



FORMELSAMMLUNG SIGNALE UND SYSTEME (SUS)

nach Vorlesungsunterlagen von
R.Huber, S.Hipp, A.Maier, R.Sattler, A.Sehr, T.Stücke

Originalversion:	Ayham Alhulaibi
Überarbeitet von:	Tony Pham
Letzter Stand:	23. Juli 2024
Lizenz:	GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Einheiten	1
1.2 Quadratische Formeln	1
1.3 Logarithmische Maße/Pegel	1
1.3.1 Rechnen mit Logarithmen	1
1.4 Rechnen mit Wurzeln	1
1.5 Rechnen mit Potenzen	1
1.6 Trigonometrische Formeln	1
2 Signale im Zeitbereich	2
2.1 Signalcharakterisierung	2
2.2 Elementarsignale	2
3 Systeme	3
3.1 Eigenschaften	3
3.2 LTI-Systeme	3
3.2.1 Beschreibung	3
3.2.2 DGL	3
3.2.3 Impuls & Sprungantwort	3
3.2.4 Faltung	3
3.3 Frequenzgang	4
3.4 Übertragungsfunktion (Ü-Fkt.)	4
3.4.1 Gebrochen-rationale Ü-Fkt.	4
3.5 Pol-Nullstellen-Diagramm	4
3.5.1 Frequenzgang aus dem P/N-Diagramm	4
3.6 Zusammenschaltung LTI-Systeme	5
3.7 Bode-Diagramm	5
3.7.1 Merkmale	5
3.7.2 Vorgehen	5
3.8 Elementare Übertragungsglieder	7
3.9 Übersicht wichtiger Übertragungsglieder	10
4 Zweitore, Vierpole	11
4.1 Zweitorgleichungen	11
4.1.1 Parameterumrechnung	11
4.2 Betriebsarten, Bezugspfeilsystem	11
4.3 ZT-Eigenschaften	11
4.4 Matrizen elementarer Zweitore	12
4.5 Zusammenschalten von Zweitoren	13
4.5.1 Torbedingungen	13
4.5.2 Zweitor-Schaltungen	13
4.5.3 Idealer Trennverstärker/OP	13
4.5.4 Operationsverstärker (OP)	13
4.6 Ersatzschaltbilder	13
4.6.1 Ideale gesteuerte Quellen	13
4.6.2 Lineare gesteuerte Quellen	13
4.6.3 Matrizen für gesteuerte Quellen	13
4.6.4 Ersatzschaltbilder (ESB)	13
4.7 Beschaltete Zweitore	14
4.7.1 Ein- und Ausgangsimpedanz an Seite 1/2	14
4.7.2 Ersatzquelle	14
4.7.3 Wellenwiderstand	14
4.7.4 Scheinleistungsanpassung	14
4.7.5 Kettenwiderstand	14
5 Fourierreihe periodischer Signale	15
5.1 Reelle Fourierreihe (FR)	15
5.2 Komplexe Fourierreihe	15
5.3 Symmetrieeigenschaften	15
5.3.1 Halbwellensymmetrie	15
5.4 Verschiebungssatz	15
5.5 FR und LTI-Systeme	16

5.6	FR-Tabelle - Bischoff	16
5.7	Kenngrößen periodischer Signale	21
5.7.1	Effektivwert, Klirrfaktor, Mischgrößen	21
5.7.2	Leistungen	21
6	Fourier-Transformation (FT)	22
6.1	Hin- und Rücktransformation	22
6.2	FT periodischer Signale	22
6.3	Zeit-Bandbreite-Gesetz	22
6.4	Eigenschaften der FT	23
6.5	Symmetrieeigenschaften	23
6.6	Korrespondenzen der FT	23
6.7	Faltungsregeln	23
7	Laplace-Transformation (LPT)	24
7.1	LTI-Systeme im Bildbereich (BB)	24
7.2	Impuls- und Sprungantwort im BB	24
7.3	Zusammenhang LPT \leftrightarrow FT	24
7.4	P/N-Diagramm: Systemeigenschaften	24
7.5	Partialbruchzerlegung (PBZ)	24
7.6	Eigenschaften der LPT	24
7.7	Korrespondenzen der LPT	25
8	Schaltvorgänge	26
8.1	Berechnungsmethoden	26
8.1.1	Vereinfachte Methode	26
8.1.2	Laplace-Transformation der DGL	26
8.1.3	Leere Energiespeicher mit LPT & KWR	26
8.1.4	Geladene Energiespeicher mit LPT	26
8.2	Quellenumwandlung	26
8.3	Bauteilgleichungen	26
9	Zeitdiskrete Systeme	27
9.1	Elementare, zeitdiskrete Signale	27
9.2	A/D-Wandlung	27
9.3	Zeitdiskrete LTI-Systeme	28
9.3.1	Systemeigenschaften	28
9.3.2	Impuls- & Systemantwort, Faltung	28
9.3.3	Faltung mit Hilfstabelle	28
9.3.4	Differenzengleichung \Leftrightarrow Ü-Fkt.	28
9.3.5	Signalflussplan/-graph	28
9.4	Zeitdiskrete Signale im Spektrum	28
9.5	Zeitdiskrete Fouriertransformation	29
9.6	z-Transformation	29
9.6.1	Rücktransformation mit PBZ	29
9.6.2	Eigenschaften der z-Transformation	29
9.6.3	Korrespondenzen der z-Transformation	29
9.7	LTI-Systeme im Bildbereich	30
9.7.1	Impuls- und Sprungantwort im BB	30
9.7.2	PN-Diagramm \Rightarrow Frequenzgang	30
9.7.3	Systemantwort auf harm. Eingangssignale	30
9.7.4	Klassifizierung von Systemen	30

1 Grundlagen

1.1 Einheiten

Größe	Symbol	Einheit
Kapazität	C	$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$
Induktivität	L	$H = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$

1.2 Quadratische Formeln

$$x^2 + px + q = 0 \rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(-j\omega)^2 = -\omega^2$$

1.3 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße F_n : Spannung, Strom (jeweils Effektivwerte)
Leistungsgröße P_n : Energie, Leistung

- Dämpfungsmaß a in Dezibel [dB]

$$a [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2} \quad a [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{20\text{dB}}} \quad \frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{10\text{dB}}}$$

- absoluter Pegel L mit Bezugswerten P_0, F_0

$$L [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} \quad L [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{20\text{dB}}} \quad \frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{10\text{dB}}}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1\text{mW}$	$L_{\text{P/mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1\text{W}$	$L_{\text{P/W}}$

- relativer Pegel / Maß

Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert P_0

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \text{dB}$$

1.3.1 Rechnen mit Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis): $x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \quad \log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$$

1.4 Rechnen mit Wurzeln

a : Radikant n : Wurzelexponent

$$\text{Merke: } \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \quad x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

1.5 Rechnen mit Potenzen

a : Basis m, n : Exponent

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0) \quad a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1.6 Trigonometrische Formeln

siehe Papula Mathe-FS. S.94 & S.238 (komplexe Fkt.)

Komplex:

$$e^{j\pi k} = (-1)^k \quad \pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \quad -j = e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

$$e^{\pm j\omega_1 t} = \cos(\omega_1 t) \pm j \sin(\omega_1 t) \quad -1 = e^{\pm j\pi} \quad +1 = e^{j2\pi}$$

$$\cos(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2} \quad \sin(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j}$$

Reell:

$$\cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_1 t) \quad \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = +\cos(\omega_1 t)$$

$$\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = +\sin(\omega_1 t) \quad \sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega_1 t)$$

$$\cos(\omega_1 t \pm \pi) = -\cos(\omega_1 t) \quad \sin(\omega_1 t \pm \pi) = -\sin(\omega_1 t)$$

$$\cos(\omega_1 t) = -\cos(\pi + \omega_1 t) \quad \sin(\omega_1 t) = \sin(\pi - \omega_1 t)$$

$$\cos^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega_1 t)] \quad \sin^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega_1 t)]$$

$$\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} = \text{si}(\omega_1 t) = \text{si}(-\omega_1 t)$$

Theoreme:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$$

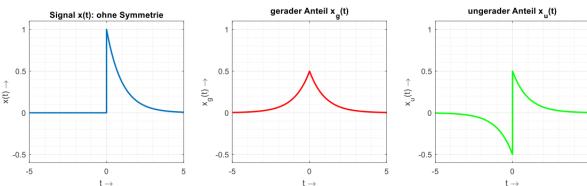
2 Signale im Zeitbereich

2.1 Signalcharakterisierung

- Kontinuierlich \leftrightarrow Diskret
- Deterministisch \leftrightarrow Stochastisch
Deterministisch: $x(t)$ mathematisch beschreibbar.
Stochastisch: Signal zufällig, kein $x(t)$.
- Periodisch \leftrightarrow Aperiodisch
Periodisch, wenn $x(t) = x(k \cdot t + T_p)$ mit $T_p = \frac{2\pi}{k}$
 T_p : Grundperiode/Periodendauer
- Gerade $x(-t) = x(t) \leftrightarrow$ Ungerade: $x(-t) = -x(t)$

Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil: $x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$
- ungerader Anteil: $x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$
- gemischtes Signal: $x(t) = x_G + x_U$



- Energie \leftrightarrow Leistung
(Gesamt-)Energie:

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Mittlere Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \quad (0 < P_x < \infty)$$

Ein Signal ist nie Energie- und Leistungssignal gleichzeitig!

- Korrelationsfunktion
Maß für die Ähnlichkeit zweier Energiesignale.

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

- Signaloperationen
Manipulation/Transformation mit folgenden Parametern:

$$f(t) = A \cdot f(\pm b \cdot t \mp t_0) \leftrightarrow A \cdot f\left(\frac{t \mp t_0}{b}\right)$$

- Zeitverschiebung $t - t_0$: nach **rechts**!
- Zeitskalierung:
Multiplikation mit $b > 1$: Stauchung
Multiplikation mit $0 < b < 1$: Dehnung
Division durch $b > 0$: Dehnung
- Zeitumkehr/-invertierung:
 $-1 \cdot b$: Spiegelung an y-Achse
- Signalinvertierung:
 $-A \cdot f(t)$: Spiegelung an x-Achse

Wichtig: Reihenfolge beachten!
Erst Verschieben, dann Skalieren/Invertieren!

2.2 Elementarsignale

- Sprung-, Heavyside-Fkt., Einheitssprung ε, σ

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(k \cdot t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac-Impuls δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Höhe = ∞ , Fläche = 1.
- Zusammenhang mit Sprungfunktion:
 $\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ $\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$
- Ausblendeeigenschaft:

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion rect
 T : Breite

$$\hat{u} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \hat{u} & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$1 \cdot \text{rect}(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Si-Funktion

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

3 Systeme

3.1 Eigenschaften

1. Speicher

-frei: Vollständige Beschreibung durch xy-Kennlinie, Ausgang $y(t = t_0)$ nur von aktuellen Eingangswerten $x(t = t_0)$ abhängig \rightarrow gedächtnislos.

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

-behaftet: Ausgang inkl. vergangene Werte, keine vollständige Beschreibung durch xy-Kennlinie.

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) \cdot 2x(t - 1)$$

2. Kausalität

Ausgang $y(t = t_0)$ hängt nur von aktuellen + vorherigen Eingangswerten $x(t \leq t_0)$ ab. Keine Zukunftswerte!
Impulsantwort $h(t)$ beginnt ab $t = 0 : t < 0 \rightarrow h(t) = 0$.

$$\text{z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, nicht umgekehrt.
Kausale gebr. rationale Fkt.: Nennergrad \geq Zählergrad.

3. (BIBO-)Stabilität

BIBO: beschränkter Eingang \rightarrow beschränkter Ausgang.

System ist **stabil**, wenn

- $h(t)$ absolut integrierbar ist: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- P/N-Diagramm: alle Pole links der ω -Achse
- gebr. rationale Fkt.: Nennergrad \geq Zählergrad
- *zeitdiskret (ZD):* EK \in Kb
- *ZD:* alle Pole innerhalb des EK
- *ZD:* absolut summierbar: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

z.B.: $y(t) = 50 \cdot x^3(t)$, instabil: $y(t) = e^t \cdot x(t)$

4. Zeitinvarianz

Eingang zeitverschoben \rightarrow Ausgang zeitverschoben.

$$x(t - t_0) = y(t - t_0)$$

$$\text{z.B. } y(t) = t \cdot \sin(t)$$

5. Linearität

Lineares System: Superpositionsprinzip gilt \rightarrow siehe Ausblendeeigenschaft, Zerlegung in gerades/ungerades Signal.

3.2 LTI-Systeme

3.2.1 Beschreibung

LTI-Systeme: Linear, Zeitinvariant (time-invariant).

Operatoren: $+, -, \frac{d}{dt}, \int, t - t_0$ (Verzögerung)

Beschreibung des Ein- und Ausgangsverhalten im

- Zeitbereich $x(t)$: DGL, Signalfußplan, Impulsantwort
- Frequenz- $\underline{X}(\omega)$ bzw. Bildbereich $\underline{X}(s)$: Übertragungs-Fkt., Frequenzgang, Bode- und P/N-Diagramm.

3.2.2 DGL

- Bestimmung Eingangs-/Ausgangsgrößen der Schaltung.
- Gleichgewicht: Maschengleichung für u , Knotengleichungen für i aufstellen.
- DGL enthält nur Konstanten (C, L), u bzw. i in der Grundform und beliebiger Ableitung (bzw. deren Integrale). Integrale durch Ableiten eliminieren.
- u, i durch Systemgrößen mithilfe von Bauteilgleichungen ausdrücken, Schaltung beachten!
- Bauteil-/Zweipolgleichungen:

$$u_R = R \cdot i \quad i_c = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

- DGL 2. Ordnung allgemein:

$$\underbrace{a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a}_{\text{Ausgangsgrößen}} = \underbrace{b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e}_{\text{Eingangsgrößen}}$$

3.2.3 Impuls & Sprungantwort

Impulsanregung	Impulsantwort
$x(t) = \delta(t)$	$y(t) = h(t) = S\{\delta(t)\}$
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$ $\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$ $= x(t) * h(t)$ $h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$
Sprunganregung	Sprungantwort
$x(t) = \varepsilon(t)$	$y(t) = g(t) = S\{\varepsilon(t)\}$
$\varepsilon(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$	$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$

3.2.4 Faltung

Aus $h(t)$ eines LTI-Systems und Eingang $x(t)$ lässt sich Ausgang $y(t)$ durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = [x(t) * h(t)]$$

- $\delta(t)$: neutrales Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Faltung mit verschobenen Dirac-Impuls
 \rightarrow Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Rechenregeln

- $a * b = b * a$ kommutativ
- $a * [b * c] = [a * b] * c$
- $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$
- $a * [b + c] = a * b + a * c$

3.3 Frequenzgang

- Frequenzgang**

$\underline{H}(w)$ existiert nur, wenn ω -Achse \in Kb. (stabil) im PN-Diagramm bzw. alle Pole links der ω -Achse.

$$\underline{H}(w) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{\underline{Y}(w)}{\underline{X}(w)} = \frac{\underline{U}_2(w)}{\underline{U}_1(w)} = |\underline{H}(w)| \cdot e^{j\varphi_H(w)}$$

- Amplitudengang**, Betragsfrequenzgang

LTI-System ändert Eingangssignal um Faktor $A(\omega)$.

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- Phasengang**, Phasenfrequenzgang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

3.4 Übertragungsfunktion (Ü-Fkt.)

- Eigenfunktion**

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : \text{Eigenfunktion} \\ \lambda : \text{Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

Jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = e^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S :

$$y(t) = S\{e^{st}\} = \lambda \cdot e^{st}$$

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- Erweiterung der KWR**

KWR: komplexe Wechselstromrechnung.

Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein Sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega + \sigma$, wenn $\sigma = 0$.

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$

- komplexe Übertragungsfunktion**

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger Ausgang}}{\text{komplexer Zeiger Eingang}}$$

Übertragungsfunktion $H(s)$ mit komplexer Frequenz $s = \sigma + j\omega \rightarrow$ Ersetze $j\omega$ durch s .

3.4.1 Gebrochen-rationale Ü-Fkt.

Grad N des Nennerpolynoms: Ordnung des LTI-Systems = Anzahl unabhäng. Energiespeicher (L, C).

Kausales System, wenn Nennergrad $N \geq M$ Zählergrad.

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n}$$

Beispiel: DGL 2.Ordnung im Zeitbereich:

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_0x(t)$$

→ Ü-Funktion im Bildbereich (System 2.Ordnung):

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

3.5 Pol-Nullstellen-Diagramm

Grafische Darstellung der s-Ebene: P/N-Diagramm.

K : Maßstabs-/Verstärkungsfaktor.

$$\underline{H}(s) = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{o=1}^M (s - z_o)}{\prod_{x=1}^N (s - z_x)} \text{ mit } K = \frac{b_M}{a_N}$$

- \Im -Achse = ω , \Re -Achse = σ
- Alle Pole links der ω -Achse: **stabiles + kausales** System.
- Pole & Nullstellen sind entweder reell (nur auf Re-Achse) oder **paarweise** komplex-konjugiert.

3.5.1 Frequenzgang aus dem P/N-Diagramm

Näherungsweise Bestimmung:

- An der ω -Achse von 0 nach oben entlang gehen.
- Polstelle: **Maxima**/Erhöhung im Amplitudengang.
 - PST nah an s-Ebene: hohe Totzeit, dominant.
 - stabiler Pol: links der ω -Achse.
 - PST im Ursprung: Verhalten → ideales **I-Glied**: Bode: $-20dB/Dek.$, $\varphi = -90^\circ$.
- Nullstelle: **Minima**/Absenkung im Amplitudengang.
 - Nullstelle (NST) auf ω -Achse: NST im Amplitudengang.
 - NST im Ursprung: Verhalten → ideales **D-Glied**: Bode: $+20dB/Dek$, $\varphi = +90^\circ$.

Genaue Bestimmung:

- An der ω -Achse von 0 nach oben entlang gehen.
- Jede Pos. auf ω -Achse: Längen und Winkel der kompl. Zeiger $c_{o,i}$ und $c_{zp,i}$ messen mit Geodreieck.

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\prod_{o=1}^M \text{alle Längen } |c_{o,i}|}{\prod_{p=1}^N \text{alle Längen } |c_{p,i}|}$$

$$\varphi_H(\omega) = (\text{Summe } \angle c_{o,i}\omega) - (\text{Summe } \angle c_{p,i}\omega)$$

Minimalphasiges System:

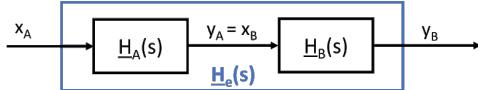
- Alle NST links der ω und σ -Achse.
- Sehr geringe Phasenänderung über Frequenz.
- Geringe Signalverzögerung.

3.6 Zusammenschaltung LTI-Systeme

- Kettenschaltung**

Produkt der Ü-Fkt. der Einzelsysteme.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) = \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)$$



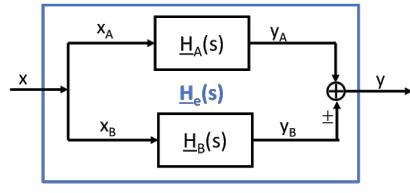
$$Y_B = \underline{H}_B(s) \cdot X_B = \underline{H}_B(s) \cdot Y_A = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) \cdot X_A$$

- Voraussetzung: Rückwirkungsfreiheit (mit Trennverstärker) zwischen $\underline{H}_A(s)$ und $\underline{H}_B(s)$.
- **Bodediagramm:** Addition der einzelnen Glieder beim Amplituden- und Phasengang.

- Parallelschaltung**

Summe der einzelnen Ü-Glieder.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) + \underline{H}_A(s)$$

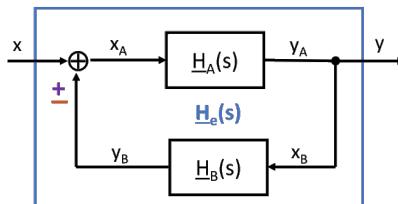


$$\begin{aligned} Y &= Y_A \pm Y_B \\ &= \underline{H}_A(s) \cdot X_A \pm \underline{H}_B(s) \cdot X_B \\ &= (\underline{H}_A(s) + \underline{H}_B(s)) \cdot X \end{aligned}$$

- Rückkopplung**

Mitkopplung mit $-$: y_A vergrößert x_A (BSB: $+$)
Gegenkopplung mit $+$: y_A verkleinert x_A (BSB: $-$)

$$\underline{H}_e(s) = \frac{\underline{H}_A(s)}{1 \mp \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}$$



Beispiel: Kettenschaltung zweier PT_2 -Glieder ohne Trennverstärker.

3.7 Bode-Diagramm

3.7.1 Merkmale

- Kettenschaltung LTI-Systeme**

Addition der Einzel-Bode-Diagramme beim Amplituden- und Phasengang.

- Inverses System**

Durch **Spiegelung** an der x-Achse (Abszisse).

3.7.2 Vorgehen

- Ü-Fkt. des LTI-Systems aufstellen.

Bsp.: Spannungs-Ü-Fkt:

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{U_2}{U_1}$$

- Konstante Faktoren K vor dem Bruch stellen!
- Bauteilelemente in Zeitkonstanten $T = RC$ bzw. $T = \frac{L}{R}$ ausdrücken. → Zeitkonstante $T, \tau \neq$ Periodendauer T
- Ü-Fkt. in bekannte Einzelglieder trennen, in Normalform mit T ausdrücken → siehe Kap. 3.9.
Bsp.: PDT₁-Glied:

$$\underline{H}(s) = K \frac{1 + sT_1}{1 + sT_2}$$

- Berechnen der Eck-/Grenzkreisfrequenzen $\omega_0 = \frac{1}{T}$ und jeweils im Bode-Diagramm eintragen.

- Amplitudengang: $\underline{H}(s)$ mit $\omega_0 = \frac{1}{T}$ umformen:
⇒ **Wichtig:** höchste Potenz von s ohne Vorfaktoren!
Ersetze $s = j\omega$. Merke: $\omega \neq \omega_0$.

Betragsbildung: Zähler und Nenner jeweils Betrag setzen, j fallen lassen.

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{|Z|}{|N|} = \frac{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}}$$

Allgm. Berechnung in dB, Grenzfallbestimmung mit:

$$H(\omega) = 20 \cdot \log_{10} |\underline{H}(\omega)| \text{ für } \omega = 0 \text{ und } \omega \rightarrow \infty$$

Zeichnen: Geradennäherung der Glieder in Kap. 3.9.

Polstelle: Steigung nach unten $-20\text{db}/\text{Dek}$.
Nullstelle: Steigung nach oben $+20\text{db}/\text{Dek}$.

- Phasengang allgemein:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}} \right)$$

Zeichnen: Geradennäherung der Glieder in Kap. 3.9.
Vorzeichen $\pm K$: Beginn bei $\varphi_{+K} = 0^\circ$ oder $\varphi_{-K} = 180^\circ$.
0 bei Null-/Polstelle: $\pm 90^\circ$.

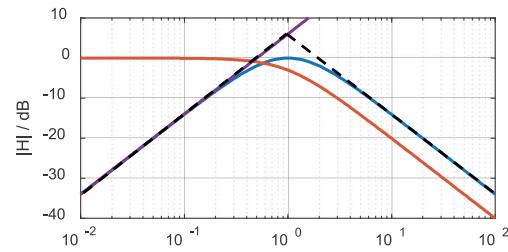
3.8.4 Bodediagramm von Ketten schaltungen

$$\underline{H}_e(\omega) = \underline{H}_1(\omega) \cdot \underline{H}_2(\omega) \cdot \dots$$

$$\frac{\underline{H}_e(\omega)}{\text{dB}} = \frac{\underline{H}_1(\omega)}{\text{dB}} + \frac{\underline{H}_2(\omega)}{\text{dB}} + \dots$$

$$\varphi_e(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots$$

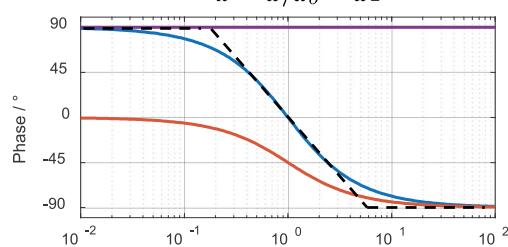
Das Bodediagramm der Ketten schaltung ergibt sich durch **Addition der Bodediagramme** der einzelnen Glieder.



Beispiel 1:

PT₁ - PT₁ - D - Ketten schaltung

Gestrichen: Geradennäherung



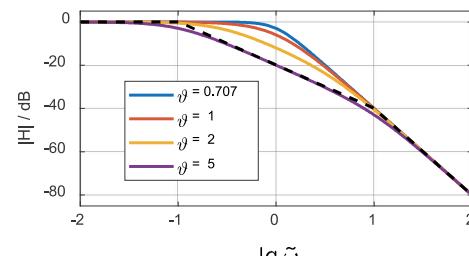
R. Sattler

Signale und Systeme

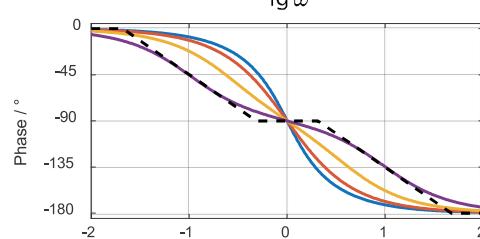
89

3.8.4 PT2-Glied als PT1 - PT1 - Ketten schaltung

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{1 + 2\vartheta Ts + T^2 s^2} = \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \rightarrow \frac{T_{1,2}}{T} = \vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1} = \frac{\omega_{2,1}}{\omega_0}$$



Ab $\vartheta \geq 1/\sqrt{2}$ gibt es keine Resonanzüberhöhung.



Für $\vartheta \geq 1$ kann das PT₂-Glied als Ketten schaltung zweier PT₁-Glieder dargestellt werden.

Das Bodediagramm erhält man durch Addition der Bode-diagramme der beiden PT₁-Glieder.

Die Eckfrequenzen der beiden PT₁-Glieder sind äquidistant zur Eckfrequenz des PT₂-Glieds und kennzeichnen im Amplitudendiagramm den Übergang in die Steigung mit -20 dB/Dekade bzw. mit -40 dB/Dekade.

R. Sattler

Signale und Systeme

90

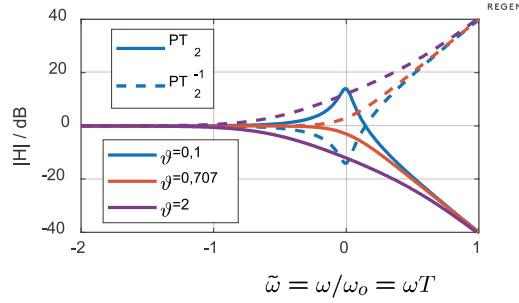
3.8.5 Bode-Diagramm der inversen Übertragungsfunktion

Das Bode-Diagramm der inversen Übertragungsfunktion ergibt sich durch Spiegelung:

Beispiel:

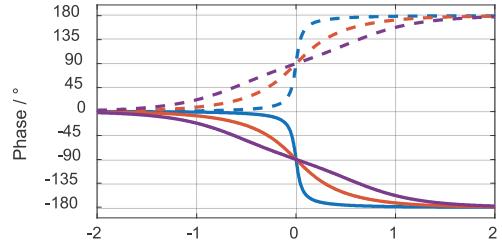
PT₂-Glied

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{1 + 2\vartheta Ts + T^2 s^2}$$



PT₂⁻¹-Glied

$$\underline{H}(s) = \frac{1 + 2\vartheta Ts + T^2 s^2}{1}$$



R. Sattler

Signale und Systeme

91

3.8 Elementare Übertragungsglieder

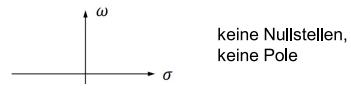
SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme: P-Glied (Proportionalglied)

- Differentialgleichung $y = K_P \cdot x$

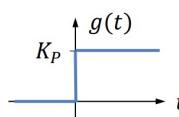
- Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = K_P$

- PN-Diagramm

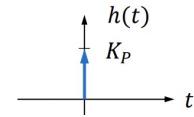


keine Nullstellen,
keine Pole

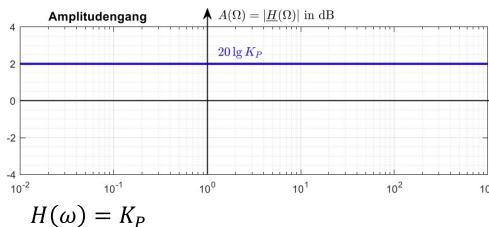
- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$



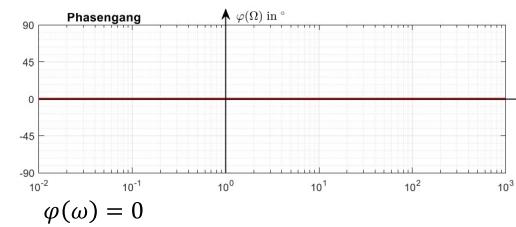
$$h(t) = K_P \cdot \delta(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\omega) = K_P$$



$$\varphi(\omega) = 0$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

ω_B : beliebig

- Eigenschaften: kausal, stabil, speicherfrei

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

19

SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme: D-Glied (Differenzierer)

- Differentialgleichung $y = K_D \cdot \dot{x}$

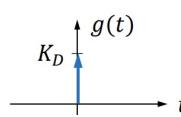
- Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = K_D \cdot s$

- PN-Diagramm

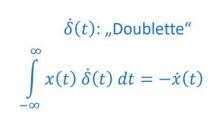


eine Nullstelle bei $s_0=0$ (Ursprung)
keine Pole

- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$



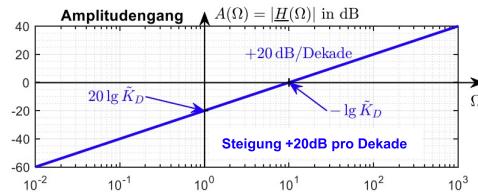
$$h(t) = K_D \cdot \delta'(t)$$



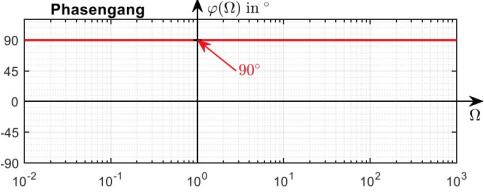
$$\delta'(t): \text{„Doublette“}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt = -\dot{x}(t)$$

- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\omega) = K_D \cdot \omega$$



$$\varphi(\omega) = 90^\circ$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

ω_B : beliebig

$$\tilde{K}_D = \omega_B K_D$$

- Eigenschaften: acausal, instabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

20

SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme: I-Glied (Integrierer)

- Differentialgleichung

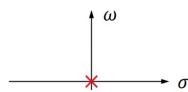
$$\dot{y} = K_I \cdot x$$

$$y = K_I \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

- Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$

$$\underline{H}(s) = \frac{K_I}{s}$$

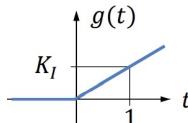
- PN-Diagramm



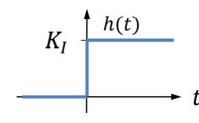
keine Nullstellen
eine Polstelle bei $s_x=0$ (Ursprung)

- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$

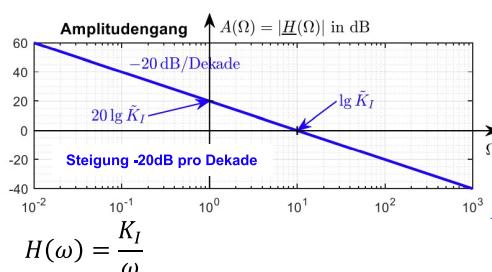
$$g(t) = K_I \cdot t \cdot \varepsilon(t)$$



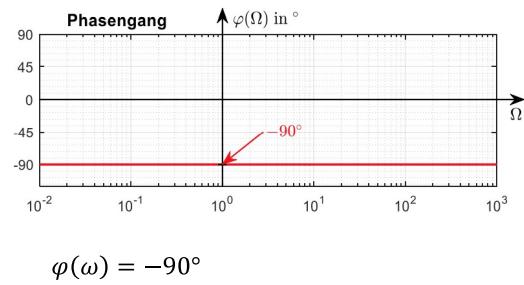
$$h(t) = K_I \cdot \varepsilon(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\omega) = \frac{K_I}{\omega}$$



$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

ω_B : beliebig

$$\tilde{K}_I = \frac{K_I}{\omega_B}$$

- Eigenschaften:

kausal, instabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

21

SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme: PT₁-Glied (Tiefpass 1. Ordnung)

- Differentialgleichung

$$T \cdot \dot{y} + y = K_P \cdot x$$

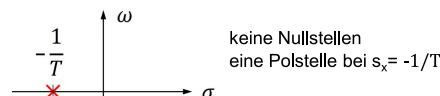
T : Zeitkonstante

- Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$

$$\underline{H}(s) = \frac{K_P}{T \cdot s + 1} = \frac{K_P \cdot \omega_E}{s + \omega_E}$$

$$\omega_E = \frac{1}{T} : \text{Eckfrequenz}$$

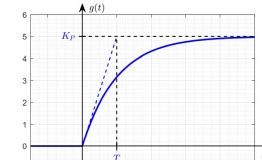
- PN-Diagramm



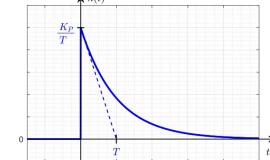
keine Nullstellen
eine Polstelle bei $s_x = -1/T$

- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$

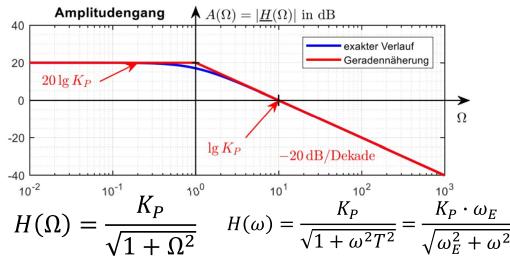
$$g(t) = K_P \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \varepsilon(t)$$



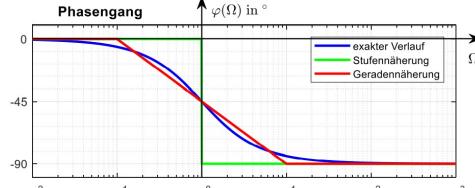
$$h(t) = \frac{K_P}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \varepsilon(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\Omega) = \frac{K_P}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad H(\omega) = \frac{K_P}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = \frac{K_P \cdot \omega_E}{\sqrt{\omega_E^2 + \omega^2}}$$



$$\varphi(\Omega) = -\arctan \Omega \quad \varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

- Eigenschaften:

kausal, stabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

22

SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme: PT_2 -Glied (Tiefpass 2. Ordnung)

- Differentialgleichung $T^2 \cdot \ddot{y} + 2\vartheta T \cdot \dot{y} + y = K_P \cdot x$
 - Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{K_P}{T^2 s^2 + 2\vartheta T s + 1} = \frac{K_P \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\vartheta \omega_0 s + \omega_0^2}$
 - PN-Diagramm Pole: $s_{x1,2} = \frac{1}{T}(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$
 $0 < \vartheta < 1$ Schwingung: konjugiert komplexes Polpaar
 $H(s) = \frac{K_P}{T^2} \frac{1}{(s - s_{x1})(s - s_{x2})}$
 $\vartheta = 1$ aperiod. Grenzfall: doppelter reeller Pol bei $-\omega_0$
 $H(s) = K_P \frac{1}{(1 + sT)^2}$
 $\vartheta > 1$ aperiod. Dämpfung: zwei versch. reelle Pole $s_{x1,2} = \omega_0(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$
 $H(s) = K_P \frac{1}{1 + sT_1} \frac{1}{1 + sT_2}$ mit: $T_{1,2} = -\frac{1}{s_{x1,2}} = \frac{T}{\vartheta \mp \sqrt{\vartheta^2 - 1}} = T(\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$
 - Frequenzgang (Bode-Diagramm) $H(\omega) = \frac{K_P}{1 - \omega^2 T^2 + j\omega 2\vartheta T}$
- 201g k_p hier $k_p=1$ $H(\omega_0) = \frac{k_p}{2\vartheta}$ „Überhöhung“
Steigung -40dB/Dekade
- $$H(\omega) = \frac{K_P}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\vartheta^2 \omega^2 T^2}} \quad H(\Omega) = \frac{K_P}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\vartheta^2 \Omega^2}}$$
-
- zu Schwingfall:
 $s_{x1,2} = -\vartheta \omega_0 \pm j\omega_d$
mit Eigen-, Ausschwingfrequenz ω_d
 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$
-
- $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$

- Eigenschaften: kausal, stabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

23

SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme: PT_2 -Glied (Tiefpass 2. Ordnung)

- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$

$0 < \vartheta < 1$ Schwingung

$$g(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \cdot e^{-\vartheta \omega_0 t} \cdot \cos(\omega_d t - \Theta) \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$$

mit $\Theta = \arcsin(\vartheta)$

$\vartheta = 1$ aperiod. Grenzfall

$$g(t) = \left(1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$$

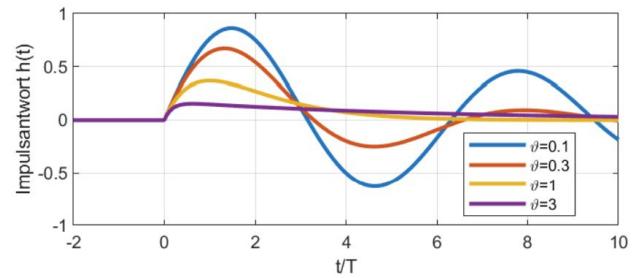
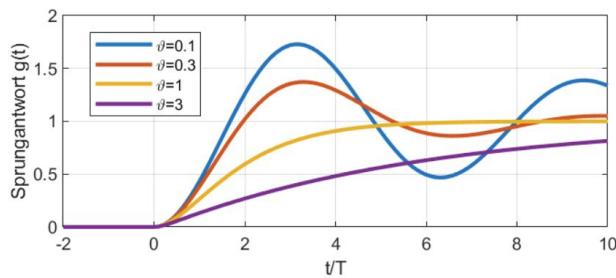
$\vartheta > 1$ aperiod. Dämpfung

$$g(t) = \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$$

$$h(t) = \frac{K_P \omega_0}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \cdot e^{-\vartheta \omega_0 t} \cdot \sin(\omega_d t) \varepsilon(t)$$

$$h(t) = K_P \cdot \frac{t}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \varepsilon(t)$$

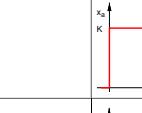
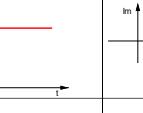
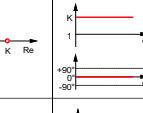
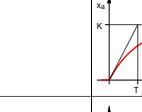
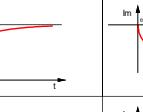
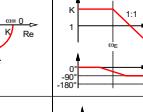
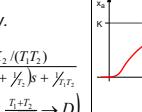
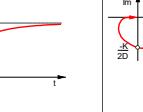
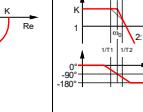
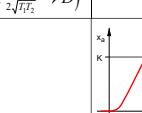
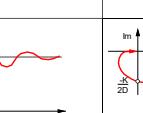
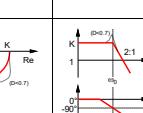
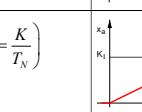
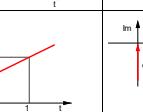
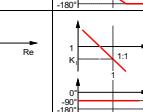
$$h(t) = \left(\frac{1}{T_1 - T_2} \cdot \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$$



Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

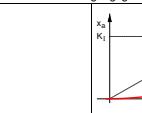
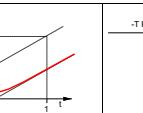
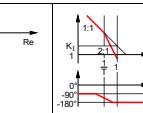
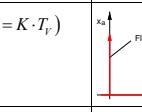
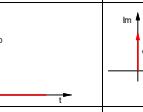
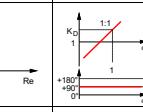
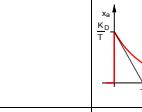
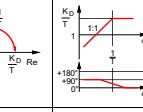
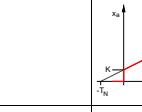
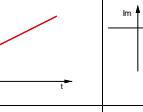
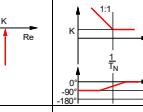
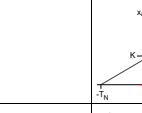
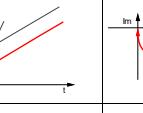
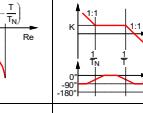
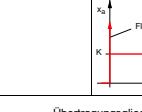
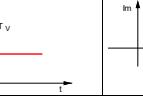
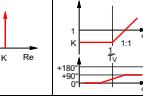
24

3.9 Übersicht wichtiger Übertragungsglieder

System	Differentialgleichung $x_a = x_a(t), x_e = x_e(t)$	Übertragungsfunktion $F(s)$	Übergangs Funktion (Sprungantwort)	Ortskurve $F(j\omega)$	Bode-Diagramm	x : Pole o : Nullstellen
P	$x_a = K x_e$ konstant	K				$j\omega$ -Ebene: keine Pole, keine Nullstellen
PT ₁	$T\ddot{x}_a + x_a = K x_e$ -20db/Dek.	$\frac{K}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T
PT ₂ ($D \geq l$)	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0\dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K\omega_0^2 x_e$ -40db/Dek.	$\frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0s + \omega_0^2}$ bzw. $\frac{K_1}{1+T_1s} \cdot \frac{K_2}{1+T_2s} = \frac{K_1 K_2 / (T_1 T_2)}{s^2 + (\gamma_{T_1} + \gamma_{T_2})s + \gamma_{T_1} \gamma_{T_2}}$ $(K_1 K_2 \rightarrow K; \gamma_{T_1 T_2} \rightarrow \omega_0^2; \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \rightarrow D)$				$j\omega$ -Ebene: -1/T1, -1/T2
PT ₂ ($0 \leq D < l$)	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0\dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K\omega_0^2 x_e$	$\frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0s + \omega_0^2}$				$j\omega$ -Ebene: -1/D
I	$x_a = K_I \int x_e dt$	$\frac{K_I}{s} = K \cdot \frac{1}{T_N \cdot s} \quad (K_I = \frac{K}{T_N})$				$j\omega$ -Ebene: -1/TN

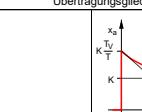
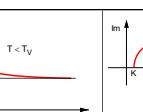
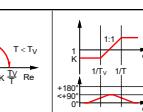
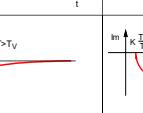
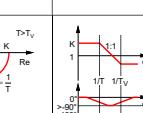
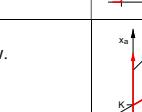
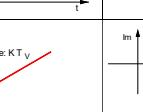
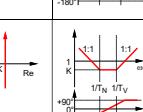
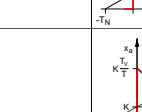
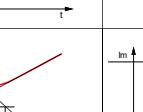
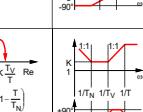
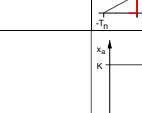
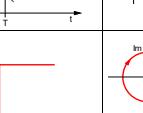
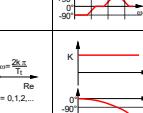
Systemtechnik

Übertragungsglieder

IT ₁	$T\ddot{x}_a + x_a = K_I \int x_e dt$	$\frac{K_I}{s(1+Ts)}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T
D	$x_a = K_D \dot{x}_e$ +20db/Dek.	$K_D s = K \cdot T_V \cdot s \quad (K_D = K \cdot T_V)$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_V
DT ₁	$T\ddot{x}_a + x_a = K_D \dot{x}_e$	$\frac{K_D s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T
PI	$x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt \right)$ $K_I = \frac{K}{T_N}$	$K \left(1 + \frac{1}{T_N s} \right)$				$j\omega$ -Ebene: -1/TN
PIT ₁	$T\ddot{x}_a + x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt \right)$	$K \frac{1 + \frac{1}{T_N s}}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/TN, -1/T
PD	$x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$ $K_D = K T_V$	$K(1 + T_V s)$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_V

Systemtechnik

Übertragungsglieder

PDT ₁ Lead-Glied ($T < T_V$)	$T\ddot{x}_a + x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$	$K \frac{1 + T_V s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T, -1/T_V
PDT ₁ Lag-Glied ($T > T_V$)	$T\ddot{x}_a + x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$	$K \frac{1 + T_V s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_V, -1/T
PID	$x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt + T_V \dot{x}_e \right)$ $K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$	$K \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s \right)$ bzw. $K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_N, -1/T_V
PIDT ₁	$T\ddot{x}_a + x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt + T_V \dot{x}_e \right)$	$K \frac{1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_N, -1/T_V
T _t	$x_a = K \cdot x_e(t - T_t)$	$K \cdot e^{-T_t s}$				$j\omega$ -Ebene: keine Pole, keine Nullstellen

Anm.: Strecken „ohne Ausgleich“ besitzen integrierendes Verhalten. Strecken „mit Ausgleich“ streben bei konstantem Eingangssignal einem konstanten Ausgangswert zu.

4 Zweitore, Vierpole

4.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix \mathbf{Y} :

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 & \left(\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} \right) &= \mathbf{Y} \cdot \left(\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \right) \\ I_2 &= Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 \end{aligned}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix \mathbf{Z} :

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 & \left(\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \end{array} \right) &= \mathbf{Z} \cdot \left(\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} \right) \\ U_2 &= Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{aligned}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} U_1 &= H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2 & \left(\begin{array}{c} U_1 \\ I_2 \end{array} \right) &= \mathbf{H} \cdot \left(\begin{array}{c} I_1 \\ U_2 \end{array} \right) \\ I_2 &= H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2 \end{aligned}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} I_1 &= C_{11} \cdot U_1 + C_{12} \cdot I_2 & \left(\begin{array}{c} I_1 \\ U_2 \end{array} \right) &= \mathbf{C} \cdot \left(\begin{array}{c} U_1 \\ I_2 \end{array} \right) \\ U_2 &= C_{21} \cdot U_1 + C_{22} \cdot I_2 \end{aligned}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot -I_2 & \left(\begin{array}{c} U_1 \\ I_2 \end{array} \right) &= \mathbf{A} \cdot \left(\begin{array}{c} U_2 \\ -I_2 \end{array} \right) \\ I_1 &= A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot -I_2 \end{aligned}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} U_2 &= B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot -I_1 & \left(\begin{array}{c} U_2 \\ I_1 \end{array} \right) &= \mathbf{B} \cdot \left(\begin{array}{c} U_1 \\ -I_1 \end{array} \right) \\ I_2 &= B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot -I_1 \end{aligned}$$

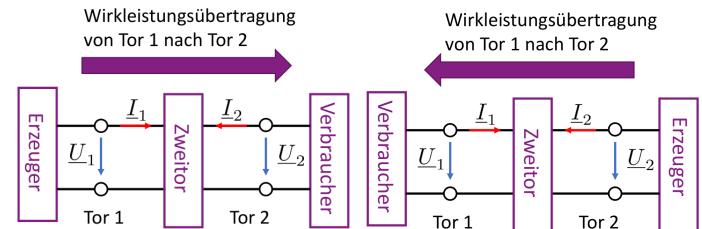
4.1.1 Parameterumrechnung

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\det \mathbf{Y}} & \frac{-Y_{12}}{\det \mathbf{Y}} \\ \frac{-Y_{21}}{\det \mathbf{Y}} & \frac{Y_{11}}{\det \mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det \mathbf{H} & H_{12} \\ H_{22} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det \mathbf{A}}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{\det \mathbf{H}} & \frac{H_{11}}{H_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det \mathbf{A}}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} \det \mathbf{Z} & Z_{12} \\ Z_{22} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{Y_{11}}{Y_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det \mathbf{A}}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} Z_{11} & \det \mathbf{Z} \\ Z_{21} & Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{22} & -1 \\ \frac{Y_{21}}{Y_{21}} & \frac{Y_{21}}{Y_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\det \mathbf{H} & -H_{11} \\ \frac{H_{21}}{H_{21}} & \frac{H_{21}}{H_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2 Betriebsarten, Bezugspfeilsystem

Betrieb von Seite 1,
Last an Tor 2.

Betrieb von Seite 2,
Last an Tor 1.



Symmetrisches Bezugspfeilsystem im Bild.

4.3 ZT-Eigenschaften

	Umkehrbarkeit	Symmetrie	Rückwirkungsfreiheit
Z	$Z_{12} = Z_{21}$	$Z_{11} = Z_{22}$	$Z_{12} = 0$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{11} = Y_{22}$	$Y_{12} = 0$
A	$\det[A] = 1$	$A_{11} = A_{22}$	$\det[A] = 0$
H	$H_{12} = -H_{21}$	$\det[H] = 1$	$H_{12} = 0$

- Umkehrbares (reziprokes) ZT: nur 3 Parameter.
- (Widerstands-)symmetrisches ZT: Eingangswiderstände in beiden Betriebsarten gleich, Ein- und Ausgang vertauschbar.
- Umkehrbares und symmetrisches ZT = längssymmetrisch: nur 2 Parameter.
- Passives ZT aus R,L,C,M-Bauteilen ist immer umkehrbar.
- Rückwirkungsfreies (unilaterales) ZT: nur 3 Parameter, Energieübertragung nur von Eingang auf Ausgang.

4.4 Matrizen elementarer Zweitore

	[Z]	[Y]	[H]	[C]	[A]
	---	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{bmatrix}$	---	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & -1 \\ 1 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{\underline{Z}_1} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & -\frac{\underline{Z}_2}{K} \\ -\frac{\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & -\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Y_2 + Y_1}{2} & \frac{Y_2 - Y_1}{2} \\ \frac{Y_2 - Y_1}{2} & \frac{Y_2 + Y_1}{2} \end{bmatrix}$	---	---	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2 \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	---	---	$\begin{bmatrix} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \\ \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix}$
	---	---	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

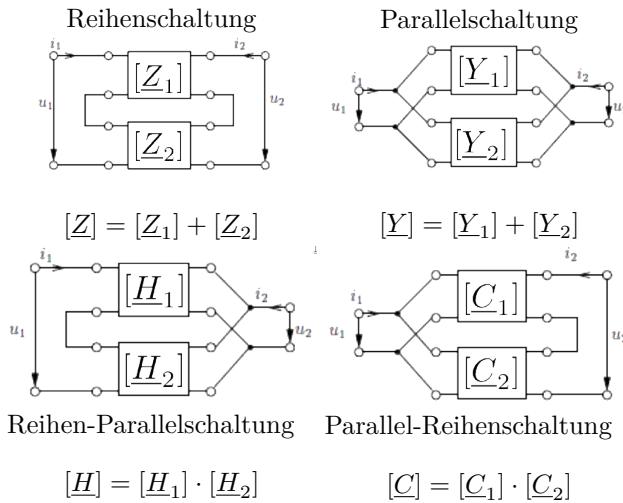
4.5 Zusammenschalten von Zweitoren

4.5.1 Torbedingungen

Erfüllung durch: ideale Übertrager, Kurzschlussschleife, Parallelschaltung längs-symmetrischer Zweitore.

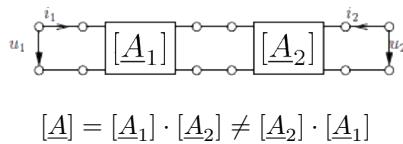
4.5.2 Zweitor-Schaltungen

Torbedingung muss für ZT-Schaltungen erfüllt sein!



- Kettenschaltung:**

Torbedingung wird immer eingehalten!



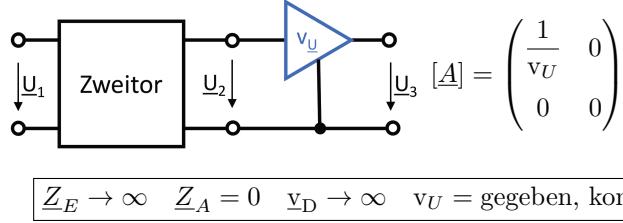
Reihenfolge beachten! **Nicht** kommutativ!

4.5.3 Idealer Trennverstärker/OP

Idealer Trennverstärker v_U als idealer OP.

Zweck: Rückwirkungsfreiheit einer Kettenschaltung.

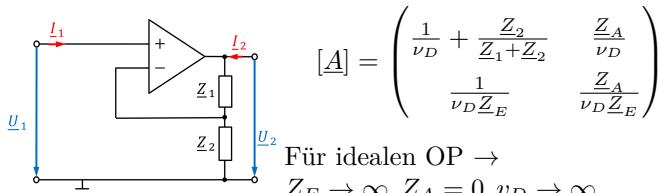
Entspricht einer VCVS.



$Z_{E/A}$: Ein-/Ausgangswiderstand, v_D : Differenzverstärkung.

4.5.4 Operationsverstärker (OP)

- nicht-inventierender OP

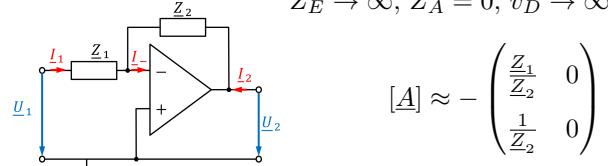


ideale Spannungs-Verstärkung:

$$v_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

- inventierender OP

Allgemein, für idealen OP $\rightarrow Z_E \rightarrow \infty, Z_A = 0, v_D \rightarrow \infty$.



ideale Spannungs-Verstärkung:

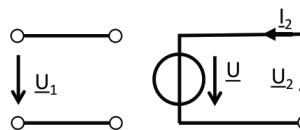
$$v_u = \frac{1}{A_{11}} = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

4.6 Ersatzschaltbilder

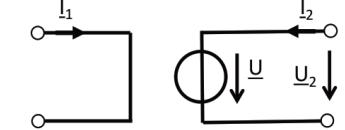
4.6.1 Ideale gesteuerte Quellen

Ideale gesteuerte Quellen **nicht** ineinander umwandelbar!
Andere Matrizen sind nicht definiert.

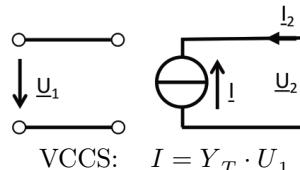
VCVS: Spannungsgesteuerte
Spannungsquelle



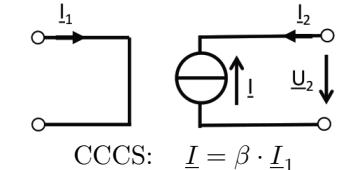
VCVS: $U = \alpha \cdot U_1$
VCCS: Spannungsgesteuerte
Stromquelle



CCVS: $U = Z_T \cdot I_1$
CCCS: Stromgesteuerte
Stromquelle



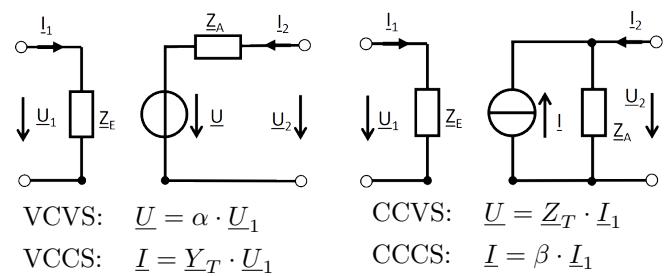
VCCS: $I = Y_T \cdot U_1$



CCCS: $I = \beta \cdot I_1$

4.6.2 Lineare gesteuerte Quellen

Alle Darstellungen sind äquivalent und lassen sich ineinander umwandeln! Andere Matrizen sind nicht definiert.

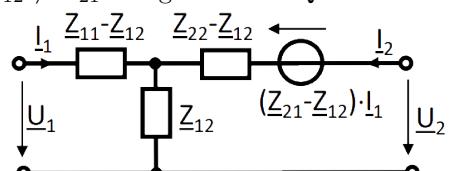


4.6.3 Matrizen für gesteuerte Quellen

4.6.4 Ersatzschaltbilder (ESB)

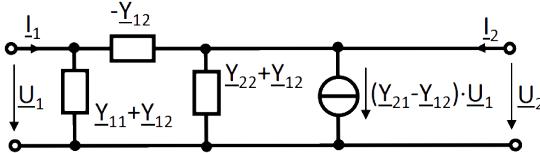
- T-ESB bei gegebener $[Z]$ -Matrix:

$Z_{12} \neq Z_{21}$ mit gesteuerter Quelle.



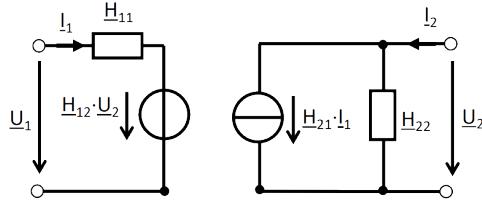
- **II-ESB** bei gegebener $[Y]$ -Matrix:

$Y_{12} \neq Y_{21}$ mit gesteuerter Quelle.



- **Hybrid-ESB** bei gegebener $[H]$ -Matrix

Bsp.: ESB für NPN-Transistor.

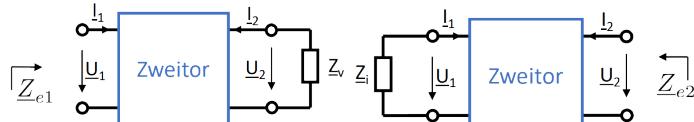


4.7 Beschaltete Zweitore

4.7.1 Ein- und Ausgangsimpedanz an Seite 1/2

Z_V : Last an Tor 2 \rightarrow Eingangsimpedanz, Betrieb von Seite 1

Z_i : Last an Tor 1 \rightarrow Ausgangsimpedanz, Betrieb von Seite 2



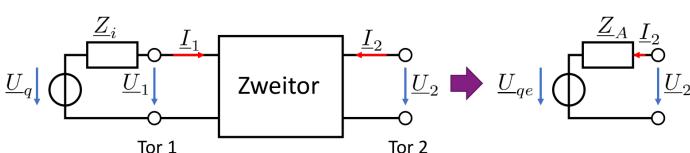
	Last an Tor 2	Last an Tor 1
Z	$Z_{e1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_V}$	$Z_{e2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}$
Y	$Y_{e1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_V}$	$Y_{e2} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}$
A	$Z_{e1} = \frac{A_{11}Z_v + A_{12}}{A_{21}Z_v + A_{22}}$	$Z_{e2} = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{11}}$
H	$Z_{e1} = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_V}$	$Y_{e2} = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_i}$
C	$Y_{e1} = C_{11} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{22} + Y_V}$	$Z_{e2} = C_{22} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{11} + Y_i}$

4.7.2 Ersatzquelle

Berechnung Innenwiderstand Z_i eines Ersatz-Zweipols:

Quellen U_q kurzschließen. I_q unterbrechen.

Gilt nicht bei gesteuerten Quellen.

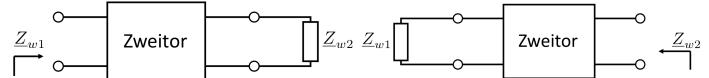


	Quelle an Tor 1	Quelle an Tor 2
A	$U_{qe} = \frac{1}{A_{21}Z_i + A_{11}}U_q$	$U_{qe} = \frac{\det(A)}{A_{21}Z_i + A_{22}}U_q$
Z	$U_{qe} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}U_q$	$U_{qe} = \frac{Z_{12}}{Z_{22} + Z_i}U_q$
Y	$I_{qe} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}I_q$	$I_{qe} = -\frac{Y_{12}}{Y_{22} + Y_i}I_q$
H	$I_{qe} = -\frac{H_{21}}{H_{11} + Z_i}I_q$	$U_{qe} = \frac{H_{12}}{H_{22} + Y_i}I_q$

	Quelle an Tor 1	Quelle an Tor 2
A	$Z_A = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{11}}$	$Z_A = \frac{A_{11}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{22}}$
Z	$Z_A = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}$	$Z_A = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_i}$
Y	$Y_A = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}$	$Y_A = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_i}$
H	$Y_A = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_i}$	$Z_A = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_i}$

siehe Ausgangsimpedanz $Z_{e2} = Z_A$ (Quelle an Tor 1).

4.7.3 Wellenwiderstand



$$Z_{w1} = \frac{A_{11}Z_{w2} + A_{12}}{A_{21}Z_{w2} + A_{22}}$$

$$Z_{w2} = \frac{A_{22}Z_{w1} + A_{12}}{A_{21}Z_{w1} + A_{11}}$$

symmetrische ZT: $Z_{w1} = Z_{w2}$

	Z_{w1}	Z_{w2}
Z	$\sqrt{\frac{Z_{11} \det Z}{Z_{22}}}$	$\sqrt{\frac{Z_{22} \det Z}{Z_{11}}}$
Y	$\sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \det Y}}$	$\sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \det Y}}$
A	$\sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$	$\sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}$
H	$\sqrt{\frac{H_{11} \det H}{H_{22}}}$	$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \det H}}$
C	$\sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11} \det C}}$	$\sqrt{\frac{C_{11} \det C}{C_{22}}}$

- Messtechnische Ermittlung:

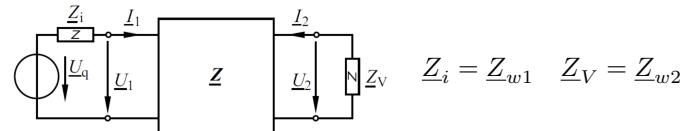
Z_{01} : Leerlauf - Tor 1

Z_{k1} : Kurzschluss - Tor 1

$$Z_{w1} = \sqrt{Z_{k1} \cdot Z_{01}}$$

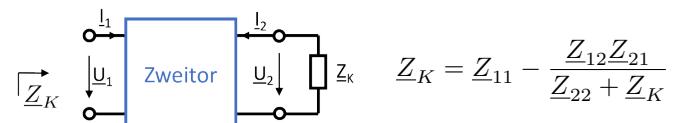
$$= \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$$

4.7.4 Scheinleistungsanpassung



Beschaltet man jedes Tor mit seinem Wellenwiderstand, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

4.7.5 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand dem Kettenwiderstand Z_K an.
Lösung der obigen Gleichung:

$$Z_K = \frac{1}{2}(Z_{11} - Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11} - Z_{22})^2 + 4 \cdot \det Z})$$

Symmetrische ZT: Kettenwiderstand = Wellenwiderstand.

5 Fourierreihe periodischer Signale

5.1 Reelle Fourierreihe (FR)

a_k, b_k : FR-Koeffizienten.

$k = 0$: Gleichanteil, Mittelwert.

$k = 1$: Grundschwungung, 1.Harmonische.

$k = n$: n .Harmonische, $(n - 1)$.Oberschwingung.

- Synthese, trigonometrische Form:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

- Synthese, harmonische Form:

A_k : Gewichte, Amplituden

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \alpha_k) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos \left(k\omega_1 t - \underbrace{(-\alpha_k + \frac{\pi}{2})}_{\beta_k} \right) \\ &= \boxed{A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin \left(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

- Analyse, trigonometrische Form:

$$\begin{aligned} \text{Gleichanteil: } \frac{a_0}{2} &= A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- Umwandlung Harmonisch \Leftrightarrow Trigonometrisch:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \underline{c}_0 \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$a_k = A_k \sin(\alpha_k) = A_k \cos(\beta_k) = A_k \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = A_k \cos(\alpha_k) = A_k \sin(\beta_k) = -A_k \sin(\varphi_k)$$

$$\tan(\alpha_k) = \frac{a_k}{b_k} \quad \tan(\beta_k) = \frac{b_k}{a_k} \quad \tan(\varphi_k) = \frac{-b_k}{a_k}$$

5.2 Komplexe Fourierreihe

- Synthese: $\omega \rightarrow t$ \underline{c}_k : Gewichte

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j k \omega_1 t} \text{ mit } \underline{c}_k = |\underline{c}_k| \cdot e^{j \varphi_k}$$

- Analyse: $t \rightarrow \omega$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j k \omega_1 t} dt = \boxed{\frac{1}{T} \cdot \underline{X}(k\omega_1)}$$

- Umwandlung Komplex \Leftrightarrow Reell.

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= A_0 = \underline{c}_0 \quad A_k = 2|\underline{c}_k| \quad \beta_k = -\varphi_k \\ a_k &= 2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_k\} = [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \\ b_k &= -2 \operatorname{Im}\{\underline{c}_k\} = j [\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \\ \underline{c}_k &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{-j \beta_k} = \frac{A_k}{2} e^{j \varphi_k} \\ \underline{c}_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{j \beta_k} = \frac{A_k}{2} e^{-j \varphi_k} \end{aligned}$$

5.3 Symmetrieeigenschaften

- Gerade** Funktionen - symmetrisch zur y-Achse
Alle \sin -Anteile verschwinden.

$$\begin{aligned} b_k &= 0 \quad A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt \\ a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- Ungerade** Funktionen - symmetrisch zum Ursprung
Gleichanteil und alle \cos -Anteile verschwinden.

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad A_0 = 0 \\ b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

5.3.1 Halbwellsymmetrie

FR mit HWS enthält nur ungerade Terme: $\rightarrow k = 1, 3, 5, \dots, \infty$

- Allgemein: $y(t) = -y(t \pm T/2)$

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt \\ b_{2k-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- gerade Halbwellsymmetrie:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad b_k = 0, \quad a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- ungerade Halbwellsymmetrie:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad a_k = 0, \quad b_{2k} = 0 \\ b_{2k-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

5.4 Verschiebungssatz

Zeitverschiebung \Leftrightarrow **Phasendrehung** im Freq.-bereich um den Winkel: $-k\omega_1 t_v$

$$\begin{aligned} f_v(t) = f(t - t_v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j \omega_1 k(t-t_v)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{c}_k \cdot e^{-j \omega_1 k t_v}}_{\underline{c}_{k_v}} \cdot e^{j \omega_1 k t} \end{aligned}$$

$t_v < 0$: Phasenwinkel des Spektrums werden mit zunehmender Frequenz größer.

5.5 FR und LTI-Systeme

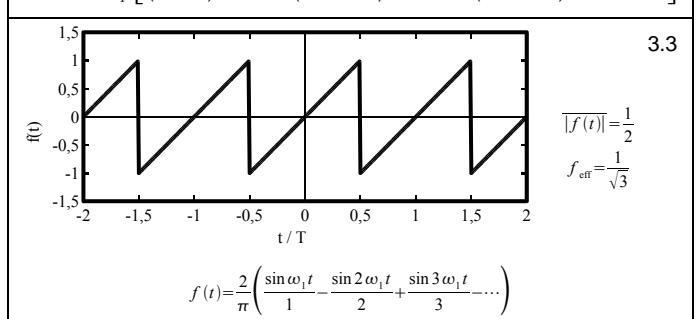
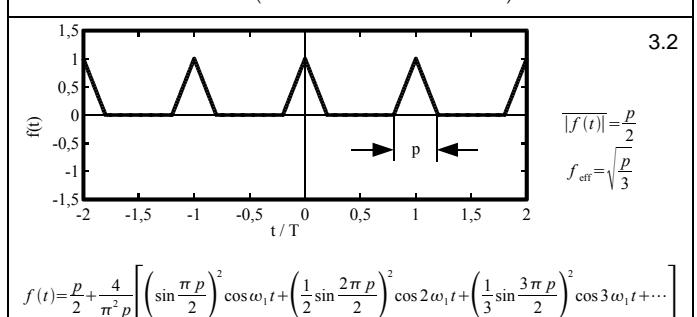
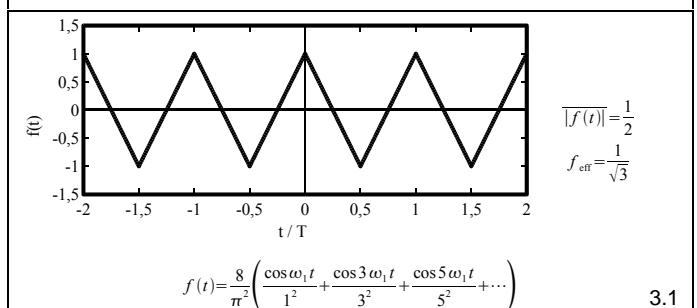
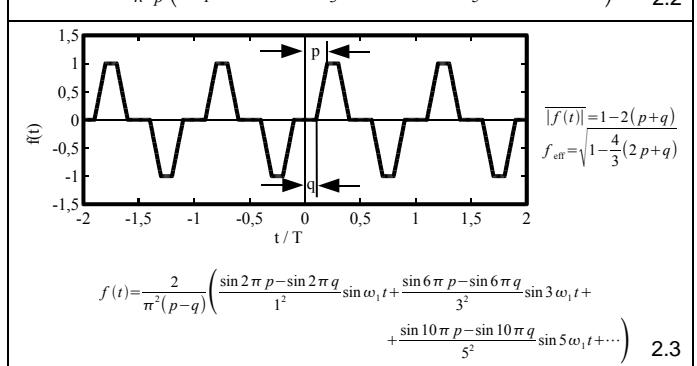
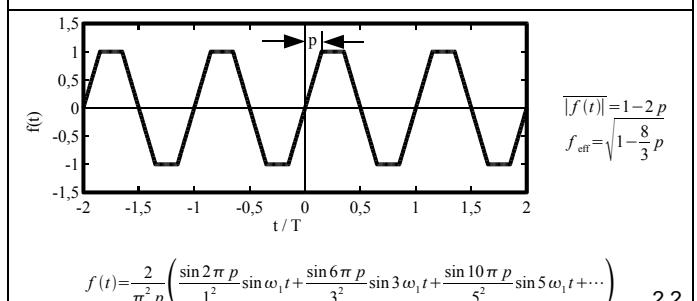
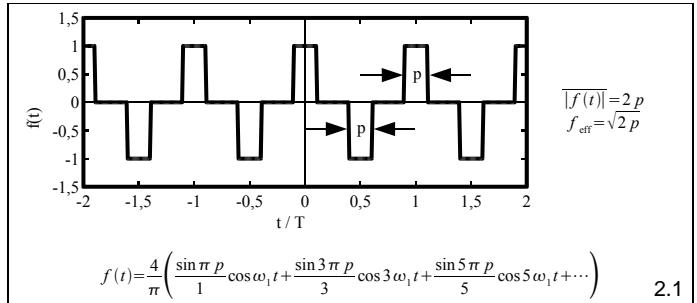
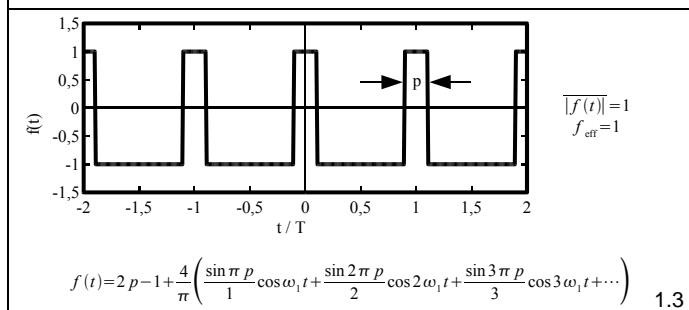
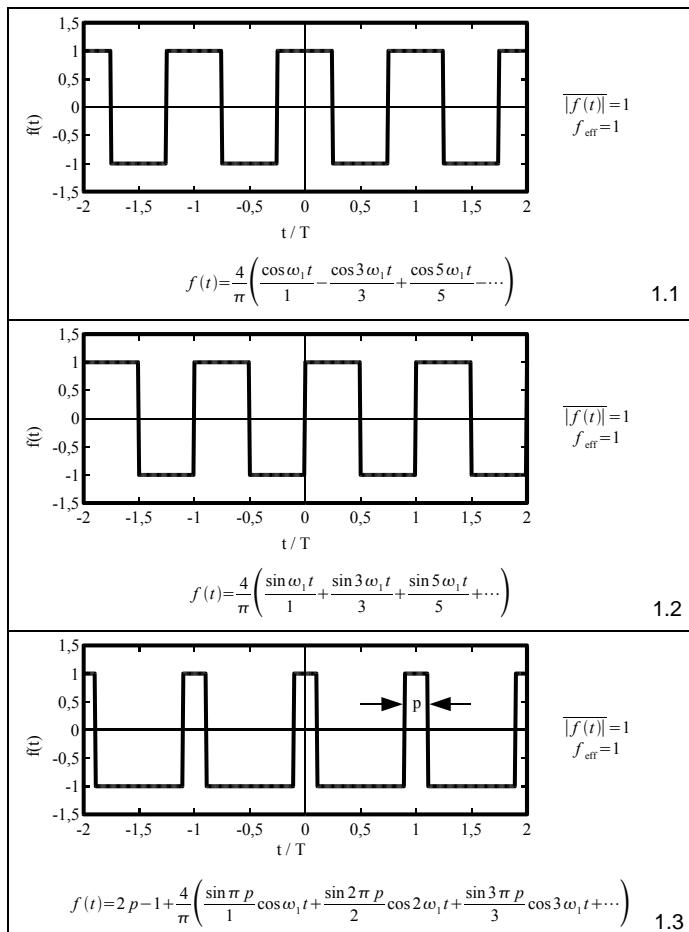
LTI-Systeme verändern Betrag und Phase aller harmonischen Komponenten eines Eingangssignals = lineare Verzerrung.
Sie fügen keine neuen Frequenzen hinzu.

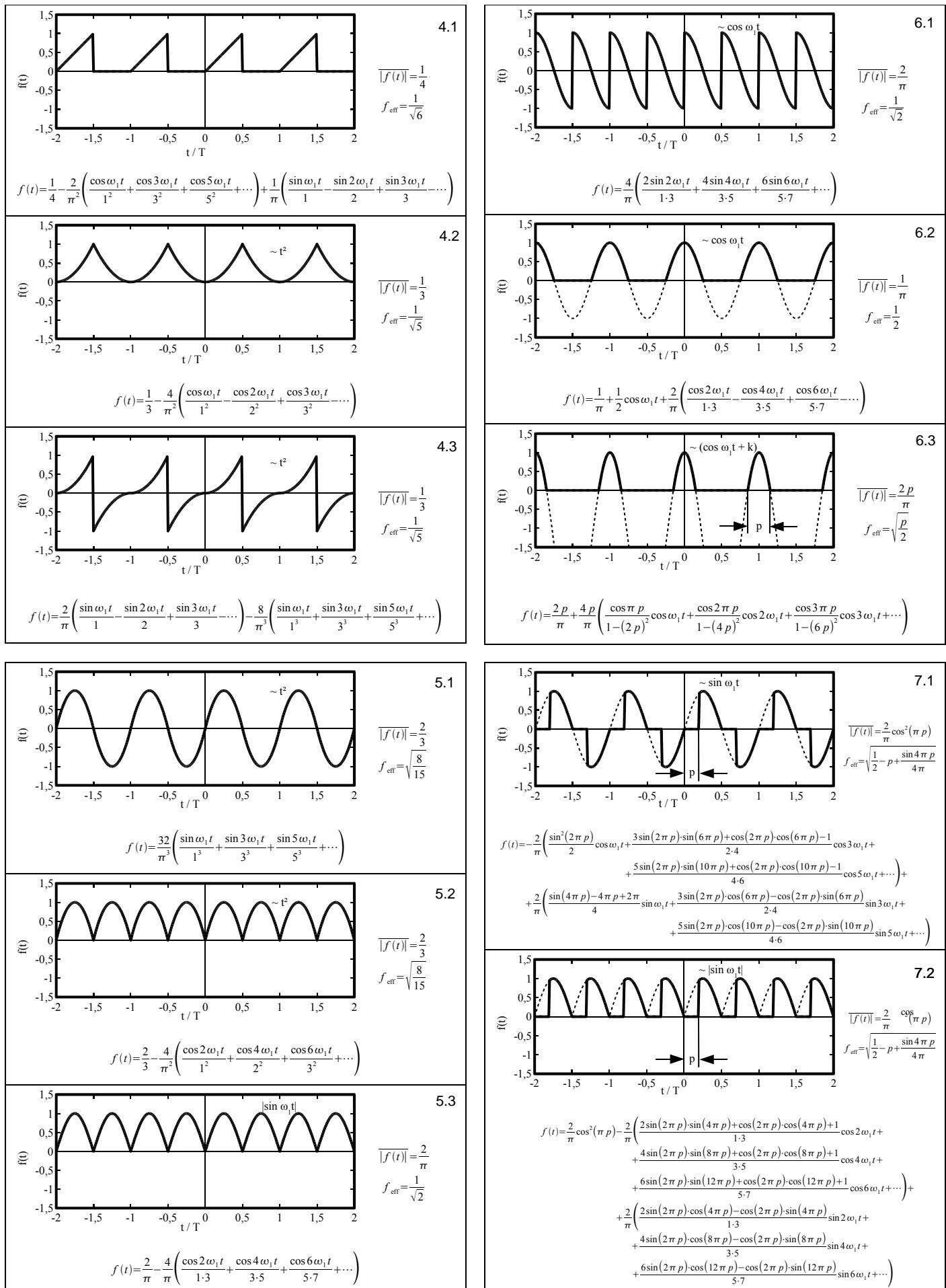
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(k\omega_1) \cdot c_{xk}}_{c_{yk}} \cdot e^{j\omega_1 kt}$$

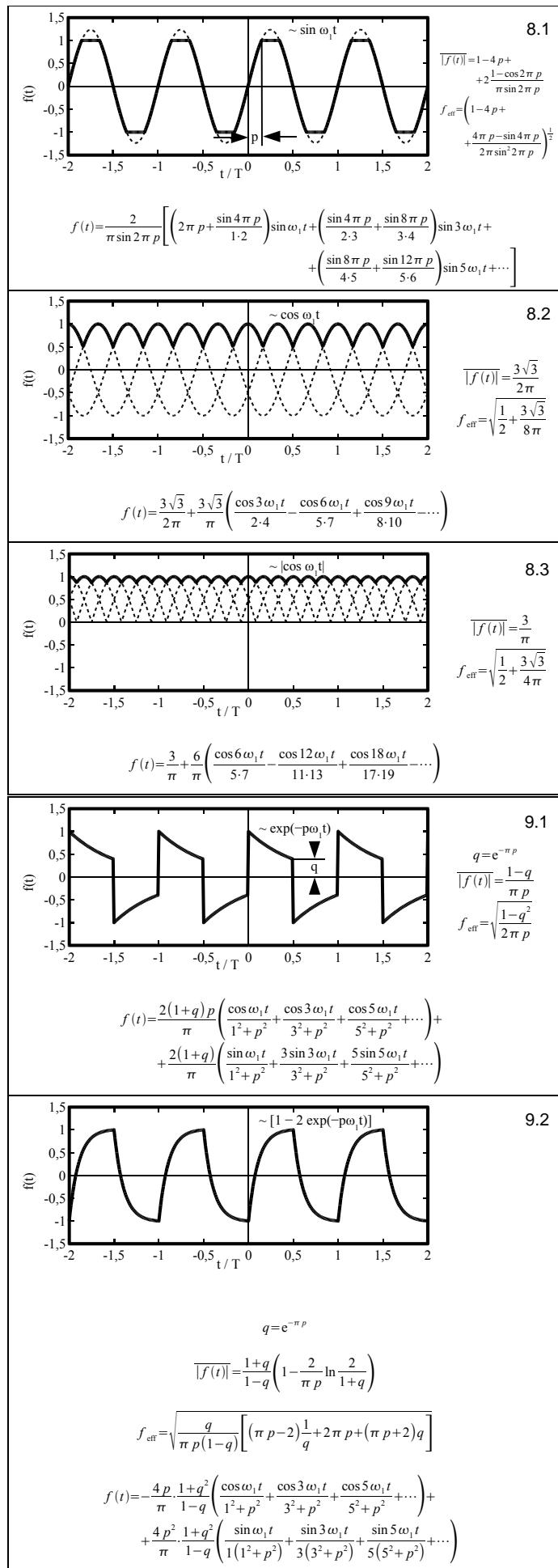
5.6 FR-Tabelle - Bischoff

- normierte Pulsbreite $p = \frac{|\Delta t|}{T} = \frac{\text{Länge Zeit}}{\text{Periodendauer}}$
- $\overline{|f(t)|}$: Mittelwert Wechselanteil/ Gleichrichtwert.
- f_{eff} : Gesamt-Effektivwert des Signals.
- FR-Reihen sind auf Amplitude \hat{f} normiert!
→ mit \hat{f} multiplizieren!

Fourierreihen







Funkschau Fourier-Reihen

C. Formelzusammenstellung		
Kurvenverlauf	Gleichung	Oberwellenaufbau
1 	$f(x) = \frac{4h}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$	 Kurve 1 und 2
2 	$f(x) = \frac{4h}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right)$	 Kurve 3
3 	$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \dots \right)$	 Kurve 5, 6 und 7
4 	$f(x) = h \left\{ k + \frac{2}{\pi} \left(\sin k\pi \cos x + \frac{1}{2} \sin 2k\pi \cdot \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3k\pi \cos 3x \dots \right) \right\}$	 Kurve 8 und 9
5 	$f(x) = -\frac{8h}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	 Kurve 10 bei a = π/4
6 	$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \dots \right)$	 Kurve 10 bei a = π/4
7 	$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	 Kurve 10 bei a = π/4
8 	$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	 Kurve 10 bei a = π/4
9 	$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	 Kurve 10 bei a = π/4
10 	$f(x) = \frac{4h}{a \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\sin a}{1^2} \cdot \sin x + \frac{\sin 3a}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5a}{5^2} \cdot \sin 5x \dots \right)$	 Kurve 10 bei a = π/4
11 	$f(x) = \frac{4h}{\pi(a-b)} \left(\frac{\sin a - \sin b}{1^2} \sin x + \frac{\sin 3a - \sin 3b}{3^2} \sin 3x + \frac{\sin 5a - \sin 5b}{5^2} \sin 5x \dots \right)$	 Kurve 10 bei a = π/4

Kurvenverlauf	Gleichung	Oberwellenaufbau
12 	Halbwellen von sin- und —sin- Schwingungen $f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	 Kurve 12 und 13
13 	Halbwellen von cos- und —cos- Schwingungen $f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(-\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	 Kurve 12 und 13
14 	Halbwellen einer cos- Schwingung $f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2} \cos x + \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right)$	 Kurve 14
15 	Halbwellen einer cos- Schwingung $f(x) = \frac{2kh}{\pi} + \frac{4kh}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{1 - 4k^2n^2} \cdot \cos nx$	 Kurve 15
16 	$f(x) = \frac{hk}{2} + \frac{2h}{\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2} \cdot \cos nx$	 Kurve 16
17 	$f(x) = \frac{2h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \right)$	 Kurve 17 und 18
18 	$f(x) = -\frac{2h}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$	 Kurve 17 und 18
19 	$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	 Kurve 19
20 	$f(x) = -\frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{2h}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	 Kurve 19
21 	$f(x) = \frac{h}{4} - \frac{2h}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{h}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	 Kurve 19
22 	$f(x) = \frac{2h\gamma}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \sin (2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2}$	 Kurve 19

5.7 Kenngrößen periodischer Signale

5.7.1 Effektivwert, Klirrfaktor, Mischgrößen

- Effektivwert:** Wert einer Gleichgröße, die im Mittel die gleiche elek. Leistung an einem R umsetzt.

$$U_{eff} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u(t)^2 dt} = \sqrt{U_{\sim}^2 + U_0^2}$$

harmonische Signale: $U_k = \frac{\hat{u}_k}{\sqrt{2}}$

U_{\sim} : Wechselanteil U_0 : Gleichanteil, Mittelwert

- Effektivwert mit **Fourier-Reihe**:

$$U_{eff} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_{k,eff}^2} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}$$

- Klirrfaktor**, Oberschwingungsgehalt:

Maß für Abweichung eines Signals $x(t)$ von der sin-Form.
Angabe von k in %. Kein Gleichanteil $U_0 = 0$.

$$\begin{aligned} k &= \frac{\text{Effektivwert Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert Wechselanteil}} \leq 1 \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} = \frac{\sqrt{U_{\sim}^2 - U_1^2}}{U_{\sim}} \\ &= \sqrt{\frac{0,5 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \hat{u}_k^2}{0,5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}} \quad \text{mit FR-Amplituden } \hat{u}_k \\ &= \sqrt{1 - \frac{U_1^2}{U_{\sim}^2}} = \sqrt{1 - g^2} \quad \text{mit } g = \frac{U_1}{U_{\sim}} \\ k_m &= \frac{U_m}{U_{\sim}} \quad k_1 = g = \sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

Für Wechselgrößen lässt sich k einfach mit **Grundschwingungsgehalt** g ermitteln (*gilt immer*).

- Mischgrößen:**

- Schwingungsgehalt:

$$s = \frac{U_{\sim}}{U} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Effektivwert der Mischgröße}}$$

- Welligkeit:

$$w = \frac{U_{\sim}}{U_0} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

- Riffelfaktor:

$$R = \frac{\hat{u}_{\sim}}{U_0} = \frac{\text{Scheitelwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

5.7.2 Leistungen

- Wirkleistung:**

$$\begin{aligned} P = \bar{p}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* \leftrightarrow i_k^* = i_{-k} \\ &= P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k,eff} \cdot I_{k,eff} \cdot \cos(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k}) \\ &= U_0 \cdot I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_k \cdot \hat{i}_k}{2} \cdot \cos(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k}) \\ &= \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad \text{rein am ohmschen Widerstand!} \end{aligned}$$

- Blindleistung**

Nicht-sinusförmige Größen: Q ist vorzeichenlos! $[Q] = \text{var}$

$$|Q| = \sqrt{Q_v^2 + D^2} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Verschiebungs-/Feldblindleistung Q_v

$$Q_v = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k \cdot \sin(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k})$$

Gleiche Frequenz, aber Phasenverschiebung zwischen U und I .

Verzerrungsblindleistung D

auch Oberwellen-, Deformationsblindleistung.

$$D^2 = U_1^2 \cdot (I^2 - I_1^2) = S^2(1 - g^2)$$

aus Mischtermen als Produkte von U und I unterschiedlicher Frequenzen.

- Scheinleistung**

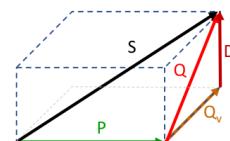
Gilt auch für Mischgrößen, da Effektivwerte Gleichanteile enthalten können. Achtung: U, I : **Gesamtsignal!**

$$\begin{aligned} S &= U_{eff} \cdot I_{eff} = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + Q_v^2 + D^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} I_k^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} I_k^2\right)} \\ &\neq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2 \cdot I_k^2} \end{aligned}$$

Nicht-linearer Verbraucher an einer sinusförmigen Spannung U_1 :

$$\begin{aligned} S^2 &= (UI)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = \\ &= U_1^2 I_0^2 + U_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1 \end{aligned}$$

Räumliche Darstellung der Leistungen:



- Leistungsfaktor:**

$$\text{Allgemein: } \lambda = \frac{|P|}{S} = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{S^2}} \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\text{Sinusförmig: } \lambda = \frac{P}{S} = \cos(\varphi) = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

6 Fourier-Transformation (FT)

6.1 Hin- und Rücktransformation

Übertragung (nicht-)periodischer Signale in Spektrum/BB.

Bedingung: $x(t)$ absolut integrierbar! $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$

$$x(t) \circ \bullet \underline{X}(\omega)$$

Hintransformation - Analysegleichung:

$$\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Komplexwertige Fouriertransformierte:

$$\underline{X}(\omega) = |\underline{X}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi}$$

Einheit: Amplitudendichte $[x(t)] \cdot s$

6.3 Zeit-Bandbreite-Gesetz

Dualität und Verschiebung ergeben das Zeit-Bandbreite-Gesetz.

$$T_D \cdot \omega_B = \text{konstant}$$

T_D : Signaldauer ω_B : Bandbreite des zugeh. Spektrums

Zeitbereich	Spektrum
schnelle Vorgänge	hohe Frequenzen
langsame Vorgänge	niedrige Frequenzen
steile Flanken	breites Spektrum
langsame Übergänge	enges Spektrum
zeitlich begrenztes Signal	unendlich breites Spektrum
unendlich langes Signal	bandbegrenztes Spektrum

6.2 FT periodischer Signale

- Übergang FR \rightarrow FT:

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_k \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{U}(\omega)}{t_a} \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \frac{2\pi}{t_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \omega_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega - k\omega_a) \end{aligned}$$

- Übergang FT \rightarrow FR, Komplexe Fourierkoeffizienten, periodische Fortsetzung:

$$\boxed{\underline{c}_k = \frac{1}{T} \cdot \underline{X}(k\omega_1)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega_1 t} dt$$

$T = t_p$: Periodizität, Periodendauer.

\underline{c}_k : FR-Koeff. d. periodischen Fortsetzung des endlichen Signals $x(t)$ mit Länge T .

- FR-Koeffizienten \underline{c}_k sind **Abtastwerte** von $\underline{X}(\omega)$ bei den Frequenzen im Linienabstand:

$$\omega = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T} = k \frac{2\pi}{t_p}$$

6.4 Eigenschaften der FT

	$x(t)$	$\underline{X}(\omega)$
Linearität	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\underline{X}_1(\omega) + B\underline{X}_2(\omega)$
Verschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \underline{X}(\omega)$
Modulation	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\underline{X}(\omega - \omega_0)$
Differentiation im Frequenzbereich	$t \cdot x(t)$	$j \frac{d\underline{X}(\omega)}{d\omega}$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega \underline{X}(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} \underline{X}(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Zeitskalierung	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \underline{X}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Faltung	$x_1(t) * x_2(t)$	$\underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$
Multiplikation	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$
Dualität	$x_1(t)$ $x_2(t)$	$x_2(\omega)$ $2\pi x_1(-\omega)$
Symmetrien	$x(-t)$ $x^*(t)$ $x^*(-t)$	$\frac{X}{X^*}(-\omega)$ $\underline{X}^*(\omega)$
Parsevalsches Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) ^2 d\omega$

6.5 Symmetrieeigenschaften

Realteil & Betrag: **gerade**
Imaginärteil & Phase: **ungerade**.

$$\underline{X}(-\omega) = \underline{X}^*(\omega)$$

$x(t)$ reell & gerade \leftrightarrow
 $\underline{X}(\omega)$ reell & gerade

$$\underline{X}(\omega) = 2 \int_0^\infty x(t) \cos(\omega t) dt$$

$x(t)$ reell & ungerade \leftrightarrow $\underline{X}(\omega)$ imaginär & ungerade

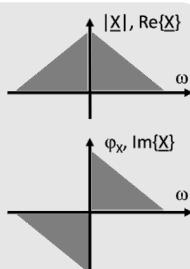
$$\underline{X}(\omega) = -2j \int_0^\infty x(t) \sin(\omega t) dt$$

6.6 Korrespondenzen der FT

	$x(t)$	$\underline{X}(\omega)$
	$\delta(t)$	1
	1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
	$\dot{\delta}(t)$	$j\omega$
	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$	$\omega_1 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1)$ mit $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
	$\text{rect}\left(\frac{t}{2aT}\right)$	$2aT \cdot \text{si}(\omega aT)$
	$\text{si}(at)$	$\frac{\pi}{ a } \text{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
	$\frac{ a }{\pi} \text{si}(at)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
	$\frac{1}{t}$	$-j\pi \text{sign}(\omega)$
	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
	$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
	$e^{-a^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

6.7 Faltungsregeln

- $a * b = b * a$ kommutativ
- $a * [b * c] = [a * b] * c$
- $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$
- $a * [b + c] = a * b + a * c$
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ Ausblendeigenschaft



7 Laplace-Transformation (LPT)

Hintransformation - Analyse:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \underline{X}(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st} dt$$

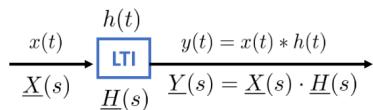
Rücktransformation - Synthese:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\underline{X}(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{X}(s) \cdot e^{-st} ds$$

Rücktransformation mit Partialbruchzerlegung (PBZ) + Tabelle in Kap. 7.7.

7.1 LTI-Systeme im Bildbereich (BB)

$x(t) = h(t) = 0$ für $t < 0$: Rechtsseitige (**kausale**) Signale!



LTI-Systeme im Bildbereich sind **immer** kausal!

7.2 Impuls- und Sprungantwort im BB

Impulsantwort:

$$h(t) \circ \bullet \underline{H}(s)$$

Sprungantwort:

$$g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \circ \bullet \quad \underline{G}(s) = \frac{\underline{H}(s)}{s}$$

7.3 Zusammenhang LPT \leftrightarrow FT

- Konvergenzbereich (Kb): Halbebene rechts vom am weitesten rechts liegenden Pol.
- Wenn ω -Achse \in Kb: FT von $\underline{X}(s)$ existiert:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega}$$

7.4 P/N-Diagramm: Systemeigenschaften

- Stabilität:** Alle Pole von $\underline{H}(s)$ liegen links der ω -Achse.
- Minimalphasiges System:** Alle Nullstellen liegen links der ω -Achse.

7.5 Partialbruchzerlegung (PBZ)

Für die inverse bzw. Rücktransformation in den Zeitbereich.
Beispiele siehe Papula FS, S.157f.

- Einfache Polstellen:

$$\underline{X}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(s - p_n)}$$

- Doppelte/k-fache Polstellen:

$$\begin{aligned} \underline{X}(s) &= \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{Z}(s)}{(s - p_n)^k} \\ &= \frac{A_1}{s - p_n} + \frac{A_2}{(s - p_n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(s - p_n)^k} \end{aligned}$$

- Komplexe Polstellen:

$$\begin{aligned} \underline{X}(s) &= \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{Z}(s)}{(s - p_1)(s - p_1^*)} \\ &= \frac{B s + C}{(s - p_1)(s - p_1^*)} \\ &= \frac{B s + C}{(s - j p_1)(s + j p_1)} \end{aligned}$$

Beachte: Wenn Zählergrad > Nennergrad, muss vor der PBZ eine **Polynomdivision** durchgeführt werden!

7.6 Eigenschaften der LPT

	$\underline{x}(t)$	$\underline{X}(s)$
Linearität	$a x_1(t) + b x_2(t)$	$a \underline{X}_1(s) + b \underline{X}_2(s)$
Skalierung t	$x(at)$	$\frac{1}{a} \underline{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Skalierung s	$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right)$	$\underline{X}(as)$
Verschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-s \cdot t_0} \underline{X}(s)$
Modulation	$e^{at} x(t)$	$\underline{X}(s - a)$
Multiplikation	$t \cdot x(t)$	$-\frac{d}{ds} \underline{X}(s)$
Faltung	$x_1(t) * x_2(t)$	$\underline{X}_1(s) \cdot \underline{X}_2(s)$
Differentiation t	$\frac{d}{dt} x(t)$	$s \cdot \underline{X}(s) - x(0)$
Integration t	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \underline{X}(s)$
Integration s	$\frac{1}{t} \cdot x(t)$	$\int_s^\infty \underline{X}(s) ds$

7.7 Korrespondenzen der LPT

Nr.	$\mathbf{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{\mathbf{X}}(s)$	Nr.	$\mathbf{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{\mathbf{X}}(s)$
10	1	$\frac{1}{s}$	28	$\frac{1}{ab} + \frac{b \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-bt}}{ab \cdot (a-b)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
11	t	$\frac{1}{s^2}$	29	$\frac{e^{-at} + [(a-b)t-1] \cdot e^{-bt}}{(a-b)^2}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
12	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	30	$\frac{[a-b(a-b)t] \cdot e^{-bt} - a \cdot e^{-at}}{(a-b)^2}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
13	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	31	$\frac{(b-c) \cdot e^{-at} + (c-a) \cdot e^{-bt} + (a-b) \cdot e^{-ct}}{(b-a)(c-a)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
14	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	32	$\frac{a(b-c) \cdot e^{-at} + b(c-a) \cdot e^{-bt} + c(a-b) \cdot e^{-ct}}{(b-a)(c-b)(c-a)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
15	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	33	$\frac{1}{2\omega^3} \cdot (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$
16	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	34	$\frac{t}{2\omega} \cdot \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
17	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	35	$\frac{1}{2\omega} \cdot (\sin \omega t + \omega t \cdot \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
18	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	36	$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
19	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	37	$\cos^2(\omega t)$	$\frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
20	$(1 - at) \cdot e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	38	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{s^2 + \omega^2}$
21	$\frac{1}{a^2} \cdot [1 - (1 + at) \cdot e^{-at}]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	39	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{s \sin \psi + \omega \cos \psi}{s^2 + \omega^2}$
22	$\frac{t^2}{2} \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	40	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
23	$\frac{1}{a^2} \cdot (1 - \cos at)$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	41	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
24	$\frac{1}{a^2} \cdot (\cosh at - 1)$	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)}$	42	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t + \psi)$	$\frac{(s+a) \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s+a)^2 + \omega^2}$
25	$\frac{1}{a^2} \cdot [at - 1 + e^{-at}]$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	43	$\frac{a \cos \omega t + \omega \sin \omega t - a \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s+a}$
26	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)}$	44	$\frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s+a}$
27	$\frac{a \cdot e^{-at} - b \cdot e^{-bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s+a) \cdot (s+b)}$	45	$\frac{\cos(\omega t + \psi - \gamma) - \cos(\psi - \gamma) \cdot e^{-at}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s+a)}$

Nr.	$\mathbf{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{\mathbf{X}}(s)$
46	$a^2 > b^2 : \frac{1}{2W} \cdot (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$ $a^2 = b^2 : t \cdot e^{-at}$ $a^2 < b^2 : \frac{1}{\omega_d} \cdot e^{-at} \cdot \sin \omega_d t$	$\frac{1}{s^2 + 2as + b^2}$
47	$a^2 > b^2 : \frac{1}{2W} \cdot (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$ $a^2 = b^2 : (1 - at) \cdot e^{-at}$ $a^2 < b^2 : \left(\cos \omega_d t - \frac{a}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d t \right) \cdot e^{-at}$	$\frac{s}{s^2 + 2as + b^2}$
48	$a^2 > b^2 : \frac{1}{b^2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{2W} \cdot e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{2W} \cdot e^{\lambda_2 t} \right)$ $a^2 = b^2 : \frac{1}{a^2} [1 - (1 + at) \cdot e^{-at}]$ $a^2 < b^2 : \frac{1}{b^2} \left[1 - \left(\cos \omega_d t + \frac{a}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d t \right) \cdot e^{-at} \right]$	$\frac{1}{s(s^2 + 2as + b^2)}$
49	$a^2 > b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) + k_1 e^{-\lambda_1 t} + k_2 e^{-\lambda_2 t}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $a^2 = b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) + (zt - \cos \varphi) \cdot e^{-at}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $a^2 < b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) - k \cdot \cos(\omega_d t + \beta) \cdot e^{-at}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s^2 + 2as + b^2)}$

- Aperiodischer Kriechfall:
 $a^2 > b^2 \leftrightarrow \vartheta > 1$
- Aperiodischer Grenzfall:
 $a^2 = b^2 \leftrightarrow \vartheta = 1$
- Periodischer Schwingfall:
 $a^2 < b^2 \leftrightarrow 0 < \vartheta < 1$
- Abklingkonstante:
 $a = \delta = \frac{\vartheta}{T} = \vartheta \omega_0 = \frac{R}{2L}$
- Resonanz-Kreisfrequenz:
 $b = \omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Eigen-Kreisfrequenz:
 $\omega_d = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$
- Dämpfungsgrad,-maß,-konstante:
 $D = \vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -a \pm W = -a \pm j\omega_d & W &= \sqrt{a^2 - b^2} = j\omega_d & x &= b^2 - \omega^2 & y &= 2a\omega & z &= \omega \sin \varphi - a \cos \varphi \\ \varphi &= \arctan \frac{x \sin \varphi - y \cos \varphi}{y \sin \varphi + x \cos \varphi} & k &= \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} & k_1 &= \frac{\lambda_2 \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{2W} & k_2 &= \frac{\omega \sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi}{2W} \\ \beta &= \arctan \frac{z}{\omega_d \cos \varphi} \end{aligned}$$

8 Schaltvorgänge

8.1 Berechnungsmethoden

Immer Stetigkeitsbedingungen beachten!

$$x(t=0) = x(0) = x(0^-) = x(0^+)$$

Bauteilverhalten KS/LL: $\underline{X}_C = -j \frac{1}{\omega C}$ $\underline{X}_L = j\omega L$

8.1.1 Vereinfachte Methode

mit Lösungsformeln aus GE1, GE2.

- Bedingung:** konstantes Eingangssignal/Quelle und **einem** unabhängigem Energiespeicher L oder C (DGL 1. Ordnung, eine Zeitkonstante).
- GE1: Schaltung mit **einer** Induktivität L :

$$\tau = \frac{L}{R} \quad I_A = i(0) \quad I_E = i(t \rightarrow \infty)$$

$$i(t) = I_E + (I_A - I_E) \cdot e^{-t/\tau}$$

- GE2: Schaltung mit **einer** Kapazität C :

$$\tau = RC \quad U_A = u(0) \quad U_E = u(t \rightarrow \infty)$$

$$u(t) = U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-t/\tau}$$

8.1.2 Laplace-Transformation der DGL

- DGL aufstellen mit Bauteilgleichungen für R, L, C .
Maschen- und Knotensatz anwenden.

- LPT der DGL durchführen:

$$\dot{x}(t) \circ \bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

$$\ddot{x}(t) \circ \bullet s^2 \cdot \underline{X}(s) - s \cdot x(0^+) - \frac{dx}{dt}(0^+)$$

Anfangszustand $i_L, u_C \neq 0$ zum Schaltzeitpunkt $x(0^+)$ wird autom. berücksichtigt.

- Auflösen nach gesuchter Größe.

- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

8.1.3 Leere Energiespeicher mit LPT & KWR

- Bedingung:** Alle C ungeladen, Alle L stromlos.

$$u_c(0+) = i_L(0+) = 0$$

- Eingang $x(t)$ mit LPT in Bildbereich $\underline{X}(\omega)$.

- $\underline{H}(s)$ aus Schaltung nach Schaltvorgang mit erweiterter KWR bestimmen. Ersetze $s = j\omega$.

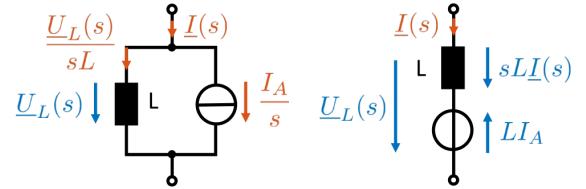
- Ausgang im Bildbereich berechnen: $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$

- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

8.1.4 Geladene Energiespeicher mit LPT

- Ersatzschaltbild (ESB) für Schaltkreis nach dem Schaltvorgang im Bildbereich erstellen:

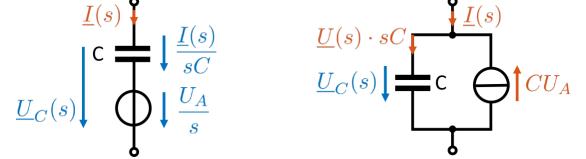
- VZ beachten! VZ-Änderung im Zeitbereich auch im Bildbereich gültig!
- Induktivitäten mit Anfangstrom:



$$\underline{U}_L(s) = L \cdot (s \cdot \underline{I}_L(s) - \underbrace{i_L(0)}_{I_A})$$

$$\underline{I}_L(s) = \frac{\underline{U}_L(s)}{sL} + \frac{I_A}{s}$$

- Kapazitäten mit Anfangsspannung/Vorladung:



$$\underline{I}_C(s) = C \cdot (s \cdot \underline{U}_C(s) - \underbrace{u_C(0)}_{U_A})$$

$$\underline{U}_C(s) = \frac{\underline{I}_C(s)}{sC} + \frac{U_A}{s}$$

- $\underline{H}(s)$ aus ESB mit KWR bestimmen.
- Eingang $x(t)$ mit LPT in Bildbereich $\underline{X}(\omega)$.
- Ausgang im Bildbereich berechnen: $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$.
- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

8.2 Quellenumwandlung

$$\text{Stromquelle: } i_q(t) \cdot \varepsilon(t) \circ \bullet \frac{I_q(s)}{s}$$

$$\text{Spannungsquelle: } u_q(t) \cdot \varepsilon(t) \circ \bullet \frac{U_q(s)}{s}$$

8.3 Bauteilgleichungen

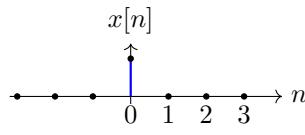
$$i_L(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di_c(t)}{dt}$$

9 Zeitdiskrete Systeme

9.1 Elementare, zeitdiskrete Signale

- **Einheitsimpuls**, Impulsfolge, Delta-Impuls $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Eigenschaften:

- Zusammenhang mit Einheitssprung:

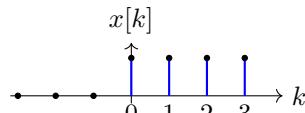
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1 \quad \varepsilon(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(n)$$

- Anregung der Impulsantwort
- konstantes Spektrum
- Ausblendeigenschaft:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

- **Einheitssprung**

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Zusammenhang mit Einheitsimpuls:

$$\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$$

- **Rechteckfolge**

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

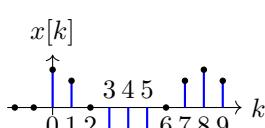
Zusammenhang mit Einheitsimpuls bzw. -sprung:

$$\begin{aligned} \text{rect}(n) &= \varepsilon(n) + \varepsilon(n-N) \\ &= \varepsilon(n) \cdot \varepsilon(N-1-n) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) \end{aligned}$$

- **Zeitdiskreter Sinus**

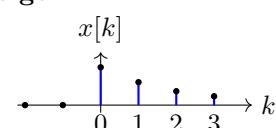
$$x(n) = A \cdot \sin(\Omega n + \varphi)$$

A : Amplitude
 Ω : normierte Kreisfrequenz
 φ : Anfangsphase



- **komplexe Exponentialfolge**

$$\begin{aligned} x(n) &= \underline{A} \cdot e^{S n} \\ &= \underline{A} \cdot e^{(\Sigma + j\Omega)n} \end{aligned}$$



$$S = \Sigma + j\Omega$$

Amplitudenänderung $\Sigma = \sigma T = \sigma / f_A$

normierte Kreisfrequenz $\Omega = \omega T = 2\pi \frac{f_0}{f_A}$

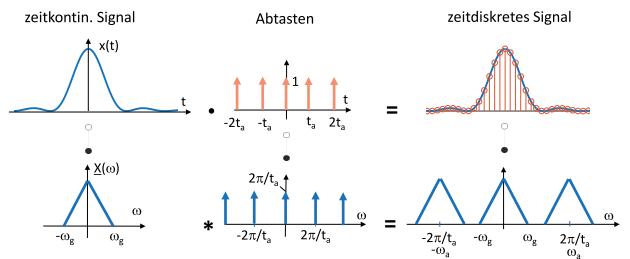
9.2 A/D-Wandlung

- Zeitdiskretisierung, Abtastung, **Abtastrate**: $f_a = \frac{1}{t_a}$

$$x(n) = x_0(t)|_{t=nT_a} = x_0(nT) = x_0\left(\frac{n}{f_a}\right)$$

- Wertdiskretisierung (Quantisierung): Bitbreite, Auflösung: 8 Bit = 256 Stufen.
- Abtastung Analog-Signal \rightarrow **periodische** Fortsetzung des Analog-Spektrums im Abstand von

$$\omega_a = \frac{2\pi}{t_a} = 2\pi f_a \quad \text{mit } t_a: \text{Abtastintervall}$$



- **Aliasing**: Spektrale Überlagerung, zusätzliche Frequenzen/Abtastwerte, keine Rekonstruktion des Originalsignals aus $t_a = \frac{1}{f_a}$ möglich.

Abhilfe: Eingangssignal auf ω_g -Band begrenzen und **Abtasttheorem** einhalten, Verringerung von t_a .

$$\omega_a \geq 2\omega_g \quad \text{bzw. } f_a \geq 2f_g$$

$$\omega_g \leq \frac{\omega_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{t_a} \quad \text{bzw. } f_g \geq \frac{f_a}{2}$$

Merke: zeitbegrenztes Signal: ∞ langes Spektrum \rightarrow Aliasing
Dirac-Sprung im Signal ∞ hohe f im Spektrum \rightarrow Aliasing

- Spektrum $U_a(\omega)$ eines abgetasteten Signals $u_a(t)$ mit $T = t_a = \frac{1}{f_a}$ aus einem Analogsignal $u(t)$:

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_k \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{U(\omega)}{t_a} \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \frac{2\pi}{t_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \omega_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega - k\omega_a) \end{aligned}$$

9.3 Zeitdiskrete LTI-Systeme

9.3.1 Systemeigenschaften

- Linear:** System mit Ü-Fkt. $\underline{H}(z)$ beschreibbar.
- Kausal:** Anzahl der Pole (Grad des Nenners) $N \geq M$
Anzahl der Nullstellen (Grad des Zählers),
 $h(n) = 0$ für $n < 0$, rechtsseitige Folge.
- Stabil:** Einheitskreis (EK) ∈ Konvergenzbereich (KB),
absolute Summierbarkeit: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$,
Alle Pole ∈ EK.
- minimalphasiges LTI-System:** **Alle** Nullstellen ∈ EK.

9.3.2 Impuls- & Systemantwort, Faltung

Impulsanregung	Impulsantwort
$x(n) = \delta(n)$	$y(n) = h(n) = S\{\delta(n)\}$
$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$ $\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$ $h(n) = g(n) - g(n-1)$ $\underline{H}(z) = \underline{G}(z) \cdot \frac{z-1}{z}$	$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$ $= x(n) * h(n)$

Sprunganregung	Sprungantwort
$x(n) = \varepsilon(n)$	$y(n) = g(n) = S\{\varepsilon(n)\}$

$\varepsilon(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$	$g(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)$
	$\underline{G}(z) = \underline{H}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$

9.3.3 Faltung mit Hilfstabelle

Beispiel:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

$$y(n) = h(n) + 2h(n-1) + 2h(n-2)$$

n	-1	0	1	2	3	4	5
$h(n)$	0	2	1	1	3		
$2h(n-1)$	0	0	4	2	2	6	
$2h(n-2)$	0	0	0	4	2	2	6
$y(n)$	0	2	5	7	7	8	6

9.3.4 Differenzengleichung \Leftrightarrow Ü-Fkt.

Allgemein:

$$\underline{H}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{N-k}}$$

z-Transformation: $z^{-k} = x(n-k)$.

$$a_0 \cdot y(n) + a_1 \cdot y(n-1) + \dots + a_N \cdot y(n-N) = \\ b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + \dots + b_M \cdot x(n-M)$$

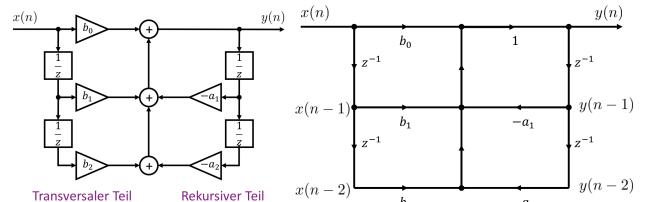
Systeme 2. Ordnung:

$$\underline{H}(z) = \frac{b_M}{a_N} = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{b_0 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_2}{z^2 + a_1 \cdot z + a_2} \\ = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

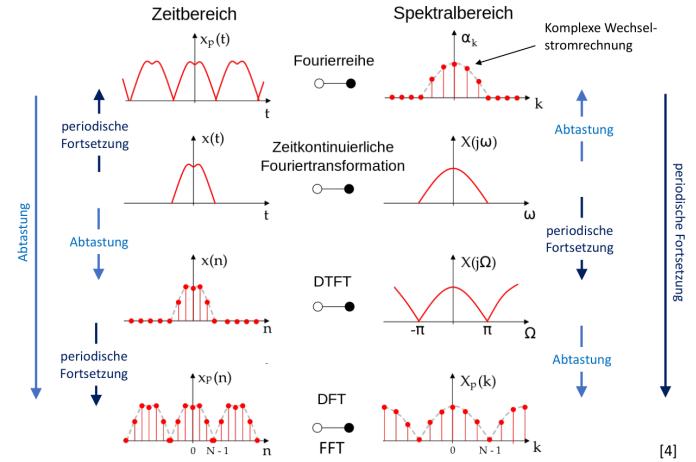
$$a_2 \cdot y(n-2) + a_1 \cdot y(n-1) + a_0 \cdot y(n) \\ = b_2 \cdot x(n-2) + b_1 \cdot x(n-1) + b_0 \cdot x(n) \\ \Rightarrow y(n) = \frac{1}{a_0} \cdot [b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + b_2 \cdot (n-2) \\ - a_1 \cdot y(n-1) - a_2 \cdot y(n-2)]$$

9.3.5 Signalflussplan/-graph

$-a_k$: Wert muss negativ sein, ansonsten VZ-Wechsel in der Ü-Fkt bzw. DGL.



9.4 Zeitdiskrete Signale im Spektrum



[4]

9.5 Zeitdiskrete Fouriertransformation

- zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT):

$$\underline{X}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\Omega n}$$

- Rücktransformation, Synthese:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Normierte Kreisfrequenz:

$$\Omega = \omega T = 2\pi f T = 2\pi \frac{f}{f_a}$$

Spektrum $\underline{X}(\Omega)$ ist freq.-kontinuierlich und periodisch mit $T = 2\pi$. $\rightarrow X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$

- Einheit des Spektrums/Signals: $[\underline{X}(\omega)] = x(n)$

9.6 z-Transformation

Hintransformation, Analysegleichung:

$$\underline{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Existiert nur für rechtsseitige (kausale) Folgen/Signale!

- Kb darf keine Polstellen enthalten.
- Zeitbegrenzte (kausale) Signale: Kb außerhalb des Ursprungs.
- Unendlich lange (kausale) Signale: Kb außerhalb des Kreises durch betragsgrößte Polstelle.

9.6.1 Rücktransformation mit PBZ

Partialbruchzerlegung allgemein:

$$\underline{X}(z) = \frac{\underline{Z}(z)}{\underline{N}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m}{\sum_{n=0}^N a_n z^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (z - z_{om})}{\prod_{n=1}^N (z - z_{xn})}$$

Einfache Polstellen p_n :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{X}(z)}{z} &= \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - z_{x1}} + \frac{c_2}{z - z_{x2}} + \cdots + \frac{c_N}{z - z_{xN}} \\ \Rightarrow \underline{X}(z) &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \frac{z}{z - p_n} \quad c_0 = 0, \text{ wenn } b_0 = 0 \end{aligned}$$

Sonderfall: n-fache Polstellen bei $z=0$:

$$\underline{X}(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{a_N \cdot z^N} = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_N} \cdot z^{m-N}$$

Mehrfaire Polstellen p_n :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{X}(z)}{z} &= \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_n} + \frac{c_2}{(z - p_n)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(z - z_{xn})^k} \\ \Rightarrow \underline{X}(z) &= c_0 + c_1 \frac{z}{z - p_n} + c_2 \frac{z}{(z - p_n)^2} + \cdots + c_k \frac{z}{(z - p_n)^k} \end{aligned}$$

9.6.2 Eigenschaften der z-Transformation

	$\underline{x}[n]$	$\underline{X}(z)$
Linearität	$a\underline{x}_1[n] + b\underline{x}_2[n]$	$a\underline{X}_1(z) + b\underline{X}_2(z)$
Verschiebung	$x[n - k]$	$z^{-k} \underline{X}(z)$
Modulation	$a^n x[n]$	$\underline{X}\left(\frac{z}{a}\right)$
Multiplikation	$n \cdot x[n]$	$-z \frac{d}{dz} \underline{X}(z)$
Faltung	$x_1[n] * x_2[n]$	$\underline{X}_1(z) \cdot \underline{X}_2(z)$
Faltung im BB	$x_1[n] \cdot x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \int \underline{X}_1(\eta) \underline{X}_2\left(\frac{z}{\eta}\right) \frac{1}{\eta} d\eta$
Differenzbildung	$x[n] - x[n - 1]$	$\frac{z-1}{z} \underline{X}(z)$
Summenbildung	$\sum_{i=0}^n x[i]$	$\frac{z}{z-1} \underline{X}(z)$

9.6.3 Korrespondenzen der z-Transformation

Normierte Kreisfrequenz $\Omega_1 = \omega T$

Nr.	$\underline{x}[n]$	$\underline{X}(z)$
1	$\delta[n]$	1
2	$\delta[n - i]$	z^{-i}
3	$\varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\varepsilon[n - i]$	$\frac{z}{z-1} \cdot z^{-i}$
5	$n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
6	$n^2 \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
7	$e^{-an} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$
8	$n e^{-an} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{ze^{-a}}{(z-e^{-a})^2}$
9	$a^n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-a}$
10	$a^{n-1} \cdot \varepsilon[n - 1]$	$\frac{1}{z-a}$
11	$n a^n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{za}{(z-a)^2}$
12	$n a^{n-1} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
13	$(n-1) a^{n-1} \cdot \varepsilon[n - 1]$	$\frac{1}{(z-a)^2}$
14	$n^2 a^n \varepsilon[n]$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
15	$\binom{n}{i} a^{n-i} \varepsilon[n - i]$	$\frac{z}{(z-a)^{i+1}}$
16	$\frac{(a^{n+1}-b^{n+1})}{a-b} \varepsilon[n] \quad a \neq b$	$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$
17	$\frac{1}{n} \varepsilon[n - 1] \cdot \varepsilon[n]$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$
18	$\sin(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z \sin(\Omega_1)}{z^2 - 2z \cos(\Omega_1) + 1}$
19	$\cos(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z[z - \cos(\Omega_1)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_1) + 1}$
20	$a^n \sin(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{za \sin(\Omega_1)}{z^2 - 2za \cos(\Omega_1) + a^2}$
21	$a^n \cos(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z[z - a \cos(\Omega_1)]}{z^2 - 2za \cos(\Omega_1) + a^2}$
22	$\text{rect}_N[n]$	$\frac{z-z^{-N}}{z-1}$

9.7 LTI-Systeme im Bildbereich

9.7.1 Impuls- und Sprungantwort im BB

$$h(n) \circ \bullet \quad \underline{H}(z) = \underline{G}(z) \cdot \frac{z-1}{z} \quad \underline{G}(z) = \underline{H}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

9.7.2 PN-Diagramm \Rightarrow Frequenzgang

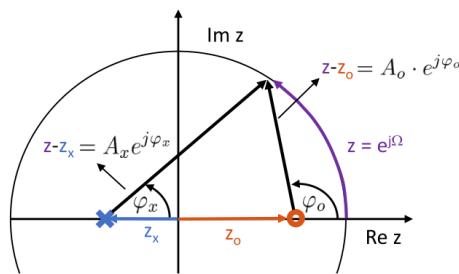
Wenn zeitdiskretes LTI-System stabil: Ersetze $z = e^{j\Omega}$:

$$\underline{H}(\Omega) = \underline{H}(z)|_{z=e^{j\Omega}} \quad \text{wenn alle Pole innerhalb des EK.}$$

Ermittlung $\underline{H}(\Omega)$: Am Einheitskreis des PN-Diagramms entlang gegen den UZS für $\Omega > 0$ gehen.

z_o : Nullstellen, z_x : Polstellen

$$\underline{H}(z) = \frac{(z - z_o)}{(z - z_x)} \quad \underline{H}(\Omega) = \frac{(e^{j\Omega} - z_o)}{(e^{j\Omega} - z_x)} = \frac{A_o e^{j\varphi_o}}{A_x e^{j\varphi_x}}$$



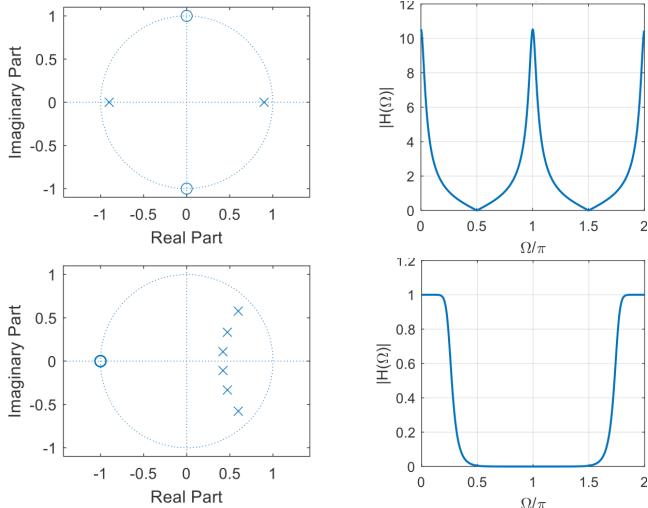
Betragsfrequenzgang, Amplitudengang
Pole/Nullstellen \rightarrow Amplitude steigt/sinkt.

$$|\underline{H}(\Omega)| = H(\Omega) = \frac{A_o(\Omega)}{A_x(\Omega)} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Phasenfrequenzgang

$$\varphi_H(\Omega) = \varphi_o(\Omega) - \varphi_x(\Omega) = \varphi_Y(\Omega) - \varphi_X(\Omega)$$

Beispiele:



9.7.3 Systemantwort auf harm. Eingangssignale

LTI-System verändert nur Amplitude und Phase von $x(t)$.
Normierte Frequenz $\Omega_1 = \omega T$ bleibt gleich.

Gegeben: $x(n) = \hat{x} \cdot \sin(\Omega_1 n + \varphi_x)$

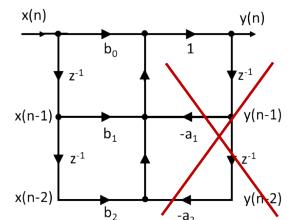
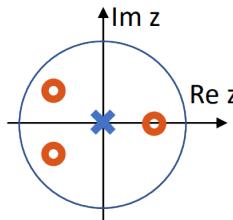
Gesucht: $y(n) = \hat{y} \cdot \sin(\Omega_1 n + \varphi_y)$

$$\hat{y} = \hat{x} \cdot |\underline{H}(\Omega_1)| \quad \varphi_y = \varphi_x + \varphi_H(\Omega_1)$$

9.7.4 Klassifizierung von Systemen

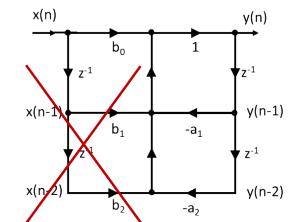
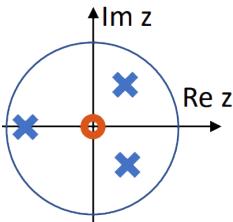
- Transversale Systeme, FIR, AR:

Finite Impulse Response (FIR), Auto-Regressive (AR)
Keine Rückführung von Ausgang $y(n)$ auf Eingang $x(n)$.
 $\Rightarrow a_k = 0$ für $k > 0$.
 \Rightarrow Alle Pole liegen im Ursprung.



- Rekursive Systeme, IIR, MA:

Infinite Impulse Response (IIR), Moving-Average (AR)
Aktueller Ausgangswert hängt nur vom aktuellen
Eingangswert und früheren Ausgangswerten ab.
 $\Rightarrow b_k = 0$ für $k > 0$.
 \Rightarrow Alle Nullstellen liegen im Ursprung.



- ARMA: Auto-Regressive Moving Average
 \rightarrow transversal-rekursives System.