.3.2 chỉ được áp dụng để giải các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai. Các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc cao hơn được giải bằng cách áp dụng các Định lý 4.3.3 và 4.3.4 được lần lượt phát biểu dưới đây. Phần chứng minh của các định lý này, tương tự như chứng minh định lý 4.3.1, được xem như một bài tập dành cho người đọc.

- **Định lý 4.3.3** Giả sử $c_1, c_2, ..., c_k$ là các hằng số thực, phương trình $r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - ... - c_{k-1}r - c_k = 0$ có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + ... + \alpha_k r_k^n$ với $n = 0, 1, 2,....$, trong đó α_1, $\alpha_2,..., \alpha_k$ là các hằng số.

✓ **Ví dụ 4.3.5** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $n \geq 3$ với $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ và $a_2 = 15$.

Giải: Phương trình đặc trưng $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ của hệ thức truy hồi tương đương với $(r - 1)(r - 2)(r - 3) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ và $r_3 = 3$. Áp dụng Định lý 4.3.3, thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi. Từ điều kiện đầu ta có

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3,$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9.$$

Giải hệ này ta được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ và $\alpha_3 = 2$. Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện đầu của hệ thức truy hồi đã cho.

- **Định lý 4.3.4** Giả sử $c_1, c_2, ..., c_k$ là các hằng số thực, phương trình $r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - ... - c_{k-1}r - c_k = 0$ có t nghiệm $r_1, r_2, \ldots, r_t$ bội tương ứng $m_1, m_2,,..., m_t$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$ nếu và chỉ nếu

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})\, r_1^n$$

$$+ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \ldots + \alpha_{2,\, m_2-1}n^{m_2-1})\, r_2^n$$

$$+ ... + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \ldots + \alpha_{t,\, m_t-1}n^{m_t-1})\, r_t^n$$

với $n = 0, 1, 2,...$, trong đó $\alpha_{i,j}$ là các hằng số, $1 \le i \le t$, $0 \le j \le m_i - 1$.

✓ **Ví dụ 4.3.6** Giả sử phương trình đặc trưng của một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất có các nghiệm là 2, 2, 2, 5, 5, 9. Viết công thức biểu diễn nghiệm của hệ thức truy hồi này.

Giải: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy có ba nghiệm $r_1 = 2$, $r_2 = 5$ và $r_3 = 9$ tương ứng bội 3, 2 và 1. Ở đây nghiệm $r_1 = 2$ bội 3, nghiệm $r_2 = 5$ bội 2 và $r_3 = 9$ bội 1 (nghiệm đơn). Áp dụng Định lý 4.3.4 ta có công thức biểu diễn nghiệm của hệ thức truy hồi là

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n.$$

✓ **Ví dụ 4.3.7** Tìm một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, $n \ge 3$, với $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$.

Giải: Phương trình đặc trưng $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$ có một nghiệm là $r = -1$ bội 3. Áp dụng Định lý 4.3.4, thì dãy

$\{a_{\mathrm{n}}\}$ với $a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)(-1)^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi. Từ điều kiện đầu ta có

$$\alpha_{1,0} = 1,$$
$$(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2})(-1)^1 = -2,$$
$$(\alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2})(-1)^2 = -1,$$

Giải hệ này ta được $\alpha_{1,0} = 1$, $\alpha_{1,1} = 3$ và $\alpha_{1,2} = -2$. Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện đầu của hệ thức truy hồi đã cho.

❖ Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất

Một *hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất* (linear nonhomogeneous recurrence relation) cho một dãy $\{a_n\}$ là một hệ thức truy hồi trong đó số hạng a_n không chỉ phụ thuộc tuyến tính vào các số hạng đi trước nó mà còn phụ thuộc vào một hàm số như định nghĩa sau.

▪ **Định nghĩa 4.3.2** Giả sử k là một số tự nhiên khác 0. Một hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc k là hệ thức truy hồi có dạng

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k} + F(n), \qquad (3)$$

trong đó $c_1, c_2, ..., c_k$ là các hằng số thực, $c_k \neq 0$, $F(n)$ là một hàm số không đồng nhất với 0 và chỉ phụ thuộc vào n. Hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$ được gọi là *hệ* *thức truy hồi thuần nhất kết hợp* (associated homogeneous recurrence relation).

✓ **Ví dụ 4.3.8** Các hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2^n$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$, $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$ và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$ là các hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất. Các hệ thức $a_n = a_{n-1}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_n = 3a_{n-1}$ và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ tương ứng là những hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất kết hợp của chúng.

Các định lý đã nêu ở trên không áp dụng được để tìm nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất. Tuy nhiên, có thể tổ hợp các nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất để tìm công thức biểu diễn mọi nghiệm của nó như định lý sau.

▪ **Định lý 4.3.5** Nếu $\{a_n^{(p)}\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k} + F(n)$, thì mọi nghiệm của nó đều có dạng $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, trong đó $\{a_n^{(h)}\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính kết hợp $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}$.

Chứng minh: Vì $\{a_n^{(p)}\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất (3), nên ta có

$$a_n^{(p)} = c_1a_{n-1}^{(p)} + c_2a_{n-2}^{(p)} + ... + c_ka_{n-k}^{(p)} + F(n).$$

Giả sử $\{b_n\}$ là một nghiệm bất kỳ của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất, thì

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \dots + c_k b_{n-k} + F(n).$$

Trừ vế theo vế của phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất ta có:

$$b_n - a_n^{(p)} = c_1(b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2(b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \dots + c_k(b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)}).$$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ dãy $\{a_n^{(h)}\}$ với $a_n^{(h)} = b_n - a_n^{(p)}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến kết hợp $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$. Từ đó suy ra dãy $\{b_n\}$ với $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất. Định lý đã được chứng minh.

Để ứng dụng Định lý 4.3.5 vào việc giải một hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất cần phải tìm được một nghiệm nào đó của nó. Nghiệm này phụ thuộc vào hàm $F(n)$. Chúng ta không có phương pháp tổng quát để tìm một nghiệm như vậy cho mọi dạng bất kỳ của $F(n)$. Tuy nhiên, chúng ta có phương pháp riêng cho một số lớp hàm số $F(n)$ cụ thể, chẳng hạn như đa thức hay lũy thừa của một hằng số. Chúng ta xét một số ví dụ sau.

✓ **Ví dụ 4.3.9** Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1}+2n$. Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu $a_1 = 3$.

Giải: Nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính kết hợp $a_n = 3a_{n-1}$ là $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, α là hằng số. Vì $F(n) = 2n$ là một đa thức bậc nhất của n nên một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất đã cho có dạng $a_n^{(p)} = cn + d$, trong đó c, d là hằng số. Từ đó, ta có $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$ hay $(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0$, với mọi $n \geq 1$. Đẳng thức này kéo theo $2 + 2c = 0$ và $2d - 3c = 0$, suy ra $c = -1$ và $d = -3/2$. Vậy, $a_n^{(p)} = -n - 3/2$. Theo Định lý 4.3.5 tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho có dạng

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - 3/2 + \alpha 3^n.$$

Một nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu $a_1 = 3$ nếu $a_1 = 3 = -1-3/2+3\alpha$. Từ đó $\alpha = 11/6$. Vậy nghiệm thỏa mãn điều kiện đầu là $a_n = -n - 3/2 + (11/6)3^n$.

✓ **Ví dụ 4.3.10** Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$.

Giải: Nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính kết hợp $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ là $a_n^{(h)} = \alpha_1.3^n + \alpha_2.2^n$, trong đó α_1 và α_2 là các hằng số. Vì $F(n) = 7^n$ là một lũy thừa bậc n của một hằng số nên một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất đã cho có dạng $a_n^{(p)} = c\cdot 7^n$, trong đó c là hằng số. Từ đó ta có $c\cdot 7^n = 5c\cdot 7^{n-1} - 6c\cdot 7^{n-2} + 7^n$ hay $49c = 35c - 6c + 49$ nên $20c = 49$ và $c = 49/20$. Vậy $a_n^{(p)} = (49/20)\cdot 7^n$. Theo

Định lý 4.3.5 tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho có dạng

$$a_n = \alpha_1.3^n + \alpha_2.2^n + (49/20)\cdot 7^n.$$

Như đã trình bày ở trên, chúng ta không có phương pháp tổng quát để tìm một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất với hàm $F(n)$ bất kỳ. Tuy nhiên, những hệ thức truy hồi với $F(n)$ là một tích của một đa thức và một lũy thừa của một hằng số thì một nghiệm của hệ thức truy hồi này có thể được tính toán nhờ định lý sau.

- **Định lý 4.3.6** Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy được biểu diễn bởi hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k} + F(n)$, trong đó $F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_1n + b_0)s^n$, $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_0, b_1, \ldots, b_t$ và s là các số thực. Khi đó

1. Nếu s không phải là một nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất kết hợp thì hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất có một nghiệm dạng

$$(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)s^n$$

2. Nếu s là một nghiệm bội m của phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất kết hợp thì hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất có một nghiệm dạng

$$n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)s^n$$

Chứng minh Định lý 4.3.6 được coi như một bài tập dành cho người đọc.

✓ **Ví dụ 4.3.11** Cho hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + F(n)$ hãy tìm một nghiệm của nó tương ứng với $F(n) = 3^n$, $F(n) = n3^n$, $F(n) = n^2 2^n$ và $F(n) = (n^2 + 1)3^n$.

Giải: Dễ thấy phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$ của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất kết hợp có một nghiệm bằng 3 bội 2 (nghiệm kép là 3). Áp dụng Định lý 4.3.6 ta có:

1. Khi $F(n) = 3^n$, một nghiệm của $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3^n$ có dạng $n^2 p_0 3^n$.
2. Khi $F(n) = n3^n$, một nghiệm của $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n3^n$ có dạng $n^2(p_1 n + p_0)3^n$.
3. Khi $F(n) = n^2 2^n$, do 2 không phải là một nghiệm của phương trình đặc trưng nên một nghiệm của $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n^2 2^n$ có dạng $(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$.
4. Khi $F(n) = (n^2 + 1)3^n$, một nghiệm của $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (n^2 + 1)3^n$ có dạng $n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)3^n$.

✓ **Ví dụ 4.3.12** Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + n$ với điều kiện đầu $a_1 = 1$.

Giải: Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất kết hợp là $a_n = a_{n-1}$. Phương trình đặc trưng r-1 = 0 của nó có một nghiệm r = 1. Nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất kết hợp là $a_n^{(h)} = \alpha 1^n = \alpha$, trong đó α là hằng số. Theo Định lý 4.3.6, vì $F(n) = n = n.1^n$, ở đây s = 1, nên một nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất đã cho là $a_n^{(p)} = n(p_1n + p_0) = p_1n^2 + p_0n$. Vì vậy, $p_1n^2 + p_0n = p_1(n-1)^2 + p_0(n-1) + n$ với mọi $n \geq 1$ hay $n(2p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó suy ra $(2p_1 - 1) = 0$ và $(p_0 - p_1) = 0$ hay $p_1 = p_0 = 1/2$. Nên $a_n^{(p)} = n^2/2 + n/2$.

Theo Định lý 4.3.5, thì nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + n$ đã cho là dãy $\{a_n\}$ có dạng

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = n^2/2 + n/2 + \alpha.$$

Từ điều kiện đầu $a_1 = 1$, ta có $1 = 1/2 + 1/2 + \alpha$. Suy ra $\alpha = 0$. Vì vậy, một nghiệm $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện đầu là $a_n = n^2/2 + n/2 = n(n+1)/2$ với mọi $n \geq 1$.

4.4 Hệ thức truy hồi chia để trị

Một trong những phương pháp quan trọng được ứng dụng để thiết kế các giải thuật trong Khoa học Máy tính là phương pháp *chia để trị* (divide-and-conquer). Một giải thuật được thiết kế bằng phương pháp chia để trị để giải một bài toán chia bài toán đó thành nhiều bài toán con, giải các bài toán con và kết hợp các lời giải của các bài toán con để được lời giải bài toán đã cho.

Trong rất nhiều trường hợp, cách thức tìm lời giải các bài toán con là hoàn toàn tương tự như đối với bài toán ban đầu. Vì vậy, *kỹ thuật đệ quy* (recursive technology) thường được áp dụng để hiện thực giải thuật được thiết kế bằng phương pháp chia để trị. Vì *giải thuật đệ qui* (recursive algorithm) giải một bài toán bằng cách dùng chính nó để giải các bài toán con, nên công thức tính toán độ phức tạp thời gian nói chung cũng như tính toán số các phép toán nói riêng của nó phải được biểu diễn bởi một hệ thức truy hồi.

Một hệ thức truy hồi được thiết lập cho việc giải một bài toán bằng phương pháp chia để trị nói chung hoặc biểu diễn thời gian chạy của một giải thuật được thiết kế bằng kỹ thuật chia để trị nói riêng được gọi là *hệ thức truy hồi chia để trị* (divide-and-conquer recurrence relation). Hệ thức truy hồi chia để trị được định nghĩa một cách hình thức như sau.

▪ **Định nghĩa 4.4.1** Giả sử $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm số không âm đối số n nguyên dương. Một hệ thức truy hồi dạng

$$f(n) = af(n/b) + g(n),$$

trong đó a và b là các số nguyên dương, được gọi là hệ thức truy hồi chia để trị.

✓ **Ví dụ 4.4.1**

1. Giả sử n là một số chẵn, thì $f(n) = f(n/2) + 1$ là một hệ thức truy hồi chia để trị để tính toán giá trị của

$f(n)$ như là tổng của $f(n/2)$ với 1. Nghĩa là, giá trị của hàm f ứng với một giá trị của đối số được tính toán bằng cách tính giá trị của f ứng với giá trị của đối số đã được chia 2 sau đó cộng thêm 1.

2. Giả sử n là một số chẵn, thì $f(n) = 2f(n/2) + n$ và $f(n) = 7f(n/2) + 15n^2/4$ là các hệ thức truy hồi chia để trị để tính $f(n)$ thông qua việc tính $f(n/2)$ và một hàm $g(n)$. Ở đây $g(n)$ tương ứng là n và $15n^2/4$.

✓ **Ví dụ 4.4.2** Chúng ta có thể dùng giải thuật sau đây để tìm phần tử lớn nhất trong một dãy n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nếu $n = 1$, phần tử lớn nhất là a_1. Nếu $n > 1$, chia dãy thành 2 phần có cùng số phần tử hoặc phần này có nhiều hơn phần kia một phần tử. Tìm phần tử lớn nhất trong dãy thứ nhất, tìm phần tử lớn nhất trong dãy thứ 2. So sánh hai phần tử lớn nhất đã tìm được để xác định phần tử lớn nhất của dãy ban đầu (dãy n phần tử).

Giả sử n là một số chẵn, chúng ta có thể biểu diễn số phép so sánh cần để tìm phần tử lớn nhất trong giải thuật bằng một hệ thức truy hồi chia để trị. Thật vậy, gọi $f(n)$ là số phép so sánh để tìm phần tử lớn nhất trong dãy n phần tử, khi đó số phép so sánh trong dãy $n/2$ phần tử đầu tiên là $f(n/2)$, số phép so sánh trong dãy $n/2$ phần tử kế tiếp là $f(n/2)$. Số phép so sánh trong giải thuật bằng số phép so sánh để tìm phần tử lớn nhất trong phần thứ nhất của dãy cộng với số phép so sánh để tìm phần tử lớn nhất trong phần thứ hai của dãy cộng

2. Số 2 được cộng là được đếm từ phép so sánh n với 1 và phép so sánh số nào lớn hơn trong hai số lớn nhất tương ứng trong hai dãy $n/2$ phần tử được xác định ở bước trước. Vì vậy, ta có hệ thức truy hồi $f(n) = 2f(n/2)+2$.

Đánh giá, ước lượng giá trị của hàm được biểu diễn bởi hệ thức truy hồi chia để trị có nhiều ý nghĩa trong việc ước lượng thời gian chạy của các giải thuật đệ qui cũng như giải thuật được thiết kế bằng phương pháp chia để trị, trước tiên chúng ta có bổ đề sau.

Bổ đề 4.4.1 Giả sử a, b, k, n là các số tự nhiên, $n = b^k$ và $f(n)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $f(n) = af(n/b) + g(n)$ thì

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

Chứng minh: Từ hệ thức truy hồi của $f(n)$, ta có

$$\begin{aligned} f(n) &= af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\ &= a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right) + ag\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\ &= a^3 f\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2 g\left(\frac{n}{b^2}\right) + ag\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\ &\dots \\ &= a^k f\left(\frac{n}{b^k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right). \end{aligned}$$

Vì $n = b^k$, nên $n/b^k = 1$, ta suy ra $f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right)$.

Sử dụng kết quả của bổ trên, chúng ta chứng minh định lý sau đây để làm cơ sở cho việc ước lượng một lớp các hàm được biểu diễn bởi các hệ thức truy hồi chia để trị có nhiều ứng dụng trong Khoa học Máy tính.

- **Định lý 4.4.1** Giả sử *a*, *b*, *n* là các số nguyên dương, $a \geq 1$, $b > 1$, *c* là số thực dương và *f* là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$f(n) = af(n/b) + c,$$

với mọi *n* chia hết cho *b*, thì

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}), & \text{khi } a > 1 \\ O(\log_2 n), & \text{khi } a = 1. \end{cases}$$

Chứng minh: Trước hết chúng ta xét trường hợp $a = 1$. Khi đó, từ kết quả của Bổ đề 4.4.1 và với $g(n) = c$ ta có

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c = a^k f(1) + c\sum_{j=0}^{k-1} a^j = f(1) + ck.$$

Nếu có số nguyên dương *k* sao cho $n = b^k$, thì $k = \log_b n$, nên $f(n) = f(1) + c\log_b n \leq f(1) + c\log_2 n = O(\log_2 n)$

Nếu *n* không phải là lũy thừa của *b* thì có số nguyên *k* sao cho $b^k < n < b^{k+1}$. Vì f là hàm tăng nên $f(n) \le f(b^{k+1}) = f(1) + c(k+1) = (f(1)+c) + ck < (f(1)+c) + c\log_b n \le (f(1)+c) + c\log_2 n = O(\log_2 n)$.

Khi $a > 1$, từ công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân, ta có

$$f(n) = a^k f(1) + \frac{c(a^k - 1)}{a-1}$$

$$= a^k\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] - \frac{c}{a-1}$$

Nếu có số nguyên dương k sao cho $n = b^k$, thì $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$. Đặt $C_1 = f(1) + \frac{c}{a-1}$ và $C = -\frac{c}{a-1}$, ta có thể viết $f(n)$ dưới dạng

$$f(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2 = O(n^{\log_b a})$$

Nếu n không phải là lũy thừa của b thì có số nguyên k sao cho $b^k < n < b^{k+1}$. Vì f là hàm tăng nên

$$f(n) \le f(b^{k+1}) = C_1 a^{k+1} + C_2$$

$$\le (C_1 a)a^{\log_b n} + C_2$$

$$= (C_1 a)n^{\log_b a} + C_2 = O(n^{\log_b a}).$$

Kết hợp các trường hợp đã xét, ta có chứng minh của định lý.

✓ **Ví dụ 4.4.3** Cho $f(n) = 5f(n/2) + 3$ và $f(1) = 7$. Tìm $f(2^k)$ và đánh giá hàm $f(n)$ nếu f là một hàm tăng, trong đó k là một số nguyên dương.

Giải: Ở đây, $a = 5 > 1$, $b = 2$ và $c = 3$, áp dụng kết quả chứng minh định lý trên ta có

$$f(2^k) = a^k\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] - \frac{c}{a-1} = 5^k(7 + 3/4) - 3/4 = 5^k.(31/4) - 3/4,$$

$$f(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_2 5}).$$

✓ **Ví dụ 4.4.4** Giả sử hàm f tăng và được biểu diễn bởi hệ thức truy hồi $f(n) = f(n/2) + 2$ khi n chẵn. Hãy ước lượng giá trị của $f(n)$.

Giải: Ở đây, $a = 1$, $b = 2$, áp dụng kết quả của Định lý 4.4.1, ta có $f(n) = O(\log_2 n)$.

✓ **Ví dụ 4.4.5** Ước lượng số phép toán so sánh trong giải thuật tìm phần tử lớn nhất của một dãy được biểu diễn bởi hệ thức truy hồi $f(n) = 2f(n/2) + 2$ (trong Ví dụ 4.4.2).

Giải: Ở đây, $a = 2$, $b = 2$, áp dụng Định lý 4.4.1 ta có

$$f(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_2 2}) = O(n).$$

Bây giờ, chúng ta mở rộng định lý 4.4.1 để có thể đánh giá cho một lớp hàm số khái quát hơn được biểu diễn bởi một hệ thức truy hồi chia để trị như dưới đây.

▪ **Định lý 4.4.2** Giả sử *a, b* là các số nguyên dương, $a \geq 1$, $b > 1$, *c* là các số thực dương, *d* là số thực không âm và *f* là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$f(n) = af(n/b) + cn^d$$

với *n* là một lũy thừa số mũ nguyên dương của *b,* thì

$$f(n) = \begin{cases} O(n^d), \text{ khi } a < b^d \\ O(n^d \log_2 n), \text{ khi } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}), \text{ khi } a > b^d. \end{cases}$$

Chứng minh định lý này là tương tự như đối với Định lý 4.4.1 và được coi như môt bài tập dành cho người đọc.

✓ **Ví dụ 4.4.6** Giả sử *c* là một số dương, ước lượng giá trị của *f*(*n*) nếu *f*(*n*) tăng khi *n* chẵn và được biểu diễn bởi hệ thức truy hồi $f(n) = 3f(n/2) + cn$.

Giải: Áp dụng Định lý 4.4.2 với $a = 3$, $b = 2$, $d = 1$. Vì $a = 3 > 2^1 = b^d$ nên ta có

$$f(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_2 3}).$$

✓ **Ví dụ 4.4.7** Ước lượng giá trị của *f*(*n*) nếu *f*(*n*) tăng khi *n* chẵn và được biểu diễn bởi hệ thức truy hồi $f(n) = 2f(n/2) + 7n$.

Giải: Áp dụng Định lý 4.4.2 với $a = 2$, $b = 2$, $d = 1$. Vì $a = 2 = 2^1 = b^d$ nên ta có

$$f(n) = O(n^d \log_2 n) = O(n \log_2 n).$$

BÀI TẬP

1. Tìm 5 số hạng đầu tiên được xác định bởi mỗi hệ thức truy hồi sau:

a. $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$.

b. $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

c. $a_n = na_{n-1} + n^2a_{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

2. Cho hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$. Mỗi dãy $\{a_n\}$ sau đây có phải là một nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho hay không?.

a. $a_n = 0$.

b. $a_n = (-4)^n$.

c. $a_n = 2(-4)^n+3$.

3. Một máy bán tem tự động chỉ nhận các đồng xu 1$ và các tờ tiền 1$ và 5$.

a. Hãy tìm hệ thức truy hồi tính số các đặt *n* $ vào máy bán hàng, trong đó thứ tự đặt các đồng xu và các tờ tiền vào máy là quan trọng.

b. Tìm điều kiện đầu của hệ thức truy hồi.

c. Có bao nhiêu cách đặt 10 $ vào máy để mua một bộ tem.

4. Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số các hoán vị của *n* phần tử.

5. Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số xâu nhị phân độ dài *n*, chứa 2 số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu độ dài 7.

6. Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số xâu nhị phân độ dài *n*, không chứa 3 số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu độ dài 11.

7. Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số xâu nhị phân độ dài *n* có một số chẵn bits 0.

8. Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số tập con của tập hợp *n* phần tử.

9. Cho một dãy *n* đồng xu có giá trị tương ứng là $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Giả sử chúng ta nhặt được một số đồng xu sao cho tổng giá trị lớn nhất mà không có 2 đồng xu nào kề nhau.

a. Hãy tìm hệ thức truy hồi để tính tổng giá trị lớn nhất của các đồng xu nhặt được ở trên.

b. Tìm điều kiện đầu của hệ thức truy hồi.

10. Giải các hệ thức truy hồi:

a. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.

b. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

c. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.

d. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$.

11. Giải hệ các thức truy hồi:

a. $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 3$.

b. $a_n = a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 2$.

c. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

d. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.

e. $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

f. $a_n = 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$.

g. $a_n = a_{n-2} /4$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

12. Giải các hệ thức truy hồi:

a. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, và $a_2 = 0$.

b. $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.

c. $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

13. Xác định dạng tổng quát nghiệm của hệ thức truy hồi nếu phương trình đặc trưng của nó có các nghiệm 1, 1, 1, 1,−2,−2,−2, 3, 3,−4.

14. Xác định dạng tổng quát nghiệm của hệ thức truy hồi nếu phương trình đặc trưng của nó có các nghiệm −1,−1,−1, 2, 2, 5, 5, 7.

15. Giải các hệ thức truy hồi:

a. $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = -5$, $a_1 = 4$, $a_2 = 88$.

b. $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, $n \geq 3$, $a_0 = 5$, $a_1 = -9$, $a_2 = 15$.

16. Cho hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$.

a. Chỉ ra rằng $a_n = -2^{n+1}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi này.

b. Sử dụng Định lý 4.3.5 để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c. Tìm nghiệm với $a_0 = 1$.

17. Cho hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$.

a. Chỉ ra rằng $a_n = n2^n$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi này.

b. Sử dụng Định lý 4.3.5 để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c. Tìm nghiệm với $a_0 = 2$.

18. Cho hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$.

a. Xác định các hằng số A và B sao cho $a_n = An + B$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

b. Sử dụng Định lý 4.3.5 để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c. Tìm nghiệm với $a_0 = 4$.

19. Cho hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$.

a. Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

b. Tìm nghiệm với $a_1 = 4$.

20. Cho hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$.

a. Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

b. Tìm nghiệm với $a_1 = 5$.

21. Cho hệ thức truy hồi $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42\cdot 4^n$.

a. Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

b. Tìm nghiệm với $a_1 = 56$ và $a_2 = 278$.

22. Cho hệ thức truy hồi $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n4^n$

a. Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

b. Tìm nghiệm với $a_0 = -2$, $a_1 = 0$, and $a_2 = 5$.

23. Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (n + 1)2^n$.

24. Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + n^2 4^n$.

25. Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$. (hướng dẫn: Trước hết, tìm một nghiệm có dạng $qn2^n + p_1 n + p_2$, trong đó q, p_1 và p_2 là các hằng số).

26. Giả sử $f(n) = 2f(n/2) + 3$ khi n là một số chẵn dương và $f(1) = 5$. Tìm $f(2)$, $f(8)$, $f(64)$ và $f(1024)$.

27. Tìm $f(n)$ khi $n = 3^k$, trong đó $f(n) = 2f(n/3) + 4$ và $f(1) = 1$. Ước lượng giá trị của $f(n)$ khi f là hàm tăng.

28. Giả sử $n = 4^k$ và $f(n) = 5f(n/4) + 6n$. Ước lượng $f(n)$ khi f tăng. Tính $f(n)$ nếu $f(1) =1$.

29. Giả sử $n = 2^k$ và $f(n) = 8f(n/2) + n^2$. Ước lượng $f(n)$ khi f tăng. Tính $f(n)$ nếu $f(1) =1$.

30. Thiết lập một hệ thức truy hồi để tính số phép nhân khi thực hiện phép lấy lũy thừa x^n, trong đó x là số thực và n là số nguyên dương. Ước lượng số phép nhân từ hệ thức truy hồi đã được thiết lập.

31. Giả sử hàm f thỏa mãn hệ thức truy hồi $f(n) = 2f(\sqrt{n}) + 1$ khi n là một lũy thừa của 2 và $f(2) = 1$.

a. Tìm $f(16)$.

b. Ước lượng giá trị $f(n)$

Chương 5

QUAN HỆ

Lý thuyết toán học về các quan hệ là cơ sở cho nhiều ứng dụng trong khoa học và thực tiễn. Trong Khoa học Máy tính, quan hệ là nền tảng để để xây dựng các hệ thống thông tin nói chung và hệ thống cơ sở dữ liệu nói riêng. Chẳng hạn, cơ sở dữ liệu quan hệ được sử dụng rất rộng rãi hiện nay được phát triển dựa trên lý thuyết quan hệ nhiều ngôi của các tập *thuộc tính* (attribute) của các đối tượng trong thực tế.

Phần 5.1 trình bày về khái niệm và tính chất quan hệ hai ngôi. Phần 5.2 giới thiệu hai cách biểu diễn các quan hệ hai ngôi hữu hạn dựa trên ma trận và đồ thị có hướng, làm cơ sở để lưu trữ và xử lý chúng trên máy tính. Phần 5.3 trình bày quan hệ nhiều ngôi, cách thức biểu diễn và truy vấn thông tin dựa trên các quan hệ nhiều ngôi trong các cơ sở dữ liệu thực tế. Phần 5.4 và 5.5 giới thiệu quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự, đây là những loại quan hệ có nhiều ứng dụng trong khoa học và thực tiễn. Cuối cùng, phần 5.6 trình bày khái niệm về dàn như một dạng quan hệ thứ tự đặc biệt có thể được ứng dụng để biểu diễn các tập hợp có thứ tự đặc thù trong toán học cũng như khoa học máy tính.

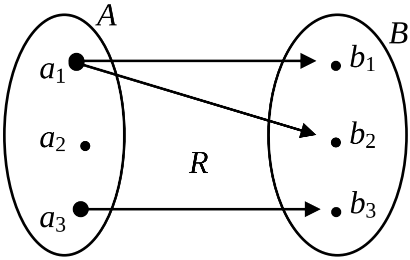
5.1 Khái niệm và tính chất quan hệ hai ngôi

Trong thực tế, một cặp đối tượng có một mối liên hệ nào đó ta nói giữa chúng có một quan hệ. Trong toán học, có nhiều quan hệ quen thuộc được sử dụng thường xuyên như quan hệ bằng, lớn hơn, nhỏ hơn giữa hai số, v.v. Những quan hệ như vậy được gọi là quan hệ hai ngôi. Quan hệ hai ngôi được định nghĩa một cách hình thức như sau.

- **Định nghĩa 5.1.1** Giả sử A và B là hai tập hợp, một *quan hệ hai ngôi* (binary relation) từ A đến B là một tập hợp con R của $A \times B$.

Như vậy, một quan hệ hai ngôi từ tập hợp A đến tập hợp B là một tập hợp con R gồm các cặp (a, b) có thứ tự của tích Descartes của A và B. Khi $(a, b) \in R$ ta nói a quan hệ R với b và viết $a\ R\ b$. Một quan hệ hai ngôi R được gọi là hữu hạn nếu tập hợp R là hữu hạn, ngược lại ta nói R là quan hệ hai ngôi vô hạn. Một quan hệ hai ngôi từ A đến A được gọi đơn giản là quan hệ hai ngôi trên A. Chúng ta cũng lưu ý rằng, một ánh xạ f từ A đến B cũng là một quan hệ, tuy nhiên điều ngược lại không đúng. Nói cách khác ánh xạ là trường hợp đặc biệt của quan hệ.

Hình 5.1.1 biểu thị một cách trực quan về một số phần tử trong tập hợp A quan hệ R với một số phần tử trong tập hợp B



Hình 5.1.1: Các phần tử của A quan hệ R với các phần tử của B

✓ **Ví dụ 5.1.1**

1. Cho A = {1, 2, 3, 4} và B = {3, 5}. Khi đó R = {(1, 4), (1, 5), (3, 3) (3, 5)} là một quan hệ hai ngôi từ A đến B, vì $R \subset A \times B$.

2. Giả sử S là tập các sinh viên khoa CNTT của một trường đại học, C là tập các môn học trong chương trình đại học ngành Khoa học Máy tính được mở cho sinh viên đăng ký học trong học kỳ 4. Khi đó, quan hệ "sinh viên đăng ký môn học" là tập hợp $R = \{(a, b) | \ a \in S, \ b \in C$ và a đăng ký học môn $b\}$. Nếu có (Nguyễn An Hà, CS518) $\in R$ ta nói sinh viên Nguyễn An Hà đăng ký môn học CS518.

✓ **Ví dụ 5.1.2** Một số quan hệ hai ngôi trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$.

1. $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$.

2. $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$.

3. $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \vee a = -b\}$.

4. $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$.

5. $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$.

6. $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$.

✓ **Ví dụ 5.1.3** Giả sử n là một số nguyên dương, ta định nghĩa quan hệ hai ngôi R trên tập hợp $\mathbb{Z}$ sao cho $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a\ R\ b \Leftrightarrow a - b$ chia hết cho n, thì R là một quan hệ hai ngôn trên $\mathbb{Z}$. Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư modulo n trên $\mathbb{Z}$, vì khi a quan hệ R với b thì a và b chia cho n có cùng số dư. Nếu $a\ R\ b$ thì ta viết $a \equiv b\ (mod\ n)$. Chẳng hạn, với n = 5, thì 2 R 7 vì 2 - 7 chia hết cho 5, nghĩa là $2 \equiv 7\ (mod\ 5)$.

✓ **Ví dụ 5.1.4** Có bao nhiêu quan hệ hai ngôi trên tập n phần tử?

Giải: Giả sử A là một tập hợp có n phần tử. Một quan hệ trên tập hợp A là một tập con của tập $A \times A$. Bởi vì $A \times A$ có n^2 phần tử nên số tập con của $A \times A$ là 2^{n^2}. Vì vậy, có 2^{n^2} quan hệ trên tập hợp A có n phần tử.

Các quan hệ hai ngôi trên cùng một tập hợp các đối tượng có thể có những tính chất riêng như tính phản xạ, đối xứng, phản đối xứng hay bắc cầu, đó là những tính chất được ứng dụng nhiều trong việc tổ chức, biểu diễn và xử lý thông tin trong các hệ thống cơ sở dữ liệu. Các quan hệ hai ngôi có tính phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu lần lượt được định nghĩa dưới đây.

▪ **Định nghĩa 5.1.2** Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A được gọi là có *tính phản xạ* (reflexive) nếu $\forall a \in A$ thì $a\ R\ a$.

✓ **Ví dụ 5.1.5**

1. Quan hệ "=" trên tập hợp số bất kỳ là có tính phản xạ vì mọi số đều bằng chính nó.

2. Quan hệ "≤" trên các tập hợp số N, Z, Q, R là có tính phản xạ vì mọi số trong N, Z, Q, R đều nhỏ hơn hoặc bằng chính nó.

3. Quan hệ đồng dư mô modulo n trên Z trong Ví dụ 5.1.3 là có tính phản xạ vì mọi số đều đồng dư với chính nó theo modulo n.

✓ **Ví dụ 5.1.6** Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, thì quan hệ $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ trên A là có tính phản xạ, vì rõ ràng mọi phần tử thuộc A đều quan hệ R_1 với chính nó. Trong khi đó quan hệ $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ trên A không có tính phản xạ, vì $(3, 3) \notin R_2$. Nói cách khác, quan hệ R_2 trên A không có tính phản xạ, vì có phần tử 3 thuộc A không quan hệ R_2 với chính nó.

▪ **Định nghĩa 5.1.3** Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A

được gọi là có *tính đối xứng* (symmetric) nếu $\forall a, b \in A$ và $a\ R\ b$ thì $b\ R\ a$.

✓ **Ví dụ 5.1.7**

1. Quan hệ "=" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là có tính đối xứng, vì với hai số a, b bất kỳ nếu $a = b$ thì $b = a$.

2. Quan hệ "≤" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ không có tính đối xứng, vì với hai số a, b bất kỳ nếu $a \leq b$ thì không kéo theo $b \leq a$. Ví dụ $5 \leq 6$ không kéo theo $6 \leq 5$.

3. Quan hệ $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3,1)\}$ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng, vì rõ ràng với mọi a, $b \in A$, $(a, b) \in R$ thì cũng có $(b, a) \in R$.

▪ **Định nghĩa 5.1.4** Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A được gọi là có *tính phản đối xứng* (antisymmetric) nếu $\forall a, b \in A$, $a\ R\ b$ và $b\ R\ a$ thì $a = b$.

✓ **Ví dụ 5.1.8**

1. Quan hệ "≤" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là có tính phản đối xứng, vì với hai số a, b bất kỳ nếu $a \leq b$ và $b \leq a$ thì ta có $a = b$.

2. Quan hệ "⊆" trên các tập hợp trong một vũ trụ $\mathcal{U}$ là phản đối xứng, vì với hai tập hợp $A, B \subseteq \mathcal{U}$, nếu $A \subseteq$

B và $B \subseteq A$ thì $A = B$.

3. Quan hệ $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3,1)\}$ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ không có tính phản đối xứng, vì có $(1, 2) \in R$ và $(2,1) \in R$ nhưng $1 \neq 2$.

▪ **Định nghĩa 5.1.5** Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A được gọi là có *tính bắc cầu* (transitive) nếu $\forall a, b, c \in A$, $a\ R\ b$ và $b\ R\ c$ thì $a\ R\ c$.

✓ **Ví dụ 5.1.9**

1. Quan hệ "$\leq$" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là có tính bắc cầu, vì với ba số a, b, c bất kỳ nếu $a \leq b$ và $b \leq c$ thì ta $a \leq c$.

2. Quan hệ "$\subseteq$" trên các tập hợp trong một vũ trụ $\mathcal{U}$ là có tính bắc cầu, vì với ba tập hợp bất kỳ $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$.

3. Quan hệ $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là có tính bắc cầu, vì khi có $(2, 3), (3, 4) \in R$ thì cũng có $(2, 4) \in R$.

Chúng ta lưu ý rằng có thể có những quan hệ vừa phản xạ vừa đối xứng vừa bắc cầu như như quan hệ "=" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Hoặc có thể có những quan hệ vừa phản xạ vừa phản đối xứng vừa bắc cầu như quan hệ "$\subseteq$" trên các tập hợp trong một vũ trụ $\mathcal{U}$. Chúng ta sẽ tìm hiểu đầy đủ hơn về các tính chất của các quan hệ như vậy trong các phần sau.

5.2 Biểu diễn quan hệ hai ngôi

Đối với các quan hệ hai ngôi hữu hạn, chúng ta có thể mô tả chúng một cách trực quan và đầy đủ bằng một ma trận hoặc một biểu đồ liên kết tất cả các cặp phần tử quan hệ với nhau. Các cách biểu diễn này cũng dễ dàng được thể hiện bằng các cấu trúc dữ liệu mà máy tính có thể hiểu được.

Nếu R là một quan hệ hai ngôi từ tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến tập $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ thì có thể được biểu diễn bởi một ma trận $M_R = [r_{ij}]$, trong đó

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{khi } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Chúng ta lưu ý rằng, trật tự các phần tử của A và B tương ứng với các chỉ số hàng và cột của ma trận M_R có thể được sắp xếp một cách tùy ý. Như vậy, mỗi quan hệ hai ngôi hữu hạn từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ tương ứng với một ma trận 0-1, trong đó phần tử ở hàng i cột j của ma trận bằng 1 nếu a_i quan hệ với b_j và bằng 0 nếu ngược lại.

✓ **Ví dụ 5.2.1** Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Giả sử R là một quan hệ từ A đến B sao cho $(a, b) \in R$ nếu $a > b$. Bây giờ, nếu coi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ và $a_3 = 3$, $b_1 = 1$ và $b_2 = 2$, $b_3 = 3$,

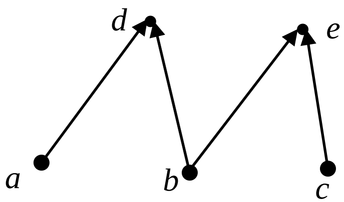
$b_4 = 4$ thì ma trận M_R biểu diễn R là

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trong M_R, $r_{21} = 1$, $r_{31} = 1$, $r_{32} = 1$ là do $(a_2, b_1) = (2, 1) \in R$, $(a_3, b_1) = (3, 1) \in R$ và $(a_3, b_2) = (3, 2) \in R$.

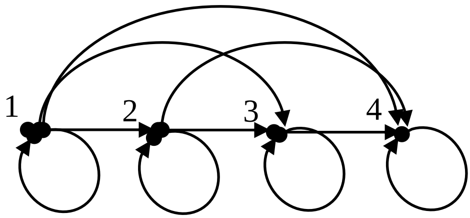
Các quan hệ hai ngôi hữu hạn từ tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến tập $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ cũng có thể được biểu diễn bởi một biểu đồ gồm $m + n$ điểm trên mặt phẳng tương ứng với $m+n$ phần tử trong A và B và một tập hợp các cung có hướng nối các cặp điểm tương ứng với a_i và a_j nếu $(a_i, a_j) \in R$. Một biểu đồ như vậy còn được gọi là một *đồ thị có hướng* (directed graph). Nếu R là một quan hệ hai ngôi trên một tập A có n phần tử thì đồ thị biểu diễn R chỉ có n điểm tương ứng với n phần tử của A.

✓ **Ví dụ 5.2.2** Cho $A = \{a, b, c\}$ và $B = \{d, e\}\}$. Giả sử $R_1 = \{(a, d), (b, d), (b, e), (c, e)\}$ là một quan hệ hai ngôi từ A đến B, thì đồ thị biểu diễn của R_1 như Hình 5.2.1.



Hình 5.2.1: Đồ thị quan hệ hai ngôi R_1

✓ **Ví dụ 5.2.3** Cho tập hợp S = {1, 2, 3, 4}, thì quan hệ hai ngôi R_2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)} trên S được biểu diễn bởi đồ thị như Hình 5.2.2.



Hình 5.2.2: Đồ thị quan hệ hai ngôi R_2

5.3 Quan hệ nhiều ngôi

Trong thực tế, các mối quan hệ có thể được hình thành bởi nhiều đối tượng. Một quan hệ liên kết nhiều đối tượng được gọi là quan hệ nhiều ngôi. Khái niệm quan hệ nhiều ngôi là mở rộng của khái niệm quan hệ hai ngôi như định nghĩa sau.

▪ **Định nghĩa 5.3.1** Giả sử A_1, A_2, ..., A_n là n tập hợp, trong đó n là một số nguyên dương. Một tập hợp con R của $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ được gọi là một quan hệ n-ngôi (n-ary relation) trên A_1, A_2, ..., A_n.

Khi $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ ta nói $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có quan hệ R và viết $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Mỗi phần tử $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ còn được gọi là một *bộ* (tuple) của nó. Nếu $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ thì ta nói R là quan hê n- ngôi trên tập A.

✓ **Ví dụ 5.3.1** Tập $R = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{N}, x^2+y^2=z^2\}$ là một quan hệ 3-ngôi trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Có thể thấy $(3, 4, 5) \in R$ và $(6, 8, 10) \in R$, vì $3^2 + 4^2 = 5^2$ và $6^2 + 8^2 = 10^2$.

✓ **Ví dụ 5.3.2** Giả sử *A, N, S, D* và *T* lần lượt là các tập hợp biểu diễn tên các hãng hàng không, số các chuyến bay, các điểm đi, điểm đến và thời gian xuất phát các chuyến bay, thì một tập con *R* các bộ 5 (a, n, s, d, t) của $A \times N \times S \times D \times T$ là một quan hệ 5-ngôi biểu diễn các chuyến bay. Chẳng hạn, (Vietnam Airlines, 963, Ho Chi Minh City, Ha noi, 15:00) $\in R$ biểu diễn một chuyến bay của hãng hàng không Vietnam Airlines, có số chuyến bay là 963, nơi đi là thành phố Hồ Chí Minh, nơi đến là thành phố Hà Nội và thời điểm khởi hành chuyến bay là 15:00.

Các quan hệ *n*-ngôi được sử dụng như là những phương tiện để biểu diễn, lưu trữ và truy xuất dữ liệu trong các *hệ thống cơ sở dữ liệu quan hệ* (relational database system), một trong những hệ thống cơ sở dữ liệu được sử dụng nhiều nhất hiện nay.

Trong cơ sở dữ liệu quan hệ, một tập đối tượng có một số tính chất hay *thuộc tính* (attribute) nào đó được biểu diễn bởi một quan hệ nhiều ngôi trên tập các thuộc tính này. Chẳng hạn, các chuyến bay có các đặc điểm đặc trưng (thuộc tính) là tên các hãng hàng không, số chuyến bay, điểm đi, điểm đến và thời gian xuất phát chuyến bay có thể được biểu diễn bởi một quan hệ 5-ngôi trên các thuộc tính này. Nếu ký hiệu các thuộc tính của mỗi chuyến bay như trong Ví dụ 5.3.2 là *A*, *N*, *S*, *D* và *T* thì trong cơ sở dữ liệu quan hệ tập các chuyến bay FLIGHT được biểu diễn bởi một quan hệ 5- ngôi trên tập thuộc tính *A*, *N*, *S*, *D* và *T* và được ký hiệu là FLIGHT(*A*, *N*, *S*, *D*, *T*).

Một quan hệ trên tập *n* thuộc tính gồm *m* phần tử (còn gọi là *m* bộ) trong cơ sở dữ liệu quan hệ được biểu diễn bởi một *bảng* (table) *m* dòng tương ứng với *m* bộ và *n* cột tương ứng với *n* thuộc tính. Ví dụ, Bảng 5.3.1 biểu diễn quan hệ FLIGHT(*A*, *N*, *S*, *D*, *T*) gồm 3 bộ thể hiện 3 chuyến bay của 3 hãng hàng không Vietnam Airlines, Vietjet Air và Jetstar, trong đó các thuộc tính *A*, *N*, *S*, *D* và *T* được ký hiệu lại tương ứng là Tên_Hãng_ HK, Số_CB, Nơi_Đi, Nơi_Đến và TG_Khởi_Hành.

Bảng 5.3.1. Quan hệ FLIGHT trong cơ sở dữ liệu quan hệ

Tên_Hãng_ HK	**Số_CB**	**Nơi_Đi**	**Nơi_Đến**	**TG Khởi_Hành**
Vietnam Airlines	963	TP. Hồ Chí Minh	Hà Nội	15:00
Vietjet Air	205	Hà Nội	TP. Hồ Chí Minh	8:00
Jetstar	452	TP. Hồ Chí Minh	Vinh	6:45

Trong cơ sở dữ liệu quan hệ, có một tập các *phép toán đại số quan hệ* (relational algebraic operation) được định nghĩa để thực hiện các thao tác xử lý, tính toán, tìm kiếm và rút trích thông tin dữ liệu. Trong tập các phép toán này có phép hợp, giao và trừ các quan hệ tương tự như các phép toán hợp, giao và trừ các tập hợp. Một số phép toán khác như phép *chọn* (selection) và *chiều* (projection) cho phép tìm và rút trích thông tin về các đối trượng trong một quan hệ. Ngoài ra, còn có các phép toán khác như tích Descartes và *kết* (join) các quan hệ cho phép tìm kiếm các mối liên hệ giữa các đối tượng trong các quan hệ khác nhau. Tập các phép toán đại số quan hệ sẽ được xem xét đầy đủ và sâu hơn trong môn học lý thuyết về các cơ sở dữ liệu. Ở đây chỉ nêu các ví dụ về phép chọn và chiếu như một minh họa đơn giản cho cách thức và khả năng ứng dụng của quan hệ nhiều ngôi vào thực tế.

Phép chọn trên một quan hệ R theo một biểu thức chọn φ, ký hiệu $\sigma_\varphi(R)$, là một quan hệ bao gồm tất cả các bộ trong quan hệ R thỏa mãn biểu thức chọn φ. Một biểu thức chọn là một mệnh đề logic kết hợp các quan hệ hai ngôi, như $=$, $>$, $\geq$, $<$, $\leq$,…, giữa các thành phần của các bộ trong quan hệ. Ngoài ra, một biểu thức chọn còn có thể là phủ định, hội hoặc tuyển của hai biểu thức chọn. Ví dụ, trên quan hệ FLIGHT ta có thể thực hiện truy vấn “tìm các chuyến bay có nơi đi là TP. Hồ Chí Minh và thời gian khởi hành sau 6:00”. Truy vấn này được thực hiện bởi phép chọn σ_φ(FLIGHT), trong đó φ = (**Nơi_Đi** = TP. Hồ Chí Minh $\wedge$ **TG_Khởi_Hành** > 6:00) và cho kết quả là một quan hệ biểu diễn các chuyến bay cần tìm như Bảng 5.3.2.

Bảng 5.3.2. Quan hệ kết quả của phép chọn σ_φ(FLIGHT)

Tên_Hãng_ HK	Số_CB	Nơi_Đi	Nơi_Đến	TG_ Khởi_Hành
Vietnam Airlines	963	TP. Hồ Chí Minh	Hà Nội	15:00
Jetstar	452	TP. Hồ Chí Minh	Vinh	6:45

Phép chiếu quan hệ *R* trên tập thuộc tính *L*, ký hiệu $\prod_L(R)$, là một quan hệ bao gồm các bộ của *R* sau khi đã loại bỏ đi các thành phần tương ứng với các thuộc tính không thuộc *L*. Ví dụ, trên quan hệ FLIGHT ta có thể thực hiện truy vấn "cho biết tên các hãng hàng không, số chuyến bay và giờ khởi hành chuyến bay của hãng đó". Truy vấn này được thực hiện bởi phép chiếu $\prod_L$(FLIGHT) trên tập hợp các thuộc tính *L* = {**Tên_Hãng_ HK**, **Số_CB**, **TG_Khởi_Hành**} và cho kết quả là một quan hệ về thông tin được rút trích từ thông tin các chuyến bay, bỏ qua nơi đi và nơi đến của chuyến bay, như Bảng 5.3.3.

Bảng 5.3.3. Quan hệ kết quả của phép chiếu $\prod_L$(FLIGHT)

Tên_Hãng_ HK	Số_CB	TG_Khởi_Hành
Vietnam Airlines	963	15:00
Vietjet Air	205	8:00
Jetstar	452	6:45

5.4 Quan hệ tương đương

Như đã lưu ý trong phần 5.1, một quan hệ hai ngôi có thể có đồng thời có cả ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Một quan hệ như vậy được gọi là *quan hệ tương đương* (equivalence relation). Các quan hệ tương đương được ứng dụng nhiều trong khoa học và thực tiễn. Chẳng hạn, trong Khoa học máy tính, quan hệ tương đương được ứng dụng để phân lớp các khóa tìm kiếm của các đối tượng trong *bảng băm* (hash table), một cấu trúc dữ liệu quan trọng cho phép tìm kiếm nhanh, được tích hợp trong các phần mềm từ điển (dictionary software). Quan hệ hai ngôi tương đương được định nghĩa như sau.

▪ **Định nghĩa 5.4.1** Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A được gọi là quan hệ tương đương nếu nó có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Chúng ta thường dùng ký hiệu ~ để biểu thị một quan hệ tương đương R trên tập hợp A. Lúc đó, nếu $a\ R\ b$ ta viết $a \sim b$ và nói a quan hệ tương đương với b.

✓ **Ví dụ 5.4.1**

1. Như đã chỉ ra trong các Ví dụ 5.1.5 và 5.1.7, quan hệ "=" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là có tính phản xạ và đối xứng. Hơn nữa, với 3 số bất kỳ a, b, c nếu $a = b$ và $b = c$ thì $a = c$, do đó quan hệ "=" cũng có tính

bắc cầu. Vì vậy, quan hệ “=” trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là quan hệ ~.

2. Quan hệ “≤” trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ không phải là quan hệ tương đương, vì quan hệ này không có tính đối xứng. Thật vậy, với 2 số bất kỳ a, b nếu $a \leq b$ thì không thể suy ra $b \leq a$. Chẳng hạn, $3 \leq 4$ không kéo theo $4 \leq 3$.

3. Chúng ta dễ dàng kiểm tra quan hệ $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ trên $A = \{1, 2, 3\}$ có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Vì vậy, R là quan hệ ~ trên A.

✓ **Ví dụ 5.4.2** Quan hệ R trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ được xác định sao cho $\forall x, y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow x\text{-}y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương.

Giải: $\forall x \in \mathbb{R}$, thì $x\text{-}x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x\ R\ x$. Nghĩa là R có tính phản xạ. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, nếu $x\ R\ y$ thì $x\text{-}y \in \mathbb{Z}$ suy ra $y\text{-}x \in \mathbb{Z}$ nên $y\ R\ x$. Do đó, R có tính đối xứng. $\forall x, y, x \in \mathbb{R}$, nếu $x\ R\ y$ và $y\ R\ z$ thì $x\text{-}y \in \mathbb{Z}$ và $y\text{-}z \in \mathbb{Z}$ suy ra $x\text{-}z = (x\text{-}y) + (y\text{-}z) \in \mathbb{Z}$ nên $x\ R\ z$. Nghĩa là R có tính bắc cầu. Vì vậy, R là một quan hệ tương đương.

✓ **Ví dụ 5.4.3** Giả sử n là một số nguyên dương, một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ được định nghĩa sao cho $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a\ R\ b$ khi và chỉ khi a - b chia hết cho n. Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$.

Giải: Nhắc lại rằng, như được lưu ý trong Ví dụ 5.1.3, quan hệ R này còn được gọi là quan hệ đồng dư modulo n. Bây giờ ta lần lượt chứng minh R có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Thật vậy, $\forall a \in \mathbb{Z}$, thì a-a = 0 chia hết cho n. Nghĩa là R có tính phản xạ. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, nếu aRb thì a-b chia hết cho n suy ra b-a = -(a-b) cũng chia hết cho n nên $b\ R\ a$. Do đó, R có tính đối xứng. $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, nếu $a\ R\ b$ và $b\ R\ c$ thì a-b chia hết cho n và b-c chia hết cho n suy ra tồn tại k và $m \in \mathbb{Z}$ sao cho a-b = $k.n$ và b-c = $m.n$ nên a-c = (a-b) + (b-c) = (k+m)n nghĩa là a-c chia hết cho n hay $a\ R\ c$. Do đó, R có tính bắc cầu. Vì vậy, quan hệ đồng dư modulo n trên $\mathbb{Z}$ là một quan hệ tương đương.

Trong một quan hệ tương đương, mỗi phần tử có một lớp các phần tử tương đương với nó. Lớp tương đương của một phần tử trong một quan hệ tương đương được định nghĩa như dưới đây.

- **Định nghĩa 5.4.2** Giả sử R là một quan hệ tương đương trên tập hợp A và $x \in A$, tập hợp $\{y \in A \,/\, y \sim x\}$ được gọi là lớp tương đương (equivalence class) của x theo quan hệ R.

Lớp tương đương của x còn được gọi là lớp tương đương chứa x, vì do tính phản xạ nên $x \sim x$ do đó x thuộc về lớp tương đương với nó. Lớp tương đương chứa x được ký hiệu là $[x]$. Tập hợp tất cả các lớp tương đương theo quan hệ R trên A được ký hiệu là $A/\sim$.

✓ **Ví dụ 5.4.4** Xét quan hệ đồng dư modulo $n = 3$ trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ trong Ví dụ 5.4.3, thì $[2] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \sim 2\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv 2 \ (mod\ 3)\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Hơn nữa, vì số dư trong phép chia một số nguyên cho 3 chỉ có thể là 0, 1 hoặc 2, nên chỉ có 3 lớp tương đương theo quan hệ đồng dư modulo 3. Do đó $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}$.

Như đã lưu ý ở trên, với một quan hệ tương đương, mọi phần tử đều thuộc về lớp tương của nó. Hơn nữa, với hai lớp tương đương bất kỳ thì chúng hoặc là bằng nhau hoặc là không giao nhau như trong định lý sau.

▪ **Định lý 5.4.1** Giả sử R là một quan hệ tương đương trên A. Khi đó

1. $\forall x \in A, x \in [x]$
2. $\forall x, y \in A, x\ R\ y \Leftrightarrow [x] = [y]$
3. Với hai lớp tương đương $[x]$ và $[y]$ sao cho $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ thì $[x] = [y]$.

Chứng minh:

1. $\forall x \in A$, do tính phản xạ nên $x \sim x$, theo định nghĩa

lớp tương đương, ta suy ra $x \in [x]$.

2. $\forall x, y \in A$, giả sử $x\,R\,y$ và $z \in [x]$ suy ra $z \sim x$ nên $z \sim y$ do đó $z \in [y]$. Vậy $[x] \subset [y]$. Lập luận tương tự ta cũng có $[y] \subset [x]$. Tư đó ta có $[x] = [y]$. Ngược lại, nếu $[x] = [y]$ thì do $x \in [x]$ nên $x \in [y]$, vì vậy $x\,R\,y$.

3. Với hai lớp tương đương $[x]$ và $[y]$, nếu $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ thì tồn tại $z \in [x] \cap [y]$, nghĩa là $z \sim x$ và $z \sim y$. Từ kết quả phần 2 ta suy ra $[x] = [z] = [y]$.

Theo kết luận của Định lý 5.4.1, chúng ta suy ra rằng các lớp tương đương trong tập hợp A theo quan hệ tương đương R hoặc là trùng nhau hoặc là không giao nhau. Hơn nữa, hợp của tất cả các lớp tương đương phân biệt theo R đúng bằng A như được phát biểu trong Định lý 5.4.2.

- **Định lý 5.4.2** Giả sử R là một quan hệ tương đương trên A, gọi $(A_i)_{i\in I}$ là họ tất cả các lớp tương đương khác nhau theo R được gán chỉ số trong tập hợp I. Khi đó

1. $A_i \cap A_j = \varnothing$, với $i \neq j$ đối với hai lớp tương tương đương bất kỳ khác nhau.

2. $A = \bigcup_{i\in I} A_i$

Chứng minh:

1. Do A_i và A_j, $i \neq j$ là hai lớp tương đương khác nhau

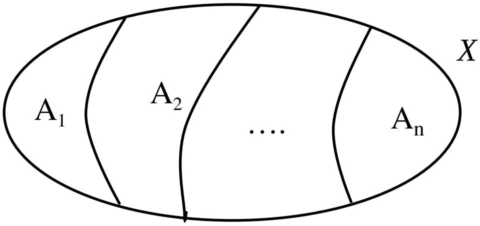
nên theo phần 3 của Định lý 5.4.1 ta suy ra $A_i \cap A_j = \varnothing$.

2. Theo giả thiết, $(A_i)_{i\in I}$ là họ tất cả các lớp tương đương khác nhau trong A, nên với mỗi $x \in A$, tồn tại $i \in I$ để $[x] = A_i$. Từ đó ta có $A = \bigcup_{x\in A}[x] = \bigcup_{i\in I} A_i$.

✓ **Ví dụ 5.4.5** Xét quan hệ đồng dư modulo n trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$. Rõ ràng, khi chia một số nguyên bất kỳ cho n thì số dư chỉ có thể là một trong các số 0, 1, …, n-1. Từ đó, tập các lớp tương đương theo quan hệ đồng dư modulo n là $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$. Hơn nữa, ta cũng dễ dàng thấy $[i] \cap [j] = \varnothing$, với $i \neq j$, $i, j \leq n-1$ và $\mathbb{Z} = [0]\cup[[1] \cup\dots\cup[n-1]$.

Quan hệ đồng dư được ứng dụng trong việc xây dựng cấu trúc dữ liệu bảng băm, một kiểu dữ liệu cho phép tìm kiếm nhanh các đối tượng theo khóa tìm kiếm của chúng. Cụ thể hơn, tập các khóa tìm kiếm của các đối tượng được phân hoạch thành một số lớp dựa trên quan hệ đồng dư bởi một *hàm băm* (hash function). Mỗi lớp khóa đối tượng được lưu trữ như một danh sách tại cùng một địa chỉ được tính toán bởi hàm băm. Việc tìm kiếm một đối tượng được thực hiện bằng cách trước hết xác định địa chỉ của khóa của đối tượng thông qua hàm băm, sau đó chỉ tìm kiếm đối tượng trên danh sách tương ứng với địa chỉ của khóa của nó thay vì tìm trên toàn bộ không gian khóa của các đối tượng. Như vậy, chính sự phân lớp đã giúp quá trình tìm kiếm nhanh hơn.

Với kết quả của Định lý 5.4.2, ta nói rằng tập hợp A được quan hệ tương R trên nó *phân hoạch* (partition) thành các lớp tương đương. Một phân hoạch của một tập hợp X là một cách chia X thành các tập con khác rỗng sao cho hai tập con bất kỳ là không giao nhau. Hình 5.4.1 biểu diễn một phân hoạch tập X thành n tập hợp con $A_1, A_2, ..., A_n$.



Hình 5.4.1: Phân hoạch tập *X* thành *n* tập hợp con

Khi một tập hợp được phân hoạch thành một họ các tập con thì tồn tại một quan hệ tương đương trên tập hợp đó sao cho mỗi tập con trong họ các tập con là một lớp tương đương như phát biểu trong định lý sau.

- **Định lý 5.4.3** Giả sử họ các tập hợp $(A_i)_{i\in I}$ được gán chỉ số theo tập hợp I là một phân hoạch của tập hợp A thì có một quan hệ tương đương R trên A sao cho $A/\sim = \{A_i |\ i \in I\}$.

Chứng minh: $\forall x, y \in A$, ta định nghĩa quan hệ hai ngôi R trên A sao cho $x\ R\ y \Leftrightarrow \exists i\in I, x, y \in A_i$ thì R là một quan hệ tương đương trên A. Thật vậy, $\forall x\in A$, do A được phân hoạch bởi họ $(A_i)_{i\in I}$ nên $\exists i\in I$ để $x \in A_i$, do đó $x\ R\ x$. Vậy, R có tính phản xạ. $\forall x, y \in A$ nếu $x\ R\ y$ thì $\exists i\in I$, $x, y \in A_i$ nên $\exists i\in I$, $y, x \in A_i$ do đó $y\ R\ x$. Vậy, R có tính đối xứng. Cuối cùng $\forall x, y, z \in A$ nếu $x\ R\ y$ và $y\ R\ z$ thì $\exists i, j\in I$, $x, y \in A_i$ và $y, z \in A_j$ suy ra $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, vì $(A_i)_{i\in I}$ là một phân hoạch nên $A_i \equiv A_j$ do đó $i = j$, vì vậy $\exists i\in I$, $x, z \in A_i$, nói cách khác $x\ R\ z$. Nghĩa là R có tính bắc cầu. Như vậy, R là một quan hệ tương đương trên A. Hơn nữa, từ định nghĩa của R, ta có $x \in A_i$ thì $[x] = A_i$. Nói cách khác $(A_i)_{i\in I}$ là tập các lớp tương đương trong A theo quan hệ R. Vì vậy, $A/\sim=\{A_i|\ i \in I\}$.

5.5 Quan hệ thứ tự

Quan hệ thứ tự là cơ sở cho nhiều ứng dụng trong khoa học và thực tiễn. Chẳng hạn, trong Khoa học Máy tính, quan hệ thứ tự có thể được sử dụng để định nghĩa các mệnh đề và vị từ cho các cấu trúc điều khiển của các chương trình. Hầu hết các giải thuật sắp xếp cũng được thiết kế dựa trên quan hệ thứ tự.

▪ **Định nghĩa 5.5.1** Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A được gọi là quan hệ thứ tự nếu nó có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

✓ **Ví dụ 5.5.1**

1. Như đã chỉ ra trong các ví dụ 5.1.5, 5.1.8 và 5.1.9, quan hệ "≤" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ có tính phản

xạ, phản đối xứng và bắc cầu. Vì vậy, quan hệ "≤" trên các tập số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là quan hệ thứ tự.

2. Như đã chỉ ra trong các ví dụ 5.1.8 và 5.1.9, quan hệ "$\subseteq$" trên các tập hợp trong một vũ trụ $\mathcal{U}$ là có tính phản đối xứng và bắc cầu. Ngoài ra, với mọi tập hợp $A \subseteq \mathcal{U}$, ta đều có $A \subseteq A$ nên quan hệ "$\subseteq$" có tính phản xạ. Vì vậy, quan hệ "$\subseteq$" trên các tập hợp trong một vũ trụ $\mathcal{U}$ là quan hệ thứ tự.

3. Chúng ta dễ dàng kiểm tra quan hệ $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ trên $A = \{1, 2, 3\}$ có tính phản xạ và bắc cầu nhưng không có tính phản đối xứng nên R không phải là quan hệ thứ tự trên A.

✓ **Ví dụ 5.5.2** Gọi R là quan hệ hai ngôi trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^+$ được xác định sao cho $\forall m, n \in \mathbb{N}^+$, $n\ R\ m \Leftrightarrow n \mid m$ (n là ước số của m). Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^+$.

Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^+$, ta có $n \mid n$ nên R có tính phản xạ. $\forall m, n \in \mathbb{N}^+$, nếu $n\ R\ m$ và $m\ R\ n$, nghĩa là $n \mid m$ và $m \mid n$. Do m và n là các số nguyên dương nên $n = m$. Vậy, R có tính phản đối xứng. $\forall m, n, p \in \mathbb{N}^+$, nếu $n\ R\ m$ và $m\ R\ p$, nghĩa là $n \mid m$ và $m \mid p$ thì $n \mid p$ hay $n\ R\ p$ nên R có tính bắc cầu. Như thế, quan hệ R có tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu nên

R là quan hệ thứ tự.

Chúng ta thường dùng ký hiệu $\preccurlyeq$ để biểu thị một quan hệ thứ tự R trên tập hợp A. Lúc đó, nếu $a\ R\ b$ ta nói "*a* bé hơn *b*" và viết $a \preccurlyeq b$. Chúng ta coi $b \succcurlyeq a$ là đồng nghĩa với $a \preccurlyeq b$ và đọc "*b* lớn hơn *a*". Chúng ta dùng ký hiệu $a \prec b$ (hay $b \succ$ a) để biểu thị quan hệ "$a \preccurlyeq b$ và $a \neq b$" và đọc là "*a* thực sự bé hơn *b*" hay "*b* thực sự lớn hơn *a*".

Chúng ta dùng ký hiệu $(A, \preccurlyeq)$ để biểu thị trên tập A có một quan hệ thứ tự $\preccurlyeq$ và đọc "*A* là một tập hợp có thứ tự" hay "*A* là một tập hợp được sắp thứ tự". Nếu B là một tập hợp con của tập hợp có thứ tự $(A, \preccurlyeq)$ thì $\preccurlyeq$ cảm sinh một thứ tự tự nhiên (cũng là hiển nhiên) trên B theo đó với $x, y \in B$, ta nói $x \preccurlyeq y$ trong B nếu $x \preccurlyeq y$ trong A. Chẳng hạn, $(\mathbb{R}, \leq)$ là một tập hợp có thứ tự, khi đó thứ tự $\leq$ cảm sinh các thứ tự tự nhiên $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Q}$.

- **Định nghĩa 5.5.2** Một tập hợp có thứ tự (A, $\preccurlyeq$) được gọi là tập hợp có thứ tự toàn phần (totally ordered set) nếu $\forall$a, b $\in$ A thì a $\preccurlyeq$ b hoặc b $\preccurlyeq$ a. Ngược lại ta nói (A, $\preccurlyeq$) là tập hợp có thứ tự bộ phận (partial ordered set).

Ta còn nói một tập hợp A có thứ tự toàn phần là một tập hợp có thứ tự sao cho hai phần tử bất kỳ trong A đều *có thể so sánh được* (comparable). Lúc này ta cũng nói thứ tự trên A là *thứ tự toàn phần*.

✓ **Ví dụ 5.5.3**

1. Các tập hợp số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ với thứ tự "≤" thông thường là những tập hợp có thứ tự toàn phần, vì với hai số x và y bất kỳ ta đều có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

2. Quan hệ thứ tự ước số "|" trên tập hợp các số nguyên dương là quan hệ thứ tự bộ phận, vì với hai số 3 và 5 ta không có 3 | 5 mà cũng không có 5 | 3. Nghĩa là, không thể so sánh được 3 và 5 theo thứ tự ước số "|" trên tập hợp các số nguyên dương.

Các quan hệ tương đương có thể phân hoạch các phần tử thành các lớp tương đương trong khi các quan hệ thứ tự có thể sắp thứ tự các phần tử một cách cục bộ hoặc toàn phần. Đối với các quan hệ thứ tự hữu hạn, thứ tự của các phần tử có thể được biểu diễn bằng một đồ thị tương tự như đồ thì biểu diễn các quan hệ hai ngôi thông thường nhưng đơn giản hơn mà ta gọi là biểu đồ Hasse. Để có thể vẽ được biểu đồ Hasse của một quan hệ thứ tự hữu hạn, hay đơn giản là của một tập hợp hữu hạn được sắp thứ tự, chúng ta cần phải xác định một phần tử có trội (lớn hơn) trực tiếp một phần tử khác hay không nhờ định nghĩa sau.

▪ **Định nghĩa 5.5.3** Cho một tập hợp có thứ tự $(A, \preccurlyeq)$ và hai phần tử x và y trong A. Ta nói y là trội trực tiếp của x (hay y đi ngay sau x) nếu y lớn hơn x và không tồn tại một phần tử z

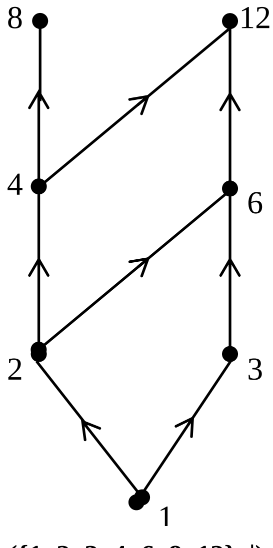
$\in A$ nào sao cho $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$ và $x \neq z \neq y$.

✓ **Ví dụ 5.5.4** Với thứ tự "≤" thông thường trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$, thì 5 là trội trực tiếp của 4 (hay 5 là đi ngay sau 4), 100 là trội trực tiếp của 99. Tuy nhiên, 100 không trội trực tiếp của 98.

▪ **Định nghĩa 5.5.4** Biểu đồ Hasse của một tập hợp hữu hạn có thứ tự $(A, \preccurlyeq)$ bao gồm một tập hợp các điểm trong mặt phẳng tương ứng với các phần tử của A, gọi là các đỉnh, và một tập các cung (cạnh) có hướng nối các cặp đỉnh sao cho với mỗi cặp phần tử x và y trong A, có một cung có hướng từ đỉnh tương ứng với x đến đỉnh tương ứng với y nếu y là trội trực tiếp của x.

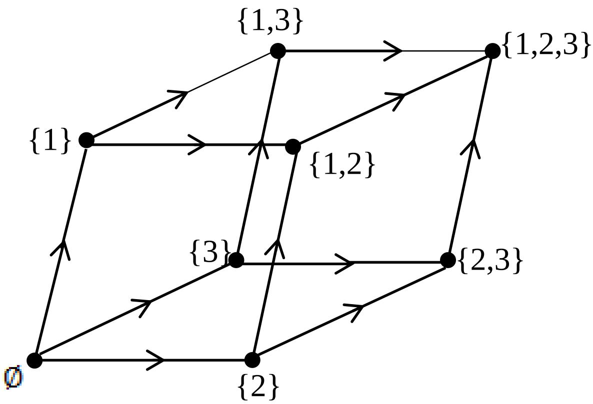
✓ **Ví dụ 5.5.5**

1. Xét tập hợp sắp thứ tự ({1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, |) với thụ tự ước số |, thì biểu đồ Hasse của nó được vẽ như Hình 5.5.1.



Hình 5.5.1: Biểu đồ Hasse của ({1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, |)

2. Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3\}$, như đã chỉ ra trong Ví dụ 5.5.1, tập hợp $\wp(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ gồm các tập hợp con của E với quan hệ $\subseteq$ cũng là một tập hợp có thứ tự. Biểu đồ Hasse của $(\wp(E), \subseteq)$ được cho như trong Hình 5.5.2.



Hình 5.5.2: Biểu đồ Hasse của $(\wp(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$

Các bài toán tối ưu trong thực tế thường dẫn đến việc phải xem xét một quan hệ thụ tự (hay một tập hợp có thứ tự) trong đó tồn tại phần tử bé nhất hay lớn nhất. Khái niệm phần tử lớn nhất và bé nhất trong một tập hợp có thứ tự được định nghĩa như sau.

- **Định nghĩa 5.5.5** Giả sử B là một tập hợp con của một tập hợp có thụ tự $(A, \preccurlyeq)$

1. Một phần tử $a \in B$ được gọi là phần tử bé (nhỏ) nhất của B nếu $\forall x \in B$ ta đều có $a \preccurlyeq x$.

2. Một phần tử $b \in B$ được gọi là phần tử lớn nhất của B nếu $\forall x \in B$ ta đều có $x \preccurlyeq b$.

✓ **Ví dụ 5.5.6** Cho tập hợp $X = \{a, b, c\}$ và $A = \wp(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, xét tập hợp có thứ tự $(A, \preccurlyeq)$, trong đó $\forall x, y \in A, x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \subseteq y$. Giả sử $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ và $C = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, thì phần tử nhỏ nhất của B là $\{a\}$, B không có phần tử lớn nhất. C không có phần tử nhỏ nhất, phần tử lớn nhất của C là $\{a, c\}$.

▪ **Định lý 5.5.1** Giả sử B là một tập hợp con của một tập hợp có thụ tự $(A, \preccurlyeq)$, phần tử bé nhất (lớn nhất) của B nếu có là duy nhất.

Chứng minh: Thật vậy, giả sử a_1 và a_2 là hai phần tử bé nhất của B, khi đó theo Định nghĩa 5.5.5 ta suy ra $a_1 \preccurlyeq a_2$ và $a_2 \preccurlyeq a_1$. Do tính phản đối xứng của quan hệ thứ tự $\preccurlyeq$ nên $a_1 = a_2$. Nghĩa là, tập B chỉ có thể có một phần tử bé nhất. Chứng minh tương tự cho phần tử lớn nhất.

▪ **Định lý 5.5.2** Mọi tập hợp hữu hạn có thứ tự toàn phần đều tồn tại phần tử bé nhất và phần tử lớn nhất.

Chứng minh: Giả sử $(A, \preccurlyeq)$ là một tập hợp hữu hạn có thứ tự, ta chứng minh $(A, \preccurlyeq)$ có phần tử bé nhất và lớn nhất bằng qui nạp. Thật vậy, nếu $A = \{a_1\}$, thì do tính phản xạ, ta có $a_1 \preccurlyeq a_1$ nên a_1 vừa là phần tử bé nhất vừa là phần tử lớn nhất của A. Nghĩa là, định lý đúng khi A có một phần tử. Giả sử định lý đúng khi A có n phần tử. Bây giờ, nếu A có n+1 phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, thì theo giả thiết qui nạp, tập hợp $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tồn tại phần tử bé nhất x và phần tử lớn nhất y. Do tập hợp $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ có thứ tự toàn phần $\preccurlyeq$, nên nếu $x \preccurlyeq a_{n+1}$ thì A có phần tử bé nhất là x, ngược lại A có phần tử bé nhất là a_{n+1}. Tương tự như vậy, nếu $a_{n+1} \preccurlyeq y$ thì A có phần tử lớn nhất là y, ngược lại A có phần tử lớn nhất là a_{n+1}. Theo nguyên lý qui nạp, định lý đúng với số phần tử n bất kỳ của A.

▪ **Định nghĩa 5.5.6** Giả sử B là một tập hợp con của một tập hợp có thự tự $(A, \preccurlyeq)$

1. Một phần tử $l \in A$ được gọi là một chặn dưới của B nếu $\forall x \in B$ ta đều có $l \preccurlyeq x$.
2. Một phần tử $u \in A$ được gọi là một chặn trên của B nếu $\forall x \in B$ ta đều có $x \preccurlyeq u$.

Xem lại Ví dụ 5.5.6 ta thấy B có hai chặn dưới là $\varnothing$ và $\{a\}$ và có một chặn trên duy nhất là $\{a, b, c\}$.

▪ **Định nghĩa 5.5.7** Giả sử B là một tập hợp con của một tập hợp có thự tự $(A, \preccurlyeq)$

1. Tập hợp B được gọi là bị chặn dưới nếu B có ít nhất một chặn dưới. Tập hợp B được gọi là bị chặn trên nếu B có ít nhất một chặn trên. Tập hợp B được gọi là bị chặn nếu B vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

2. Nếu B bị chặn dưới thì phần tử lớn nhất, nếu có, của tập hợp các chặn dưới được gọi là chặn dưới lớn nhất, ký hiệu là $infB$.

3. Nếu B bị chặn trên thì phần tử bé nhất, nếu có, của tập hợp các chặn trên được gọi là chặn trên bé nhất, ký hiệu là $supB$.

✓ **Ví dụ 5.5.7** Với tập hợp $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $C = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, $A = \wp(\{a, b, c\})$ và thứ tự đã cho như trong Ví dụ 5.5.6 thì tập hợp các chặn dưới của B là $\{\varnothing, \{a\}\}$, tập hợp các chặn trên của B là $\{\{a, b, c\}\}$. Do đó, B bị chặn và ta có $infB = \{a\}$ (là chặn dưới lớn nhất của B), $supB = \{a, b, c\}$ (là chặn trên bé nhất của B). Tập hợp các chặn dưới của C là $\{\varnothing\}$, tập hợp các chặn trên của C là $\{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Do đó, C bị chặn và ta có $infC = \varnothing$ (là chặn dưới lớn nhất của C), $supC = \{a, c\}$ (là chặn trên bé nhất của C).

▪ **Định lý 5.5.3** Giả sử B là một tập hợp con của một tập hợp có thứ tự $(A, \preccurlyeq)$. Khi đó

1. Nếu tập hợp B có phần tử bé nhất thì tồn tại $infB$ và $infB$ bằng phần tử bé nhất của B.

2. Nếu tập hợp B có phần tử lớn nhất thì tồn tại $supB$ và $supB$ bằng phần tử lớn nhất của B.

3. Nếu tồn tại $infB$ và $infB \in B$ thì tồn tại phần tử bé nhất của B và phần tử bé nhất của B bằng $infB$.

4. Nếu tồn tại $supB$ và $supB \in B$ thì tồn tại phần tử lớn nhất của B và phần tử lớn nhất của B bằng $supB$.

Chứng minh: Ta chỉ chứng minh phần 1 và 3, việc chứng minh phần 2 và 4 của định lý là tương tự và xem như một bài tập dành cho người đọc.

1. Gọi m là phần tử bé nhất của B, khi đó $\forall x \in B, m \preccurlyeq x$ nên m là một chặn dưới của B. Mặt khác vì m là phần tử bé nhất của B nên $m \in B$. Gọi y là một chặn dưới bất kỳ của B thì $\forall x \in B, y \preccurlyeq x$ do đó $y \preccurlyeq m$. Vì vậy, m là chặn dưới lớn nhất của B. Nói cách khác $m = infB$. Phần 1 của định lý được chứng minh.

2. Theo giả thiết, $infB$ tồn tại, hơn nữa do $infB$ là một chặn dưới của B nên $\forall x \in B, infB \preccurlyeq x$, kết hợp với giả thiết $infB \in B$ ta suy ra $infB$ là phần tử bé nhất của B. Phần 3 của định lý được chứng minh.

5.6 Dàn

Dàn (lattice) là quan hệ thứ tự trong đó mọi cặp phần tử đều có chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất. Trong Khoa học Máy tính, *phân cấp lớp* (class hierarchy) các đối tượng trong *cơ sở dữ liệu hướng đối tượng* (object-oriented database) có thể được tổ chức như một dàn. Dàn cũng có thể được ứng dụng để xây dựng *mô hình dòng thông tin* (model of information flow) trong các hệ thống máy tính sao cho an toàn và bảo mật. Dàn được định nghĩa như sau.

▪ **Định nghĩa 5.6.1** Một tập hợp sắp thứ tự $(A, \preccurlyeq)$ được gọi là một *dàn* nếu với hai phần tử bất kỳ $x, y \in A$, thì $sup\{x, y\}$ và $inf\{x, y\}$ luôn luôn tồn tại.

✓ **Ví dụ 5.6.1**

1. Tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ với thứ tự thông thường $\leq$ là một dàn, vì $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$, $\sup\{a, b\} = \max(a, b) \in \mathbb{Z}^+$ và $\inf\{a, b\} = \min(a, b) \in \mathbb{Z}^+$.

2. Một tập hợp sắp thứ tự toàn phần $(A, \preccurlyeq)$ là một dàn, vì $\forall x, y \in A$, nếu $x \preccurlyeq y$ thì $\sup\{x, y\} = y$ và $\inf\{x, y\} = x$, ngược lại thì $\sup\{x, y\} = x$ và $\inf\{x, y\} = y$. Nghĩa là $\sup\{x, y\}$ và $\inf\{x, y\}$ luôn luôn tồn tại trong A.

3. Với E là một tập hợp bất kỳ, thì $(\wp(E), \subseteq)$ là một dàn, vì $\forall A, B \in \wp(E)$ thì dễ dàng thấy $sup\{A, B\} = A \cup B \in \wp(E)$ và $inf\{A, B\} = A \cap B \in \wp(E)$. Dàn $(\wp(E), \subseteq)$ có thể biểu diễn một sự phân cấp lớp các

đối tượng vì mỗi đối tượng của lớp con cũng là một đối tượng của lớp cha. Nói cách khác, quan hệ lớp con lớp cha là quan hệ thứ tự trong dàn ($\wp(E)$, $\subseteq$).

✓ **Ví dụ 5.6.2** Tập hợp các số nguyên dương $Z+$ với thứ tự "|" ($a \preccurlyeq b$ khi $a|b$) là một dàn. Thật vậy, $\forall a, b \in Z+$, ta biết rằng USCLN(a, b) chính là số nguyên dương lớn nhất cùng là ước số của a và b (USCLN(a, b) |a và USCLN(a, b) |b). Nghĩa là, $inf\{a, b\}$ = USCLN(a, b). Tương tự, BSCNN(a, b) chính là số nguyên dương nhỏ nhất cùng là bội số của a và b (a|BSCNN(a, b) và b|BSCNN(a, b)). Nghĩa là, $sup\{a, b\}$ = BSCNN(a, b). Do đó, ($Z+$, |) là một dàn.

✓ **Ví dụ 5.6.3**

1. Tập hợp sắp thứ tự ({1, 2, 4, 8, 16}, |) là một dàn, vì với mọi a, b $\in$ {1, 2, 4, 8, 16}, $sup\{a, b\}$= BSCNN(a, b) và $inf\{a, b\}$= USCLN(a, b) đều có và thuộc {1, 2, 4, 8, 16}

2. Tập hợp sắp thứ tự ({1, 2, 3, 4, 5}, |) không phải là một dàn, vì $sup\{2, 3\}$= BSCNN(2, 3) = 6 $\notin$ {1, 2, 3, 4, 5}.

▪ **Định lý 5.6.1** Một dàn hữu hạn luôn tồn tại phần tử bé nhất và phần tử lớn nhất.

Chứng minh: Giả sử (A, $\preccurlyeq$) là một dàn hữu hạn, trước hết, ta chứng minh bằng qui nạp mệnh đề "với n phần tử bất kỳ a_1, a_2, …, a_n của A thì $sup\{a_2, \ldots, a_n\} \in A$ và $sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_n\}\} = sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in A$". Trường hợp $n = 2$, hiển nhiên ta có $sup\{a_2\} = a_2 \in A$ và $sup\{a_1, sup\{a_2\}\} = sup\{a_1, a_2\} \in A$.

Trường hợp $n = 3$ ta chứng minh $sup\{a_2, a_3\} \in A$ và $sup\{a_1, sup\{a_2, a_3\}\} = sup\{a_1, a_2, a_3\} \in A$. Thậy vậy, do A là một dàn nên $sup\{a_2, a_3\} \in A$ từ đó ta cũng có $sup\{a_1, sup\{a_2, a_3\}\} \in A$. Ký hiệu $a = sup\{a_1, sup\{a_2, a_3\}\}$ thì a_1, a_2, a_3 bé hơn a, nghĩa là a là một chặn trên của $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nếu b là một phần tử bất kỳ của A sao cho a_1, a_2, a_3 bé hơn b, nghĩa là b là một chặn trên của $\{a_1, a_2, a_3\}$, thì $sup\{a_2, a_3\} \preccurlyeq b$ vì b lớn hơn a_2, a_3 thì lớn hơn chặn trên bé nhất của $\{a_2, a_3\}$. Vì b cũng lớn hơn a_1, suy ra $sup\{a_1, sup\{a_2, a_3\}\} \preccurlyeq b$, nên $a = sup\{a_1, sup\{a_2, a_3\}\} \preccurlyeq b$. Như vậy, a là một chặn trên của $\{a_1, a_2, a_3\}$ nhỏ hơn mọi chặn trên b của $\{a_1, a_2, a_3\}$. Do đó, a là chặn trên bé nhất của $\{a_1, a_2, a_3\}$. Vì $a = sup\{a_1, sup\{a_2, a_3\}\}$ nên $sup\{a_1, sup\{a_2, a_3\}\} = sup\{a_1, a_2, a_3\} \in A$.

Giả sử mệnh đề trên đúng với $n = k \geq 2$, nghĩa là với k phần tử của A, ta có $sup\{a_2, \ldots, a_k\} \in A$ và $sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_k\}\} = sup\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in A$. Khi đó, do A là một dàn, ta suy ra $sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\} = sup\{a_{k+1}, sup\{a_2, \ldots, a_k\}\} \in A$ và $sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}\} \in A$, $\forall a_{k+1} \in A$. Ký hiệu $u = sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}\}$ thì $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ bé hơn u, nghĩa là u là một chặn trên của $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$. Nếu m là một phần tử bất kỳ của A

sao cho $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ bé hơn m, nghĩa là m là một chặn trên của $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$, thì $sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\} \preccurlyeq m$. Vì m cũng lớn hơn a_1, suy ra $sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}\} \preccurlyeq m$, nên $u = sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}\} \preccurlyeq m$. Như vậy, u là một chặn trên của $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$ nhỏ hơn mọi chặn trên m của $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$. Do đó, u là chặn trên bé nhất của $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$. Vì $u = sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}\}$ nên $sup\{a_1, sup\{a_2, \ldots, a_{k+1}\}\} = sup\{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\} \in A$. Theo nguyên lý qui nạp, mệnh đề đã nêu trên được chứng minh với bất kỳ n phần tử nào của dàn A.

Bây giờ giả sử A là một dàn hữu hạn có đúng n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$, theo chứng minh trên $sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in A$. Từ đó, theo Định lý 5.5.3 $sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ chính là phần tử lớn nhất của A. Chứng minh tương tự ta có $inf\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là phần tử bé nhất của A.

BÀI TẬP

1. Xác định các phần tử của quan hệ R từ $A = \{0,1,2,3,4\}$ đến $B = \{1,3,5\}$ trong các trường hợp sau:

a. $a\ R\ b \Leftrightarrow a = b$

b. $a\ R\ b \Leftrightarrow a > b$

c. $a\ R\ b \Leftrightarrow$ UCLN(a,b) =1

d. $a\ R\ b \Leftrightarrow a+b = 4$

e. $a\ R\ b \Leftrightarrow a$ là ước của b

f. $a\ R\ b \Leftrightarrow$ BCNN(a, b) =2

2. Cho R là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, hãy xác định, trong các trường hợp dưới đây, quan hệ R có tính chất nào trong các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

a. $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

b. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

c. $R = \{ (a, b) \mid |a - b| \leq 2\}$

d. $R = \{(a,b) \mid$ hiệu của a-b chia hết cho 2}

e. $R = \{(a,b) \mid a-b > 3\}$

f. $R = \{(a,b) \mid |a-b| = 1\}$

3. Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c\}$ và $Y = \{b, c, d, e\}$

a. Tính $|X \times Y|$

b. Tính số quan hệ hai ngôi trên Y

c. Tính số quan hệ từ X đến Y chứa (b, c) và (b, d).

d. Hãy tìm một quan hệ trên X có tính phản xạ và bắc cầu nhưng không đối xứng.

e. Hãy tìm một quan hệ trên Y có tính phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu.

4. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, xác định số các quan hệ hai ngôi trên A có tính chất

a. Phản xạ

b. Đối xứng

c. Phản xạ và đối xứng

d. Đối xứng và phản đối xứng

e. Phản xạ, đối xứng và phản đối xứng.

5. Các quan hệ nào sau đây có tính chất phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu:

a. Quan hệ R trên $\wp(E)$ sao cho $A \; R \; B \Leftrightarrow A \cap C = B \cap C$, trong đó C là một tập hợp con cố định của E.

b. Quan hệ R trên $\mathbb{Z}$ sao cho $x \; R \; y \Leftrightarrow x\text{-}y$ lẻ.

c. Quan hệ R trên $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sao cho $(a, b) \; R \; (c, d) \Leftrightarrow a \le c$

d. Quan hệ R trên tập số thực $\mathbb{R}$ sao cho $x \; R \; y \Leftrightarrow |x| = |y|$.

6. Cho A và B là hai tập hợp và ánh xạ $f: A \to B$. Một quan hệ R trên A được định nghĩa như sau:

$$x\ R\ y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên A.

7. Chứng minh các quan hệ sau đây là tương đương:

a. Quan hệ R trên $\mathbb{Z}$ sao cho $x\ R\ y \Leftrightarrow x+y$ chẵn, tìm lớp tương đương của 1.

b. Quan hệ R trên $\mathbb{Z}$ sao cho $x\ R\ y \Leftrightarrow x^2+y^2$ chẵn, tìm lớp tương đương của 0.

c. Quan hệ R trên tập số thực $\mathbb{R}$ sao cho $x\ R\ y \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 y = 1$, tìm lớp tương đương của π.

8. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương trên A.

b. Tìm các lớp tương đương [1], [2], [3].

c. Tìm phân hoạch của A thành các lớp tương đương.

9. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}\times\{1, 2, 3, 4, 5\}$ và R là một quan hệ trên A sao cho:

$(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a+b = c+d$

a. Chứng minh R là quan hệ tương đương trên A.

b. Xác định các lớp tương đương của [(1, 3)], [(2, 4)] và [(1, 1)]

c. Chỉ ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương.

10. Một quan hệ R trên $\mathbb{Z}$ được xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ x \, R \, y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, \ x = y.2^n$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.

b. Trong số các lớp tương đương [1], [2], [3], [4] có bao nhiêu lớp phân biệt ?

c. Trong số các lớp tương đương [6], [7], [21], [24], [25], [35], [42], [48] có bao nhiêu lớp phân biệt ?

11. Cho $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ và R là một quan hệ trên $A \times A$ được xác định bởi

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow b = d$$

a. Chứng minh R là một quan hệ tương đương.

b. Tìm lớp tương đương chứa (1, 3).

c. Chỉ ra phân hoạch của A bởi các lớp tương đương theo R.

12. Cho tập hợp $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ và các tập hợp con $M_1 = \{a_1, a_3\}$, $M_2 = \{a_2, a_4, a_5\}$ và $M_3 = \{a_6, a_7\}$ của A. Hãy tìm một quan hệ tương đương trên A nhận M_1, M_2, M_3 làm các lớp tương đương.

13. Cho A là một tập hợp và $|A| = 30$ hãy tìm một quan hệ tương đương R trên A sao cho A được phân hoạch thành 3 lớp tương đương với cùng số phần tử. Có bao nhiêu quan hệ R như vậy?

14. Cho R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (4,1), (4, 2), (4, 4), (5, 2), (5, 5)} là một quan hệ trên A = {1, 2, 3, 4, 5}.

a. R có phải là một quan hệ tương đương hay không?

b. R có phải là một quan hệ thứ tự hay không?

15. Mỗi một quan hệ R sau đây, quan hệ nào là quan hệ tương đương, quan hệ nào là quan hệ thứ tự. Tìm các lớp tương đương của các quan hệ tương đương tương ứng.

a. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,R\,y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y$

b. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,R\,y \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq y^2 + 2y$

c. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,R\,y \Leftrightarrow x^3 - x^2y - 3x = y^3 - xy^2 - 3y$

d. $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\,R\,y \Leftrightarrow x \mid y$

e. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\,R\,y \Leftrightarrow x = y \text{ hay } x < y + 1$

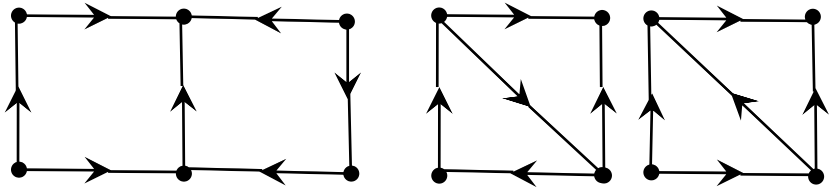
f. $\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ (x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z \text{ hay } (x = z \text{ và } y \leq t)$

g. $\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ (x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z \text{ hay } (x = z \text{ và } y \leq t)$

16. Quan hệ R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5)} trên A = {1, 2, 3, 4, 5} có phải là một quan hệ thứ tự hay không? Nếu là quan hệ thứ tự, hãy tìm phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của A nếu có.

17. Vẽ biểu đồ Hasse của tập có thứ tự $(\wp(\{a, b, c\}), \subset)$.

18. Trong các biểu đồ sau, biểu đồ nào là biểu đồ Hasse của tập sắp thứ tự.



19. Cho $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ và quan hệ $R = \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_5), (a_6, a_6), (a_7, a_7), (a_1, a_3), (a_3, a_5), (a_1, a_5), (a_5, a_7), (a_1, a_7), (a_3, a_7)\}$ trên A.

a. R có là quan hệ thứ tự không?

b. Nếu R là quan hệ thứ tự $\preccurlyeq$. Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho tập thứ tự $(A, \preccurlyeq)$ và xác định các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A nếu có.

20. Xét quan hệ R trên tập hợp các số tự nhiên khác 0 như sau:

$$a\ R\ b \Leftrightarrow a \text{ là bội số của } b$$

a. Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}$.

b. Tìm phần tử bé nhất, lớn nhất nếu có. R có phải là quan hệ thứ tự toàn phần trên Z hay không?

21. Xét quan hệ R trên Z × Z như sau:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ và } b \leq d$$

a. Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên Z × Z.

b. R có phải là quan hệ thứ tự toàn phần trên Z × Z hay không?. Có phần tử lớn nhất, bé nhất trong $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ theo R hay không.

22. Trên tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ ta xét một quan hệ hai ngôi R được định nghĩa bởi

$$a\, R\, b \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ b.n = a$$

a. Chứng minh rằng quan hệ R là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$.

b. Đặt $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Trên tập hợp M ta cũng xét một quan hệ R được định nghĩa như trong phần (a). Hỏi R có phải là một quan hệ thứ tự trên M không? Nếu có thì hãy vẽ biểu đồ Hasse và cho biết phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất trong M theo thứ tự R.

23. Giả sử N^+ là tập hợp các số tự nhiên khác 0. Xét quan hệ R trên $N \times N$ như sau:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \le c \text{ và } b|d \text{ (} b \text{ là ước số của } d\text{)}$$

a. Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên $N \times N$

b. Tìm *min*, *max*, *inf*, *sup* của tập hợp $A = \{(3, 2), (5, 4), (6, 6), (8, 10)\}$.

24. Cho hai tập hợp sắp thứ tự $(A, \preccurlyeq_A)$ và $(B, \preccurlyeq_B)$. Trên $A \times B$ ta định nghĩa một quan hệ $\preccurlyeq$ sao cho

$\forall\ (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B,\ (a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \preccurlyeq_A a_2)$ và $(b_1 \preccurlyeq_B b_2)$

a. Chứng minh rằng $\preccurlyeq$ là một quan hệ thứ tự trên $A \times B$.

b. Nếu $\preccurlyeq_A$ và $\preccurlyeq_B$ là các thứ tự toàn phần thì $\preccurlyeq$ có là thứ tự toàn phần hay không?.

25. Giả sử $A = \wp(E)$ với $E = \{1, 2, 3\}$. Xét tập hợp sắp thứ tự $(A, \subset)$ và tập $B \subset A$, hãy tìm *max*, *min*, *sup*, *inf* của B khi

a. $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$

b. $B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

c. $B= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

26. Giả sử $(A, \preccurlyeq)$ là một tập hợp sắp thứ tự, một phần tử $m \in A$ được gọi là phần tử tối tiểu (tương ứng phần tử tối đại) của A nếu $\forall x \in A$, $x \preccurlyeq m$ ($x \succcurlyeq m$) thì $x = m$. Chứng minh rằng trong một tập hợp sắp thứ tự hữu hạn, phần tử tối đại và phần tử tối tiểu luôn luôn tồn tại.

27. Chứng minh rằng trong một tập sắp thứ tự hữu hạn, nếu chỉ có duy nhất một phần tử tối đại (tối tiểu) thì đó là phần tử lớn nhất (nhỏ nhất)

28. Cho $\preccurlyeq$ là một quan hệ trên $X = \{2, 4, 5, 8, 10, 15, 16, 30\}$ được xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathrm{X}, x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y = kx, k \in \mathrm{Z}^+$$

a. Chứng minh $\preccurlyeq$ là một quan hệ thứ tự trên X.

b. Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất xác định bởi quan hệ trên.

c. Vẽ biểu đồ Hasse biểu diễn quan hệ $\preccurlyeq$.

29. Cho R là một quan hệ trên $A = \{2, 4, 6, 12, 24\}$ được xác định bởi

$\forall$(x, y), (z, t) $\in$ A, (x, y) R (z, t) $\Leftrightarrow$ x+y $\leq$ z+t

R có phải là một quan hệ thứ tự hay không? Nếu R là một quan hệ thứ tự thì xác định các phần tử tối đại, tối tiểu, lớn nhất, nhỏ nhất theo quan hệ trên.

30. Các tập hợp sắp thứ tự sau có phải là một dàn không?.

a. ({1, 3, 6, 9, 12}, |)

b. ({1, 5, 25, 125}, |).

31. Giả sử n là một số nguyên dương, đặt $U_n = \{a \in N | \, a|n\}$. Trên U_n ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi $\preccurlyeq$ sao cho $\forall x, y \in \mathcal{U}_n, x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x|y$.

a. Chứng minh rằng (U_n, $\preccurlyeq$) là một dàn.

b. Tìm phần tử lớn nhất, bé nhất, các phần tử tối tiểu, tối đại trong U_n nếu có.

32. Giả sử (A, $\preccurlyeq$) là một tập hợp sắp thứ tự, cho biết các khẳng định sau đây đúng hay sai? Tại sao?

a. Nếu (A, $\preccurlyeq$) là một dàn thì $\preccurlyeq$ là một thứ tự toàn phần.

b. Nếu $\preccurlyeq$ là thứ tự toàn phần thì (A, $\preccurlyeq$) là một dàn

33. Giả sử (A, $\preccurlyeq$) là một dàn và m là một phần tử tối đại của A. Chứng minh m là phần tử lớn nhất của A. Chứng minh kết luận tương tự cho phần tử tối tiểu.

34. Chứng minh rằng mọi tập hợp con hữu hạn khác rỗng của một dàn đều có chặn trên nhỏ nhất và chặn dưới lớn nhất.

Chương 6

ĐẠI SỐ BOOLE VÀ HÀM BOOLE

Đại số Boole và hàm boole là nền tảng của nhiều ứng dụng trong khoa học kỹ thuật và công nghệ. Trong Công nghệ Thông tin, hàm Boole được ứng dụng như là cơ sở toán học để thiết kế các mạch vi xử lý tín hiệu, tính toán nói chung và các bộ xử lý trung tâm của máy tính điện tử nói riêng.

Phần 6.1 giới thiệu Định nghĩa hình thức của đại số Boole và các tính chất cơ bản của các phép toán đại số Boole. Phần 6.2 trình bày hàm Boole, biểu thức Boole, tính tương đương của biểu thức Boole và dạng tuyển chính tắc của hàm Boole. Phần 6.3 giới thiệu các cổng logic, mạch logic và một số ứng dụng cụ thể của mạch logic. Cuối cùng, phần 6.4 giới thiệu bài toán cực tiểu hóa hàm Boole, các phương pháp giải bài toán cực tiểu hóa hàm Boole làm cơ sở cho việc tối ưu hóa việc thiết kế và chế tạo mạch điện tử.

6.1 Đại số Boole

Đại số Boole là một tập hợp khác rỗng bất kỳ cùng với hai phép toán thỏa mãn một số tiên đề như định nghĩa dưới đây.

- **Định nghĩa 6.1.1**

Một tập hợp $\mathcal{A} \neq \varnothing$ cùng với hai phép toán, ký hiệu $\vee$ và $\wedge$, được gọi là một *đại số Boole* (Boolean algebra) nếu thỏa mãn các tiên đề sau $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$.

1. Tính giao hoán

   $x \vee y = y \vee x,$

   $x \wedge y = y \wedge x.$

2. Tính kết hợp

   $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$

   $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z).$

3. Tính phân bố

   $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z),$

   $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z).$

4. Tồn tại hai phần tử trong $\mathcal{A}$, được ký hiệu 0 và 1, tương ứng được gọi là hai phần tử trung hòa của hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ sao cho

   $x \vee 0 = x$ và $x \wedge 1 = x$.

5. Với mọi $x \in \mathcal{A}$, tồn tại một phần từ bù của x trong $\mathcal{A}$, được ký hiệu $\overline{x}$, sao cho

   $x \vee \overline{x} = 1$ và $x \wedge \overline{x} = 0$.

Lưu ý rằng, với mỗi phần tử $x \in \mathcal{A}$, chỉ có duy nhất một phần tử bù $\bar{x}$ của x. Chứng minh tính duy nhất của phần tử bù xem như một bài tập cho người đọc.

✓ **Ví dụ 6.1.1**

1. Xét tập hợp M các mệnh đề với hai phép toán tuyển $\vee$ và hội $\wedge$ logic. Theo Định lý 1.4.2 các phép toán $\vee$ và $\wedge$ của các mệnh có tính giao hoán, kết hợp và phân bố (thỏa mãn tiên đề 1, 2, 3). Có hai hằng logic 0 và 1 tương ứng với các mệnh đề hằng sai và hằng đúng thỏa mãn $x \vee 0 = x$ và $x \wedge 1 = x$ với mọi x trong M. Cuối cùng, với mọi mệnh đề x trong M, có $\bar{x} = \neg x$, thỏa mãn $x \vee \bar{x} = x \vee \neg x = 1$ và $x \wedge \bar{x} = x \wedge \neg x = 0$. Nghĩa là với mọi x trong M luôn có phần tử bù $\bar{x}$ trong M. Vì vậy, theo định nghĩa, M là một đại số Boole.

2. Xét tập hợp $\wp(E)$ gồm các tập hợp con của một tập hợp E khác rỗng. Trên $\wp(E)$ ta định nghĩa hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ tương ứng là phép hợp $\cup$ và giao $\cap$ các tập hợp. Theo Định lý 2.3.1, các phép toán $\cup$ và $\cap$ có tính giao hoán, kết hợp và phân bố. Nghĩa là, các phép toán $\vee$ và $\wedge$ có tính giao hoán, kết hợp và phân bố. Ký hiệu phần tử 0 là tập hợp $\varnothing$ và phần từ 1 là tập hợp E, thì với mọi $X \in \wp(E)$ ta có $X \vee 0 = X \cup \varnothing = X$ và $X \wedge 1 = X \cap E = X$. Với mỗi $X \in \wp(E)$, ký

hiệu $\overline{X}$ là tập hợp E-X, thì $X \vee \overline{X} = X \cup (E\text{-}X) = E$ = 1 và $X \wedge \overline{X} = X \cap (E\text{-}X) = \varnothing = 0$. Nghĩa là, tồn tại hai phần tử trung hòa của hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ và phần tử bù của mỗi phần tử trong $\wp(E)$. Vì vậy, theo định nghĩa, $\wp(E)$ là một đại số Boole.

✓ **Ví dụ 6.1.2** Xét tập hợp $B = \{0, 1\}$ với hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ tương ứng được định nghĩa $x \vee y = x + y - x.y$ và $x \wedge y = x.y$, $\forall x, y \in B$. Ta chỉ ra rằng tập hợp B với hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ là một đại số Boole. Thật vậy, $\forall x, y, z \in B$ và lưu ý rằng $a.a = a$, $\forall a \in B$, ta có:

1. Tính giao hoán

   a. $x \vee y = x + y - x.y = y + x - y.x = y \vee x$

   b. $x \wedge y = x.y = y.x = y \wedge x$.

2. Tính kết hợp

   a. $(x \vee y) \vee z = (x + y - x.y) \vee z = (x + y - x.y) + z - (x + y - x.y).z = x + y + z - x.y - x.z - y.z + x.y.z = x + (y + z - y.z) - x.(y + z - y.z) = x \vee (y + z - y.z) = x \vee (y \vee z)$

   b. $(x \wedge y) \wedge z = (x.y) \wedge z = (x.y).z = x.(y.z) = x \wedge (y.z) = x \wedge (y \wedge z)$.

3. Tính phân bố

   a. $(x \vee y) \wedge z = (x + y - x.y) \wedge z = (x + y - x.y).z = x.z + y.z - x.y.z = (x.z) + (y.z) - (x.y.z.z) = (x.z) + (y.z) - (x.z).(y.z) = (x.z) \vee (y.z) = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$

   b. $(x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x + z - x.z) \wedge (y + z - y.z) = (x + z - x.z).(y + z - y.z) = (x + z)(y + z) - (x + z).y.z - x.z(y + z) + (x.z).(y.z) = x.y + x.z + z.y + z.z - x.y.z - z.y.z - x.z.y - x.z.z + x.z.y.z = (x.y) + z - (x.y).z = (x.y) \vee z = (x \wedge y) \vee z$.

4. Hai phần tử 0 và 1 là hai phần tử trung hòa của hai phép toán $\vee$ và $\wedge$, vì

   a. $x \vee 0 = x + 0 - x.0 = x$,

   b. $x \wedge 1 = x.1 = x$.

5. Với mọi $x \in B$, $\overline{x} = 1-x$ là phần tử bù của x, vì

   a. $x \vee \overline{x} = x + (1-x) - x.(1-x) = x + 1-x - x.1 + x.x = 1$,

   b. $x \wedge \overline{x} = x.(1-x) = x - x.x = 0$.

Như vậy, tập hợp B cùng với hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ trong B thỏa mãn các tiên đề của đại số Boole nên B là một đại số Boole. Trong đại số Boole B, các phép toán $\vee$ và $\wedge$ được viết một cách đơn giản thành + và . và được đọc là tổng Boole và tích Boole (hoặc đơn giản hơn là tổng và tích như phép toán + và. thông thường).

Các phép toán trên đại số Boole có một số tính chất cơ bản, còn được gọi là các luật, có thể được suy dẫn trực tiếp từ Định nghĩa 6.1.1 và được phát biểu như trong định lý sau.

- **Định lý 6.1.1** Giả sử $\mathcal{A}$ là một đại số Boole thì $\forall x, y \in \mathcal{A}$. ta có

1. Luật thống trị
   a. $x \wedge 0 = 0$.
   b. $x \vee 1 = 1$.
2. Luật lũy đẳng
   a. $x \wedge x = x$.
   b. $x \vee x = x$.
3. Luật bù kép $\overline{\overline{x}} = x$.
4. Luật bù trung hòa
   a. $\overline{1} = 0$, b. $\overline{0} = 1$
5. Luật De Morgan
   a. $\overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$
   b. $\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
6. Luật hấp thụ
   a. $x \wedge (x \vee y) = x$,
   b. $x \vee (x \wedge y) = x$.

- **Chứng minh:** Ở đây, chúng ta chứng minh các phần 1.a, 2.a và 3.a, chứng minh các phần còn lại của định lý dành cho người đọc như một bài tập.

Áp dụng các tiên đề trong Định nghĩa 6.1.1, ta có $0 = x \wedge \bar{x} = x \wedge (\bar{x} \vee 0) = (x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee (x \wedge 0) = x \wedge 0$. Vậy phần 1.a được chứng minh.

Ta có $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \vee \bar{x}) = (x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) = (x \wedge x) \vee 0 = x \wedge x$. Vậy phần 2.a được chứng minh.

Để chứng minh 3.a, ta chỉ ra rằng mối quan hệ giữa $(x \wedge y)$ và $(\bar{x} \vee \bar{y})$ thỏa mãn tiên đề 5 của Định nghĩa 6.1.1. Thật vậy

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) &= ((x \wedge y) \wedge \bar{x}) \vee ((x \wedge y) \wedge \bar{y}) \\ &= ((x \wedge \bar{x}) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \bar{y})) \\ &= (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) &= (x \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) \wedge (y \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) \\ &= ((x \vee \bar{x}) \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee (y \vee \bar{y}) \\ &= (1 \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.\end{aligned}$$

Vậy, $(\bar{x} \vee \bar{y})$ là phần tử bù của $(x \wedge y)$. Nghĩa là $\overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \vee \bar{y}$. Phần 3.a được chứng minh.

Từ các tiên đề của định nghĩa đại số Boole, kết hợp với các luật trong Định lý 6.1.1, và lưu ý về ký hiệu các phép toán trong đại số Boole *B* trong Ví dụ 6.1.2, chúng ta có hệ quả sau.

Hệ quả 6.1.1 Các phép toán + và . trên đại số Boole $B = \{0, 1\}$ thỏa mãn các luật sau.

1. Luật lũy đẳng

   a. $x + x = x$, b. $x \,.\, x = x$.

2. Luật đồng nhất

   a. $x + 0 = x$, b. $x \,.\, 1 = x$

3. Luật thống trị

   a. $x + 1 = 1$, b. $x \,.\, 0 = 0$

4. Luật bù kép

   $\overline{\overline{x}} = x$.

5. Luật giao hoán

   a. $x + y = y + x$, b. $x \,.\, y = y \,.\, x$.

6. Luật kết hợp

   a. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

   b. $(x \,.\, y).\, z = x.\,(y \,.\, z)$.

7. Luật phân bố

   a $(x + y) \,.\, z = (x.z) + (y \,.\, z)$.

   b $x.y + z = (x + z).(y + z)$.

8. Luật De Morgan

   a. $\overline{(x + y)} = \bar{x}.\bar{y}$

   b. $\overline{(x.y)} = \bar{x} + \bar{y}$

9. Luật hấp thụ

   a. $x \,.\, (x + y) = x$,   b. $x + x.y = x$.

10. Luật bù đơn

   a. $x + \overline{x} = 1$,   b. $x.\overline{x} = 0$.

Chứng minh: Vì tập $B = \{0, 1\}$ với hai phép toán + và . là một đại số Boole như đã chứng minh trong Ví dụ 6.1.2 nên các phép toán + và . trên B (tương ứng với $\vee$ và $\wedge$) thỏa mãn tất cả các tiên đề trong Định nghĩa 6.1.1 và các luật trong Định lý 6.1.1. Từ đó, các luật trong hệ quả được chứng minh.

6.2 Hàm Boole

- **Định nghĩa 6.2.1** Giả sử n là một số từ nhiên khác 0, một hàm Boole n biến là một ánh xạ f: $B^n \to B$, trong đó $B = \{0, 1\}$ là đại số Boole với hai phép toán

$$x \vee y = x + y - x.y \text{ và } x \wedge y = x.y,\ \forall x, y \in B.$$

Như đã lưu ý trong phần trên, các phép toán $\vee$ và $\wedge$ trong đại số Boole B tương ứng được ký hiệu là + và., hơn nữa các phép toán này thỏa mãn các luật trong Hệ quả 6.1.1, vì vậy tập tất cả các hàm Boole n biến $\mathcal{F}_n$ cùng với hai phép toán + và. Này là một đại số Boole và thỏa mãn các luật trong Hệ quả 6.1.1.

Các hàm Boole còn được gọi là *hàm logic* (logic function). Các biến xuất hiện trong hàm Boole được gọi là *biến Boole* (Boole variable). Vì biến Boole chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1 nên chúng ta có thể lập bảng giá trị của hàm Boole, cũng gọi là bảng chân trị của hàm Boole, như là bảng chân trị của các dạng mệnh đề.

✓ **Ví dụ 6.2.1** Hàm Boole f: $B^3 \to B$ với $f(x, y, z) = xy + \bar{z}$ là hàm ba biến x, y và z có giá trị được tính như trong Bảng 6.2.1

Bảng 6.2.1. Chân trị của hàm Boole $f(x, y, z) = xy + \bar{z}$

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$f(x, y, z) = xy + \bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

▪ **Định nghĩa 6.2.2** Hai hàm Boole n biến $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là bằng nhau, và ký hiệu $f = g$, nếu $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\forall\ x_1, x_2, ..., x_n \in B$.

✓ **Ví dụ 6.2.2** Hàm Boole $f(x, y) = x\ .\ (x + y)$ và hàm Boole $g(x, y) = x + x.y$ là bằng nhau.

Một *biểu thức Boole* (Boole expression) là một sự kết hợp các hằng số 0, 1 các biến Boole và phần bù của chúng bởi các phép toán tổng Boole và tích Boole. Ví dụ, $x + \overline{(x\overline{y} + z)}$ là một biểu thức Boole. Mỗi biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Hai biểu thức Boole cùng biểu diễn một hàm Boole được gọi là tương đương. Ví dụ, từ luật hấp thụ ta suy ra biểu thức $x + x.y$ và biểu thức x là tương đương.

✓ **Ví dụ 6.2.3** Tìm biểu thức Boole biểu diễn các hàm Boole f và g có giá trị tương ứng như trong Bảng 6.2.2.

Bảng 6.2.2. Chân trị của các hàm Boole *f* và *g*

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Giải: Hàm Boole $f(x, y, z) = 1$ khi và chỉ khi $x = z = 1$ và $y = 0$ hay khi và chỉ khi $x = z = 1$ và $\bar{y} = 1$. Nghĩa là $f(x, y, z) = 1$ khi và chỉ khi $x.\bar{y}.z = 1$. Vậy, $f(x, y, z) = x.\bar{y}.z$.

Hàm Boole $g(x, y, z) = 1$ khi và chỉ khi $x = z = 0$ và $y = 1$ hoặc $x = y = 1$ và $z = 0$ hay khi và chỉ khi $\bar{x} = \bar{z} = 1$ và $y = 1$ hoặc $x = y = 1$ và $\bar{z} = 1$. Nghĩa là $g(x, y, z) = 1$ khi và chỉ khi $\bar{x}.y.\bar{z} = 1$ hoặc $x.y.\bar{z} = 1$. Vậy, $g(x, y, z) = \bar{x}.y.\bar{z} + x.y.\bar{z}$.

▪ **Định nghĩa 6.2.3** Giả sử $\mathcal{F}_n$ là tập tất cả các hàm Boole n biến $x_1, x_2, ..., x_n$, ta gọi một biến Boole x_i hoặc phần bù của nó $\bar{x}_i$ là một *từ đơn* (literal) và một tích các từ đơn $y_1.y_2 ...y_n$ là một *từ tối tiểu* (minterm).

Chúng ta lưu ý rằng, chỉ có một tổ hợp giá trị duy nhất của các giá trị của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ để một từ tối tiểu có giá trị bằng 1. Cụ thể, một từ tối tiểu $y_1.y_2 ...y_n = 1$ nếu và chỉ nếu mọi $y_i = 1$, nghĩa là nếu và chỉ nếu $x_i = 1$ khi $y_i = x_i$ và $x_i = 0$ khi $y_i = \bar{x}_i$.

✓ **Ví dụ 6.2.4** Trong tập các hàm Boole bốn biến, từ tối tiểu có giá trị bằng 1 ứng với $x_1 = x_3 = 0$ và $x_2 = x_4 = 1$ là $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$.

Từ tính chất của các phép toán tổng Boole và tích Boole, chúng ta thấy rằng một hàm Boole là tổng của các từ tối tiểu chỉ bằng 1 khi một trong các từ tối tiểu bằng 1. Nghĩa là hàm Boole như vậy bằng 1 tại các tổ hợp của các giá trị của các biến Boole ở đó các từ tối tiểu bằng 1 và bằng 0 tại các giá trị khác của các biến Boole. Hơn nữa, bởi vì mỗi hàm Boole tương ứng với một bảng chân trị, nên chúng ta có thể dễ dàng biểu diễn một hàm Boole bằng một tổng của các từ tối tiểu (mỗi từ tối tiểu ứng với một tổ hợp biến mà giá trị hàm Boole bằng 1 trong bảng chân trị), gọi là *dạng tuyển chính tắc* (normal disjunctive form) của hàm Boole.

✓ **Ví dụ 6.2.5** Tìm dạng tuyển chính tắc của hàm Boole $f(x, y, z) = (x + y)\,\bar{z}$.

Giải: Trước hết chúng ta tính chân trị của hàm Boole như trong Bảng 6.2.3.

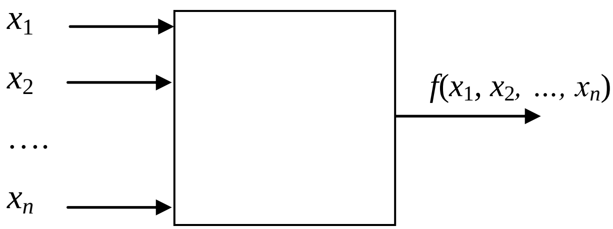
Bảng 6.2.3. Chân trị của các hàm Boole $f(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$

x	x	z	$f(x, y, z) = (x + y)\,\bar{z}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Từ bảng chân trị, ta thấy $f(x, y, z) = 1$ khi $x = 0, y = 1, z = 0$ hoặc $x = 1, y = 0, z = 0$ hoặc $x = 1, y = 1, z = 0$. Nghĩa là $f(x, y, z) = 1$ khi $\bar{x}y\bar{z} = 1$ hoặc $x\bar{y}.\bar{z} = 1$ hoặc $xy\bar{z} = 1$. Vậy dạng tuyển chính tắc của hàm Boole là $f(x, y, z) = \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}.\bar{z} + xy\bar{z}$.

6.3 Mạch logic

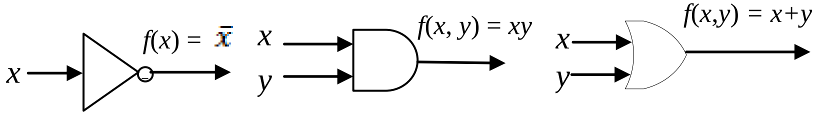
Hàm Boole là cơ sở toán học để mô hình hóa và thiết kế các mạch tính toán trong các thiết bị điện tử nói chung và máy tính điện tử nói riêng. Các mạch tính toán dựa trên cơ sở các hàm Boole được gọi là mạch logic. Hình 6.3.1 biểu diễn một mạch logic được mô hình hóa từ một hàm Boole n biến. Ở đây, các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ biểu diễn các tín hiệu điện tử vào của mạch và hàm $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ biểu diễn tín hiệu ra của mạch. Các tín hiệu chỉ có hai trạng thái, ký hiệu là 0 và 1. Trạng thái của tín hiệu ra là kết quả tính toán của hàm Boole f dựa trên các trạng thái của các tín hiệu vào. Ta nói mạch lôgic thực hiện hàm f.



Hình 6.3.1: Mạch logic

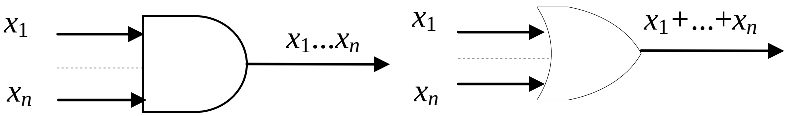
Các phần tử cơ bản của các mạch logic được gọi là các cổng logic. Mỗi một loại cổng thực hiện một phép toán Boole. Có ba cổng logic là cổng NOT, cổng AND và cổng OR.

Cổng NOT thực hiện hàm Boole $f(x)$ là phần bù của biến Boole x. Cổng NOT còn được gọi là *bộ đảo* (inverter). Cổng AND thực hiện hàm Boole $f(x, y)$ là tích Boole của hai biến x và y. Cổng OR thực hiện hàm Boole $f(x, y)$ là tổng Boole của hai biến x và y. Hình 6.3.2 biểu diễn các cổng logic NOT, AND và OR.



Hình 6.3.2: Các cổng logic NOT, AND và OR

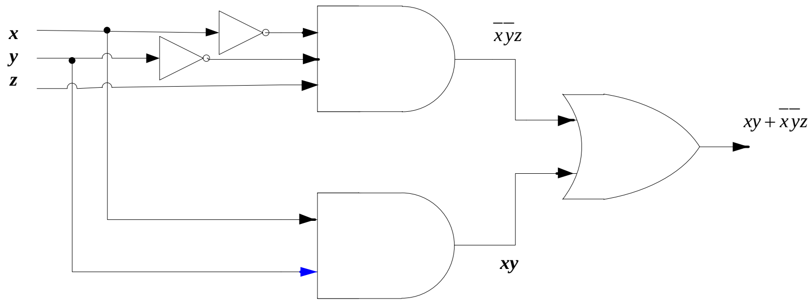
Ngoài cổng AND và OR với hai đầu vào, để thuận lợi trong việc mô hình hóa các mạch logic, chúng ta còn cho phép các cổng AND và OR nhiều đầu vào như trong Hình 6.3.3.



Hình 6.3.3: Cổng AND và OR nhiều đầu vào

Các mạch logic có thể được xây dựng bằng cách tổ hợp các cổng logic NOT, AND và OR như những phần tử cơ sở nhằm thực hiện việc tính toán của một hàm Boole bất kỳ.

✓ **Ví dụ 6.3.1** Mạch logic thực hiện hàm Boole $f(x, y, z)$ = $xy + \bar{x}.\bar{y}z$ được thiết kế như trong hình 6.3.4.



Hình 6.3.4: Mạch logic thực hiện hàm *f*(*x*, *y*, *z*)

✓ **Ví dụ 6.3.2** Thiết kế một mạch logic thực hiện hàm Boole được cho như trong Bảng 6.3.1.

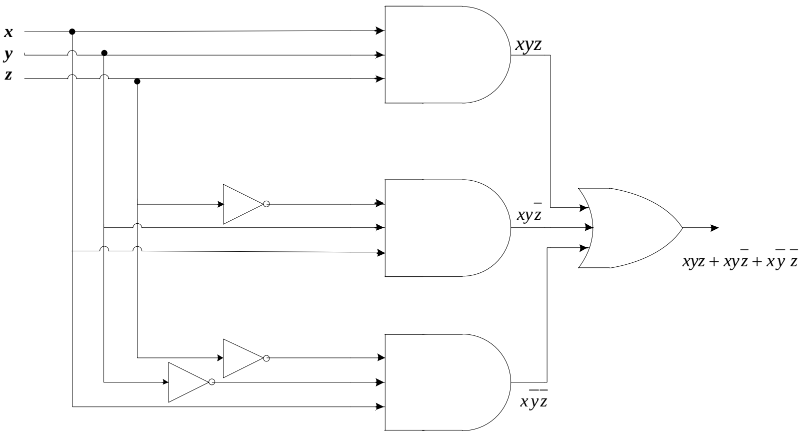
Bảng 6.3.1. Giá trị của hàm Boole *f*(*x*, *y*, *z*)

x	*y*	*z*	*f*(*x*, *y*, *z*)
0	0	0	0
1	1	0	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Dựa trên giá trị của hàm $f(x, y, z)$ được cho trong Bảng 6.3.1, chúng ta có thể xác định được dạng nối rời chính tắc của f là:

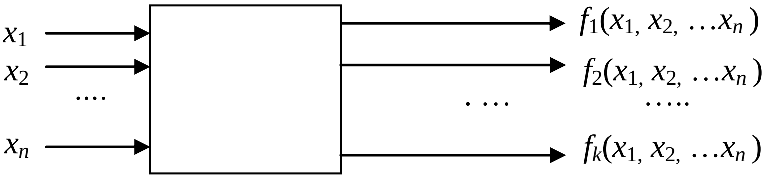
$$f(x, y, z) = xy\bar{z} + x\bar{y}.\bar{z} + xyz.$$

Mạch logic thực hiện hàm Boole được tổ hợp bởi các cổng logic và được thể hiện như Hình 6.3.5.



Hình 6.3.5: Mạch logic thực hiện hàm *f*(*x*, *y*, *z*)

Trong kỹ thuật và công nghệ điện tử, có nhiều yêu cầu tính toán trên một tập giá trị đầu vào mà kết quả cần đạt được không chỉ một mà nhiều giá trị đầu ra. Để đáp ứng được các nhu cầu tính toán như vậy, ngoài các mạch logic một đầu ra như đã thấy ở trên, chúng ta còn có các mạch logic nhiều đầu ra. Hình 6.3.6 biểu diễn sơ đồ của một mạch logic n đầu vào và k đầu ra, trong đó mỗi đầu ra $f_i(x_1, x_2, \ldots x_n)$ là một hàm Boole n biến.



Hình 6.3.6: Mạch logic nhiều đầu ra

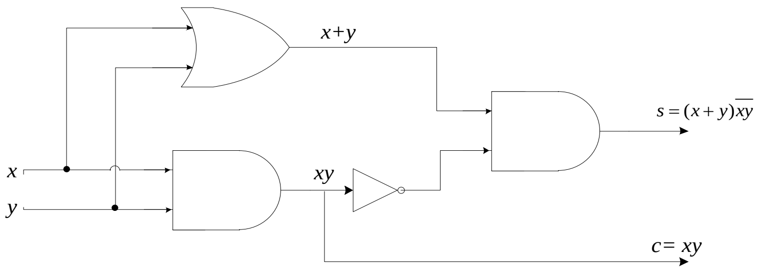
Sau đây, chúng ta thực hiện việc xây dựng bộ cộng các số nhị phân một bit như một ví dụ minh họa cho ứng dụng các mạch logic nhiều đầu ra. Bộ cộng các số một bit thực hiện phép cộng các số một bit và số nhớ một bit của phép cộng các số một bit trước đó là nền tảng để xây dựng mạch logic thực hiện phép cộng các số nhị phân nhiều bit, nghĩa là phép cộng các số nguyên.

Trước hết, chúng ta xây dựng *bộ nửa cộng* (half adder), như một phần hỗ trợ cho bộ cộng. Bộ nửa cộng thực hiện phép cộng hai số nhị phân một bit x và y theo qui tắc thông thường trong hệ nhị phân, nhưng không xét đến số nhớ của phép cộng trước đó. Kết quả của phép cộng, nghĩa là đầu ra của bộ nửa cộng, là hai số nhị phân một bit, trong đó một số là số hàng đơn vị của phép cộng, ký hiệu là s, số còn lại là số nhớ của phép cộng, ký hiệu là c. Chúng ta có kết quả của đầu ra s và c của bộ nửa cộng như trong Bảng 6.3.2.

Bảng 6.3.2. Đầu và đầu ra của bộ nửa cộng

x	y	s	c
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Xem s và c như là hai hàm Bool hai biến x và y, với các giá trị trong Bảng 6.3.2, chúng ta có dạng tuyển chính tắc của $s = x\bar{y} + \bar{x}y$ và $c = xy$. Vì $x\bar{y} + \bar{x}y = x\bar{x} + y\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{y} = (x+y)\overline{(xy)}$ nên $s = (x+y)\overline{(xy)}$ và chúng ta có mạch logic hai đầu ra cho bộ nửa cộng như Hình 6.3.7.



Hình 6.3.7: Bộ nửa cộng hai số nhị phân một bit

Bộ cộng các số nhị phân một bit thực hiện phép cộng các số một bit và số nhớ một bit của phép cộng các số một bit trước đó, kết quả tính toán là một bit tổng và một bit nhớ cho phép cộng các số một bit lần sau. Gọi x, y là các bit cần tính tổng, c_{i-1} là bit nhớ của phép cộng hai bit trước đó, s và c_i là bit tổng và bit nhớ của phép cộng x, y và c_{i-1}, ta có đầu vào và đầu ra của bộ cộng được tính như trong Bảng 6.3.3.

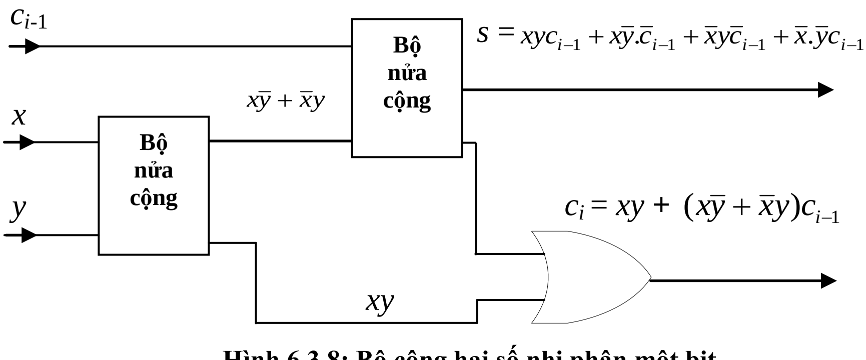
Bảng 6.3.3. Đầu vào và đầu ra của bộ cộng

Đầu vào			Đầu ra	
x	y	c_{i-1}	s	c_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0

0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

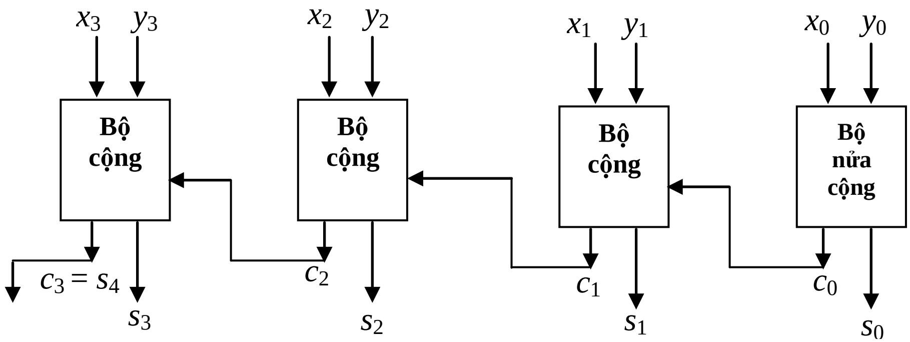
Xem s và c_i như là hai hàm Bool ba biến x, y và $c_{i\text{-}1}$, với các giá trị trong Bảng 6.3.3, chúng ta có dạng tuyển chính tắc của $s = xyc_{i-1} + x\bar{y}.\bar{c}_{i-1} + \bar{x}y\bar{c}_{i-1} + \bar{x}.\bar{y}c_{i-1}$ và $c_i = xyc_{i\text{-}1} + xy\bar{c}_{i-1} + x\bar{y}c_{i-1} + \bar{x}yc_{i-1}$. Chúng ta dễ dàng thấy rằng $s = xyc_{i-1} + x\bar{y}.\bar{c}_{i-1} + \bar{x}y\bar{c}_{i-1} + \bar{x}.\bar{y}c_{i-1} = (x\bar{y} + \bar{x}y)\bar{c}_{i-1} + \overline{(x\bar{y} + \bar{x}y)}c_{i-1}$ và $c_i = xyc_{i\text{-}1} + xy\bar{c}_{i-1} + x\bar{y}c_{i-1} + \bar{x}yc_{i-1} = xy + (x\bar{y} + \bar{x}y)c_{i-1}$.

Vì vậy, bộ cộng với ba biến Boole đầu vào $c_{i\text{-}1}$, x và y và hai hàm Boole đầu ra s và c_i được thiết kế bằng hai nửa bộ cộng và một cổng OR như Hình 6.3.8.



Hình 6.3.8: Bộ cộng hai số nhị phân một bit

Bây giờ, chúng ta có thể sử dụng bộ cộng các số nhị phân một bit để thiết kế bộ cộng hai số nhị phân bốn bit $(x_3 x_2 x_1 x_0)_2$ và $(y_3 y_2 y_1 y_0)_2$ với kết quả đầu ra là một số nhị phân năm bit $(s_4 s_3 s_2 s_1 s_0)_2$ như Hình 6.3.9.



Hình 6.3.9: Bộ cộng hai số nhị phân bốn bit

Bằng cách tương tự chúng ta có thể thiết kế các bộ cộng để thực hiện phép cộng của hai số nhị phân *n* bit bất kỳ. Đó là các bộ cộng thực hiện phép cộng các số nguyên không âm bất kỳ.

6.4 Tối tiểu hóa hàm Boole

Tương tự như các hàm đại số, mỗi hàm Boole có thể được biểu diễn bằng một số biểu thức Boole tương đương. Vấn đề đặt ra là tìm một biểu diễn hàm Boole đơn giản nhất, còn gọi là tối tiểu hóa hàm Boole, nhằm tối ưu hóa các mạch logic thực hiện hàm Boole. Bởi vì một hàm Boole luôn luôn được biểu diễn bằng một tổng của các tích của các từ đơn, nên hàm Boole đơn giản nhất là hàm Boole được biểu diễn bởi một tổng ít tích của các từ đơn nhất, đồng thời trong mỗi tích lại ít từ đơn nhất. Lúc này mạch logic tính toán hàm Boole chứa ít cổng logic nhất. Đây là bài toán tối ưu về tính toán đồng thời tối ưu về kinh tế.

Gọi mỗi tích các từ đơn là một đơn thức hay một số hạng. Hàm Boole cực tiểu là hàm biểu diễn một tổng ít số hạng nhất, mỗi số hạng chứa ít từ đơn nhất. Có một số phương pháp tối tiểu hóa hàm Boole. Phần này giới thiệu hai phương pháp thường được áp dụng nhiều nhất là phương pháp biến đổi đại số và phương pháp biểu đồ Karnaugh.

❖ Phương pháp biến đổi đại số

Phương pháp biến đổi đại số dựa trên định nghĩa và tính chất của các phép toán của đại số Boole để viết lại hàm Boole một cách tương đương sao cho giảm được số các tích Boole cũng như các từ đơn so với hàm Boole ban đầu.

✓ **Ví dụ 6.4.1** Cực tiểu hóa hàm Boole $f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z$.

Giải: Ta có $f(x, y, z) = xyz + x\bar{y}z = (y + \bar{y})xz = 1.xz = xz$. Rõ ràng hàm Boole $f(x, y, z) = xz$ là cực tiểu hóa của hàm Boole đã cho. Mạch logic thực hiện hàm Boole ban đầu cần bốn cổng logic trong khi mạch thực hiện hàm Boole được cực tiểu hóa chỉ cần một cổng logic.

Ngoài các tính chất của các phép toán đại số Boole, khi thực hiện biến đổi hàm Boole chúng ta có thể áp dụng bổ đề sau.

Bổ đề 6.4.1 Nếu f và g là các hàm Boole thì $f\overline{g} + g = f + g$.

Chứng minh: Áp dụng luật hấp thụ, ta có

$$f\overline{g} + g = f\overline{g} + (fg + g)$$

$$= f(\overline{g} + g) + g = f + g.$$

✓ **Ví dụ 6.4.2** Cực tiểu hóa hàm Boole $f(x, y, z) = xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$.

Giải: Áp dụng các tính chất của các phép toán đại số Boole và Bổ đề 1, ta có

$$f(x, y, z) = xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} = xyz + x(\overline{y} + y)\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$$

$$= xyz + x\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} = x(yz + \overline{z}) + \overline{x}y\overline{z}$$

$$= x(y + \overline{z}) + \overline{x}y\overline{z} \quad \text{(Bổ đề 1)}$$

$$= xy + x\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} = xy + (x + \overline{x}y)\overline{z}$$

$$= xy + (x + y)\overline{z} = xy + x\overline{z} + y\overline{z}.$$

Vậy, hàm Boole được cực tiểu hóa thành $f(x, y, z) = xy + x\overline{z} + y\overline{z}$.

❖ Phương pháp biểu đồ Karnaugh

Phương pháp biến đổi đại số dẫn đến một hàm Boole đơn giản hơn, nhưng có thể không phải là một hàm Boole tối tiểu bởi vì có thể có nhiều cách biến đổi, mỗi cách biến đổi có thể dẫn đến các kết quả khác nhau. Phương pháp biểu đồ Karnaugh khắc phục hạn chế của phương pháp biến đổi đại số bằng cách sử dụng một biểu đồ tính toán chung có tính trực quan và luôn luôn cho hàm Boole tối tiểu. Sau đây, chúng ta sẽ xem xét cách sử dụng phương pháp biểu đồ Karnaugh để cực tiểu hóa hàm Boole 2, 3 và 4 biến.

Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 2 biến là một hình chữ nhật gồm 4 ô biểu diễn 4 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole như Hình 6.4.1.

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\,\bar{y}$

Hình 6.4.1: Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 2 biến

Hai ô trong biểu đồ được gọi là kề nhau nếu các từ tối tiểu tương ứng với hai ô này chỉ khác nhau một từ đơn. Chẳng hạn, hai ô tương ứng với xy và $x\bar{y}$ là kề nhau. Khi kết hợp các từ tối tiểu trong hai ô kề nhau theo phép lấy tổng Boole thì được một từ đơn tương ứng với hình chữ nhật có được bằng cách ghép hai ô đó. Chẳng hạn, $xy + x\bar{y} = x(y + \bar{y}) = x$ là từ đơn tương ứng với hình chữ nhật được ghép từ hai ô chứa xy và $x\bar{y}$. Chúng ta sẽ dùng nguyên tắc kết hợp này, kết hợp các biến và các từ tối tiểu để được hàm Boole cực tiểu trên biểu đồ Karnaugh của nó. Để đơn giản, chúng ta ghi số 1 vào các ô tương ứng với các tích Boole trong hàm Boole và kết hợp các tích tương ứng với các ô chứa số 1 kề nhau để được các từ đơn tương ứng với các hình chữ nhật lớn hơn, từ đó có được hàm Boole cực tiểu. Nếu tất cả các ô của biểu đồ Karnaugh của hàm Boole đều ghi số 1 thì kết quả kết hợp là hàm Boole bằng 1, đó cũng là hàm Boole cực tiểu hóa.

✓ **Ví dụ 6.4.3** Cực tiểu hóa hàm Boole $f(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}.\bar{y}$.

Giải: Biểu đồ Karnaugh của $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}.\bar{y}$ với các ô chứa số 1 tương ứng với các tích Boole như Hình 6.4.2.

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

Hình 6.4.2: Biểu đồ Karnaugh của hàm *f*(*x*, *y*)

Kết hợp các ô chứa số 1 tương ứng $x\bar{y}$ và $\bar{x}.\bar{y}$ ta được $\bar{y}$ và các ô chứa số 1 tương ứng với $\bar{x}y$ và $\bar{x}.\bar{y}$ ta được $\bar{x}$ như Hình 6.4.3. Lưu ý là chúng ta có thể kết hợp một ô nhiều lần với các ô kề nó. Chẳng hạn, ô chứa số 1 tương ứng với $\bar{x}.\bar{y}$ được kết hợp hai lần với $x\bar{y}$ và $\bar{x}y$. Việc này có thể thực hiện được là do tính lũy đẳng của phép tính tổng Boole như đã nêu trong Phần 6.1. Kết quả ta được hàm Boole cực tiểu là $\bar{x} + \bar{y}$.

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

Hình 6.4.3: Kết hợp các tích Boole của hàm *f*(*x*, *y*)

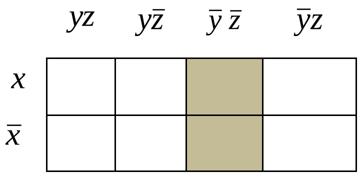
Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 3 biến là một hình chữ nhật gồm 8 ô biểu diễn 8 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole như Hình 6.4.4.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$x\,\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}z$

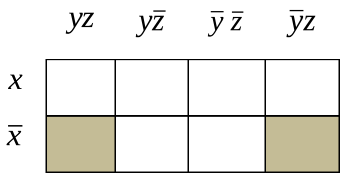
Hình 6.4.4 Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 3 biến

Tương tự như biểu đồ của hàm Boole 2 biến, hai ô là kề nhau trong biểu đồ của hàm Boole 3 biến nếu hai từ tối tiểu tương ứng chỉ khác nhau một từ đơn. Như vậy, hai ô tương ứng với xyz và $x\,\bar{y}z$ là kề nhau. Tương tự, hai ô tương ứng với $\bar{x}yz$ và $\bar{x}\,\bar{y}z$ cũng kề nhau. Như vậy, chúng ta cũng có thể coi biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 3 biến là một hình trụ tròn với 8 ô tạo thành mặt xung quanh biểu diễn 8 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole.

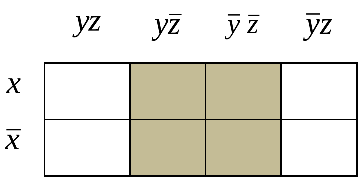
Khi kết hợp các từ tối tiểu trong hai ô kề nhau theo phép lấy tổng Boole thì được một tích hai từ đơn tương ứng với hình chữ nhật có được bằng cách ghép hai ô đó. Chẳng hạn, $\bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}z = \bar{x}(y+\bar{y})z = \bar{x}z$ là tích hai từ đơn tương ứng với hình chữ nhật được ghép từ hai ô chứa $\bar{x}yz$ và $\bar{x}\,\bar{y}z$. Một cách khái quát, khi chúng ta kết hợp các từ tối tiểu trong một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô hoặc 4 ô bằng phép lấy tổng Boole thì được một tích gồm 3, 2 hoặc 1 từ đơn. Một hình chữ nhật gồm 1, 2 hoặc 4 ô trên biểu đồ Karnaugh của hàm Boole được gọi là một khối và tương ứng biểu diễn một tích 3, 2 hoặc 1 từ đơn. Khối gồm toàn bộ 8 ô biểu diễn hàm Boole bằng 1 với mọi *x*, *y*, *z*. Hình 6.4.5 biểu diễn một số khối ứng với tích các từ đơn trên biểu đồ Karnaugh của hàm Boole ba biến.



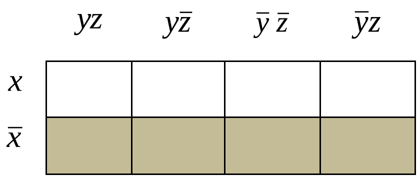
$\bar{y}\,\bar{z} = x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$



$\bar{x}z = \bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}z$



$\bar{z} = xy\bar{z} + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$



$\bar{x} = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}z$

Hình 6.4.5: Một số khối trên trên biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 3 biến

Như vậy, nếu một hàm Boole chỉ được biểu diễn bởi một khối trên biểu đồ Karnaugh của nó thì khối càng lớn hàm Boole càng đơn giản. Chúng ta sẽ áp dụng nguyên lý này để xác định các khối lớn nhất có thể trong biểu đồ Karnaugh của hàm Boole và tổ hợp các khối này để được hàm Boole cực tiểu. Cụ thể, để tìm hàm Boole cực tiểu hóa ta thực hiện các bước sau:

1. Ghi số 1 vào các ô trong các khối trên biểu đồ Karnaugh tương ứng với các tích Boole trong hàm Boole.
2. Tìm tất cả các khối lớn nhất bao gồm các ô chứa số 1.
3. Xác định hàm Boole cực tiểu bằng cách lấy tổng các tích tương ứng với các khối lớn nhất phủ kín các ô chứa số 1 trên biểu đồ Karnaugh của nó.

Chúng ta lưu ý rằng, một khối lớn nhất bao gồm các ô chứa số 1 là một khối không bị chứa trong bất kỳ một khối nào bao gồm các số 1 khác.

✓ **Ví dụ 6.4.4** Cực tiểu hóa hàm Boole $f(x, y, z) = x\bar{y}z + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}z + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$.

Giải: Biểu đồ Karnaugh của $x\bar{y}z + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}z + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ với các ô chứa số 1 tương ứng với các tích Boole như Hình 6.4.6.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

Hình 6.4.6: Biểu đồ Karnaugh của hàm *f*(*x*, *y*, *z*)

Có hai khối lớn nhất tương ứng với các tích Boole (đơn thức) biểu diễn chúng như hình Hình 6.4.7.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$	1			1

Khối lớn nhất ứng với $\bar{x}z$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$			1	1

Khối lớn nhất ứng với $\bar{y}$

Hình 6.4.7: Các khối lớn nhất trên biểu đồ của hàm *f*(*x*, *y*, *z*)

Từ các tích Boole ứng với các khối lớn nhất phủ biểu đồ Karnaugh của hàm Boole ta có hàm Boole cực tiểu của hàm Boole đã cho là $\bar{x}z + \bar{y}$.

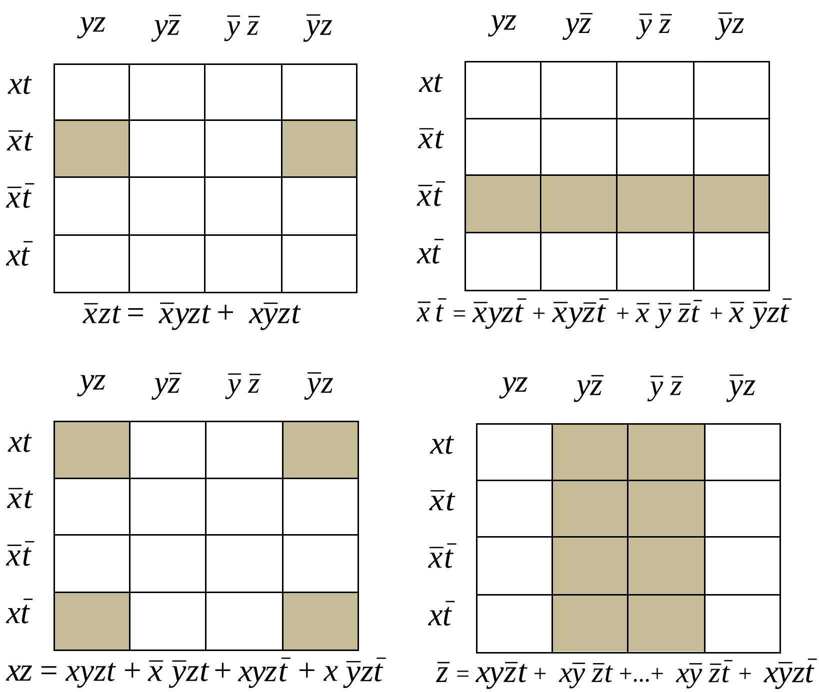
Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 4 biến là một hình chữ nhật gồm 16 ô biểu diễn 16 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole như Hình 6.4.8.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
xt	$xyzt$	$xy\bar{z}t$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}t$	$x\,\bar{y}zt$
$\bar{x}t$	$\bar{x}yzt$	$\bar{x}y\bar{z}t$	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}t$	$\bar{x}\,\bar{y}zt$
$\bar{x}\bar{t}$	$\bar{x}yz\bar{t}$	$\bar{x}y\bar{z}\bar{t}$	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\bar{t}$	$\bar{x}\,\bar{y}z\bar{t}$
$x\bar{t}$	$xyz\bar{t}$	$xy\bar{z}\bar{t}$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}\bar{t}$	$x\,\bar{y}z\bar{t}$

Hình 6.4.8: Biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 4 biến

Tương tự như biểu đồ của hàm Boole 3 biến, hai ô là kề nhau trong biểu đồ của hàm Boole 4 biến nếu hai từ tối tiểu tương ứng chỉ khác nhau một từ đơn. Chẳng hạn, hai ô tương ứng với $\bar{x}yzt$ và $\bar{x}y\bar{z}t$ là kề nhau. Tương tự, hai ô tương ứng với $\bar{x}yzt$ và $\bar{x}\,\bar{y}zt$ cũng kề nhau. Chúng ta cũng có thể coi biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 4 biến là một hình trụ tròn với 16 ô tạo thành mặt xung quanh biểu diễn 16 từ tối tiểu có thể có của hàm Boole.

Khi kết hợp các từ tối tiểu trong hai ô kề nhau theo phép lấy tổng Boole thì được một tích ba từ đơn tương ứng với hình chữ nhật có được bằng cách ghép hai ô đó. Chẳng hạn, $\bar{x}yzt + \bar{x}y\bar{z}t = \bar{x}y(z + \bar{z})t = \bar{x}yt$ là tích ba từ đơn tương ứng với hình chữ nhật được ghép từ hai ô chứa $\bar{x}yzt$ và $\bar{x}y\bar{z}t$. Một cách khái quát, khi chúng ta kết hợp các từ tối tiểu trong một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô, 4 ô hoặc 8 ô bằng phép lấy tổng Boole thì được một tích gồm 4, 3, 2 hoặc 1 từ đơn. Một hình chữ nhật gồm 1 ô, 2 ô, 4 ô hoặc 8 ô trên biểu đồ Karnaugh của hàm Boole được gọi là một khối và tương ứng biểu diễn một tích 4, 3, 2 hoặc 1 từ đơn. Khối gồm toàn bộ 16 ô biểu diễn hàm Boole bằng 1 với mọi *x*, *y*, *z*, *t*. Hình 6.4.9 biểu diễn một số khối ứng với tích các từ đơn trên biểu đồ Karnaugh của hàm Boole bốn biến.



Hình 6.4.9: Một số khối trên trên biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 4 biến

Tương tự như khối trong biểu đồ Karnaugh của hàm Boole ba biến, khối trong biểu đồ Karnaugh của hàm Boole bốn biến càng lớn thì tích Boole tương ứng càng đơn giản.

Chúng ta sẽ áp dụng nguyên lý này để xác định các khối lớn nhất có thể trong biểu đồ Karnaugh của hàm Boole bốn biến và tổ hợp các các khối này để được hàm Boole cực tiểu. Cụ thể, để tìm hàm Boole cực tiểu ta thực hiện các bước sau:

1. Ghi số 1 vào các ô trong các khối trên biểu đồ Karnaugh tương ứng với các tích Boole trong hàm Boole.

2. Tìm tất cả các khối lớn nhất bao gồm các ô chứa số 1.

3. Xác định hàm Boole cực tiểu bằng cách lấy tổng các tích tương ứng với các khối lớn nhất phủ kín các ô chứa số 1 trên biểu đồ Karnaugh của nó.

Ở đây, chúng ta cũng lưu ý rằng, một khối bao gồm các ô chứa số 1 được gọi là lớn nhất nếu nó không bị chứa trong bất kỳ một khối nào bao gồm các số 1 khác.

✓ **Ví dụ 6.4.5** Cực tiểu hóa hàm Boole f
$= x\bar{y}.\bar{z}t + \bar{x}yzt + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}.\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}.\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\bar{t}$.

Giải: Biểu đồ Karnaugh của
$x\bar{y}.\bar{z}t + \bar{x}yzt + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}t + x\bar{y}.\bar{z}.\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}.\bar{t} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\bar{t}$ với các ô chứa số 1 tương ứng với các tích Boole như Hình 6.4.10.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{y}z$
xt			1	
$\bar{x}t$	1	1	1	
$\bar{x}\bar{t}$		1	1	
$x\bar{t}$			1	

Hình 6.4.10: Biểu đồ Karnaugh của f

Có ba khối lớn nhất tương ứng với các tích Boole biểu diễn chúng như hình Hình 6.4.11.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
xt				
$\bar{x}t$	1	1		
$\bar{x}\bar{t}$				
$x\bar{t}$				

Khối lớn nhất ứng với $\bar{x}yt$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
xt				
$\bar{x}t$		1	1	
$\bar{x}\bar{t}$		1	1	
$x\bar{t}$				

Khối lớn nhất ứng với $\bar{x}\bar{z}$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
xt			1	
$\bar{x}t$			1	
$\bar{x}\bar{t}$			1	
$x\bar{t}$			1	

Khối lớn nhất ứng với $\bar{y}\bar{z}$

Hình 6.4.11: Các khối lớn nhất trên biểu đồ Karnaugh của hàm *f*

Từ các tích Boole ứng với các khối lớn nhất phủ biểu đồ Karnaugh của hàm Boole ta có hàm Boole cực tiểu của hàm Boole *f* đã cho là $\bar{x}yt + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$.

Cực tiểu hóa hàm Boole 5, 6 biến bằng phương pháp biểu đồ Karnaugh được thực hiện tương tự như đối với hàm Boole 3 và 4 biến nhưng biểu đồ Karnaugh của chúng được tổ chức bằng cách kết hợp nhiều lớp hình chữ nhật 16 ô thay vì các hình chữ nhật 32 và 64 ô. Chẳng hạn, biểu đồ

Karnaugh của hàm Boole 5 biến gồm 2 lớp hình chữ nhật 16 ô, biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 6 biến gồm 4 lớp hình chữ nhật 16. Phương pháp biểu đồ Karnaugh chỉ thích hợp cho các hàm Boole ít hơn 6 biến. Để cực tiểu hóa hàm Boole nhiều biến hơn ta có thể áp dụng phương pháp Quine-McCluskey được giới thiệu bởi Rosen trong tài liệu tham khảo cuối sách này.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng trong một đại số Boole, phần bù của phần tử 0 là phần tử 1 và ngược lại.

2. Chứng minh rằng trong một đại số Boole, nếu $x \vee y = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$, nếu $x \wedge y = 1$ thì $x = 1$ và $y = 1$.

3. Cho S là tập hợp các ước số nguyên dương của 30, với các phép toán $\vee$, $\wedge$ được định nghĩa trên S như sau:

$$a \wedge b = \text{UCLN}(a, b),\ \ a \vee b = \text{BCNN}(a, b),\ \forall a, b \in S.$$

Chứng tỏ rằng S cùng với các phép toán $\vee$, $\wedge$ lập thành một đại số Boole.

4. Giả sử $\mathcal{A}$ là một đại số Boole, một tập con $B \neq \varnothing$ của $\mathcal{A}$ được gọi là một đại số con của $\mathcal{A}$ nếu với mọi $x, y \in B$ thì $x \vee y$, $x \wedge y$ và $\bar{x}$ cũng là phần tử của B.

a. Chứng minh rằng nếu B là một đại số con của $\mathcal{A}$ thì $0, 1 \in B$.

b. Với $\mathcal{A} = \wp(\{a, b, c\})$, hãy tìm tất cả các đại số con của $\mathcal{A}$.

c. Giả sử B là một tập con của $\mathcal{A}$ sao cho với mọi $x, y \in B$, thì $x \vee y$, $\vec{x} \in B$. Chứng minh B là một đại số con của $\mathcal{A}$.

5. Giả sử A và B là hai đại số boole, trên $A \times B$ định nghĩa

$(x, y) \vee (z, t) = (x \vee z, y \vee t)$

$(x, y) \wedge (z, t) = (x \wedge z, y \wedge t)$

$\overline{(x, y)} = (\bar{x}, \bar{y})$

Chứng minh rằng $A \times B$ là một đại số boole với các phép toán trên.

6. Tìm số các hàm boole 6 biến thỏa điều kiện:

a. Lấy giá trị 1 tại các điểm $(x_1, x_2, ..., x_6)$ có đúng 2 thành phần có giá trị 1.

b. Lấy giá trị 1 tại các điểm $(x_1, x_2, ..., x_6)$ có ít nhất 2 thành phần có giá trị 1.

c. Không phụ thuộc vào biến thứ nhất.

d. Không phụ thuộc vào 3 biến đầu.

7. Tìm các giá trị của biến Boole *x* thoả mãn các phương trình sau:

a. $x.1 = 0$

b. $x.1 = x$

c. $x + x = 0$

d. $x.\bar{x} = 1$

8. Tìm giá trị của các biến Boole *x* và *y* thỏa mãn phương trình $xy = x+y$.

9. Chứng minh rằng:

a. $(x+y).(x+\bar{y}) = y$;

b. $(x.y)+(\bar{x}.z) = (x+z).(\bar{x}+y)$.

c. $x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z = \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z}$

10. Lập bảng giá trị của mỗi hàm Boole sau:

a. $f(x, y, z) = \bar{x}y$

b. $f(x, y, z) = \bar{x} + y$

c. $f(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{y}x$

d. $f(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$

e. $f(x, y, z) = \bar{x}(yz + \bar{y}\,\bar{z})$

11. Vẽ mạch logic của các hàm Boole trong bài tập 10.

12. Tìm dạng tuyển chính tắc của hàm Boole *f* sao cho

a. Tập các giá trị của (x, y, z) để $f(x, y, z)$ bằng 1 là {000, 100, 101, 111}

b. Tập các giá trị của (x, y, z) để $f(x, y, z)$ bằng 1 là {100, 110, 101, 000, 111}

c. Tập các giá trị của (x, y, z) để $f(x, y, z)$ bằng 1 là {010, 110, 101, 000, 111}

13. Tìm dạng tuyển chính tắc của các hàm Boole

a. $f(x,y,z) = yz + \bar{x}\bar{z}$

b. $f(x,y,z) = \bar{x}y$

c. $f(x,y,z) = \bar{x} + y + z$

d. $f(x,y,z) = x + yz + \bar{x}yz + x\bar{y}z$

e. $f(x,y,z) = \bar{x}y + \bar{y}x$

f. $f(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}\bar{z}$

g. $f(x,y,z) = x + y + x\,\bar{z}$

h. $f(x,y,z) = xyz + x\,y\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}z$

14. Tìm dạng tuyển chính tắc của hàm Boole $f(x, y, z)$ biết *f* bằng 1 khi và chỉ khi:

a. $x = 0$

b. $x + y = 0$

c. $xy = 0$

d. $xyz = 0$

15. Cho các hàm Boole f_1, f_2, f_3 xác định bởi bảng sau:

x	y	z	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Vẽ mạch thực hiện các hàm Boole này.

16. Hãy thiết kế một mạch logic thực hiện điều khiển một hệ thống đèn có hai công tắc sao cho khi mở một công tắc bất kỳ hệ thống đèn đang tắt sẽ sáng và đang sáng sẽ tắt.

17. Dùng bộ nữa cộng và bộ cộng để thiết kế một mạch lôgic cho phép cộng hai số nguyên 6 bit.

18. Dùng phương pháp biến đổi và biểu đồ Karnaugh, tìm hàm Boole cực tiểu của các hàm Boole ba biến sau:

a. $\bar{x}yz + \bar{x}.\bar{y}z$

b. $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

c. $xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}.\bar{y}z$

d. $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$.

19. Dùng phương pháp biểu đồ Karnaugh, tìm hàm Boole cực tiểu của hàm Boole ba biến sau:

$$(x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)$$

20. Dùng phương pháp biểu đồ Karnaugh, tìm công thức tối tiểu của các hàm Boole sau:

a. $xyzt + x\bar{y}zt + x\bar{y}.\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}t + \bar{x}.\bar{y}zt$

b. $xy\bar{z}t + x\bar{y}zt + \bar{x}yzt + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}.\bar{y}z\bar{t}$

c. $\vec{z}(x\bar{y} + yt) + y(x\bar{z} + \bar{x}z)$

d. $xyzt + \bar{x}.\bar{y} + x\bar{z}t + y\bar{z}.\bar{t}$

e. $xyzt + x\bar{y} + x\bar{z} + yz + xy(\bar{z} + \bar{t})$

f. $yt(x + \bar{z}) + \bar{x}(\bar{z}.\bar{t} + yt) + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}t$

g. $\bar{y}(zt + \bar{z}\bar{t}) + y(\bar{z}\bar{t} + xzt) + \bar{x}zt$

h. $\bar{z}\bar{t} + xy\bar{t} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + \bar{y}zt$

i. $(x + t)(x + z)(y + t)(y + z)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Rosen K.H. *Discrete mathematics and its applications*. McGraw-Hill Book Company, 2012.

2. Hein J.L. *Discrete mathematics*. Jones and Bartlett Publishers, 1995.

3. Hein J.L. *Discrete structures, logic, and computability*. Jones and Bartlett Publisher, 2009.

4. Susanna S.E. *Discrete mathematics with applications*. Thomson Brooks/Cole, 2004.

5. Grimaldi R.P. *Discrete and combinatorial mathematics*: *An applied introduction*. Addison Wesley, 1998.

6. Johnsonbaugh R. *Discrete mathematics*. Pearson Publisher, 2007.

7. Goodaire E.G., Parmenter M.M. *Discrete mathematics with graph theory*. Pearson Publisher, 2005.

8. Kolman B., Busby R., Ross S.C. *Discrete mathematical structures*. Pearson Publisher, 2008.

9. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. *Concrete Mathematics: A foundation for computer science*. Addison-Wesley, 1994.

10. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: *Algorithms and complexity*. Dover Publications, 1998.

11. Gould R. *Graph theory*. Dover Publications, 2012.

12. Klenk V. *Understanding symbolic logic*. Pearson Publisher, 2007.

13. Chartrand G., Polimeni A.D., Zhang P. *Mathematical proofs: A transition to advanced mathematics*. Pearson Publisher, 2012.

14. Levitin A. *Introduction to the design and analysis of algorithms*. Addison-Wesley, 2012.

15. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.D., Stein C. *Introduction to algorithms*. McGraw-Hill, 2009.

16. Hoffer J.A., Ramesh V., Topi H. *Modern database management*. Pearson Prentice Hall, 2012.

17. Silberschat A., Korth H., Sudarsha S. *Database system concepts*. McGraw-Hill, 2006.

18. Barker-Plummer D., Barwise J., Etchemendy J. *Language, proof, and logic*. Center for the Study of Language and Information of Stanford University, 2011.

19. Rosen K.H., Grossman J. *Student's solutions guide for discrete mathematics and its applications*. McGraw-Hill, 2011.

20. Lipschutz S. *2000 solved problems in discrete mathematics*. McGraw-Hill, 1991.

21. Nguyễn Hữu Anh. *Toán rời rạc*. NXB Lao động Xã hội, 2010.

22. Hoàng Xuân Sính. *Đại số đại cương*. NXB Giáo dục, 1977.

23. Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành. *Toán rời rạc*. NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.

24. Hoàng Chúng. *Đại cương về toán học hữu hạn*. NXB Giáo dục, 1997.

25. Rasiowa H. *Cơ sở của toán học hiện đại*. NXB Khoa học Kỹ thuật (dịch Trần Tất Thắng), 1995.

MỤC LỤC

TRANG LUU CHIEU