

# Formelsammlung

Ayham Alhalaibi  
Signale und Systeme

27. November 2021

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Signale im Zeitbereich</b>                         | <b>1</b> |
| 1.1      | Signalcharakterisierung . . . . .                     | 1        |
| 1.2      | Elementarsignale . . . . .                            | 1        |
| <b>2</b> | <b>Systeme</b>  | <b>2</b> |
| 2.1      | Eigenschaften . . . . .                               | 2        |
| 2.2      | LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems) . . . . . | 2        |
| 2.2.1    | Ein-/Ausgangsbeziehung . . . . .                      | 2        |
| 2.2.2    | Faltung . . . . .                                     | 2        |
| 2.2.3    | Frequenzgang & Übertragungsfunktion . . . . .         | 2        |
| <b>3</b> | <b>Zweitore - Vierpoltheorie</b>                      | <b>4</b> |
| 3.1      | Zweitorgleichungen . . . . .                          | 4        |
| 3.1.1    | Parameterumrechnung . . . . .                         | 4        |
| 3.2      | Zusammenschalten von Zweitoren . . . . .              | 4        |
| 3.3      | Matrizen elementarer Zweitore . . . . .               | 5        |
| 3.3.1    | Trennverstärker . . . . .                             | 6        |
| 3.3.2    | Torbedingungen . . . . .                              | 6        |
| 3.4      | Zweitor Eigenschaften: . . . . .                      | 6        |
| 3.5      | Zweitorersatzschaltung . . . . .                      | 6        |
| 3.5.1    | gesteuerte Quellen . . . . .                          | 6        |
| 3.5.2    | Ersatzschaltbilder . . . . .                          | 6        |
| 3.6      | Beschaltete Zweitore . . . . .                        | 7        |
| 3.6.1    | Eingangsimpedanz . . . . .                            | 7        |
| 3.6.2    | Ausgangsimpedanz . . . . .                            | 7        |
| 3.6.3    | Ersatzquelle . . . . .                                | 7        |
| 3.6.4    | Wellenwiderstand . . . . .                            | 7        |
| 3.6.5    | Scheinleistungsanpassung . . . . .                    | 8        |
| 3.6.6    | Kettenwiderstand . . . . .                            | 8        |

# 1 Signale im Zeitbereich

## 1.1 Signalcharakterisierung

1. **Kontinuierlich**  $\longleftrightarrow$  **Diskret**

2. **Deterministisch**  $\longleftrightarrow$  **Stochastisch**  
Deterministische Signale sind mathematisch beschreibbar, im Gegensatz zu stochastischen Signalen die dem Zufall unterworfen sind

3. **Periodisch**  $\longleftrightarrow$  **Aperiodisch**

periodisch wenn,  $x(t) = x(t + T_p)$  gilt.  
 $T_p$  heißt Grundperiode.

4. **Gerade**  $\longleftrightarrow$  **Ungerade:**

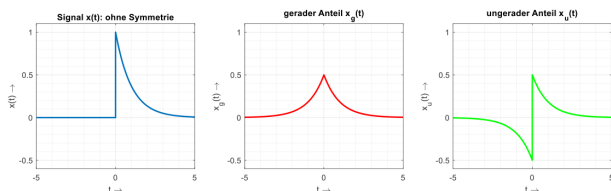
### Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil:

$$x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

- ungerader Anteil:

$$x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$



5. **Energiesignal**  $\longleftrightarrow$  **Leistungssignal**

Energie:

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

## 6. Korrelation

Die Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier deterministischer Energiesignale.

### Korrelationsfunktion

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

## 7. Transformation

Signale können modifiziert werden durch Verändern der unabhängigen Variablen:

- Zeitverschiebung

- Zeitdehnung und Stauchung
- Zeitumkehr

$$x_2(t) = x_1(-at + b)$$

das Argument von  $x_1(\tau)$  stellt eine Abbildung  $t \rightarrow \tau$  dar, daher bewirkt

- $+b/-b$  ( $b > 0$ ) eine Verschiebung von  $x_1(\tau)$  nach links / rechts
- eine Multiplikation mit  $a$  / Division durch  $a$  ( $a > 1$ ) eine Stauchung / Streckung von  $x_1(\tau)$
- Multiplikation mit  $-1$  eine Spiegelung an der Ordinatenachse

Die Reihenfolge der Schritte ist nicht **EGAL**:  
erst **Verschieben** um  $b$ , dann **Skalieren/Invertieren** mit  $-a$

## 1.2 Elementarsignale

- Sprungfunktion  $\varepsilon$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac  $\delta$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Eigenschaften:

- Höhe unendlich
- Fläche = 1
- Zusammenhang mit Sprungfunktion  
 $\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$  bzw.  $\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$
- Ausblendeigenschaft

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung:  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls  $\Lambda$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion  $rect$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$rect(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

## 2 Systeme

### 2.1 Eigenschaften

#### 1. Speicher

- Frei: wird durch eine xy-Kennlinie vollständig beschrieben

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

- behaftet: Bei diesen Systemen ist keine vollständige Beschreibung durch eine xy-Kennlinie möglich

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) + 2x(t-1)$$

#### 2. Kausalität

Ausgangssignal hängt nur vom aktuellen und vorherigen Eingangssignal ab

$$\text{Kausal: z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

$$\text{Akausal: z.B. } y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$

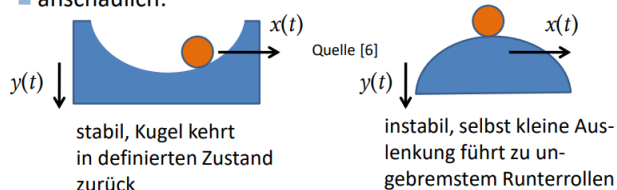
Speicherfreiheit & Kausalität: Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, aber nicht umgekehrt.

#### 3. Stabilität

(Bounded Input  $\rightarrow$  Bounded Output)

BIBO Stabilität: kleines/beschränktes Eingangssignal  $\rightarrow$  kleine/beschränkte Antwort.

■ anschaulich:



z.B. für stabiles System

$$y(t) = 50 \cdot x^3(t)$$

z.B. für instabiles System

$$y(t) = e^t \cdot x(t)$$

#### 4. Zeitinvariant $\leftrightarrow$ Zeitvariant

- invariant: Systeme ändern sich **nicht** bei einer Zeitverschiebung.
- variant: Verschobenes Eingangssignal  $\rightarrow$  verschobenes Ausgangssignal

#### 5. Linearität

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt: Linearkombination von Eingangssignalen ruft entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale hervor

##### Bedeutung Linearität

eine Verdopplung der Eingangsgröße (z.B. Spannung) führt auch zu einer Verdopplung der Ausgangsgröße.

### 2.2 LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)

#### 2.2.1 Ein-/Ausgangsbeziehung

- Addition
- Multiplikation
- Differentiation
- Integration
- Zeitverschiebung (Verzögerung)

#### 2.2.2 Faltung

Aus der Impulsantwort eines LTI-Systems und dem Eingangssignal lässt sich das Ausgangssignal durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow (*) \text{ Faltung Operator}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

- Der Dirac-Impuls ist das neutrale Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Eine Faltung mit einem verschobenen Dirac-Impuls führt zur Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

##### Rechenregeln

- $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

#### 2.2.3 Frequenzgang & Übertragungsfunktion

- Frequenzgang

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)}$$

- Amplitudengang

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- Phasengang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

- Eigenfunktion

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : & \text{Eigenfunktion} \\ \lambda : & \text{Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

jede komplexe Exponentialfunktion  $x(t) = e^{st}$  ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems  $S$ :

$$y(t) = S \{e^{st}\} = \lambda \cdot e^{st}$$

Eigenwert kann wie folgt berechnet werden:

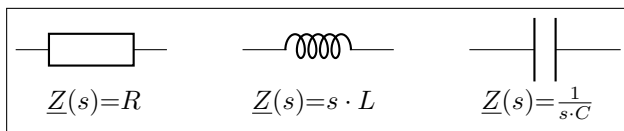
$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau$$

- **Erweiterung der komplexen Wechselstromrechnung**

Die harmonische Exponentialfunktion  $e^{j\omega t}$  ist ein Sonderfall von  $e^{st}$  mit  $s = j\omega$

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$



### Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger des Ausgangssignals}}{\text{komplexer Zeiger des Eingangssignals}}$$

Die Übertragungsfunktion hängt von der komplexen Frequenz  $s = \sigma + j\omega$  ab.

## 3 Zweitore - Vierpoltheorie

### 3.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix  $\mathbf{Y}$ :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$ :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{C}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{C}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot (-\underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot (-\underline{I}_2) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix  $\mathbf{B}$ :

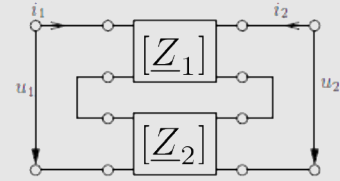
$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \cdot (-\underline{I}_1) \\ \underline{I}_2 = \underline{B}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \cdot (-\underline{I}_1) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

#### 3.1.1 Parameterumrechnung

|                          | $\underline{\mathbf{Z}}$   | $\underline{\mathbf{Y}}$   | $\underline{\mathbf{H}}$  | $\underline{\mathbf{A}}$   |
|--------------------------|--|--|---|--|
| $\underline{\mathbf{Z}}$ | $\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \\ \frac{-\underline{Y}_{21}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{\underline{Y}_{11}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{\det \underline{\mathbf{H}}}{\underline{H}_{22}} & \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}} \\ \frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} & \frac{1}{\underline{H}_{22}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} \end{bmatrix}$  |
| $\underline{\mathbf{Y}}$ | $\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ \det \underline{\mathbf{Z}} & \det \underline{\mathbf{Z}} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \\ \det \underline{\mathbf{Z}} & \det \underline{\mathbf{Z}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 1 & -\underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11} \\ \underline{H}_{21} & \det \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix}$                       | $\begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{12} \\ -1 & \underline{A}_{11} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{12} \end{bmatrix}$ |
| $\underline{\mathbf{H}}$ | $\begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \\ -\underline{Z}_{21} & 1 \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \\ \underline{Y}_{21} & \det \underline{\mathbf{Y}} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} \underline{A}_{12} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{22} & \underline{A}_{22} \\ -1 & \underline{A}_{21} \\ \underline{A}_{22} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$  |
| $\underline{\mathbf{A}}$ | $\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{\mathbf{Z}} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \\ 1 & \underline{Z}_{22} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \\ -\det \underline{\mathbf{Y}} & -\underline{Y}_{11} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} -\det \underline{\mathbf{H}} & -\underline{H}_{11} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \\ -\underline{H}_{22} & -1 \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \end{bmatrix}$                    | $\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{11} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$   |

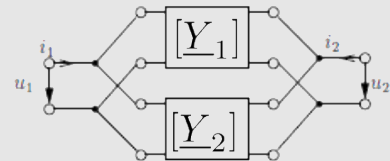
### 3.2 Zusammenschalten von Zweitoren

- Reihenschaltung:



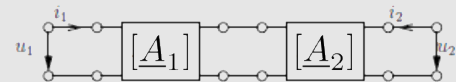
$$[\underline{\mathbf{Z}}] = [\underline{\mathbf{Z}}_1] + [\underline{\mathbf{Z}}_2]$$

- Parallelschaltung:



$$[\underline{\mathbf{Y}}] = [\underline{\mathbf{Y}}_1] + [\underline{\mathbf{Y}}_2]$$

- Kettenschaltung:

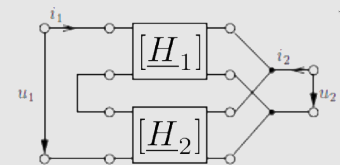


$$[\underline{\mathbf{A}}] = [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2]$$

BEACHTET:

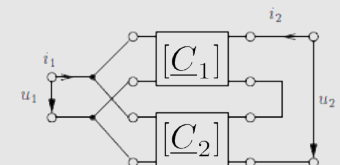
Im Allgemeinen gilt  $\rightarrow [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2] \neq [\underline{\mathbf{A}}_2] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_1]$

- Reihen-Parallelschaltung:



$$[\underline{\mathbf{H}}] = [\underline{\mathbf{H}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{H}}_2]$$

- Parallel-Reihenschaltung:

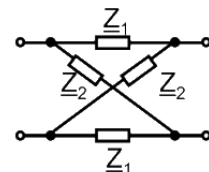
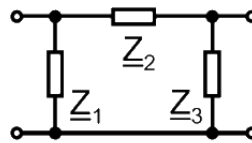
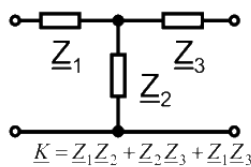


$$[\underline{\mathbf{C}}] = [\underline{\mathbf{C}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{C}}_2]$$

### 3.3 Matrizen elementarer Zweitore

| Schaltung | <u>Z</u>   | <u>Y</u>   | <u>H</u>  | <u>C</u>  | <u>A</u>  |
|-----------|--|--|---|---|---|
|           | ne   | $\begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$                     | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{pmatrix}$                                 | $\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                          |
|           | $\begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$ | ne   | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Y} \end{pmatrix}$                     | $\begin{pmatrix} \underline{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$                                 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix}$                          |
|           | ne   | $\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$       | $\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{pmatrix}$             | $\begin{pmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
|           | ne   | ne   | $\begin{pmatrix} 0 & \underline{u} \\ -\underline{u} & 0 \end{pmatrix}$         | $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\underline{u}} \\ \frac{1}{\underline{u}} & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \underline{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{u}} \end{pmatrix}$    |

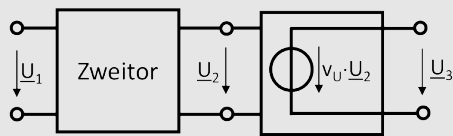
idealer Übertrager  
 $\underline{u} = \frac{w_1}{w_2}$



|                   |   |  |   |
|-------------------|---|--|---|
| $[\underline{Z}]$ | $\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} \end{bmatrix}$  |
| $[\underline{Y}]$ | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & \frac{-\underline{Z}_2}{K} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} \\ \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} & \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} \end{bmatrix}$  |
| $[\underline{H}]$ | $\begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$   |   |
| $[\underline{C}]$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$   |   |
| $[\underline{A}]$ | $\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$ |

### 3.3.1 Trennverstärker

Ersatzschaltbild eines idealen Trennverstärkers:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_e = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{v_U} & 0 \\ \frac{\underline{A}_{21}}{v_U} & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.3.2 Torbedingungen

Die Torbedingungen werden durch:

- idealen Übertrager
- Kurzschlusschleife
- Parallelschaltung längssymmetrischer Zweitore

erfüllt.

für die das Zusammenschalten von Zweitoren müssen diese Bedingungen eingehalten werden.

### 3.4 Zweitor Eigenschaften:

- Reziprozität (Umkehrbarkeit)

|     |                    |
|-----|--------------------|
| $Z$ | $Z_{12} = Z_{21}$  |
| $Y$ | $Y_{12} = Y_{21}$  |
| $A$ | $\det[A] = 1$      |
| $H$ | $H_{12} = -H_{21}$ |

Ein umkehrbares (reziprokes) Zweitor wird nur durch drei Parameter beschrieben:

**(RLCM-Zweitor) ist immer umkehrbar.**

**Gegenbeispiel:** idealer Transistor

- Rückwirkungsfreiheit

$$Z_{12} = Y_{12} = H_{12} = \det[A] = 0$$

Ein rückwirkungsfreies Zweitor ist nicht reziprok und wird nur durch drei Parameter beschrieben.

Beispiele: idealer Verstärker, idealer Transistor, gesteuerte Quellen

- Symmetrie

|     |                   |
|-----|-------------------|
| $Z$ | $Z_{11} = Z_{22}$ |
| $Y$ | $Y_{11} = Y_{22}$ |
| $A$ | $A_{11} = A_{22}$ |
| $H$ | $\det[H] = 1$     |

Ein umkehrbares und symmetrisches Zweitor wird durch zwei Parameter beschrieben.

## 3.5 Zweitorersatzschaltung

### 3.5.1 gesteuerte Quellen

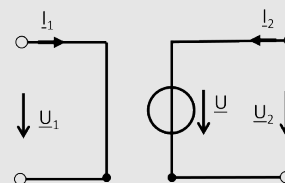
#### Ideal

VCVS: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

CCVS: Stromgesteuerte Spannungsquelle

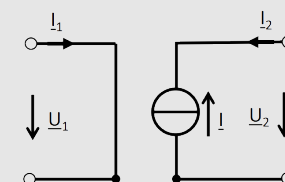
VCCS: Spannungsgesteuerte Stromquelle

CCCS: Stromgesteuerte Stromquelle



VCVS:  $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS:  $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1$

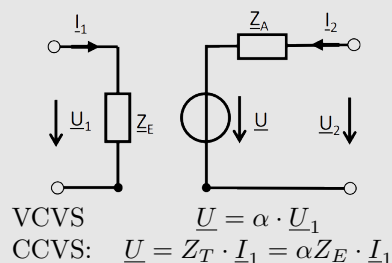


VCCS:  $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1$

CCCS:  $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1$

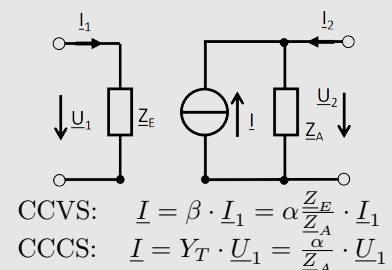
Andere Matrizen sind nicht definiert. Ideale (gesteuerte) Quellen lassen sich nicht ineinander umwandeln!

#### Linear



VCVS:  $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS:  $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1 = \alpha Z_E \cdot \underline{I}_1$

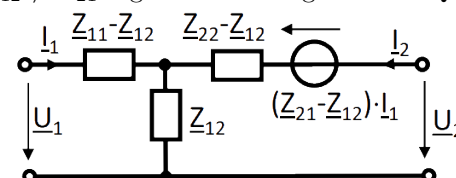


CCVS:  $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1 = \alpha \frac{Z_E}{Z_A} \cdot \underline{I}_1$

CCCS:  $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1 = \frac{\alpha}{Z_A} \cdot \underline{U}_1$

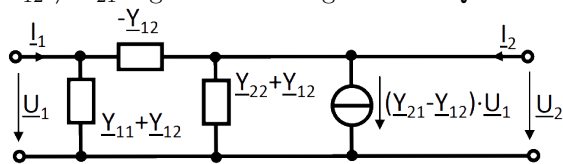
### 3.5.2 Ersatzschaltbilder

- T-Ersatzschaltbild für Z-Matrix für  $Z_{12} \neq Z_{21}$  ergänzt um eine gesteuerte Quelle.

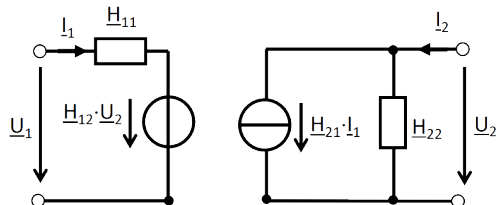




- II-Ersatzschaltbild für Y-Matrix  
für  $Y_{12} \neq Y_{21}$  ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- Hybrid-Ersatzschaltbild für H-Matrix



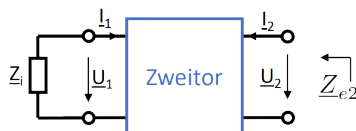
### 3.6 Beschaltete Zweitore

#### 3.6.1 Eingangsimpedanz



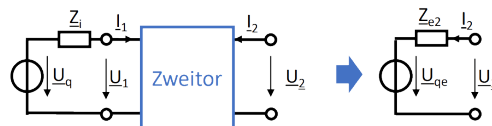
$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_V} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_V} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_V + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_V + \underline{A}_{22}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_V} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{C}_{11} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{22} + \underline{Z}_V} \end{aligned}$$

#### 3.6.2 Ausgangsimpedanz



$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_i + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_i + \underline{A}_{11}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{C}_{22} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Z}_i} \end{aligned}$$

#### 3.6.3 Ersatzquelle



$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q \underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{I}_q \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i \underline{A}_{21} + \underline{A}_{11}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{U}_q \underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{I}_q \underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_i} \end{aligned}$$

#### 3.6.4 Wellenwiderstand

Beschaltet man den Ausgang eines Zweitores mit  $\underline{Z}_{w2}$ , so liegt am Eingang die Impedanz  $\underline{Z}_{w1}$ .

$$\underline{Z}_{w1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{22}}$$

Beschaltet man den Eingang eines Zweitores mit  $\underline{Z}_{w1}$ , so liegt am Ausgang die Impedanz  $\underline{Z}_{w2}$ .

$$\underline{Z}_{w2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{11}}$$

#### Lösung des obigen Gleichungssystems

|                 | $\underline{Z}_{w1}$   | $\underline{Z}_{w2}$   |
|-----------------|--|--|
| $\underline{Z}$ | $\sqrt{\frac{\underline{Z}_{11} \det \underline{Z}}{\underline{Z}_{22}}}$                                | $\sqrt{\frac{\underline{Z}_{22} \det \underline{Z}}{\underline{Z}_{11}}}$                                |
| $\underline{Y}$ | $\sqrt{\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11} \det \underline{Y}}}$                                | $\sqrt{\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22} \det \underline{Y}}}$                                |
| $\underline{A}$ | $\sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}}$ | $\sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$ |
| $\underline{H}$ | $\sqrt{\frac{\underline{H}_{11} \det \underline{H}}{\underline{H}_{22}}}$                                | $\sqrt{\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{22} \det \underline{H}}}$                                |
| $\underline{C}$ | $\sqrt{\frac{\underline{C}_{22}}{\underline{C}_{11} \det \underline{C}}}$                                | $\sqrt{\frac{\underline{C}_{11} \det \underline{C}}{\underline{C}_{11}}}$                                |

Für symmetrische Zweitore gilt  $\underline{Z}_{w1} = \underline{Z}_{w2}$

Alternatives:

#### Messtechnisch (Leerlauf und Kurzschluss)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{01} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot \infty + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \infty + \underline{A}_{22}} \\ \underline{Z}_{k1} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot 0 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot 0 + \underline{A}_{22}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \underline{Z}_{01} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot \infty + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \infty + \underline{A}_{22}} \\ \underline{Z}_{k1} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot 0 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot 0 + \underline{A}_{22}} \right\} \underline{Z}_{w1} = \sqrt{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}_{01}} = A(\underline{Z}_{w1})$$

### 3.6.5 Scheinleistungsanpassung

#### Wiederholung GE2 Kapitel 2.7.8

Beschaltet man ein Zweitor mit seinen Wellenwiderständen, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

### 3.6.6 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand einem Grenzwert, dem **Kettenwiderstand  $\underline{Z}_K$** .

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_K}$$

Lösung der obigen Gleichung:

$$\underline{Z}_K = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22})^2 + 4 \cdot \det \underline{Z}})$$

Für symmetrische Zweitore entspricht der Kettenwiderstand dem Wellenwiderstand.