



FORMELSAMMLUNG SIGNALE UND SYSTEME (SUS)

nach Vorlesungsunterlagen von
R.Huber, S.Hipp, A.Maier, R.Sattler, A.Sehr, T.Stücke

Originalversion:	Ayham Alhulaibi
Überarbeitet von:	Tony Pham
Letzte Änderung:	18. Juli 2024
Lizenz:	GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Einheiten	1
1.2 Quadratische Formeln	1
1.3 Logarithmische Maße/Pegel	1
1.3.1 Rechnen mit Logarithmen	1
1.4 Rechnen mit Wurzeln	1
1.5 Rechnen mit Potenzen	1
1.6 Trigonometrische Formeln	1
2 Signale im Zeitbereich	2
2.1 Signalcharakterisierung	2
2.2 Elementarsignale	2
3 Systeme	3
3.1 Eigenschaften	3
3.2 LTI-Systeme	3
3.2.1 Beschreibung	3
3.2.2 DGL	3
3.2.3 Impuls & Sprungantwort	3
3.2.4 Faltung	3
3.3 Frequenzgang	4
3.4 Übertragungsfunktion (Ü-Fkt.)	4
3.4.1 Gebrochen-rationale Ü-Fkt.	4
3.5 Pol-Nullstellen-Diagramm	4
3.5.1 Frequenzgang aus dem P/N-Diagramm	4
3.6 Bode-Diagramm	4
3.7 Zusammenschaltung LTI-Systeme	5
3.8 Elementare Übertragungsglieder	5
3.9 Übersicht Übertragungsglieder	9
4 Zweitore, Vierpole	10
4.1 Zweitorgleichungen	10
4.1.1 Parameterumrechnung	10
4.2 Betriebsarten	10
4.3 Bezugspfeilsystem	10
4.4 ZT-Eigenschaften	10
4.5 Matrizen elementarer Zweitore	11
4.6 Zusammenschalten von Zweitoren	12
4.6.1 Torbedingungen	12
4.6.2 Zweitor-Schaltungen	12
4.6.3 Idealer Trennverstärker/OP	12
4.6.4 OP-Verstärker	12
4.7 Ersatzschaltbilder	12
4.7.1 Ideale gesteuerte Quellen	12
4.7.2 Lineare gesteuerte Quellen	12
4.7.3 Ersatzschaltbilder (ESB)	12
4.8 Beschaltete Zweitore	13
4.8.1 Ein- und Ausgangsimpedanz an Seite 1/2	13
4.8.2 Ersatzquelle	13
4.8.3 Wellenwiderstand	13
4.8.4 Scheinleistungsanpassung	13
4.8.5 Kettenwiderstand	13
5 Fourierreihe periodischer Signale	14
5.1 Reelle Fourierreihe (FR)	14
5.2 Komplexe Fourierreihe	14
5.3 Symmetrieeigenschaften	14
5.3.1 Halbwellsymmetrie	14
5.4 Verschiebungssatz	14
5.5 FR und LTI-Systeme	15
5.6 FR-Tabelle - Bischoff	15
5.7 Kenngrößen periodischer Signale	18

5.7.1	Effektivwert, Klirrfaktor, Mischgrößen	18
5.7.2	Leistungen	18
6	Fourier-Transformation (FT)	19
6.1	Hin- und Rücktransformation	19
6.2	FT periodischer Signale	19
6.3	Zeit-Bandbreite-Gesetz	19
6.4	Eigenschaften der FT	20
6.5	Faltungsregeln	20
6.6	Transformationspaare der FT	20
6.7	Symmetrie im Spektrum	20
7	Laplace-Transformation (LPT)	21
7.1	LTI-Systeme im Bildbereich (BB)	21
7.2	Impuls- und Sprungantwort im BB	21
7.3	Zusammenhang LPT \leftrightarrow FT	21
7.4	P/N-Diagramm: Systemeigenschaften	21
7.5	Partialbruchzerlegung (PBZ)	21
7.6	Eigenschaften der LPT	21
7.7	Korrespondenzen der LPT	22
8	Schaltvorgänge	23
8.1	Berechnungsmethoden	23
8.1.1	Vereinfachte Methode	23
8.1.2	Laplace-Transformation der DGL	23
8.1.3	Leere Energiespeicher mit LPT & KWR	23
8.1.4	Geladene Energiespeicher mit LPT	23
8.2	Quellenumwandlung	23
8.3	Bauteilgleichungen	23
9	Zeitdiskrete Systeme	24
9.1	Elementare, zeitdiskrete Signale	24
9.2	A/D-Wandlung	25
9.3	Zeitdiskrete LTI-Systeme	25
9.3.1	Systemeigenschaften	25
9.3.2	Impuls- & Systemantwort, Faltung	25
9.3.3	Differenzengleichung \Leftrightarrow Ü-Fkt.	25
9.3.4	Signalflussplan/-graph	25
9.4	Zeitdiskrete Fouriertransformation	26
9.5	z-Transformation	26
9.5.1	Rücktransformation mit PBZ	26
9.5.2	Eigenschaften der z-Transformation	26
9.5.3	Korrespondenzen der z-Transformation	26
9.6	LTI-Systeme im Bildbereich	27
9.6.1	Impuls- und Sprungantwort im BB	27
9.6.2	PN-Diagramm \Rightarrow Frequenzgang	27
9.6.3	Systemantwort auf harm. Eingangssignale	27
9.6.4	Klassifizierung von Systemen	27

1 Grundlagen

1.1 Einheiten

Größe	Symbol	Einheit
Kapazität	C	$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$
Induktivität	L	$H = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$

1.2 Quadratische Formeln

$$x^2 + px + q = 0 \rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(-j\omega)^2 = -\omega^2$$

1.3 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße F_n : Spannung, Strom (jeweils Effektivwerte)
Leistungsgröße P_n : Energie, Leistung

- Dämpfungsmaß a in Dezibel [dB]

$$a [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2} \quad a [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{20\text{dB}}} \quad \frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{10\text{dB}}}$$

- absoluter Pegel L mit Bezugswerten P_0, F_0

$$L [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} \quad L [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{20\text{dB}}} \quad \frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{10\text{dB}}}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1\text{mW}$	$L_{\text{P/mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1\text{W}$	$L_{\text{P/W}}$

- relativer Pegel / Maß

Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert P_0

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \text{dB}$$

1.3.1 Rechnen mit Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis): $x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \quad \log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$$

1.4 Rechnen mit Wurzeln

a : Radikant n : Wurzelexponent

$$\text{Merke: } \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \quad x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

1.5 Rechnen mit Potenzen

a : Basis m, n : Exponent

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0) \quad a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1.6 Trigonometrische Formeln

siehe Papula Mathe-FS. S.94 & S.238 (komplexe Fkt.)

Komplex:

$$e^{j\pi k} = (-1)^k \quad \pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \quad -j = e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

$$e^{\pm j\omega_1 t} = \cos(\omega_1 t) \pm j \sin(\omega_1 t) \quad -1 = e^{\pm j\pi} \quad +1 = e^{j2\pi}$$

$$\cos(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2} \quad \sin(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j}$$

Reell:

$$\cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_1 t) \quad \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = +\cos(\omega_1 t)$$

$$\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = +\sin(\omega_1 t) \quad \sin\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\omega_1 t)$$

$$\cos(\omega_1 t \pm \pi) = -\cos(\omega_1 t) \quad \sin(\omega_1 t \pm \pi) = -\sin(\omega_1 t)$$

$$\cos(\omega_1 t) = -\cos(\pi + \omega_1 t) \quad \sin(\omega_1 t) = \sin(\pi - \omega_1 t)$$

$$\cos^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega_1 t)] \quad \sin^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega_1 t)]$$

$$\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t} = \text{si}(\omega_1 t) = \text{si}(-\omega_1 t)$$

Theoreme:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$$

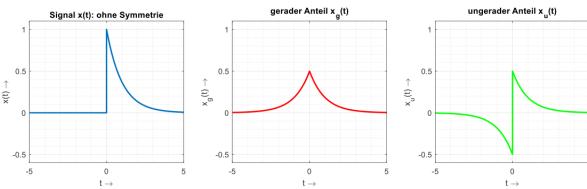
2 Signale im Zeitbereich

2.1 Signalcharakterisierung

- Kontinuierlich \leftrightarrow Diskret
- Deterministisch \leftrightarrow Stochastisch
Deterministisch: $x(t)$ mathematisch beschreibbar.
Stochastisch: Signal zufällig, kein $x(t)$.
- Periodisch \leftrightarrow Aperiodisch
Periodisch, wenn $x(t) = x(k \cdot t + T_p)$ mit $T_p = \frac{2\pi}{k}$
 T_p : Grundperiode/Periodendauer
- Gerade $x(-t) = x(t) \leftrightarrow$ Ungerade: $x(-t) = -x(t)$

Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil: $x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$
- ungerader Anteil: $x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$
- gemischtes Signal: $x(t) = x_G + x_U$



- Energie \leftrightarrow Leistung
(Gesamt-)Energie:

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Mittlere Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \quad (0 < P_x < \infty)$$

Ein Signal ist nie Energie- und Leistungssignal gleichzeitig!

- Korrelationsfunktion
Maß für die Ähnlichkeit zweier Energiesignale.

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

- Signaloperationen
Manipulation/Transformation mit folgenden Parametern:

$$f(t) = A \cdot f(\pm b \cdot t \mp t_0) \leftrightarrow A \cdot f\left(\frac{t \mp t_0}{b}\right)$$

- Zeitverschiebung $t - t_0$: nach **rechts**!
- Zeitskalierung:
Multiplikation mit $b > 1$: Stauchung
Multiplikation mit $0 < b < 1$: Dehnung
Division durch $b > 0$: Dehnung
- Zeitumkehr/-invertierung:
 $-1 \cdot b$: Spiegelung an y-Achse
- Signalinvertierung:
 $-A \cdot f(t)$: Spiegelung an x-Achse

Wichtig: Reihenfolge beachten!
Erst Verschieben, dann Skalieren/Invertieren!

2.2 Elementarsignale

- Sprung-, Heavyside-Fkt., Einheitssprung ε, σ

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(k \cdot t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac-Impuls δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Höhe = ∞ , Fläche = 1.
- Zusammenhang mit Sprungfunktion:
 $\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ $\boxed{\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)}$
- Ausblendeeigenschaft:

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion rect
 T : Breite

$$\hat{u} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \hat{u} & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$1 \cdot \text{rect}(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Si-Funktion

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

3 Systeme

3.1 Eigenschaften

1. Speicher

-frei: Vollständige Beschreibung durch xy-Kennlinie, Ausgang $y(t = t_0)$ nur von aktuellen Eingangswerten $x(t = t_0)$ abhängig \rightarrow gedächtnislos.

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

-behaftet: Ausgang inkl. vergangene Werte, keine vollständige Beschreibung durch xy-Kennlinie.

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) \cdot 2x(t - 1)$$

2. Kausalität

Ausgang $y(t = t_0)$ hängt nur von aktuellen + vorherigen Eingangswerten $x(t \leq t_0)$ ab. Keine Zukunftswerte!
Impulsantwort $h(t)$ beginnt ab $t = 0 : t < 0 \rightarrow h(t) = 0$.

$$\text{z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, nicht umgekehrt.
Kausale gebr. rationale Fkt.: Nennergrad \geq Zählergrad.

3. (BIBO-)Stabilität

BIBO: beschränkter Eingang \rightarrow beschränkter Ausgang.

System ist **stabil**, wenn

- $h(t)$ absolut integrierbar ist: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- P/N-Diagramm: alle Pole links der ω -Achse
- gebr. rationale Fkt.: Nennergrad \geq Zählergrad
- *zeitdiskret (ZD):* EK \in Kb
- *ZD:* alle Pole innerhalb des EK
- *ZD:* absolut summierbar: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

z.B.: $y(t) = 50 \cdot x^3(t)$, instabil: $y(t) = e^t \cdot x(t)$

4. Zeitinvarianz

Eingang zeitverschoben \rightarrow Ausgang zeitverschoben.

$$x(t - t_0) = y(t - t_0)$$

$$\text{z.B. } y(t) = t \cdot \sin(t)$$

5. Linearität

Lineares System: Superpositionsprinzip gilt \rightarrow siehe Ausblendeeigenschaft, Zerlegung in gerades/ungerades Signal.

3.2 LTI-Systeme

3.2.1 Beschreibung

LTI-Systeme: Linear, Zeitinvariant (time-invariant).

Operatoren: $+, -, \frac{d}{dt}, \int, t - t_0$ (Verzögerung)

Beschreibung des Ein- und Ausgangsverhalten im

- Zeitbereich $x(t)$: DGL, Signalfußplan, Impulsantwort
- Frequenz- $\underline{X}(\omega)$ bzw. Bildbereich $\underline{X}(s)$: Übertragungs-Fkt., Frequenzgang, Bode- und P/N-Diagramm.

3.2.2 DGL

- Bestimmung Eingangs-/Ausgangsgrößen der Schaltung.
- Gleichgewicht: Maschengleichung für u , Knotengleichungen für i aufstellen.
- DGL enthält nur Konstanten (C, L), u bzw. i in der Grundform und beliebiger Ableitung (bzw. deren Integrale). Integrale durch Ableiten eliminieren.
- u, i durch Systemgrößen mithilfe von Bauteilgleichungen ausdrücken, Schaltung beachten!
- Bauteil-/Zweipolgleichungen:

$$u_R = R \cdot i \quad i_c = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

- DGL 2. Ordnung allgemein:

$$\underbrace{a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a}_{\text{Ausgangsgrößen}} = \underbrace{b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e}_{\text{Eingangsgrößen}}$$

3.2.3 Impuls & Sprungantwort

Impulsanregung	Impulsantwort
$x(t) = \delta(t)$	$y(t) = h(t) = S\{\delta(t)\}$
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$ $\delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$ $= x(t) * h(t)$ $h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$
Sprunganregung	Sprungantwort
$x(t) = \varepsilon(t)$	$y(t) = g(t) = S\{\varepsilon(t)\}$
$\varepsilon(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$	$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$

3.2.4 Faltung

Aus $h(t)$ eines LTI-Systems und Eingang $x(t)$ lässt sich Ausgang $y(t)$ durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = [x(t) * h(t)]$$

- $\delta(t)$: neutrales Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Faltung mit verschobenen Dirac-Impuls
 \rightarrow Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Rechenregeln

- $a * b = b * a$ kommutativ
- $a * [b * c] = [a * b] * c$
- $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$
- $a * [b + c] = a * b + a * c$

3.3 Frequenzgang

- **Frequenzgang**

$\underline{H}(w)$ existiert nur, wenn ω -Achse \in Kb.
im PN-Diagramm.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)} = |\underline{H}(\omega)| \cdot e^{j\varphi_H(\omega)}$$

- **Amplitudengang**, Betragsfrequenzgang

LTI-System ändert Eingangssignal um Faktor $A(\omega)$.

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- **Phasengang**, Phasenfrequenzgang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

3.4 Übertragungsfunktion (Ü-Fkt.)

- **Eigenfunktion**

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : \text{ Eigenfunktion} \\ \lambda : \text{ Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

Jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = e^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S :

$$y(t) = S\{e^{st}\} = \lambda \cdot e^{st}$$

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau$$

- **Erweiterung der KWR**

KWR: komplexe Wechselstromrechnung.

Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein Sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega + \sigma$, wenn $\sigma = 0$.

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$

- **komplexe Übertragungsfunktion**

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger Ausgang}}{\text{komplexer Zeiger Eingang}}$$

Übertragungsfunktion $H(s)$ mit komplexer Frequenz $s = \sigma + j\omega \rightarrow$ Ersetze $j\omega$ durch s .

3.4.1 Gebrochen-rationale Ü-Fkt.

Grad N des Nennerpolynoms: Ordnung des LTI-Systems = Anzahl unabhäng. Energiespeicher (L, C).

Kausales System, wenn Nennergrad $N \geq M$ Zählergrad.

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n}$$

Beispiel: DGL 2.Ordnung im Zeitbereich:

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_0x(t)$$

→ Ü-Funktion im Bildbereich (System 2.Ordnung):

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

3.5 Pol-Nullstellen-Diagramm

Grafische Darstellung der s-Ebene: P/N-Diagramm.

K : Maßstabs-/Verstärkungsfaktor.

$$\underline{H}(s) = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{o=1}^M (s - z_o)}{\prod_{x=1}^N (s - z_x)} \text{ mit } K = \frac{b_M}{a_N}$$

- \Im -Achse $= \omega$, \Re -Achse $= \sigma$
- Alle Pole links der ω -Achse: **stabiles + kausales** System.
- Pole & Nullstellen sind entweder reell (nur auf σ -Achse) oder **paarweise** komplex-konjugiert.

3.5.1 Frequenzgang aus dem P/N-Diagramm

Näherungsweise Bestimmung:

- An der ω -Achse von 0 nach oben entlang gehen.
- Polstelle: **Maxima**/Erhöhung im Amplitudengang.
 - PST nah an s-Ebene: hohe Totzeit, dominant.
 - stabiler Pol: links der ω -Achse.
 - Verhalten: ideales **I-Glied**: $+20dB/\text{Dek.}, +90^\circ$.
- Nullstelle: **Minima**/Absenkung im Amplitudengang.
 - Nullstelle (NST) auf ω -Achse: NST im Amplitudengang.
 - Verhalten: ideales **D-Glied**: $-20dB/\text{Dek.}, -90^\circ$.

Genaue Bestimmung:

- An der ω -Achse von 0 nach oben entlang gehen.
- Jede Pos. auf ω -Achse: Längen und Winkel der kompl. Zeiger $c_{o,i}$ und $c_{z_p,i}$ messen mit Geodreieck.

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\prod_{o=1}^M \text{alle Längen } |c_{o,i}|}{\prod_{p=1}^N \text{alle Längen } |c_{p,i}|}$$

$$\varphi_H(\omega) = (\text{Summe } \angle c_{o,i} \omega) - (\text{Summe } \angle c_{p,i} \omega)$$

Minimalphasiges System:

- Alle NST links der ω und σ -Achse.
- Sehr geringe Phasenänderung über Frequenz.
- Geringe Signalverzögerung.

3.6 Bode-Diagramm

- **Kettenschaltung**

Addition der Einzel-Bode-Diagramme beim Amplituden- und Phasengang.

- **Inverses System**

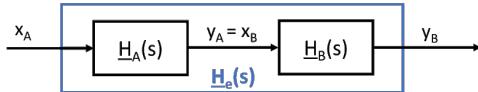
Durch **Spiegelung** an der X-Achse.

3.7 Zusammenschaltung LTI-Systeme

- **Kettenschaltung**

Produkt der Ü-Fkt. der Einzelsysteme.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) = \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)$$



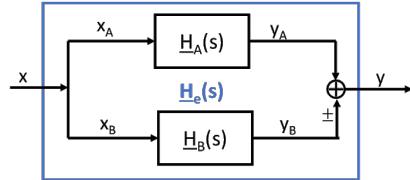
$$\underline{Y}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{Y}_A = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A$$

- Voraussetzung: Rückwirkungsfreiheit (mit Trennverstärker) zwischen $\underline{H}_A(s)$ und $\underline{H}_B(s)$.
- **Bodediagramm:** Addition der einzelnen Glieder beim Amplituden-/Phasengang.

- **Parallelschaltung**

Summe der einzelnen Ü-Glieder.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) + \underline{H}_A(s)$$

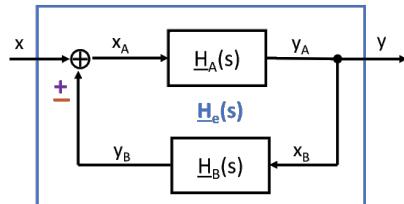


$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_A \pm \underline{Y}_B \\ &= \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A \pm \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B \\ &= (\underline{H}_A(s) + \underline{H}_B(s)) \cdot \underline{X} \end{aligned}$$

- **Rückkopplung**

Mitkopplung mit $-$: y_A vergrößert x_A (BSB: $+$)
Gegenkopplung mit $+$: y_A verkleinert x_A (BSB: $-$)

$$\underline{H}_e(s) = \frac{\underline{H}_A(s)}{1 \mp \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}$$



Beispiel: nicht-invertierender Verstärker, Kettenschaltung zweier PT_2 -Glieder ohne Trennverstärker.

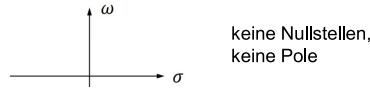
3.8 Elementare Übertragungsglieder

Elementare LTI-Systeme: P-Glied (Proportionalglied)

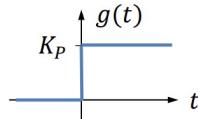
- Differentialgleichung $y = K_P \cdot x$

- Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = K_P$

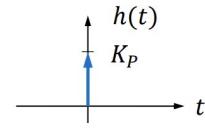
- PN-Diagramm



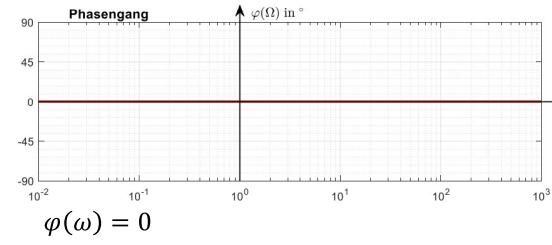
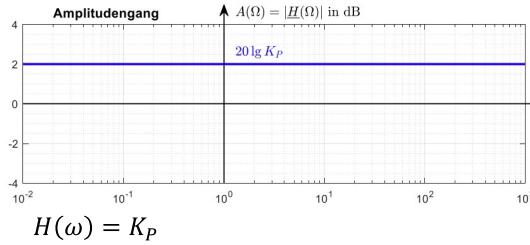
- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$



$$h(t) = K_P \cdot \delta(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

ω_B : beliebig

- Eigenschaften: kausal, stabil, speicherfrei

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

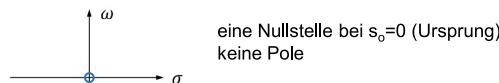
19

Elementare LTI-Systeme: D-Glied (Differenzierer)

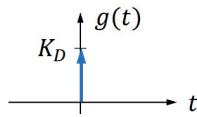
- Differentialgleichung $y = K_D \cdot \dot{x}$

- Übertragungsfunktion $\underline{H}(s) = K_D \cdot s$

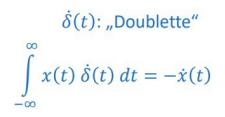
- PN-Diagramm



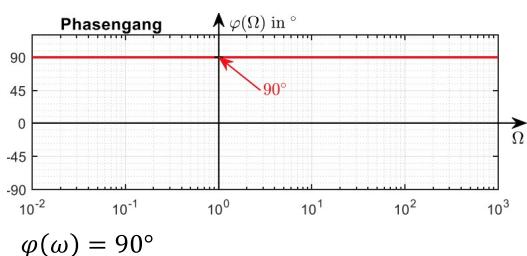
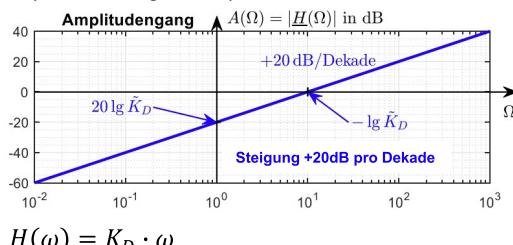
- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$



$$h(t) = K_D \cdot \dot{\delta}(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

ω_B : beliebig

$$\tilde{K}_D = \omega_B K_D$$

- Eigenschaften: akausal, instabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

20

Elementare LTI-Systeme: I-Glied (Integrator)

- Differentialgleichung

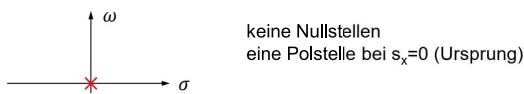
$$\dot{y} = K_I \cdot x$$

$$y = K_I \cdot \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

- Übertragungsfunktion $H(s)$

$$H(s) = \frac{K_I}{s}$$

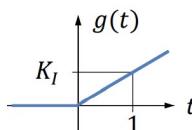
- PN-Diagramm



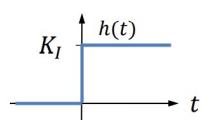
keine Nullstellen
eine Polstelle bei $s_x=0$ (Ursprung)

- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$

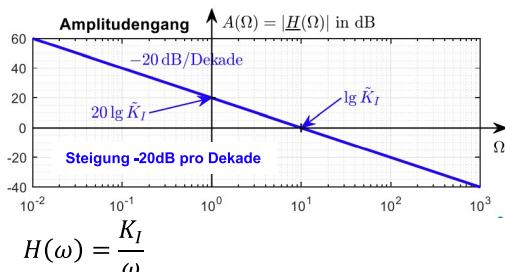
$$g(t) = K_I \cdot t \cdot \varepsilon(t)$$



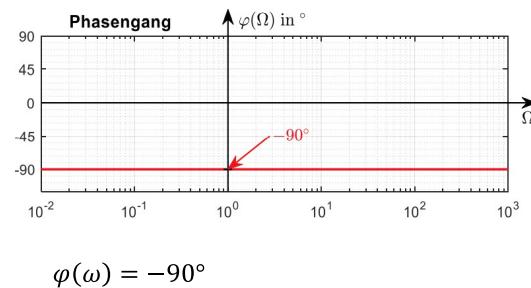
$$h(t) = K_I \cdot \varepsilon(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\omega) = \frac{K_I}{\omega}$$



$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_B}$$

ω_B : beliebig

$$\tilde{K}_I = \frac{K_I}{\omega_B}$$

- Eigenschaften:

kausal, instabil, speicherbehaftet

Elementare LTI-Systeme: PT₁-Glied (Tiefpass 1. Ordnung)

- Differentialgleichung

$$T \cdot \dot{y} + y = K_P \cdot x$$

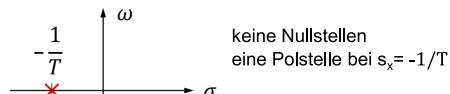
T : Zeitkonstante

- Übertragungsfunktion $H(s)$

$$H(s) = \frac{K_P}{T \cdot s + 1} = \frac{K_P \cdot \omega_E}{s + \omega_E}$$

$\omega_E = \frac{1}{T}$: Eckfrequenz

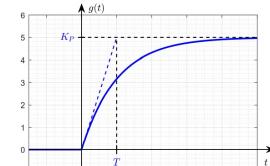
- PN-Diagramm



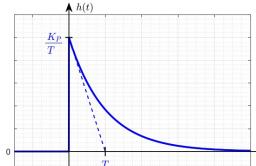
keine Nullstellen
eine Polstelle bei $s_x=-1/T$

- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$

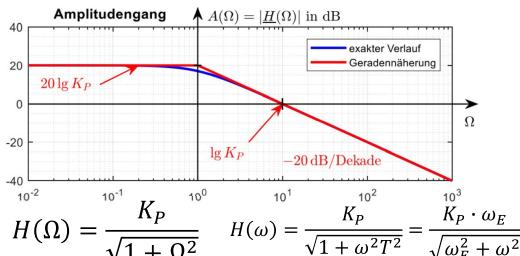
$$g(t) = K_P \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \varepsilon(t)$$



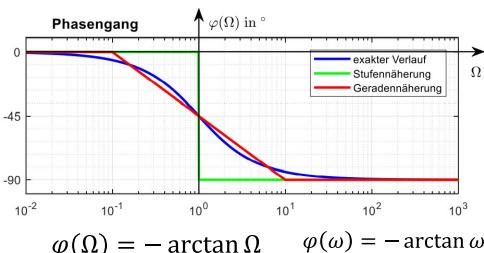
$$h(t) = \frac{K_P}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \varepsilon(t)$$



- Frequenzgang (Bode-Diagramm)



$$H(\Omega) = \frac{K_P}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \quad H(\omega) = \frac{K_P}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = \frac{K_P \cdot \omega_E}{\sqrt{\omega_E^2 + \omega^2}}$$



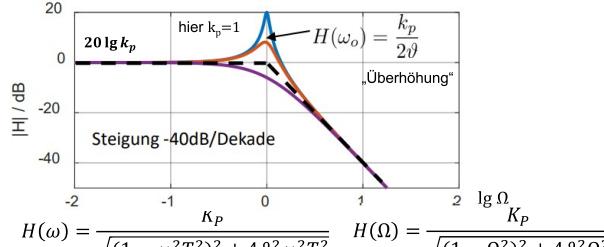
$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_E}$$

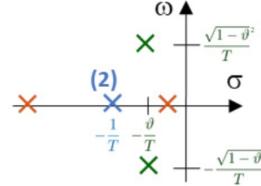
üblich:
 $\omega_B = \omega_E$

- Eigenschaften:

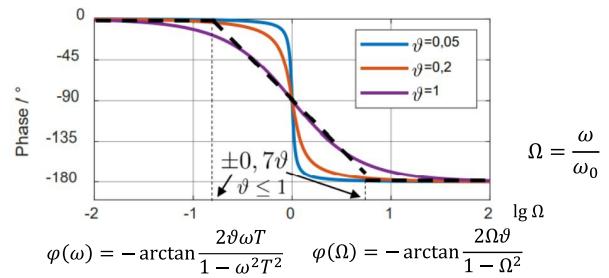
kausal, stabil, speicherbehaftet

Elementare LTI-Systeme: PT₂-Glied (Tiefpass 2. Ordnung)

- Differentialgleichung $T^2 \cdot \ddot{y} + 2\vartheta T \cdot \dot{y} + y = K_P \cdot x$
- Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{K_P}{T^2 s^2 + 2\vartheta T s + 1} = \frac{K_P \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\vartheta\omega_0 s + \omega_0^2}$
- PN-Diagramm **Pole:** $s_{x1,2} = \frac{1}{T}(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$
 $0 < \vartheta < 1$ Schwingung: konjugiert komplexes Polpaar
 $H(s) = \frac{K_P}{T^2} \frac{1}{(s - s_{x1})(s - s_{x2})}$
 $\vartheta = 1$ aperiod. Grenzfall: doppelter reeller Pol bei $-\omega_0$
 $H(s) = K_P \frac{1}{(1+sT)^2}$
 $\vartheta > 1$ aperiod. Dämpfung: zwei versch. reelle Pole $s_{x1,2} = \omega_0(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$
 $H(s) = K_P \frac{1}{1+sT_1} \frac{1}{1+sT_2}$ mit: $T_{1,2} = -\frac{1}{s_{x1,2}} = \frac{T}{\vartheta \mp \sqrt{\vartheta^2 - 1}} = T(\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$
- Frequenzgang (Bode-Diagramm) $H(\omega) = \frac{K_P}{1 - \omega^2 T^2 + j\omega 2\vartheta T}$

 $H(\omega) = \frac{K_P}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\vartheta^2 \omega^2 T^2}}$ $H(\Omega) = \frac{K_P}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\vartheta^2 \Omega^2}}$



zu Schwingfall:
 $s_{x1,2} = -\vartheta\omega_0 \pm j\omega_d$
mit Eigen-, Ausschwingfrequenz ω_d
 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$



- Eigenschaften: kausal, stabil, speicherbehaftet

Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

23

Elementare LTI-Systeme: PT₂-Glied (Tiefpass 2. Ordnung)

- Sprungantwort $g(t)$ und Impulsantwort $h(t)$

$0 < \vartheta < 1$ Schwingung

$$g(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \cdot e^{-\vartheta\omega_0 t} \cdot \cos(\omega_d t - \Theta) \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$$

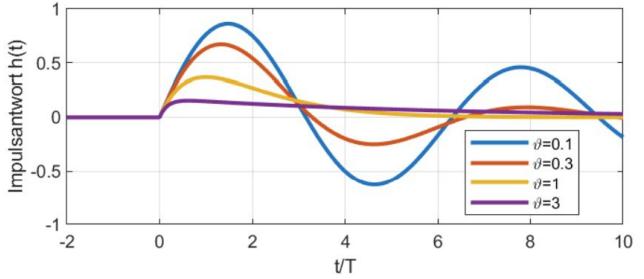
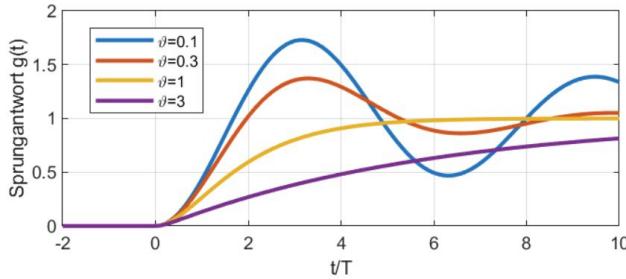
mit $\Theta = \arcsin(\vartheta)$

$\vartheta = 1$ aperiod. Grenzfall

$$g(t) = \left(1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$$

$\vartheta > 1$ aperiod. Dämpfung

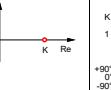
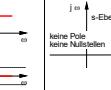
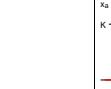
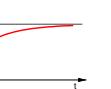
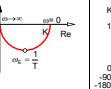
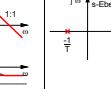
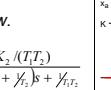
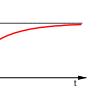
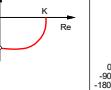
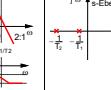
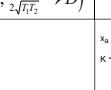
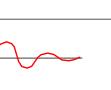
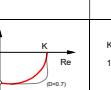
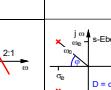
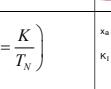
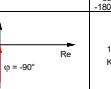
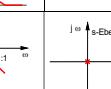
$$g(t) = \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} \right) K_P \cdot \varepsilon(t)$$

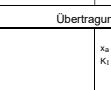
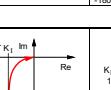
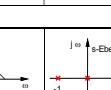
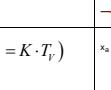
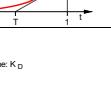
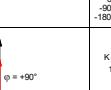
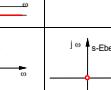
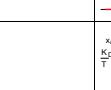
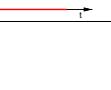
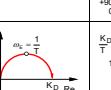
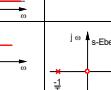
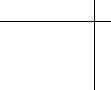
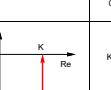
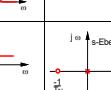
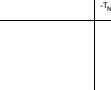
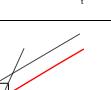
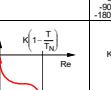
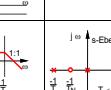
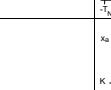
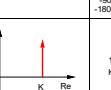
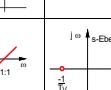


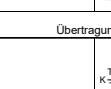
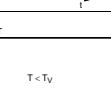
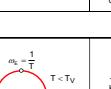
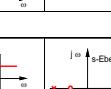
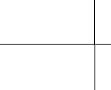
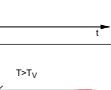
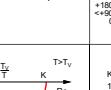
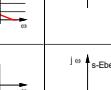
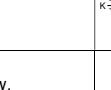
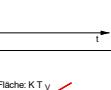
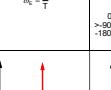
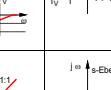
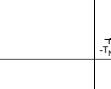
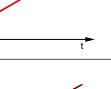
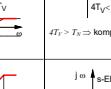
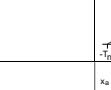
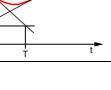
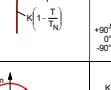
Quellen: R. Sattler, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2021/22 sowie A. Seher, Vorlesung „Signale und Systeme“ an der OTH im WS2020/21
Robert Huber, SUS, OTH Regensburg

24

3.9 Übersicht Übertragungsglieder

System	Differentialgleichung $x_a = x_a(t), x_e = x_e(t)$	Übertragungsfunktion $F(s)$	Übergangs Funktion (Sprungantwort)	Ortskurve $F(j\omega)$	Bode-Diagramm	x : Pole o : Nullstellen
P	$x_a = K x_e$ konstant	K				
PT ₁	$T \ddot{x}_a + x_a = K x_e$ -20db/Dek.	$\frac{K}{1+Ts}$				
PT ₂ (D ≥ 1)	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0 \dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K \omega_0^2 x_e$ $\frac{K \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \text{ bzw.}$ $\frac{K_1 K_2}{1+T_1 s + 1+T_2 s} = \frac{K_1 K_2}{s^2 + (\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2})s + \frac{1}{T_1 T_2}}$ -40db/Dek.	$\frac{K \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$ $\left K_1 K_2 \rightarrow K; \frac{1}{T_1 T_2} \rightarrow D \right.$				
PT ₂ (0 ≤ D < 1)	$\ddot{x}_a + 2D\omega_0 \dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = K \omega_0^2 x_e$	$\frac{K \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$				
I	$x_a = K_I \int x_e dt$	$\frac{K_I}{s} = K \cdot \frac{1}{T_N \cdot s} \quad \left(K_I = \frac{K}{T_N} \right)$				

Systemtechnik Übertragungsglieder						
IT ₁	$T \ddot{x}_a + x_a = K_I \int x_e dt$	$\frac{K_I}{s(1+Ts)}$				
D	$x_a = K_D \dot{x}_e$ +20db/Dek.	$K_D s = K \cdot T_V \cdot s \quad (K_D = K \cdot T_V)$				
DT ₁	$T \ddot{x}_a + x_a = K_D \dot{x}_e$	$\frac{K_D s}{1+Ts}$				
PI	$x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt \right) \quad K_I = \frac{K}{T_N}$	$K \left(1 + \frac{1}{T_N s} \right)$				
PIT ₁	$T \ddot{x}_a + x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt \right)$	$K \frac{1 + \frac{1}{T_N s}}{1+Ts}$				
PD	$x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$ $K_D = K T_V$	$K(1+T_V s)$				

Systemtechnik Übertragungsglieder						
PDT ₁ Lead-Glied (T < T _V)	$T \ddot{x}_a + x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$	$K \frac{1+T_V s}{1+Ts}$				
PDT ₁ Lag-Glied (T > T _V)	$T \ddot{x}_a + x_a = K(x_e + T_V \dot{x}_e)$	$K \frac{1+T_V s}{1+Ts}$				
PID	$x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt + T_V \dot{x}_e \right)$ $K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$	$K \left(1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s \right)$ bzw. $K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$				
PIDT ₁	$T \ddot{x}_a + x_a = K \left(x_e + \frac{1}{T_N} \int x_e dt + T_V \dot{x}_e \right)$	$K \frac{1 + \frac{1}{T_N s} + T_V s}{1+Ts}$				
T _t	$x_a = K \cdot e^{-T_t s}$	$K \cdot e^{-T_t s}$				

Anm.: Strecken „ohne Ausgleich“ besitzen integrierendes Verhalten. Strecken „mit Ausgleich“ streben bei konstantem Eingangssignal einem konstanten Ausgangswert zu.

4 Zweitore, Vierpole

4.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix $\underline{\mathbf{Y}}$:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \right.$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix $\underline{\mathbf{H}}$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \right.$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix $\underline{\mathbf{C}}$:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{C}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{C}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \right.$$

- Kettenform/ Kettenmatrix $\underline{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot -\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot -\underline{I}_2 \end{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix} \right.$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix $\underline{\mathbf{B}}$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \cdot -\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \cdot -\underline{I}_1 \end{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix} \right.$$

4.1.1 Parameterumrechnung

Z	Y	H	A
Z	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{H}} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{22} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\det \underline{\mathbf{A}}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ \frac{\underline{A}_{21}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\underline{A}_{21}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ \frac{1}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\underline{A}_{22}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ \frac{\underline{A}_{21}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\underline{A}_{21}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{22}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{-\det \underline{\mathbf{A}}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ \frac{\underline{A}_{12}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\underline{A}_{12}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ -1 & \frac{\underline{A}_{11}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ \frac{\underline{A}_{12}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\underline{A}_{12}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{12}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\det \underline{\mathbf{A}}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ \frac{\underline{A}_{22}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\underline{A}_{22}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ -1 & \frac{\underline{A}_{21}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \\ \frac{\underline{A}_{22}}{\det \underline{\mathbf{H}}} & \frac{\underline{A}_{22}}{\det \underline{\mathbf{H}}} \end{bmatrix}$
A	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{\mathbf{Z}} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \\ \frac{1}{\det \underline{\mathbf{Z}}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{\mathbf{Z}}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \\ -\det \underline{\mathbf{Y}} & -\underline{Y}_{11} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\det \underline{\mathbf{H}} & -\underline{H}_{11} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \\ -\underline{H}_{22} & -1 \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{\mathbf{Z}} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \\ \frac{1}{\det \underline{\mathbf{Z}}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{\mathbf{Z}}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \\ -\det \underline{\mathbf{Y}} & -\underline{Y}_{11} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$

4.2 Betriebsarten

4.3 Bezugspfeilsystem

4.4 ZT-Eigenschaften

	Umkehrbarkeit	Symmetrie	Rückwirkungsfreiheit
Z	$Z_{12} = Z_{21}$	$Z_{11} = Z_{22}$	$Z_{12} = 0$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{11} = Y_{22}$	$Y_{12} = 0$
A	$\det[A] = 1$	$A_{11} = A_{22}$	$\det[A] = 0$
H	$H_{12} = -H_{21}$	$\det[H] = 1$	$H_{12} = 0$

- Umkehrbares (reziprokes) ZT: nur 3 Parameter.
- (Widerstands-)symmetrisches ZT: Eingangswiderstände in beiden Betriebsarten gleich.
- Umkehrbares und symmetrisches ZT = längssymmetrisch: nur 2 Parameter.
- Passives ZT aus R,L,C,M-Bauteilen ist immer umkehrbar.
- Rückwirkungsfreies (unilaterales) ZT: nur 3 Parameter, Energieübertragung nur von Eingang auf Ausgang.

4.5 Matrizen elementarer Zweitore

	[Z]	[Y]	[H]	[C]	[A]
	---	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{bmatrix}$	---	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\underline{Z}} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & -1 \\ 1 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & -\frac{1}{\underline{Z}_1} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_1} & \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & -\frac{\underline{Z}_2}{K} \\ -\frac{\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ -\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & -\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Y_2 + Y_1}{2} & \frac{Y_2 - Y_1}{2} \\ \frac{Y_2 - Y_1}{2} & \frac{Y_2 + Y_1}{2} \end{bmatrix}$	---	---	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2 \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$
	---	---	$\begin{bmatrix} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \\ \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix}$
	---	---	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

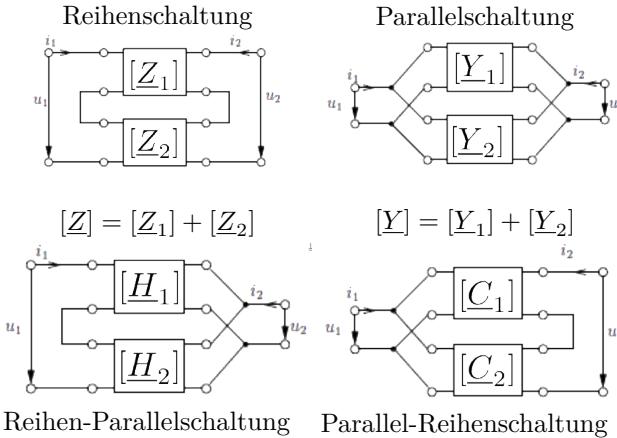
4.6 Zusammenschalten von Zweitoren

4.6.1 Torbedingungen

Erfüllung durch: ideale Übertrager, Kurzschlussschleife, Parallelschaltung längs-symmetrischer Zweitore.

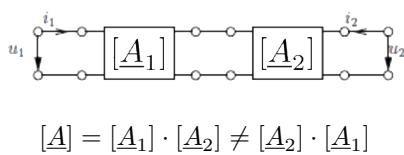
4.6.2 Zweitor-Schaltungen

Torbedingung muss für ZT-Schaltungen erfüllt sein!



- **Kettenschaltung:**

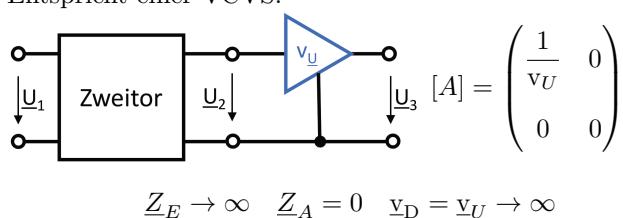
Torbedingung wird immer eingehalten!



Reihenfolge beachten! **Nicht** kommutativ!

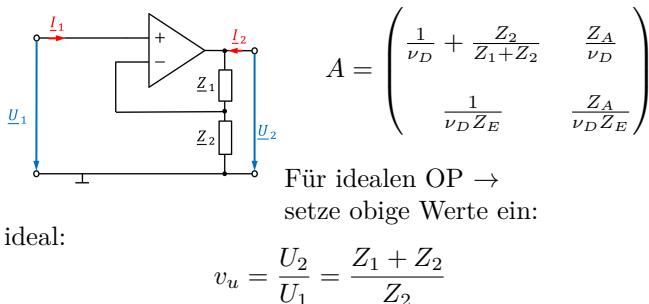
4.6.3 Idealer Trennverstärker/OP

Idealer Trennverstärker v_U als idealer OP.
 Zweck: Rückwirkungsfreiheit der Kettenschaltung.
 Entspricht einer VCVS.



4.6.4 OP-Verstärker

- nicht-inventierender OP



- inventierender OP

Allgemein, für idealen OP → setze obige Werte ein:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_D} + \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} & \frac{Z_A}{v_D} \\ \frac{1}{v_D Z_E} & \frac{Z_A}{v_D Z_E} \end{pmatrix}$$

ideal:

$$v_u = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

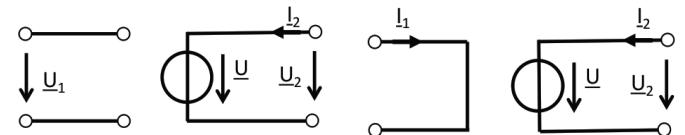
4.7 Ersatzschaltbilder

4.7.1 Ideale gesteuerte Quellen

Ideale gesteuerte Quellen **nicht** ineinander umwandelbar!
 Andere Matrizen sind nicht definiert.

VCVS: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

CCVS: Stromgesteuerte Spannungsquelle

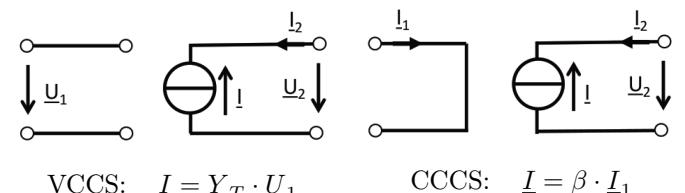


VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

VCCS: Spannungsgesteuerte Stromquelle

CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1$

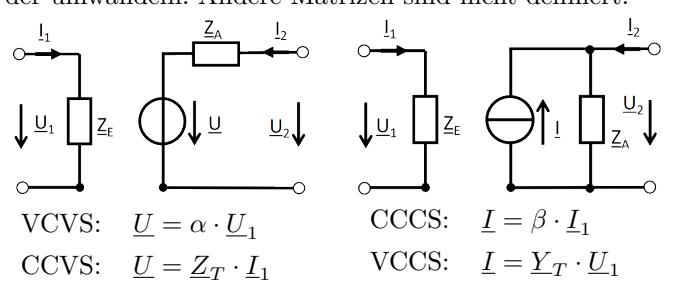
CCCS: Stromgesteuerte Stromquelle



VCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1$

4.7.2 Lineare gesteuerte Quellen

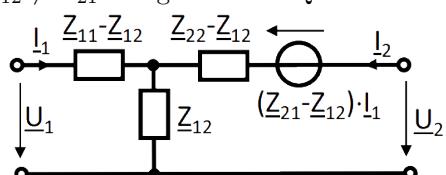
Alle Darstellungen sind äquivalent und lassen sich ineinander umwandeln! Andere Matrizen sind nicht definiert.



4.7.3 Ersatzschaltbilder (ESB)

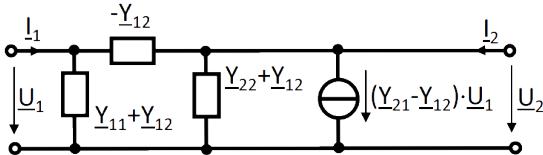
- **T-ESB** bei gegebener $[Z]$ -Matrix:

$Z_{12} \neq Z_{21}$ mit gesteuerter Quelle.

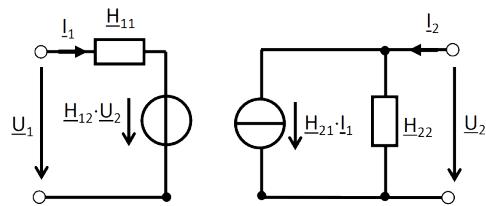


- **Π-ESB** bei gegebener $[Y]$ -Matrix:

$Y_{12} \neq Y_{21}$ mit gesteuerter Quelle.



- Hybrid-ESB bei gegebener $[H]$ -Matrix

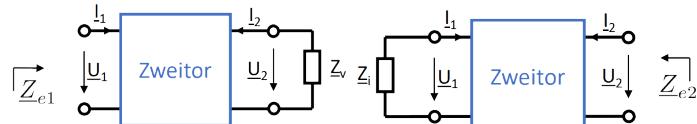


4.8 Beschaltete Zweitore

4.8.1 Ein- und Ausgangsimpedanz an Seite 1/2

Z_V : Last an Seite 2/ZT-Ausgang \rightarrow Eingangsimpedanz, Betrieb von Seite 1

Z_i : Last an Seite 1/ZT-Eingang \rightarrow Ausgangsimpedanz, Betrieb von Seite 2



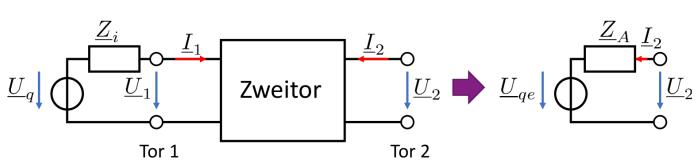
	Last an Tor 2	Last an Tor 1
Z	$Z_{e1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_V}$	$Z_{e2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}$
Y	$Y_{e1} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_V}$	$Y_{e2} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}$
A	$Z_{e1} = \frac{A_{11}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{22}}$	$Z_{e2} = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{Z_{21}Z_i + A_{11}}$
H	$Z_{e1} = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_V}$	$Y_{e2} = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_i}$
C	$Y_{e1} = C_{11} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{22} + Y_V}$	$Z_{e2} = C_{22} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{11} + Y_i}$

4.8.2 Ersatzquelle

Berechnung Innenwiderstand eines Ersatz-Zweipols:

Quellen U_q kurzschließen. I_q unterbrechen.

Gilt nicht bei gesteuerten Quellen.

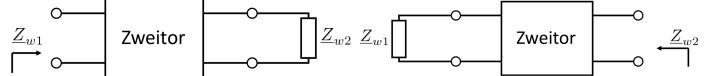


	Quelle an Tor 1	Quelle an Tor 2
A	$U_{qe} = \frac{1}{A_{21}Z_i + A_{11}}U_q$	$U_{qe} = \frac{\det(A)}{A_{21}Z_i + A_{22}}U_q$
Z	$U_{qe} = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}U_q$	$U_{qe} = \frac{Z_{12}}{Z_{22} + Z_i}U_q$
Y	$I_{qe} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}I_q$	$I_{qe} = -\frac{Y_{12}}{Y_{22} + Y_i}I_q$
H	$I_{qe} = -\frac{H_{21}}{H_{11} + Z_i}I_q$	$U_{qe} = \frac{H_{12}}{H_{22} + Y_i}I_q$

	Quelle an Tor 1	Quelle an Tor 2
A	$Z_A = \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{11}}$	$Z_A = \frac{A_{11}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{22}}$
Z	$Z_A = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i}$	$Z_A = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_i}$
Y	$Y_A = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i}$	$Y_A = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_i}$
H	$Y_A = H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Z_i}$	$Z_A = H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_i}$

siehe Ausgangsimpedanz $Z_{e2} = Z_A$ (Quelle an Tor 1).

4.8.3 Wellenwiderstand



$$Z_{w1} = \frac{A_{11}Z_{w2} + A_{12}}{A_{21}Z_{w2} + A_{22}}$$

$$Z_{w2} = \frac{A_{22}Z_{w1} + A_{12}}{A_{21}Z_{w1} + A_{11}}$$

symmetrische ZT: $Z_{w1} = Z_{w2}$

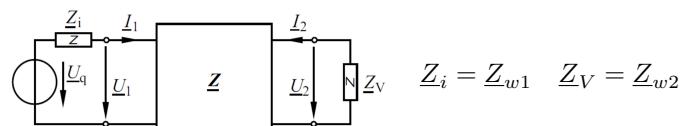
	Z_{w1}	Z_{w2}
Z	$\sqrt{\frac{Z_{11} \det Z}{Z_{22}}}$	$\sqrt{\frac{Z_{22} \det Z}{Z_{11}}}$
Y	$\sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \det Y}}$	$\sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \det Y}}$
A	$\sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$	$\sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}$
H	$\sqrt{\frac{H_{11} \det H}{H_{22}}}$	$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \det H}}$
C	$\sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11} \det C}}$	$\sqrt{\frac{C_{11} \det C}{C_{22}}}$

Messtechnische Ermittlung:

Z_{01} : Leerlauf an Seite 1 Z_{k1} : Kursschluss an Seite 1

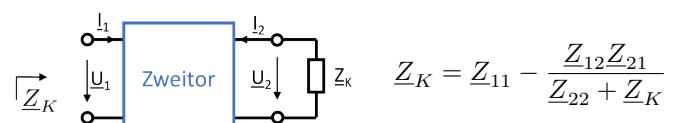
$$Z_{w1} = \sqrt{Z_{k1} \cdot Z_{01}} = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$$

4.8.4 Scheinleistungsanpassung



Beschaltet man jedes Tor mit seinem Wellenwiderstand, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

4.8.5 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand dem Kettenwiderstand Z_K an. Lösung der obigen Gleichung:

$$Z_K = \frac{1}{2}(Z_{11} - Z_{22} \pm \sqrt{(Z_{11} - Z_{22})^2 + 4 \cdot \det Z})$$

Symmetrische ZT: Kettenwiderstand = Wellenwiderstand.

5 Fourierreihe periodischer Signale

5.1 Reelle Fourierreihe (FR)

a_k, b_k : FR-Koeffizienten.

$k = 0$: Gleichanteil, Mittelwert.

$k = 1$: Grundschwungung, 1.Harmonische.

$k = n$: n .Harmonische, $(n - 1)$.Oberschwingung.

- Synthese, trigonometrische Form:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

- Synthese, harmonische Form:

A_k : Gewichte, Amplituden

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \alpha_k) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos \left(k\omega_1 t - \underbrace{(-\alpha_k + \frac{\pi}{2})}_{\beta_k} \right) \\ &= \boxed{A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)} \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin \left(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

- Analyse, trigonometrische Form:

$$\begin{aligned} \text{Gleichanteil: } \frac{a_0}{2} &= A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} x(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- Umwandlung Harmonisch \Leftrightarrow Trigonometrisch:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2} = \underline{c}_0 \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k &= A_k \sin(\alpha_k) = A_k \cos(\beta_k) = A_k \cos(\varphi_k) \\ b_k &= A_k \cos(\alpha_k) = A_k \sin(\beta_k) = -A_k \sin(\varphi_k) \\ \tan(\alpha_k) &= \frac{a_k}{b_k} \quad \tan(\beta_k) = \frac{b_k}{a_k} \quad \tan(\varphi_k) = \frac{-b_k}{a_k} \end{aligned}$$

Vereinfachung durch Nutzung der Symmetrieeigenschaften \rightarrow siehe Kap. XX.

5.2 Komplexe Fourierreihe

- Synthese: $\omega \rightarrow t$ \underline{c}_k : Gewichte

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{jk\omega_1 t} \text{ mit } \underline{c}_k = |\underline{c}_k| \cdot e^{j\varphi_k}$$

- Analyse: $t \rightarrow \omega$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt = \boxed{\frac{1}{T} \cdot \underline{X}(k\omega_1)}$$

- Umwandlung Komplex \Leftrightarrow Reell.

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= A_0 = \underline{c}_0 \quad A_k = 2|\underline{c}_k| \quad \beta_k = -\varphi_k \\ a_k &= 2 \operatorname{Re}\{\underline{c}_k\} = [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \\ b_k &= -2 \operatorname{Im}\{\underline{c}_k\} = j[\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \\ \underline{c}_k &= \frac{1}{2} (a_k - jb_k) = \frac{A_k}{2} e^{-j\beta_k} = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} \\ \underline{c}_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + jb_k) = \frac{A_k}{2} e^{j\beta_k} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} \end{aligned}$$

5.3 Symmetrieeigenschaften

- Gerade** Funktionen - symmetrisch zur y-Achse
Alle \sin -Anteile verschwinden.

$$\begin{aligned} b_k &= 0 \quad A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt \\ a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- Ungerade** Funktionen - symmetrisch zum Ursprung
Gleichanteil und alle \cos -Anteile verschwinden.

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad A_0 = 0 \\ b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

5.3.1 Halbwellsymmetrie

FR mit HWS enthält nur ungerade Terme: $\rightarrow k = 1, 3, 5, \dots, \infty$

- Allgemein: $y(t) = -y(t \pm T/2)$

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt \\ b_{2k-1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- gerade Halbwellsymmetrie:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad b_k = 0, \quad a_{2k} = 0 \\ a_{2k-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

- ungerade Halbwellsymmetrie:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad a_k = 0, \quad b_{2k} = 0 \\ b_{2k-1} &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

5.4 Verschiebungssatz

Zeitverschiebung \Leftrightarrow **Phasendrehung** im Freq.-bereich um den Winkel: $-k\omega_1 t_v$

$$\begin{aligned} f_v(t) &= f(t - t_v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k(t-t_v)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{c}_k \cdot e^{-j\omega_1 kt_v}}_{\underline{c}_k} \cdot e^{j\omega_1 kt} \end{aligned}$$

$t_v < 0$: Phasenwinkel des Spektrums werden mit zunehmender Frequenz größer.

5.5 FR und LTI-Systeme

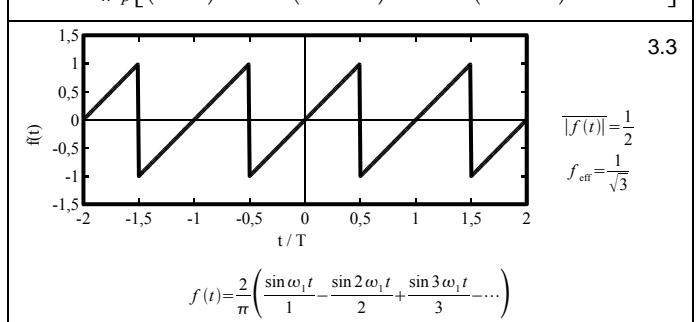
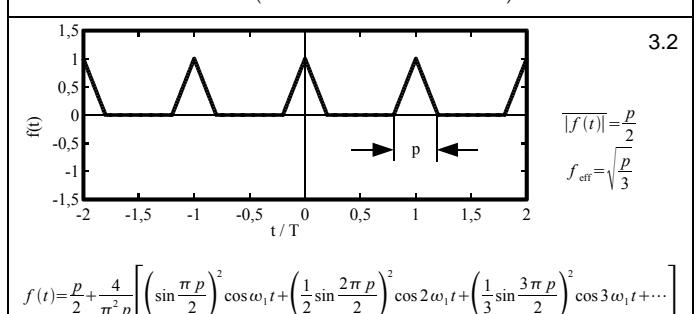
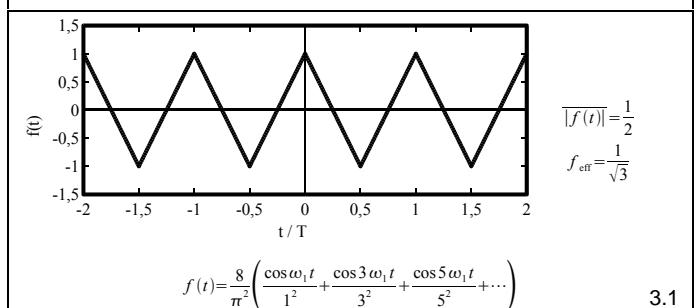
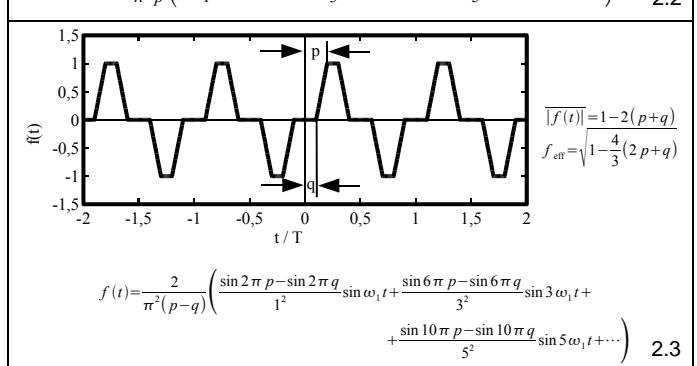
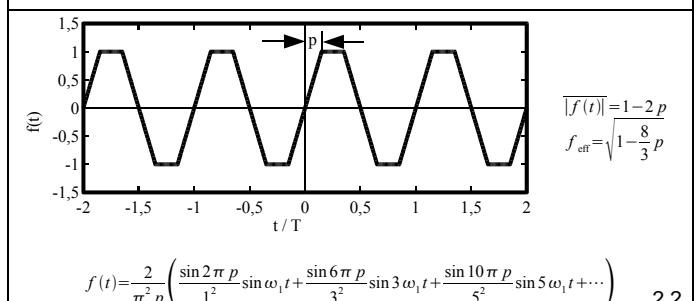
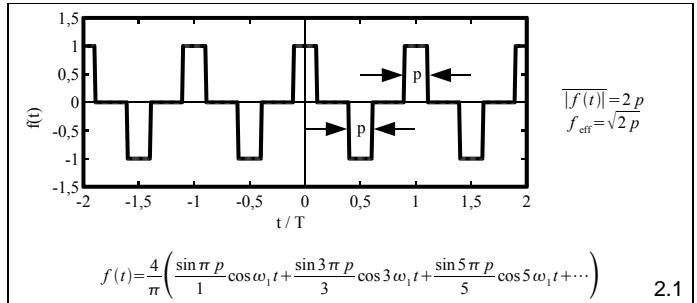
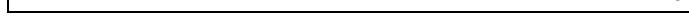
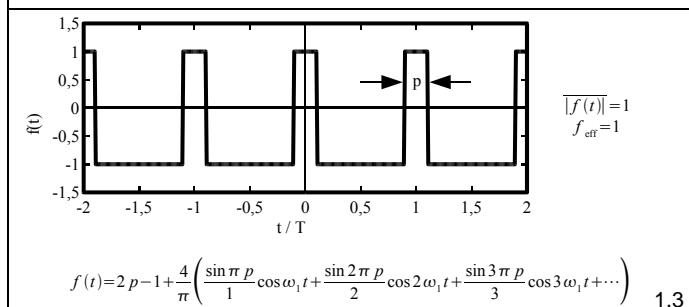
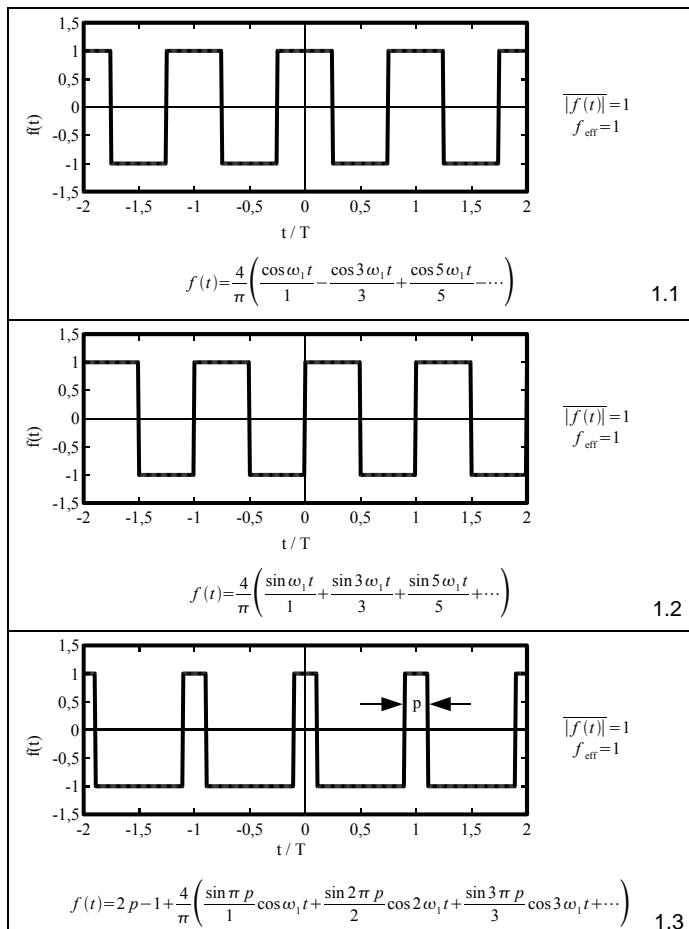
LTI-Systeme verändern Betrag und Phase aller harmonischen Komponenten eines Eingangssignals = lineare Verzerrung.
Sie fügen keine neuen Frequenzen hinzu.

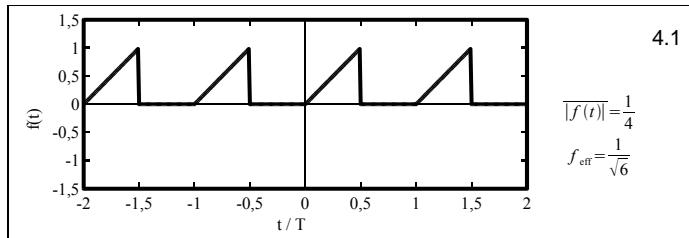
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(k\omega_1) \cdot c_{xk}}_{c_{yk}} \cdot e^{j\omega_1 kt}$$

5.6 FR-Tabelle - Bischoff

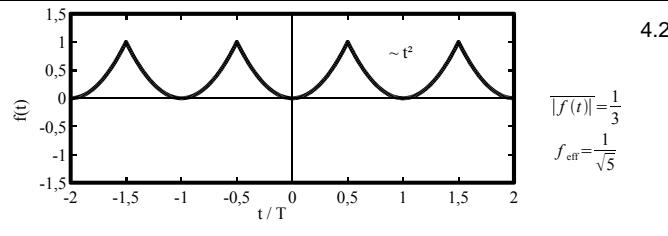
- normierte Pulsbreite $p = \frac{|\Delta t|}{T} = \frac{\text{Länge Zeit}}{\text{Periodendauer}}$
- $\overline{|f(t)|}$: Mittelwert Wechselanteil/ Gleichrichtwert.
- f_{eff} : Gesamt-Effektivwert des Signals.
- FR-Reihen sind auf Amplitude \hat{f} normiert!
→ mit \hat{f} multiplizieren!

Fourierreihen

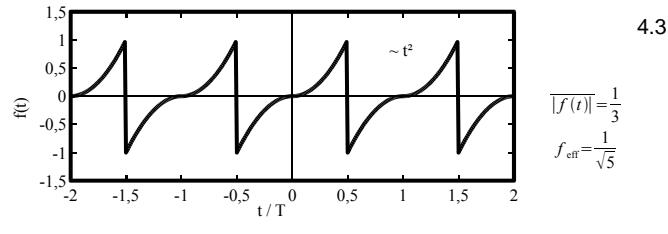




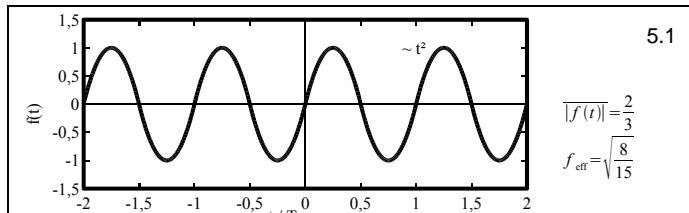
$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\cos \omega_1 t + \cos 3\omega_1 t + \cos 5\omega_1 t + \dots}{1^2 + 3^2 + 5^2} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \omega_1 t - \sin 2\omega_1 t + \sin 3\omega_1 t - \dots}{1 - 2^2} \right)$$



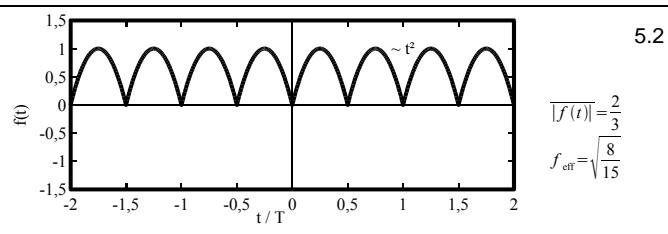
$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \omega_1 t - \cos 2\omega_1 t + \cos 3\omega_1 t - \dots}{1^2 + 2^2 + 3^2} \right)$$



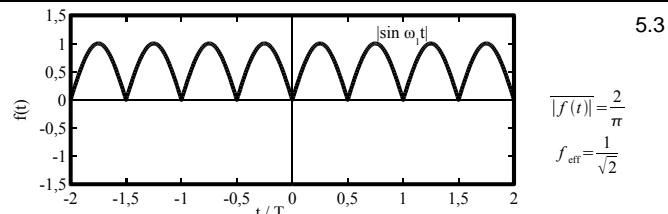
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \omega_1 t - \sin 2\omega_1 t + \sin 3\omega_1 t - \dots}{1 - 2^2} \right) - \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{\sin \omega_1 t + \sin 3\omega_1 t + \sin 5\omega_1 t + \dots}{1^3 + 3^3 + 5^3} \right)$$



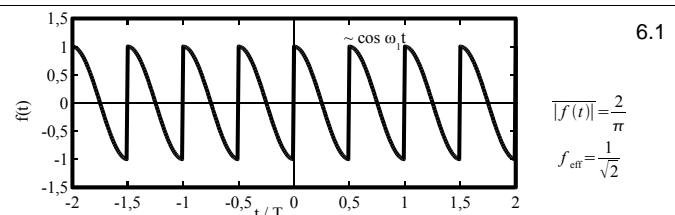
$$f(t) = \frac{32}{\pi^3} \left(\frac{\sin \omega_1 t + \sin 3\omega_1 t + \sin 5\omega_1 t + \dots}{1^3 + 3^3 + 5^3} \right)$$



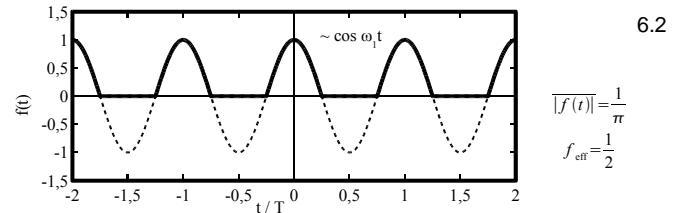
$$f(t) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\omega_1 t + \cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t + \dots}{1^2 + 2^2 + 3^2} \right)$$



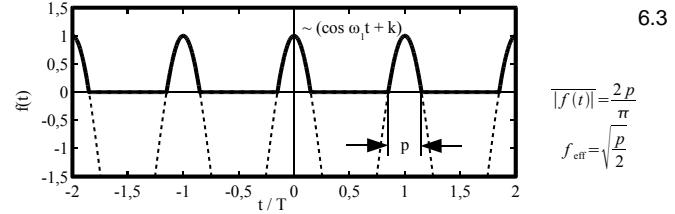
$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2\omega_1 t + \cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t + \dots}{1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7} \right)$$



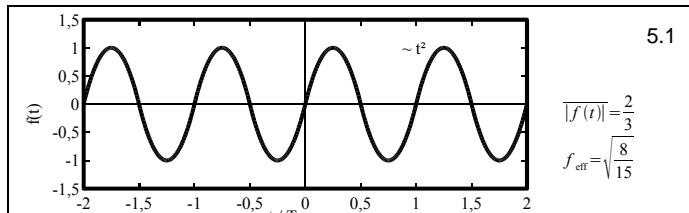
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2 \sin 2\omega_1 t + 4 \sin 4\omega_1 t + 6 \sin 6\omega_1 t + \dots}{1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7} \right)$$



$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega_1 t + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2\omega_1 t - \cos 4\omega_1 t + \cos 6\omega_1 t - \dots}{1 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7} \right)$$

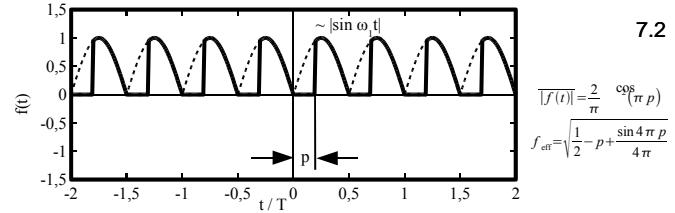


$$f(t) = \frac{2p}{\pi} + \frac{4p}{\pi} \left(\frac{\cos \pi p \cos \omega_1 t + \cos 2\pi p \cos 2\omega_1 t + \cos 3\pi p \cos 3\omega_1 t + \dots}{1 - (2p)^2} \right)$$



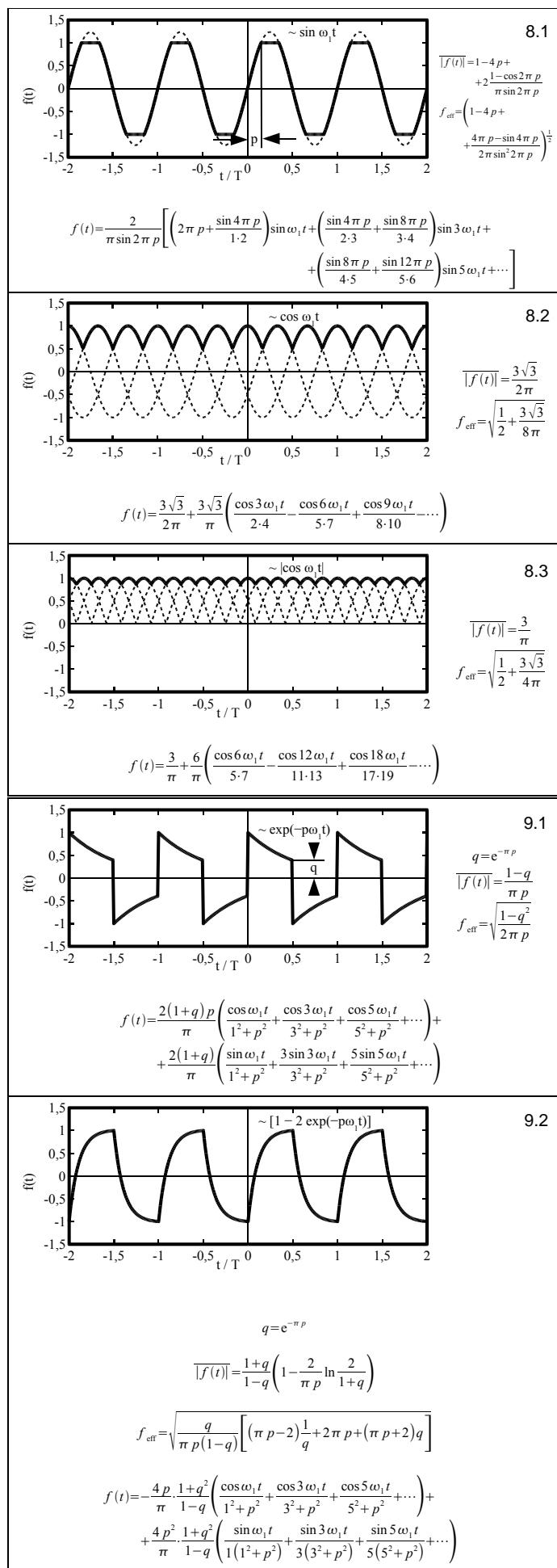
$$\begin{aligned} f(t) = & -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin^2(2\pi p) \cos \omega_1 t + 3 \sin(2\pi p) \sin(6\pi p) \cos(2\pi p) \cos(6\pi p) - 1}{2 \cdot 4} \right) \cos 3\omega_1 t + \\ & + \frac{5 \sin(2\pi p) \sin(10\pi p) \cos(2\pi p) \cos(10\pi p) - 1}{4 \cdot 6} \cos 5\omega_1 t + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(4\pi p) - 4\pi p + 2\pi}{4} \sin \omega_1 t + \frac{3 \sin(2\pi p) \cos(6\pi p) - \cos(2\pi p) \sin(6\pi p)}{2 \cdot 4} \sin 3\omega_1 t + \right. \\ & \left. + \frac{5 \sin(2\pi p) \cos(10\pi p) - \cos(2\pi p) \sin(10\pi p)}{4 \cdot 6} \sin 5\omega_1 t + \dots \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{2}{\pi} \cos^2(\pi p) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{2 \sin(2\pi p) \sin(4\pi p) + \cos(2\pi p) \cos(4\pi p) + 1}{1 \cdot 3} \right) \cos 2\omega_1 t + \\ & + \frac{4 \sin(2\pi p) \sin(8\pi p) + \cos(2\pi p) \cos(8\pi p) + 1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega_1 t + \\ & + \frac{6 \sin(2\pi p) \sin(12\pi p) + \cos(2\pi p) \cos(12\pi p) + 1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega_1 t + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2}{\pi} \left(\frac{2 \sin(2\pi p) \cos(4\pi p) - \cos(2\pi p) \sin(4\pi p)}{1 \cdot 3} \right) \sin 2\omega_1 t + \\ & + \frac{4 \sin(2\pi p) \cos(8\pi p) - \cos(2\pi p) \sin(8\pi p)}{3 \cdot 5} \sin 4\omega_1 t + \\ & + \frac{6 \sin(2\pi p) \cos(12\pi p) - \cos(2\pi p) \sin(12\pi p)}{5 \cdot 7} \sin 6\omega_1 t + \dots \end{aligned}$$



5.7 Kenngrößen periodischer Signale

5.7.1 Effektivwert, Klirrfaktor, Mischgrößen

- Effektivwert:** Wert einer Gleichgröße, die im Mittel die gleiche elek. Leistung an einem R umsetzt.

$$U_{\text{eff}} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u(t)^2 dt} = \sqrt{U_{\sim}^2 + U_0^2}$$

$$\text{Sinusförmige Signale: } U_k = \frac{\hat{u}_k}{\sqrt{2}}$$

U_{\sim} : Wechselanteil U_0 : Gleichanteil, Mittelwert

- Effektivwert mit **Fourier-Reihe**:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_{k,\text{eff}}^2} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}$$

- Klirrfaktor**, Oberschwingungsgehalt:

Maß für Abweichung eines Signals $x(t)$ von der sin-Form.
Angabe von k in %. Kein Gleichanteil $U_0 = 0$.

$$\begin{aligned} k &= \frac{\text{Effektivwert Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert Wechselanteil}} \leq 1 \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} = \frac{\sqrt{U_{\sim}^2 - U_1^2}}{U_{\sim}} \\ &= \sqrt{\frac{0,5 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \hat{u}_k^2}{0,5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k^2}} \quad \text{mit FR-Amplituden } \hat{u}_k \\ &= \sqrt{1 - \frac{U_1^2}{U_{\sim}^2}} = \sqrt{1 - g^2} \quad \text{mit } g = \frac{U_1}{U_{\sim}} \\ k_m &= \frac{U_m}{U_{\sim}} \quad k_1 = g = \sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

Für Wechselgrößen lässt sich k einfach mit **Grundschwingungsgehalt** g ermitteln (*gilt immer*).

- Mischgrößen:**

- Schwingungsgehalt:

$$s = \frac{U_{\sim}}{U} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Effektivwert der Mischgröße}}$$

- Welligkeit:

$$w = \frac{U_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

- Riffelfaktor:

$$R = \frac{\hat{U}_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{Scheitelwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

5.7.2 Leistungen

- Wirkleistung:**

$$\begin{aligned} P = \bar{p}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* \leftrightarrow i_k^* = i_{-k} \\ &= P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k,\text{eff}} \cdot I_{k,\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k}) \\ &= U_0 \cdot I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{u}_k \cdot \hat{i}_k}{2} \cdot \cos(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k}) \\ &= \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad \text{rein am ohmschen Widerstand!} \end{aligned}$$

- Blindleistung**

Nicht-sinusförmige Größen: Q ist vorzeichenlos! $[Q] = \text{var}$

$$|Q| = \sqrt{Q_v^2 + D^2} = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Verschiebungs-/Feldblindleistung Q_v

$$Q_v = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot I_k \cdot \sin(\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k})$$

Gleiche Frequenz, aber Phasenverschiebung zwischen U und I .

Verzerrungsblindleistung D

auch Oberwellen-, Deformationsblindleistung.

$$D^2 = U_1^2 \cdot (I^2 - I_1^2) = S^2(1 - g^2)$$

aus Mischtermen als Produkte von U und I unterschiedlicher Frequenzen.

- Scheinleistung**

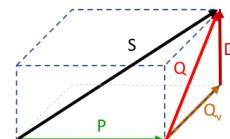
Gilt auch für Mischgrößen, da Effektivwerte Gleichanteile enthalten können. Achtung: U, I : **Gesamtsignal!**

$$\begin{aligned} S &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + Q_v^2 + D^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} I_k^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} I_k^2\right)} \\ &\neq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} U_k^2 \cdot I_k^2} \end{aligned}$$

Nicht-linearer Verbraucher an einer sinusförmigen Spannung U_1 :

$$\begin{aligned} S^2 &= (UI)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = \\ &= U_1^2 I_0^2 + U_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1 \end{aligned}$$

Räumliche Darstellung der Leistungen:



- Leistungsfaktor:**

$$\text{Allgemein: } \lambda = \frac{|P|}{S} = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{S^2}} \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\text{Sinusförmig: } \lambda = \frac{P}{S} = \cos(\varphi) = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

6 Fourier-Transformation (FT)

6.1 Hin- und Rücktransformation

Übertragung (nicht-)periodischer Signale in Spektrum/BB.

Bedingung: $x(t)$ absolut integrierbar! $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$

$$x(t) \circ \bullet \underline{X}(\omega)$$

Hintransformation - Analysegleichung:

$$\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Komplexwertige Fouriertransformierte:

$$\underline{X}(\omega) = |\underline{X}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi}$$

Einheit: Amplitudendichte $[x(t)] \cdot s$

6.2 FT periodischer Signale

- Übergang FR \rightarrow FT:

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_k \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{U}(\omega)}{t_a} \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \frac{2\pi}{t_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \omega_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega - k\omega_a) \end{aligned}$$

- Übergang FT \rightarrow FR, Komplexe Fourierkoeffizienten, periodische Fortsetzung:

$$\boxed{\underline{c}_k = \frac{1}{T} \cdot \underline{X}(k\omega_1)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega_1 t} dt$$

$T = t_p$: Periodizität, Periodendauer.

\underline{c}_k : FR-Koeff. d. periodischen Fortsetzung des endlichen Signals $x(t)$ mit Länge T .

- FR-Koeffizienten \underline{c}_k sind **Abtastwerte** von $\underline{X}(\omega)$ bei den Frequenzen im Linienabstand:

$$\omega = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T} = k \frac{2\pi}{t_p}$$

6.3 Zeit-Bandbreite-Gesetz

6.4 Eigenschaften der FT

	$x(t)$	$\underline{X}(\omega)$
Linearität	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\underline{X}_1(\omega) + B\underline{X}_2(\omega)$
Verschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \underline{X}(\omega)$
Modulation	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\underline{X}(\omega - \omega_0)$
Differentiation im Frequenzbereich	$t \cdot x(t)$	$j \frac{d\underline{X}(\omega)}{d\omega}$
Differentiation im Zeitbereich	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega \underline{X}(\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} \underline{X}(\omega) + \pi \underline{X}(0) \delta(\omega)$
Zeitskalierung	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \underline{X}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Faltung	$x_1(t) * x_2(t)$	$\underline{X}_1(\omega) \cdot \underline{X}_2(\omega)$
Multiplikation	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$
Dualität	$x_1(t)$	$x_2(\omega)$
	$x_2(t)$	$2\pi x_1(-\omega)$
Symmetrien	$x(-t)$	$\frac{X}{X^*}(-\omega)$
	$x^*(t)$	$\underline{X}^*(\omega)$
	$x^*(-t)$	
Parsevalsches Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) ^2 d\omega$

6.6 Transformationspaare der FT

	$x(t)$	$\underline{X}(\omega)$
	$\delta(t)$	1
	1	$2\pi \cdot \delta(\omega)$
	$\dot{x}(t)$	$j\omega$
	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$	$\omega_1 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) \quad \text{mit}$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
	$\varepsilon(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
	$\text{rect}\left(\frac{t}{2aT}\right)$	$2aT \cdot \text{si}(\omega aT)$
	$\text{si}(at)$	$\frac{\pi}{ a } \text{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
	$\frac{ a }{\pi} \text{si}(at)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
	$\frac{1}{t}$	$-j\pi \text{sign}(\omega)$
	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
	$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
	$e^{-a^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

6.7 Symmetrie im Spektrum

Realteil & Betrag: **gerade**
Imaginärteil & Phase: **ungerade**.

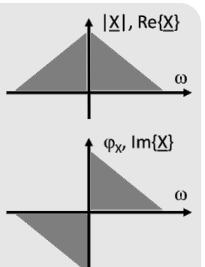
$$\underline{X}(-\omega) = \underline{X}^*(\omega)$$

$x(t)$ reell & gerade \leftrightarrow
 $\underline{X}(\omega)$ reell & gerade

$$\underline{X}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

$x(t)$ reell & ungerade \leftrightarrow $\underline{X}(\omega)$ imaginär & ungerade

$$\underline{X}(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$



6.5 Faltungsregeln

- $a * b = b * a$ kommutativ
- $a * [b * c] = [a * b] * c$
- $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$
- $a * [b + c] = a * b + a * c$
- $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ Ausblendeigenschaft

7 Laplace-Transformation (LPT)

Hintransformation - Analyse:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \underline{X}(s) = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st} dt$$

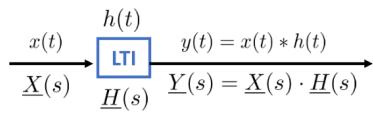
Rücktransformation - Synthese:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\underline{X}(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{X}(s) \cdot e^{-st} ds$$

LPT mit Partialbruchzerlegung (PBZ) + Tabelle.

7.1 LTI-Systeme im Bildbereich (BB)

$x(t) = h(t) = 0$ für $t < 0$: Rechtsseitige (**kausale**) Signale!



LTI-Systeme im Bildbereich sind **immer** kausal!

7.2 Impuls- und Sprungantwort im BB

Impulsantwort:

$$h(t) \circ \bullet H(s)$$

Sprungantwort:

$$g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \quad \circ \bullet \quad G(s) = \frac{H(s)}{s}$$

7.3 Zusammenhang LPT \leftrightarrow FT

- Konvergenzbereich (Kb): Halbebene rechts vom am weitesten rechts liegenden Pol.
- Wenn ω -Achse \in Kb: FT von $\underline{X}(s)$ existiert:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega}$$

7.4 P/N-Diagramm: Systemeigenschaften

- **Stabilität:** Alle Pole von $\underline{H}(s)$ liegen links der ω -Achse. Bei Ü-Fkt.: Nennergrad \geq Zählergrad.
- Minimalphasiges System: Alle Nullstellen liegen links der ω -Achse.

7.5 Partialbruchzerlegung (PBZ)

Für die inverse bzw. Rücktransformation in Zeitbereich. Beispiele siehe Papula FS. S.157f.

- Einfache Polstellen:

$$\underline{X}(s) = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(s - p_n)}$$

- Doppelte/k-fache Polstellen:

$$\begin{aligned} \underline{X}(s) &= \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{Z}(s)}{(s - p_n)^k} \\ &= \frac{A_1}{s - p_n} + \frac{A_2}{(s - p_n)^2} + \dots + \frac{A_k}{(s - p_n)^k} \end{aligned}$$

- Komplexe Polstellen:

$$\begin{aligned} \underline{X}(s) &= \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)} = \frac{\underline{Z}(s)}{(s - p_1)(s - p_1^*)} \\ &= \frac{B s + C}{(s - p_1)(s - p_1^*)} \\ &= \frac{B s + C}{(s - jp_1)(s + jp_1)} \end{aligned}$$

Beachte: Wenn Zählergrad $>$ Nennergrad, muss vor der PBZ eine **Polynomdivision** durchgeführt werden!

7.6 Eigenschaften der LPT

	$\mathbf{x(t)}$	$\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{s})$
Linearität	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\underline{X}_1(s) + b\underline{X}_2(s)$
Skalierung t	$x(at)$	$\frac{1}{a}\underline{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Skalierung s	$\frac{1}{a}x\left(\frac{t}{a}\right)$	$\underline{X}(as)$
Verschiebung	$x(t - t_0)$	$e^{-s \cdot t_0} \underline{X}(s)$
Modulation	$e^{at} x(t)$	$\underline{X}(s - a)$
Multiplikation	$t \cdot x(t)$	$-\frac{d}{ds} \underline{X}(s)$
Faltung	$x_1(t) * x_2(t)$	$\underline{X}_1(s) \cdot \underline{X}_2(s)$
Differentiation t	$\frac{d}{dt} x(t)$	$s \cdot \underline{X}(s) - x(0)$
Integration t	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \underline{X}(s)$
Integration s	$\frac{1}{t} \cdot x(t)$	$\int_s^\infty \underline{X}(s) ds$

7.7 Korrespondenzen der LPT

Nr.	$\underline{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{X}(s)$	Nr.	$\underline{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{X}(s)$
10	1	$\frac{1}{s}$	28	$\frac{1}{ab} + \frac{b \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-bt}}{ab \cdot (a-b)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
11	t	$\frac{1}{s^2}$	29	$\frac{e^{-at} + [(a-b)t-1] \cdot e^{-bt}}{(a-b)^2}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
12	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	30	$\frac{[a-b(a-b)t] \cdot e^{-bt} - a \cdot e^{-at}}{(a-b)^2}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
13	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	31	$\frac{(b-c) \cdot e^{-at} + (c-a) \cdot e^{-bt} + (a-b) \cdot e^{-ct}}{(b-a)(c-a)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
14	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	32	$\frac{a(b-c) \cdot e^{-at} + b(c-a) \cdot e^{-bt} + c(a-b) \cdot e^{-ct}}{(b-a)(c-b)(c-a)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
15	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	33	$\frac{1}{2\omega^3} \cdot (\sin \omega t - \omega t \cdot \cos \omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$
16	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	34	$\frac{t}{2\omega} \cdot \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
17	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	35	$\frac{1}{2\omega} \cdot (\sin \omega t + \omega t \cdot \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
18	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	36	$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
19	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	37	$\cos^2(\omega t)$	$\frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$
20	$(1 - at) \cdot e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$	38	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{s^2 + \omega^2}$
21	$\frac{1}{a^2} \cdot [1 - (1 + at) \cdot e^{-at}]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	39	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{s \sin \psi + \omega \cos \psi}{s^2 + \omega^2}$
22	$\frac{t^2}{2} \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	40	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
23	$\frac{1}{a^2} \cdot (1 - \cos at)$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	41	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
24	$\frac{1}{a^2} \cdot (\cosh at - 1)$	$\frac{1}{s(s^2 - a^2)}$	42	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t + \psi)$	$\frac{(s+a) \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s+a)^2 + \omega^2}$
25	$\frac{1}{a^2} \cdot [at - 1 + e^{-at}]$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	43	$\frac{a \cos \omega t + \omega \sin \omega t - a \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s+a}$
26	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a) \cdot (s+b)}$	44	$\frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega \cdot e^{-at}}{a^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s+a}$
27	$\frac{a \cdot e^{-at} - b \cdot e^{-bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s+a) \cdot (s+b)}$	45	$\frac{\cos(\omega t + \psi - \gamma) - \cos(\psi - \gamma) \cdot e^{-at}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s+a)}$

Nr	$\underline{x}(t)$ für $t \geq 0$	$\underline{X}(s)$
46	$a^2 > b^2 : \frac{1}{2W} \cdot (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$ $a^2 = b^2 : t \cdot e^{-at}$ $a^2 < b^2 : \frac{1}{\omega_d} \cdot e^{-at} \cdot \sin \omega_d t$	$\frac{1}{s^2 + 2as + b^2}$
47	$a^2 > b^2 : \frac{1}{2W} \cdot (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$ $a^2 = b^2 : (1 - at) \cdot e^{-at}$ $a^2 < b^2 : \left(\cos \omega_d t - \frac{a}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d t \right) \cdot e^{-at}$	$\frac{s}{s^2 + 2as + b^2}$
48	$a^2 > b^2 : \frac{1}{b^2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{2W} \cdot e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{2W} \cdot e^{\lambda_2 t} \right)$ $a^2 = b^2 : \frac{1}{a^2} [1 - (1 + at) \cdot e^{-at}]$ $a^2 < b^2 : \frac{1}{b^2} \left[1 - \left(\cos \omega_d t + \frac{a}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d t \right) \cdot e^{-at} \right]$	$\frac{1}{s(s^2 + 2as + b^2)}$
49	$a^2 > b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) + k_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + k_2 \cdot e^{-\lambda_2 t}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $a^2 = b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) + (zt - \cos \varphi) \cdot e^{-at}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $a^2 < b^2 : \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi) - k \cdot \cos(\omega_d t + \beta) \cdot e^{-at}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\frac{s \cos \psi - \omega \sin \psi}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s^2 + 2as + b^2)}$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -a \pm W = -a \pm j\omega_d & W &= \sqrt{a^2 - b^2} = j\omega_d & x &= b^2 - \omega^2 & y &= 2a\omega & z &= \omega \sin \varphi - a \cos \varphi \\ \varphi &= \arctan \frac{x \sin \varphi - y \cos \varphi}{y \sin \varphi + x \cos \varphi} & k &= \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} & k_1 &= \frac{\lambda_2 \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{2W} & k_2 &= \frac{\omega \sin \varphi - \lambda_1 \cos \varphi}{2W} \\ \beta &= \arctan \frac{z}{\omega_d \cos \varphi} \end{aligned}$$

8 Schaltvorgänge

8.1 Berechnungsmethoden

Immer Stetigkeitsbedingungen beachten!

$$x(t=0) = x(0) = x(0^-) = x(0^+)$$

Bauteilverhalten KS/LL: $\underline{X}_C = -j \frac{1}{\omega C}$ $\underline{X}_L = j\omega L$

8.1.1 Vereinfachte Methode

mit Lösungsformeln aus GE1, GE2.

- Bedingung:** konstantes Eingangssignal/Quelle und **einem** unabhängigem Energiespeicher L oder C (DGL 1. Ordnung, eine Zeitkonstante).
- GE1: Schaltung mit **einer** Induktivität L :

$$\tau = \frac{L}{R} \quad I_A = i(0) \quad I_E = i(t \rightarrow \infty)$$

$$i(t) = I_E + (I_A - I_E) \cdot e^{-t/\tau}$$

- GE2: Schaltung mit **einer** Kapazität C :

$$\tau = RC \quad U_A = u(0) \quad U_E = u(t \rightarrow \infty)$$

$$u(t) = U_E + (U_A - U_E) \cdot e^{-t/\tau}$$

8.1.2 Laplace-Transformation der DGL

- DGL aufstellen mit Bauteilgleichungen für R, L, C .
Maschen- und Knotensatz anwenden.

- LPT der DGL durchführen:

$$\dot{x}(t) \circ \bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

$$\ddot{x}(t) \circ \bullet s^2 \cdot \underline{X}(s) - s \cdot x(0^+) - \frac{dx}{dt}(0^+)$$

Anfangszustand $i_L, u_C \neq 0$ zum Schaltzeitpunkt $x(0^+)$ wird autom. berücksichtigt.

- Auflösen nach gesuchter Größe.

- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

8.1.3 Leere Energiespeicher mit LPT & KWR

- Bedingung:** Alle C ungeladen, Alle L stromlos.

$$u_c(0+) = i_L(0+) = 0$$

- Eingang $x(t)$ mit LPT in Bildbereich $\underline{X}(\omega)$.

- $\underline{H}(s)$ aus Schaltung nach Schaltvorgang mit erweiterter KWR bestimmen. Ersetze $s = j\omega$.

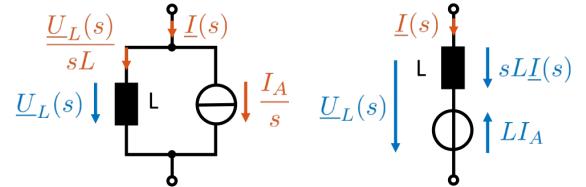
- Ausgang im Bildbereich berechnen: $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$

- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

8.1.4 Geladene Energiespeicher mit LPT

- Ersatzschaltbild (ESB) für Schaltkreis nach dem Schaltvorgang im Bildbereich erstellen:

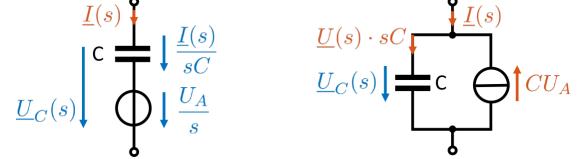
- VZ beachten! VZ-Änderung im Zeitbereich auch im Bildbereich gültig!
- Induktivitäten mit Anfangstrom:



$$\underline{U}_L(s) = L \cdot (s \cdot \underline{I}_L(s) - \underbrace{i_L(0)}_{I_A})$$

$$\underline{I}_L(s) = \frac{\underline{U}_L(s)}{sL} + \frac{I_A}{s}$$

- Kapazitäten mit Anfangsspannung/Vorladung:



$$\underline{I}_C(s) = C \cdot (s \cdot \underline{U}_C(s) - \underbrace{u_C(0)}_{U_A})$$

$$\underline{U}_C(s) = \frac{\underline{I}_C(s)}{sC} + \frac{U_A}{s}$$

- $\underline{H}(s)$ aus ESB mit KWR bestimmen.
- Eingang $x(t)$ mit LPT in Bildbereich $\underline{X}(\omega)$.
- Ausgang im Bildbereich berechnen: $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$.
- Rücktransformation in Zeitbereich mit **Tabelle**.

8.2 Quellenumwandlung

$$\text{Stromquelle: } i_q(t) \cdot \varepsilon(t) \circ \bullet \frac{I_q(s)}{s}$$

$$\text{Spannungsquelle: } u_q(t) \cdot \varepsilon(t) \circ \bullet \frac{U_q(s)}{s}$$

8.3 Bauteilgleichungen

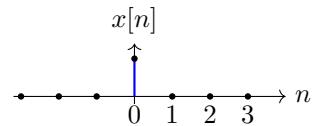
$$i_L(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad u_L(t) = L \cdot \frac{di_c(t)}{dt}$$

9 Zeitdiskrete Systeme

9.1 Elementare, zeitdiskrete Signale

- Einheitsimpuls, Impulsfolge, Delta-Impuls $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Eigenschaften:

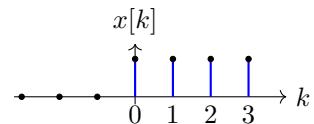
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$
- $\varepsilon(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$
- Anregung der Impulsantwort
- konstantes Spektrum

Ausblendeeigenschaft:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

- Einheitssprung

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

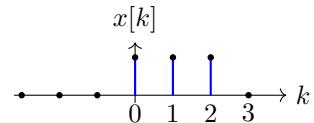


Zusammenhang mit Einheitsimpuls:

$$\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$$

- Rechteckfolge

$$\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Zusammenhang mit Dirac- und Einheitsimpuls:

$$\begin{aligned} \text{rect}(n) &= \varepsilon(n) + \varepsilon(n-N) \\ &= \varepsilon(n) \cdot \varepsilon(N-1-n) \end{aligned}$$

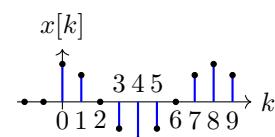
- Zeitdiskreter Sinus

$$x(n) = A \cdot \sin(\Omega n + \varphi)$$

A : Amplitude

Ω : normierte Kreisfrequenz

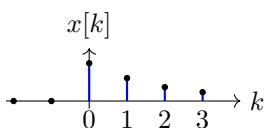
φ : Anfangsphase



A : Amplitude
 Ω : normierte Kreisfrequenz
 φ : Anfangsphase

- komplexe Exponentialfolge

$$\begin{aligned} x(n) &= \underline{A} \cdot e^{S n} \\ &= \underline{A} \cdot e^{(\Sigma + j\Omega)n} \end{aligned}$$



$$S = \Sigma + j\Omega$$

$$\text{Amplitudenänderung } \Sigma = \sigma T = \sigma / f_A$$

$$\text{normierte Kreisfrequenz } \Omega = \omega T = 2\pi \frac{f_0}{f_A}$$

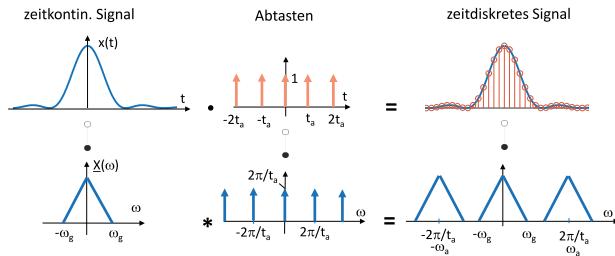
9.2 A/D-Wandlung

- Zeitdiskretisierung, Abtastung, **Abtastrate**: $f_a = \frac{1}{t_a}$

$$x(n) = x_0(t)|_{t=nT_a} = x_0(nT) = x_0\left(\frac{n}{f_a}\right)$$

- Wertdiskretisierung (Quantisierung): Bitbreite, Auflösung: 8 Bit = 256 Stufen.
- Abtastung Analog-Signal \rightarrow **periodische** Fortsetzung des Analog-Spektrums im Abstand von

$$\omega_a = \frac{2\pi}{t_a} = 2\pi f_a \quad \text{mit } t_a: \text{Abtastintervall}$$



- Aliasing:** Spektrale Überlagerung, zusätzliche Frequenzen/Abtastwerte, keine Rekonstruktion des Originalsignals aus $t_a = \frac{1}{f_a}$ möglich.

Abhilfe: Eingangssignal auf ω_g -Band begrenzen und **Abtasttheorem** einhalten, Verringerung von t_a .

$$\omega_a \geq 2\omega_g \quad \text{bzw. } f_a \geq 2f_g$$

$$\omega_g \leq \frac{\omega_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{t_a} \quad \text{bzw. } f_g \geq \frac{f_a}{2}$$

- Spektrum $U_a(\omega)$ eines abgetasteten Signals $u_a(t)$ mit $T = t_a = \frac{1}{f_a}$ aus einem Analogsignal $u(t)$:

$$\begin{aligned} U_a(\omega) &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{U(\omega)}{t_a} \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \frac{2\pi}{t_a} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_a) \\ &= \omega_a \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(\omega - k\omega_a) \end{aligned}$$

9.3 Zeitdiskrete LTI-Systeme

9.3.1 Systemeigenschaften

- Linear:** System mit Ü-Fkt. $H(z)$ beschreibbar.
- Kausal:** Anzahl der Pole (Grad des Nenners) $N \geq M$ Anzahl der Nullstellen (Grad des Zählers), $h(n) = 0$ für $n < 0$, rechtsseitige Folge.
- Stabil:** Einheitskreis (EK) \in Konvergenzbereich (KB), absolute Summierbarkeit: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$, Alle Pole \in EK.
- minimalphasiges LTI-System:** Alle Nullstellen \in EK.

9.3.2 Impuls- & Systemantwort, Faltung

Impulsanregung	Impulsantwort
$x(n) = \delta(n)$	$y(n) = h(n) = S\{\delta(n)\}$
$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$ $\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$	$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$ $= x(n) * h(n)$ $h(n) = g(n) - g(n-1)$ $\underline{H}(z) = \underline{G}(z) \cdot \frac{z-1}{z}$
Sprunganregung	Sprungantwort
$x(n) = \varepsilon(n)$	$y(n) = g(n) = S\{\varepsilon(n)\}$
$\varepsilon(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$	$g(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(k)$ $\underline{G}(z) = \underline{H}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$

9.3.3 Differenzengleichung \Leftrightarrow Ü-Fkt.

Allgemein:

$$\underline{H}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \cdot z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^N a_k \cdot z^{N-k}}$$

z -Transformation: $z^{-k} = x(n-k)$.

$$\begin{aligned} a_0 \cdot y(n) + a_1 \cdot y(n-1) + \dots + a_N \cdot y(n-N) &= \\ b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + \dots + b_M \cdot x(n-M) & \end{aligned}$$

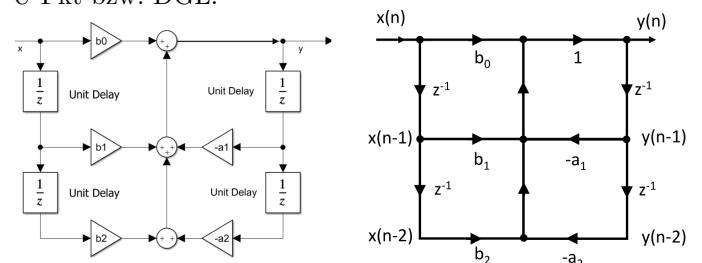
Systeme 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \underline{H}(z) &= \frac{b_M}{a_N} = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{b_0 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_2}{z^2 + a_1 \cdot z + a_2} \\ &= \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{a_0} \cdot [b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + b_2 \cdot (n-2) \\ &\quad - a_1 \cdot y(n-1) - a_2 \cdot y(n-2)] \end{aligned}$$

9.3.4 Signalflussplan/-graph

$-a_k$: Wert muss negativ sein, ansonsten VZ-Wechsel in der Ü-Fkt bzw. DGL.



9.4 Zeitdiskrete Fouriertransformation

- zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT):

$$\underline{X}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\Omega n}$$

- Rücktransformation, Synthese:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Normierte Kreisfrequenz:

$$\Omega = \omega T = 2\pi f T = 2\pi \frac{f}{f_a}$$

Spektrum $\underline{X}(\omega)$ ist freq.-kontinuierlich und periodisch mit $T = 2\pi$.

- Einheit des Spektrums/Signals: $[\underline{X}(\omega)] = x(n)$

9.5 z-Transformation

Hintransformation, Analysegleichung:

$$\underline{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Existiert nur für rechtsseitige (kausale) Folgen/Signale!

- Kb darf keine Polstellen enthalten.
- Zeitbegrenzte (kausale) Signale: Kb außerhalb des Ursprungs.
- Unendlich lange (kausale) Signale: Kb außerhalb des Kreises durch betragsgrößte Polstelle.

9.5.1 Rücktransformation mit PBZ

Partialbruchzerlegung allgemein:

$$\underline{X}(z) = \frac{\underline{Z}(z)}{\underline{N}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^m}{\sum_{n=0}^N a_n z^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (z - z_{om})}{\prod_{n=1}^N (z - z_{xn})}$$

Einfache Polstellen p_n :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{X}(z)}{z} &= \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - z_{x1}} + \frac{c_2}{z - z_{x2}} + \cdots + \frac{c_N}{z - z_{xN}} \\ \Rightarrow \underline{X}(z) &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \frac{z}{z - p_n} \end{aligned}$$

Sonderfall: n-fache Polstellen bei $z=0$:

$$\underline{X}(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{a_N \cdot z^N} = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_N} \cdot z^{m-N}$$

Mehrfaache Polstellen p_n :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{X}(z)}{z} &= \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_n} + \frac{c_2}{(z - p_n)^2} + \cdots + \frac{c_k}{(z - z_{xn})^k} \\ \Rightarrow \underline{X}(z) &= c_0 + c_1 \frac{z}{z - p_n} + c_2 \frac{z}{(z - p_n)^2} + \cdots + c_k \frac{z}{(z - p_n)^k} \end{aligned}$$

9.5.2 Eigenschaften der z-Transformation

	$\mathbf{x[n]}$	$\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z})$
Linearität	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$a\underline{X}_1(z) + b\underline{X}_2(z)$
Verschiebung	$x[n - i]$	$z^{-i} \underline{X}(z)$
Modulation	$a^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
Multiplikation	$n \cdot x[n]$	$-z \frac{d}{dz} \underline{X}(z)$
Faltung	$x_1[n] * x_2[n]$	$\underline{X}_1(z) \cdot \underline{X}_2(z)$
Differenzbildung	$x[n] - x[n - 1]$	$\frac{z-1}{z} \underline{X}(z)$
Summenbildung	$\sum_{i=0}^n x[i]$	$\frac{z}{z-1} \underline{X}(z)$

9.5.3 Korrespondenzen der z-Transformation

Normierte Kreisfrequenz $\Omega_1 = \omega T$

Nr.	$\mathbf{x[n]}$	$\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z})$
1	$\delta[n]$	1
2	$\delta[n - i]$	z^{-i}
3	$\varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\varepsilon[n - i]$	$\frac{z}{z-1} \cdot z^{-i}$
5	$n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
6	$n^2 \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
7	$e^{-an} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$
8	$n e^{-an} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{ze^{-a}}{(z-e^{-a})^2}$
9	$a^n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{z-a}$
10	$a^{n-1} \cdot \varepsilon[n - 1]$	$\frac{1}{z-a}$
11	$n a^n \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{za}{(z-a)^2}$
12	$n a^{n-1} \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
13	$(n-1) a^{n-1} \cdot \varepsilon[n - 1]$	$\frac{1}{(z-a)^2}$
14	$n^2 a^n \varepsilon[n]$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
15	$\binom{n}{i} a^{n-i} \varepsilon[n - i]$	$\frac{z}{(z-a)^{i+1}}$
16	$\frac{(a^{n+1}-b^{n+1})}{a-b} \varepsilon[n] \quad a \neq b$	$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$
17	$\frac{1}{n} \varepsilon[n - 1] \cdot \varepsilon[n]$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$
18	$\sin(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z \sin(\Omega_1)}{z^2 - 2z \cos(\Omega_1) + 1}$
19	$\cos(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z[z - \cos(\Omega_1)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_1) + 1}$
20	$a^n \sin(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{za \sin(\Omega_1)}{z^2 - 2za \cos(\Omega_1) + a^2}$
21	$a^n \cos(\Omega_1 n) \cdot \varepsilon[n]$	$\frac{z[z - a \cos(\Omega_1)]}{z^2 - 2za \cos(\Omega_1) + a^2}$
22	$\text{rect}_N[n]$	$\frac{z-z^{-N}}{z-1}$

9.6 LTI-Systeme im Bildbereich

9.6.1 Impuls- und Sprungantwort im BB

$$\underline{H}(z) = \underline{G}(z) \cdot \frac{z-1}{z}$$

$$\underline{G}(z) = \underline{H}(z) \cdot \frac{z}{z-1}$$

9.6.2 PN-Diagramm \Rightarrow Frequenzgang

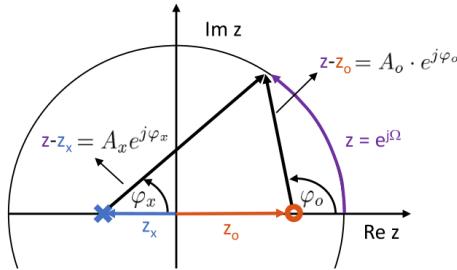
Wenn zeitdiskretes LTI-System stabil: Ersetze $z = e^{j\Omega}$:

$$\underline{H}(\Omega) = \underline{H}(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

Ermittlung $\underline{H}(\Omega)$: Am Einheitskreis des PN-Diagramms entlang gegen den UZS für $\Omega > 0$ gehen.

z_o : Nullstellen, z_x : Polstellen

$$\underline{H}(z) = \frac{(z - z_o)}{(z - z_x)} \quad \underline{H}(\Omega) = \frac{(e^{j\Omega} - z_o)}{(e^{j\Omega} - z_x)} = \frac{A_o e^{j\varphi_o}}{A_x e^{j\varphi_x}}$$



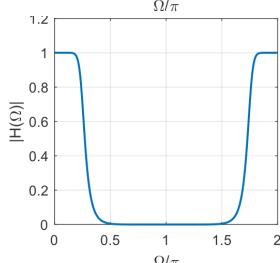
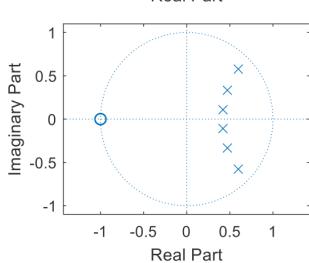
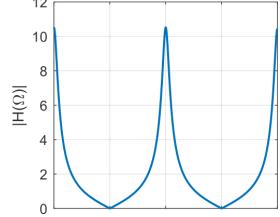
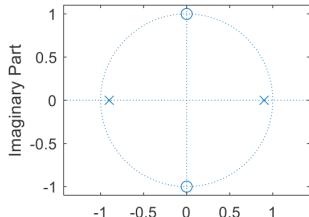
Betragsfrequenzgang, Amplitudengang

$$|\underline{H}(\Omega)| = H(\Omega) = \frac{A_o(\Omega)}{A_x(\Omega)} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Phasenfrequenzgang

$$\varphi_H(\Omega) = \varphi_o(\Omega) - \varphi_x(\Omega) = \varphi_Y(\Omega) - \varphi_X(\Omega)$$

Beispiele:



9.6.3 Systemantwort auf harm. Eingangssignale

LTI-System verändert nur Amplitude und Phase von $x(t)$.

Gegeben: $x(n) = \hat{x} \cdot \sin(\Omega_1 n + \varphi_x)$

Gesucht: $y(n) = \hat{y} \cdot \sin(\Omega_1 n + \varphi_y)$

$$\hat{y} = \hat{x} \cdot |\underline{H}(\Omega_1)|$$

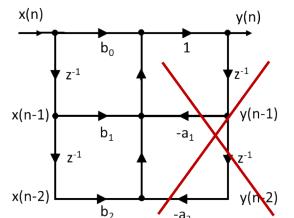
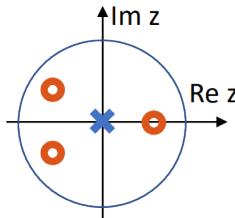
$$\varphi_y = \varphi_x + \varphi_H(\Omega_1)$$

9.6.4 Klassifizierung von Systemen

- Transversale Systeme, FIR, AR:

Finite Impulse Response (FIR), Auto-Regressive (AR)
Keine Rückführung von Ausgang $y(n)$ auf Eingang $x(n)$.
 $\Rightarrow a_k = 0$ für $k > 0$.

\Rightarrow Alle Pole liegen im Ursprung.

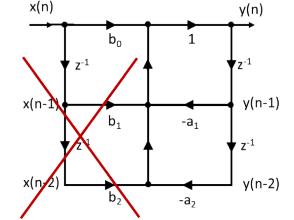
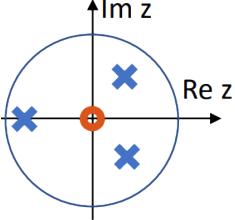


- Rekursive Systeme, IIR, MA:

Infinite Impulse Response(IIR), Moving-Average (AR)
Keine Rückführung von Ausgang $y(n)$ auf Eingang $x(n)$.
Aktueller Ausgangswert hängt nur vom aktuellen Eingangswert und früheren Ausgangswerten ab.

$\Rightarrow b_k = 0$ für $k > 0$.

\Rightarrow Alle Nullstellen liegen im Ursprung.



- ARMA: Auto-Regressive Moving Average

\rightarrow transversal-rekursives System.