



# FORMELSAMMLUNG SIGNALE UND SYSTEME (SUS)

nach Vorlesungsunterlagen von  
R.Huber, S.Hipp, A.Maier, R.Sattler, A.Sehr, T.Stücke

Originalversion:	Ayham Alhulaibi
Überarbeitet von:	Tony Pham
Letzter Stand:	23. Juli 2024
Lizenz:	GPLv3

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Einheiten . . . . .	1
1.2	Quadratische Formeln . . . . .	1
1.3	Logarithmische Maße/Pegel . . . . .	1
1.3.1	Rechnen mit Logarithmen . . . . .	1
1.4	Rechnen mit Wurzeln . . . . .	1
1.5	Rechnen mit Potenzen . . . . .	1
1.6	Trigonometrische Formeln . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Signale im Zeitbereich</b>	<b>2</b>
2.1	Signalcharakterisierung . . . . .	2
2.2	Elementarsignale . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Systeme</b>	<b>3</b>
3.1	Eigenschaften . . . . .	3
3.2	LTI-Systeme . . . . .	3
3.2.1	Beschreibung . . . . .	3
3.2.2	DGL . . . . .	3
3.2.3	Impuls & Sprungantwort . . . . .	3
3.2.4	Faltung . . . . .	3
3.3	Frequenzgang . . . . .	4
3.4	Übertragungsfunktion (Ü-Fkt.) . . . . .	4
3.4.1	Gebrochen-rationale Ü-Fkt. . . . .	4
3.5	Pol-Nullstellen-Diagramm . . . . .	4
3.5.1	Frequenzgang aus dem P/N-Diagramm . . . . .	4
3.6	Zusammenschaltung LTI-Systeme . . . . .	5
3.7	Bode-Diagramm . . . . .	5
3.7.1	Merkmale . . . . .	5
3.7.2	Vorgehen . . . . .	5
3.8	Elementare Übertragungsglieder . . . . .	7
3.9	Übersicht wichtiger Übertragungsglieder . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Zweitore, Vierpole</b>	<b>11</b>
4.1	Zweitorgleichungen . . . . .	11
4.1.1	Parameterumrechnung . . . . .	11
4.2	Betriebsarten . . . . .	11
4.3	Bezugspeilsystem . . . . .	11
4.4	ZT-Eigenschaften . . . . .	11
4.5	Matrizen elementarer Zweitore . . . . .	12
4.6	Zusammenschalten von Zweitoren . . . . .	13
4.6.1	Torbedingungen . . . . .	13
4.6.2	Zweitor-Schaltungen . . . . .	13
4.6.3	Idealer Trennverstärker/OP . . . . .	13
4.6.4	OP-Verstärker . . . . .	13
4.7	Ersatzschaltbilder . . . . .	13
4.7.1	Ideale gesteuerte Quellen . . . . .	13
4.7.2	Lineare gesteuerte Quellen . . . . .	13
4.7.3	Matrizen für gesteuerte Quellen . . . . .	13
4.7.4	Ersatzschaltbilder (ESB) . . . . .	13
4.8	Beschaltete Zweitore . . . . .	14
4.8.1	Ein- und Ausgangsimpedanz an Seite 1/2 . . . . .	14
4.8.2	Ersatzquelle . . . . .	14
4.8.3	Wellenwiderstand . . . . .	14
4.8.4	Scheinleistungsanpassung . . . . .	14
4.8.5	Kettenwiderstand . . . . .	14

<b>5 Fourierreihe periodischer Signale</b>	<b>15</b>
5.1 Reelle Fourierreihe (FR) . . . . .	15
5.2 Komplexe Fourierreihe . . . . .	15
5.3 Symmetrieeigenschaften . . . . .	15
5.3.1 Halbwellsymmetrie . . . . .	15
5.4 Verschiebungssatz . . . . .	15
5.5 FR und LTI-Systeme . . . . .	16
5.6 FR-Tabelle - Bischoff . . . . .	16
5.7 Kenngrößen periodischer Signale . . . . .	21
5.7.1 Effektivwert, Klirrfaktor, Mischgrößen . . . . .	21
5.7.2 Leistungen . . . . .	21
<b>6 Fourier-Transformation (FT)</b>	<b>22</b>
6.1 Hin- und Rücktransformation . . . . .	22
6.2 FT periodischer Signale . . . . .	22
6.3 Zeit-Bandbreite-Gesetz . . . . .	22
6.4 Eigenschaften der FT . . . . .	23
6.5 Symmetrieeigenschaften . . . . .	23
6.6 Korrespondenzen der FT . . . . .	23
6.7 Faltungsregeln . . . . .	23
<b>7 Laplace-Transformation (LPT)</b>	<b>24</b>
7.1 LTI-Systeme im Bildbereich (BB) . . . . .	24
7.2 Impuls- und Sprungantwort im BB . . . . .	24
7.3 Zusammenhang LPT $\leftrightarrow$ FT . . . . .	24
7.4 P/N-Diagramm: Systemeigenschaften . . . . .	24
7.5 Partialbruchzerlegung (PBZ) . . . . .	24
7.6 Eigenschaften der LPT . . . . .	24
7.7 Korrespondenzen der LPT . . . . .	25
<b>8 Schaltvorgänge</b>	<b>26</b>
8.1 Berechnungsmethoden . . . . .	26
8.1.1 Vereinfachte Methode . . . . .	26
8.1.2 Laplace-Transformation der DGL . . . . .	26
8.1.3 Leere Energiespeicher mit LPT & KWR . . . . .	26
8.1.4 Geladene Energiespeicher mit LPT . . . . .	26
8.2 Quellenumwandlung . . . . .	26
8.3 Bauteilgleichungen . . . . .	26
<b>9 Zeitdiskrete Systeme</b>	<b>27</b>
9.1 Elementare, zeitdiskrete Signale . . . . .	27
9.2 A/D-Wandlung . . . . .	27
9.3 Zeitdiskrete LTI-Systeme . . . . .	28
9.3.1 Systemeigenschaften . . . . .	28
9.3.2 Impuls- & Systemantwort, Faltung . . . . .	28
9.3.3 Faltung mit Hilfstabelle . . . . .	28
9.3.4 Differenzengleichung $\Leftrightarrow$ Ü-Fkt. . . . .	28
9.3.5 Signalflussplan/-graph . . . . .	28
9.4 Zeitdiskrete Signale im Spektrum . . . . .	28
9.5 Zeitdiskrete Fouriertransformation . . . . .	29
9.6 z-Transformation . . . . .	29
9.6.1 Rücktransformation mit PBZ . . . . .	29
9.6.2 Eigenschaften der z-Transformation . . . . .	29
9.6.3 Korrespondenzen der z-Transformation . . . . .	29
9.7 LTI-Systeme im Bildbereich . . . . .	30
9.7.1 Impuls- und Sprungantwort im BB . . . . .	30
9.7.2 PN-Diagramm $\Rightarrow$ Frequenzgang . . . . .	30
9.7.3 Systemantwort auf harm. Eingangssignale . . . . .	30
9.7.4 Klassifizierung von Systemen . . . . .	30

# 1 Grundlagen

## 1.1 Einheiten

Größe	Symbol	Einheit
Kapazität	$C$	$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$
Induktivität	$L$	$H = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$

## 1.2 Quadratische Formeln

$$x^2 + px + q = 0 \rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(-j\omega)^2 = -\omega^2$$

## 1.3 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße  $F_n$ : Spannung, Strom (jeweils Effektivwerte)  
Leistungsgröße  $P_n$ : Energie, Leistung

- Dämpfungsmaß  $a$  in Dezibel [dB]

$$a [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2} \quad a [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{20\text{dB}}} \quad \frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{10\text{dB}}}$$

- absoluter Pegel  $L$  mit Bezugswerten  $P_0, F_0$

$$L [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} \quad L [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{20\text{dB}}} \quad \frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{10\text{dB}}}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1\text{mW}$	$L_{\text{P/mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1\text{W}$	$L_{\text{P/W}}$

- relativer Pegel / Maß

Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert  $P_0$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \text{dB}$$

### 1.3.1 Rechnen mit Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis):  $x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \quad \log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$$

## 1.4 Rechnen mit Wurzeln

$a$ : Radikant  $n$ : Wurzelexponent

$$\text{Merke: } \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \quad x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

## 1.5 Rechnen mit Potenzen

$a$ : Basis  $m, n$ : Exponent

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0) \quad a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## 1.6 Trigonometrische Formeln

siehe Papula Mathe-FS. S.94 & S.238 (komplexe Fkt.)

### Komplex:

$$e^{j\pi k} = (-1)^k \quad \pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \quad -j = e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

$$e^{\pm j\omega_1 t} = \cos(\omega_1 t) \pm j \sin(\omega_1 t) \quad -1 = e^{\pm j\pi} \quad +1 = e^{j2\pi}$$

$$\cos(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2} \quad \sin(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j}$$

### Reell:

$$\cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_1 t) \quad \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = +\cos(\omega_1 t)$$

$$\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = +\sin(\omega_1 t) \quad \sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega_1 t)$$

$$\cos(\omega_1 t \pm \pi) = -\cos(\omega_1 t) \quad \sin(\omega_1 t \pm \pi) = -\sin(\omega_1 t)$$

$$\cos(\omega_1 t) = -\cos(\pi + \omega_1 t) \quad \sin(\omega_1 t) = \sin(\pi - \omega_1 t)$$

$$\cos^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega_1 t)] \quad \sin^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega_1 t)]$$

$$\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} = \text{si}(\omega_1 t) = \text{si}(-\omega_1 t)$$

### Theoreme:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$$

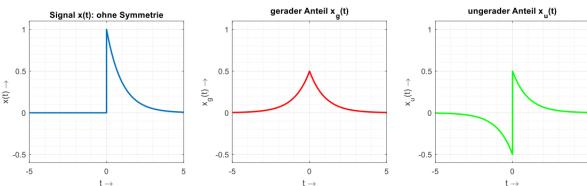
## 2 Signale im Zeitbereich

### 2.1 Signalcharakterisierung

- Kontinuierlich  $\leftrightarrow$  Diskret
- Deterministisch  $\leftrightarrow$  Stochastisch  
Deterministisch:  $x(t)$  mathematisch beschreibbar.  
Stochastisch: Signal zufällig, kein  $x(t)$ .
- Periodisch  $\leftrightarrow$  Aperiodisch  
Periodisch, wenn  $x(t) = x(k \cdot t + T_p)$  mit  $T_p = \frac{2\pi}{k}$   
 $T_p$ : Grundperiode/Periodendauer
- Gerade  $x(-t) = x(t) \leftrightarrow$  Ungerade:  $x(-t) = -x(t)$

#### Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil:  $x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$
- ungerader Anteil:  $x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$
- gemischtes Signal:  $x(t) = x_G + x_U$



- Energie  $\leftrightarrow$  Leistung  
(Gesamt-)Energie:

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Mittlere Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \quad (0 < P_x < \infty)$$

Ein Signal ist nie Energie- und Leistungssignal gleichzeitig!

- Korrelationsfunktion  
Maß für die Ähnlichkeit zweier Energiesignale.

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

#### • Signaloperationen

Manipulation/Transformation mit folgenden Parametern:

$$f(t) = A \cdot f(\pm b \cdot t \mp t_0) \leftrightarrow A \cdot f\left(\frac{t \mp t_0}{b}\right)$$

- Zeitverschiebung  $t - t_0$ : nach **rechts**!
- Zeitskalierung:  
Multiplikation mit  $b > 1$ : Stauchung  
Multiplikation mit  $0 < b < 1$ : Dehnung  
Division durch  $b > 0$ : Dehnung
- Zeitumkehr/-invertierung:  
 $-1 \cdot b$ : Spiegelung an y-Achse
- Signalinvertierung:  
 $-A \cdot f(t)$ : Spiegelung an x-Achse

**Wichtig:** Reihenfolge beachten!  
Erst Verschieben, dann Skalieren/Invertieren!

### 2.2 Elementarsignale

- Sprung-, Heavyside-Fkt., Einheitssprung  $\varepsilon, \sigma$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(k \cdot t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac-Impuls  $\delta$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

– Höhe =  $\infty$ , Fläche = 1.

– Zusammenhang mit Sprungfunktion:

$$\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)}$$

– Ausblendeeigenschaft:

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

– Zeitskalierung:  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls  $\Lambda$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion rect  
 $T$ : Breite

$$\hat{u} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \hat{u} & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$1 \cdot \text{rect}(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Si-Funktion

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

### 3 Systeme

#### 3.1 Eigenschaften

##### 1. Speicher

**-frei:** Vollständige Beschreibung durch xy-Kennlinie, Ausgang  $y(t = t_0)$  nur von aktuellen Eingangswerten  $x(t = t_0)$  abhängig  $\rightarrow$  gedächtnislos.

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

**-behaftet:** Ausgang inkl. vergangene Werte, keine vollständige Beschreibung durch xy-Kennlinie.

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) \cdot 2x(t - 1)$$

##### 2. Kausalität

Ausgang  $y(t = t_0)$  hängt nur von aktuellen + vorherigen Eingangswerten  $x(t \leq t_0)$  ab. Keine Zukunftswerte!  
Impulsantwort  $h(t)$  beginnt ab  $t = 0 : t < 0 \rightarrow h(t) = 0$ .

$$\text{z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, nicht umgekehrt.  
**Kausale** gebr. rationale Fkt.: Nennergrad  $\geq$  Zählergrad.

##### 3. (BIBO-)Stabilität

BIBO: beschränkter Eingang  $\rightarrow$  beschränkter Ausgang.

System ist **stabil**, wenn

- $h(t)$  absolut integrierbar ist:  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- P/N-Diagramm: alle Pole links der  $\omega$ -Achse
- gebr. rationale Fkt.: Nennergrad  $\geq$  Zählergrad
- *zeitdiskret (ZD):* EK  $\in$  Kb
- *ZD:* alle Pole innerhalb des EK
- *ZD:* absolut summierbar:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

z.B.:  $y(t) = 50 \cdot x^3(t)$ , instabil:  $y(t) = e^t \cdot x(t)$

##### 4. Zeitinvarianz

Eingang zeitverschoben  $\rightarrow$  Ausgang zeitverschoben.

$$x(t - t_0) = y(t - t_0)$$

$$\text{z.B. } y(t) = t \cdot \sin(t)$$

##### 5. Linearität

Lineares System: Superpositionsprinzip gilt  $\rightarrow$  siehe Ausblendeeigenschaft, Zerlegung in gerades/ungerades Signal.

#### 3.2 LTI-Systeme

##### 3.2.1 Beschreibung

LTI-Systeme: Linear, Zeitinvariant (time-invariant).

Operatoren:  $+, -, \frac{d}{dt}, \int, t - t_0$  (Verzögerung)

Beschreibung des Ein- und Ausgangsverhalten im

- Zeitbereich  $x(t)$ : DGL, Signalfußplan, Impulsantwort
- Frequenz-  $\underline{X}(\omega)$  bzw. Bildbereich  $\underline{X}(s)$ : Übertragungs-Fkt., Frequenzgang, Bode- und P/N-Diagramm.

##### 3.2.2 DGL

- Bestimmung Eingangs-/Ausgangsgrößen der Schaltung.
- Gleichgewicht: Maschengleichung für  $u$ , Knotengleichungen für  $i$  aufstellen.
- DGL enthält nur Konstanten ( $C, L$ ),  $u$  bzw.  $i$  in der Grundform und beliebiger Ableitung (bzw. deren Integrale). Integrale durch Ableiten eliminieren.
- $u, i$  durch Systemgrößen mithilfe von Bauteilgleichungen ausdrücken, Schaltung beachten!
- Bauteil-/Zweipolgleichungen:

$$u_R = R \cdot i \quad i_c = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

- DGL 2. Ordnung allgemein:

$$\underbrace{a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a}_{\text{Ausgangsgrößen}} = \underbrace{b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e}_{\text{Eingangsgrößen}}$$

##### 3.2.3 Impuls & Sprungantwort

Impulsanregung	Impulsantwort
$x(t) = \delta(t)$	$y(t) = h(t) = S\{\delta(t)\}$
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$ $\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$ $= x(t) * h(t)$ $h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$
Sprunganregung	Sprungantwort
$x(t) = \varepsilon(t)$	$y(t) = g(t) = S\{\varepsilon(t)\}$
$\varepsilon(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$	$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$

##### 3.2.4 Faltung

Aus  $h(t)$  eines LTI-Systems und Eingang  $x(t)$  lässt sich Ausgang  $y(t)$  durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = [x(t) * h(t)]$$

- $\delta(t)$ : neutrales Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Faltung mit verschobenen Dirac-Impuls  
 $\rightarrow$  Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

##### Rechenregeln

- $a * b = b * a$  kommutativ
- $a * [b * c] = [a * b] * c$
- $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$
- $a * [b + c] = a * b + a * c$

### 3.3 Frequenzgang

- Frequenzgang**

$\underline{H}(w)$  existiert nur, wenn  $\omega$ -Achse  $\in$  Kb.  
im PN-Diagramm bzw. alle Pole links der  $\omega$ -Achse.

$$\underline{H}(w) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{\underline{Y}(w)}{\underline{X}(w)} = \frac{\underline{U}_2(w)}{\underline{U}_1(w)} = |\underline{H}(w)| \cdot e^{j\varphi_H(w)}$$

- Amplitudengang**, Betragsfrequenzgang

LTI-System ändert Eingangssignal um Faktor  $A(\omega)$ .

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- Phasengang**, Phasenfrequenzgang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

### 3.4 Übertragungsfunktion (Ü-Fkt.)

- Eigenfunktion**

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : \text{Eigenfunktion} \\ \lambda : \text{Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

Jede komplexe Exponentialfunktion  $x(t) = e^{st}$  ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems  $S$ :

$$y(t) = S\{e^{st}\} = \lambda \cdot e^{st}$$

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau$$

- Erweiterung der KWR**

KWR: komplexe Wechselstromrechnung.

Die harmonische Exponentialfunktion  $e^{j\omega t}$  ist ein Sonderfall von  $e^{st}$  mit  $s = j\omega + \sigma$ , wenn  $\sigma = 0$ .

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$

- komplexe Übertragungsfunktion**

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger Ausgang}}{\text{komplexer Zeiger Eingang}}$$

Übertragungsfunktion  $H(s)$  mit komplexer Frequenz  $s = \sigma + j\omega \rightarrow$  Ersetze  $j\omega$  durch  $s$ .

#### 3.4.1 Gebrochen-rationale Ü-Fkt.

Grad  $N$  des Nennerpolynoms: Ordnung des LTI-Systems = Anzahl unabhäng. Energiespeicher ( $L, C$ ).

**Kausales** System, wenn Nennergrad  $N \geq M$  Zählergrad.

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n}$$

Beispiel: DGL 2.Ordnung im Zeitbereich:

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_0x(t)$$

→ Ü-Funktion im Bildbereich (System 2.Ordnung):

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

### 3.5 Pol-Nullstellen-Diagramm

Grafische Darstellung der s-Ebene: P/N-Diagramm.

$K$ : Maßstabs-/Verstärkungsfaktor.

$$\underline{H}(s) = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{o=1}^M (s - z_o)}{\prod_{x=1}^N (s - z_x)} \text{ mit } K = \frac{b_M}{a_N}$$

- $\Im$ -Achse =  $\omega$ ,  $\Re$ -Achse =  $\sigma$
- Alle Pole links der  $\omega$ -Achse: **stabiles + kausales** System.
- Pole & Nullstellen sind entweder reell (nur auf Re-Achse) oder **paarweise** komplex-konjugiert.

#### 3.5.1 Frequenzgang aus dem P/N-Diagramm

**Näherungsweise** Bestimmung:

- An der  $\omega$ -Achse von 0 nach oben entlang gehen.
- Polstelle: **Maxima**/Erhöhung im Amplitudengang.
  - PST nah an s-Ebene: hohe Totzeit, dominant.
  - stabiler Pol: links der  $\omega$ -Achse.
  - Verhalten: ideales **I-Glied**:  $+20dB/\text{Dek.}, \varphi = +90^\circ$ .
- Nullstelle: **Minima**/Absenkung im Amplitudengang.
  - Nullstelle (NST) auf  $\omega$ -Achse: NST im Amplitudengang.
  - Verhalten: ideales **D-Glied**:  $-20dB/\text{Dek.}, \varphi = -90^\circ$ .

**Genaue** Bestimmung:

- An der  $\omega$ -Achse von 0 nach oben entlang gehen.
- Jede Pos. auf  $\omega$ -Achse: Längen und Winkel der kompl. Zeiger  $c_{o,i}$  und  $c_{z_p,i}$  messen mit Geodreieck.

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\prod_{o=1}^M \text{alle Längen } |c_{o,i}|}{\prod_{p=1}^N \text{alle Längen } |c_{p,i}|}$$

$$\varphi_H(\omega) = (\text{Summe } \angle c_{o,i} \omega) - (\text{Summe } \angle c_{p,i} \omega)$$

**Minimalphasiges** System:

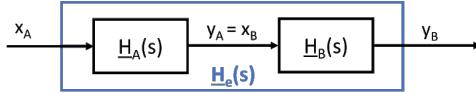
- Alle NST links der  $\omega$  und  $\sigma$ -Achse.
- Sehr geringe Phasenänderung über Frequenz.
- Geringe Signalverzögerung.

### 3.6 Zusammenschaltung LTI-Systeme

- Kettenschaltung**

Produkt der Ü-Fkt. der Einzelsysteme.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) = \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)$$



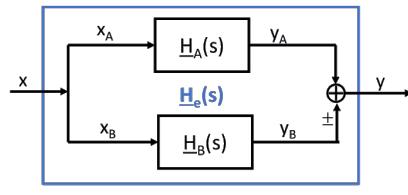
$$Y_B = \underline{H}_B(s) \cdot X_B = \underline{H}_B(s) \cdot Y_A = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) \cdot X_A$$

- Voraussetzung: Rückwirkungsfreiheit (mit Trennverstärker) zwischen  $\underline{H}_A(s)$  und  $\underline{H}_B(s)$ .
- **Bodediagramm:** Addition der einzelnen Glieder beim Amplituden- und Phasengang.

- Parallelschaltung**

Summe der einzelnen Ü-Glieder.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) + \underline{H}_A(s)$$

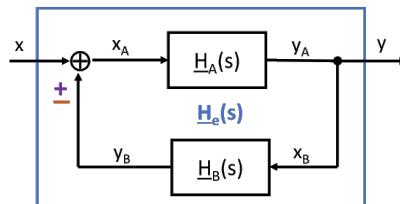


$$\begin{aligned} Y &= Y_A \pm Y_B \\ &= \underline{H}_A(s) \cdot X_A \pm \underline{H}_B(s) \cdot X_B \\ &= (\underline{H}_A(s) + \underline{H}_B(s)) \cdot X \end{aligned}$$

- Rückkopplung**

Mitkopplung mit  $-$ :  $y_A$  vergrößert  $x_A$  (BSB:  $+$ )  
Gegenkopplung mit  $+$ :  $y_A$  verkleinert  $x_A$  (BSB:  $-$ )

$$\underline{H}_e(s) = \frac{\underline{H}_A(s)}{1 \mp \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}$$



Beispiel: Kettenschaltung zweier  $PT_2$ -Glieder ohne Trennverstärker.

### 3.7 Bode-Diagramm

#### 3.7.1 Merkmale

- Kettenschaltung**

Addition der Einzel-Bode-Diagramme beim Amplituden- und Phasengang.

- Inverses System**

Durch Spiegelung an der X-Achse.

#### 3.7.2 Vorgehen

- Ü-Fkt. des LTI-Systems aufstellen.

Bsp.: Spannungs-Ü-Fkt:

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{U_2}{U_1}$$

- Konstante Faktoren  $K$  vor dem Bruch stellen!
- Bauteilelemente in Zeitkonstanten  $T = \frac{L}{R}$  bzw.  $T = RC$  ausdrücken.
- Ü-Fkt. in bekannte Einzelglieder trennen, in Normalform mit  $T$  ausdrücken → siehe Kap. 3.9.  
Bsp.: PDT<sub>1</sub>-Glied:

$$\underline{H}(s) = K \frac{1 + sT_1}{1 + sT_2}$$

- Berechnen der Eck-/Grenzkreisfrequenzen  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  und jeweils im Bode-Diagramm eintragen.
- Amplitudengang:  $\underline{H}(s)$  mit  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  umformen:  
⇒ **Wichtig:** höchste Potenz von  $s$  ohne Vorfaktoren!  
Ersetze  $s = j\omega$ . Merke:  $\omega \neq \omega_0$ .

Betragsbildung: Zähler und Nenner jeweils Betrag setzen,  $j$  fallen lassen.

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{|Z|}{|N|} = \frac{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}}$$

Allgm. Berechnung in dB, Grenzfallbestimmung mit:

$$H(\omega) = 20 \cdot \log_{10} |\underline{H}(\omega)| \text{ für } \omega = 0 \text{ und } \omega \rightarrow \infty$$

Zeichnen: Geradennäherung der Glieder in Kap. 3.9.

Polstelle: Steigung nach oben 20db/Dek.

Nullstelle: Senkung nach unten -20db/Dek.

- Phasengang allgemein:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}} \right)$$

Zeichnen: Geradennäherung der Glieder in Kap. 3.9.  
Vorzeichen  $\pm K$ : Beginn bei  $0^\circ$  oder  $180^\circ$ .

- Merke: Polstelle:

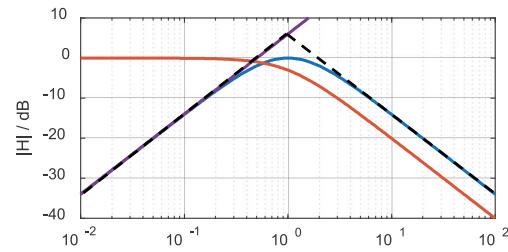
### 3.8.4 Bodediagramm von Ketten schaltungen

$$\underline{H}_e(\omega) = \underline{H}_1(\omega) \cdot \underline{H}_2(\omega) \cdot \dots$$

$$\frac{\underline{H}_e(\omega)}{\text{dB}} = \frac{\underline{H}_1(\omega)}{\text{dB}} + \frac{\underline{H}_2(\omega)}{\text{dB}} + \dots$$

$$\varphi_e(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots$$

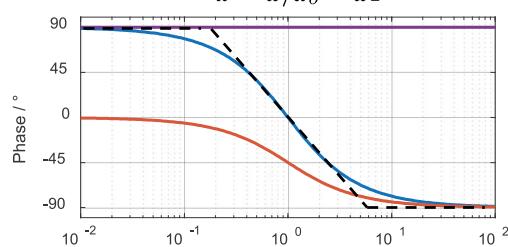
Das Bodediagramm der Ketten schaltung ergibt sich durch **Addition der Bodediagramme** der einzelnen Glieder.



#### Beispiel 1:

**PT<sub>1</sub> - PT<sub>1</sub> - D - Ketten schaltung**

Gestrichen: Geradennäherung



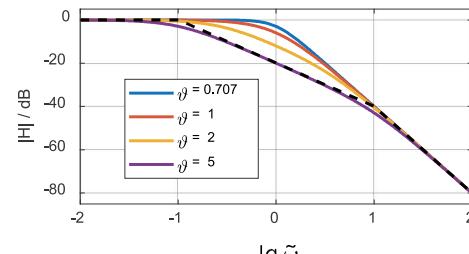
R. Sattler

Signale und Systeme

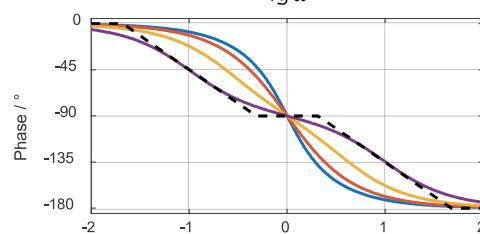
89

### 3.8.4 PT2-Glied als PT1 - PT1 - Ketten schaltung

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{1 + 2\vartheta Ts + T^2 s^2} = \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \rightarrow \frac{T_{1,2}}{T} = \vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1} = \frac{\omega_{2,1}}{\omega_0}$$



Ab  $\vartheta \geq 1/\sqrt{2}$  gibt es keine Resonanzüberhöhung.



Für  $\vartheta \geq 1$  kann das PT<sub>2</sub>-Glied als Ketten schaltung zweier PT<sub>1</sub>-Glieder dargestellt werden.

Das Bodediagramm erhält man durch Addition der Bode-diagramme der beiden PT<sub>1</sub>-Glieder.

Die Eckfrequenzen der beiden PT<sub>1</sub>-Glieder sind äquidistant zur Eckfrequenz des PT<sub>2</sub>-Glieds und kennzeichnen im Amplitudendiagramm den Übergang in die Steigung mit -20 dB/Dekade bzw. mit -40 dB/Dekade.

R. Sattler

Signale und Systeme

90

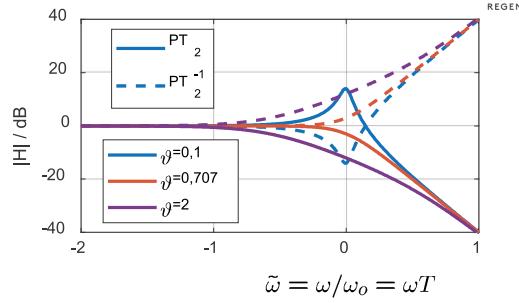
### 3.8.5 Bode-Diagramm der inversen Übertragungsfunktion

Das Bode-Diagramm der inversen Übertragungsfunktion ergibt sich durch Spiegelung:

Beispiel:

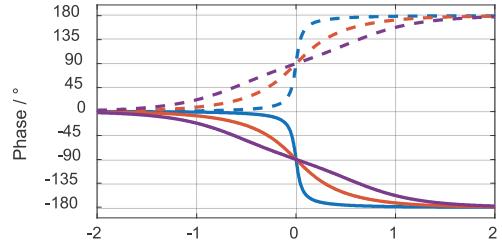
PT<sub>2</sub>-Glied

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{1 + 2\vartheta Ts + T^2 s^2}$$



PT<sub>2</sub><sup>-1</sup>-Glied

$$\underline{H}(s) = \frac{1 + 2\vartheta Ts + T^2 s^2}{1}$$



R. Sattler

Signale und Systeme

91

### 3.8 Elementare Übertragungsglieder

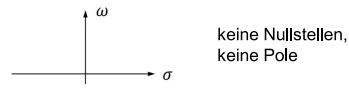
SUS: Systeme

#### Elementare LTI-Systeme: P-Glied (Proportionalglied)

- Differentialgleichung  $y = K_P \cdot x$

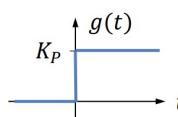
- Übertragungsfunktion  $\underline{H}(s) = K_P$

- PN-Diagramm

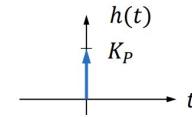


keine Nullstellen,  
keine Pole

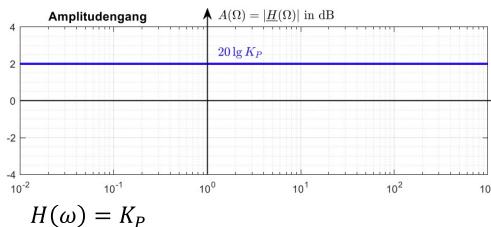
- Sprungantwort  $g(t)$  und Impulsantwort  $h(t)$



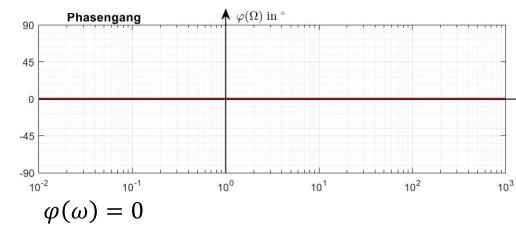
$$h(t) = K_P \cdot \delta(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\omega) = K_P$$



$$\varphi(\omega) = 0$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

$\omega_B$ : beliebig

- Eigenschaften: kausal, stabil, speicherfrei

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21  
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

19

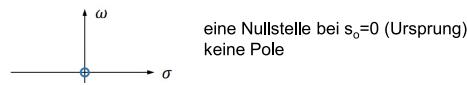
SUS: Systeme

#### Elementare LTI-Systeme: D-Glied (Differenzierer)

- Differentialgleichung  $y = K_D \cdot \dot{x}$

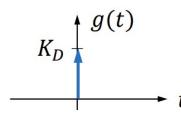
- Übertragungsfunktion  $\underline{H}(s) = K_D \cdot s$

- PN-Diagramm

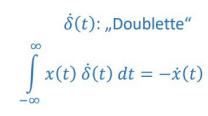


eine Nullstelle bei  $s_0=0$  (Ursprung)  
keine Pole

- Sprungantwort  $g(t)$  und Impulsantwort  $h(t)$



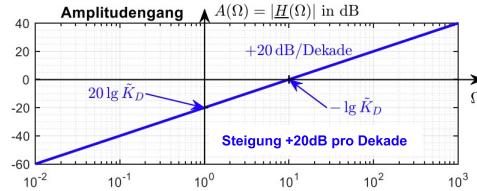
$$h(t) = K_D \cdot \delta'(t)$$



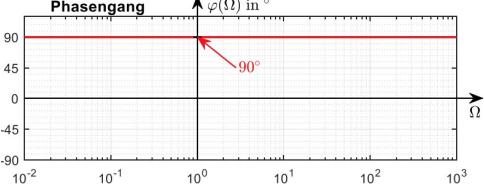
$$\delta'(t): \text{„Doublette“}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt = -\dot{x}(t)$$

- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\omega) = K_D \cdot \omega$$



$$\varphi(\omega) = 90^\circ$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

$\omega_B$ : beliebig

$$\tilde{K}_D = \omega_B K_D$$

- Eigenschaften: acausal, instabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21  
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

20

## SUS: Systeme

## Elementare LTI-Systeme: I-Glied (Integrierer)

- Differentialgleichung

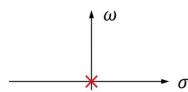
$$\dot{y} = K_I \cdot x$$

$$y = K_I \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

- Übertragungsfunktion  $\underline{H}(s)$

$$\underline{H}(s) = \frac{K_I}{s}$$

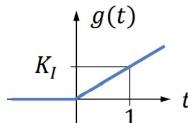
- PN-Diagramm



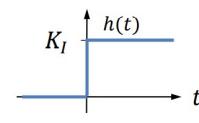
keine Nullstellen  
eine Polstelle bei  $s_x=0$  (Ursprung)

- Sprungantwort  $g(t)$  und Impulsantwort  $h(t)$

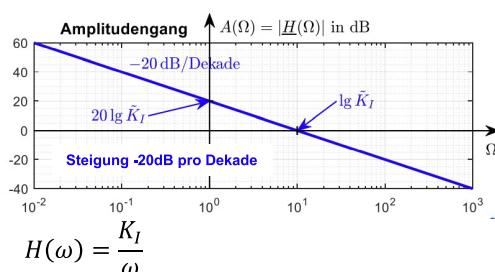
$$g(t) = K_I \cdot t \cdot \varepsilon(t)$$



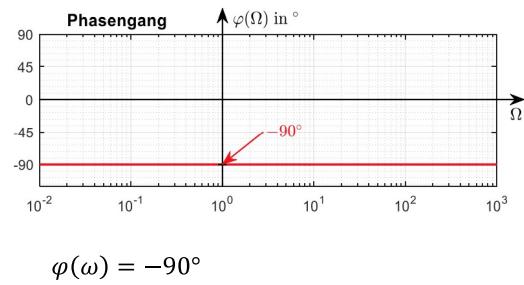
$$h(t) = K_I \cdot \varepsilon(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\omega) = \frac{K_I}{\omega}$$



$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

$\omega_B$ : beliebig

$$\tilde{K}_I = \frac{K_I}{\omega_B}$$

- Eigenschaften:

kausal, instabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21  
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

21

## SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme: PT<sub>1</sub>-Glied (Tiefpass 1. Ordnung)

- Differentialgleichung

$$T \cdot \dot{y} + y = K_P \cdot x$$

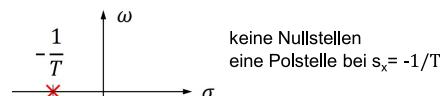
$T$ : Zeitkonstante

- Übertragungsfunktion  $\underline{H}(s)$

$$\underline{H}(s) = \frac{K_P}{T \cdot s + 1} = \frac{K_P \cdot \omega_E}{s + \omega_E}$$

$$\omega_E = \frac{1}{T} : \text{Eckfrequenz}$$

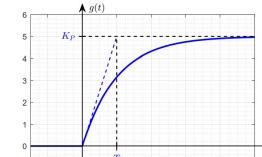
- PN-Diagramm



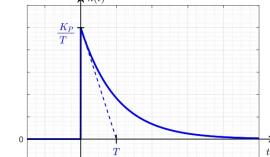
keine Nullstellen  
eine Polstelle bei  $s_x = -1/T$

- Sprungantwort  $g(t)$  und Impulsantwort  $h(t)$

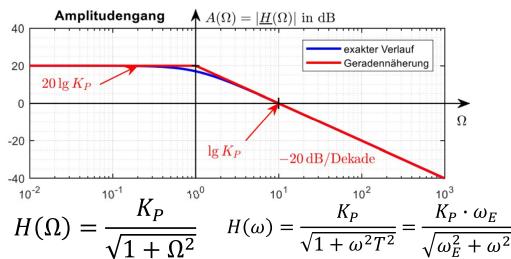
$$g(t) = K_P \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \varepsilon(t)$$



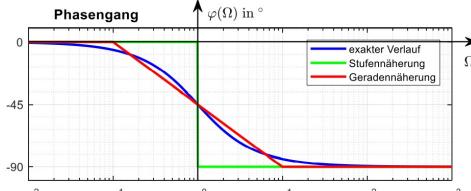
$$h(t) = \frac{K_P}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \varepsilon(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\Omega) = \frac{K_P}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad H(\omega) = \frac{K_P}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = \frac{K_P \cdot \omega_E}{\sqrt{\omega_E^2 + \omega^2}}$$



$$\varphi(\Omega) = -\arctan \Omega \quad \varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

- Eigenschaften:

kausal, stabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21  
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

22

## SUS: Systeme

Elementare LTI-Systeme:  $\text{PT}_2$ -Glied (Tiefpass 2. Ordnung)

- Differentialgleichung  $T^2 \cdot \ddot{y} + 2\vartheta T \cdot \dot{y} + y = K_P \cdot x$
  - Übertragungsfunktion  $H(s) = \frac{K_P}{T^2 s^2 + 2\vartheta T s + 1} = \frac{K_P \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\vartheta \omega_0 s + \omega_0^2}$
  - PN-Diagramm Pole:  $s_{x1,2} = \frac{1}{T}(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$   
 $0 < \vartheta < 1$  Schwingung: konjugiert komplexes Polpaar  
 $H(s) = \frac{K_P}{T^2} \frac{1}{(s - s_{x1})(s - s_{x2})}$   
 $\vartheta = 1$  aperiod. Grenzfall: doppelter reeller Pol bei  $-\omega_0$   
 $H(s) = K_P \frac{1}{(1 + sT)^2}$   
 $\vartheta > 1$  aperiod. Dämpfung: zwei versch. reelle Pole  $s_{x1,2} = \omega_0(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$   
 $H(s) = K_P \frac{1}{1 + sT_1} \frac{1}{1 + sT_2}$  mit:  $T_{1,2} = -\frac{1}{s_{x1,2}} = \frac{T}{\vartheta \mp \sqrt{\vartheta^2 - 1}} = T(\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$
  - Frequenzgang (Bode-Diagramm)  $H(\omega) = \frac{K_P}{1 - \omega^2 T^2 + j\omega 2\vartheta T}$
- 201g  $k_p$  hier  $k_p=1$   $H(\omega_0) = \frac{k_p}{2\vartheta}$  „Überhöhung“  
Steigung -40dB/Dekade
- $$H(\omega) = \frac{K_P}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\vartheta^2 \omega^2 T^2}} \quad H(\Omega) = \frac{K_P}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\vartheta^2 \Omega^2}}$$
- 
- zu Schwingfall:  
 $s_{x1,2} = -\vartheta \omega_0 \pm j\omega_d$   
mit Eigen-, Ausschwingfrequenz  $\omega_d$   
 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$
- 
- $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$
- Eigenschaften: kausal, stabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21  
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

23

## SUS: Systeme

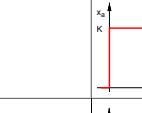
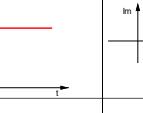
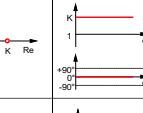
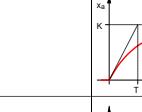
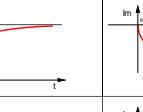
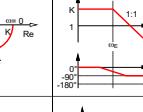
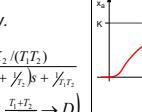
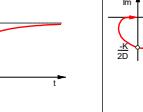
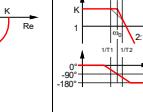
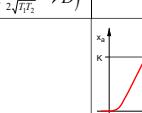
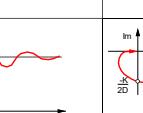
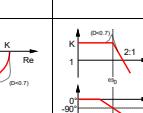
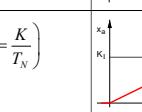
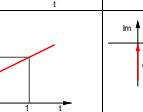
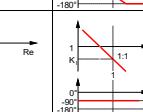
Elementare LTI-Systeme:  $\text{PT}_2$ -Glied (Tiefpass 2. Ordnung)

- Sprungantwort  $g(t)$  und Impulsantwort  $h(t)$
  - $0 < \vartheta < 1$  Schwingung  
 $g(t) = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \cdot e^{-\vartheta \omega_0 t} \cdot \cos(\omega_d t - \Theta) \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$  mit  $\Theta = \arcsin(\vartheta)$
  - $\vartheta = 1$  aperiod. Grenzfall  
 $g(t) = \left( 1 - \left( 1 + \frac{t}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$
  - $\vartheta > 1$  aperiod. Dämpfung  
 $g(t) = \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$
- 
- 

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21  
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

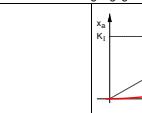
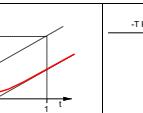
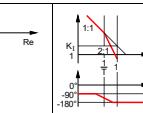
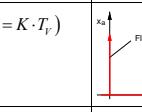
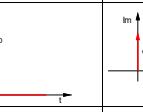
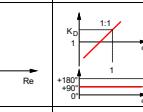
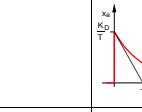
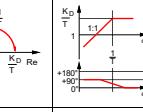
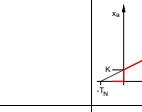
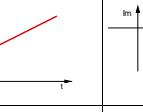
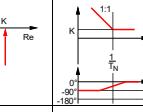
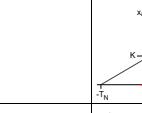
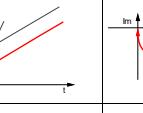
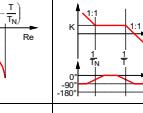
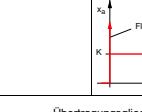
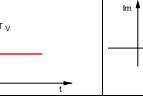
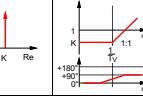
24

### 3.9 Übersicht wichtiger Übertragungsglieder

System	Differentialgleichung $x_a = x_a(t), x_e = x_e(t)$	Übertragungsfunktion $F(s)$	Übergangs Funktion (Sprungantwort)	Ortskurve $F(j\omega)$	Bode-Diagramm	$x$ : Pole $o$ : Nullstellen
P	$x_a = K x_e$ konstant	$K$				$j\omega$ -Ebene: keine Pole, keine Nullstellen
PT <sub>1</sub>	$T\ddot{x}_a + x_a = K x_e$ -20db/Dek.	$\frac{K}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T
PT <sub>2</sub> ( $D \geq l$ )	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0\dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K\omega_0^2 x_e$ -40db/Dek.	$\frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0s + \omega_0^2}$ bzw. $\frac{K_1}{1+T_1s} \cdot \frac{K_2}{1+T_2s} = \frac{K_1 K_2 / (T_1 T_2)}{s^2 + (\gamma_{T_1} + \gamma_{T_2})s + \gamma_{T_1} \gamma_{T_2}}$ $(K_1 K_2 \rightarrow K; \gamma_{T_1 T_2} \rightarrow \omega_0^2; \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} \rightarrow D)$				$j\omega$ -Ebene: -1/T1, -1/T2
PT <sub>2</sub> ( $0 \leq D < l$ )	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0\dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K\omega_0^2 x_e$	$\frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0s + \omega_0^2}$				$j\omega$ -Ebene: -1/D
I	$x_a = K_I \int x_e dt$	$\frac{K_I}{s} = K \cdot \frac{1}{T_N \cdot s} \quad (K_I = \frac{K}{T_N})$				$j\omega$ -Ebene: -1/TN

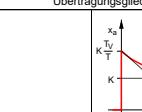
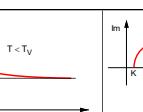
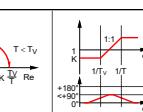
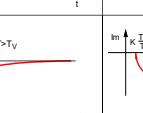
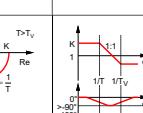
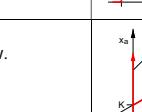
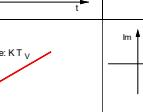
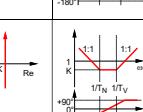
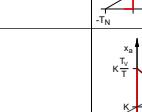
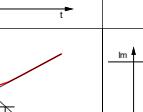
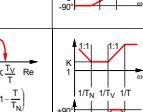
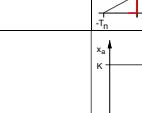
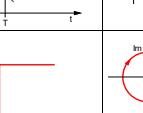
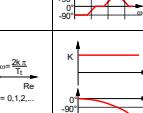
Systemtechnik

Übertragungsglieder

IT <sub>1</sub>	$T\ddot{x}_a + x_a = K_I \int x_e dt$	$\frac{K_I}{s(1+Ts)}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T
D	$x_a = K_D \dot{x}_e$ +20db/Dek.	$K_D s = K \cdot T_V \cdot s \quad (K_D = K \cdot T_V)$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_V
DT <sub>1</sub>	$T\ddot{x}_a + x_a = K_D \dot{x}_e$	$\frac{K_D s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T
PI	$x_a = K \left( x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt \right)$ $K_I = \frac{K}{T_N}$	$K \left( 1 + \frac{1}{T_N s} \right)$				$j\omega$ -Ebene: -1/TN
PIT <sub>1</sub>	$T\ddot{x}_a + x_a = K \left( x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt \right)$	$K \frac{1 + \frac{1}{T_N s}}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/TN, -1/T
PD	$x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$ $K_D = K T_V$	$K(1 + T_V s)$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_V

Systemtechnik

Übertragungsglieder

PDT <sub>1</sub> Lead-Glied ( $T < T_V$ )	$T\ddot{x}_a + x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$	$K \frac{1 + T_V s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T, -1/T_V
PDT <sub>1</sub> Lag-Glied ( $T > T_V$ )	$T\ddot{x}_a + x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$	$K \frac{1 + T_V s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_V, -1/T
PID	$x_a = K \left( x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt + T_V \dot{x}_e \right)$ $K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$	$K \left( 1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s \right)$ bzw. $K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_N, -1/T_V
PIDT <sub>1</sub>	$T\ddot{x}_a + x_a = K \left( x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt + T_V \dot{x}_e \right)$	$K \frac{1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s}{1+Ts}$				$j\omega$ -Ebene: -1/T_N, -1/T_V
T <sub>t</sub>	$x_a = K \cdot x_e(t - T_t)$	$K \cdot e^{-T_t s}$				$j\omega$ -Ebene: keine Pole, keine Nullstellen

Anm.: Strecken „ohne Ausgleich“ besitzen integrierendes Verhalten. Strecken „mit Ausgleich“ streben bei konstantem Eingangssignal einem konstanten Ausgangswert zu.

## 4 Zweitore, Vierpole

### 4.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix  $\mathbf{Y}$ :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{C}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{C}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot -\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot -\underline{I}_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \cdot -\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \cdot -\underline{I}_1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.1 Parameterumrechnung

$$Z \quad Y \quad H \quad A$$

$$Z \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{-Y_{12}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \\ \frac{-Y_{21}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{Y_{11}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{H}} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{22} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det \underline{\mathbf{A}}}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix}$$

$$Y \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\det \underline{\mathbf{Z}}} & \frac{-Z_{12}}{\det \underline{\mathbf{Z}}} \\ \frac{-Z_{21}}{\det \underline{\mathbf{Z}}} & \frac{Z_{11}}{\det \underline{\mathbf{Z}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{H_{11}}{H_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det \underline{\mathbf{A}}}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix}$$

$$H \begin{bmatrix} \frac{\det \underline{\mathbf{Z}}}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det \underline{\mathbf{Y}}}{Y_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det \underline{\mathbf{A}}}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det \underline{\mathbf{Z}}}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\det \underline{\mathbf{Y}}}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\det \underline{\mathbf{H}} & -H_{11} \\ \frac{H_{21}}{H_{21}} & \frac{H_{21}}{H_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{A_{12}}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix}$$

### 4.2 Betriebsarten

### 4.3 Bezugspfeilsystem

### 4.4 ZT-Eigenschaften

	Umkehrbarkeit	Symmetrie	Rückwirkungsfreiheit
Z	$Z_{12} = Z_{21}$	$Z_{11} = Z_{22}$	$Z_{12} = 0$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{11} = Y_{22}$	$Y_{12} = 0$
A	$\det[A] = 1$	$A_{11} = A_{22}$	$\det[A] = 0$
H	$H_{12} = -H_{21}$	$\det[H] = 1$	$H_{12} = 0$

- Umkehrbares (reziprokes) ZT: nur 3 Parameter.
- (Widerstands-)symmetrisches ZT: Eingangswiderstände in beiden Betriebsarten gleich, Ein- und Ausgang vertauschbar.
- Umkehrbares und symmetrisches ZT = längssymmetrisch: nur 2 Parameter.
- Passives ZT aus R,L,C,M-Bauteilen ist immer umkehrbar.
- Rückwirkungsfreies (unilaterales) ZT: nur 3 Parameter, Energieübertragung nur von Eingang auf Ausgang.

## 4.5 Matrizen elementarer Zweitore

	[Z]	[Y]	[H]	[C]	[A]
	---	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{bmatrix}$	---	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & -1 \\ 1 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{\underline{Z}_1} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & -\frac{\underline{Z}_2}{K} \\ -\frac{\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & -\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Y_2 + Y_1}{2} & \frac{Y_2 - Y_1}{2} \\ \frac{Y_2 - Y_1}{2} & \frac{Y_2 + Y_1}{2} \end{bmatrix}$	---	---	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2 \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	---	---	$\begin{bmatrix} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \\ \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix}$
	---	---	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

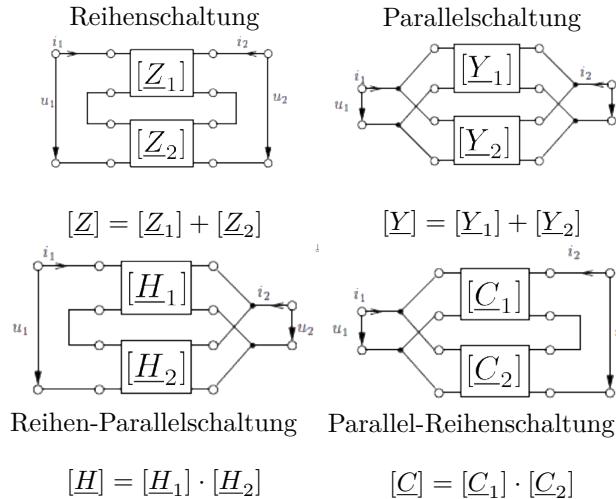
## 4.6 Zusammenschalten von Zweitoren

### 4.6.1 Torbedingungen

Erfüllung durch: ideale Übertrager, Kurzschlussschleife, Parallelschaltung längs-symmetrischer Zweitore.

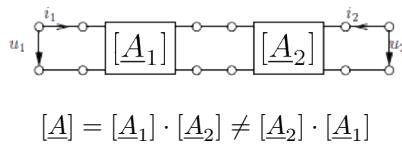
### 4.6.2 Zweitor-Schaltungen

Torbedingung muss für ZT-Schaltungen erfüllt sein!



#### • Kettenschaltung:

Torbedingung wird immer eingehalten!



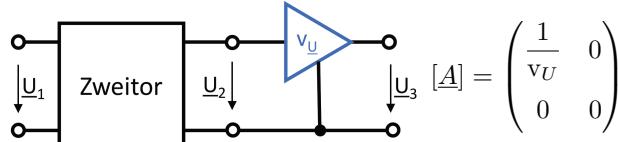
Reihenfolge beachten! **Nicht** kommutativ!

### 4.6.3 Idealer Trennverstärker/OP

Idealer Trennverstärker  $v_U$  als idealer OP.

Zweck: Rückwirkungsfreiheit der Kettenschaltung.

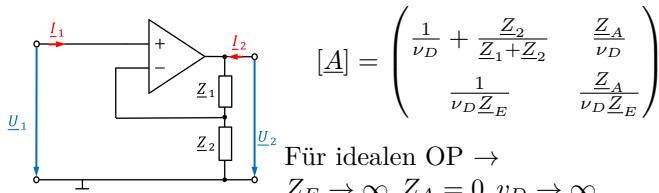
Entspricht einer VCVS.



$Z_{E/A}$ : Ein-/Ausgangswiderstand,  $v_D$ : Differenzverstärkung.

### 4.6.4 OP-Verstärker

- nicht-inventierender OP



ideale Spannungs-Verstärkung:

$$v_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

- inventierender OP

Allgemein, für idealen OP  $\rightarrow Z_E \rightarrow \infty, Z_A = 0, v_D \rightarrow \infty$ .

$$[A] \approx - \begin{pmatrix} \frac{Z_1}{Z_2} & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 0 \end{pmatrix}$$

ideale Spannungs-Verstärkung:

$$v_u = \frac{1}{A_{11}} = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

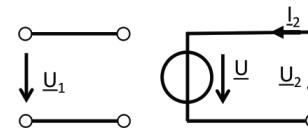
## 4.7 Ersatzschaltbilder

### 4.7.1 Ideale gesteuerte Quellen

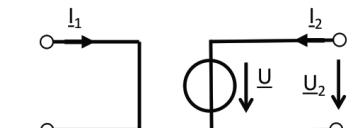
Ideale gesteuerte Quellen **nicht** ineinander umwandelbar!  
Andere Matrizen sind nicht definiert.

VCVS: Spannungsgesteuerte  
Spannungsquelle

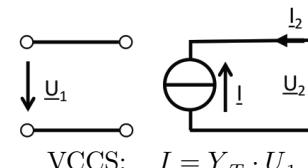
CCVS: Stromgesteuerte  
Spannungsquelle



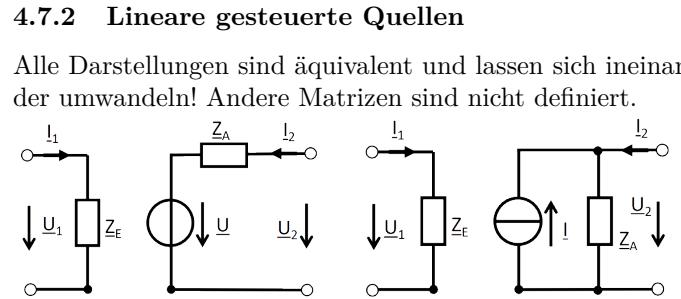
VCVS:  $U = \alpha \cdot U_1$   
VCCS: Spannungsgesteuerte  
Stromquelle



CCVS:  $U = Z_T \cdot I_1$   
CCCS: Stromgesteuerte  
Stromquelle



VCCS:  $I = Y_T \cdot U_1$   
CCCS:  $I = \beta \cdot I_1$



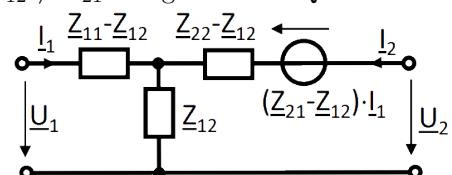
Alle Darstellungen sind äquivalent und lassen sich ineinander umwandeln! Andere Matrizen sind nicht definiert.

### 4.7.2 Lineare gesteuerte Quellen

### 4.7.4 Ersatzschaltbilder (ESB)

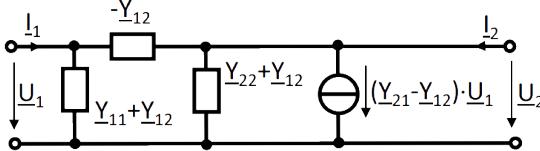
- T-ESB bei gegebener  $[Z]$ -Matrix:

$Z_{12} \neq Z_{21}$  mit gesteuerter Quelle.



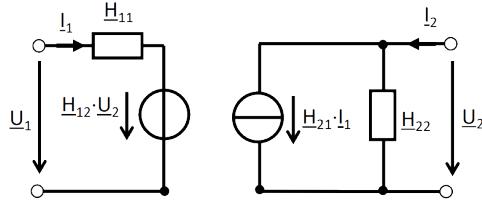
- **II-ESB** bei gegebener  $[Y]$ -Matrix:

$Y_{12} \neq Y_{21}$  mit gesteuerter Quelle.



- **Hybrid-ESB** bei gegebener  $[H]$ -Matrix

Bsp.: ESB für NPN-Transistor.

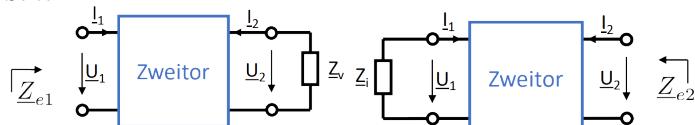


## 4.8 Beschaltete Zweitore

### 4.8.1 Ein- und Ausgangsimpedanz an Seite 1/2

$Z_V$ : Last an Tor 2/ZT-Ausgang  $\rightarrow$  Eingangsimpedanz, Betrieb von Seite 1

$Z_i$ : Last an Tor 1 1/ZT-Eingang  $\rightarrow$  Ausgangsimpedanz, Betrieb von Seite 2



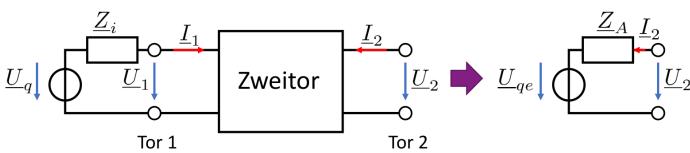
	Last an Tor 2	Last an Tor 1
$Z$	$Z_{e1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_V}$	$Z_{e2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}$
$Y$	$Y_{e1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_V}$	$Y_{e2} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}$
$A$	$Z_{e1} = \frac{A_{11}Z_v + A_{12}}{A_{21}Z_v + A_{22}}$	$Z_{e2} = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{Z_{21}Z_i + A_{11}}$
$H$	$Z_{e1} = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_V}$	$Y_{e2} = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_i}$
$C$	$Y_{e1} = C_{11} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{22} + Y_V}$	$Z_{e2} = C_{22} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{11} + Y_i}$

### 4.8.2 Ersatzquelle

Berechnung Innenwiderstand  $Z_i$  eines Ersatz-Zweipols:

Quellen  $U_q$  kurzschließen.  $I_q$  unterbrechen.

Gilt nicht bei gesteuerten Quellen.

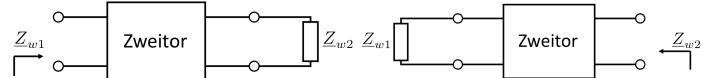


	Quelle an Tor 1	Quelle an Tor 2
$A$	$U_{qe} = \frac{1}{A_{21}Z_i + A_{11}}U_q$	$U_{qe} = \frac{\det(A)}{A_{21}Z_i + A_{22}}U_q$
$Z$	$U_{qe} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}U_q$	$U_{qe} = \frac{Z_{12}}{Z_{22} + Z_i}U_q$
$Y$	$I_{qe} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}I_q$	$I_{qe} = -\frac{Y_{12}}{Y_{22} + Y_i}I_q$
$H$	$I_{qe} = -\frac{H_{21}}{H_{11} + Z_i}U_q$	$U_{qe} = \frac{H_{12}}{H_{22} + Y_i}I_q$

	Quelle an Tor 1	Quelle an Tor 2
$A$	$Z_A = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{11}}$	$Z_A = \frac{A_{11}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{22}}$
$Z$	$Z_A = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}$	$Z_A = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_i}$
$Y$	$Y_A = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}$	$Y_A = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_i}$
$H$	$Y_A = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_i}$	$Z_A = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_i}$

siehe Ausgangsimpedanz  $Z_{e2} = Z_A$  (Quelle an Tor 1).

### 4.8.3 Wellenwiderstand



$$Z_{w1} = \frac{A_{11}Z_{w2} + A_{12}}{A_{21}Z_{w2} + A_{22}}$$

$$Z_{w2} = \frac{A_{22}Z_{w1} + A_{12}}{A_{21}Z_{w1} + A_{11}}$$

symmetrische ZT:  $Z_{w1} = Z_{w2}$

	$Z_{w1}$	$Z_{w2}$
$Z$	$\sqrt{\frac{Z_{11} \det Z}{Z_{22}}}$	$\sqrt{\frac{Z_{22} \det Z}{Z_{11}}}$
$Y$	$\sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \det Y}}$	$\sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \det Y}}$
$A$	$\sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$	$\sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}$
$H$	$\sqrt{\frac{H_{11} \det H}{H_{22}}}$	$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \det H}}$
$C$	$\sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11} \det C}}$	$\sqrt{\frac{C_{11} \det C}{C_{22}}}$

- Messtechnische Ermittlung:

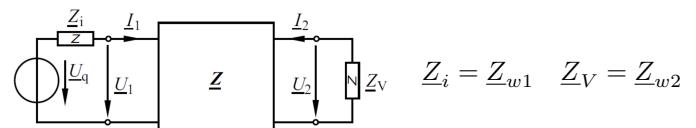
$Z_{01}$ : Leerlauf - Tor 1

$Z_{k1}$ : Kurzschluss - Tor 1

$$Z_{w1} = \sqrt{Z_{k1} \cdot Z_{01}}$$

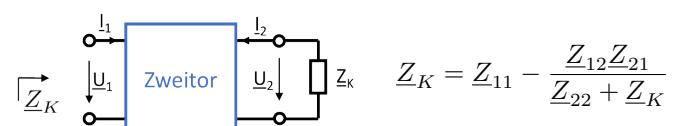
$$= \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$$

### 4.8.4 Scheinleistungsanpassung



Beschaltet man jedes Tor mit seinem Wellenwiderstand, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

### 4.8.5 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand dem Kettenwiderstand  $Z_K$  an. Lösung der obigen Gleichung:

$$Z_K = \frac{1}{2}(Z_{11} - Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11} - Z_{22})^2 + 4 \cdot \det Z})$$

Symmetrische ZT: Kettenwiderstand = Wellenwiderstand.

## 5 Fourierreihe periodischer Signale

### 5.1 Reelle Fourierreihe (FR)

$a_k, b_k$ : FR-Koeffizienten.

$k = 0$ : Gleichanteil, Mittelwert.

$k = 1$ : Grundschwungung, 1.Harmonische.

$k = n$ :  $n$ .Harmonische,  $(n - 1)$ .Oberschwingung.

- Synthese, trigonometrische Form:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

- Synthese, harmonische Form:

$A_k$ : Gewichte, Amplituden

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \alpha_k) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos \left( k\omega_1 t - \underbrace{(-\alpha_k + \frac{\pi}{2})}_{\beta_k} \right) \\ &= \boxed{A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin \left( k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

- Analyse, trigonometrische Form:

$$\begin{aligned} \text{Gleichanteil: } \frac{a_0}{2} &= A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- Umwandlung Harmonisch  $\Leftrightarrow$  Trigonometrisch:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \underline{c}_0 \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$a_k = A_k \sin(\alpha_k) = A_k \cos(\beta_k) = A_k \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = A_k \cos(\alpha_k) = A_k \sin(\beta_k) = -A_k \sin(\varphi_k)$$

$$\tan(\alpha_k) = \frac{a_k}{b_k} \quad \tan(\beta_k) = \frac{b_k}{a_k} \quad \tan(\varphi_k) = \frac{-b_k}{a_k}$$

### 5.2 Komplexe Fourierreihe

- Synthese:  $\omega \rightarrow t$     $\underline{c}_k$ : Gewichte

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j k \omega_1 t} \text{ mit } \underline{c}_k = |\underline{c}_k| \cdot e^{j \varphi_k}$$

- Analyse:  $t \rightarrow \omega$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-j k \omega_1 t} dt = \boxed{\frac{1}{T} \cdot \underline{X}(k\omega_1)}$$

- Umwandlung Komplex  $\Leftrightarrow$  Reell.

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= A_0 = \underline{c}_0 \quad A_k = 2|\underline{c}_k| \quad \beta_k = -\varphi_k \\ a_k &= 2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_k\} = [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \\ b_k &= -2 \operatorname{Im}\{\underline{c}_k\} = j [\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \\ \underline{c}_k &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{-j \beta_k} = \frac{A_k}{2} e^{j \varphi_k} \\ \underline{c}_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{j \beta_k} = \frac{A_k}{2} e^{-j \varphi_k} \end{aligned}$$

### 5.3 Symmetrieeigenschaften

- Gerade** Funktionen - symmetrisch zur y-Achse  
Alle  $\sin$ -Anteile verschwinden.

$$\begin{aligned} b_k &= 0 \quad A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt \\ a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- Ungerade** Funktionen - symmetrisch zum Ursprung  
Gleichanteil und alle  $\cos$ -Anteile verschwinden.

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad A_0 = 0 \\ b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

#### 5.3.1 Halbwellsymmetrie

FR mit HWS enthält nur ungerade Terme:  $\rightarrow k = 1, 3, 5, \dots, \infty$

- Allgemein:  $y(t) = -y(t \pm T/2)$

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt \\ b_{2k-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- gerade Halbwellsymmetrie:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad b_k = 0, \quad a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- ungerade Halbwellsymmetrie:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad a_k = 0, \quad b_{2k} = 0 \\ b_{2k-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

### 5.4 Verschiebungssatz

**Zeitverschiebung**  $\Leftrightarrow$  **Phasendrehung** im Freq.-bereich um den Winkel:  $-k\omega_1 t_v$

$$\begin{aligned} f_v(t) = f(t - t_v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j \omega_1 k(t-t_v)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{c}_k \cdot e^{-j \omega_1 k t_v}}_{\underline{c}_{k_v}} \cdot e^{j \omega_1 k t} \end{aligned}$$

$t_v < 0$ : Phasenwinkel des Spektrums werden mit zunehmender Frequenz größer.

## 5.5 FR und LTI-Systeme

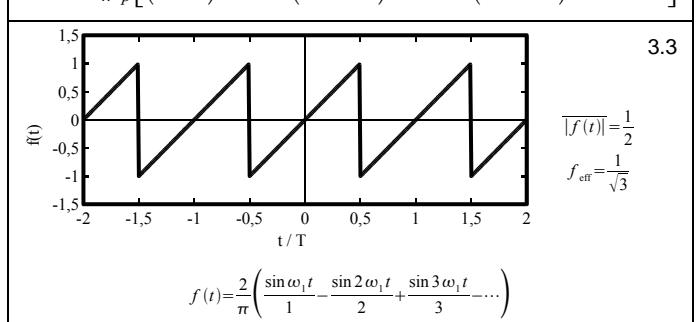
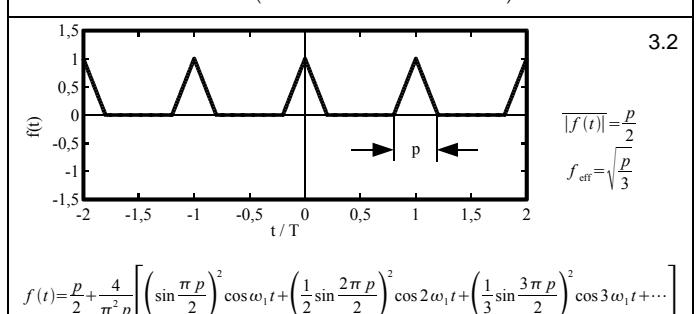
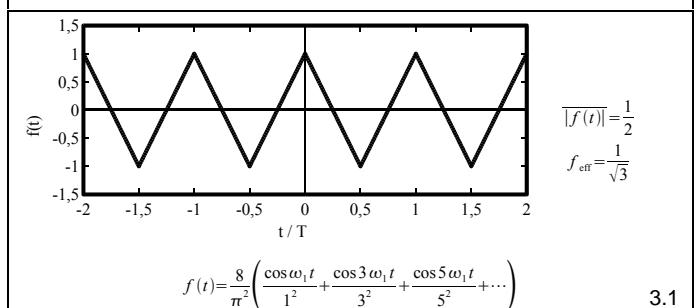
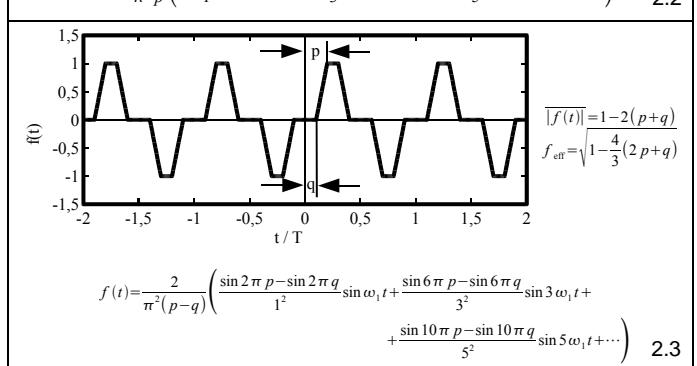
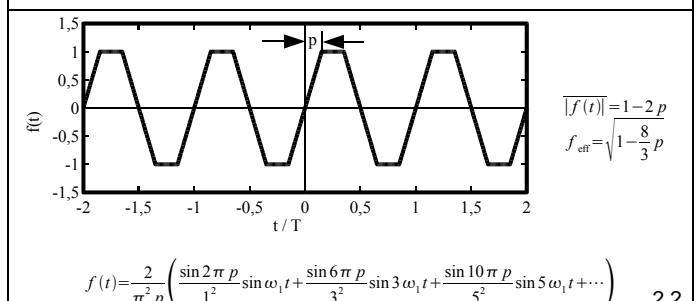
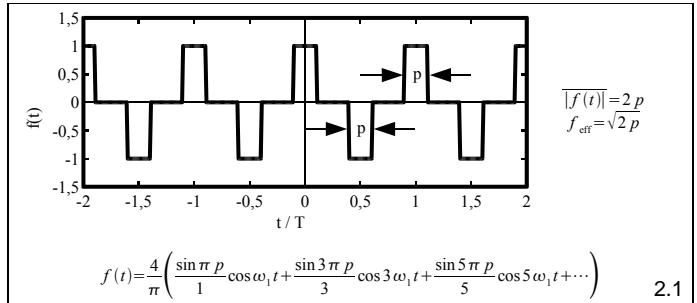
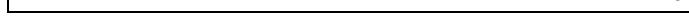
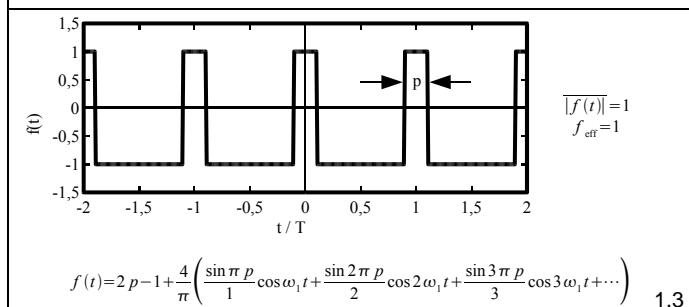
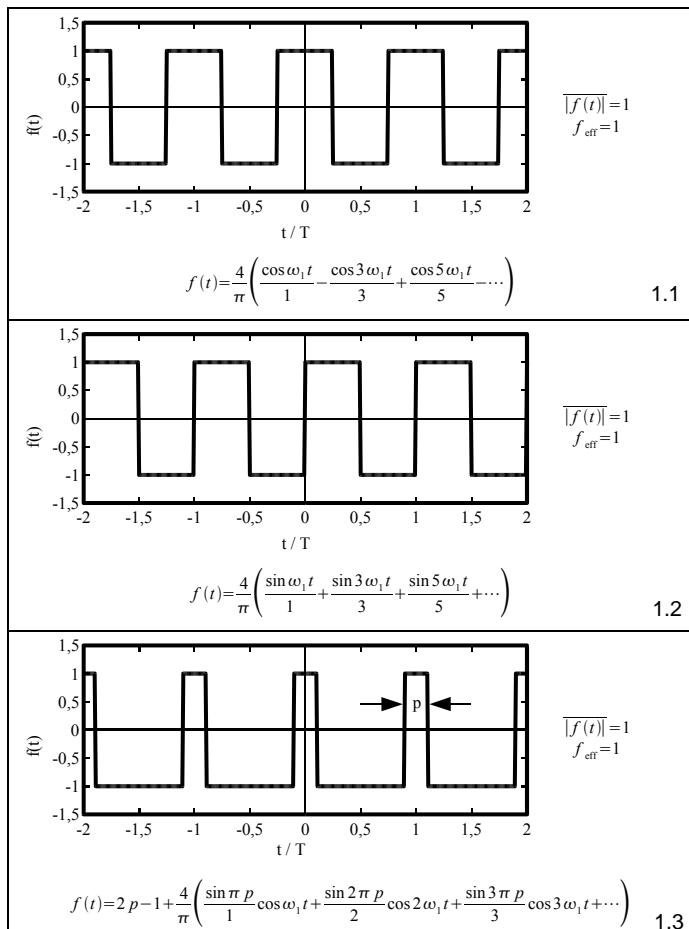
LTI-Systeme verändern Betrag und Phase aller harmonischen Komponenten eines Eingangssignals = lineare Verzerrung.  
Sie fügen keine neuen Frequenzen hinzu.

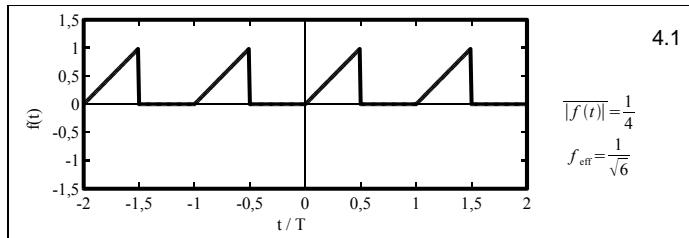
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(k\omega_1) \cdot c_{xk}}_{c_{yk}} \cdot e^{j\omega_1 kt}$$

## 5.6 FR-Tabelle - Bischoff

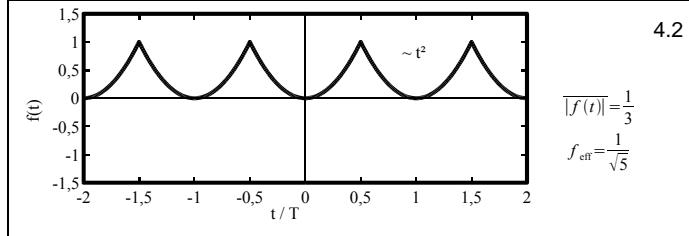
- normierte Pulsbreite  $p = \frac{|\Delta t|}{T} = \frac{\text{Länge Zeit}}{\text{Periodendauer}}$
- $\overline{|f(t)|}$ : Mittelwert Wechselanteil/ Gleichrichtwert.
- $f_{\text{eff}}$ : Gesamt-Effektivwert des Signals.
- FR-Reihen sind auf Amplitude  $\hat{f}$  normiert!  
→ mit  $\hat{f}$  multiplizieren!

Fourierreihen

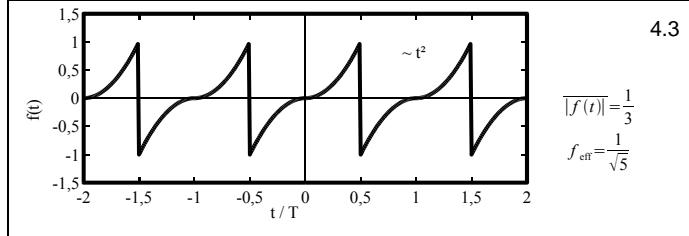




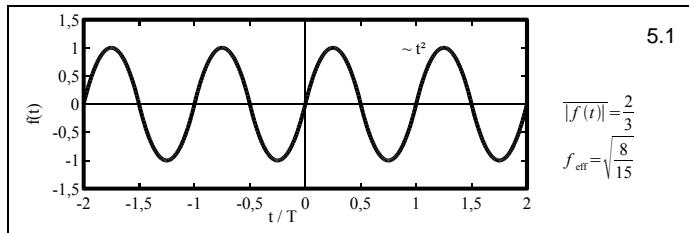
$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{\cos \omega_1 t + \cos 3\omega_1 t + \cos 5\omega_1 t + \dots}{1^2 + 3^2 + 5^2} \right) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin \omega_1 t - \sin 2\omega_1 t + \sin 3\omega_1 t - \dots}{1 - 2 + 3} \right)$$



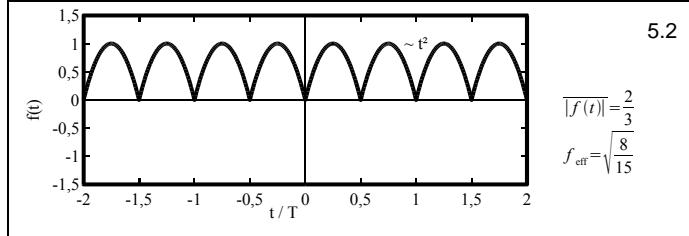
$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\cos \omega_1 t - \cos 2\omega_1 t + \cos 3\omega_1 t - \dots}{1^2 + 2^2 + 3^2} \right)$$



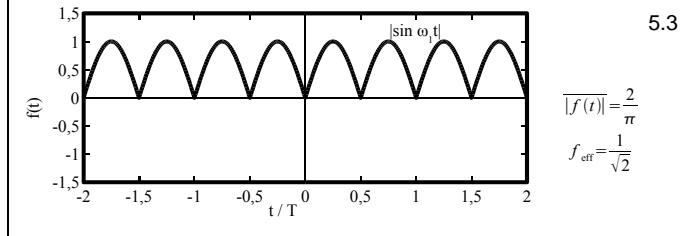
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin \omega_1 t - \sin 2\omega_1 t + \sin 3\omega_1 t - \dots}{1 - 2 + 3} \right) - \frac{8}{\pi^3} \left( \frac{\sin \omega_1 t + \sin 3\omega_1 t + \sin 5\omega_1 t + \dots}{1^3 + 3^3 + 5^3} \right)$$



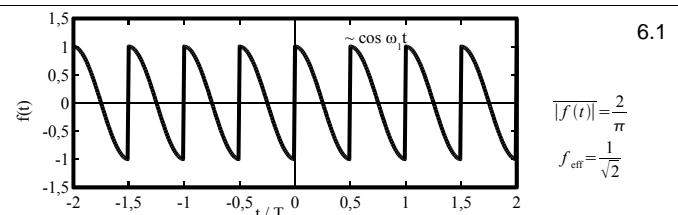
$$f(t) = \frac{32}{\pi^3} \left( \frac{\sin \omega_1 t + \sin 3\omega_1 t + \sin 5\omega_1 t + \dots}{1^3 + 3^3 + 5^3} \right)$$



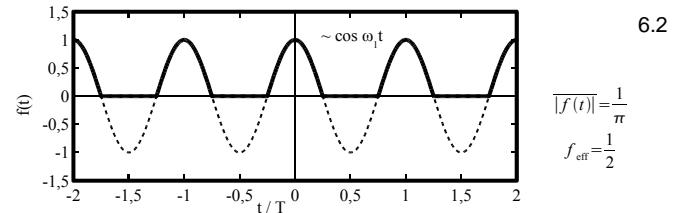
$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\cos 2\omega_1 t + \cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t + \dots}{1^2 + 2^2 + 3^2} \right)$$



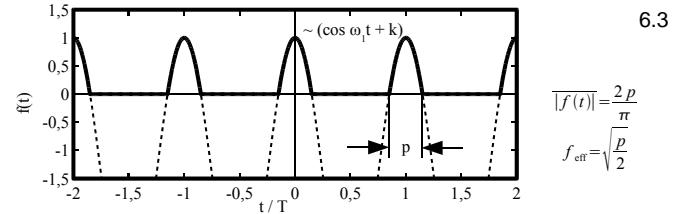
$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos 2\omega_1 t + \cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t + \dots}{1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7} \right)$$



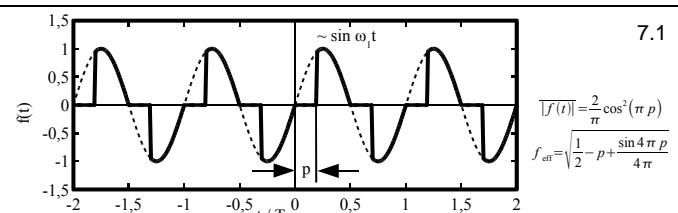
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{2 \sin 2\omega_1 t + 4 \sin 4\omega_1 t + 6 \sin 6\omega_1 t + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right)$$



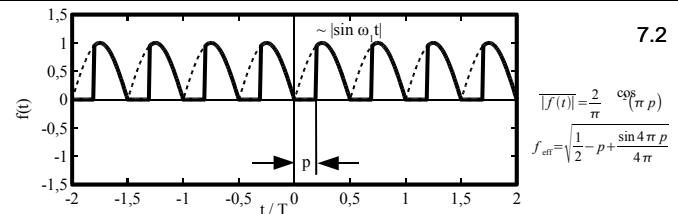
$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega_1 t + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 2\omega_1 t - \cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t - \dots}{1 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7} \right)$$



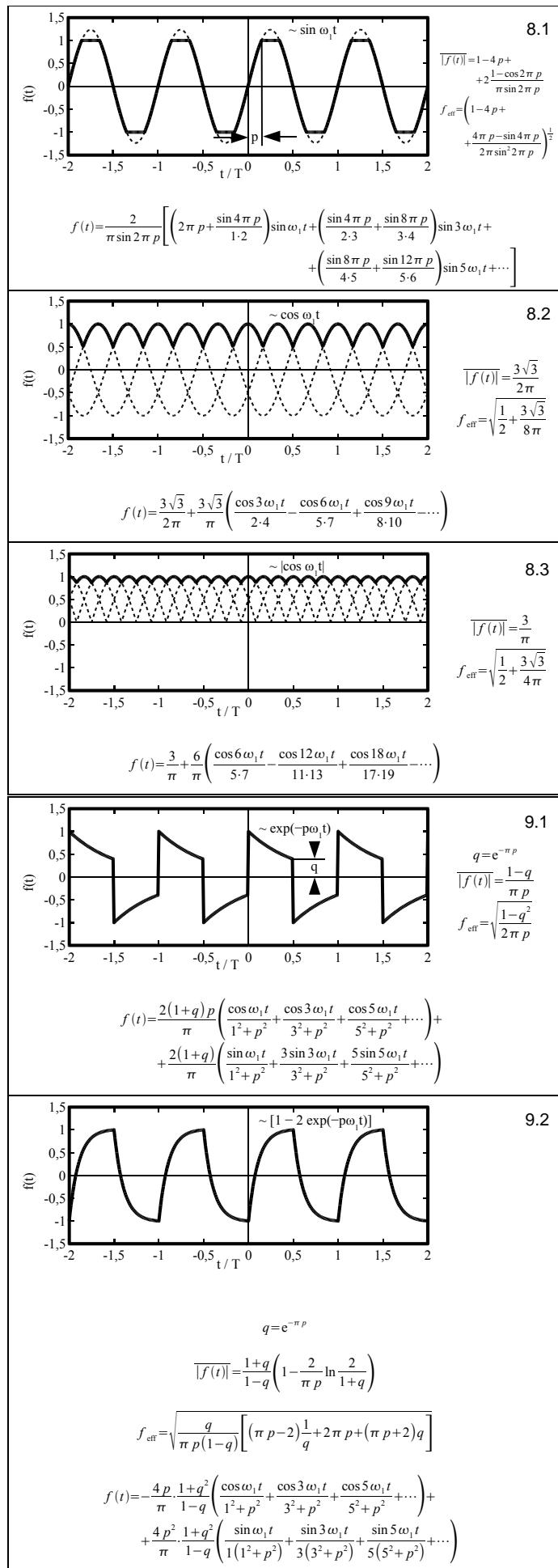
$$f(t) = \frac{2p}{\pi} + \frac{4p}{\pi} \left( \frac{\cos \pi p \cos \omega_1 t + \cos 2\pi p \cos 2\omega_1 t + \cos 3\pi p \cos 3\omega_1 t + \dots}{1 - (2p)^2} \right)$$



$$\begin{aligned} f(t) = & -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin^2(2\pi p)}{2} \cos \omega_1 t + \frac{3 \sin(2\pi p) \cdot \sin(6\pi p) + \cos(2\pi p) \cdot \cos(6\pi p) - 1}{2 \cdot 4} \cos 3\omega_1 t + \right. \\ & \left. + \frac{5 \sin(2\pi p) \cdot \sin(10\pi p) + \cos(2\pi p) \cdot \cos(10\pi p) - 1}{4 \cdot 6} \cos 5\omega_1 t + \dots \right) + \\ & + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(4\pi p) - 4\pi p + 2\pi}{4} \sin \omega_1 t + \frac{3 \sin(2\pi p) \cdot \cos(6\pi p) - \cos(2\pi p) \cdot \sin(6\pi p)}{2 \cdot 4} \sin 3\omega_1 t + \right. \\ & \left. + \frac{5 \sin(2\pi p) \cdot \cos(10\pi p) - \cos(2\pi p) \cdot \sin(10\pi p)}{4 \cdot 6} \sin 5\omega_1 t + \dots \right) \end{aligned}$$

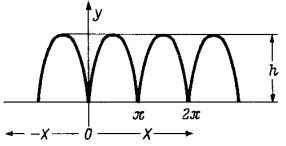
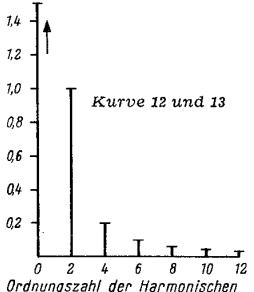
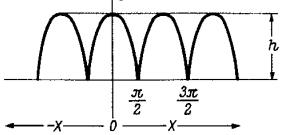
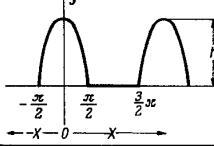
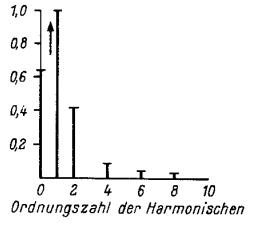
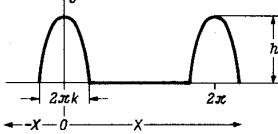
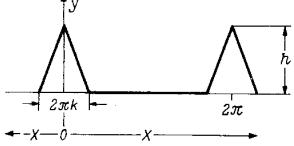
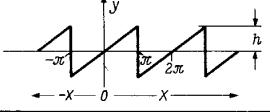
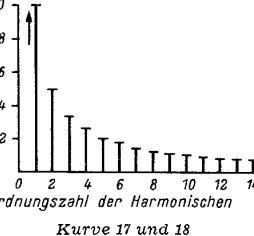
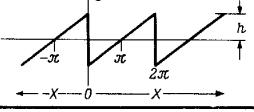
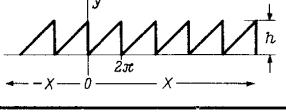
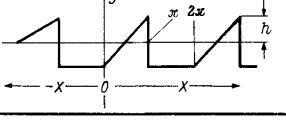
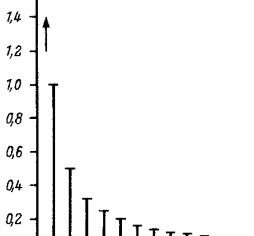
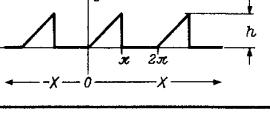
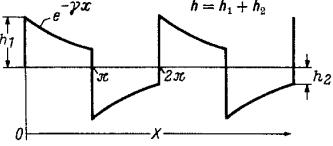


$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{2}{\pi} \cos^2(\pi p) - \frac{2}{\pi} \left( \frac{2 \sin(2\pi p) \cdot \sin(4\pi p) + \cos(2\pi p) \cdot \cos(4\pi p) + 1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega_1 t + \right. \\ & \left. + \frac{4 \sin(2\pi p) \cdot \sin(8\pi p) + \cos(2\pi p) \cdot \cos(8\pi p) + 1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega_1 t + \right. \\ & \left. + \frac{6 \sin(2\pi p) \cdot \sin(12\pi p) + \cos(2\pi p) \cdot \cos(12\pi p) + 1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega_1 t + \dots \right) + \\ & + \frac{2}{\pi} \left( \frac{2 \sin(2\pi p) \cdot \cos(4\pi p) - \cos(2\pi p) \cdot \sin(4\pi p)}{1 \cdot 3} \sin 2\omega_1 t + \right. \\ & \left. + \frac{4 \sin(2\pi p) \cdot \cos(8\pi p) - \cos(2\pi p) \cdot \sin(8\pi p)}{3 \cdot 5} \sin 4\omega_1 t + \right. \\ & \left. + \frac{6 \sin(2\pi p) \cdot \cos(12\pi p) - \cos(2\pi p) \cdot \sin(12\pi p)}{5 \cdot 7} \sin 6\omega_1 t + \dots \right) \end{aligned}$$



## Funkschau Fourier-Reihen

C. Formelzusammenstellung		
Kurvenverlauf	Gleichung	Oberwellenaufbau
1 	$f(x) = \frac{4h}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$	
2 	$f(x) = \frac{4h}{\pi} \left( \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \dots \right)$	
3 	$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \dots \right)$	
4 	$f(x) = h \left\{ k + \frac{2}{\pi} \left( \sin k\pi \cos x + \frac{1}{2} \sin 2k\pi \cdot \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3k\pi \cos 3x \dots \right) \right\}$	
5 	$f(x) = -\frac{8h}{\pi^2} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	
6 	$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left( \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \dots \right)$	
7 	$f(x) = \frac{8h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	
8 	$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	
9 	$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots \right)$	
10 	$f(x) = \frac{4h}{\alpha \cdot \pi} \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{1^2} \cdot \sin x + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5\alpha}{5^2} \cdot \sin 5x \dots \right)$	
11 	$f(x) = \frac{4h}{\pi(\alpha-b)} \left( \frac{\sin a - \sin b}{1^2} \sin x + \frac{\sin 3a - \sin 3b}{3^2} \sin 3x + \frac{\sin 5a - \sin 5b}{5^2} \sin 5x \dots \right)$	

Kurvenverlauf	Gleichung	Oberwellenaufbau
12 	Halbwellen von sin- und —sin- Schwingungen $f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	 Kurve 12 und 13 Ordnungszahl der Harmonischen
13 	Halbwellen von cos- und —cos- Schwingungen $f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$	
14 	Halbwellen einer cos- Schwingung $f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2} \cos x + \frac{2h}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right)$	 Kurve 14 Ordnungszahl der Harmonischen
15 	Halbwellen einer cos- Schwingung $f(x) = \frac{2kh}{\pi} + \frac{4kh}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{1 - 4k^2n^2} \cdot \cos nx$	
16 	$f(x) = \frac{hk}{2} + \frac{2h}{\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi k}{n^2} \cdot \cos nx$	
17 	$f(x) = \frac{2h}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \right)$	 Kurve 17 und 18 Ordnungszahl der Harmonischen
18 	$f(x) = -\frac{2h}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$	
19 	$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	
20 	$f(x) = -\frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{2h}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	 Kurve 19 Ordnungszahl der Harmonischen
21 	$f(x) = \frac{h}{4} - \frac{2h}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \frac{h}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$	
22 	$f(x) = \frac{2h\gamma}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \sin (2n+1)x}{\gamma^2 + (2n+1)^2}$	

## 5.7 Kenngrößen periodischer Signale

### 5.7.1 Effektivwert, Klirrfaktor, Mischgrößen

- Effektivwert:** Wert einer Gleichgröße, die im Mittel die gleiche elek. Leistung an einem  $R$  umsetzt.

$$U_{\text{eff}} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u(t)^2 dt} = \sqrt{U_{\sim}^2 + U_0^2}$$

harmonische Signale:  $U_k = \frac{\hat{u}_k}{\sqrt{2}}$

$U_{\sim}$ : Wechselanteil     $U_0$ : Gleichanteil, Mittelwert

- Effektivwert mit **Fourier-Reihe**:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_{k,\text{eff}}^2} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}$$

- Klirrfaktor**, Oberschwingungsgehalt:

Maß für Abweichung eines Signals  $x(t)$  von der sin-Form.  
Angabe von  $k$  in %. Kein Gleichanteil  $U_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} k &= \frac{\text{Effektivwert Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert Wechselanteil}} \leq 1 \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} = \frac{\sqrt{U_{\sim}^2 - U_1^2}}{U_{\sim}} \\ &= \sqrt{\frac{0,5 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \hat{u}_k^2}{0,5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}} \quad \text{mit FR-Amplituden } \hat{u}_k \\ &= \sqrt{1 - \frac{U_1^2}{U_{\sim}^2}} = \sqrt{1 - g^2} \quad \text{mit } g = \frac{U_1}{U_{\sim}} \\ k_m &= \frac{U_m}{U_{\sim}} \quad k_1 = g = \sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

Für Wechselgrößen lässt sich  $k$  einfach mit **Grundschwingungsgehalt**  $g$  ermitteln (*gilt immer*).

- Mischgrößen:**

- Schwingungsgehalt:

$$s = \frac{U_{\sim}}{U} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Effektivwert der Mischgröße}}$$

- Welligkeit:

$$w = \frac{U_{\sim}}{U_0} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

- Riffelfaktor:

$$R = \frac{\hat{u}_{\sim}}{U_0} = \frac{\text{Scheitelwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

### 5.7.2 Leistungen

- Wirkleistung:**

$$\begin{aligned} P = \bar{p}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* \leftrightarrow i_k^* = i_{-k} \\ &= P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k,\text{eff}} \cdot I_{k,\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k}) \\ &= U_0 \cdot I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_k \cdot \hat{i}_k}{2} \cdot \cos(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k}) \\ &= \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad \text{rein am ohmschen Widerstand!} \end{aligned}$$

- Blindleistung**

Nicht-sinusförmige Größen:  $Q$  ist vorzeichenlos!  $[Q] = \text{var}$

$$|Q| = \sqrt{Q_v^2 + D^2} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

### Verschiebungs-/Feldblindleistung $Q_v$

$$Q_v = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k \cdot \sin(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k})$$

Gleiche Frequenz, aber Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $I$ .

### Verzerrungsblindleistung $D$

auch Oberwellen-, Deformationsblindleistung.

$$D^2 = U_1^2 \cdot (I^2 - I_1^2) = S^2(1 - g^2)$$

aus Mischtermen als Produkte von  $U$  und  $I$  unterschiedlicher Frequenzen.

- Scheinleistung**

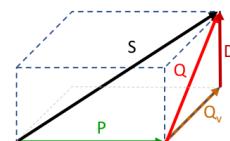
Gilt auch für Mischgrößen, da Effektivwerte Gleichanteile enthalten können. Achtung:  $U, I$ : **Gesamtsignal!**

$$\begin{aligned} S &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + Q_v^2 + D^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} I_k^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} I_k^2\right)} \\ &\neq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2 \cdot I_k^2} \end{aligned}$$

Nicht-linearer Verbraucher an einer sinusförmigen Spannung  $U_1$ :

$$\begin{aligned} S^2 &= (UI)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = \\ &= U_1^2 I_0^2 + U_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1 \end{aligned}$$

Räumliche Darstellung der Leistungen:



- Leistungsfaktor:**

$$\text{Allgemein: } \lambda = \frac{|P|}{S} = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{S^2}} \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\text{Sinusförmig: } \lambda = \frac{P}{S} = \cos(\varphi) = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

## 6 Fourier-Transformation (FT)

### 6.1 Hin- und Rücktransformation

Übertragung (nicht-)periodischer Signale in Spektrum/BB.

**Bedingung:**  $x(t)$  absolut integrierbar!  $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$

$$x(t) \circ \bullet \underline{X}(\omega)$$

Hintransformation - Analysegleichung:

$$\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Komplexwertige Fouriertransformierte:

$$\underline{X}(\omega) = |\underline{X}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi}$$

Einheit: Amplitudendichte  $[x(t)] \cdot s$

### 6.2 FT periodischer Signale

- Übergang FR  $\rightarrow$  FT:

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_k \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{U}(\omega)}{t_a} \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \frac{2\pi}{t_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \omega_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega - k\omega_a) \end{aligned}$$

- Übergang FT  $\rightarrow$  FR, Komplexe Fourierkoeffizienten, periodische Fortsetzung:

$$\boxed{\underline{c}_k = \frac{1}{T} \cdot \underline{X}(k\omega_1)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega_1 t} dt$$

$T = t_p$ : Periodizität, Periodendauer.

$\underline{c}_k$ : FR-Koeff. d. periodischen Fortsetzung des endlichen Signals  $x(t)$  mit Länge  $T$ .

- FR-Koeffizienten  $\underline{c}_k$  sind **Abtastwerte** von  $\underline{X}(\omega)$  bei den Frequenzen im Linienabstand:

$$\omega = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T} = k \frac{2\pi}{t_p}$$

### 6.3 Zeit-Bandbreite-Gesetz

## 6.4 Eigenschaften der FT

	$x(t)$	$\underline{X}(\omega)$
Linearität	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\underline{X}_1(\omega) + B\underline{X}_2(\omega)$
Verschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \underline{X}(\omega)$
Modulation	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\underline{X}(\omega - \omega_0)$
Differentiation im Frequenzbereich	$t \cdot x(t)$	$j \frac{d\underline{X}(\omega)}{d\omega}$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega \underline{X}(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} \underline{X}(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Zeitskalierung	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \underline{X}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Faltung	$x_1(t) * x_2(t)$	$\underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$
Multiplikation	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$
Dualität	$x_1(t)$ $x_2(t)$	$x_2(\omega)$ $2\pi x_1(-\omega)$
Symmetrien	$x(-t)$ $x^*(t)$ $x^*(-t)$	$\frac{X}{X^*}(-\omega)$ $\underline{X}^*(\omega)$
Parsevalsches Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  \underline{X}(\omega) ^2 d\omega$

## 6.5 Symmetrieeigenschaften

Realteil & Betrag: **gerade**  
Imaginärteil & Phase: **ungerade**.

$$\underline{X}(-\omega) = \underline{X}^*(\omega)$$

$x(t)$  reell & gerade  $\leftrightarrow$   
 $\underline{X}(\omega)$  reell & gerade

$$\underline{X}(\omega) = 2 \int_0^\infty x(t) \cos(\omega t) dt$$

$x(t)$  reell & ungerade  $\leftrightarrow$   $\underline{X}(\omega)$  imaginär & ungerade

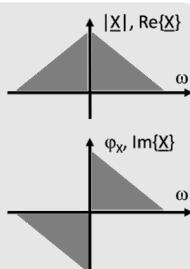
$$\underline{X}(\omega) = -2j \int_0^\infty x(t) \sin(\omega t) dt$$

## 6.6 Korrespondenzen der FT

	$x(t)$	$\underline{X}(\omega)$
	$\delta(t)$	1
	1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
	$\dot{\delta}(t)$	$j\omega$
	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$	$\omega_1 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1)$ mit $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
	$\text{rect}\left(\frac{t}{2aT}\right)$	$2aT \cdot \text{si}(\omega aT)$
	$\text{si}(at)$	$\frac{\pi}{ a } \text{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
	$\frac{ a }{\pi} \text{si}(at)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
	$\frac{1}{t}$	$-j\pi \text{sign}(\omega)$
	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
	$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
	$e^{-a^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

## 6.7 Faltungsregeln

- $a * b = b * a$  kommutativ
- $a * [b * c] = [a * b] * c$
- $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$
- $a * [b + c] = a * b + a * c$
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$  Ausblendeigenschaft



## 7 Laplace-Transformation (LPT)

Hintransformation - Analyse:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \underline{X}(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st} dt$$

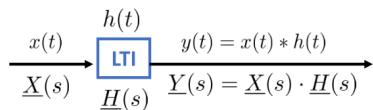
Rücktransformation - Synthese:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\underline{X}(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{X}(s) \cdot e^{-st} ds$$

Rücktransformation mit Partialbruchzerlegung (PBZ) + Tabelle in Kap. 7.7.

### 7.1 LTI-Systeme im Bildbereich (BB)

$x(t) = h(t) = 0$  für  $t < 0$ : Rechtsseitige (**kausale**) Signale!



LTI-Systeme im Bildbereich sind **immer** kausal!

### 7.2 Impuls- und Sprungantwort im BB

Impulsantwort:

$$h(t) \circ \bullet \underline{H}(s)$$

Sprungantwort:

$$g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \circ \bullet \quad \underline{G}(s) = \frac{\underline{H}(s)}{s}$$

### 7.3 Zusammenhang LPT $\leftrightarrow$ FT

- Konvergenzbereich (Kb): Halbebene rechts vom am weitesten rechts liegenden Pol.
- Wenn  $\omega$ -Achse  $\in$  Kb: FT von  $\underline{X}(s)$  existiert:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega}$$

### 7.4 P/N-Diagramm: Systemeigenschaften

- Stabilität:** Alle Pole von  $\underline{H}(s)$  liegen links der  $\omega$ -Achse.
- Minimalphasiges System:** Alle Nullstellen liegen links der  $\omega$ -Achse.

### 7.5 Partialbruchzerlegung (PBZ)

Für die inverse bzw. Rücktransformation in den Zeitbereich.  
Beispiele siehe Papula FS, S.157f.

- Einfache Polstellen:

$$\underline{X}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(s - p_n)}$$

- Doppelte/k-fache Polstellen:

$$\begin{aligned} \underline{X}(s) &= \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{Z}(s)}{(s - p_n)^k} \\ &= \frac{A_1}{s - p_n} + \frac{A_2}{(s - p_n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(s - p_n)^k} \end{aligned}$$

- Komplexe Polstellen:

$$\begin{aligned} \underline{X}(s) &= \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{Z}(s)}{(s - p_1)(s - p_1^*)} \\ &= \frac{B s + C}{(s - p_1)(s - p_1^*)} \\ &= \frac{B s + C}{(s - j p_1)(s + j p_1)} \end{aligned}$$

**Beachte:** Wenn Zählergrad > Nennergrad, muss vor der PBZ eine **Polynomdivision** durchgeführt werden!

### 7.6 Eigenschaften der LPT

	$\underline{x}(t)$	$\underline{X}(s)$
Linearität	$a x_1(t) + b x_2(t)$	$a \underline{X}_1(s) + b \underline{X}_2(s)$
Skalierung $t$	$x(at)$	$\frac{1}{a} \underline{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Skalierung $s$	$\frac{1}{a} x\left(\frac{t}{a}\right)$	$\underline{X}(as)$
Verschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-s \cdot t_0} \underline{X}(s)$
Modulation	$e^{at} x(t)$	$\underline{X}(s - a)$
Multiplikation	$t \cdot x(t)$	$-\frac{d}{ds} \underline{X}(s)$
Faltung	$x_1(t) * x_2(t)$	$\underline{X}_1(s) \cdot \underline{X}_2(s)$
Differentiation $t$	$\frac{d}{dt} x(t)$	$s \cdot \underline{X}(s) - x(0)$
Integration $t$	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \underline{X}(s)$
Integration $s$	$\frac{1}{t} \cdot x(t)$	$\int_s^\infty \underline{X}(s) ds$

## 7.7 Korrespondenzen der LPT

Nr.	$\mathbf{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{\mathbf{X}}(s)$	Nr.	$\mathbf{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{\mathbf{X}}(s)$
10	1	$\frac{1}{s}$	28	$\frac{1}{ab} + \frac{b \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-bt}}{ab \cdot (a-b)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
11	$t$	$\frac{1}{s^2}$	29	$\frac{e^{-at} + [(a-b)t-1] \cdot e^{-bt}}{(a-b)^2}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
12	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	30	$\frac{[a-b(a-b)t] \cdot e^{-bt} - a \cdot e^{-at}}{(a-b)^2}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
13	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	31	$\frac{(b-c) \cdot e^{-at} + (c-a) \cdot e^{-bt} + (a-b) \cdot e^{-ct}}{(b-a)(c-a)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
14	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	32	$\frac{a(b-c) \cdot e^{-at} + b(c-a) \cdot e^{-bt} + c(a-b) \cdot e^{-ct}}{(b-a)(c-b)(c-a)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
15	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	33	$\frac{1}{2\omega^3} \cdot (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$
16	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	34	$\frac{t}{2\omega} \cdot \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
17	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	35	$\frac{1}{2\omega} \cdot (\sin \omega t + \omega t \cdot \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
18	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	36	$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
19	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	37	$\cos^2(\omega t)$	$\frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
20	$(1 - at) \cdot e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	38	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{s^2 + \omega^2}$
21	$\frac{1}{a^2} \cdot [1 - (1 + at) \cdot e^{-at}]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	39	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{s \sin \psi + \omega \cos \psi}{s^2 + \omega^2}$
22	$\frac{t^2}{2} \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	40	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
23	$\frac{1}{a^2} \cdot (1 - \cos at)$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	41	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
24	$\frac{1}{a^2} \cdot (\cosh at - 1)$	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)}$	42	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t + \psi)$	$\frac{(s+a) \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s+a)^2 + \omega^2}$
25	$\frac{1}{a^2} \cdot [at - 1 + e^{-at}]$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	43	$\frac{a \cos \omega t + \omega \sin \omega t - a \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s+a}$
26	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)}$	44	$\frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s+a}$
27	$\frac{a \cdot e^{-at} - b \cdot e^{-bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s+a) \cdot (s+b)}$	45	$\frac{\cos(\omega t + \psi - \gamma) - \cos(\psi - \gamma) \cdot e^{-at}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s+a)}$

Nr.	$\mathbf{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{\mathbf{X}}(s)$
46	$a^2 > b^2 : \frac{1}{2W} \cdot (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$ $a^2 = b^2 : t \cdot e^{-at}$ $a^2 < b^2 : \frac{1}{\omega_d} \cdot e^{-at} \cdot \sin \omega_d t$	$\frac{1}{s^2 + 2as + b^2}$
47	$a^2 > b^2 : \frac{1}{2W} \cdot (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$ $a^2 = b^2 : (1 - at) \cdot e^{-at}$ $a^2 < b^2 : \left( \cos \omega_d t - \frac{a}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d t \right) \cdot e^{-at}$	$\frac{s}{s^2 + 2as + b^2}$
48	$a^2 > b^2 : \frac{1}{b^2} \left( 1 + \frac{\lambda_2}{2W} \cdot e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{2W} \cdot e^{\lambda_2 t} \right)$ $a^2 = b^2 : \frac{1}{a^2} [1 - (1 + at) \cdot e^{-at}]$ $a^2 < b^2 : \frac{1}{b^2} \left[ 1 - \left( \cos \omega_d t + \frac{a}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d t \right) \cdot e^{-at} \right]$	$\frac{1}{s(s^2 + 2as + b^2)}$
49	$a^2 > b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) + k_1 e^{-\lambda_1 t} + k_2 e^{-\lambda_2 t}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $a^2 = b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) + (zt - \cos \varphi) \cdot e^{-at}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $a^2 < b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) - k \cdot \cos(\omega_d t + \beta) \cdot e^{-at}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s^2 + 2as + b^2)}$

- Aperiodischer Kriechfall:  
 $a^2 > b^2 \leftrightarrow \vartheta > 1$
- Aperiodischer Grenzfall:  
 $a^2 = b^2 \leftrightarrow \vartheta = 1$
- Periodischer Schwingfall:  
 $a^2 < b^2 \leftrightarrow 0 < \vartheta < 1$
- Abklingkonstante:  
 $a = \delta = \frac{\vartheta}{T} = \vartheta \omega_0 = \frac{R}{2L}$
- Resonanz-Kreisfrequenz:  
 $b = \omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Eigen-Kreisfrequenz:  
 $\omega_d = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$
- Dämpfungsgrad,-maß,-konstante:  
 $D = \vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -a \pm W = -a \pm j\omega_d & W &= \sqrt{a^2 - b^2} = j\omega_d & x &= b^2 - \omega^2 & y &= 2a\omega & z &= \omega \sin \varphi - a \cos \varphi \\ \varphi &= \arctan \frac{x \sin \varphi - y \cos \varphi}{y \sin \varphi + x \cos \varphi} & k &= \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} & k_1 &= \frac{\lambda_2 \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{2W} & k_2 &= \frac{\omega \sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi}{2W} \\ \beta &= \arctan \frac{z}{\omega_d \cos \varphi} \end{aligned}$$

## 8 Schaltvorgänge

### 8.1 Berechnungsmethoden

Immer Stetigkeitsbedingungen beachten!

$$x(t=0) = x(0) = x(0^-) = x(0^+)$$

Bauteilverhalten KS/LL:  $\underline{X}_C = -j \frac{1}{\omega C}$      $\underline{X}_L = j\omega L$

#### 8.1.1 Vereinfachte Methode

mit Lösungsformeln aus GE1, GE2.

- Bedingung:** konstantes Eingangssignal/Quelle und **einem** unabhängigem Energiespeicher  $L$  oder  $C$  (DGL 1. Ordnung, eine Zeitkonstante).
- GE1: Schaltung mit **einer** Induktivität  $L$ :

$$\tau = \frac{L}{R} \quad I_A = i(0) \quad I_E = i(t \rightarrow \infty)$$

$$i(t) = I_E + (I_A - I_E) \cdot e^{-t/\tau}$$

- GE2: Schaltung mit **einer** Kapazität  $C$ :

$$\tau = RC \quad U_A = u(0) \quad U_E = u(t \rightarrow \infty)$$

$$u(t) = U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-t/\tau}$$

#### 8.1.2 Laplace-Transformation der DGL

- DGL aufstellen mit Bauteilgleichungen für  $R, L, C$ .  
Maschen- und Knotensatz anwenden.

- LPT der DGL durchführen:

$$\dot{x}(t) \circ \bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

$$\ddot{x}(t) \circ \bullet s^2 \cdot \underline{X}(s) - s \cdot x(0^+) - \frac{dx}{dt}(0^+)$$

Anfangszustand  $i_L, u_C \neq 0$  zum Schaltzeitpunkt  $x(0^+)$  wird autom. berücksichtigt.

- Auflösen nach gesuchter Größe.

- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

#### 8.1.3 Leere Energiespeicher mit LPT & KWR

- Bedingung:** Alle  $C$  ungeladen, Alle  $L$  stromlos.

$$u_c(0+) = i_L(0+) = 0$$

- Eingang  $x(t)$  mit LPT in Bildbereich  $\underline{X}(\omega)$ .

- $\underline{H}(s)$  aus Schaltung nach Schaltvorgang mit erweiterter KWR bestimmen. Ersetze  $s = j\omega$ .

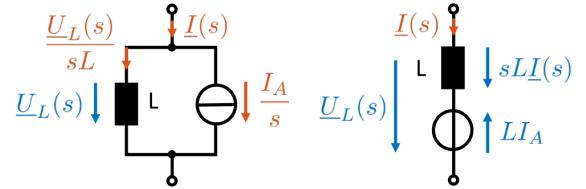
- Ausgang im Bildbereich berechnen:  $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$

- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

#### 8.1.4 Geladene Energiespeicher mit LPT

- Ersatzschaltbild (ESB) für Schaltkreis nach dem Schaltvorgang im Bildbereich erstellen:

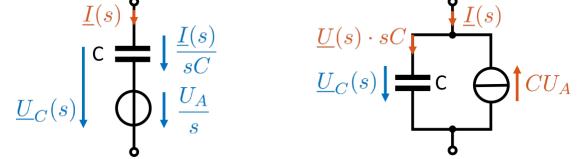
- VZ beachten! VZ-Änderung im Zeitbereich auch im Bildbereich gültig!
- Induktivitäten mit Anfangstrom:



$$\underline{U}_L(s) = L \cdot (s \cdot \underline{I}_L(s) - \underbrace{i_L(0)}_{I_A})$$

$$\underline{I}_L(s) = \frac{\underline{U}_L(s)}{sL} + \frac{I_A}{s}$$

- Kapazitäten mit Anfangsspannung/Vorladung:



$$\underline{I}_C(s) = C \cdot (s \cdot \underline{U}_C(s) - \underbrace{u_C(0)}_{U_A})$$

$$\underline{U}_C(s) = \frac{\underline{I}_C(s)}{sC} + \frac{U_A}{s}$$

- $\underline{H}(s)$  aus ESB mit KWR bestimmen.
- Eingang  $x(t)$  mit LPT in Bildbereich  $\underline{X}(\omega)$ .
- Ausgang im Bildbereich berechnen:  $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$ .
- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

## 8.2 Quellenumwandlung

$$\text{Stromquelle: } i_q(t) \cdot \varepsilon(t) \circ \bullet \frac{I_q(s)}{s}$$

$$\text{Spannungsquelle: } u_q(t) \cdot \varepsilon(t) \circ \bullet \frac{U_q(s)}{s}$$

## 8.3 Bauteilgleichungen

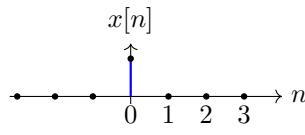
$$i_L(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di_c(t)}{dt}$$

## 9 Zeitdiskrete Systeme

### 9.1 Elementare, zeitdiskrete Signale

- **Einheitsimpuls**, Impulsfolge, Delta-Impuls  $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Eigenschaften:

- Zusammenhang mit Einheitssprung:

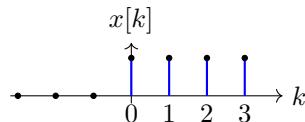
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1 \quad \varepsilon(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(n)$$

- Anregung der Impulsantwort
- konstantes Spektrum
- Ausblendeigenschaft:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

- **Einheitssprung**

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Zusammenhang mit Einheitsimpuls:

$$\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$$

- **Rechteckfolge**

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

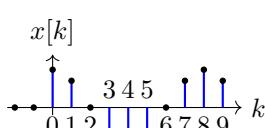
Zusammenhang mit Einheitsimpuls bzw. -sprung:

$$\begin{aligned} \text{rect}(n) &= \varepsilon(n) + \varepsilon(n-N) \\ &= \varepsilon(n) \cdot \varepsilon(N-1-n) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) \end{aligned}$$

- **Zeitdiskreter Sinus**

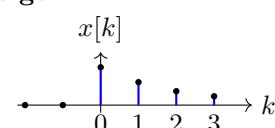
$$x(n) = A \cdot \sin(\Omega n + \varphi)$$

$A$ : Amplitude  
 $\Omega$ : normierte Kreisfrequenz  
 $\varphi$ : Anfangsphase



- **komplexe Exponentialfolge**

$$\begin{aligned} x(n) &= \underline{A} \cdot e^{S n} \\ &= \underline{A} \cdot e^{(\Sigma + j\Omega)n} \end{aligned}$$



$$S = \Sigma + j\Omega$$

Amplitudenänderung  $\Sigma = \sigma T = \sigma / f_A$

normierte Kreisfrequenz  $\Omega = \omega T = 2\pi \frac{f_0}{f_A}$

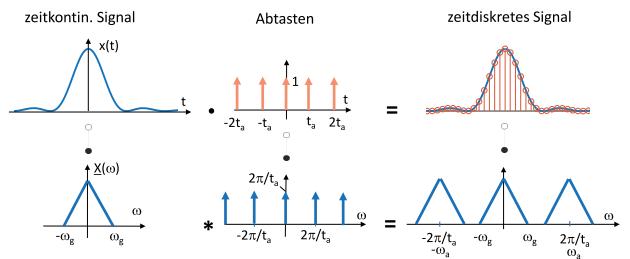
### 9.2 A/D-Wandlung

- Zeitdiskretisierung, Abtastung, **Abtastrate**:  $f_a = \frac{1}{t_a}$

$$x(n) = x_0(t)|_{t=nT_a} = x_0(nT) = x_0\left(\frac{n}{f_a}\right)$$

- Wertdiskretisierung (Quantisierung): Bitbreite, Auflösung: 8 Bit = 256 Stufen.
- Abtastung Analog-Signal  $\rightarrow$  **periodische** Fortsetzung des Analog-Spektrums im Abstand von

$$\omega_a = \frac{2\pi}{t_a} = 2\pi f_a \quad \text{mit } t_a: \text{Abtastintervall}$$



- **Aliasing**: Spektrale Überlagerung, zusätzliche Frequenzen/Abtastwerte, keine Rekonstruktion des Originalsignals aus  $t_a = \frac{1}{f_a}$  möglich.

**Abhilfe**: Eingangssignal auf  $\omega_g$ -Band begrenzen und **Abtasttheorem** einhalten, Verringerung von  $t_a$ .

$$\omega_a \geq 2\omega_g \quad \text{bzw. } f_a \geq 2f_g$$

$$\omega_g \leq \frac{\omega_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{t_a} \quad \text{bzw. } f_g \geq \frac{f_a}{2}$$

Merke: zeitbegrenztes Signal:  $\infty$  langes Spektrum  $\rightarrow$  Aliasing  
Dirac-Sprung im Signal  $\infty$  hohe  $f$  im Spektrum  $\rightarrow$  Aliasing

- Spektrum  $U_a(\omega)$  eines abgetasteten Signals  $u_a(t)$  mit  $T = t_a = \frac{1}{f_a}$  aus einem Analogsignal  $u(t)$ :

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_k \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{U(\omega)}{t_a} \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \frac{2\pi}{t_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \omega_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega - k\omega_a) \end{aligned}$$

### 9.3 Zeitdiskrete LTI-Systeme

#### 9.3.1 Systemeigenschaften

- Linear:** System mit Ü-Fkt.  $\underline{H}(z)$  beschreibbar.
- Kausal:** Anzahl der Pole (Grad des Nenners)  $N \geq M$   
Anzahl der Nullstellen (Grad des Zählers),  
 $h(n) = 0$  für  $n < 0$ , rechtsseitige Folge.
- Stabil:** Einheitskreis (EK) ∈ Konvergenzbereich (KB),  
absolute Summierbarkeit:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ ,  
**Alle** Pole ∈ EK.
- minimalphasiges LTI-System:** **Alle** Nullstellen ∈ EK.

#### 9.3.2 Impuls- & Systemantwort, Faltung

Impulsanregung	Impulsantwort
$x(n) = \delta(n)$	$y(n) = h(n) = S\{\delta(n)\}$
$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$ $\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$ $h(n) = g(n) - g(n-1)$ $\underline{H}(z) = \underline{G}(z) \cdot \frac{z-1}{z}$	$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$ $= x(n) * h(n)$

Sprunganregung	Sprungantwort
$x(n) = \varepsilon(n)$	$y(n) = g(n) = S\{\varepsilon(n)\}$

$\varepsilon(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$	$g(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)$
	$\underline{G}(z) = \underline{H}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$

#### 9.3.3 Faltung mit Hilfstabelle

Beispiel:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

$$y(n) = h(n) + 2h(n-1) + 2h(n-2)$$

$n$	-1	0	1	2	3	4	5
$h(n)$	0	2	1	1	3		
$2h(n-1)$	0	0	4	2	2	6	
$2h(n-2)$	0	0	0	4	2	2	6
$y(n)$	0	2	5	7	7	8	6

#### 9.3.4 Differenzengleichung $\Leftrightarrow$ Ü-Fkt.

Allgemein:

$$\underline{H}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{N-k}}$$

z-Transformation:  $z^{-k} = x(n-k)$ .

$$a_0 \cdot y(n) + a_1 \cdot y(n-1) + \dots + a_N \cdot y(n-N) = \\ b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + \dots + b_M \cdot x(n-M)$$

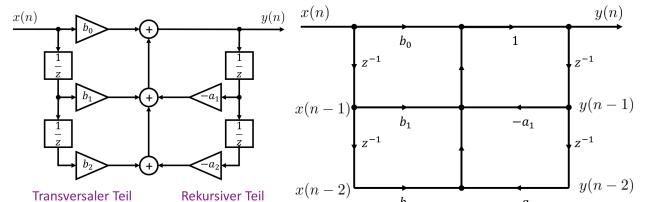
#### Systeme 2. Ordnung:

$$\underline{H}(z) = \frac{b_M}{a_N} = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{b_0 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_2}{z^2 + a_1 \cdot z + a_2} \\ = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}$$

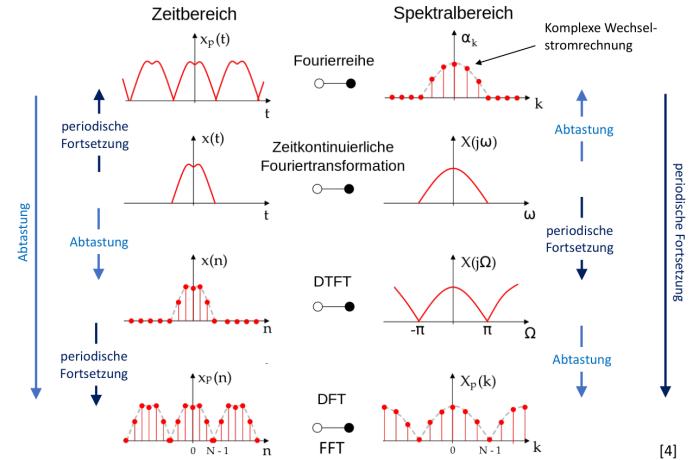
$$a_2 \cdot y(n-2) + a_1 \cdot y(n-1) + a_0 \cdot y(n) \\ = b_2 \cdot x(n-2) + b_1 \cdot x(n-1) + b_0 \cdot x(n) \\ \Rightarrow y(n) = \frac{1}{a_0} \cdot [b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + b_2 \cdot (n-2) \\ - a_1 \cdot y(n-1) - a_2 \cdot y(n-2)]$$

#### 9.3.5 Signalflussplan/-graph

$-a_k$ : Wert muss negativ sein, ansonsten VZ-Wechsel in der Ü-Fkt bzw. DGL.



### 9.4 Zeitdiskrete Signale im Spektrum



[4]

## 9.5 Zeitdiskrete Fouriertransformation

- zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT):

$$\underline{X}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\Omega n}$$

- Rücktransformation, Synthese:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Normierte Kreisfrequenz:

$$\Omega = \omega T = 2\pi f T = 2\pi \frac{f}{f_a}$$

Spektrum  $\underline{X}(\Omega)$  ist freq.-kontinuierlich und periodisch mit  $T = 2\pi$ .  $\rightarrow X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$

- Einheit des Spektrums/Signals:  $[\underline{X}(\omega)] = x(n)$

## 9.6 z-Transformation

Hintransformation, Analysegleichung:

$$\underline{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Existiert nur für rechtsseitige (kausale) Folgen/Signale!

- Kb darf keine Polstellen enthalten.
- Zeitbegrenzte (kausale) Signale: Kb außerhalb des Ursprungs.
- Unendlich lange (kausale) Signale: Kb außerhalb des Kreises durch betragsgrößte Polstelle.

### 9.6.1 Rücktransformation mit PBZ

Partialbruchzerlegung allgemein:

$$\underline{X}(z) = \frac{\underline{Z}(z)}{\underline{N}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m}{\sum_{n=0}^N a_n z^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (z - z_{om})}{\prod_{n=1}^N (z - z_{xn})}$$

**Einfache** Polstellen  $p_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{X}(z)}{z} &= \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - z_{x1}} + \frac{c_2}{z - z_{x2}} + \cdots + \frac{c_N}{z - z_{xN}} \\ \Rightarrow \underline{X}(z) &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \frac{z}{z - p_n} \quad c_0 = 0, \text{ wenn } b_0 = 0 \end{aligned}$$

Sonderfall: n-fache Polstellen bei  $z=0$ :

$$\underline{X}(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{a_N \cdot z^N} = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_N} \cdot z^{m-N}$$

**Mehrfaire** Polstellen  $p_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{X}(z)}{z} &= \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_n} + \frac{c_2}{(z - p_n)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(z - z_{xn})^k} \\ \Rightarrow \underline{X}(z) &= c_0 + c_1 \frac{z}{z - p_n} + c_2 \frac{z}{(z - p_n)^2} + \cdots + c_k \frac{z}{(z - p_n)^k} \end{aligned}$$

### 9.6.2 Eigenschaften der z-Transformation

	$\underline{x}[n]$	$\underline{X}(z)$
Linearität	$a\underline{x}_1[n] + b\underline{x}_2[n]$	$a\underline{X}_1(z) + b\underline{X}_2(z)$
Verschiebung	$x[n - k]$	$z^{-k} \underline{X}(z)$
Modulation	$a^n x[n]$	$\underline{X}\left(\frac{z}{a}\right)$
Multiplikation	$n \cdot x[n]$	$-z \frac{d}{dz} \underline{X}(z)$
Faltung	$x_1[n] * x_2[n]$	$\underline{X}_1(z) \cdot \underline{X}_2(z)$
Faltung im BB	$x_1[n] \cdot x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \int \underline{X}_1(\eta) \underline{X}_2\left(\frac{z}{\eta}\right) \frac{1}{\eta} d\eta$
Differenzbildung	$x[n] - x[n - 1]$	$\frac{z-1}{z} \underline{X}(z)$
Summenbildung	$\sum_{i=0}^n x[i]$	$\frac{z}{z-1} \underline{X}(z)$

### 9.6.3 Korrespondenzen der z-Transformation

Normierte Kreisfrequenz  $\Omega_1 = \omega T$

Nr.	$\underline{x}[n]$	$\underline{X}(z)$
1	$\delta[n]$	1
2	$\delta[n - i]$	$z^{-i}$
3	$\varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\varepsilon[n - i]$	$\frac{z}{z-1} \cdot z^{-i}$
5	$n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
6	$n^2 \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
7	$e^{-an} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$
8	$n e^{-an} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{ze^{-a}}{(z-e^{-a})^2}$
9	$a^n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-a}$
10	$a^{n-1} \cdot \varepsilon[n - 1]$	$\frac{1}{z-a}$
11	$n a^n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{za}{(z-a)^2}$
12	$n a^{n-1} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
13	$(n-1) a^{n-1} \cdot \varepsilon[n - 1]$	$\frac{1}{(z-a)^2}$
14	$n^2 a^n \varepsilon[n]$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
15	$\binom{n}{i} a^{n-i} \varepsilon[n - i]$	$\frac{z}{(z-a)^{i+1}}$
16	$\frac{(a^{n+1}-b^{n+1})}{a-b} \varepsilon[n] \quad a \neq b$	$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$
17	$\frac{1}{n} \varepsilon[n - 1] \cdot \varepsilon[n]$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$
18	$\sin(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z \sin(\Omega_1)}{z^2 - 2z \cos(\Omega_1) + 1}$
19	$\cos(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z[z - \cos(\Omega_1)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_1) + 1}$
20	$a^n \sin(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{za \sin(\Omega_1)}{z^2 - 2za \cos(\Omega_1) + a^2}$
21	$a^n \cos(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z[z - a \cos(\Omega_1)]}{z^2 - 2za \cos(\Omega_1) + a^2}$
22	$\text{rect}_N[n]$	$\frac{z-z^{-N}}{z-1}$

## 9.7 LTI-Systeme im Bildbereich

### 9.7.1 Impuls- und Sprungantwort im BB

$$h(n) \circ \bullet \quad \underline{H}(z) = \underline{G}(z) \cdot \frac{z-1}{z} \quad \underline{G}(z) = \underline{H}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

### 9.7.2 PN-Diagramm $\Rightarrow$ Frequenzgang

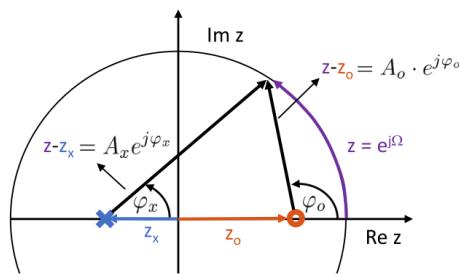
Wenn zeitdiskretes LTI-System stabil: Ersetze  $z = e^{j\Omega}$ :

$$\underline{H}(\Omega) = \underline{H}(z)|_{z=e^{j\Omega}} \quad \text{wenn alle Pole innerhalb des EK.}$$

**Ermittlung  $\underline{H}(\Omega)$ :** Am Einheitskreis des PN-Diagramms entlang gegen den UZS für  $\Omega > 0$  gehen.

$z_o$ : Nullstellen,  $z_x$ : Polstellen

$$\underline{H}(z) = \frac{(z - z_o)}{(z - z_x)} \quad \underline{H}(\Omega) = \frac{(e^{j\Omega} - z_o)}{(e^{j\Omega} - z_x)} = \frac{A_o e^{j\varphi_o}}{A_x e^{j\varphi_x}}$$



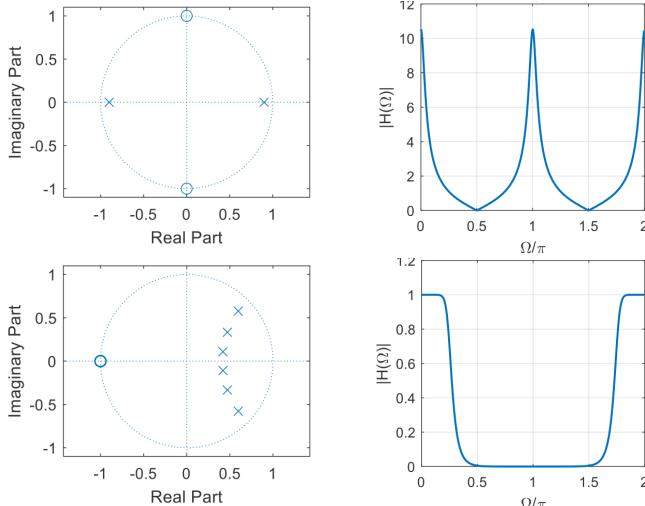
**Betragsfrequenzgang, Amplitudengang**  
Pole/Nullstellen  $\rightarrow$  Amplitude steigt/sinkt.

$$|\underline{H}(\Omega)| = H(\Omega) = \frac{A_o(\Omega)}{A_x(\Omega)} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

### Phasenfrequenzgang

$$\varphi_H(\Omega) = \varphi_o(\Omega) - \varphi_x(\Omega) = \varphi_Y(\Omega) - \varphi_X(\Omega)$$

Beispiele:



### 9.7.3 Systemantwort auf harm. Eingangssignale

LTI-System verändert nur Amplitude und Phase von  $x(t)$ .  
Normierte Frequenz  $\Omega_1 = \omega T$  bleibt gleich.

Gegeben:  $x(n) = \hat{x} \cdot \sin(\Omega_1 n + \varphi_x)$

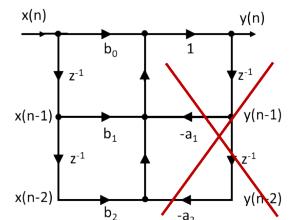
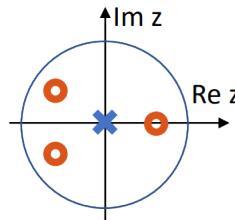
Gesucht:  $y(n) = \hat{y} \cdot \sin(\Omega_1 n + \varphi_y)$

$$\hat{y} = \hat{x} \cdot |\underline{H}(\Omega_1)| \quad \varphi_y = \varphi_x + \varphi_H(\Omega_1)$$

### 9.7.4 Klassifizierung von Systemen

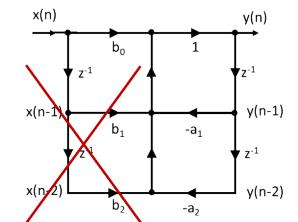
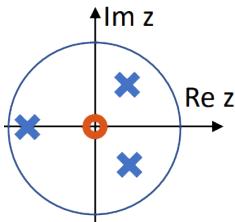
- Transversale Systeme, FIR, AR:

Finite Impulse Response (FIR), Auto-Regressive (AR)  
Keine Rückführung von Ausgang  $y(n)$  auf Eingang  $x(n)$ .  
 $\Rightarrow a_k = 0$  für  $k > 0$ .  
 $\Rightarrow$  Alle Pole liegen im Ursprung.



- Rekursive Systeme, IIR, MA:

Infinite Impulse Response (IIR), Moving-Average (AR)  
Aktueller Ausgangswert hängt nur vom aktuellen  
Eingangswert und früheren Ausgangswerten ab.  
 $\Rightarrow b_k = 0$  für  $k > 0$ .  
 $\Rightarrow$  Alle Nullstellen liegen im Ursprung.



- ARMA: Auto-Regressive Moving Average  
 $\rightarrow$  transversal-rekursives System.