



OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

FORMELSAMMLUNG SIGNALE UND SYSTEME

Wintersemester 21/22

Name:

Ayham Alhalaibi

Matrikelnummer:

SECRET

Letzte Änderung:

22. Januar 2022

Lizenz:

GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1	Signale im Zeitbereich	1
1.1	Signalcharakterisierung	1
1.2	Elementarsignale	1
2	Systeme	2
2.1	Eigenschaften	2
2.2	LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)	2
2.2.1	Ein-/Ausgangsbeziehung	2
2.2.2	Faltung	2
2.3	Frequenzgang & Übertragungsfunktion	2
2.3.1	Pegel	3
2.4	Pole und Nullstellen	3
2.5	Elementare Übertragungsglieder	3
2.6	Zusammenschalten von Übertragungsgliedern	3
2.7	Bode Diagramm	3
3	Zweitore - Vierpoltheorie	4
3.1	Zweitorgleichungen	4
3.1.1	Parameterumrechnung	4
3.2	Zusammenschalten von Zweitoren	4
3.3	Matrizen elementarer Zweitore	5
3.3.1	Trennverstärker	6
3.3.2	Torbedingungen	6
3.4	Zweiter Eigenschaften:	6
3.5	Zweitorersatzschaltung	6
3.5.1	gesteuerte Quellen	6
3.5.2	Ersatzschaltbilder	6
3.6	Beschaltete Zweitore	7
3.6.1	Eingangsimpedanz	7
3.6.2	Ausgangsimpedanz	7
3.6.3	Ersatzquelle	7
3.6.4	Wellenwiderstand	7
3.6.5	Scheinleistungsanpassung	8
3.6.6	Kettenwiderstand	8
4	Signaldarstellung im Frequenz- und Bildbereich	8
4.1	Fourierreihe periodischer Signale	8
4.1.1	Reelle Fourierreihe	8
4.1.2	Komplexe Fourierreihe	8
4.1.3	Komplex Reell umwandeln	8
4.1.4	Symmetrieeigenschaften	8
4.1.5	Halbwellensymmetrie	8
4.1.6	Verschiebungssatz	9
4.1.7	Fourierreihe und LTI-Systeme	9
4.2	Kenngößen periodischer Signale	9
4.3	Fouriertransformation	10
4.4	Fouriertransformation bei periodischer Signale	10
4.5	Eigenschaften der Fouriertransformation	10
4.6	Laplace Transformation	11
4.6.1	Eigenschaften Laplace Transformation	11
4.6.2	Rücktransformation rationaler Funktionen	11
4.7	LTI-Systeme im Bildbereich	11
4.7.1	Impuls- und Sprungantwort im Bildbereich	11
4.8	Systemantwort von LTI Systemen	11
5	Schaltvorgänge	11
5.1	Berechnen von Schaltvorgänge im Bildbereich	11
5.1.1	Laplacetransformation der Differentialgleichung	11
5.1.2	Schaltvorgänge mit ungeladenen Energiespeichern	12
5.1.3	Schaltvorgänge mit geladenen Energiespeichern	12

6	Zeitdiskrete Systeme	12
6.1	Elementare Zeitdiskrete Signale	12
6.2	Abtasttheorem im Frequenzbereich	13
6.3	Elementare Zeitdiskrete Systeme	13
6.3.1	Definition	13
6.3.2	Kausalität und Stabilität	13
6.3.3	Klassifizierung von Systemen	13

1 Signale im Zeitbereich

1.1 Signalcharakterisierung

1. **Kontinuierlich** \longleftrightarrow **Diskret**

2. **Deterministisch** \longleftrightarrow **Stochastisch**
Deterministische Signale sind mathematisch beschreibbar, im Gegensatz zu stochastischen Signalen die dem Zufall unterworfen sind

3. **Periodisch** \longleftrightarrow **Aperiodisch**

periodisch wenn, $x(t) = x(t + T_p)$ gilt.
 T_p heißt Grundperiode.

4. **Gerade** \longleftrightarrow **Ungerade:**

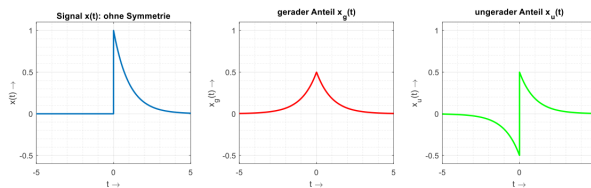
Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil:

$$x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

- ungerader Anteil:

$$x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$



5. **Energiesignal** \longleftrightarrow **Leistungssignal**

Energie:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

6. Korrelation

Die Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier deterministischer Energiesignale.

Korrelationsfunktion

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

7. Transformation

Signale können modifiziert werden durch Verändern der unabhängigen Variablen:

- Zeitverschiebung
- Zeitdehnung und Stauchung
- Zeitumkehr

$$x_2(t) = x_1(-at + b)$$

das Argument von $x_1(\tau)$ stellt eine Abbildung $t \rightarrow \tau$ dar, daher bewirkt

- $+b/-b$ ($b > 0$) eine Verschiebung von $x_1(\tau)$ nach links / rechts
- eine Multiplikation mit a / Division durch a ($a > 1$) eine Stauchung / Streckung von $x_1(\tau)$
- Multiplikation mit -1 eine Spiegelung an der Ordinatenachse

Die Reihenfolge der Schritte ist nicht **EGAL**:
erst **Verschieben** um b , dann **Skalieren/Invertieren** mit $-a$

1.2 Elementarsignale

- Sprungfunktion ε

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Eigenschaften:

- Höhe unendlich
- Fläche = 1
- Zusammenhang mit Sprungfunktion
 $\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ bzw. $\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$
- Ausblendeigenschaft

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion rect

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$\text{rect}(t) = \varepsilon \left(t + \frac{1}{2} \right) - \varepsilon \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

2 Systeme

2.1 Eigenschaften

1. Speicher

- Frei: wird durch eine xy-Kennlinie vollständig beschrieben

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

- behaftet: Bei diesen Systemen ist keine vollständige Beschreibung durch eine xy-Kennlinie möglich

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) + 2x(t-1)$$

2. Kausalität

Ausgangssignal hängt nur vom aktuellen und vorherigen Eingangssignal ab

$$\text{Kausal: z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

$$\text{Akausal: z.B. } y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$

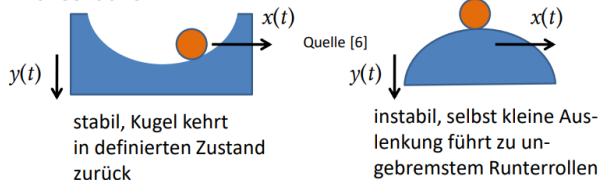
Speicherfreiheit & Kausalität: Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, aber nicht umgekehrt.

3. Stabilität

(Bounded Input \rightarrow Bounded Output)

BIBO Stabilität: kleines/beschränktes Eingangssignal \rightarrow kleine/beschränkte Antwort.

■ anschaulich:



z.B. für stabiles System

$$y(t) = 50 \cdot x^3(t)$$

z.B. für instabiles System

$$y(t) = e^t \cdot x(t)$$

4. Zeitinvariant \leftrightarrow Zeitvariant

- invariant: Systeme ändern sich **nicht** bei einer Zeitverschiebung.
- variant: Verschobenes Eingangssignal \rightarrow verschobenes Ausgangssignal

5. Linearität

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt: Linearkombination von Eingangssignalen ruft entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale hervor

Bedeutung Linearität

eine Verdopplung der Eingangsgröße (z.B. Spannung) führt auch zu einer Verdopplung der Ausgangsgröße.

2.2 LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)

2.2.1 Ein-/Ausgangsbeziehung

- Addition
- Multiplikation
- Differentiation
- Integration
- Zeitverschiebung (Verzögerung)

2.2.2 Faltung

Aus der Impulsantwort eines LTI-Systems und dem Eingangssignal lässt sich das Ausgangssignal durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow (*) \text{ Faltung Operator}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

- Der Dirac-Impuls ist das neutrale Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Eine Faltung mit einem verschobenen Dirac-Impuls führt zur Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t - a) = x(t - a)$$

Rechenregeln

- $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

2.3 Frequenzgang & Übertragungsfunktion

• Frequenzgang

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)}$$

• Amplitudengang

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

• Phasengang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

• Eigenfunktion

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : & \text{Eigenfunktion} \\ \lambda : & \text{Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = e^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S :

$$y(t) = S \{e^{st}\} = \lambda \cdot e^{st}$$

Eigenwert kann wie folgt berechnet werden:

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau$$

• Erweiterung der komplexen Wechselstromrechnung

Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein Sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega$

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma < 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma > 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega < 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega > 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$

Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger des Ausgangssignals}}{\text{komplexer Zeiger des Eingangssignals}}$$

Die Übertragungsfunktion hängt von der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$ ab.

2.3.1 Pegel

Energiegröße: $a = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ dB}$

Feldgröße: $a = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ dB}$

2.4 Pole und Nullstellen

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n}$$

Die Koeffizienten a_n und b_m ergeben sich aus den Bauelementen und sind reell.

$$\underline{H}(s) = \frac{\text{SUMME ALLER NULLSTELLEN}}{\text{SUMME ALLER POLE}} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s - s_{o1}) \cdot (s - s_{o2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{oM})}{(s - s_{x1}) \cdot (s - s_{x2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{xN})}$$

$$k = \frac{b_M}{a_N} \text{ ist der Maßstabfaktor}$$

Bei stabilen Systemen müssen alle Pole in der linken komplexen Halbebene liegen.

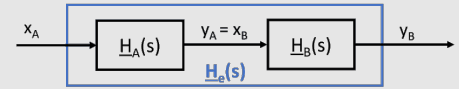
2.5 Elementare Übertragungsglieder

P-Glied, D-Glied, I-Glied, PT1-Glied Für mehr siehe externe Tabelle.

2.6 Zusammenschalten von Übertragungsgliedern

- Kettenschaltung
Multiplikation der Einzelübertragungsfunktionen.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) = \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)$$

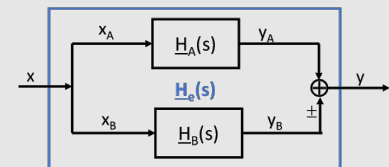


$$\underline{Y}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{Y}_A = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A$$

Rückwirkungsfreiheit gewährleistet sein.

- Parallelschaltung
Summe der Einzelübertragungsfunktionen.

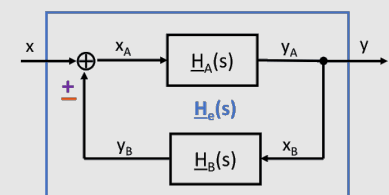
$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) + \underline{H}_A(s)$$



$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_A \pm \underline{Y}_B \\ &= \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A \pm \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B \\ &= (\underline{H}_A(s) + \underline{H}_B(s)) \cdot \underline{X} \end{aligned}$$

- Rückkopplung

$$\underline{H}_e(s) = \frac{\underline{H}_A(s)}{1 \pm \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}$$



Mitkopplung: y_A vergrößert x_A
Gegenkopplung y_A verkleinert x_A

2.7 Bode Diagramm

- Bode Diagramm von Kettenschaltung
Ergebnis durch **Addition der Bodediagramme** der einzelnen Glieder.
- Bode Diagramm der inversen Übertragungsfunktion
Ergebnis durch **Spiegelung an der X-Achse**.

3 Zweitoren - Vierpoltheorie

3.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix \mathbf{Y} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix \mathbf{Z} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix \mathbf{H} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix \mathbf{C} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{C}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{C}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix \mathbf{A} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot (-\underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot (-\underline{I}_2) \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix \mathbf{B} :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \cdot (-\underline{I}_1) \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \cdot (-\underline{I}_1) \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

3.1.1 Parameterumrechnung

$\mathbf{Z} \qquad \mathbf{Y} \qquad \mathbf{H} \qquad \mathbf{A}$

$$\mathbf{Z} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ \det \underline{\mathbf{Y}} & \det \underline{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{H}} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{22} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} \end{bmatrix}$$

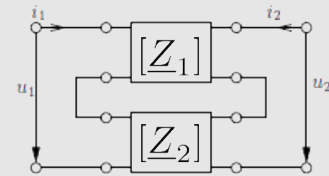
$$\mathbf{Y} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ \det \underline{\mathbf{Z}} & \det \underline{\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} \begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{12} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{22} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{\mathbf{Z}} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\det \underline{\mathbf{H}} & -\underline{H}_{11} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$$

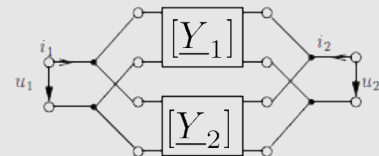
3.2 Zusammenschalten von Zweitoren

- Reihenschaltung:



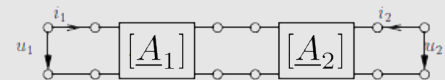
$$[\underline{\mathbf{Z}}] = [\underline{\mathbf{Z}}_1] + [\underline{\mathbf{Z}}_2]$$

- Parallelschaltung:



$$[\underline{\mathbf{Y}}] = [\underline{\mathbf{Y}}_1] + [\underline{\mathbf{Y}}_2]$$

- Kettenschaltung:

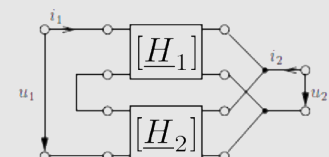


$$[\underline{\mathbf{A}}] = [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2]$$

BEACHTET:

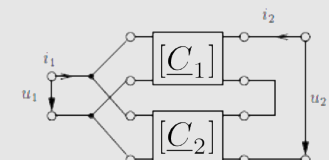
Im Allgemeinen gilt $\rightarrow [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2] \neq [\underline{\mathbf{A}}_2] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_1]$

- Reihen-Parallelschaltung:



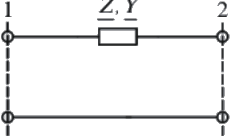
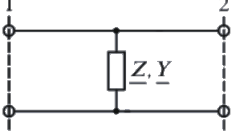
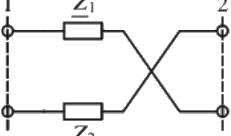
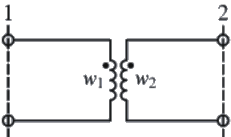
$$[\underline{\mathbf{H}}] = [\underline{\mathbf{H}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{H}}_2]$$

- Parallel-Reihenschaltung:



$$[\underline{\mathbf{C}}] = [\underline{\mathbf{C}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{C}}_2]$$

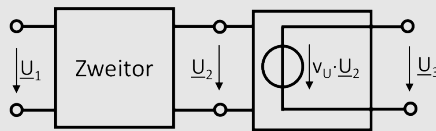
3.3 Matrizen elementarer Zweitore

Schaltung	\underline{Z}	\underline{Y}	\underline{H}	\underline{C}	\underline{A}
	ne	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix}$
	ne	$\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	ne	ne	$\begin{pmatrix} 0 & \underline{u} \\ -\underline{u} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\underline{u}} \\ \frac{1}{\underline{u}} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{u}} \end{pmatrix}$
idealer Übertrager $\underline{u} = \frac{w_1}{w_2}$					

$K = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3$			
$[\underline{Z}]$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} \end{bmatrix}$
$[\underline{Y}]$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & \frac{-\underline{Z}_2}{K} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} \\ \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} & \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} \end{bmatrix}$
$[\underline{H}]$	$\begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$	
$[\underline{C}]$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	
$[\underline{A}]$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$

3.3.1 Trennverstärker

Ersatzschaltbild eines idealen Trennverstärkers:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_e = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{v_U} & 0 \\ \frac{\underline{A}_{21}}{v_U} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Torbedingungen

Die Torbedingungen werden durch:

- idealen Übertrager
- Kurzschlusschleife
- Parallelschaltung längssymmetrischer Zweitore

erfüllt.

für die das Zusammenschalten von Zweitoren müssen diese Bedingungen eingehalten werden.

3.4 Zweitor Eigenschaften:

- Reziprozität (Umkehrbarkeit)

Z	$Z_{12} = Z_{21}$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$
A	$\det[A] = 1$
H	$H_{12} = -H_{21}$

Ein umkehrbares (reziprokes) Zweitor wird nur durch drei Parameter beschrieben:

(RLCM-Zweitor) ist immer umkehrbar.

Gegenbeispiel: idealer Transistor

- Rückwirkungsfreiheit

$$Z_{12} = Y_{12} = H_{12} = \det[A] = 0$$

Ein rückwirkungsfreies Zweitor ist nicht reziprok und wird nur durch drei Parameter beschrieben.

Beispiele: idealer Verstärker, idealer Transistor, gesteuerte Quellen

- Symmetrie

Z	$Z_{11} = Z_{22}$
Y	$Y_{11} = Y_{22}$
A	$A_{11} = A_{22}$
H	$\det[H] = 1$

Ein umkehrbares und symmetrisches Zweitor wird durch zwei Parameter beschrieben.

3.5 Zweitorersatzschaltung

3.5.1 gesteuerte Quellen

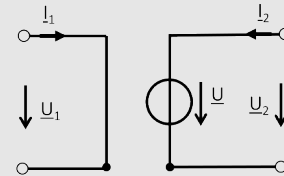
Ideal

VCVS: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

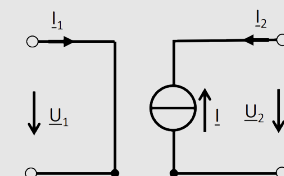
CCVS: Stromgesteuerte Spannungsquelle

VCCS: Spannungsgesteuerte Stromquelle

CCCS: Stromgesteuerte Stromquelle



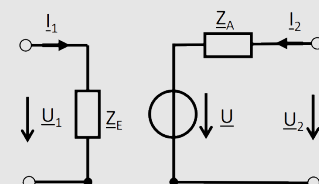
$$\begin{aligned} \text{VCVS: } \underline{U} &= \alpha \cdot \underline{U}_1 \\ \text{CCVS: } \underline{U} &= Z_T \cdot \underline{I}_1 \end{aligned}$$



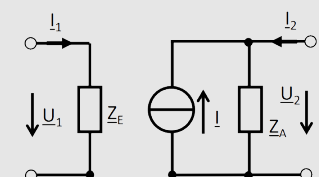
$$\begin{aligned} \text{VCCS: } \underline{I} &= \beta \cdot \underline{I}_1 \\ \text{CCCS: } \underline{I} &= Y_T \cdot \underline{U}_1 \end{aligned}$$

Andere Matrizen sind nicht definiert. Ideale (gesteuerte) Quellen lassen sich nicht ineinander umwandeln!

Linear



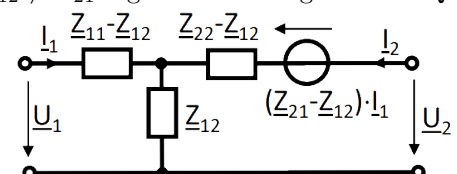
$$\begin{aligned} \text{VCVS: } \underline{U} &= \alpha \cdot \underline{U}_1 \\ \text{CCVS: } \underline{U} &= Z_T \cdot \underline{I}_1 = \alpha Z_E \cdot \underline{I}_1 \end{aligned}$$



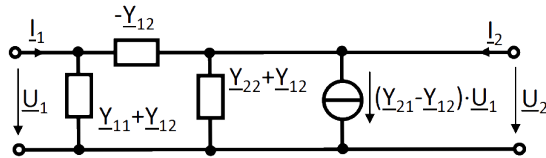
$$\begin{aligned} \text{VCCS: } \underline{I} &= \beta \cdot \underline{I}_1 = \alpha \frac{Z_E}{Z_A} \cdot \underline{I}_1 \\ \text{CCCS: } \underline{I} &= Y_T \cdot \underline{U}_1 = \frac{\alpha}{Z_A} \cdot \underline{U}_1 \end{aligned}$$

3.5.2 Ersatzschaltbilder

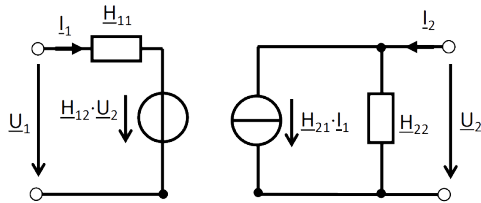
- T-Ersatzschaltbild für Z-Matrix für $Z_{12} \neq Z_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- II-Ersatzschaltbild für Y-Matrix für $Y_{12} \neq Y_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- Hybrid-Ersatzschaltbild für H-Matrix



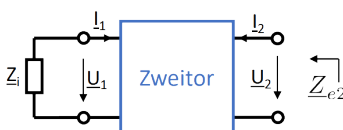
3.6 Beschaltete Zweitore

3.6.1 Eingangsimpedanz



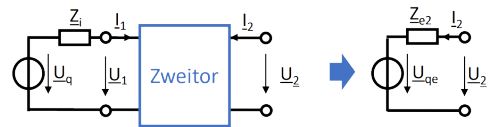
$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_V} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_V} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_V + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_V + \underline{A}_{22}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_V} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{C}_{11} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{22} + \underline{Z}_V} \end{aligned}$$

3.6.2 Ausgangsimpedanz



$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_i + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_i + \underline{A}_{11}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{C}_{22} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Z}_i} \end{aligned}$$

3.6.3 Ersatzquelle



$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q \underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{I}_q \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i \underline{A}_{21} + \underline{A}_{11}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{U}_q \underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{I}_q \underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_i} \end{aligned}$$

3.6.4 Wellenwiderstand

Beschaltet man den Ausgang eines Zweitores mit \underline{Z}_{w2} , so liegt am Eingang die Impedanz \underline{Z}_{w1} .

$$\underline{Z}_{w1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{22}}$$

Beschaltet man den Eingang eines Zweitores mit \underline{Z}_{w1} , so liegt am Ausgang die Impedanz \underline{Z}_{w2} .

$$\underline{Z}_{w2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{11}}$$

Lösung des obigen Gleichungssystems

	\underline{Z}_{w1}	\underline{Z}_{w2}
\underline{Z}	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{11} \det \underline{Z}}{\underline{Z}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{22} \det \underline{Z}}{\underline{Z}_{11}}}$
\underline{Y}	$\sqrt{\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11} \det \underline{Y}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22} \det \underline{Y}}}$
\underline{A}	$\sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$
\underline{H}	$\sqrt{\frac{\underline{H}_{11} \det \underline{H}}{\underline{H}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{22} \det \underline{H}}}$
\underline{C}	$\sqrt{\frac{\underline{C}_{22}}{\underline{C}_{11} \det \underline{C}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{C}_{11} \det \underline{C}}{\underline{C}_{11}}}$

Für symmetrische Zweitore gilt $\underline{Z}_{w1} = \underline{Z}_{w2}$

Alternatives:

Messtechnisch (Leerlauf und Kurzschluss)

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{01} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot \infty + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \infty + \underline{A}_{22}} \\ \underline{Z}_{k1} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot 0 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot 0 + \underline{A}_{22}} \end{aligned} \right\} \underline{Z}_{w1} = \sqrt{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}_{01}} = A(\underline{Z}_{w1})$$

3.6.5 Scheinleistungsanpassung

Wiederholung GE2 Kapitel 2.7.8

Beschaltet man ein Zweitor mit seinen Wellenwiderständen, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

3.6.6 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand einem Grenzwert, dem **Kettenwiderstand** \underline{Z}_K .

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_K}$$

Lösung der obigen Gleichung:

$$\underline{Z}_K = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22})^2 + 4 \cdot \det \underline{Z}})$$

Für symmetrische Zweitore entspricht der Kettenwiderstand dem Wellenwiderstand.

4 Signaldarstellung im Frequenz- und Bildbereich

4.1 Fourierreihe periodischer Signale

Die Überlagerung von Sinusschwingungen zu einem periodischen, nichtsinusförmigen Signal nennt man harmonische Synthese.

4.1.1 Reelle Fourierreihe

- mit \sin und \cos :

$$f(t) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

- mit Amplitude und Phase:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2})] \end{aligned}$$

Koeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$$

4.1.2 Komplexe Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot e^{-j\omega_1 k t} dt = \frac{1}{2} (a_k - j b_k)$$

4.1.3 Komplex Reell umwandeln

Komplex \rightarrow Reell:

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 = \underline{c}_0 \\ \left. \begin{aligned} a_k &= 2 \Re \{ \underline{c}_k \} = [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \\ b_k &= -2 \Im \{ \underline{c}_k \} = j [\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \end{aligned} \right\} k > 0 \\ A_k &= 2 |\underline{c}_k| \quad \beta_k = -\varphi_k \end{aligned}$$

Reell \rightarrow Komplex:

$$\begin{aligned} \underline{c}_k &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{-j\beta_k} \\ \underline{c}_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{j\beta_k} \end{aligned} \quad k > 0$$

4.1.4 Symmetrieeigenschaften

- Gerade Funktionen symmetrisch zur y-Achse
alle \sin -teile verschwinden - $A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt$
- $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$
- $b_k = 0$
- Ungerade Funktionen symmetrisch zum Ursprung
alle \cos -teile und Gleichanteil verschwinden
- $A_0 = 0$
- $a_k = 0$
- $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$

4.1.5 Halbwellensymmetrie

Halbwellensymmetrie gilt wenn:

$$y(t) = -y(t \pm T/2)$$

Die Fourier-Reihe einer Zeitfunktion mit HWS enthält stets nur Terme mit ungeraden Ordnungszahlen.
 $k = 1, 3, 5, \dots, \infty$

im Allgemeinen

Koeffizienten:

$$A_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

$$b_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

gerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, \quad b_k = 0, \quad a_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

ungerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_{2k} = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

4.1.6 Verschiebungssatz

Verschiebung im Zeitbereich entspricht eine Drehung des Komplexen Spektrums um die Phase $\rightarrow -k\omega_1 t_v$

$$f_v(t) = f(t - t_v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k(t-t_v)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t_v}}_{\underline{c}_{k_v}} \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

Ist $t_v < 0$, wie im Beispiel oben, so werden die Phasenwinkel des Spektrums mit zunehmender Frequenz größer.

4.1.7 Fourierreihe und LTI-Systeme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(k\omega_1) \cdot \underline{c}_{xk}}_{\underline{c}_{yk}} \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

4.2 Kenngrößen periodischer Signale

- Effektivwert

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u(t)^2 dt}$$

mit der Fourierreihe:

$$U_{eff} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{k,eff}^2}$$

auch:

$$\sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}$$

- Klirrfaktor (Oberschwingungsgehalt):
Dient zur Quantifizierung einer nichtlinearen Verzerrung bzw. von der Sinusform eines Signals.

$$k = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} = \frac{\sqrt{U_{\sim}^2 - U_1^2}}{U_{\sim}} \leq 1$$

Für Wechselgrößen lässt sich k einfach mit **Grundschwingungsgehalt** g ermitteln (*gilt immer*):

$$k = \sqrt{1 - g^2} \leftrightarrow g = \frac{U_1}{U_{\sim}}$$

- Mischgrößen

- Schwingungsgehalt:

$$s = \frac{U_{\sim}}{U} = \frac{\text{EFFEKTIVWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{EFFEKTIVWERT DER MISCHGRÖSSE}}$$

- Welligkeit:

$$w = \frac{U_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{EFFEKTIVWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{GLEICHANTEIL}}$$

- Riffelfaktor:

$$R = \frac{\hat{U}_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{SCHEITELWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{GLEICHANTEIL}}$$

- Wirkleistung:

$$P = \bar{p}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* \leftrightarrow \underline{i}_k^* = \underline{i}_{-k}$$

Als Reihe:

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k,eff} \cdot I_{k,eff} \cdot \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) \rightarrow \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$

Nur gleichfrequente harmonische tragen zur Wirkleistung bei!

- Schein- und Blindleistung

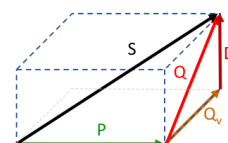
$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Bei einem nicht linearen Verbraucher an einer Sinusförmigen Spannung:

$$S^2 = (UI)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 =$$

$$U_1^2 I_0^2 + U_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1$$

Räumlich Darstellung der Scheinleistung:



Verschiebungs- Feldblindleistung Q_v

$$Q = \sqrt{Q_v^2 + D^2} \leftrightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q_v^2 + D^2}$$

Blindleistung aufgrund der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gleicher Frequenz.

Verzerrungsblindleistung D

$$D^2 = U_1^2 \cdot (I^2 - I_1^2) = S^2(1 - g^2)$$

von Mischtermen (Produkten von Spannung und Strom unterschiedlicher Frequenzen).

4.3 Fouriertransformation

$$x(t) \circ \bullet \underline{X}(\omega)$$

Hintransformation - Analysegleichung:

$$\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Komplexwertige Fouriertransformierte:

$$\underline{X}(\omega) = |\underline{X}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi}$$

$$\text{EINHEIT: } [x(t)] \cdot s$$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

4.4 Fouriertransformation bei periodischer Signale

Fouriertransformierte periodischer Signale:

$$\underline{X}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot \delta(\omega - k\omega_1)$$

Fourierkoeffizienten:

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \underline{X}(\omega_1) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega_1 t} dt$$

Die Koeffizienten \underline{c}_k der komplexen Fourierreihe sind die Abtastwerte von $\underline{X}(\omega)$ bei den Frequenzen

$$\omega = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T}$$

4.5 Eigenschaften der Fouriertransformation

• Linearität

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \circ \bullet a_1 \underline{X}_1(\omega) + a_2 \underline{X}_2(\omega)$$

• Dualität

$$\underline{X}(t) \circ \bullet 2\pi \cdot x(-\omega)$$

• Zeitskalierung

$$x(a \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \underline{X}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Frequenzskalierung

$$\frac{1}{|b|} x\left(\frac{t}{b}\right) \circ \bullet \underline{X}(b \cdot \omega) \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Zeitverschiebung

$$x(t - t_0) \circ \bullet \underline{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

• Frequenzverschiebung - Modulation

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \circ \bullet \underline{X}(\omega - \omega_0)$$

• Faltungssatz

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \bullet \underline{X}_1(\omega) \cdot \underline{X}_2(\omega)$$

• Multiplikation - Fenstertheorem

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} \underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$$

• Differentiation

im Zeitbereich:

$$\frac{d}{dt} x(t) \circ \bullet j\omega \underline{X}(\omega)$$

im Frequenzbereich:

$$t \cdot x(t) \circ \bullet j \frac{d}{d\omega} \underline{X}(\omega)$$

• Integration

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{j\omega} \underline{X}(\omega) + \pi \cdot \underline{X}(0) \cdot \delta(\omega)$$

• Energieberechnung - Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(\omega)|^2 d\omega$$

Symmetrie

Betrag und der Realteil des Spektrums sind gerade

Phase und der Imaginärteil des Spektrums sind ungerade.

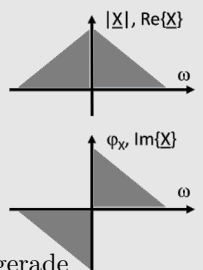
$$\underline{X}(-\omega) = \underline{X}^*(\omega)$$

$x(t)$ reel und gerade $\rightarrow \underline{X}(\omega)$ reel und gerade

$$\underline{X}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

$x(t)$ reel und ungerade $\rightarrow \underline{X}(\omega)$ imaginär und ungerade

$$\underline{X}(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$



4.6 Laplace Transformation

$$x(t) \circ \bullet \underline{X}(s)$$

Hintransformation - Analysegleichung

$$\underline{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{X}(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{X}(s)e^{-st} ds$$

4.6.1 Eigenschaften Laplace Transformation

- **Linearität**

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \circ \bullet \alpha \underline{X}_1(s) + \beta \underline{X}_2(s)$$

- **Skalierung im Zeitbereich**

$$x(\alpha t) \circ \bullet \frac{1}{\alpha} \underline{X}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \alpha > 0$$

- **Skalierung im Bildbereich**

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \circ \bullet \underline{X}(\alpha s) \quad \alpha > 0$$

- **Verschiebung im Zeitbereich**

$$x(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} \underline{X}(s) \quad t_0 > 0$$

- **Verschiebung im Bildbereich - Modulation**

$$e^{at} x(t) \circ \bullet \underline{X}(s - a)$$

- **Faltung**

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \bullet \underline{X}_1(s) \cdot \underline{X}_2(s)$$

- **Differentiation im Zeitbereich**

$$\frac{d}{dt} x(t) \circ \bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

- **Differentiation im Bildbereich**

$$t \cdot x(t) \circ \bullet - \frac{d}{ds} \underline{X}(s)$$

- **Integration im Zeitbereich**

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} \underline{X}(s)$$

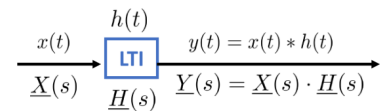
- **Integration im Bildbereich**

$$\frac{1}{t} x(t) \circ \bullet \int_s^{\infty} \underline{X}(s) ds$$

4.6.2 Rücktransformation rationaler Funktionen

Partialbruchzerlegung: Siehe papula nach S.157

4.7 LTI-Systeme im Bildbereich



4.7.1 Impuls- und Sprungantwort im Bildbereich

Impulsantwort:

$$h(t) \circ \bullet \underline{H}(s)$$

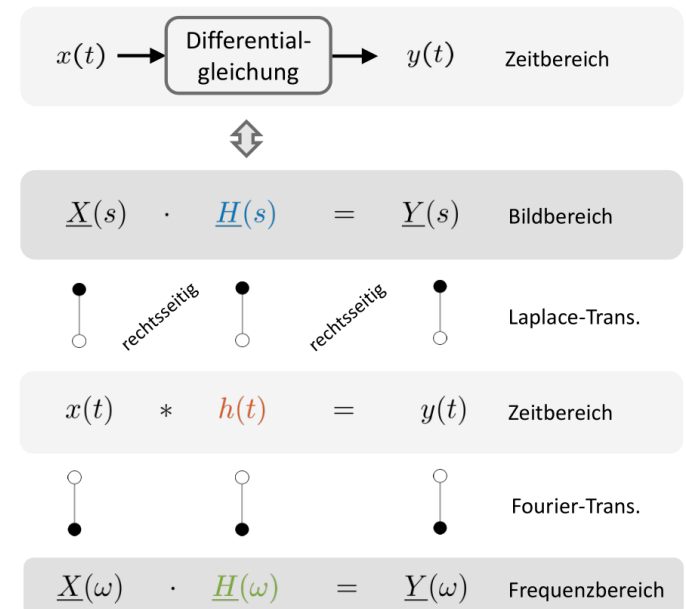
durch integrationssatz:

$$g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

Sprungantwort:

$$g(t) \circ \bullet \frac{\underline{H}(s)}{s}$$

4.8 Systemantwort von LTI Systemen



5 Schaltvorgänge

5.1 Berechnen von Schaltvorgänge im Bildbereich

5.1.1 Laplacetransformation der Differentialgleichung

Aufgrund der Eigenschaften der Laplacetransformation wird aus einer DGL im Zeitbereich eine algebraische Gleichung im Bildbereich.

Differentiation im Zeitbereich:

$$\frac{d}{dt} x(t) \circ \bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \circ \bullet s^2 \cdot \underline{X}(s) - s \cdot x(0^+) - \frac{dx}{dt}(0^+)$$

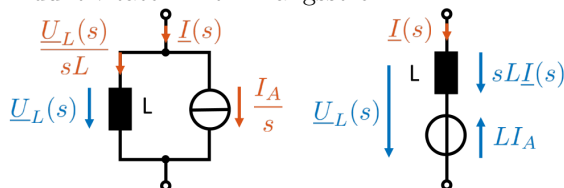
5.1.2 Schaltvorgänge mit ungeladenen Energiespeichern

1. Das Eingangssignal wird mit der Laplacetransformation in den Bildbereich transformiert.
2. Die Übertragungsfunktion wird aus dem Schaltbild nach dem Schaltvorgang mit komplexer Wechselstromrechnung bestimmt
3. Das Ausgangssignal wird im Bildbereich berechnet:
 $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$
4. Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der Tabellen
5. **NUR:** wenn alle Energiespeicher zum Zeitpunkt $t = 0$ energielos sind:
 - [i] Kondensatoren ungeladen
 - [ii] Spulen stromlos

5.1.3 Schaltvorgänge mit geladenen Energiespeichern

1. Erstellen eines Ersatzschaltbild für den Schaltkreis nach dem Schaltvorgang:

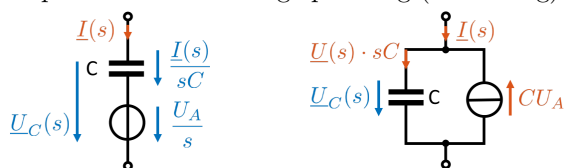
- Induktivitäten mit Anfangsstrom



$$\underline{U}_L(s) = L \cdot (s \cdot \underline{I}_L(s) - \underbrace{i_L(t=0)}_{I_A})$$

$$\underline{I}_L(s) = \frac{\underline{U}_L(s)}{sL} + \frac{I_A}{s}$$

- Kapazitäten mit Anfangsspannung (Vorladung):



$$\underline{I}_C(s) = C \cdot (s \cdot \underline{U}_C(s) - \underbrace{u_C(t=0)}_{U_A})$$

$$\underline{U}_C(s) = \frac{\underline{I}_C(s)}{sC} + \frac{U_A}{s}$$

2. Die Übertragungsfunktion wird aus dem Ersatzschaltbild mit komplexer Wechselstromrechnung bestimmt
3. Das Eingangssignal wird mit der Laplacetransformation in den Bildbereich transformiert.
4. Das Ausgangssignal wird im Bildbereich berechnet:
 $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$
5. Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der Tabellen

6 Zeitdiskrete Systeme

6.1 Elementare Zeitdiskrete Signale

- Einheitsimpulse

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Eigenschaften:

- neutrales Element der Faltung
- Anregung der Impulsantwort
- besitzt konstantes Spektrum
- Summe ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$

Ausblende-eigenschaft:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n - k)$$

- Einheitssprung

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Zusammenhang mit Einheitsimpulse:

$$\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n - 1)$$

- Rechteckfolge

$$\text{rect}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zusammenhang mit Dirac- und Einheitsimpuls:

$$\begin{aligned} \text{rect}(n) &= \varepsilon(n) + \varepsilon(n - N) \\ &= \varepsilon(n) \cdot \varepsilon(N - 1 - n) \end{aligned}$$

- Zeitdiskrete Sinus

$$x(n) = A \cdot \sin(\Omega n + \varphi)$$

A : Amplitude

Ω : normierte Kreisfrequenz

φ : Anfangsphase

- Exponentialfolge

$$\begin{aligned} x(n) &= \underline{A} \cdot e^{Sn} \\ &= \underline{A} \cdot e^{(\Sigma + j\Omega)n} \end{aligned}$$

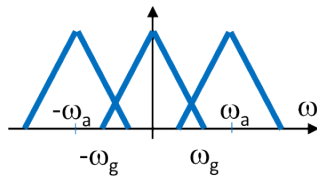
$$S = \Sigma + j\Omega$$

Amplitudenänderung $\Sigma = \sigma T = \sigma / f_A$

normierte Kreisfrequenz $\Omega = \omega T = 2\pi f_A$

6.2 Abtasttheorem im Frequenzbereich

Nur wenn das Eingangssignal auf ω_g bandbegrenzt und die Abtastfrequenz $\omega_a \geq 2\omega_g$ ist, kommt es nicht zu spektralen Überlappungen (= Aliasing).
Aliasing führt zu zusätzlichen Abtastwerten nicht mehr rekonstruieren lässt.



Systeme nach der Länge der Impulsantwort

- **Finite Impulse Response (FIR) Systeme:**
 - haben endlich lange Impulsantworten
 - synonym zum Begriff transversales System
 - endlich lange Impulsantworten lassen sich auch mit transversal-rekursiven Systemen erreichen
- **Infinite Impulse Response (IIR) Systeme:**
 - haben unendlich lange Impulsantworten
 - synonym zum Begriff rekursives System

6.3 Elementare Zeitdiskrete Systeme

6.3.1 Definition

Ein System, das sowohl linear, als auch zeitinvariant ist, nennen wir ein lineares zeitinvariantes System, oder kurz LTI-System

6.3.2 Kausalität und Stabilität

- **Kausal:** wenn die Anzahl der Pole (= Grad des Nennerpolynoms) größer gleich der Anzahl der Nullstellen (= Grad des Zählerpolynoms) ist.
- **Stabil:** wenn der Einheitskreis zum Konvergenzbereich gehört

Liegen alle Pole innerhalb des Einheitskreises, so ist das LTI-System kausal und stabil!

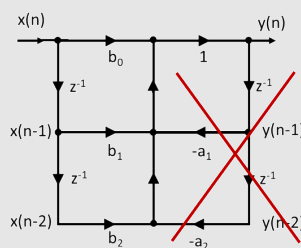
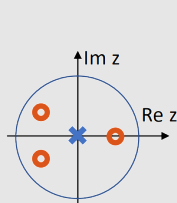
6.3.3 Klassifizierung von Systemen

• Transversale Systeme:

Der Ausgang wird nicht auf den Eingang zurückgeführt

$\Rightarrow a_k = 0$ für $k > 0$

\Rightarrow alle Pole liegen im Ursprung



• Rekursive Systeme:

Der aktuelle Ausgangswert hängt nur vom aktuellen Eingangswert und früheren Ausgangswerten ab.

$\Rightarrow b_k = 0$ für $k > 0$

\Rightarrow alle Nullstellen liegen im Ursprung

