
Formelsammlung

Ayham Alhalaibi
Signale und Systeme

17. Dezember 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Signale im Zeitbereich	1
1.1	Signalcharakterisierung	1
1.2	Elementarsignale	1
2	Systeme	2
2.1	Eigenschaften	2
2.2	LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)	2
2.2.1	Ein-/Ausgangsbeziehung	2
2.2.2	Faltung	2
2.3	Frequenzgang & Übertragungsfunktion	2
2.3.1	Pegel	3
2.4	Pole und Nullstellen	3
2.5	Elementare Übertragungsglieder	3
2.6	Zusammenschalten von Übertragungsgliedern	3
2.7	Bode Diagramm	3
3	Zweitore - Vierpoltheorie	4
3.1	Zweitorgleichungen	4
3.1.1	Parameterumrechnung	4
3.2	Zusammenschalten von Zweitoren	4
3.3	Matrizen elementarer Zweitore	5
3.3.1	Trennverstärker	6
3.3.2	Torbedingungen	6
3.4	Zweiter Eigenschaften:	6
3.5	Zweitorersatzschaltung	6
3.5.1	gesteuerte Quellen	6
3.5.2	Ersatzschaltbilder	6
3.6	Beschaltete Zweitore	7
3.6.1	Eingangsimpedanz	7
3.6.2	Ausgangsimpedanz	7
3.6.3	Ersatzquelle	7
3.6.4	Wellenwiderstand	7
3.6.5	Scheinleistungsanpassung	8
3.6.6	Kettenwiderstand	8
4	Signaldarstellung im Frequenz- und Bildbereich	8
4.1	Fourierreihe periodischer Signale	8
4.1.1	Reelle Fourierreihe	8
4.1.2	Komplexe Fourierreihe	8
4.1.3	Komplex Reell umwandeln	8
4.1.4	Symmetrieeigenschaften	8
4.1.5	Halbwellensymmetrie	8
4.1.6	Verschiebungssatz	9
4.1.7	Fourierreihe und LTI-Systeme	9
4.2	Kenngrößen periodischer Signale	9
4.3	Fouriertransformation	10
4.3.1	Umwandeln zwischen Fouriertransformation und Fourierreihen	10
4.4	Eigenschaften der Fouriertransformation	10
5	Wichtige Formeln aus der Vorlesung	11

1 Signale im Zeitbereich

1.1 Signalcharakterisierung

- | | | |
|--|-----------------------|---------------------|
| 1. Kontinuierlich | \longleftrightarrow | Diskret |
| 2. Deterministisch | \longleftrightarrow | Stochastisch |
| Deterministische Signale sind mathematisch beschreibbar, im Gegensatz zu stochastischen Signalen die dem Zufall unterworfen sind | | |
| 3. Periodisch | \longleftrightarrow | Aperiodisch |

periodisch wenn, $x(t) = x(t + T_p)$ gilt.
 T_p heißt Grundperiode.

- | | | |
|------------------|-----------------------|------------------|
| 4. Gerade | \longleftrightarrow | Ungerade: |
|------------------|-----------------------|------------------|

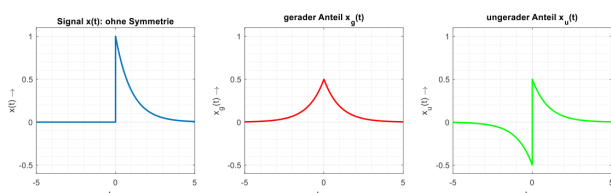
Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil:

$$x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

- ungerader Anteil:

$$x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$



- | | | |
|-------------------------|-----------------------|------------------------|
| 5. Energiesignal | \longleftrightarrow | Leistungssignal |
|-------------------------|-----------------------|------------------------|

Energie:

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

6. Korrelation

Die Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier deterministischer Energiesignale.

Korrelationsfunktion

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

7. Transformation

Signale können modifiziert werden durch Verändern der unabhängigen Variablen:

- Zeitverschiebung
- Zeitdehnung und Stauchung
- Zeitumkehr

$$x_2(t) = x_1(-at + b)$$

das Argument von $x_1(\tau)$ stellt eine Abbildung $t \rightarrow \tau$ dar, daher bewirkt

- $+b / -b$ ($b > 0$) eine Verschiebung von $x_1(\tau)$ nach links / rechts
- eine Multiplikation mit a / Division durch a ($a > 1$) eine Stauchung / Streckung von $x_1(\tau)$
- Multiplikation mit -1 eine Spiegelung an der Ordinatenachse

Die Reihenfolge der Schritte ist nicht **EGAL**:
erst Verschieben um b , dann Skalieren/Invertieren mit $-a$

1.2 Elementarsignale

- Sprungfunktion ε

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Eigenschaften:

- Höhe unendlich
- Fläche = 1
- Zusammenhang mit Sprungfunktion
 $\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ bzw. $\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$
- Ausblendeigenschaft

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion $rect$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$rect(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

2 Systeme

2.1 Eigenschaften

1. Speicher

- Frei: wird durch eine xy-Kennlinie vollständig beschrieben

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

- behaftet: Bei diesen Systemen ist keine vollständige Beschreibung durch eine xy-Kennlinie möglich

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) + 2x(t-1)$$

2. Kausalität

Ausgangssignal hängt nur vom aktuellen und vorherigen Eingangssignal ab

$$\text{Kausal: z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

$$\text{Akausal: z.B. } y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$

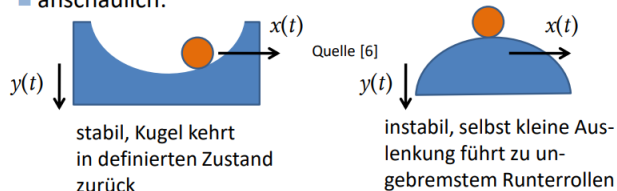
Speicherfreiheit & Kausalität: Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, aber nicht umgekehrt.

3. Stabilität

(Bounded Input \rightarrow Bounded Output)

BIBO Stabilität: kleines/beschränktes Eingangssignal \rightarrow kleine/beschränkte Antwort.

■ anschaulich:



z.B. für stabiles System

$$y(t) = 50 \cdot x^3(t)$$

z.B. für instabiles System

$$y(t) = e^t \cdot x(t)$$

4. Zeitinvariant \leftrightarrow Zeitvariant

- invariant: Systeme ändern sich **nicht** bei einer Zeitverschiebung.
- variant: Verschobenes Eingangssignal \rightarrow verschobenes Ausgangssignal

5. Linearität

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt: Linearkombination von Eingangssignalen ruft entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale hervor

Bedeutung Linearität

eine Verdopplung der Eingangsgröße (z.B. Spannung) führt auch zu einer Verdopplung der Ausgangsgröße.

2.2 LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)

2.2.1 Ein-/Ausgangsbeziehung

- Addition
- Multiplikation
- Differentiation
- Integration
- Zeitverschiebung (Verzögerung)

2.2.2 Faltung

Aus der Impulsantwort eines LTI-Systems und dem Eingangssignal lässt sich das Ausgangssignal durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow (*) \text{ Faltung Operator}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

- Der Dirac-Impuls ist das neutrale Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Eine Faltung mit einem verschobenen Dirac-Impuls führt zur Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t - a) = x(t - a)$$

Rechenregeln

- $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

2.3 Frequenzgang & Übertragungsfunktion

• Frequenzgang

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)}$$

• Amplitudengang

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

• Phasengang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

• Eigenfunktion

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : & \text{Eigenfunktion} \\ \lambda : & \text{Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = e^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S :

$$y(t) = S \{e^{st}\} = \lambda \cdot e^{st}$$

Eigenwert kann wie folgt berechnet werden:

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau$$

• Erweiterung der komplexen Wechselstromrechnung

Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein Sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega$

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$

Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger des Ausgangssignals}}{\text{komplexer Zeiger des Eingangssignals}}$$

Die Übertragungsfunktion hängt von der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$ ab.

2.3.1 Pegel

Energiegröße: $a = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ dB}$

Feldgröße: $a = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ dB}$

2.4 Pole und Nullstellen

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n}$$

Die Koeffizienten a_n und b_m ergeben sich aus den Bauelementen und sind reell.

$$\underline{H}(s) = \frac{\text{SUMME ALLER NULLSTELLEN}}{\text{SUMME ALLER POLE}} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s - s_{o1}) \cdot (s - s_{o2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{oM})}{(s - s_{x1}) \cdot (s - s_{x2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{xN})}$$

$$k = \frac{b_M}{a_N} \text{ ist der Maßstabfaktor}$$

Bei stabilen Systemen müssen alle Pole in der linken komplexen Halbebene liegen.

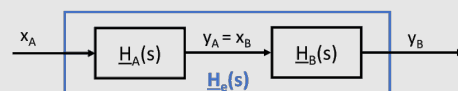
2.5 Elementare Übertragungsglieder

P-Glied, D-Glied, I-Glied, PT1-Glied Für mehr siehe externe Tabelle.

2.6 Zusammenschalten von Übertragungsgliedern

- Kettenschaltung
Multiplikation der Einzelübertragungsfunktionen.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) = \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)$$

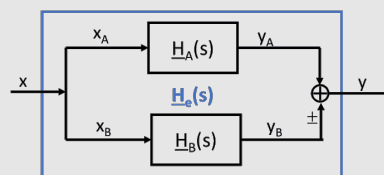


$$\underline{Y}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{Y}_A = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A$$

Rückwirkungsfreiheit gewährleistet sein.

- Parallelschaltung
Summe der Einzelübertragungsfunktionen.

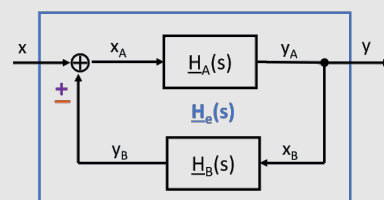
$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) + \underline{H}_A(s)$$



$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_A \pm \underline{Y}_B \\ &= \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A \pm \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B \\ &= (\underline{H}_A(s) + \underline{H}_B(s)) \cdot \underline{X} \end{aligned}$$

- Rückkopplung

$$\underline{H}_e(s) = \frac{\underline{H}_A(s)}{1 \pm \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}$$



Mitkopplung: y_A vergrößert x_A
Gegenkopplung y_A verkleinert x_A

2.7 Bode Diagramm

- Bode Diagramm von Kettenschaltung
Ergibt sich durch **Addition** der Bodediagramme der einzelnen Glieder.
- Bode Diagramm der inversen Übertragungsfunktion
Ergibt sich durch **Spiegelung** an der X-Achse.

3 Zweitore - Vierpoltheorie

3.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix \mathbf{Y} :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix \mathbf{Z} :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix \mathbf{H} :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix \mathbf{C} :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{C}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{C}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix \mathbf{A} :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot (-\underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot (-\underline{I}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix \mathbf{B} :

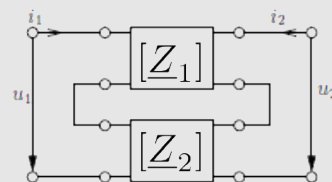
$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \cdot (-\underline{I}_1) \\ \underline{I}_2 = \underline{B}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \cdot (-\underline{I}_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

3.1.1 Parameterumrechnung

	$\underline{\mathbf{Z}}$	$\underline{\mathbf{Y}}$	$\underline{\mathbf{H}}$	$\underline{\mathbf{A}}$
$\underline{\mathbf{Z}}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \\ \frac{-\underline{Y}_{21}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{\underline{Y}_{11}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det \underline{\mathbf{H}}}{\underline{H}_{22}} & \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}} \\ \frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} & \frac{1}{\underline{H}_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbf{Y}}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{H}_{11}} & \frac{-\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}} \\ \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} & \frac{\det \underline{\mathbf{H}}}{\underline{H}_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{12} \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbf{H}}$	$\begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Y}_{11}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}} \\ \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} & \frac{\det \underline{\mathbf{Y}}}{\underline{Y}_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{12} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{22} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbf{A}}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{\mathbf{Z}} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{-1}{\underline{Y}_{21}} \\ \frac{-\det \underline{\mathbf{Y}}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-\det \underline{\mathbf{H}}}{\underline{H}_{21}} & \frac{-\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}} \\ \frac{-\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} & \frac{-1}{\underline{H}_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$

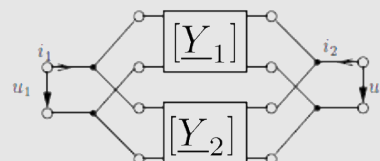
3.2 Zusammenschalten von Zweitoren

- Reihenschaltung:



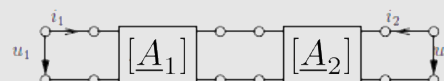
$$[\underline{\mathbf{Z}}] = [\underline{\mathbf{Z}}_1] + [\underline{\mathbf{Z}}_2]$$

- Parallelschaltung:



$$[\underline{\mathbf{Y}}] = [\underline{\mathbf{Y}}_1] + [\underline{\mathbf{Y}}_2]$$

- Kettenschaltung:

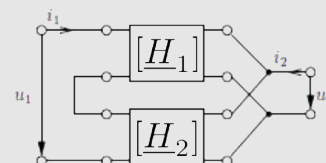


$$[\underline{\mathbf{A}}] = [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2]$$

BEACHTET:

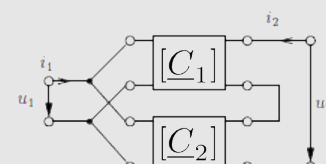
Im Allgemeinen gilt $\rightarrow [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2] \neq [\underline{\mathbf{A}}_2] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_1]$

- Reihen-Parallelschaltung:



$$[\underline{\mathbf{H}}] = [\underline{\mathbf{H}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{H}}_2]$$

- Parallel-Reihenschaltung:

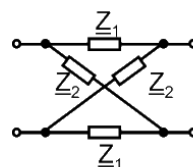
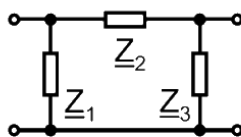
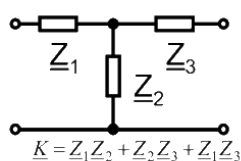


$$[\underline{\mathbf{C}}] = [\underline{\mathbf{C}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{C}}_2]$$

3.3 Matrizen elementarer Zweitore

Schaltung	<u>Z</u>	<u>Y</u>	<u>H</u>	<u>C</u>	<u>A</u>
	ne	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix}$
	ne	$\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	ne	ne	$\begin{pmatrix} 0 & \underline{u} \\ -\underline{u} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\underline{u}} \\ \frac{1}{\underline{u}} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{u}} \end{pmatrix}$

idealer Übertrager
 $\underline{u} = \frac{w_1}{w_2}$



$$[\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{Y}] \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & \frac{-\underline{Z}_2}{K} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} \\ \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} & \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{H}] \begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{C}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

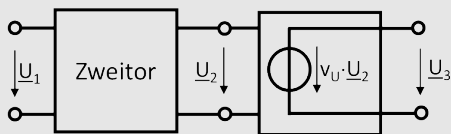
$$[\underline{A}] \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$$

3.3.1 Trennverstärker

Ersatzschaltbild eines idealen Trennverstärkers:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_e = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{v_U} & 0 \\ \frac{\underline{A}_{21}}{v_U} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Torbedingungen

Die Torbedingungen werden durch:

- idealen Übertrager
- Kurzschlusschleife
- Parallelschaltung längssymmetrischer Zweitore

erfüllt.

für die das Zusammenschalten von Zweitoren müssen diese Bedingungen eingehalten werden.

3.4 Zweitor Eigenschaften:

- Reziprozität (Umkehrbarkeit)

Z	$Z_{12} = Z_{21}$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$
A	$\det[A] = 1$
H	$H_{12} = -H_{21}$

Ein umkehrbares (reziprokes) Zweitor wird nur durch drei Parameter beschrieben:

(RLCM-Zweitor) ist immer umkehrbar.

Gegenbeispiel: idealer Transistor

- Rückwirkungsfreiheit

$$Z_{12} = Y_{12} = H_{12} = \det[A] = 0$$

Ein rückwirkungsfreies Zweitor ist nicht reziprok und wird nur durch drei Parameter beschrieben.

Beispiele: idealer Verstärker, idealer Transistor, gesteuerte Quellen

- Symmetrie

Z	$Z_{11} = Z_{22}$
Y	$Y_{11} = Y_{22}$
A	$A_{11} = A_{22}$
H	$\det[H] = 1$

Ein umkehrbares und symmetrisches Zweitor wird durch zwei Parameter beschrieben.

3.5 Zweitorersatzschaltung

3.5.1 gesteuerte Quellen

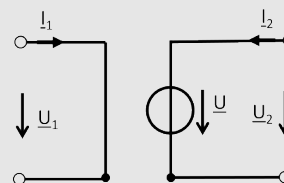
Ideal

VCVS: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

CCVS: Stromgesteuerte Spannungsquelle

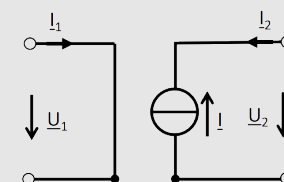
VCCS: Spannungsgesteuerte Stromquelle

CCCS: Stromgesteuerte Stromquelle



VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1$

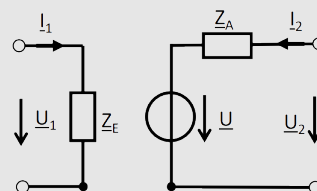


VCCS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1$

CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1$

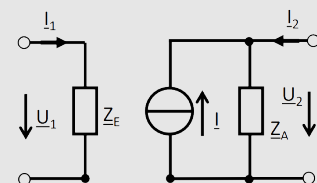
Andere Matrizen sind nicht definiert. Ideale (gesteuerte) Quellen lassen sich nicht ineinander umwandeln!

Linear



VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1 = \alpha Z_E \cdot \underline{I}_1$

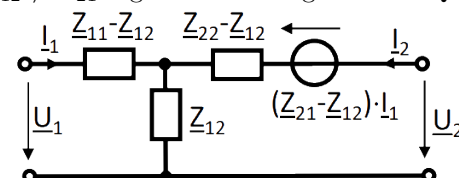


CCVS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1 = \alpha \frac{Z_E}{Z_A} \cdot \underline{I}_1$

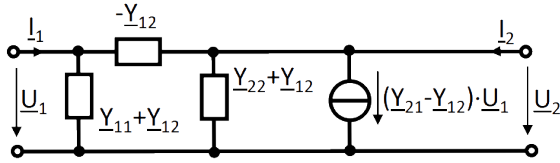
CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1 = \frac{\alpha}{Z_A} \cdot \underline{U}_1$

3.5.2 Ersatzschaltbilder

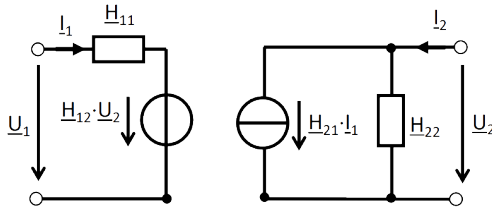
- T-Ersatzschaltbild für Z-Matrix für $Z_{12} \neq Z_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- II-Ersatzschaltbild für Y-Matrix
für $Y_{12} \neq Y_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- Hybrid-Ersatzschaltbild für H-Matrix



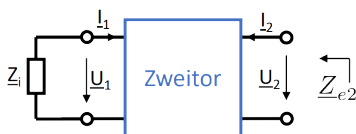
3.6 Beschaltete Zweitore

3.6.1 Eingangsimpedanz



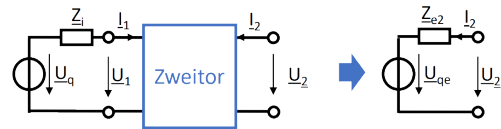
$$\begin{aligned} Z &\rightarrow Z_{e1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_V} \\ Y &\rightarrow Y_{e1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_V} \\ A &\rightarrow Z_{e1} = \frac{A_{11}Z_V + A_{12}}{A_{21}Z_V + A_{22}} \\ H &\rightarrow Z_{e1} = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_V} \\ C &\rightarrow Y_{e1} = C_{11} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{22} + Z_V} \end{aligned}$$

3.6.2 Ausgangsimpedanz



$$\begin{aligned} Z &\rightarrow Z_{e2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i} \\ Y &\rightarrow Y_{e2} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i} \\ A &\rightarrow Z_{e2} = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{11}} \\ H &\rightarrow Z_{e2} = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Y_i} \\ C &\rightarrow Y_{e2} = C_{22} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{11} + Z_i} \end{aligned}$$

3.6.3 Ersatzquelle



$$\begin{aligned} Z &\rightarrow U_{qe} = \frac{U_q Z_{21}}{Z_{11} + Z_i} \\ Y &\rightarrow I_{qe} = \frac{-I_q Y_{21}}{Y_{11} + Y_i} \\ A &\rightarrow U_{qe} = \frac{U_q}{Z_i A_{21} + A_{11}} \\ H &\rightarrow I_{qe} = \frac{-U_q H_{21}}{H_{11} + Z_i} \\ C &\rightarrow U_{qe} = \frac{I_q C_{21}}{C_{11} + Y_i} \end{aligned}$$

3.6.4 Wellenwiderstand

Beschaltet man den Ausgang eines Zweitors mit Z_{w2} , so liegt am Eingang die Impedanz Z_{w1} .

$$Z_{w1} = \frac{A_{11}Z_{w2} + A_{12}}{A_{21}Z_{w2} + A_{22}}$$

Beschaltet man den Eingang eines Zweitors mit Z_{w1} , so liegt am Ausgang die Impedanz Z_{w2} .

$$Z_{w2} = \frac{A_{22}Z_{w1} + A_{12}}{A_{21}Z_{w1} + A_{11}}$$

Lösung des obigen Gleichungssystems

	Z_{w1}	Z_{w2}
\underline{Z}	$\sqrt{\frac{Z_{11} \det \underline{Z}}{Z_{22}}}$	$\sqrt{\frac{Z_{22} \det \underline{Z}}{Z_{11}}}$
\underline{Y}	$\sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \det \underline{Y}}}$	$\sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \det \underline{Y}}}$
\underline{A}	$\sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$	$\sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}$
\underline{H}	$\sqrt{\frac{H_{11} \det \underline{H}}{H_{22}}}$	$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \det \underline{H}}}$
\underline{C}	$\sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11} \det \underline{C}}}$	$\sqrt{\frac{C_{11} \det \underline{C}}{C_{11}}}$

Für symmetrische Zweitore gilt $Z_{w1} = Z_{w2}$

Alternatives:

Messtechnisch (Leerlauf und Kurzschluss)

$$\begin{aligned} Z_{01} &= \frac{A_{11} \cdot \infty + A_{12}}{A_{21} \cdot \infty + A_{22}} \\ Z_{k1} &= \frac{A_{11} \cdot 0 + A_{12}}{A_{21} \cdot 0 + A_{22}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Z_{01} &= \frac{A_{11} \cdot \infty + A_{12}}{A_{21} \cdot \infty + A_{22}} \\ Z_{k1} &= \frac{A_{11} \cdot 0 + A_{12}}{A_{21} \cdot 0 + A_{22}} \right\} Z_{w1} = \sqrt{Z_{k1} \cdot Z_{01}} = A(Z_{w1})$$

3.6.5 Scheinleistungsanpassung

Wiederholung GE2 Kapitel 2.7.8

Beschaltet man ein Zweitor mit seinen Wellenwiderständen, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

3.6.6 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand einem Grenzwert, dem **Kettenwiderstand** \underline{Z}_K .

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_K}$$

Lösung der obigen Gleichung:

$$\underline{Z}_K = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22})^2 + 4 \cdot \det \underline{Z}})$$

Für symmetrische Zweitore entspricht der Kettenwiderstand dem Wellenwiderstand.

4 Signaldarstellung im Frequenz- und Bildbereich

4.1 Fourierreihe periodischer Signale

Die Überlagerung von Sinusschwingungen zu einem periodischen, nichtsinusförmigen Signal nennt man harmonische Synthese.

4.1.1 Reelle Fourierreihe

- mit \sin und \cos :

$$f(t) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

- mit Amplitude und Phase:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2})] \end{aligned}$$

Koeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$$

4.1.2 Komplexe Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 kt}$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot e^{-j\omega_1 kt} dt = \frac{1}{2} (a_k - jb_k)$$

4.1.3 Komplex Reell umwandeln

Komplex \rightarrow Reell:

$$a_0 = A_0 = \underline{c}_0$$

$$\left. \begin{aligned} a_k &= 2 \Re \{ \underline{c}_k \} = [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \\ b_k &= -2 \Im \{ \underline{c}_k \} = j [\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \\ A_k &= 2 |\underline{c}_k| \quad \beta_k = -\varphi_k \end{aligned} \right\} \quad k > 0$$

Reell \rightarrow Komplex:

$$\left. \begin{aligned} \underline{c}_k &= \frac{1}{2} (a_k - jb_k) = \frac{A_k}{2} e^{-j\beta_k} \\ \underline{c}_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + jb_k) = \frac{A_k}{2} e^{j\beta_k} \end{aligned} \right\} \quad k > 0$$

4.1.4 Symmetrieeigenschaften

- Gerade Funktionen symmetrisch zur y-Achse
alle \sin -teile verschwinden - $A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt$
- $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$
- $b_k = 0$
- Ungerade Funktionen symmetrisch zum Ursprung
alle \cos -teile und Gleichanteil verschwinden
- $A_0 = 0$
- $a_k = 0$
- $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$

4.1.5 Halbwellensymmetrie

Halbwellensymmetrie gilt wenn:

$$y(t) = -y(t \pm T/2)$$

Die Fourier-Reihe einer Zeitfunktion mit HWS enthält stets nur Terme mit ungeraden Ordnungszahlen.

$k = 1, 3, 5, \dots, \infty$

im Allgemeinen

Koeffizienten:

$$A_0 = 0, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

$$b_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

gerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, \quad b_k = 0, \quad a_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

ungerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_{2k} = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

4.1.6 Verschiebungssatz

Verschiebung im Zeitbereich entspricht eine Drehung des Komplexen Spektrum um die Phase $\rightarrow -k\omega_1 t_v$

$$f_v(t) = f(t - t_v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k(t-t_v)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t_v}}_{\underline{c}_{k_v}} \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

Ist $t_v < 0$, wie im Beispiel oben, so werden die Phasenwinkel des Spektrums mit zunehmender Frequenz größer.

4.1.7 Fourierreihe und LTI-Systeme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(k\omega_1) \cdot \underline{c}_{xk}}_{\underline{c}_{yk}} \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

4.2 Kenngrößen periodischer Signale

- Effektivwert

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u(t)^2 dt}$$

mit der Fourierreihe:

$$U_{eff} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{k,eff}^2}$$

auch:

$$\sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}$$

- Klirrfaktor(Oberschwingungsgehalt):
Dient zur Quantifizierung einer nichtlinearen Verzerrung bzw. von der Sinusform eines Signals.

$$k = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} = \frac{\sqrt{U_{\sim}^2 - U_1^2}}{U_{\sim}} \leq 1$$

Für Wechselgrößen lässt sich k einfach mit **Grundschwingungsgehalt** g ermitteln (*gilt immer*):

$$k = \sqrt{1 - g^2} \leftrightarrow g = \frac{U_1}{U_{\sim}}$$

- Mischgrößen

- Schwingungsgehalt:

$$s = \frac{U_{\sim}}{U} = \frac{\text{EFFEKTIVWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{EFFEKTIVWERT DER MISCHGRÖSSE}}$$

- Welligkeit:

$$w = \frac{U_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{EFFEKTIVWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{GLEICHANTEIL}}$$

- Riffelfaktor:

$$R = \frac{\hat{U}_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{SCHEITELWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{GLEICHANTEIL}}$$

- Wirkleistung:

$$P = \bar{p}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* \leftrightarrow i_k^* = i_{-k}$$

Als Reihe:

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k,eff} \cdot I_{k,eff} \cdot \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Nur gleichfrequente harmonische tragen zur Wirkleistung bei!

- Schein- und Blindleistung

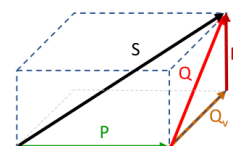
$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Bei einem nicht linearen Verbraucher an einer Sinusförmigen Spannung:

$$S^2 = (UI)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 =$$

$$U_1^2 I_0^2 + U_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1$$

Räumlich Darstellung der Scheinleistung:



Verschiebungs- Feldblindleistung Q_v

$$Q = \sqrt{Q_v^2 + D^2}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q_v^2 + D^2}$$

Blindleistung aufgrund der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gleicher Frequenz.

Verzerrungsleistung D

$$D^2 = U_1^2 \cdot (I^2 - I_1^2) = S^2(1 - g)$$

von Mischtermen (Produkten von Spannung und Strom unterschiedlicher Frequenzen).

4.3 Fouriertransformation

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

Hintransformation - Analysegleichung:

$$\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Komplexwertige Fouriertransformierte:

$$\underline{X}(\omega) = |\underline{X}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi}$$

EINHEIT: $[x(t)] \cdot s$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

4.3.1 Umwandeln zwischen Fouriertransformation und Fourierreihen

Grenzübergang $T \rightarrow \infty$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0 \rightarrow \text{kontinuierliches Spektrum}$$

$$\text{FR} \rightarrow \text{FT: } c_k = \frac{1}{T} \underline{X}(\omega_1)$$

$$\text{FR} \rightarrow \text{FT: } \underline{X}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_1)$$

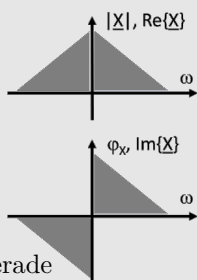
4.4 Eigenschaften der Fouriertransformation

Symmetrie

Betrag und der Realteil des Spektrums sind gerade

Phase und der Imaginärteil des Spektrums sind ungerade.

$$\underline{X}(-\omega) = \underline{X}^*(\omega)$$



$x(t)$ reell und gerade $\rightarrow X(\omega)$ reell und gerade

$$\underline{X}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

$x(t)$ reell und ungerade $\rightarrow X(\omega)$ imaginär und ungerade

$$\underline{X}(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

• Linearität

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \longleftrightarrow a_1 \underline{X}_1(\omega) + a_2 \underline{X}_2(\omega)$$

• Dualität

$$\underline{X}(t) \longleftrightarrow 2\pi \cdot x(-\omega)$$

• Zeitskalierung

$$x(a \cdot t) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} \underline{X}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Frequenzskalierung

$$\underline{X}(b \cdot \omega) \longleftrightarrow \frac{1}{|b|} x\left(\frac{t}{b}\right) \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Zeitverschiebung

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow \underline{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

• Frequenzverschiebung - Modulation

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow \underline{X}(\omega - \omega_0)$$

• Faltungssatz

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow \underline{X}_1(\omega) \cdot \underline{X}_2(\omega)$$

• Multiplikation - Fenstertheorem

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$$

• Differentiation

im Zeitbereich:

$$\frac{d}{dt} x(t) \longleftrightarrow j\omega \underline{X}(\omega)$$

im Frequenzbereich:

$$t \cdot x(t) \longleftrightarrow j \frac{d}{d\omega} \underline{X}(\omega)$$

• Integration

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{X}(\omega) + \pi \cdot \underline{X}(0) \cdot \delta(\omega)$$

• Energieberechnung - Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(\omega)|^2 d\omega$$