Formelsammlung

Ayham Alhalaibi
Signale und Systeme

27. November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Signale im Zeitbereich

1.1 Signalcharakterisierung

1. **Kontinuierlich** $\longleftrightarrow$ **Diskret**
2. **Deterministisch** $\longleftrightarrow$ **Stochastisch**
   Deterministische Signale sind mathematisch beschreibbar, im gegensatz zu stochastischen Signalen die dem Zufall unterworfen sind
3. **Periodisch** $\longleftrightarrow$ **Aperiodisch**

   periodisch wenn, $x(t) = x(t + T_p)$ gilt.
   T_p heißt Grundperiode.

4. **Gerade** $\longleftrightarrow$ **Ungerade:**

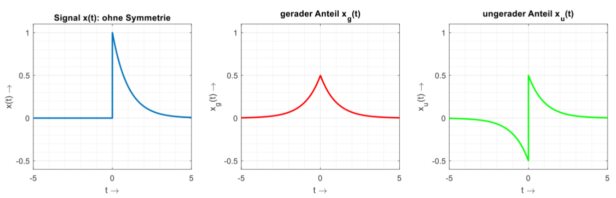
   Zerlegung des Signals:

   - gerader Anteil:

   $$x_G = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(t-1)\right]$$

   - ungerader Anteil:

   $$x_U = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$



5. **Energiesignal** $\longleftrightarrow$ **Leistungssignal**

   Energie:
   $$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$
   Leistung:
   $$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

6. **Korrelation**
   Die Korrelationsfunktion ist eine Maß für die Ähnlichkeit zweier deterministischer Energiesignale.

   Korrelationsfunktion

   $$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t+\tau) dt$$

7. **Transformation**
   Signale könnenn modifiziert werden durch Verändern der unabhängigen Variablen:
   - Zeitverschiebung
   - Zeitdehnung und Stauchung
   - Zeitumkehr

   $$x_2(t) = x_1(-at + b)$$

   das Argument von $x_1(\tau)$ stellt eine Abbildung $t \to \tau$ dar, daher bewirkt

   - $+b/-b$ $(b > 0)$ eine Verschiebung von $x_1(\tau)$ nach links / rechts
   - eine Multiplikation mit a / Division durch a $(a > 1)$ eine Stauchung / Streckung von $x_1(\tau)$
   - Multiplikation mit -1 eine Spiegelung an der Ordinatenachse

   Die Reihenfolge der Schritte ist nicht **EGAL**:
   erst Verschieben um b, dann Skalieren/Invertieren mit $-a$

1.2 Elementarsignale

- Sprungfunktion ε

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Eigenschaften:

- Höhe unendlich
- Fläche = 1
- Zusammenhang mit Sprungfunktion
  $\int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ bzw. $\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)$
- Ausblendeigenschaft

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion $rect$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:
$rect(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

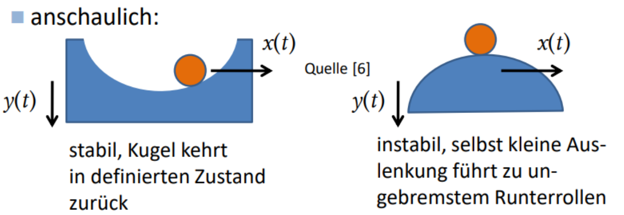
2 Systeme

2.1 Eigenschaften

1. **Speicher**
   • Frei: wird durch eine xy-Kennlinie vollständig beschrieben
   $$\text{z.B.} \quad y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$
   • behaftet: Bei diesen Systemen ist keine vollständige Beschreibung durch eine xy-Kennline möglich
   $$\text{z.B.} \quad y(t) = x(t) + 2x(t-1)$$

2. **Kausalität**
   Ausgangssignal hängt nur vom aktuellen und vorherigen Eingangssignal ab
   $$\text{Kausal: z.B.} \quad y(t) = \int_{t-5}^{t} x(\tau) d\tau$$
   $$\text{Akausal: z.B.} \quad y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$
   Speicherfreiheit & Kausalität: Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, aber nicht umgekehrt.

3. **Stabilität**
   (Bounded Input → Bounded Output)
   BIBO Stabilität: kleines/beschränktes Eingangssignal → kleine/beschränkte Antwort.



   z.B. für stabiles System
   $$y(t) = 50 \cdot x^3(t)$$
   z.B. für instabiles System
   $$y(t) = e^t \cdot x(t)$$

4. **Zeitinvariant↔Zeitvariant**
   • invariant: Systeme ändern sich **nicht** bei einer Zeitverschiebung.
   • variant: Verschobenes Eingangssignal → verschobenes Ausgangssignal

5. **Liniarität**
   Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt: Linearkombination von Eingangssignalen ruft entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale hervor

Bedeutung Liniarität

eine Verdopplung der Eingangsgröße (z.B. Spannung) führt auch zu einer Verdopplung der Ausgangsgröße.

2.2 LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)

2.2.1 Ein-/Ausgangsbeziehung

- Addition
- Multiplikation
- Differentiation
- Integration
- Zeitverschiebung(Verzögerung)

2.2.2 Faltung

Aus der Impulsantwort eines LTI-Systems und dem Eingangssignal lässt sich das Ausgangssignal durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow (*) \text{ Faltung Operator}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau}$$

• Der Dirac-Impuls ist das neutrale Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

• Eine Faltung mit einem verschobenen Dirac-Impuls führt zur Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

Rechenregeln

- $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

2.2.3 Frequenzgang & Übertragungsfunktion

- **Frequenzgang**
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U_2}(\omega)}{\underline{U_1}(\omega)}$$

- **Amplitudengang**
$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- **Phasengang**
$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$
$$\varphi_H = \arctan(\frac{\mathfrak{Im}}{\mathfrak{Re}})$$

- **Eigenfunktion**
$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t): & \text{Eigenfunktion} \\ \lambda: & \text{Eigenwert}(\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = \mathrm{e}^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S:

$$y(t) = S\left\{\mathrm{e}^{st}\right\} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{st}$$

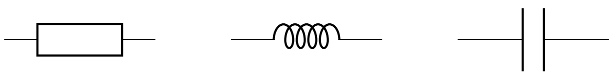
Eigenwert kann wie folgt berechnet werden:

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\ \mathrm{e}^{-st} d\tau$$

- **Erweiterung der komplexen Wechselstromrechnung**
  Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega$

$$\sigma \triangleq Amplitude \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq Rotation \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$



$\underline{Z}(s) = R$ $\quad$ $\underline{Z}(s) = s \cdot L$ $\quad$ $\underline{Z}(s) = \frac{1}{s \cdot C}$

Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U_2}(s)}{\underline{U_1}(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger des Ausgangssignals}}{\text{komplexer Zeiger des Eingangssignals}}$$

Die Übertragungsfunktion hängt von der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$ ab.

3 Zweitore - Vierpoltheorie

3.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix **Y**:

$$\left.\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\cdot\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\cdot\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\cdot\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\cdot\underline{U}_2\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix **Z**:

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\cdot\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\cdot\underline{I}_2\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix **H**:

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\cdot\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\cdot\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\cdot\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\cdot\underline{U}_2\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix **C**:

$$\left.\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{C}_{11}\cdot\underline{U}_1 + \underline{C}_{12}\cdot\underline{I}_2\\ \underline{U}_2 &= \underline{C}_{21}\cdot\underline{U}_1 + \underline{C}_{22}\cdot\underline{I}_2\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix **A**:

$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\cdot\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\cdot -\underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\cdot\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\cdot -\underline{I}_2\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ -\underline{I}_2\end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix **B**:

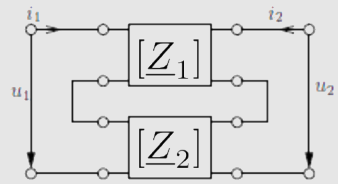
$$\left.\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{B}_{11}\cdot\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\cdot -\underline{I}_1\\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21}\cdot\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\cdot -\underline{I}_1\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ -\underline{I}_1\end{pmatrix}$$

3.1.1 Parameterumrechnung

	Z	Y	H	A
Z	$\begin{bmatrix}\underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12}\\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\underline{Y}_{22}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}}\\ \frac{-\underline{Y}_{21}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}} & \frac{\underline{Y}_{11}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\det\underline{\boldsymbol{H}}}{\underline{H}_{22}} & \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}\\ \frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} & \frac{1}{\underline{H}_{22}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{A}}}{\underline{A}_{21}}\\ \frac{1}{\underline{A}_{21}} & \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}\end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix}\frac{\underline{Z}_{22}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}} & \frac{-\underline{Z}_{12}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}\\ \frac{-\underline{Z}_{21}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}} & \frac{\underline{Z}_{11}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12}\\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{\underline{H}_{11}} & \frac{-\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}\\ \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{H}}}{\underline{H}_{11}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} & \frac{-\det\underline{\boldsymbol{A}}}{\underline{A}_{12}}\\ \frac{-1}{\underline{A}_{12}} & \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}\end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix}\frac{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}{\underline{Z}_{22}} & \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}\\ \frac{-\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}} & \frac{1}{\underline{Z}_{22}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{\underline{Y}_{11}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}\\ \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{Y}}}{\underline{Y}_{11}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\underline{H}_{11} & \underline{H}_{12}\\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{A}}}{\underline{A}_{22}}\\ \frac{-1}{\underline{A}_{22}} & \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}\end{bmatrix}$
A	$\begin{bmatrix}\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}{\underline{Z}_{21}}\\ \frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{-1}{\underline{Y}_{21}}\\ \frac{-\det\underline{\boldsymbol{Y}}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{-\det\underline{\boldsymbol{H}}}{\underline{H}_{21}} & \frac{-\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}\\ \frac{-\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} & \frac{-1}{\underline{H}_{21}}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\underline{A}_{11} & \underline{A}_{12}\\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22}\end{bmatrix}$

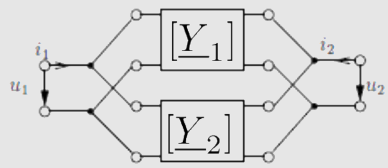
3.2 Zusammenschalten von Zweitoren

- Reihenschaltung:



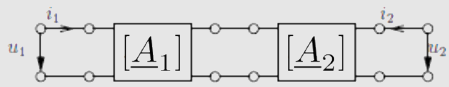
$$[\underline{Z}] = [\underline{Z}_1] + [\underline{Z}_2]$$

- Parallelschaltung:



$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}_1] + [\underline{Y}_2]$$

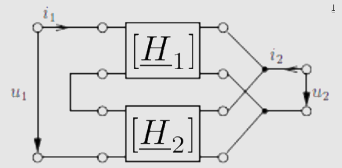
- Kettenschaltung:



$$[\underline{A}] = [\underline{A}_1]\cdot[\underline{A}_2]$$

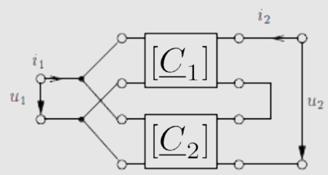
Beachte:
Im Allgemeinen gilt $\rightarrow [\underline{A}_1]\cdot[\underline{A}_2] \neq [\underline{A}_2]\cdot[\underline{A}_1]$

- Reihen-Parallelschaltung:



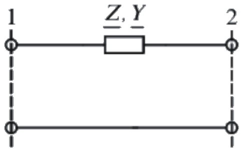
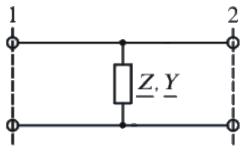
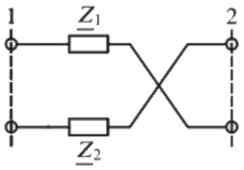
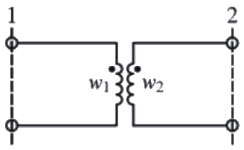
$$[\underline{H}] = [\underline{H}_1]\cdot[\underline{H}_2]$$

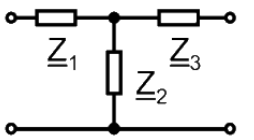
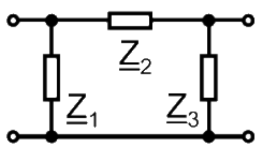
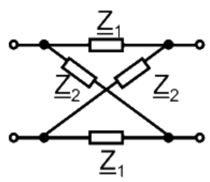
- Parallel-Reihenschaltung:



$$[\underline{C}] = [\underline{C}_1]\cdot[\underline{C}_2]$$

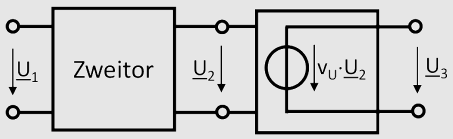
3.3 Matrizen elementarer Zweitore

Schaltung	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$	$\underline{H}$	$\underline{C}$	$\underline{A}$
	ne	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix}$
	ne	$\frac{1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Z}_1+\underline{Z}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 idealer Übertrager $\ddot{u} = \frac{w_1}{w_2}$	ne	ne	$\begin{pmatrix} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \\ \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{pmatrix}$

	 $\underline{K} = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3$		
[$\underline{Z}$]	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{2} & \frac{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{2} \end{bmatrix}$
[$\underline{Y}$]	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{K}} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{K}} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{K}} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{\underline{K}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_2-\underline{Y}_1}{2} \\ \frac{\underline{Y}_2-\underline{Y}_1}{2} & \frac{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2}{2} \end{bmatrix}$
[$\underline{H}$]	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{K}}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \\ \frac{-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$	
[$\underline{C}$]	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \underline{Z}_3+\frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)} & \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	
[$\underline{A}$]	$\begin{bmatrix} 1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1+\underline{Z}_3+\frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1+\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3} & 1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$

3.3.1 Trennverstärker

Ersatzschaltbild eines idealen Trennverstärkers:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_e = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{v_U} & 0 \\ \frac{\underline{A}_{21}}{v_U} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Torbedingungen

Die Torbedingungen werden durch:

- idealen Übertrager
- Kurzschlussschleife
- Parallelschaltung längssymmetrischer Zweitore

erfüllt.

für die das Zusammenschalten von Zweitoren müssen diese Bedingungen eingehalten werden.

3.4 Zweitor Eigenschaften:

- Reziprozität (Umkehrbarkeit)

Z	$Z_{12} = Z_{21}$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$
A	$\det[A] = 1$
H	$H_{12} = -H_{21}$

Ein umkehrbares (reziprokes) Zweitor wird nur durch drei Parameter beschrieben:

(RLCM-Zweitor)ist immer umkehrbar.

Gegenbeispiel: idealer Transistor

- Rückwirkungsfreiheit

$$Z_{12} = Y_{12} = H_{12} = \det[A] = 0$$

Ein rückwirkungsfreies Zweitor ist nicht reziprok und wird nur durch drei Parameter beschrieben.

Beispiele: idealer Verstärker, idealer Transistor, gesteuerte Quellen

- Symmetrie

Z	$Z_{11} = Z_{22}$
Y	$Y_{11} = Y_{22}$
A	$A_{11} = A_{22}$
H	$\det[H] = 1$

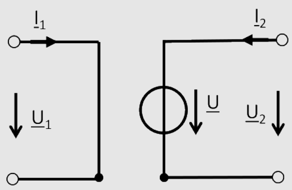
Ein umkehrbares und symmetrisches Zweitor wird durch zwei Parameter beschrieben.

3.5 Zweitorersatzschaltung

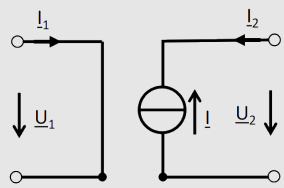
3.5.1 gesteuerte Quellen

Ideal

VCVS: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle
CCVS: Stromgesteuerte Spannungsquelle
VCCS: Spannungsgesteuerte Stromquelle
CCCS: Stromgesteuerte Stromquelle



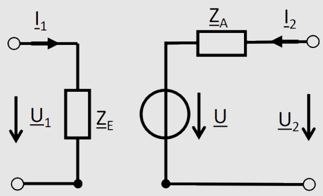
VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$
CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1$



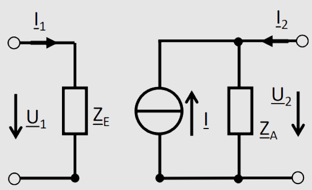
VCCS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1$
CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1$

Andere Matrizen sind nicht definiert. Ideale (gesteuerte) Quellen lassen sich nicht ineinander umwandeln!

Linear



VCVS $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$
CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1 = \alpha Z_E \cdot \underline{I}_1$

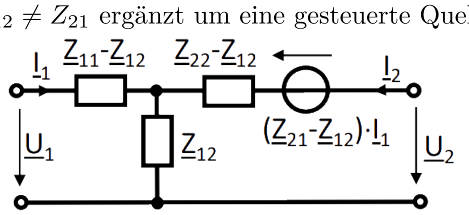


CCVS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1 = \alpha \frac{Z_E}{Z_A} \cdot \underline{I}_1$
CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1 = \frac{\alpha}{Z_A} \cdot \underline{U}_1$

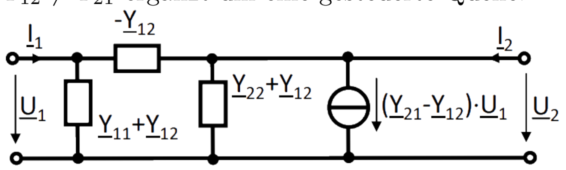
3.5.2 Ersatzschaltbilder

- T-Ersatzschaltbild für Z-Matrix

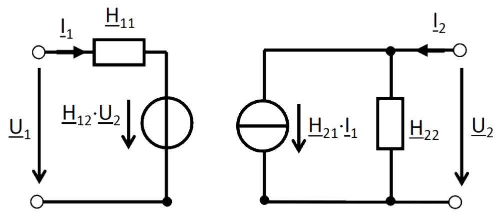
für $Z_{12} \neq Z_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- Π-Ersatzschaltbild für Y-Matrix
  für $Y_{12} \neq Y_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.

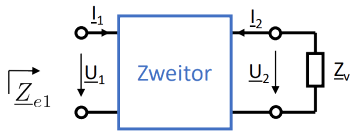


- Hybrid-Ersatzschaltbild für H-Matrix



3.6 Beschaltete Zweitore

3.6.1 Eingangsimpedanz



$$\boldsymbol{Z} \to \underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_V}$$

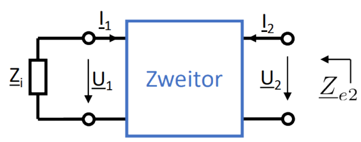
$$\boldsymbol{Y} \to \underline{Y}_{e1} = \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_V}$$

$$\boldsymbol{A} \to \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_V + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_V + \underline{A}_{22}}$$

$$\boldsymbol{H} \to \underline{Z}_{e1} = \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_V}$$

$$\boldsymbol{C} \to \underline{Y}_{e1} = \underline{C}_{11} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{22} + \underline{Z}_V}$$

3.6.2 Ausgangsimpedanz



$$\boldsymbol{Z} \to \underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i}$$

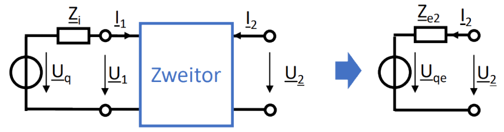
$$\boldsymbol{Y} \to \underline{Y}_{e2} = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i}$$

$$\boldsymbol{A} \to \underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_i + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_i + \underline{A}_{11}}$$

$$\boldsymbol{H} \to \underline{Z}_{e2} = \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Y}_i}$$

$$\boldsymbol{C} \to \underline{Y}_{e2} = \underline{C}_{22} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Z}_i}$$

3.6.3 Ersatzquelle



$$\boldsymbol{Z} \to \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i}$$

$$\boldsymbol{Y} \to \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{I}_q\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i}$$

$$\boldsymbol{A} \to \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11}}$$

$$\boldsymbol{H} \to \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{U}_q\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Z}_i}$$

$$\boldsymbol{C} \to \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{I}_q\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_i}$$