

Roll No .....

AI/AL/CD-401 (GS)

B.Tech. IV Semester

Examination, December 2024

Grading System (GS)

## Introduction to Discrete Structure and Linear Algebra

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

Note: i) Answer any five questions.

किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Let A be the set of even numbers between 10 and 20, and B be the set of multiples of 5 between 15 and 35. If  $a$  is an even number from set A, and  $b$  is a multiple of 5 from set B, find the set of ordered pairs, such that ' $a$ ' is a factor of ' $b$ ' and  $a$  is less than  $b$ . 7

मान लीजिए A, 10 और 20 के बीच सम संख्याओं का समुच्चय है, और B, 15 और 35 के बीच 5 के गुणजों का समुच्चय है। यदि  $a$ , समुच्चय A से एक सम संख्या है और  $b$ , समुच्चय B से 5 का गुणज है, तो क्रमित युग्मों का ऐसा समुच्चय ज्ञात कीजिए जिससे ' $a$ ', ' $b$ ' का एक गुणखंड हो और  $a, b$  से छोटा हो।

- b) Consider the relation R on the set of integers Z defined by  $aRb$  if and only if  $a^2 - b^2$  is divisible by 4. Determine the common relations on Z that are the transitive closures of R. 7

पूर्णांक Z के समुच्चय पर  $aRb$  द्वारा परिभाषित संबंध R पर विचार करें यदि और केवल यदि  $a^2 - b^2$ , 4 से विभाज्य है। Z पर उभयनिष्ठ संबंध निर्धारित करें जो R के सकर्मक संवृत हैं।

2. a) Suppose that the relation R is irreflexive. Is  $R^2$  necessarily irreflexive? Give a reason for your answer. 7

मान लीजिए कि संबंध R अप्रतिवर्तक है। क्या  $R^2$  अनिवार्य रूप से अप्रतिवर्तक है? अपने उत्तर के लिए कारण बताइए।

- b) Solve the recurrence relation  $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$  given the initial conditions  $a_0 = 3$  and  $a_1 = 6$ . 7

पुनरावृत्ति संबंध  $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$  को हल करें, प्रारंभिक स्थितियाँ  $a_0 = 3$  और  $a_1 = 6$  दी गई हैं।

3. a) Prove that a subgroup H of a group G is normal if and only if  $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$ . 7

सिद्ध कीजिए कि समूह G का उपसमूह H सामान्य है यदि और केवल यदि  $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$

- b) Let  $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  with addition modulo 6. Is G a group? Justify your answer. 7

मान लें  $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  जोड़ मॉड्युलो 6 के साथ है। क्या G एक समूह है? अपने उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए।

4. a) Construct a niche overlap graph for six species of birds, where the hermit thrush competes with the robin and with the blue jay, the robin also competes with the mockingbird, the mockingbird also competes with the blue jay, and the nuthatch competes with the hairy wood-pecker. 7

पक्षियों की छह प्रजातियों के लिए एक आला ओवरलैप ग्राफ का निर्माण करें, जहां हर्मिट थ्रश रॉबिन और ब्लू जे (jay) के साथ प्रतिस्पर्धा करता है, रॉबिन मॉकिंगबर्ड के साथ भी प्रतिस्पर्धा करता है, मॉकिंगबर्ड ब्लू जे (jay) के साथ भी प्रतिस्पर्धा करता है, और नटहैच हेयरी वुड-पेकर के साथ प्रतिस्पर्धा करता है।

- b) Let  $p$  and  $q$  be the propositions 7

$p$  : It is below freezing.

$q$  : It is snowing.

Write these propositions using  $p$  and  $q$  and logical connectives (including negations).

- It is below freezing and snowing.
- It is below freezing but not snowing.
- It is not below freezing and it is not snowing.
- It is either snowing or below freezing (or both).
- If it is below freezing, it is also snowing.
- Either it is below freezing or it is snowing, but it is not snowing if it is below freezing.
- That it is below freezing is necessary and sufficient for it to be snowing.

मान लीजिए  $p$  और  $q$  प्रस्ताव है।

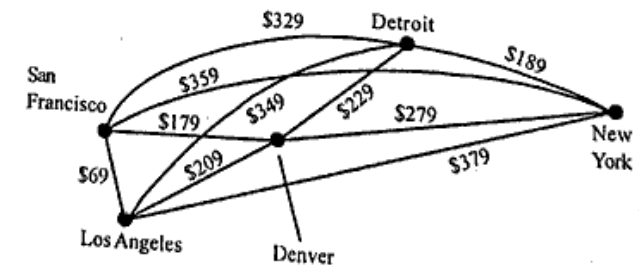
$p$  : तापमान हिमांक से नीचे है।

$q$  : बर्फ पड़ रही है।

इन प्रस्तावों को  $p$  और  $q$  तथा तार्किक संयोजकों (नकारात्मक सहित) का उपयोग करके लिखें।

- तापमान शून्य से नीचे है और बर्फबारी हो रही है।
- तापमान शून्य से नीचे है, लेकिन बर्फबारी नहीं हो रही है।
- तापमान शून्य से नीचे नहीं है और बर्फबारी भी नहीं हो रही है।
- या तो बर्फबारी हो रही है या फिर ठंड से नीचे (या दोनों)
- यदि तापमान शून्य से नीचे है, तो बर्फबारी भी हो रही है।
- या तो तापमान शून्य से नीचे है या बर्फबारी हो रही है, लेकिन यदि तापमान शून्य से नीचे है, तो बर्फबारी नहीं हो रही है।
- तापमान शून्य से नीचे होना बर्फबारी होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त है।

5. a) Find a route with the least total airfare that visits each of the cities in this graph, where the weight on an edge is the least price available for a flight between the two cities. 7
- इस ग्राफ में प्रत्येक शहर के लिए सबसे कम कुल हवाई किराया वाला मार्ग खोजें, जहां किनारे पर भार दो शहरों के बीच उड़ान के लिए उपलब्ध सबसे कम कीमत है।



- b) Given a matrix F with  $SVD F = U\Sigma V^T$ , where: 7

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Find the original matrix F.

एक मैट्रिक्स F दिया गया है जिसमें  $SVD F = U\Sigma V^T$  है, जहाँ

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

मूल मैट्रिक्स F ज्ञात करें।

6. a) Find the Determinant and trace of the matrix: 7  
मैट्रिक्स का निर्धारक और ट्रेस ज्ञात करें।

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- b) Using Cholesky decomposition, Verify that whether the following matrix is positive definite or not. 7

कोलेस्की अपघटन का उपयोग करके, सत्यापित करें कि निम्नलिखित मैट्रिक्स सकारात्मक निश्चित है या नहीं।

<https://www.rgpvonline.com>

7. a) Write a detail note on Analysis of Variance. 7  
प्रसरण के विश्लेषण पर एक विस्तृत टिप्पणी लिखिए।
- b) A sample of 100 B.Sc. Student is taken from a medical college with height having standard deviation (S.D.= 10 cm). The mean height of sample of student is found 168.8 cm. Can we accept that the mean height of student is 170 cm. Justify your answer. 7

मेडिकल कॉलेज से 100 B.Sc. छात्रों का एक नमूना लिया गया है, जिनकी ऊँचाई का मानक विचलन (S.D.= 10 सेमी.) है। छात्र के नमूने की औसत ऊँचाई 168.8 सेमी. पाई गई है। क्या हम यह स्वीकार कर सकते हैं कि छात्र की औसत ऊँचाई 170 सेमी. है। अपने उत्तर का औचित्य सिद्ध करें।

8. Write short note on any two: 14
- Type-I and Type-II Errors
  - Eigen decomposition
  - Abelian group and cyclic group
- किन्हीं दो पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
- टाइप-I और टाइप-II त्रुटियाँ
  - आइगेन अपघटन
  - एबेलियन समूह और चक्रीय समूह

\*\*\*\*\*