OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

ELEKTRO- UND
INFORMATIONSTECHNIK

Formelsammlung
Signale und Systeme (SUS)

nach Vorlesungsunterlagen von
S.Hipp, R.Sattler, R.Huber

Originalversion:	Ayham Alhulaibi
Überarbeitet von:	Tony Pham
Letzte Änderung:	25. Juni 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Signale im Zeitbereich

1.1 Signalcharakterisierung

1. **Kontinuierlich** $\longleftrightarrow$ **Diskret**
2. **Deterministisch** $\longleftrightarrow$ **Stochastisch**
   Deterministische Signale sind mathematisch beschreibbar, im gegensatz zu stochastischen Signalen die dem Zufall unterworfen sind
3. **Periodisch** $\longleftrightarrow$ **Aperiodisch**

   periodisch wenn, $x(t) = x(t + T_p)$ gilt.
   T_p heißt Grundperiode.

4. **Gerade** $\longleftrightarrow$ **Ungerade:**

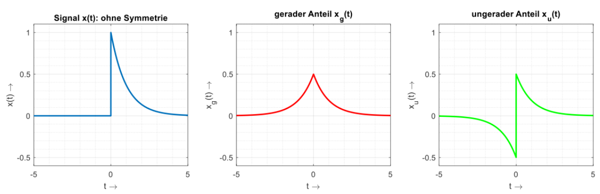
   Zerlegung des Signals:

   - gerader Anteil:

   $$x_G = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$

   - ungerader Anteil:

   $$x_U = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$



5. **Energiesignal** $\longleftrightarrow$ **Leistungssignal**

   Energie:

   $$E_x = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

   Leistung:

   $$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

6. **Korrelation**
   Die Korrelationsfunktion ist eine Maß für die Ähnlichkeit zweier deterministischer Energiesignale.

   Korrelationsfunktion

   $$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t+\tau) dt$$

7. **Transformation**
   Signale könnenn modifiziert werden durch Verändern der unabhängigen Variablen:
   - Zeitverschiebung
   - Zeitdehnung und Stauchung
   - Zeitumkehr

$$x_2(t) = x_1(-at + b)$$

das Argument von $x_1(\tau)$ stellt eine Abbildung $t \to \tau$ dar, daher bewirkt

- $+b/-b$ $(b > 0)$ eine Verschiebung von $x_1(\tau)$ nach links / rechts
- eine Multiplikation mit a / Division durch a $(a > 1)$ eine Stauchung / Streckung von $x_1(\tau)$
- Multiplikation mit -1 eine Spiegelung an der Ordinatenachse

Die Reihenfolge der Schritte ist nicht **EGAL**: erst Verschieben um b, dann Skalieren/Invertieren mit $-a$

1.2 Elementarsignale

- Sprungfunktion ε

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

- Dirac δ

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

  Eigenschaften:
  - Höhe unendlich
  - Fläche = 1
  - Zusammenhang mit Sprungfunktion
    $\int_{\tau=-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = \varepsilon(t)$ bzw. $\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = \delta(t)$
  - Ausblendeigenschaft

    $$\delta(t - t_0) \cdot y(t) = \delta(t - t_0) \cdot y(t_0)$$

  - Zeitskalierung: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

- Dreieckimpuls Λ

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- Rechteckfunktion rect

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

  Darstellbar durch:
  $\mathrm{rect}(t) = \varepsilon \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) - \varepsilon \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$

- Komplexe Exponentialfunktion

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ 1 & \text{für } |t| \leq 1 \end{cases}$$

2 Systeme

2.1 Eigenschaften

1. **Speicher**
   - Frei: wird durch eine xy-Kennlinie vollständig beschrieben

   $$\text{z.B.}\quad y(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot x(t)$$

   - behaftet: Bei diesen Systemen ist keine vollständige Beschreibung durch eine xy-Kennline möglich

   $$\text{z.B.}\quad y(t) = x(t) + 2x(t-1)$$

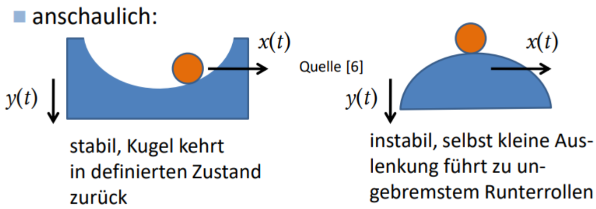
2. **Kausalität**
   Ausgangssignal hängt nur vom aktuellen und vorherigen Eingangssignal ab

   $$\text{Kausal: z.B.}\quad y(t) = \int\limits_{t-5}^{t} x(\tau)d\tau$$

   $$\text{Akausal: z.B.}\quad y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$

   Speicherfreiheit & Kausalität: Aus Speicherfreiheit folgt Kausalität, aber nicht umgekehrt.

3. **Stabilität**
   (Bounded Input → Bounded Output)
   BIBO Stabilität: kleines/beschränktes Eingangssignal → kleine/beschränkte Antwort.



   z.B. für stabiles System

   $$y(t) = 50 \cdot x^3(t)$$

   z.B. für instabiles System

   $$y(t) = e^t \cdot x(t)$$

4. **Zeitinvariant↔Zeitvariant**
   - invariant: Systeme ändern sich **nicht** bei einer Zeitverschiebung.
   - variant: Verschobenes Eingangssignal → verschobenes Ausgangssignal

5. **Liniarität**
   Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip gilt: Linearkombination von Eingangssignalen ruft entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale hervor

   Bedeutung Liniarität

   eine Verdopplung der Eingangsgröße (z.B. Spannung) führt auch zu einer Verdopplung der Ausgangsgröße.

2.2 LTI-Systeme (Linear time-invariant Systems)

2.2.1 Ein-/Ausgangsbeziehung

- Addition
- Multiplikation
- Differentiation
- Integration
- Zeitverschiebung(Verzögerung)

2.2.2 Faltung

Aus der Impulsantwort eines LTI-Systems und dem Eingangssignal lässt sich das Ausgangssignal durch Faltung bestimmen:

$$y(t) = x(t) * h(t) \to (*) \text{ Faltung Operator}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau}$$

- Der Dirac-Impuls ist das neutrale Element der Faltung

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Eine Faltung mit einem verschobenen Dirac-Impuls führt zur Verschiebung des Signals:

$$x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$$

Rechenregeln

- $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$
- $x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

2.3 Frequenzgang & Übertragungsfunktion

- **Frequenzgang**

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} = \frac{\underline{U_2}(\omega)}{\underline{U_1}(\omega)}$$

- **Amplitudengang**

$$A(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{Y}(\omega)|}{|\underline{X}(\omega)|} \begin{cases} > 1 & \text{Verstärkung} \\ < 1 & \text{Dämpfung} \end{cases}$$

- **Phasengang**

$$\varphi_H(\omega) = \arg\{\underline{H}(\omega)\} = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega)$$

$$\varphi_H = \arctan\left(\frac{\mathfrak{Im}}{\mathfrak{Re}}\right)$$

- **Eigenfunktion**

$$y(t) = \lambda \cdot x(t) \begin{cases} x(t): & \text{Eigenfunktion} \\ \lambda: & \text{Eigenwert}(\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

jede komplexe Exponentialfunktion $x(t) = \mathrm{e}^{st}$ ist Eigenfunktion jedes beliebigen LTI-Systems S:

$$y(t) = S\left\{\mathrm{e}^{st}\right\} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{st}$$

Eigenwert kann wie folgt berechnet werden:

$$\lambda = \underline{H}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\ \mathrm{e}^{-st} d\tau$$

- **Erweiterung der komplexen Wechselstromrechnung**
  Die harmonische Exponentialfunktion $e^{j\omega t}$ ist ein sonderfall von e^{st} mit $s = j\omega$

$$\sigma \triangleq Amplitude \begin{cases} \sigma \leq 0 & \text{exponentiell abklingend} \\ \sigma = 0 & \text{konstante Amplitude} \\ \sigma \geq 0 & \text{exponentiell zunehmend} \end{cases}$$

$$\omega \triangleq Rotation \begin{cases} \omega \leq 0 & \text{Zeiger rotiert mit UZS} \\ \omega = 0 & \text{Zeiger rotiert nicht} \\ \omega \geq 0 & \text{Zeiger rotiert gegen UZS} \end{cases}$$

Komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{Y}(s)}{\underline{X}(s)} = \frac{\underline{U_2}(s)}{\underline{U_1}(s)} = \frac{\text{komplexer Zeiger des Ausgangssignals}}{\text{komplexer Zeiger des Eingangssignals}}$$

Die Übertragungsfunktion hängt von der komplexen Frequenz $s = \sigma + j\omega$ ab.

2.3.1 Pegel

Energiegröße: $a = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} dB$

Feldgröße: $a = 20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} dB$

2.4 Pole und Nullstellen

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s^n}$$

Die Koeffizienten an und bm ergeben sich aus den Bauelementen und sind reell.

$$\underline{H}(s) = \frac{\text{Summe aller Nullstellen}}{\text{Summe aller Pole}} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(s - s_{o1}) \cdot (s - s_{o2}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{oM})}{(s - s_{x1}) \cdot (s - s_{x2}) \cdot \ldots \cdot (s - s_{xN})}$$

$k = \frac{b_M}{a_N}$ ist der Maßstabfaktor

Bei stabilen Systemen müssen alle Pole in der linken komplexen Halbebene liegen.

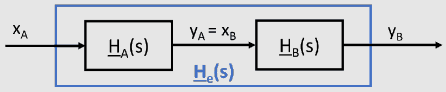
2.5 Elementare Übertragungsglieder

P-Glied , D-Glied , I-Glied , PT1-Glied Für mehr sehe externe Tabelle.

2.6 Zusammenschalten von Übertragungsgliedern

- Kettenschaltung
  Multiplikation der Einzelübertragungsfunktionen.

$$\boxed{\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) = \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}$$

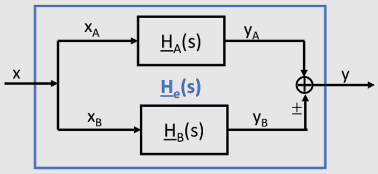


$$\underline{Y}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{Y}_A = \underline{H}_B(s) \cdot \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A$$

Rückwirkungsfreiheit gewährleistet sein.

- Parallelschaltung
  Summe der Einzelübertragungsfunktionen.

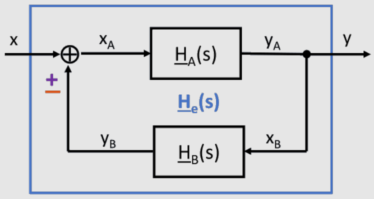
$$\boxed{\underline{H}_e(s) = \underline{H}_B(s) + \underline{H}_A(s)}$$



$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_A \pm \underline{Y}_B \\ &= \underline{H}_A(s) \cdot \underline{X}_A \pm \underline{H}_B(s) \cdot \underline{X}_B \\ &= (\underline{H}_A(s) + \underline{H}_B(s)) \cdot \underline{X} \end{aligned}$$

- Rückkopplung

$$\boxed{\underline{H}_e(s) = \frac{\underline{H}_A(s)}{1 \pm \underline{H}_A(s) \cdot \underline{H}_B(s)}}$$



Mitkopplung: y_A vergrößert x_A
Gegenkopplung y_A verkleinert x_A

2.7 Bode Diagramm

- Bode Diagramm von Kettenschaltung
  Ergibt sich durch **Addition der Bodediagramme** der einzelnen Glieder.
- Bode Diagramm der inversen Übertragungsfunktion
  Ergibt sich durch **Spiegelung an der X-Achse**.

3 Zweitore - Vierpoltheorie

3.1 Zweitorgleichungen

- Admittanzform/ Admittanzmatrix **Y**:

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\cdot\underline{U}_1+\underline{Y}_{12}\cdot\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\cdot\underline{U}_1+\underline{Y}_{22}\cdot\underline{U}_2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}$$

- Impedanzform/ Impedanzmatrix **Z**:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\cdot\underline{I}_1+\underline{Z}_{12}\cdot\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\cdot\underline{I}_1+\underline{Z}_{22}\cdot\underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}$$

- Hybridform 1/ Reihenparallelmatrix **H**:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\cdot\underline{I}_1+\underline{H}_{12}\cdot\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\cdot\underline{I}_1+\underline{H}_{22}\cdot\underline{U}_2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{H}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}$$

- Hybridform 2/ Parallelreihenmatrix **C**:

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{C}_{11}\cdot\underline{U}_1+\underline{C}_{12}\cdot\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{C}_{21}\cdot\underline{U}_1+\underline{C}_{22}\cdot\underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}$$

- Kettenform/ Kettenmatrix **A**:

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\cdot\underline{U}_2+\underline{A}_{12}\cdot-\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\cdot\underline{U}_2+\underline{A}_{22}\cdot-\underline{I}_2 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ -\underline{I}_2\end{pmatrix}$$

- Kettenform rückwärts/ Kettenmatrix **B**:

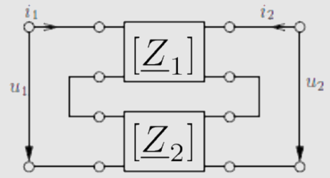
$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_{11}\cdot\underline{U}_1+\underline{B}_{12}\cdot-\underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{B}_{21}\cdot\underline{U}_1+\underline{B}_{22}\cdot-\underline{I}_1 \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ -\underline{I}_1\end{pmatrix}$$

3.1.1 Parameterumrechnung

$$\begin{array}{ccccc}
 & Z & Y & H & A \\
Z & \begin{bmatrix}\underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12}\\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{\underline{Y}_{22}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}}\\ \frac{-\underline{Y}_{21}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}} & \frac{\underline{Y}_{11}}{\det\underline{\boldsymbol{Y}}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{\det\underline{\boldsymbol{H}}}{\underline{H}_{22}} & \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}\\ \frac{-\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} & \frac{1}{\underline{H}_{22}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{A}}}{\underline{A}_{21}}\\ \frac{1}{\underline{A}_{21}} & \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}\end{bmatrix} \\
Y & \begin{bmatrix}\frac{\underline{Z}_{22}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}} & \frac{-\underline{Z}_{12}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}\\ \frac{-\underline{Z}_{21}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}} & \frac{\underline{Z}_{11}}{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12}\\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{1}{\underline{H}_{11}} & \frac{-\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}\\ \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{H}}}{\underline{H}_{11}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} & \frac{-\det\underline{\boldsymbol{A}}}{\underline{A}_{12}}\\ \frac{-1}{\underline{A}_{12}} & \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}\end{bmatrix} \\
H & \begin{bmatrix}\frac{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}{\underline{Z}_{22}} & \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}\\ \frac{-\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}} & \frac{1}{\underline{Z}_{22}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{1}{\underline{Y}_{11}} & \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}\\ \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{Y}}}{\underline{Y}_{11}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\underline{H}_{11} & \underline{H}_{12}\\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{A}}}{\underline{A}_{22}}\\ \frac{-1}{\underline{A}_{22}} & \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}\end{bmatrix} \\
A & \begin{bmatrix}\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\det\underline{\boldsymbol{Z}}}{\underline{Z}_{21}}\\ \frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{-1}{\underline{Y}_{21}}\\ \frac{-\det\underline{\boldsymbol{Y}}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\frac{-\det\underline{\boldsymbol{H}}}{\underline{H}_{21}} & \frac{-\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}\\ \frac{-\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} & \frac{-1}{\underline{H}_{21}}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\underline{A}_{11} & \underline{A}_{12}\\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22}\end{bmatrix}
\end{array}$$

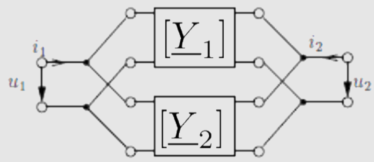
3.2 Zusammenschalten von Zweitoren

- Reihenschaltung:



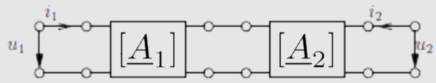
$$[\underline{Z}] = [\underline{Z}_1] + [\underline{Z}_2]$$

- Parallelschaltung:



$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}_1] + [\underline{Y}_2]$$

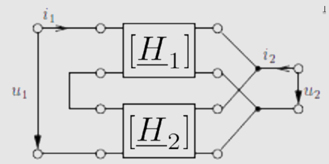
- Kettenschaltung:



$$[\underline{A}] = [\underline{A}_1]\cdot[\underline{A}_2]$$

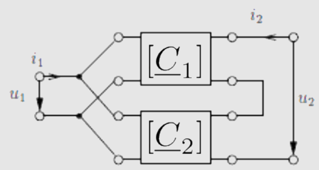
Beachte:
Im Allgemeinen gilt $\rightarrow [\underline{A}_1]\cdot[\underline{A}_2] \neq [\underline{A}_2]\cdot[\underline{A}_1]$

- Reihen-Parallelschaltung:



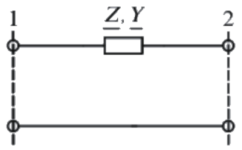
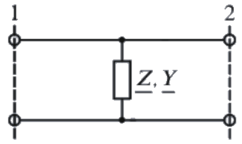
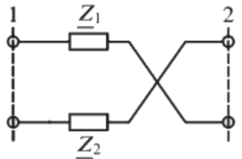
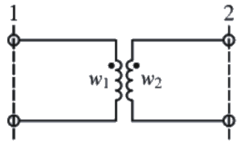
$$[\underline{H}] = [\underline{H}_1]\cdot[\underline{H}_2]$$

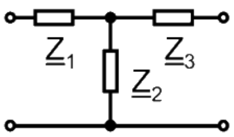
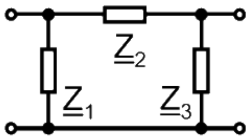
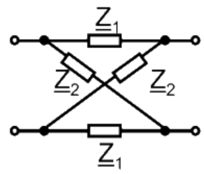
- Parallel-Reihenschaltung:



$$[\underline{C}] = [\underline{C}_1]\cdot[\underline{C}_2]$$

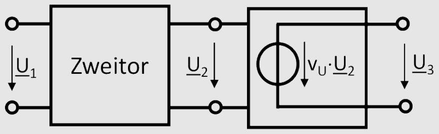
3.3 Matrizen elementarer Zweitore

Schaltung	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$	$\underline{H}$	$\underline{C}$	$\underline{A}$
	ne	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \underline{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}$	ne	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix}$
	ne	$\frac{1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \underline{Z}_1+\underline{Z}_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 idealer Übertrager $ü = \frac{w_1}{w_2}$	ne	ne	$\begin{pmatrix} 0 & ü \\ -ü & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{ü} \\ \frac{1}{ü} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ü & 0 \\ 0 & \frac{1}{ü} \end{pmatrix}$

	 $\underline{K} = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3$		
[$\underline{Z}$]	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{2} & \frac{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1}{2} \\ \frac{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1}{2} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{2} \end{bmatrix}$
[$\underline{Y}$]	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{K}} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{K}} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{K}} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{\underline{K}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_2-\underline{Y}_1}{2} \\ \frac{\underline{Y}_2-\underline{Y}_1}{2} & \frac{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2}{2} \end{bmatrix}$
[$\underline{H}$]	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{K}}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \\ \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{1}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \\ \frac{-\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)} \end{bmatrix}$	
[$\underline{C}$]	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} & \underline{Z}_3+\frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)} & \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} \end{bmatrix}$	
[$\underline{A}$]	$\begin{bmatrix} 1+\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1+\underline{Z}_3+\frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1+\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3} & 1+\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} & \frac{2\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} \\ \frac{2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} & \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_1} \end{bmatrix}$

3.3.1 Trennverstärker

Ersatzschaltbild eines idealen Trennverstärkers:



$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_e = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v_U} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{v_U} & 0 \\ \frac{\underline{A}_{21}}{v_U} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Torbedingungen

Die Torbedingungen werden durch:

- idealen Übertrager
- Kurzschlussschleife
- Parallelschaltung längssymmetrischer Zweitore

erfüllt.
für die das Zusammenschalten von Zweitoren müssen diese Bedingungen eingehalten werden.

3.4 Zweitor Eigenschaften:

- Reziprozität (Umkehrbarkeit)

Z	$Z_{12} = Z_{21}$
Y	$Y_{12} = Y_{21}$
A	$\det[A] = 1$
H	$H_{12} = -H_{21}$

Ein umkehrbares (reziprokes) Zweitor wird nur durch drei Parameter beschrieben:
(RLCM-Zweitor)ist immer umkehrbar.

Gegenbeispiel: idealer Transistor

- Rückwirkungsfreiheit

$$Z_{12} = Y_{12} = H_{12} = \det[A] = 0$$

Ein rückwirkungsfreies Zweitor ist nicht reziprok und wird nur durch drei Parameter beschrieben.
Beispiele: idealer Verstärker, idealer Transistor, gesteuerte Quellen

- Symmetrie

Z	$Z_{11} = Z_{22}$
Y	$Y_{11} = Y_{22}$
A	$A_{11} = A_{22}$
H	$\det[H] = 1$

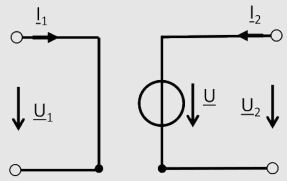
Ein umkehrbares und symmetrisches Zweitor wird durch zwei Parameter beschrieben.

3.5 Zweitorersatzschaltung

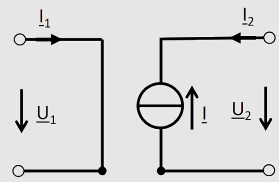
3.5.1 gesteuerte Quellen

Ideal

VCVS: Spannungsgesteurte Spannungsquelle
CCVS: Stromgesteurte Spannungsquelle
VCCS: Spannungsgesteurte Stromquelle
CCCS: Stromgesteurte Stromquelle



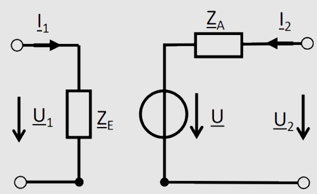
VCVS: $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$
CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1$



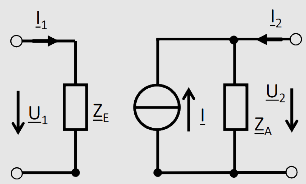
VCCS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1$
CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1$

Andere Matrizen sind nicht definiert. Ideale (gesteuerte) Quellen lassen sich nicht ineinander umwandeln!

Linear



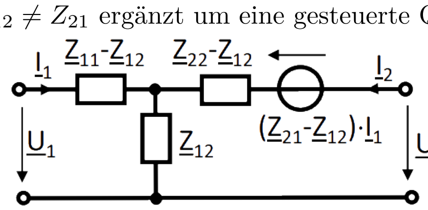
VCVS $\underline{U} = \alpha \cdot \underline{U}_1$
CCVS: $\underline{U} = Z_T \cdot \underline{I}_1 = \alpha Z_E \cdot \underline{I}_1$



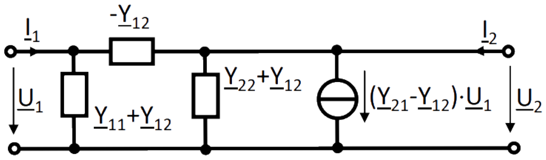
CCVS: $\underline{I} = \beta \cdot \underline{I}_1 = \alpha \frac{Z_E}{Z_A} \cdot \underline{I}_1$
CCCS: $\underline{I} = Y_T \cdot \underline{U}_1 = \frac{\alpha}{Z_A} \cdot \underline{U}_1$

3.5.2 Ersatzschaltbilder

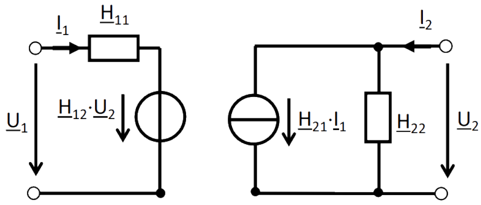
- T-Ersatzschaltbild für Z-Matrix
für $Z_{12} \neq Z_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.



- Π-Ersatzschaltbild für Y-Matrix
für $Y_{12} \neq Y_{21}$ ergänzt um eine gesteuerte Quelle.

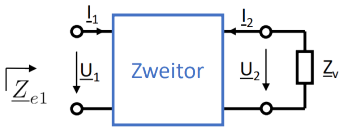


- Hybrid-Ersatzschaltbild für H-Matrix



3.6 Beschaltete Zweitore

3.6.1 Eingangsimpedanz



$$\boldsymbol{Z} \rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_V}$$

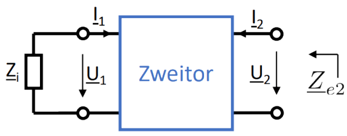
$$\boldsymbol{Y} \rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_V}$$

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_V + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_V + \underline{A}_{22}}$$

$$\boldsymbol{H} \rightarrow \underline{Z}_{e1} = \underline{H}_{11} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22} + \underline{Y}_V}$$

$$\boldsymbol{C} \rightarrow \underline{Y}_{e1} = \underline{C}_{11} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{22} + \underline{Z}_V}$$

3.6.2 Ausgangsimpedanz



$$\boldsymbol{Z} \rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i}$$

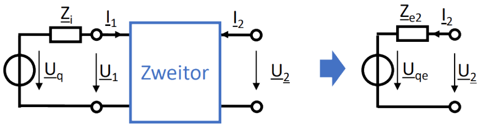
$$\boldsymbol{Y} \rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i}$$

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_i + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_i + \underline{A}_{11}}$$

$$\boldsymbol{H} \rightarrow \underline{Z}_{e2} = \underline{H}_{22} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Y}_i}$$

$$\boldsymbol{C} \rightarrow \underline{Y}_{e2} = \underline{C}_{22} - \frac{\underline{C}_{12}\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Z}_i}$$

3.6.3 Ersatzquelle



$$\boldsymbol{Z} \rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_i}$$

$$\boldsymbol{Y} \rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{I}_q\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_i}$$

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11}}$$

$$\boldsymbol{H} \rightarrow \underline{I}_{qe} = \frac{-\underline{U}_q\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11} + \underline{Z}_i}$$

$$\boldsymbol{C} \rightarrow \underline{U}_{qe} = \frac{\underline{I}_q\underline{C}_{21}}{\underline{C}_{11} + \underline{Y}_i}$$

3.6.4 Wellenwiderstand

Beschaltet man den Ausgang eines Zweitors mit $\underline{Z}_{w2}$, so liegt am Eingang die Impedanz $\underline{Z}_{w1}$.

$$\underline{Z}_{w1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{22}}$$

Beschaltet man den Eingang eines Zweitors mit $\underline{Z}_{w1}$, so liegt am Ausgang die Impedanz $\underline{Z}_{w2}$.

$$\underline{Z}_{w2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{11}}$$

Lösung des obigen Gleichungssystems

	$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{w1}}$	$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{w2}}$
$\underline{\boldsymbol{Z}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{11}\det\underline{Z}}{\underline{Z}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{22}\det\underline{Z}}{\underline{Z}_{11}}}$
$\underline{\boldsymbol{Y}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11}\det\underline{Y}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{22}\det\underline{Y}}}$
$\underline{\boldsymbol{A}}$	$\sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\cdot\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\cdot\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{11}}}$
$\underline{\boldsymbol{H}}$	$\sqrt{\frac{\underline{H}_{11}\det\underline{H}}{\underline{H}_{22}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{22}\det\underline{H}}}$
$\underline{\boldsymbol{C}}$	$\sqrt{\frac{\underline{C}_{22}}{\underline{C}_{11}\det\underline{C}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{C}_{11}\det\underline{C}}{\underline{C}_{11}}}$

Für symmetrische Zweitore gilt $\underline{Z}_{w1} = \underline{Z}_{w2}$

Alternatives:

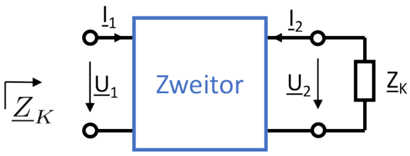
Messtechnisch(Leerlauf und Kurzschluss)

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{01} &= \frac{\underline{A}_{11}\cdot\infty + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot\infty + \underline{A}_{22}} \\ \underline{Z}_{k1} &= \frac{\underline{A}_{11}\cdot 0 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot 0 + \underline{A}_{22}} \end{aligned}\right\} \underline{Z}_{w1} = \sqrt{\underline{Z}_{k1}\cdot\underline{Z}_{01}} = A(\underline{Z}_{w1})$$

3.6.5 Scheinleistungsanpassung

Wiederholung GE2 Kapitel 2.7.8
Beschaltet man ein Zweitor mit seinen Wellenwiderständen, so liegt Scheinleistungsanpassung vor.

3.6.6 Kettenwiderstand



Schaltet man eine große Zahl gleicher Zweitore in Kette, so nähert sich der Eingangswiderstand einem Grenzwert, dem **Kettenwiderstand $\underline{Z}_K$**.

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_K}$$

Lösung der obigen Gleichung:

$$\underline{Z}_K = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{22})^2 + 4 \cdot \det \underline{Z}})$$

Für symmetrische Zweitore entspricht der Kettenwiderstand dem Wellenwiderstand.

4 Signaldarstellung im Frequenz- und Bildbereich

4.1 Fourierreihe periodischer Signale

Die Überlagerung von Sinusschwingungen zu einem periodischen, nichtsinusförmigen Signal nennt man harmonische Synthese.

4.1.1 Reelle Fourierreihe

- mit sin und cos:

$$f(t) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot cos(k\omega_1 t) b_k \cdot sin(k\omega_1 t)]$$

- mit Amplitude und Phase:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot cos(k\omega_1 t + \varphi_k)]$$
$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot sin(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{\pi}{2})]$$

`Koeffizienten`

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot cos(k\omega_1 t) dt$$
$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot sin(k\omega_1 t) dt$$

4.1.2 Komplexe Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot e^{-j\omega_1 k t} dt \quad = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

4.1.3 Komplex Reell umwandeln

`Komplex → Reell:`

$$\boxed{a_0 = A_0 = \underline{c}_0}$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= 2\,\mathfrak{Re}\{c_k\} = [\underline{c}_k + \underline{c}_{-k}] \\ b_k &= -2\,\mathfrak{Im}\{\underline{c}_k\} = j\,[\underline{c}_k - \underline{c}_{-k}] \\ A_k &= 2|\underline{c}_k| \quad \beta_k = -\varphi_k \end{aligned}\right\} \quad k > 0$$

`Reell → Komplex:`

$$\left.\begin{aligned} \underline{c}_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{A_k}{2} e^{-j\beta_k} \\ \underline{c}_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + jb_k) = \frac{A_k}{2} e^{j\beta_k} \end{aligned}\right\} \quad k > 0$$

4.1.4 Symmetrieeigenschaften

- Gerade Funktionen symmetrisch zur y-Achse
  alle sin-teile verschwinden - $A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) dt$
  - $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot cos(k\omega_1 t) dt$
  - $b_k = 0$
- Ungerade Funktionen symmetrisch zum Ursprung
  alle cos-teile und Gleichanteil verschwinden
  - $A_0 = 0$
  - $a_k = 0$
  - $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot sin(k\omega_1 t) dt$

4.1.5 Halbwellensymmetrie

Halbwellensymmetrie gilt wenn:

$$y(t) = -y(t \pm T/2)$$

Die Fourier-Reihe einer Zeitfunktion mit HWS enthält stets nur Terme mit ungeraden Ordnungszahlen.
$k = 1, 3, 5, \ldots, \infty$

im Allgemeinen

`Koeffizienten:`

$$A_0 = 0, \; a_{2k} = 0, \; b_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot cos((2k-1)\omega_1 t) dt$$

$$b_{2k-1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y(t) \cdot sin((2k-1)\omega_1 t) dt$$

gerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0,\ b_k = 0,\ a_{2k} = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} y(t)\cdot cos((2k-1)\omega_1 t)dt$$

ungerade Halbwellensymmetrie

$$A_0 = 0,\ a_k = 0,\ b_{2k} = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} y(t)\cdot sin((2k-1)\omega_1 t)dt$$

4.1.6 Verschiebungssatz

Verschiebung im Zeitbereich entspricht eine Drehung den Komplexen Spektrum um die Phase $\to\ -k\omega_1 t_v$

$$f_v(t) = f(t-t_v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k(t-t_v)}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t_v}}_{\underline{c}_{k_v}} \cdot e^{\omega_1 k t}$$

Ist tv < 0, wie im Beispiel oben, so werden die Phasenwinkel des Spektrums mit zunehmender Frequenz größer.

4.1.7 Fourierreihe und LTI-Systeme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{H}(k\omega_1)\cdot \underline{c}_{xk}}_{\underline{c}_{yk}} \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

4.2 Kenngrößen periodischer Signale

- Effektivwert

$$\boxed{U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} u(t)^2 dt}}$$

mit der Fourierreihe:

$$U_{eff} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{k,eff}^2}$$

auch:

$$\sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}$$

- Klirrfaktor(Oberschwingungsgehalt):
  Dient zur Quantifizierung einer nichtlinearen Verzerrung bzw. von der Sinusform eines Signals.

$$k = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Wechselanteil}}$$
$$= \boxed{\frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}} = \frac{\sqrt{U_\sim^2 - U_1^2}}{U_\sim} \leq 1}$$

Für Wechselgrößen lässt sich k einfach mit **Grundschwingungsgehalt** g ermitteln (*gilt immer*):

$$\boxed{k = \sqrt{1-g^2} \leftrightarrow g = \frac{U_1}{U}}$$

- Mischgrößen
  - Schwingungsgehalt:

$$s = \frac{U_\sim}{U} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Effektivwert der Mischgrösse}}$$

  - Welligkeit:

$$w = \frac{U_\sim}{\bar{U}} = \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

  - Riffelfaktor:

$$R = \frac{\hat{U}_\sim}{\bar{U}} = \frac{\text{Scheitelwert des Wechselanteils}}{\text{Gleichanteil}}$$

- Wirkleistung:

$$P = \bar{p}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot i(t)dt$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{u}_k \underline{i}_k^* \leftrightarrow i_k^* = i_{-k}$$

Als Reihe:

$$P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{k_{eff}} \cdot I_{k_{eff}} \cdot \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) \rightharpoonup \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$

Nur gleichfrequente harmonische tragen zur Wirkleistung bei!

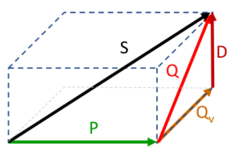
- Schein- und Blindleistung

$$\boxed{S = U_{eff}\cdot I_{eff} = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Bei einem nicht linearen Verbraucher an einer Sinusförmigen Spannung:

$$S^2 = (UI)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 =$$
$$U_1^2 I_0^2 + U_1^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 + U_1^2 I_1^2 \sin^2\varphi_1 + U_1^2 I_1^2 \cos^2\varphi_1$$

Räumlich Darstellung der Scheinleistung:



Verschiebungs- Feldblindleistung Q_v

$$Q = \sqrt{Q_v^2 + D^2} \leftrightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q_v^2 + D^2}$$

Blindleistung aufgrund der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gleicher Frequenz.

Verzerrunsgblindleistung D

$$D^2 = U_1^2 \cdot (I^2 - I_1^2) = S^2(1-g^2)$$

von Mischtermen (Produkten von Spannung und Strom unterschiedlicher Frequenzen).

4.3 Fouriertransformation

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$$

Hintransformation - Analysegleichung:

$$\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Komplexwertige Fouriertransformierte:

$$\underline{X}(\omega) = |\underline{X}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi}$$

Einheit: $[x(t)] \cdot s$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{X}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

4.4 Fouriertransformation bei periodischer Signale

Fouriertransformierte periodischer Signale:

$$\underline{X}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c}_k \cdot \delta(\omega - k\omega_1)$$

Fourierkoeffizienten:

$$\underline{c}_k = \frac{1}{T}\underline{X}(\omega_1) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega_1 t} dt$$

Die Koeffizienten $\underline{c}_k$ der komplexen Fourierreihe sind die Abtastwerte von $\underline{X}(\omega)$ bei den Frequenzen

$$\omega = k\omega_1 = k\frac{2\pi}{T}$$

4.5 Eigenschaften der Fouriertransformation

- **Linearität**

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a_1\underline{X}_1(\omega) + a_2\underline{X}_2(\omega)$$

- **Dualität**

$$\underline{X}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi \cdot x(-\omega)$$

- **Zeitskalierung**

$$x(a \cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}\underline{X}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

- **Frequenzskalierung**

$$\frac{1}{|b|}x\left(\frac{t}{b}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}(b \cdot \omega) \quad b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

- **Zeitverschiebung**

$$x(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

- **Frequenzverschiebung - Modulation**

$$x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}(\omega - \omega_0)$$

- **Faltungssatz**

$$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}_1(\omega) \cdot \underline{X}_2(\omega)$$

- **Multiplikation - Fenstertheorem**

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi}\underline{X}_1(\omega) * \underline{X}_2(\omega)$$

- **Differentiation**
  im Zeitbereich:

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet j\omega\underline{X}(\omega)$$

  im Frequenzbereich:

$$t \cdot x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet j\frac{d}{d\omega}\underline{X}(\omega)$$

- **Integration**

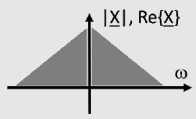
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{j\omega}\underline{X}(\omega) + \pi \cdot \underline{X}(0) \cdot \delta(\omega)$$

- **Energieberechnung - Parseval**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{X}(\omega)|^2 d\omega$$

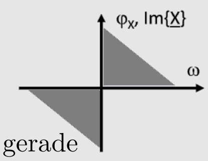
Symmetrie

Betrag und der Realteil des Spektrums sind gerade



Phase und der Imaginärteil des Spektrums sind ungerade.

$$\underline{X}(-\omega) = \underline{X}^*(\omega)$$



$x(t)$ reel und gerade $\rightarrow X(\omega)$ reel und gerade

$$\underline{X}(\omega) = 2\int_0^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt$$

$x(t)$ reel und ungerade $\rightarrow X(\omega)$ imaginär und ungerade

$$\underline{X}(\omega) = -2j\int_0^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt$$

4.6 Laplace Transformation

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}(s)$$

Hintransformation - Analysegleichung

$$\underline{X}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Rücktransformation - Synthesegleichung:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{X}(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \underline{X}(s)e^{-st}ds$$

4.6.1 Eigenschaften Laplace Transformation

- **Linearität**

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha \underline{X}_1(t) + \beta \underline{X}_2(t)$$

- **Skalierung im Zeitbereich**

$$x(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha}\underline{X}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \qquad \alpha > 0$$

- **Skalierung im Bildbereich**

$$\frac{1}{\alpha}x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}(\alpha s) \qquad \alpha > 0$$

- **Verschiebung im Zeitbereich**

$$x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-st_0}\underline{X}(s) \qquad t_0 > 0$$

- **Verschiebung im Bildbereich - Modulation**

$$e^{at}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}(s-a)$$

- **Faltung**

$$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{X}_1(s) \cdot \underline{X}_2(s)$$

- **Differentiation im Zeitbereich**

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

- **Differentiation im Bildbereich**

$$t \cdot x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -\frac{d}{ds}\underline{X}(s)$$

- **Integration im Zeitbereich**

$$\int_0^t x(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}\underline{X}(s)$$

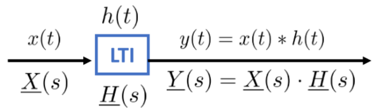
- **Integration im Bildbereich**

$$\frac{1}{t}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_s^{\infty} \underline{X}(s)ds$$

4.6.2 Rücktransformation rationaler Funktionen

Partialbruchzerlegung: Siehe papula nach S.157

4.7 LTI-Systeme im Bildbereich



4.7.1 Impuls- und Sprungantwort im Bildbereich

Impulsantwort:

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \underline{H}(s)$$

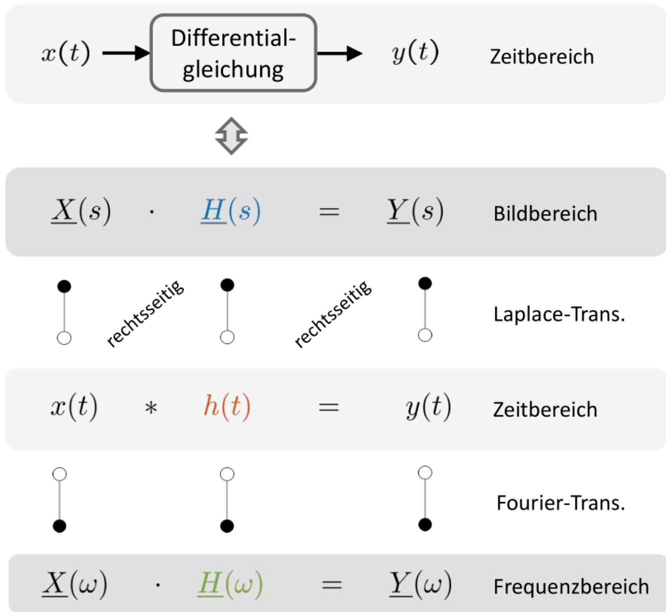
durch integrationssatz:

$$g(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$$

Sprungantwort:

$$g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\underline{H}(s)}{s}$$

4.8 Systemantwort von LTI Systemen



5 Schaltvorgänge

5.1 Berechnen von Schaltvorgänge im Bildbereich

5.1.1 Laplacetransformation der Differentialgleichung

Aufgrund der Eigenschaften der Laplacetransformation wird aus einer DGL im Zeitbereich eine algebraische Gleichung im Bildbereich.
Differentiation im Zeitbereich:

$$\frac{d}{dt}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s \cdot \underline{X}(s) - x(0^+)$$

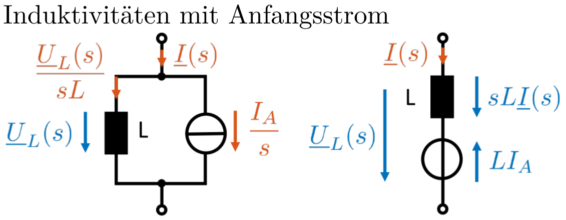
$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2 \cdot \underline{X}(s) - s \cdot x(0^+) - \frac{dx}{dt}(0^+)$$

5.1.2 Schaltvorgänge mit ungeladenen Energiespeichern

1. Das Eingangssignal wird mit der Laplacetransformation in den Bildbereich transformiert.
2. Die Übertragungsfunktion wird aus dem Schaltbild nach dem Schaltvorgang mit komplexer Wechselstromrechnung bestimmt
3. Das Ausgangssignal wird im Bildbereich berechnet: $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$
4. Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der Tabellen
5. **NUR:** wenn alle Energiespeicher zum zeitpunkt $t = 0$ energielos sind:
   [i] Kondensatoren ungeladen
   [ii] Spulen stromlos

5.1.3 Schaltvorgänge mit geladenen Energiespeichern

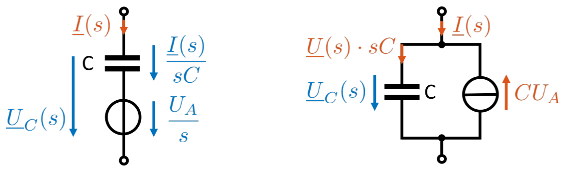
1. Erstellen eines Ersatzschaltbild für den Schaltkreis nach dem Schaltvorgang:
   - Induktivitäten mit Anfangsstrom



$$\underline{U}_L(s) = L \cdot (s \cdot \underline{I}_L(s) - \underbrace{i_L(t=0)}_{I_A})$$

$$\underline{I}_L(s) = \frac{\underline{U}_L(s)}{sL} + \frac{I_A}{s}$$

   - Kapazitäten mit Anfangsspannung (Vorladung):



$$\underline{I}_C(s) = C \cdot (s \cdot \underline{U}_C(s) - \underbrace{u_C(t=0)}_{U_A})$$

$$\underline{U}_C(s) = \frac{\underline{I}_C(s)}{sC} + \frac{U_A}{s}$$

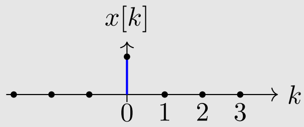
2. Die Übertragungsfunktion wird aus dem Ersatzschaltbild mit komplexer Wechselstromrechnung bestimmt
3. Das Eingangssignal wird mit der Laplacetransformation in den Bildbereich transformiert.
4. Das Ausgangssignal wird im Bildbereich berechnet: $\underline{Y}(s) = \underline{X}(s) \cdot \underline{H}(s)$
5. Rücktransformation in den Zeitbereich mit Hilfe der Tabellen

6 Zeitdiskrete Systeme

6.1 Elementare Zeitdiskrete Signale

- **Einheitsimpulse**

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Eigenschaften:

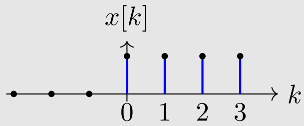
  - neutrales Element der Faltung
  - Anregung der Impulsantwort
  - besitzt konstantes Spektrum
  - Summe ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$

Ausblendeeigenschaft:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)$$

- **Einheitssprung**

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

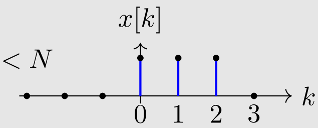


Zusammenhang mit Einheitsimpulse:

$$\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)$$

- **Rechteckfolge**

$$\mathrm{rect}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \texttt{sonst} \end{cases}$$

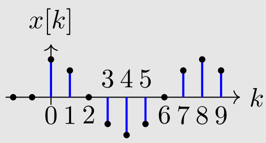


Zusammenhang mit Dirac- und Einheitsimpuls:

$$\begin{aligned} \mathrm{rect}(n) &= \varepsilon(n) + \varepsilon(n-N) \\ &= \varepsilon(n) \cdot \varepsilon(N-1-n) \end{aligned}$$

- **Zeitdiskrete Sinus**

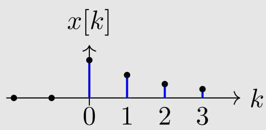
$$x(n) = A \cdot \sin(\Omega n + \varphi)$$



A : `Amplitude`
Ω : `normierte Kreisfrequenz`
φ : `Anfangsphase`

- **Exponentialfolge**

$$\begin{aligned} x(n) &= \underline{A} \cdot e^{Sn} \\ &= \underline{A} \cdot e^{(\Sigma + j\Omega)n} \end{aligned}$$



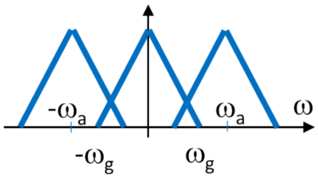
$$S = \Sigma + j\Omega$$

`Amplitudenänderung` $\Sigma = \sigma T = \sigma / f_A$

`normierte Kreisfrequenz` $\Omega = \omega T = 2\pi f_A$

6.2 Abtasttheorem im Fequenzbereich

Nur wenn das Eingangssignal auf ω_g bandbegrenzt und die Abtastfrequenz $\omega_a \geq 2\omega_g$ ist, kommt es nicht zu spektralen Überlappungen (= Aliasing).
Aliasing führt zu zusätzlichen Abtastwerten nicht mehr rekonstruieren lässt.



6.3 Elementare Zeitdiskrete Systeme

6.3.1 Definition

Ein System, das sowohl linear, als auch zeitinvariant ist, nennen wir ein lineares zeitinvariantes System, oder kurz LTI-System

6.3.2 Kausalität und Stabilität

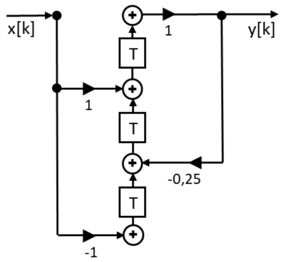
- **Kausal**: wenn die Anzahl der Pole (Grad des Nenners) größer gleich der Anzahl der Nullstellen (Grad des Zählers) ist. $h(n) = 0$ für $n < 0$
- **Stabil**: wenn der Einheitskreis zum Konvergenzbereich gehört $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n))| < \infty$

Liegen alle Pole innerhalb des Einheitskreises, so ist das LTI-System kausal und stabil!

6.3.3 Faltung

Beispiel Impulsantworttabelle:

	d_0	d_1	d_2	d_3	$\frac{1}{c_0}$	c_1	c_2	c_3
k	0	1	0	-1	$h[k]$	0	-0,25	0
0	1							
1		1			1			
2			1			1		
3				1	$1 \cdot 1 + (-0,25) \cdot 1$		1	
4						$-1,25$		1
5					$-1,25/4$		-1,25	



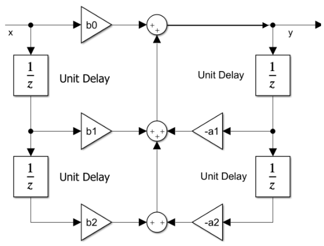
Alternativ mit der Differenzengleichung:

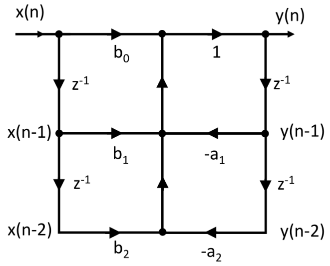
$$\underline{H}(z) = \frac{8 \cdot z^2 - 2 \cdot z - 2}{z^2 + 0,25} = \frac{8 - 2 \cdot z^1 - 2 \cdot z^{-2}}{1 + 0,25 \cdot z^{-2}} \Bigg\} \frac{b}{a} = \frac{Y}{X}$$

Differenzengleichung
$\rightarrow y(n) = 8x(n) - 2x(n-1) - 2x(n-2) - 0,25y(n-2)$

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_N y(n-N) =$$
$$b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_M x(n-M)$$

6.3.4 Signalflussplan / Signalflussgraph

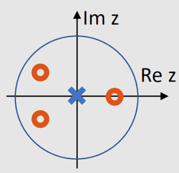


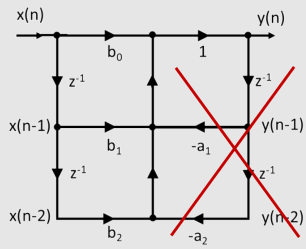


- Ein Knoten, in den ein Zweig hinein und zwei oder mehr Zweige hinausgehen, ist eine Verzweigung.
- Ein Knoten, in den mehrere Zweige hinein und ein Zweig hinausgeht, ist ein Addierer.
- Ein Pfeil, über den ein Koeffizient geschrieben ist, beschreibt eine Multiplikation des Signals mit dem Koeffizienten.
- Ein Zweig, über den z^{-1} geschrieben ist, beschreibt eine Verzögerung um einen Abtasttakt.

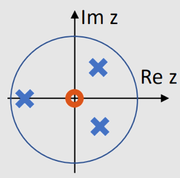
6.3.5 Klassifizierung von Systemen

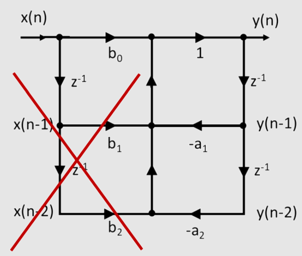
- **Transversale Systeme:**
  Der Ausgang wird nicht auf den Eingang zurückgeführt
  $\Rightarrow a_k = 0$ für $k > 0$
  $\Rightarrow$ alle Pole liegen im Ursprung





- **Rekursive Systeme:**
  Der aktuelle Ausgangswert hängt nur vom aktuellen Eingangswert und früheren Ausgangswerten ab.
  $\Rightarrow b_k = 0$ für $k > 0$
  $\Rightarrow$ alle Nullstellen liegen im Ursprung

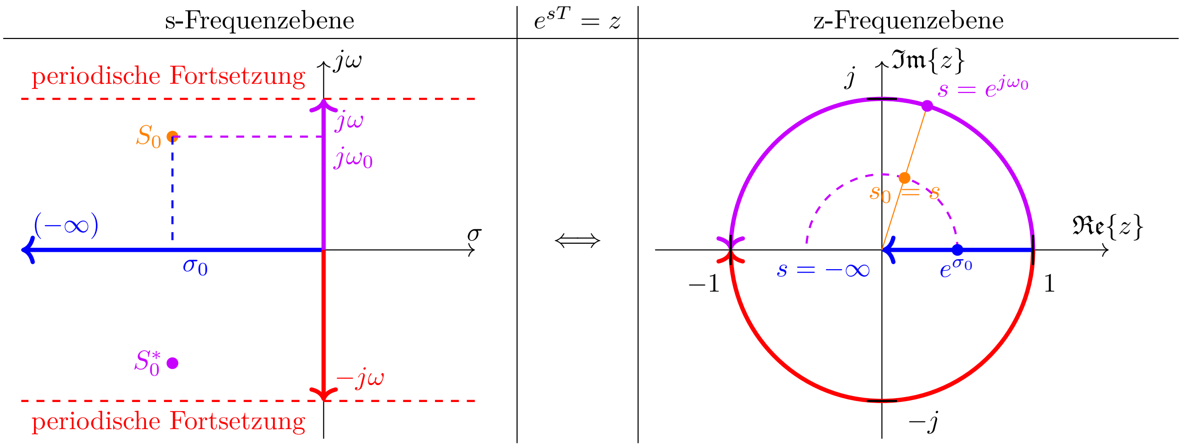




Systeme nach der Länge der Impulsantwort

- **Finite Impulse Response (FIR) Systeme:**
  - haben endlich lange Impulsantworten
  - synonym zum Begriff transversales System
  - endlich lange Impulsantworten lassen sich auch mit transversal-rekursiven Systemen erreichen
- **Infinite Impulse Response (IIR) Systeme:**
  - haben unendlich lange Impulsantworten
  - synonym zum Begriff rekursives System

6.4 s-Frequenzebene/z-Frequenzebene



6.4.1 Zeitdiskrete Fouriertransformation

zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT):

$$\underline{X}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\Omega k}$$

zeitdiskrete Fourier-Inverse-Transformation (IDTFT):

$$\underline{x}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega}d\Omega$$

beide sind gleich: $x(n) = x(k)$

6.4.2 Z-Transformation

Die LT von $x_a(t)$ ist gleich der z-Transformation von $x(k)$: $e^{sT} = z$

$$\underline{X}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-skT} \Rightarrow \underline{X}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

für die Rücktransformation wird Partialbruchzerlegung verwendet.

$$\underline{X}(z) = \frac{\underline{Z}(z)}{\underline{N}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M}(z - z_{om})}{\prod_{n=1}^{N}(z - z_{xn})}$$

bei einfachen Polstellen gilt:

$$\boxed{\frac{\underline{X}(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - z_{x1}} + \frac{c_2}{z - z_{x2}} + \cdots + \frac{c_N}{z - z_{xN}}}$$

$$= \frac{c_0}{z} + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{z - z_{xn}}$$

bei mehrfachen Polstellen gilt:

$$\boxed{\frac{\underline{X}(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - z_{xn}} + \frac{c_2}{(z - z_{xn})^2} + \cdots + \frac{c_k}{(z - z_{xn})^k}}$$

6.4.3 Übertragungsfunktion $\Leftrightarrow$ Differenzengleichung

$$\underline{H}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot z^{N-k}}$$

6.4.4 PN-Diagramm $\Rightarrow$ Frequenzebene

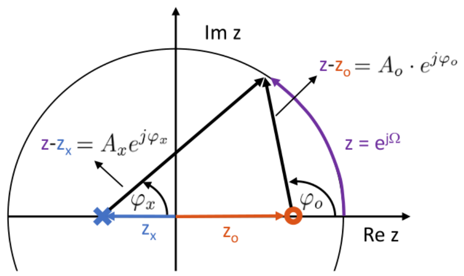
$z = e^{j\Omega}$ bedeutet: um $\underline{H}(\Omega)$ zu ermitteln, muss man den Einheitskreis entlang gehen.

$$\underline{H}(\Omega) = \underline{H}(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

Beispiel:

$$\underline{H}(z) = \frac{(z - z_o)}{(z - z_x)}$$

$$\underline{H}(\Omega) = \frac{(e^{j\Omega} - z_o)}{(e^{j\Omega} - z_x)} = \frac{A_o e^{j\varphi_o}}{A_x e^{j\varphi_x}}$$



Betragsfrequenzgang

$$H(\Omega) = \frac{A_o(\Omega)}{A_x(\Omega)}$$

Phasenfrequenzgang

$$\varphi_H(\Omega) = \varphi_o(\Omega) - \varphi_x(\Omega)$$

Aus dem Punkt (1,0) starten und am Einheitskreis entlang gegen den Uhrzeigersinn gehen.