
Formelsammlung

Ayham Alhalaibi
Signale und Systeme

29. November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Signale im Zeitbereich

1.1 Signalcharakterisierung

1. **Kontinuierlich** \longleftrightarrow **Diskret**

2. **Deterministisch** \longleftrightarrow **Stochastisch**
Deterministische Signale sind mathematisch beschreibbar, im Gegensatz zu stochastischen Signalen die dem Zufall unterworfen sind

3. **Periodisch** \longleftrightarrow **Aperiodisch**

periodisch wenn, $x(t) = x(t + T_p)$ gilt.
 T_p heißt Grundperiode.

4. **Gerade** \longleftrightarrow **Ungerade:**

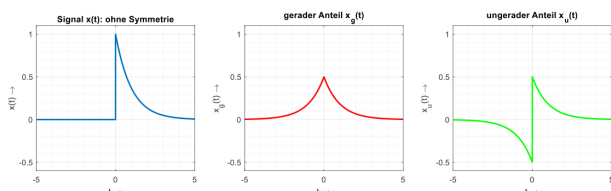
Zerlegung des Signals:

- gerader Anteil:

$$x_G = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

- ungerader Anteil:

$$x_U = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$



5. **Energiesignal** \longleftrightarrow **Leistungssignal**

Energie:

$$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Leistung:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

6. Korrelation

Die Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier deterministischer Energiesignale.

Korrelationsfunktion

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt$$

7. Transformation

Signale können modifiziert werden durch Verändern der unabhängigen Variablen:

- Zeitverschiebung

- Zeitdehnung und Stauchung
- Zeitumkehr

$$x_2(t) = x_1(-at + b)$$

das Argument von $x_1(\tau)$ stellt eine Abbildung $t \rightarrow \tau$ dar, daher bewirkt

- $+b/-b$ ($b > 0$) eine Verschiebung von $x_1(\tau)$ nach links / rechts
- eine Multiplikation mit a / Division durch a ($a > 1$) eine Stauchung / Streckung von $x_1(\tau)$
- Multiplikation mit -1 eine Spiegelung an der Ordinatenachse

Die Reihenfolge der Schritte ist nicht **EGAL**:
erst **Verschieben** um b , dann **Skalieren/Invertieren** mit $-a$

1.2 Elementarsignale

- Sprungfunktion ε

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Eigenschaften:

- Höhe unendlich
- Fläche = 1
- Zusammenhang mit Sprungfunktion
 $\int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ bzw. $\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \delta(t)$
- Ausblendeigenschaft

$$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

- Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion $rect$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Darstellbar durch:

$$rect(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

2 Systeme

2.1 Eigenschaften

1. Speicher

- Frei: wird durch eine xy-Kennlinie vollständig beschrieben

$$\text{z.B. } y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

- behaftet: Bei diesen Systemen ist keine vollständige Beschreibung durch eine xy-Kennlinie möglich

$$\text{z.B. } y(t) = x(t) + 2x(t-1)$$

2. Kausalität

Ausgangssignal hängt nur vom aktuellen und vorherigen Eingangssignal ab

$$\text{Kausal: z.B. } y(t) = \int_{t-5}^t x(\tau) d\tau$$

$$\text{Akausal: z.B. } y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$

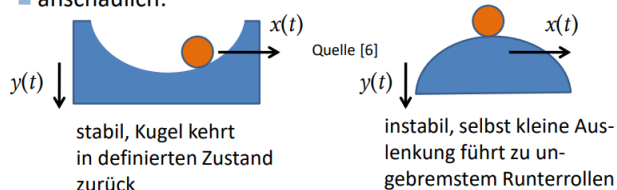
Speicherfreiheit & Kausalität: Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, aber nicht umgekehrt.

3. Stabilität

(Bounded Input \rightarrow Bounded Output)

BIBO Stabilität: kleines/beschränktes Eingangssignal \rightarrow kleine/beschränkte Antwort.

■ anschaulich:



z.B. für stabiles System

$$y(t) = 50 \cdot x^3(t)$$

z.B. für instabiles System

$$y(t) = e^t \cdot x(t)$$

4. Zeitinvariant \leftrightarrow Zeitvariant

- invariant: Systeme ändern sich **nicht** bei einer Zeitverschiebung.
- variant: Verschiebenes Eingangssignal \rightarrow verschobenes Ausgangssignal

5. Linearität

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt: Linearkombination von Eingangssignalen ruft entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale hervor

Bedeutung Linearität

eine Verdopplung der Eingangsgröße (z.B. Spannung) führt auch zu einer Verdopplung der Ausgangsgröße.

2.2 LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)

2.2.1 Ein-/Ausgangsbeziehung

- Addition
- Multiplikation
- Differentiation
- Integration
- Zeitverschiebung (Verzögerung)

2.2.2 Faltung

Aus der Impulsantwort eines LTI-Systems und dem Eingangssignal lässt sich das Ausgangssignal durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow (*) \text{ Faltung Operator}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

- Der Dirac-Impuls ist das neutrale Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Eine Faltung mit einem verschobenen Dirac-Impuls führt zur Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t - a) = x(t - a)$$

Rechenregeln

- $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

2.2.3 Frequenzgang & Übertragungsfunktion

- Frequenzgang

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)}$$

- Amplitudengang

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- Phasengang

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\Im}{\Re}\right)$$

- Eigenfunktion

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t) : & \text{Eigenfunktion} \\ \lambda : & \text{Eigenwert} (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = e^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S :

$$y(t) = S \{e^{st}\} = \lambda \cdot e^{st}$$

Eigenwert kann wie folgt berechnet werden:

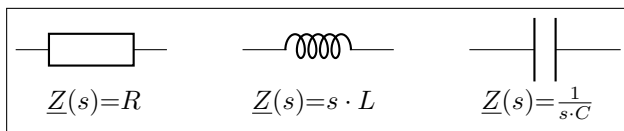
$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-st} d\tau$$

- **Erweiterung der komplexen Wechselstromrechnung**

Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein Sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega$

$$\sigma \triangleq \text{Amplitude} \begin{cases} \sigma < 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma > 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq \text{Rotation} \begin{cases} \omega > 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega < 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$



Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger des Ausgangssignals}}{\text{komplexer Zeiger des Eingangssignals}}$$

Die Übertragungsfunktion hängt von der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$ ab.

3 Zweitore - Vierpoltheorie

3.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix \mathbf{Y} :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix \mathbf{Z} :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix \mathbf{H} :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix \mathbf{C} :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{C}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{C}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{C}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix \mathbf{A} :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot (-\underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \cdot (-\underline{I}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix \mathbf{B} :

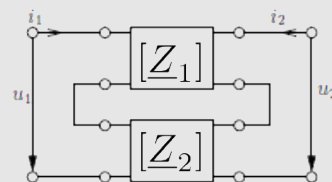
$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{B}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \cdot (-\underline{I}_1) \\ \underline{I}_2 = \underline{B}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B}_{22} \cdot (-\underline{I}_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{pmatrix}$$

3.1.1 Parameterumrechnung

	$\underline{\mathbf{Z}}$	$\underline{\mathbf{Y}}$	$\underline{\mathbf{H}}$	$\underline{\mathbf{A}}$
$\underline{\mathbf{Z}}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \\ \frac{-\underline{Y}_{21}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} & \frac{\underline{Y}_{11}}{\det \underline{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\det \underline{\mathbf{H}}}{\underline{H}_{22}} & \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}} \\ \frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} & \frac{1}{\underline{H}_{22}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbf{Y}}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{11} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{12} \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbf{H}}$	$\begin{bmatrix} \det \underline{\mathbf{Z}} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{12} & \det \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{A}_{22} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$
$\underline{\mathbf{A}}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{\mathbf{Z}} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\det \underline{\mathbf{H}} & -\underline{H}_{11} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$

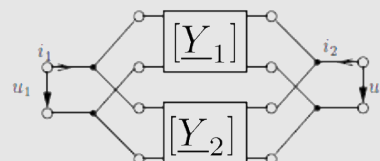
3.2 Zusammenschalten von Zweitoren

- Reihenschaltung:



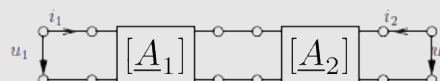
$$[\underline{\mathbf{Z}}] = [\underline{\mathbf{Z}}_1] + [\underline{\mathbf{Z}}_2]$$

- Parallelschaltung:



$$[\underline{\mathbf{Y}}] = [\underline{\mathbf{Y}}_1] + [\underline{\mathbf{Y}}_2]$$

- Kettenschaltung:

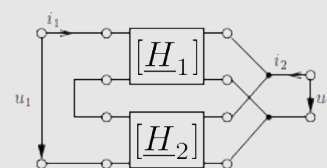


$$[\underline{\mathbf{A}}] = [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2]$$

BEACHTEN:

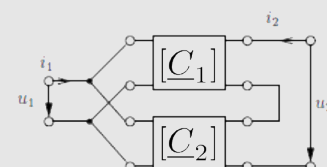
Im Allgemeinen gilt $\rightarrow [\underline{\mathbf{A}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_2] \neq [\underline{\mathbf{A}}_2] \cdot [\underline{\mathbf{A}}_1]$

- Reihen-Parallelschaltung:



$$[\underline{\mathbf{H}}] = [\underline{\mathbf{H}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{H}}_2]$$

- Parallel-Reihenschaltung:

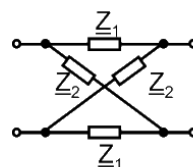
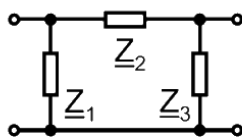
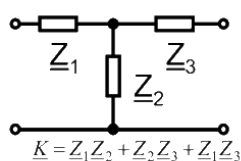


$$[\underline{\mathbf{C}}] = [\underline{\mathbf{C}}_1] \cdot [\underline{\mathbf{C}}_2]$$

3.3 Matrizen elementarer Zweitore

Schaltung	\underline{Z}	\underline{Y}	\underline{H}	\underline{C}	\underline{A}
	ne	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix}$
	ne	$\frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	ne	ne	$\begin{pmatrix} 0 & \underline{u} \\ -\underline{u} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\underline{u}} \\ \frac{1}{\underline{u}} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{u}} \end{pmatrix}$

idealer Übertrager
 $\underline{u} = \frac{w_1}{w_2}$



$$[\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{Y}] \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{K} & \frac{-\underline{Z}_2}{K} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{K} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{K} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} \\ \frac{\underline{Y}_2 - \underline{Y}_1}{2} & \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{H}] \begin{bmatrix} \frac{K}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$$

$$[\underline{C}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)} & \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{bmatrix}$$

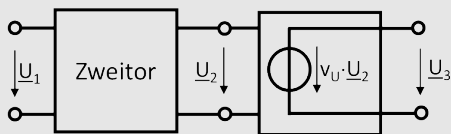
$$[\underline{A}] \begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3} & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} \end{bmatrix}$$

3.3.1 Trennverstärker

Ersatzschaltbild eines idealen Trennverstärkers:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_e = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{v_U} & 0 \\ \frac{\underline{A}_{21}}{v_U} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Torbedingungen

Die Torbedingungen werden durch:

- idealen Übertrager
- Kurzschlusschleife
- Parallelschaltung längssymmetrischer Zweitore

erfüllt.

für die das Zusammenschalten von Zweitoren müssen diese Bedingungen eingehalten werden.

3.4 Zweitor Eigenschaften:

- Reziprozität (Umkehrbarkeit)

Z	$Z_{12} = Z_{21}$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$
A	$\det[A] = 1$
H	$H_{12} = -H_{21}$

Ein umkehrbares (reziprokes) Zweitor wird nur durch drei Parameter beschrieben:

(RLCM-Zweitor) ist immer umkehrbar.

Gegenbeispiel: idealer Transistor

- Rückwirkungsfreiheit

$$Z_{12} = Y_{12} = H_{12} = \det[A] = 0$$

Ein rückwirkungsfreies Zweitor ist nicht reziprok und wird nur durch drei Parameter beschrieben.

Beispiele: idealer Verstärker, idealer Transistor, gesteuerte Quellen

- Symmetrie

Z	$Z_{11} = Z_{22}$
Y	$Y_{11} = Y_{22}$
A	$A_{11} = A_{22}$
H	$\det[H] = 1$

Ein umkehrbares und symmetrisches Zweitor wird durch zwei Parameter beschrieben.

3.5 Zweitorersatzschaltung

3.5.1 gesteuerte Quellen

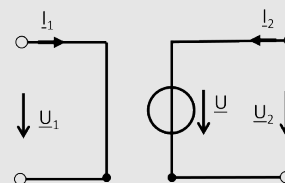
Ideal

VCVS: Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

CCVS: Stromgesteuerte Spannungsquelle

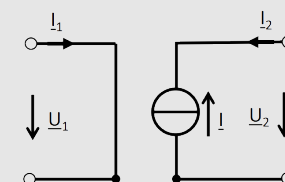
VCCS: Spannungsgesteuerte Stromquelle

CCCS: Stromgesteuerte Stromquelle



VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1$

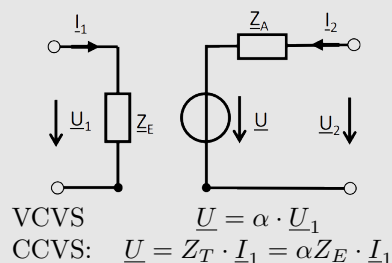


VCCS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1$

CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1$

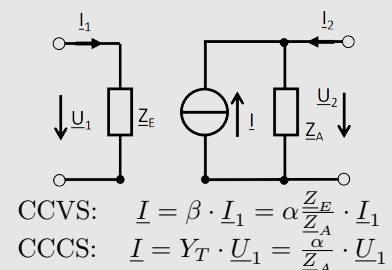
Andere Matrizen sind nicht definiert. Ideale (gesteuerte) Quellen lassen sich nicht ineinander umwandeln!

Linear



VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$

CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1 = \alpha Z_E \cdot \underline{I}_1$

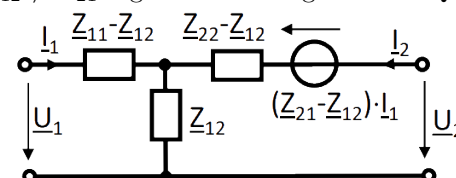


CCVS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1 = \alpha \frac{Z_E}{Z_A} \cdot \underline{I}_1$

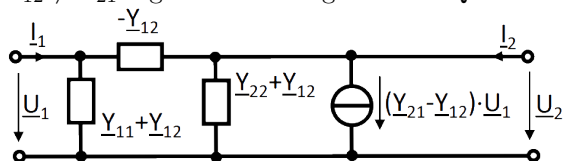
CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1 = \frac{\alpha}{Z_A} \cdot \underline{U}_1$

3.5.2 Ersatzschaltbilder

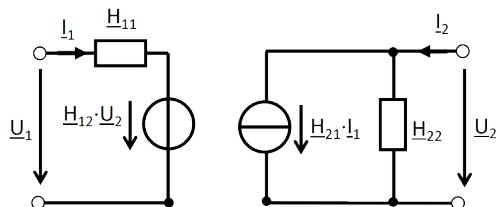
- T-Ersatzschaltbild für Z-Matrix für $Z_{12} \neq Z_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- II-Ersatzschaltbild für Y-Matrix
für $Y_{12} \neq Y_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- Hybrid-Ersatzschaltbild für H-Matrix



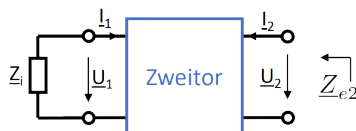
3.6 Beschaltete Zweitore

3.6.1 Eingangsimpedanz



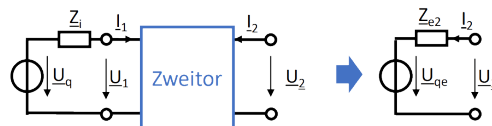
$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_V} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_V} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_V + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_V + \underline{A}_{22}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_V} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{C}_{11} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{22} + \underline{Z}_V} \end{aligned}$$

3.6.2 Ausgangsimpedanz



$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_i + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_i + \underline{A}_{11}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{C}_{22} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Z}_i} \end{aligned}$$

3.6.3 Ersatzquelle



$$\begin{aligned} \underline{Z} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q \underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{Y} &\rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{I}_q \underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i} \\ \underline{A} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i \underline{A}_{21} + \underline{A}_{11}} \\ \underline{H} &\rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{U}_q \underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Z}_i} \\ \underline{C} &\rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{I}_q \underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_i} \end{aligned}$$

3.6.4 Wellenwiderstand

Beschaltet man den Ausgang eines Zweitores mit \underline{Z}_{w2} , so liegt am Eingang die Impedanz \underline{Z}_{w1} .

$$\underline{Z}_{w1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{22}}$$

Beschaltet man den Eingang eines Zweitores mit \underline{Z}_{w1} , so liegt am Ausgang die Impedanz \underline{Z}_{w2} .

$$\underline{Z}_{w2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{11}}$$

Lösung des obigen Gleichungssystems

	\underline{Z}_{w1}	\underline{Z}_{w2}
\underline{Z}	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{11} \det \underline{Z}}{\underline{Z}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{22} \det \underline{Z}}{\underline{Z}_{11}}}$
\underline{Y}	$\sqrt{\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11} \det \underline{Y}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22} \det \underline{Y}}}$
\underline{A}	$\sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$
\underline{H}	$\sqrt{\frac{\underline{H}_{11} \det \underline{H}}{\underline{H}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{22} \det \underline{H}}}$
\underline{C}	$\sqrt{\frac{\underline{C}_{22}}{\underline{C}_{11} \det \underline{C}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{C}_{11} \det \underline{C}}{\underline{C}_{11}}}$

Für symmetrische Zweitore gilt $\underline{Z}_{w1} = \underline{Z}_{w2}$

Alternatives:

Messtechnisch (Leerlauf und Kurzschluss)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{01} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot \infty + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \infty + \underline{A}_{22}} \\ \underline{Z}_{k1} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot 0 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot 0 + \underline{A}_{22}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \underline{Z}_{01} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot \infty + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \infty + \underline{A}_{22}} \\ \underline{Z}_{k1} &= \frac{\underline{A}_{11} \cdot 0 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot 0 + \underline{A}_{22}} \right\} \underline{Z}_{w1} = \sqrt{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}_{01}} = A(\underline{Z}_{w1})$$

3.6.5 Scheinleistungsanpassung

Wiederholung GE2 Kapitel 2.7.8

Beschaltet man ein Zweitor mit seinen Wellenwiderständen, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

3.6.6 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand einem Grenzwert, dem **Kettenwiderstand \underline{Z}_K** .

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_K}$$

Lösung der obigen Gleichung:

$$\underline{Z}_K = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22})^2 + 4 \cdot \det \underline{Z}})$$

Für symmetrische Zweitore entspricht der Kettenwiderstand dem Wellenwiderstand.

4 Signaldarstellung im Frequenz- und Bildbereich

4.1 Harmonische Synthese

Die Überlagerung von Sinusschwingungen zu einem periodischen, nichtsinusförmigen Signal nennt man harmonische Synthese.

4.1.1 Reelle Fourierreihe

- mit \sin und \cos :

$$f(t) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

- mit Amplitude und Phase:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2})] \end{aligned}$$

Koeffizienten

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$$

4.1.2 Komplexe Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot e^{-j\omega_1 k t} dt = \frac{1}{2} (a_k - j b_k)$$

4.1.3 Symmetrieeigenschaften

- Gerade Funktionen symmetrisch zur y-Achse
alle \sin -teile verschwinden
 - $A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt$
 - $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos(k\omega_1 t) dt$
 - $b_k = 0$
- Ungerade Funktionen symmetrisch zum Ursprung
alle \cos -teile und Gleichanteil verschwinden
 - $A_0 = 0$
 - $a_k = 0$
 - $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin(k\omega_1 t) dt$

4.1.4 Halbwellensymmetrie

Halbwellensymmetrie gilt wenn:

$$y(t) = -y(t \pm T/2)$$

Die Fourier-Reihe einer Zeitfunktion mit HWS enthält stets nur Terme mit ungeraden Ordnungszahlen.

$$k = 1, 3, 5, \dots, \infty$$

im Allgemeinen

Koeffizienten:

$$A_0 = 0, \quad a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

$$b_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

gerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, \quad b_k = 0, \quad a_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

ungerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_{2k} = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y(t) \cdot \sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

4.2 Verschiebungssatz