
Formelsammlung

Ayham Alhalaibi
Signale und Systeme

22. Dezember 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Signale im Zeitbereich	1
1.1	Signalcharakterisierung	1
1.2	Elementarsignale	1
2	Systeme	2
2.1	Eigenschaften	2
2.2	LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)	2
2.2.1	Ein-/Ausgangsbeziehung	2
2.2.2	Faltung	2
2.3	Frequenzgang & Übertragungsfunktion	2
2.3.1	Pegel	3
2.4	Pole und Nullstellen	3
2.5	Elementare Übertragungsglieder	3
2.6	Zusammenschalten von Übertragungsgliedern	3
2.7	Bode Diagramm	3
3	Zweitore - Vierpoltheorie	4
3.1	Zweitorgleichungen	4
3.1.1	Parameterumrechnung	4
3.2	Zusammenschalten von Zweitoren	4
3.3	Matrizen elementarer Zweitore	5
3.3.1	Trennverstärker	6
3.3.2	Torbedingungen	6
3.4	Zweitoreigenschaften:	6
3.5	Zweitoreersatzschaltung	6
3.5.1	gesteuerte Quellen	6
3.5.2	Ersatzschaltbilder	6
3.6	Beschaltete Zweitore	7
3.6.1	Eingangsimpedanz	7
3.6.2	Ausgangsimpedanz	7
3.6.3	Ersatzquelle	7
3.6.4	Wellenwiderstand	7
3.6.5	Scheinleistungsanpassung	8
3.6.6	Kettenwiderstand	8
4	Signalдарstellung im Frequenz- und Bildbereich	8
4.1	Fourierreihe periodischer Signale	8
4.1.1	Reelle Fourierreihe	8
4.1.2	Komplexe Fourierreihe	8
4.1.3	Komplex Reell umwandeln	8
4.1.4	Symmetrieeigenschaften	8
4.1.5	Halbwellensymmetrie	8
4.1.6	Verschiebungssatz	9
4.1.7	Fourierreihe und LTI-Systeme	9
4.2	Kenngrößen periodischer Signale	9
4.3	Fouriertransformation	10
4.4	Fouriertransformation bei periodischer Signale	10
4.5	Eigenschaften der Fouriertransformation	10
4.6	Laplace Transformation	10
4.6.1	Eigenschaften Laplace Transformation	11
4.6.2	Rücktransformation rationaler Funktionen	11
4.7	LTI-Systeme im Bildbereich	11
4.7.1	Impuls- und Sprungantwort im Bildbereich	11
4.8	Systemantwort von LTI Systemen	11

1 Signale im Zeitbereich

1.1 Signalcharakterisierung

1. **Kontinuierlich** \longleftrightarrow **Diskret**

2. **Deterministisch** \longleftrightarrow **Stochastisch**
Deterministische Signale sind mathematisch beschreibbar, im Gegensatz zu stochastischen Signalen die dem Zufall unterworfen sind

3. **Periodisch** \longleftrightarrow **Aperiodisch**

periodisch wenn, $x(t) = x(t + T_p)$ gilt.
 T_p heißt Grundperiode.

4. **Gerade** \longleftrightarrow **Ungerade:**

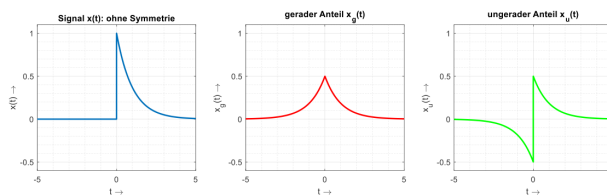
Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil:

$$x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

- ungerader Anteil:

$$x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$



5. **Energiesignal** \longleftrightarrow **Leistungssignal**

Energie:

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

6. Korrelation

Die Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier deterministischer Energiesignale.

Korrelationsfunktion

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

7. Transformation

Signale können modifiziert werden durch Verändern der unabhängigen Variablen:

- Zeitverschiebung
- Zeitdehnung und Stauchung
- Zeitumkehr

$$x_2(t) = x_1(-at + b)$$

das Argument von $x_1(\tau)$ stellt eine Abbildung $t \rightarrow \tau$ dar, daher bewirkt

- $+b/-b$ ($b > 0$) eine Verschiebung von $x_1(\tau)$ nach links / rechts
- eine Multiplikation mit a / Division durch a ($a > 1$) eine Stauchung / Streckung von $x_1(\tau)$
- Multiplikation mit -1 eine Spiegelung an der Ordinatenachse

Die Reihenfolge der Schritte ist nicht **EGAL**:
erst Verschieben um b , dann Skalieren/Invertieren mit $-a$

1.2 Elementarsignale

- Sprungfunktion ε

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Eigenschaften:

- Höhe unendlich
- Fläche = 1
- Zusammenhang mit Sprungfunktion
 $\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ bzw. $\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$
- Ausblendeigenschaft

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion $rect$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$rect(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

2 Systeme

2.1 Eigenschaften

1. Speicher

- Frei: wird durch eine xy-Kennlinie vollständig beschrieben

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

- behaftet: Bei diesen Systemen ist keine vollständige Beschreibung durch eine xy-Kennlinie möglich

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) + 2x(t-1)$$

2. Kausalität

Ausgangssignal hängt nur vom aktuellen und vorherigen Eingangssignal ab

$$\text{Kausal: z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

$$\text{Akausal: z.B. } y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$

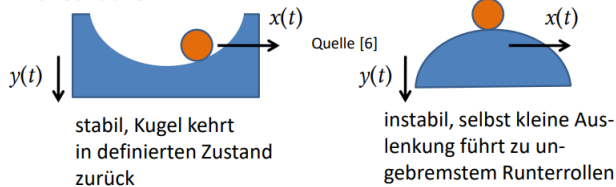
Speicherfreiheit & Kausalität: Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, aber nicht umgekehrt.

3. Stabilität

(Bounded Input → Bounded Output)

BIBO Stabilität: kleines/beschränktes Eingangssignal → kleine/beschränkte Antwort.

■ anschaulich:



z.B. für stabiles System

$$y(t) = 50 \cdot x^3(t)$$

z.B. für instabiles System

$$y(t) = e^t \cdot x(t)$$

4. Zeitinvariant ↔ Zeitvariant

- invariant: Systeme ändern sich **nicht** bei einer Zeitverschiebung.
- variant: Verschobenes Eingangssignal → verschobenes Ausgangssignal

5. Linearität

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt: Linearkombination von Eingangssignalen ruft entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale hervor

Bedeutung Linearität

eine Verdopplung der Eingangsgröße (z.B. Spannung) führt auch zu einer Verdopplung der Ausgangsgröße.

2.2 LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)

2.2.1 Ein-/Ausgangsbeziehung

- Addition
- Multiplikation
- Differentiation
- Integration
- Zeitverschiebung (Verzögerung)

2.2.2 Faltung

Aus der Impulsantwort eines LTI-Systems und dem Eingangssignal lässt sich das Ausgangssignal durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow (*) \text{ Faltung Operator}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

- Der Dirac-Impuls ist das neutrale Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Eine Faltung mit einem verschobenen Dirac-Impuls führt zur Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

Rechenregeln

- $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

2.3 Frequenzgang & Übertragungsfunktion

• Frequenzgang

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)}$$

• Amplitudengang

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

• Phasengang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

• Eigenfunktion

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : & \text{Eigenfunktion} \\ \lambda : & \text{Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = e^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S :

$$y(t) = S \{ e^{st} \} = \lambda \cdot e^{st}$$

Eigenwert kann wie folgt berechnet werden:

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau$$

• **Erweiterung der komplexen Wechselstromrechnung**

Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein Sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega$

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$

Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger des Ausgangssignals}}{\text{komplexer Zeiger des Eingangssignals}}$$

Die Übertragungsfunktion hängt von der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$ ab.

2.3.1 Pegel

Energiegröße: $a = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ dB}$

Feldgröße: $a = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} \text{ dB}$

2.4 Pole und Nullstellen

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n}$$

Die Koeffizienten a_n und b_m ergeben sich aus den Bauelementen und sind reell.

$$\underline{H}(s) = \frac{\text{SUMME ALLER NULLSTELLEN}}{\text{SUMME ALLER POLE}} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s - s_{o1}) \cdot (s - s_{o2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{oM})}{(s - s_{x1}) \cdot (s - s_{x2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{xN})}$$

$$k = \frac{b_M}{a_N} \text{ ist der Maßstabfaktor}$$

Bei stabilen Systemen müssen alle Pole in der linken komplexen Halbebene liegen.

2.5 Elementare Übertragungsglieder

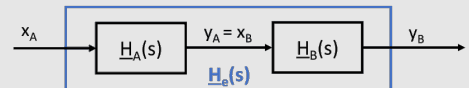
P-Glied, D-Glied, I-Glied, PT1-Glied Für mehr siehe externe Tabelle.

2.6 Zusammenschalten von Übertragungsgliedern

• Kettenschaltung

Multiplikation der Einzelübertragungsfunktionen.

$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) = \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)$$



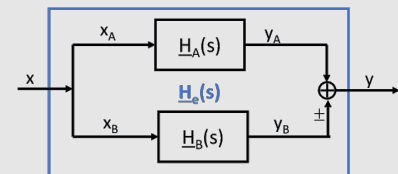
$$\underline{Y}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{Y}_A = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A$$

Rückwirkungsfreiheit gewährleistet sein.

• Parallelschaltung

Summe der Einzelübertragungsfunktionen.

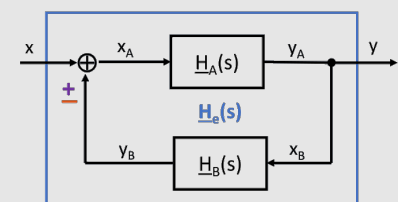
$$\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) + \underline{H}_A(s)$$



$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_A \pm \underline{Y}_B \\ &= \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A \pm \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B \\ &= (\underline{H}_A(s) \pm \underline{H}_B(s)) \cdot \underline{X} \end{aligned}$$

• Rückkopplung

$$\underline{H}_e(s) = \frac{\underline{H}_A(s)}{1 \pm \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}$$



Mitkopplung: y_A vergrößert x_A
Gegenkopplung y_A verkleinert x_A

2.7 Bode Diagramm

• Bode Diagramm von Kettenschaltung

Ergibt sich durch **Addition** der Bodediagramme der einzelnen Glieder.

• Bode Diagramm der inversen Übertragungsfunktion

Ergibt sich durch **Spiegelung an der X-Achse**.

3 Zweitoren - Vierpoltheorie

3.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix \mathbf{Y} :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Y} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix \mathbf{Z} :

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix \mathbf{H} :

$$\begin{cases} U_1 = H_{11} \cdot I_1 + H_{12} \cdot U_2 \\ I_2 = H_{21} \cdot I_1 + H_{22} \cdot U_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix \mathbf{C} :

$$\begin{cases} I_1 = C_{11} \cdot U_1 + C_{12} \cdot I_2 \\ U_2 = C_{21} \cdot U_1 + C_{22} \cdot I_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix \mathbf{A} :

$$\begin{cases} U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot (-I_2) \\ I_1 = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot (-I_2) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix \mathbf{B} :

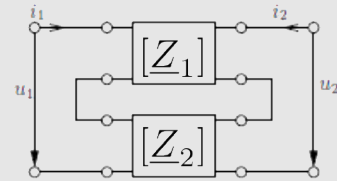
$$\begin{cases} U_2 = B_{11} \cdot U_1 + B_{12} \cdot (-I_1) \\ I_2 = B_{21} \cdot U_1 + B_{22} \cdot (-I_1) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$$

3.1.1 Parameterumrechnung

	\mathbf{Z}	\mathbf{Y}	\mathbf{H}	\mathbf{A}
\mathbf{Z}	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{\det \mathbf{Y}} & -\frac{Y_{12}}{\det \mathbf{Y}} \\ -\frac{Y_{21}}{\det \mathbf{Y}} & \frac{Y_{11}}{\det \mathbf{Y}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{H}}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det \mathbf{A}}{A_{21}} \\ 1 & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix}$
\mathbf{Y}	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\det \mathbf{Z}} & -\frac{Z_{12}}{\det \mathbf{Z}} \\ -\frac{Z_{21}}{\det \mathbf{Z}} & \frac{Z_{11}}{\det \mathbf{Z}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\det \mathbf{H}}{H_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & -\frac{\det \mathbf{A}}{A_{12}} \\ -1 & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix}$
\mathbf{H}	$\begin{bmatrix} \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det \mathbf{Y}}{Y_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det \mathbf{A}}{A_{22}} \\ -1 & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{bmatrix}$
\mathbf{A}	$\begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{21}} \\ 1 & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -1 \\ \frac{Y_{21}}{Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\det \mathbf{H}}{H_{21}} & -\frac{H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{H_{21}}{H_{21}} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

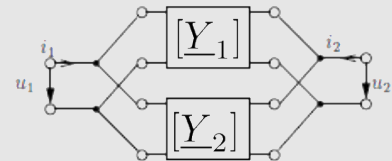
3.2 Zusammenschalten von Zweitoren

- Reihenschaltung:



$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}_1] + [\mathbf{Z}_2]$$

- Parallelschaltung:



$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}_1] + [\mathbf{Y}_2]$$

- Kettenschaltung:

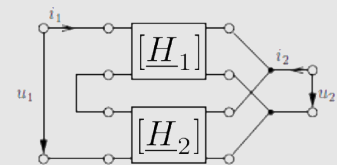


$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_1] \cdot [\mathbf{A}_2]$$

BEACHTET:

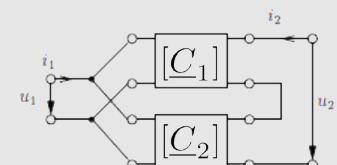
Im Allgemeinen gilt $\rightarrow [\mathbf{A}_1] \cdot [\mathbf{A}_2] \neq [\mathbf{A}_2] \cdot [\mathbf{A}_1]$

- Reihen-Parallelschaltung:



$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{H}_1] \cdot [\mathbf{H}_2]$$

- Parallel-Reihenschaltung:

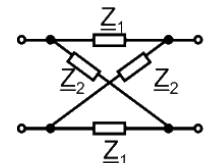
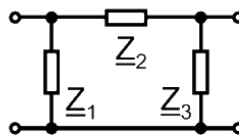
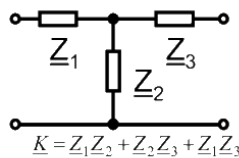


$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{C}_1] \cdot [\mathbf{C}_2]$$

3.3 Matrizen elementarer Zweitore

Schaltung	\underline{Z}	\underline{Y}	\underline{H}	\underline{C}	\underline{A}
	ne	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix}$
	ne	$\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	ne	ne	$\begin{pmatrix} 0 & \underline{u} \\ -\underline{u} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\underline{u}} \\ \frac{1}{\underline{u}} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{u}} \end{pmatrix}$

idealer Übertrager
 $\underline{u} = \frac{w_1}{w_2}$



$$[\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{Y}] \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & \frac{-\underline{Z}_2}{K} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} \\ \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} & \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{H}] \begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{C}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

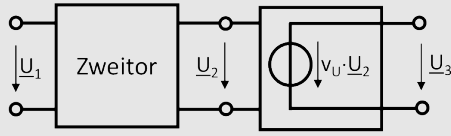
$$[\underline{A}] \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$$

3.3.1 Trennverstärker

Ersatzschaltbild eines idealen Trennverstärkers:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_e = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{v_U} & 0 \\ \frac{\underline{A}_{21}}{v_U} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Torbedingungen

Die Torbedingungen werden durch:

- idealen Übertrager
- Kurzschlusschleife
- Parallelschaltung längssymmetrischer Zweitore

erfüllt.

für die das Zusammenschalten von Zweitoren müssen diese Bedingungen eingehalten werden.

3.4 Zweitor Eigenschaften:

- Reziprozität (Umkehrbarkeit)

Z	$Z_{12} = Z_{21}$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$
A	$\det[A] = 1$
H	$H_{12} = -H_{21}$

Ein umkehrbares (reziprokes) Zweitor wird nur durch drei Parameter beschrieben:

(RLCM-Zweitor) ist immer umkehrbar.

Gegenbeispiel: idealer Transistor

- Rückwirkungsfreiheit

$$Z_{12} = Y_{12} = H_{12} = \det[A] = 0$$

Ein rückwirkungsfreies Zweitor ist nicht reziprok und wird nur durch drei Parameter beschrieben.

Beispiele: idealer Verstärker, idealer Transistor, gesteuerte Quellen

- Symmetrie

Z	$Z_{11} = Z_{22}$
Y	$Y_{11} = Y_{22}$
A	$A_{11} = A_{22}$
H	$\det[H] = 1$

Ein umkehrbares und symmetrisches Zweitor wird durch zwei Parameter beschrieben.

3.5 Zweitorersatzschaltung

3.5.1 gesteuerte Quellen

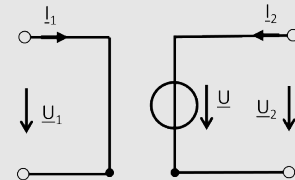
Ideal

VCVS: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

CCVS: Stromgesteuerte Spannungsquelle

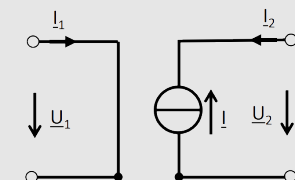
VCCS: Spannungsgesteuerte Stromquelle

CCCS: Stromgesteuerte Stromquelle



VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1$

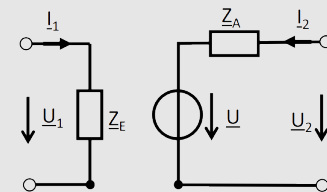


VCCS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1$

CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1$

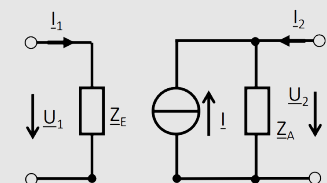
Andere Matrizen sind nicht definiert. Ideale (gesteuerte) Quellen lassen sich nicht ineinander umwandeln!

Linear



VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1 = \alpha Z_E \cdot \underline{I}_1$

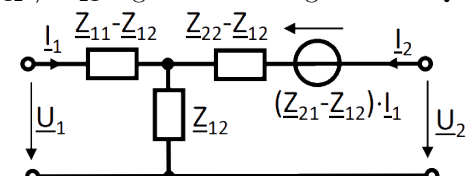


CCVS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1 = \alpha \frac{Z_E}{Z_A} \cdot \underline{I}_1$

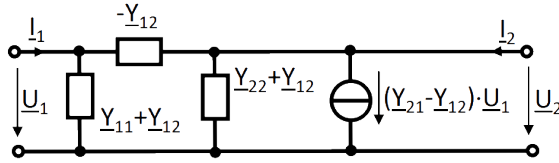
CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1 = \frac{\alpha}{Z_A} \cdot \underline{U}_1$

3.5.2 Ersatzschaltbilder

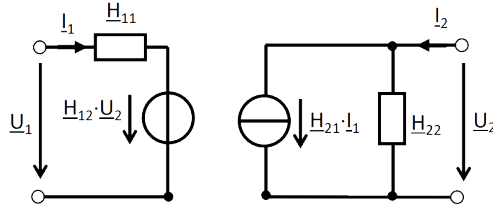
- T-Ersatzschaltbild für Z-Matrix für $Z_{12} \neq Z_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- II-Ersatzschaltbild für Y-Matrix
für $Y_{12} \neq Y_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- Hybrid-Ersatzschaltbild für H-Matrix



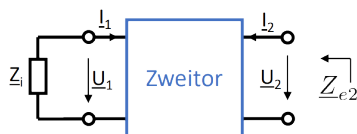
3.6 Beschaltete Zweitore

3.6.1 Eingangsimpedanz



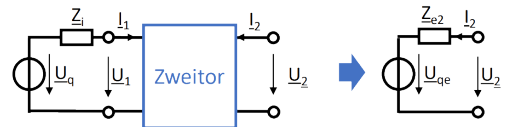
$$\begin{aligned} Z \rightarrow Z_{e1} &= Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_V} \\ Y \rightarrow Y_{e1} &= Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22} + Y_V} \\ A \rightarrow Z_{e1} &= \frac{A_{11}Z_V + A_{12}}{A_{21}Z_V + A_{22}} \\ H \rightarrow Z_{e1} &= H_{11} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{22} + Y_V} \\ C \rightarrow Y_{e1} &= C_{11} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{22} + Z_V} \end{aligned}$$

3.6.2 Ausgangsimpedanz



$$\begin{aligned} Z \rightarrow Z_{e2} &= Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_i} \\ Y \rightarrow Y_{e2} &= Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{11} + Y_i} \\ A \rightarrow Z_{e2} &= \frac{A_{22}Z_i + A_{12}}{A_{21}Z_i + A_{11}} \\ H \rightarrow Z_{e2} &= H_{22} - \frac{H_{12}H_{21}}{H_{11} + Y_i} \\ C \rightarrow Y_{e2} &= C_{22} - \frac{C_{12}C_{21}}{C_{11} + Z_i} \end{aligned}$$

3.6.3 Ersatzquelle



$$\begin{aligned} Z \rightarrow U_{qe} &= \frac{U_q Z_{21}}{Z_{11} + Z_i} \\ Y \rightarrow I_{qe} &= \frac{-I_q Y_{21}}{Y_{11} + Y_i} \\ A \rightarrow U_{qe} &= \frac{U_q}{Z_i A_{21} + A_{11}} \\ H \rightarrow I_{qe} &= \frac{-U_q H_{21}}{H_{11} + Z_i} \\ C \rightarrow U_{qe} &= \frac{I_q C_{21}}{C_{11} + Y_i} \end{aligned}$$

3.6.4 Wellenwiderstand

Beschaltet man den Ausgang eines Zweitors mit Z_{w2} , so liegt am Eingang die Impedanz Z_{w1} .

$$Z_{w1} = \frac{A_{11}Z_{w2} + A_{12}}{A_{21}Z_{w2} + A_{22}}$$

Beschaltet man den Eingang eines Zweitors mit Z_{w1} , so liegt am Ausgang die Impedanz Z_{w2} .

$$Z_{w2} = \frac{A_{22}Z_{w1} + A_{12}}{A_{21}Z_{w1} + A_{11}}$$

Lösung des obigen Gleichungssystems

	Z_{w1}	Z_{w2}
Z	$\sqrt{\frac{Z_{11} \det Z}{Z_{22}}}$	$\sqrt{\frac{Z_{22} \det Z}{Z_{11}}}$
Y	$\sqrt{\frac{Y_{22} \det Y}{Y_{11}}}$	$\sqrt{\frac{Y_{11} \det Y}{Y_{22}}}$
A	$\sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}}$	$\sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}}$
H	$\sqrt{\frac{H_{11} \det H}{H_{22}}}$	$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \det H}}$
C	$\sqrt{\frac{C_{22} \det C}{C_{11} \det C}}$	$\sqrt{\frac{C_{11} \det C}{C_{11}}}$

Für symmetrische Zweitore gilt $Z_{w1} = Z_{w2}$

Alternatives:

Messtechnisch (Leerlauf und Kurzschluss)

$$\left. \begin{aligned} Z_{01} &= \frac{A_{11} \cdot \infty + A_{12}}{A_{21} \cdot \infty + A_{22}} \\ Z_{k1} &= \frac{A_{11} \cdot 0 + A_{12}}{A_{21} \cdot 0 + A_{22}} \end{aligned} \right\} Z_{w1} = \sqrt{Z_{k1} \cdot Z_{01}} = A(Z_{w1})$$

3.6.5 Scheinleistungsanpassung

Wiederholung GE2 Kapitel 2.7.8

Beschaltet man ein Zweitor mit seinen Wellenwiderständen, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

3.6.6 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand einem Grenzwert, dem **Kettenwiderstand** \underline{Z}_K .

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_K}$$

Lösung der obigen Gleichung:

$$\underline{Z}_K = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22})^2 + 4 \cdot \det \underline{Z}})$$

Für symmetrische Zweitore entspricht der Kettenwiderstand dem Wellenwiderstand.

4 Signaldarstellung im Frequenz- und Bildbereich

4.1 Fourierreihe periodischer Signale

Die Überlagerung von Sinusschwingungen zu einem periodischen, nichtsinusförmigen Signal nennt man harmonische Synthese.

4.1.1 Reelle Fourierreihe

- mit \sin und \cos :

$$f(t) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

- mit Amplitude und Phase:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2})] \end{aligned}$$

Koeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$$

4.1.2 Komplexe Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot e^{-j\omega_1 k t} dt = \frac{1}{2} (a_k - j b_k)$$

4.1.3 Komplex Reell umwandeln

Komplex \rightarrow Reell:

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 = \underline{c}_0 \\ \left. \begin{aligned} a_k &= 2 \operatorname{Re} \{ \underline{c}_k \} = [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \\ b_k &= -2 \operatorname{Im} \{ \underline{c}_k \} = j [\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \\ A_k &= 2 |\underline{c}_k| \quad \beta_k = -\varphi_k \end{aligned} \right\} \quad k > 0 \end{aligned}$$

Reell \rightarrow Komplex:

$$\begin{aligned} \underline{c}_k &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{-j\beta_k} \\ \underline{c}_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + j b_k) = \frac{A_k}{2} e^{j\beta_k} \end{aligned} \quad k > 0$$

4.1.4 Symmetrieeigenschaften

- Gerade Funktionen symmetrisch zur y-Achse
alle \sin -teile verschwinden - $A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt$
- $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$
- $b_k = 0$
- Ungerade Funktionen symmetrisch zum Ursprung
alle \cos -teile und Gleichanteil verschwinden
- $A_0 = 0$
- $a_k = 0$
- $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$

4.1.5 Halbwellensymmetrie

Halbwellensymmetrie gilt wenn:

$$y(t) = -y(t \pm T/2)$$

Die Fourier-Reihe einer Zeitfunktion mit HWS enthält stets nur Terme mit ungeraden Ordnungszahlen.

$$k = 1, 3, 5, \dots, \infty$$

im Allgemeinen

Koeffizienten:

$$A_0 = 0, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

$$b_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

gerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, b_k = 0, a_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

ungerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, a_k = 0, b_{2k} = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

4.1.6 Verschiebungssatz

Verschiebung im Zeitbereich entspricht eine Drehung den Komplexen Spektrum um die Phase $\rightarrow -k\omega_1 t_v$

$$f_v(t) = f(t - t_v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\omega_1 k(t-t_v)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k \cdot e^{j\omega_1 k t_v}}_{c_{k_v}} \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

Ist $t_v < 0$, wie im Beispiel oben, so werden die Phasenwinkel des Spektrums mit zunehmender Frequenz größer.

4.1.7 Fourierreihe und LTI-Systeme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(k\omega_1) \cdot c_{xk}}_{c_{yk}} \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

4.2 Kenngrößen periodischer Signale

- Effektivwert

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u(t)^2 dt}$$

mit der Fourierreihe:

$$U_{eff} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{k,eff}^2}$$

auch:

$$\sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}$$

- Klirrfaktor(Oberschwingungsgehalt):
Dient zur Quantifizierung einer nichtlinearen Verzerrung bzw. von der Sinusform eines Signals.

$$k = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Wechselanteil}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} = \frac{\sqrt{U_{\sim}^2 - U_1^2}}{U_{\sim}} \leq 1$$

Für Wechselgrößen lässt sich k einfach mit **Grundschwungsgehalt** g ermitteln (*gilt immer*):

$$k = \sqrt{1 - g^2} \leftrightarrow g = \frac{U_1}{U}$$

- Mischgrößen

- Schwungsgehalt:

$$s = \frac{U_{\sim}}{U} = \frac{\text{EFFEKTIVWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{EFFEKTIVWERT DER MISCHGRÖSSE}}$$

- Welligkeit:

$$w = \frac{U_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{EFFEKTIVWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{GLEICHANTEIL}}$$

- Riffelfaktor:

$$R = \frac{\hat{U}_{\sim}}{\bar{U}} = \frac{\text{SCHEITELWERT DES WECHSELANTEILS}}{\text{GLEICHANTEIL}}$$

- Wirkleistung:

$$P = \bar{p}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* \leftrightarrow i_k^* = i_{-k}$$

Als Reihe:

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k,eff} \cdot I_{k,eff} \cdot \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Nur gleichfrequente harmonische tragen zur Wirkleistung bei!

- Schein- und Blindleistung

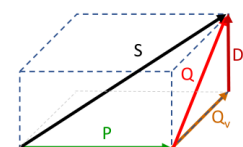
$$S = U_{eff} \cdot I_{eff} = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Bei einem nicht linearen Verbraucher an einer Sinusförmigen Spannung:

$$S^2 = (UI)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 =$$

$$U_1^2 I_0^2 + U_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 + U_1^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1$$

Räumlich Darstellung der Scheinleistung:



Verschiebungs- Feldblindleistung Q_v

$$Q = \sqrt{Q_v^2 + D^2} \leftrightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q_v^2 + D^2}$$

Blindleistung aufgrund der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gleicher Frequenz.

Verzerrungsleistung D

$$D^2 = U_1^2 \cdot (I^2 - I_1^2) = S^2(1 - g)$$

von Mischtermen (Produkten von Spannung und Strom unterschiedlicher Frequenzen).

4.3 Fouriertransformation

$$x(t) \circ \bullet X(\omega)$$

Hintransformation - Analysegleichung:

$$\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Komplexwertige Fouriertransformierte:

$$\underline{X}(\omega) = |\underline{X}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi}$$

Einheit: $[x(t)] \cdot s$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

4.4 Fouriertransformation bei periodischer Signale

Fouriertransformierte periodischer Signale:

$$\underline{X}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(\omega - k\omega_1)$$

Fourierkoeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{T} \underline{X}(\omega_1) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega_1 t} dt$$

Die Koeffizienten c_k der komplexen Fourierreihe sind die Abtastwerte von $\underline{X}(\omega)$ bei den Frequenzen

$$\omega = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{T}$$

4.5 Eigenschaften der Fouriertransformation

• Linearität

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \circ \bullet a_1 \underline{X}_1(\omega) + a_2 \underline{X}_2(\omega)$$

• Dualität

$$\underline{X}(t) \circ \bullet 2\pi \cdot x(-\omega)$$

• Zeitskalierung

$$x(a \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \underline{X}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Frequenzskalierung

$$\frac{1}{|b|} x\left(\frac{t}{b}\right) \circ \bullet \underline{X}(b \cdot \omega) \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

• Zeitverschiebung

$$x(t - t_0) \circ \bullet \underline{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

• Frequenzverschiebung - Modulation

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \circ \bullet \underline{X}(\omega - \omega_0)$$

• Faltungssatz

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \bullet \underline{X}_1(\omega) \cdot \underline{X}_2(\omega)$$

• Multiplikation - Fenstertheorem

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} \underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$$

• Differentiation

im Zeitbereich:

$$\frac{d}{dt} x(t) \circ \bullet j\omega \underline{X}(\omega)$$

im Frequenzbereich:

$$t \cdot x(t) \circ \bullet j \frac{d}{d\omega} \underline{X}(\omega)$$

• Integration

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{j\omega} \underline{X}(\omega) + \pi \cdot \underline{X}(0) \cdot \delta(\omega)$$

• Energieberechnung - Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(\omega)|^2 d\omega$$

Symmetrie

Betrag und der Realteil des Spektrums sind gerade

Phase und der Imaginärteil des Spektrums sind ungerade.

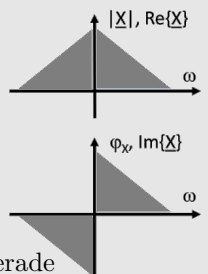
$$\underline{X}(-\omega) = \underline{X}^*(\omega)$$

$x(t)$ reell und gerade $\rightarrow \underline{X}(\omega)$ reell und gerade

$$\underline{X}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

$x(t)$ reell und ungerade $\rightarrow \underline{X}(\omega)$ imaginär und ungerade

$$\underline{X}(\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$



4.6 Laplace Transformation

$$x(t) \circ \bullet \underline{X}(s)$$

Hintransformation - Analysegleichung

$$\underline{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{X}(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{X}(s)e^{-st} ds$$

4.6.1 Eigenschaften Laplace Transformation

- **Linearität**

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \circ \bullet \alpha \underline{X}_1(s) + \beta \underline{X}_2(s)$$

- **Skalierung im Zeitbereich**

$$x(\alpha t) \circ \bullet \frac{1}{\alpha} \underline{X}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \alpha > 0$$

- **Skalierung im Bildbereich**

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \circ \bullet \underline{X}(\alpha s) \quad \alpha > 0$$

- **Verschiebung im Zeitbereich**

$$x(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} \underline{X}(s) \quad t_0 > 0$$

- **Verschiebung im Bildbereich - Modulation**

$$e^{at} x(t) \circ \bullet \underline{X}(s - a)$$

- **Faltung**

$$x_1(t) * x_2(t) \circ \bullet \underline{X}_1(s) \cdot \underline{X}_2(s)$$

- **Differentiation im Zeitbereich**

$$\frac{d}{dt} x(t) \circ \bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

- **Differentiation im Bildbereich**

$$t \cdot x(t) \circ \bullet - \frac{d}{ds} \underline{X}(s)$$

- **Integration im Zeitbereich**

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} \underline{X}(s)$$

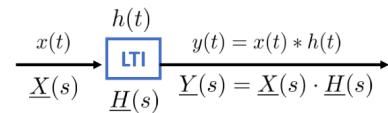
- **Integration im Bildbereich**

$$\frac{1}{t} x(t) \circ \bullet \int_s^{\infty} \underline{X}(s) ds$$

4.6.2 Rücktransformation rationaler Funktionen

Partialbruchzerlegung: Siehe papula nach S.157

4.7 LTI-Systeme im Bildbereich



4.7.1 Impuls- und Sprungantwort im Bildbereich

Impulsantwort:

$$h(t) \circ \bullet \underline{H}(s)$$

durch integrationssatz:

$$g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

Sprungantwort:

$$g(t) \circ \bullet \frac{\underline{H}(s)}{s}$$

4.8 Systemantwort von LTI Systemen

