

Modelado y control de péndulo invertido con dos ruedas

Víctor David Silva
vic.silva.1994@gmail.com

*Control y Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional
de Cuyo, Mendoza, Argentina*

Marzo 2022

1 Resumen

El presente trabajo es el proyecto final de la cátedra Control y Sistemas(2) de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica. Se tiene como objetivo realizar el modelado de un péndulo invertido sobre dos ruedas, diseñar su controlador en espacio de estados y usar un sensor teniendo en cuenta su ruido. Es un sistema inherentemente inestable por lo cual el diseño correcto del controlador es sumamente importante. Usando el software Matlab(1) para su estudio se obtuvo el comportamiento deseado bajo diversas situaciones.

2 Introducción

La razón por la cual estudiar este sistema es debido a sus aplicaciones en la robótica como en un robot bípedo para darle equilibrio o un segway. Como objetivo principal se desea que el sistema pueda mantenerse estable y responda ante consignas de posición. Como objetivo secundario se quiere que pueda mantenerse estable ante perturbaciones externas.

3 Desarrollo

3.1 Modelo de la planta

Para obtener el modelo matemático de la planta fue necesario realizar una investigación de diversos trabajos de investigación y tesis entre ellos los más relevantes para la elaboración de este trabajo fueron el de Duarte(4) y Astudillo(5), de los cuales también se obtuvieron las constantes utilizadas para el cálculo, pero se agregó una perturbación externa no considerada en estos trabajos. Se realizó el modelado del motor de corriente continua simplificado, este representa el subsistema eléctrico. Usando la Ley de Kirchhoff de las mallas se obtiene la siguiente ecuación:

$$V_a = L \frac{di}{dt} + R_a i + e_m \quad (1)$$

donde V_a es el voltaje aplicado al motor, R_a es la resistencia de armadura, e_m es la fuerza electromotriz inducida, L es el valor de la inductancia y di/dt es la razón de cambio de la corriente con respecto al tiempo. La fuerza contraelectromotriz está definida por:

$$e_m = k_e \omega_m \quad (2)$$

donde k_e es la constante electromotriz y ω_m la velocidad angular del eje del motor. Considerando que el cambio de la corriente con respecto al tiempo será lento se puede despreciar el término de la inductancia. Luego se reemplaza (2) en (1) y se despeja la corriente:

$$i = \frac{V_a - k_e \omega_m}{R_a} \quad (3)$$

El torque motor se puede expresar como:

$$\tau_m = k_m i \quad (4)$$

donde k_m es la constante de torque. Se reemplaza (3) en (4) y se obtiene la siguiente ecuación del torque motor:

$$\tau_m = \frac{k_m V_a - k_m k_e \omega_m}{R_a} \quad (5)$$

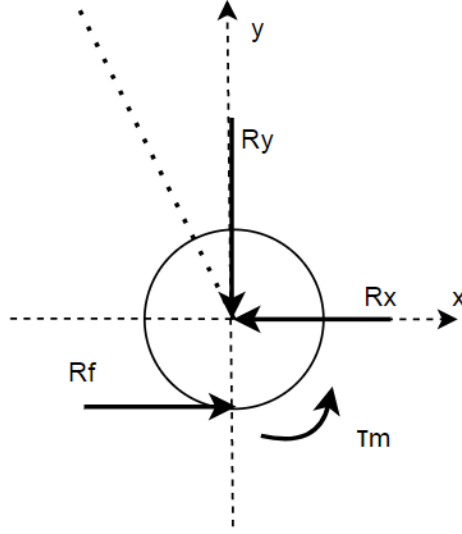


Figure 1: Diagrama de cuerpo libre de una rueda

Para el subsistema mecánico se modela la dinámica de las ruedas (figura 1). Se comenzará analizando una sola rueda, pero se supone que las fuerzas aplicadas a ambas son las mismas. Se plantea su diagrama de cuerpo libre y se aplica la segunda ley de Newton:

$$m_r \ddot{x} = R_f - R_x \quad (6)$$

donde m_r es la masa de la rueda, \ddot{x} es la aceleración lineal de la rueda, R_f es la fuerza de fricción entre la rueda y el suelo y R_x es la reacción de la rueda sobre el péndulo en el eje x. Ahora se plantea la sumatoria de torques respecto al eje de la rueda:

$$I_r \ddot{\theta}_r = \tau_m - R_f r \quad (7)$$

donde I_r es el momento de inercia de la rueda y $\ddot{\theta}_r$ es la aceleración angular de la rueda. Se reemplaza la ecuación (5) en la ecuación (7) y se despeja la fuerza de fricción R_f :

$$\begin{aligned} I_r \ddot{\theta}_r &= \frac{k_m V_a}{R_a} - \frac{k_m k_e \dot{\theta}_r}{R_a} - R_f r \\ R_f &= \frac{k_m V_a}{r R_a} - \frac{k_m k_e \dot{\theta}_r}{r R_a} - \frac{I_r \ddot{\theta}_r}{r} \end{aligned} \quad (8)$$

Se reemplaza (8) en (6)

$$m_r \ddot{x} = \frac{k_m V_a}{r R_a} - \frac{k_m k_e \dot{\theta}_r}{r R_a} - \frac{I_r \ddot{\theta}_r}{r} - R_x \quad (9)$$

El desplazamiento angular y el lineal estan relacionados por el radio de la rueda al igual que las velocidades y aceleraciones:

$$\theta_r = \frac{x}{r} \quad (10)$$

$$\dot{\theta}_r = \frac{\dot{x}}{r} \quad (11)$$

$$\ddot{\theta}_r = \frac{\ddot{x}}{r} \quad (12)$$

Reemplazando (11) y (12) en (9) y reordenando se obtiene:

$$\begin{aligned} m_r \ddot{x} &= \frac{k_m V_a}{r R_a} - \frac{k_m k_e \dot{x}}{r R_a} - \frac{I_r \ddot{x}}{r} - R_x \\ (m_r + \frac{I_r}{r^2}) \ddot{x} &= \frac{k_m V_a}{r R_a} - \frac{k_m k_e \dot{x}}{r^2 R_a} - R_x \end{aligned} \quad (13)$$

Como se supone que ambas ruedas y actuadores son iguales se puede multiplicar por dos la ecuación (13) obteniendo así la dinámica del motor-rueda:

$$2(m_r + \frac{I_r}{r^2}) \ddot{x} = 2 \frac{k_m V_a}{r R_a} - 2 \frac{k_m k_e \dot{x}}{r^2 R_a} - 2 R_x \quad (14)$$

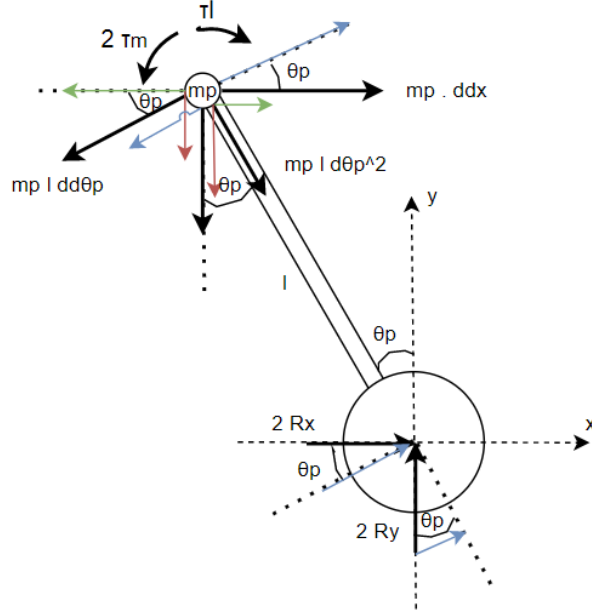


Figure 2: Diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido

Ahora se modelará la dinámica del péndulo. Se observa en la figura 2 el diagrama de cuerpo libre del péndulo. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = m_p \ddot{x}$$

donde m_p es la masa del péndulo y \ddot{x} es la aceleración lineal del péndulo en el centro de masa sobre el eje x considerando la masa consentrada en el extremo del péndulo. Las fuerzas de la sumatoria son:

$$\begin{aligned} 2R_x - m_p l \ddot{\theta}_p \cos(\theta_p) + m_p l \dot{\theta}_p^2 \sin(\theta_p) &= m_p \ddot{x} \\ 2R_x &= m_p \ddot{x} + m_p l \ddot{\theta}_p \cos(\theta_p) - m_p l \dot{\theta}_p^2 \sin(\theta_p) \end{aligned} \quad (15)$$

Reemplazando (15) en (14) obtenemos la primera de las dos ecuaciones que describen la dinámica buscadas:

$$2(m_r + \frac{I_r}{r^2})\ddot{x} = 2\frac{k_m V_a}{r R_a} - 2\frac{k_m k_e \dot{x}}{r^2 R_a} - m_p \ddot{x} - m_p l \ddot{\theta}_p \cos(\theta_p) + m_p l \dot{\theta}_p^2 \sin(\theta_p) \quad (16)$$

Ahora se utilizan las fuerzas perpendiculares al péndulo además de las fuerzas debidas a la reacción para encontrar otra ecuación dinámica:

$$2R_y \sin(\theta_p) + 2R_x \cos(\theta_p) - m_p g \sin(\theta_p) = m_p \ddot{x} \cos(\theta_p) + m_p l \ddot{\theta}_p \quad (17)$$

Se aplica la sumatoria de torques debido a las fuerzas que actúan en el péndulo, por lo que se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \sum M_o &= I_p \ddot{\theta}_p \\ -2R_x l \cos(\theta_p) - 2R_y l \sin(\theta_p) - 2\tau_m + \tau_l &= I_p \ddot{\theta}_p \end{aligned} \quad (18)$$

Sustituyendo (5) en (18):

$$-2R_x l \cos(\theta_p) - 2R_y l \sin(\theta_p) - 2\frac{k_m V_a}{R_a} + 2\frac{k_m k_e \omega_m}{R_a} + \tau_l = I_p \ddot{\theta}_p \quad (19)$$

Multiplicando (17) por -1 y despejando:

$$-2R_y l \sin(\theta_p) - 2R_x l \cos(\theta_p) = -m_p l \ddot{x} \cos(\theta_p) - m_p l^2 \ddot{\theta}_p - m_p g l \sin(\theta_p) \quad (20)$$

Sustituyendo (20) en (19):

$$-m_p l \ddot{x} \cos(\theta_p) - m_p l^2 \ddot{\theta}_p - m_p g l \sin(\theta_p) - 2\frac{k_m V_a}{R_a} + 2\frac{k_m k_e \omega_m}{R_a} + \tau_l = I_p \ddot{\theta}_p \quad (21)$$

Las ecuaciones (16) y (21) describen la dinámica completa del sistema. Estas ecuaciones son no lineales, por lo que se linearizarán alrededor del punto de equilibrio inestable del péndulo, de este modo se podrá usar la teoría de control lineal para mantener el péndulo de forma vertical. Para hacer está simplificación consideraremos que el ángulo θ_p es muy pequeño por lo que tenemos:

$$\theta_p = \pi + \phi$$

entonces:

$$\cos(\theta_p) = \cos(\pi + \phi) \approx -1 \quad (22)$$

$$\text{sen}(\theta_p) = \text{sen}(\pi + \phi) \approx -\phi \quad (23)$$

$$\dot{\theta}_p^2 = \dot{\phi}^2 \approx 0 \quad (24)$$

$$\dot{\theta}_p = \dot{\phi} \quad (25)$$

$$\ddot{\theta}_p = \ddot{\phi} \quad (26)$$

Se reemplaza estas ecuaciones en (16) y (21). Como el sistema es lineal invariante en el tiempo (LTI) podemos representar las ecuaciones en espacio de estados de la siguiente manera:

$$\ddot{x} = \frac{2k_m}{R_a r (2m_r + 2\frac{I_r}{r^2} + m_p)} V_a - \frac{2k_m k_e}{R_a r^2 (2m_r + 2\frac{I_r}{r^2} + m_p)} \dot{x} + \frac{m_p l}{2m_r + 2\frac{I_r}{r^2} + m_p} \ddot{\phi} \quad (27)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{m_p l}{I_p + m_p l^2} \ddot{x} - 2\frac{k_m}{R_a (I_p + m_p l^2)} V_a + 2\frac{k_m k_e}{r R_a (I_p + m_p l^2)} \dot{x} + \frac{m_p g l}{I_p + m_p l^2} \phi + \frac{1}{I_p + m_p l^2} \tau_l \quad (28)$$

Para simplificar visualmente las ecuaciones se puede reemplazar:

$$\alpha = I_p + m_p l^2 \quad (29)$$

$$\beta = 2m_r + 2\frac{I_r}{r^2} + m_p \quad (30)$$

Para que queden en función de una sola aceleración, angular o lineal, se reemplaza la ecuación (28) en (27):

$$\ddot{x} = \frac{2k_m}{R_a r \beta} V_a - \frac{2k_m k_e}{R_a r^2 \beta} \dot{x} + \frac{m_p l}{\beta} \left(\frac{m_p l}{\alpha} \ddot{x} - 2\frac{k_m}{R_a \alpha} V_a + 2\frac{k_m k_e}{r R_a \alpha} \dot{x} + \frac{m_p g l}{\alpha} \phi + \frac{1}{\alpha} \tau_l \right)$$

$$\ddot{x} = \frac{2k_m}{R_a r \beta} V_a - \frac{2k_m k_e}{R_a r^2 \beta} \dot{x} + \frac{m_p^2 l^2}{\alpha \beta} \ddot{x} - \frac{2k_m m_p l}{R_a \alpha \beta} V_a + \frac{m_p l}{\beta} \frac{2k_m k_e}{r R_a \alpha} \dot{x} + \frac{m_p l}{\beta} \frac{m_p g l}{\alpha} \phi + \frac{m_p l}{\alpha \beta} \tau_l$$

$$\left(1 - \frac{m_p^2 l^2}{\alpha \beta}\right) \ddot{x} = \left(\frac{2k_m k_e m_p l}{r R_a \alpha \beta} - \frac{2k_m k_e}{R_a r^2 \beta}\right) \dot{x} + \left(\frac{2k_m}{R_a r \beta} - \frac{2k_m m_p l}{R_a \alpha \beta}\right) V_a + \frac{m_p^2 g l^2}{\alpha \beta} \phi + \frac{m_p l}{\alpha \beta} \tau_l$$

$$\left(\frac{\alpha \beta - m_p^2 l^2}{\alpha \beta}\right) \ddot{x} = \frac{2k_m k_e (m_p l r - \alpha)}{R_a r^2 \alpha \beta} \dot{x} + \frac{2k_m (\alpha - m_p l r)}{R_a r \alpha \beta} V_a + \frac{m_p^2 g l^2}{\alpha \beta} \phi + \frac{m_p l}{\alpha \beta} \tau_l \quad (31)$$

donde:

$$\gamma = \alpha \beta - m_p^2 l^2 \quad (32)$$

Reemplazando (32) en la ecuación (31):

$$\ddot{x} = \frac{2k_mk_e(m_plr - \alpha)}{R_ar^2\gamma} \dot{x} + \frac{2k_m(\alpha - m_plr)}{R_ar\gamma} V_a + \frac{m_p^2gl^2}{\gamma} \phi + \frac{m_pl}{\gamma} \tau_l \quad (33)$$

Luego se reemplaza la ecuación (27) en (28):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{m_pl}{\alpha} \left(\frac{2k_m}{R_ar\beta} V_a - \frac{2k_mk_e}{R_ar^2\beta} \dot{x} + \frac{m_pl}{\beta} \ddot{\phi} \right) - \frac{2k_m}{R_a\alpha} V_a + \frac{2k_mk_e}{R_ar\alpha} \dot{x} + \frac{m_pgl}{\alpha} \phi + \frac{1}{\alpha} \tau_l \\ \ddot{\phi} &= \frac{2k_mm_pl}{R_ar\alpha\beta} V_a - \frac{2k_mk_em_pl}{R_ar^2\alpha\beta} \dot{x} + \frac{m_p^2l^2}{\alpha\beta} \ddot{\phi} - \frac{2k_m}{R_a\alpha} V_a + \frac{2k_mk_e}{R_ar\alpha} \dot{x} + \frac{m_pgl}{\alpha} \phi + \frac{1}{\alpha} \tau_l \\ (1 - \frac{m_p^2l^2}{\alpha\beta}) \ddot{\phi} &= (\frac{2k_mm_pl}{R_ar\alpha\beta} - \frac{2k_m}{R_a\alpha}) V_a + (\frac{2k_mk_e}{R_ar\alpha} - \frac{2k_mk_em_pl}{R_ar^2\alpha\beta}) \dot{x} + \frac{m_pgl}{\alpha} \phi + \frac{1}{\alpha} \tau_l \\ (\frac{\alpha\beta - m_p^2l^2}{\alpha\beta}) \ddot{\phi} &= \frac{2k_m(m_pl - r\beta)}{R_ar\alpha\beta} V_a + \frac{2k_mk_e(r\beta - m_pl)}{R_ar^2\alpha\beta} \dot{x} + \frac{m_pgl}{\alpha} \phi + \frac{1}{\alpha} \tau_l \quad (34) \end{aligned}$$

Reemplazando (32) en la ecuación (34):

$$\ddot{\phi} = \frac{2k_m(m_pl - r\beta)}{R_ar\gamma} V_a + \frac{2k_mk_e(r\beta - m_pl)}{R_ar^2\gamma} \dot{x} + \frac{m_pgl\beta}{\gamma} \phi + \frac{\beta}{\gamma} \tau_l \quad (35)$$

estas ecuaciones en forma matricial tienen la siguiente forma;

$$\vec{\ddot{x}} = A\vec{\dot{x}} + B\vec{u} + B_d\vec{d} \quad (36)$$

$$\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u} \quad (37)$$

donde A es la matriz de sistema de tamaño 4×4 , B es la matriz de entradas de control de tamaño 4×1 , B_d es la matriz de entradas de perturbación de tamaño 4×1 , C es la matriz de salidas de tamaño 1×4 y D es la matriz de transferencia directa. También se hace un cambio de desplazamiento lineal a desplazamiento angular ya que se usará un encoder para conocer el desplazamiento angular de las ruedas. Por lo tanto el sistema en forma matricial tiene la forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2k_mk_e(m_plr - \alpha)}{R_ar^2\gamma} & \frac{m_p^2gl^2}{r\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2k_mk_e(r\beta - m_pl)}{R_ar\gamma} & \frac{m_pgl\beta}{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2k_m(\alpha - m_plr)}{R_ar^2\gamma} \\ 0 \\ \frac{2k_m(m_pl - r\beta)}{R_ar\gamma} \end{bmatrix} V_a + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_pl}{r\gamma} \\ 0 \\ \frac{\beta}{\gamma} \end{bmatrix} \tau_l \\ [y] &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La limitación del modelo es el movimiento traslacional del sistema en un solo eje (x) y rotación del sistema alrededor del eje de las ruedas. En el modelo no se consideró una relación de transmisión entre el motor y la rueda. También se simplificó la consigna de posición.

3.2 Procesamiento de señales

Para obtener información de la planta se realizó la medición de su salida mediante un encoder obteniendo la posición angular de el eje de la rueda/motor. Se buscó el data sheet de un encoder comercial. Se seleccionó el encoder absoluto AD 58 de Hengstler(1), en el mismo indica un error de 35 segundos por vuelta, con esta información se hizo el cálculo del ruido blanco Gaussiano. Para caracterizar el ruido blanco Gaussiano se necesita la media y la varianza. Como media se tiene valor cero. En cuanto a la varianza se calcula primero la desviación estándar por vuelta siendo esta:

$$\sigma = \frac{35}{360 * 60 * 60} = 2,700617 \times 10^{-5}$$

Elevando al cuadrado se obtiene la varianza:

$$s = \sigma^2 = 7,293334 \times 10^{-10}$$

de este modo se obtiene el ruido blanco introducido por el sensor. Como este es muy pequeño no fue necesario agregar un filtro. Esta varianza se usará en el modelo de Simulink para introducir ruido en la señal.

3.3 Controlador

Para el diseño del controlador como se tiene el modelo matemático de la planta se decidió por utilizar un control en espacio de estados como se muestra en la siguiente figura:

Para obtener el valor de la matriz K es necesario utilizar el método de Ackermann al tratarse de un sistema de orden 4. Primero se obtiene los coeficientes del polinomio característico a lazo abierto mediante:

$$\det(sI - A) = a(s) = s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4$$

Se propone un polinomio característico del sistema a lazo cerrado, donde las raíces serán los polos de este sistema:

$$p(s) = s^4 + p_1s^3 + p_2s^2 + p_3s + p_4$$

El sistema debe ser alcanzable mediante la entrada de control, para ello se comprueba que la matriz de alcanzabilidad tenga rango completo:

$$W_r = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = 4$$

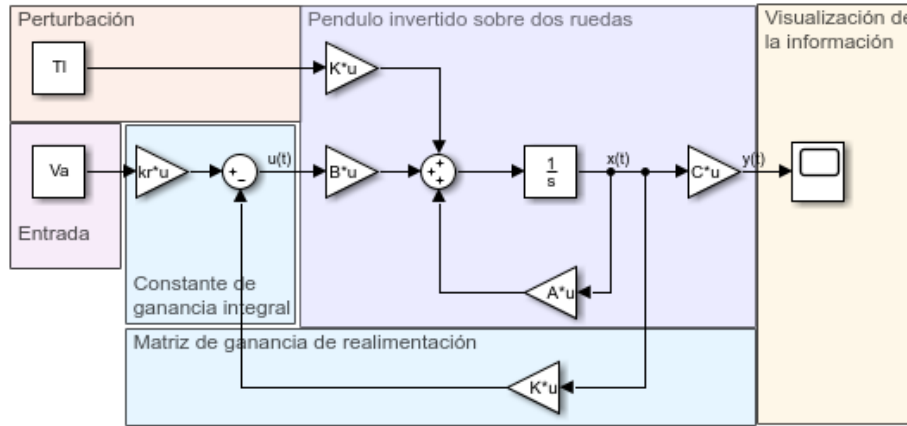


Figure 3: Diagrama de bloques realimentación completa de estados

como es un sistema de orden 4 la matriz tiene inversa, su determinante es distinto de cero, el sistema es alcanzable a través de la entrada de control.

También se calcula la matriz \tilde{W}_r la cual es igual a :

$$\tilde{W}_r = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando la fórmula de Akermann permite obtener la matriz K:

$$K = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad p_3 - a_3 \quad p_4 - a_4] \tilde{W}_r W_r^{-1}$$

$$K = [-0.23626 \quad -0.44773 \quad -39.399 \quad -2.5389]$$

Como se requiere una realimentación completa de estados y no se tiene un sensor de cada variable de estado se debe hacer uso de un observador como se muestra en la siguiente figura:

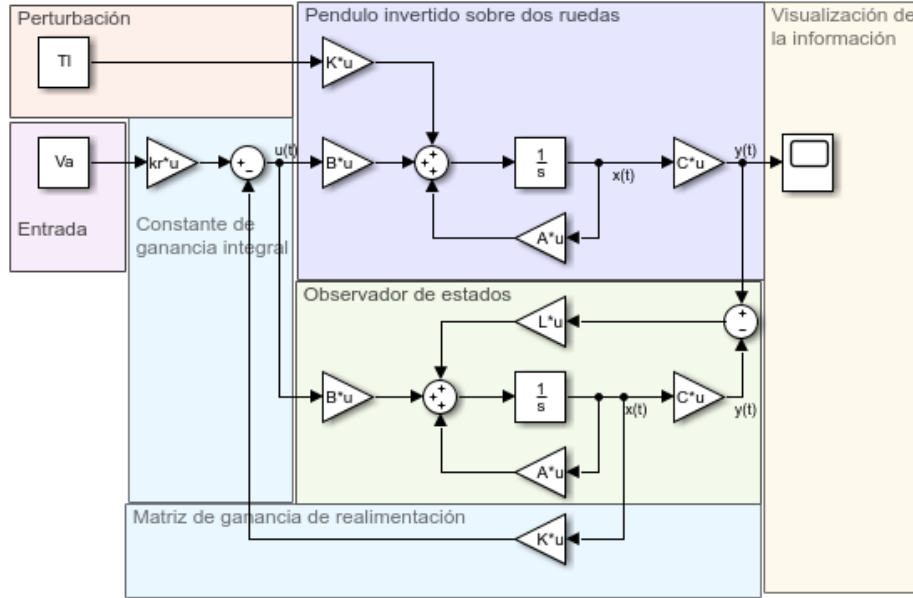


Figure 4: Diagrama de bloques realimentación completa de estados con observador

Primero se comprueba si el sistema es observable midiendo la primera variable de estado, es decir la posición angular de las ruedas mediante el encoder:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = 4$$

como el sistema es de orden 4 tiene rango completo, por lo que es completamente observable midiendo la posición angular de las ruedas y se puede reconstruir el vector de estados del sistema. De esta manera se justifica el uso de un encoder en las ruedas como sensor del sistema.

Ahora se busca los valores de los elementos de la matriz L del observador. Para obtenerlos se plantea el polinomio característico como:

$$\det(sI - A + LC) = 0$$

Luego con el método de asignación de polos se busca que los polos a definir del observador sean 4-5 veces más rápidos que los polos del sistema a lazo cerrado. Una vez definidos se obtuvieron los valores de la matriz L siendo estos:

$$L = \begin{bmatrix} 73.811 \\ 2185.9 \\ 296.12 \\ 4154.2 \end{bmatrix}$$

Los polos del sistema a lazo abierto, a lazo cerrado y los del observador se observan en la siguiente figura:

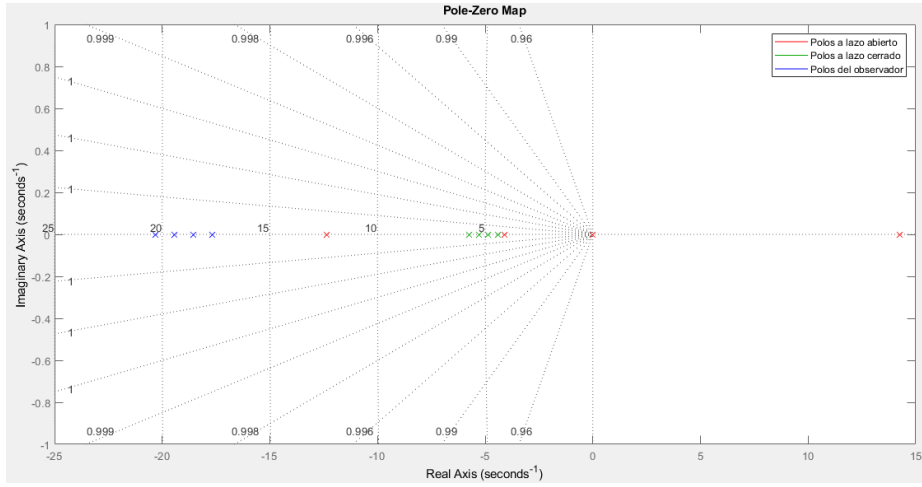


Figure 5: Polos a lazo abierto, cerrado, y del observador

El objetivo principal del controlador es la estabilidad, manteniendo el péndulo de forma vertical tratando de siempre tener ángulos pequeños para que las hipótesis del desarrollo matemático sean válidas. Otro objetivo importante es el seguimiento de consignas de posición en el eje x, cumpliendo la consigna en poco tiempo. También se añadió que pudiera mantener el péndulo estable ante perturbaciones externas.

4 Resultados

Para estudiar el comportamiento del sistema bajo distintas circunstancias se lo sometió a varias pruebas considerando distintas consignas de posición y la inclusión de una perturbación o no.

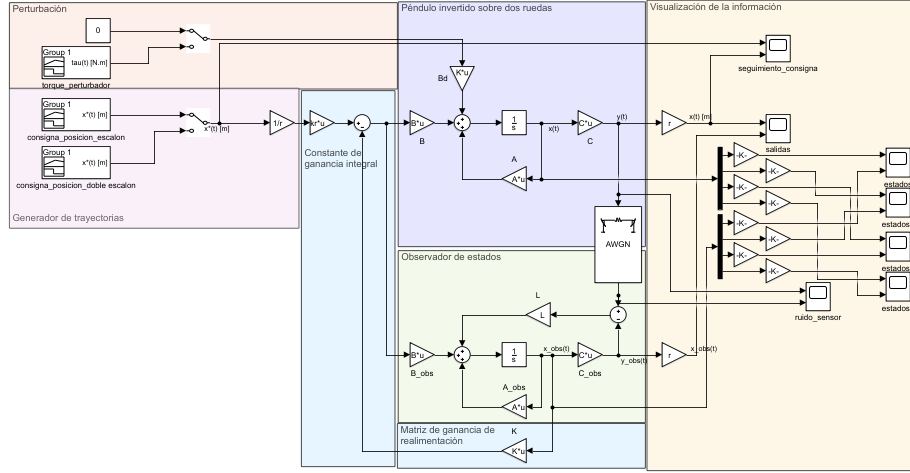


Figure 6: Diagrama de bloques completo

En las figuras 6 se muestra el diagrama completo de Simulink incluyendo tanto la planta, el controlador como los scopes para visualizar la información y ganancias para llevar las salidas a las unidades correctas para su estudio.

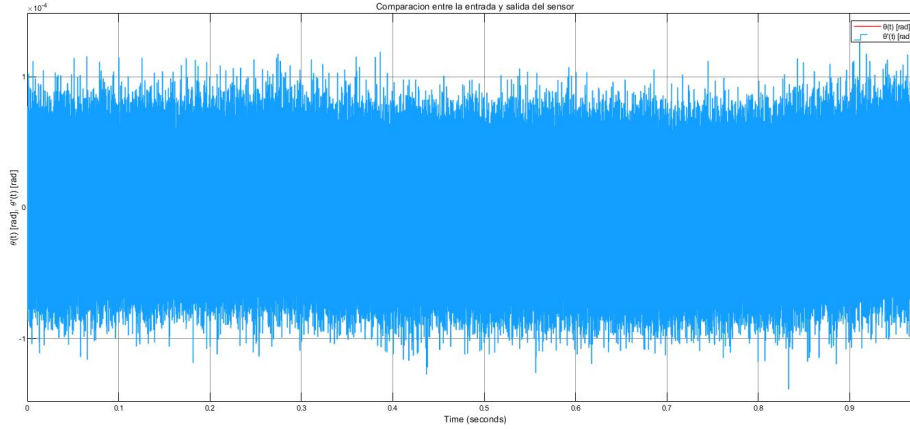


Figure 7: Comparación entre la entrada y salida del sensor

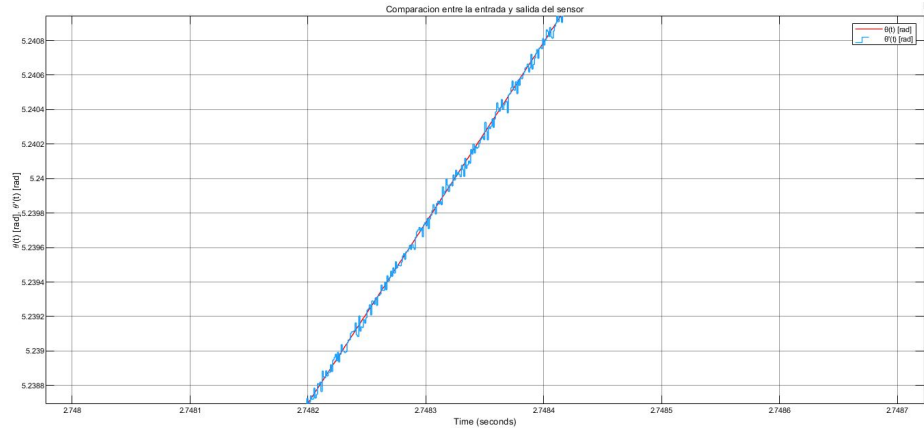


Figure 8: Comparación entre la entrada y salida del sensor

Antes de comenzar el estudio se puede apreciar en las imágenes 7 y 8 que el ruido introducido por el sensor es muy pequeño por lo cual no se justifica el uso de un filtro.

4.1 Caso 1

Para este primer caso se consideró como consigna de posición un escalón unitario a los dos segundos y sin perturbación externa. En la siguiente imagen 9 se muestra el seguimiento de la consigna de posición y como alcanza el valor deseado.

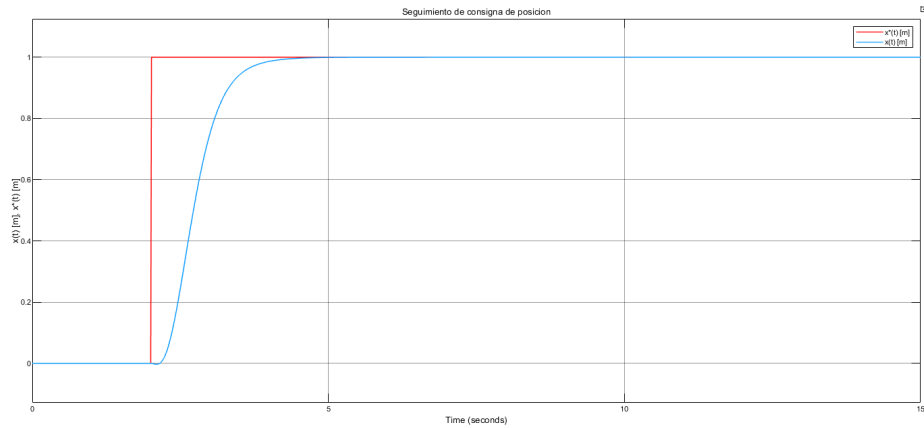


Figure 9: Seguimiento de consigna de posición ante escalón unitario

Los resultados obtenidos de las posiciones angulares del sistema y el observador se muestran en la siguiente imagen 10 y 11.

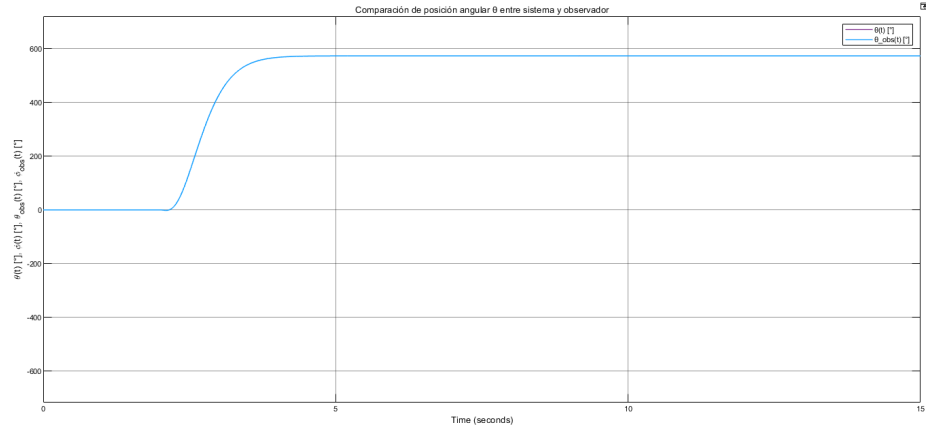


Figure 10: Comparación entre posición angular θ del sistema y del observador ante escalón unitario

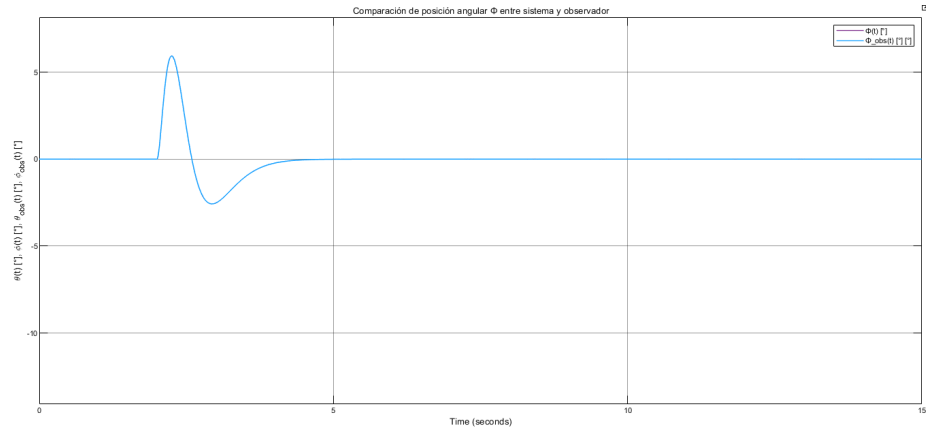


Figure 11: Comparación entre posición angular ϕ del sistema y del observador ante escalón unitario

Se observa que se comporta de forma estable, con un ángulo de inclinación transitorio de 6° . En cuanto a la comparación de las velocidades angulares se observa en las figuras 12 y 13 que estas tienen valores aceptables.

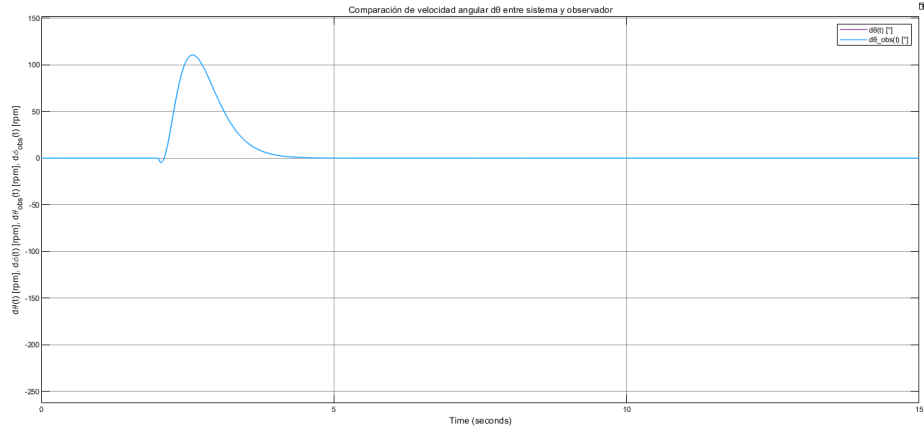


Figure 12: Comparación entre velocidad angular $\dot{\theta}$ del sistema y del observador ante escalón unitario

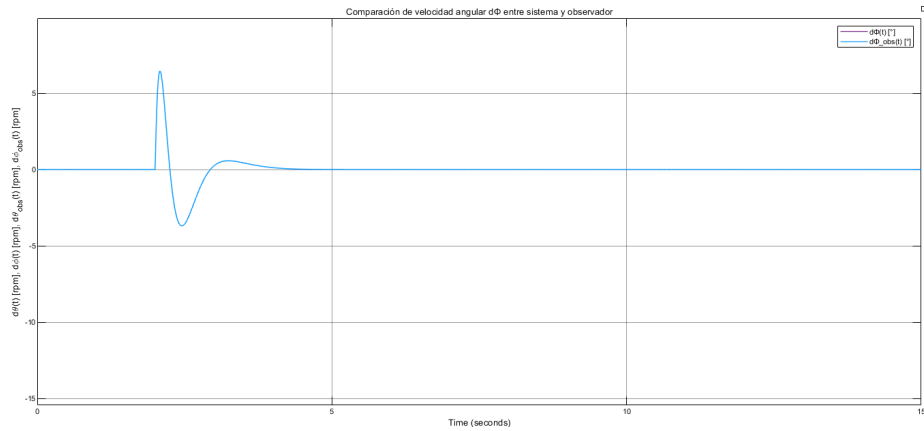


Figure 13: Comparación entre velocidad angular $\dot{\phi}$ del sistema y del observador ante escalón unitario

4.2 Caso 2

En este caso se tiene una consigna de doble escalón de posición y sin torque perturbador. Se observa como la respuesta del sistema sigue correctamente la consigna en la imagen 14.

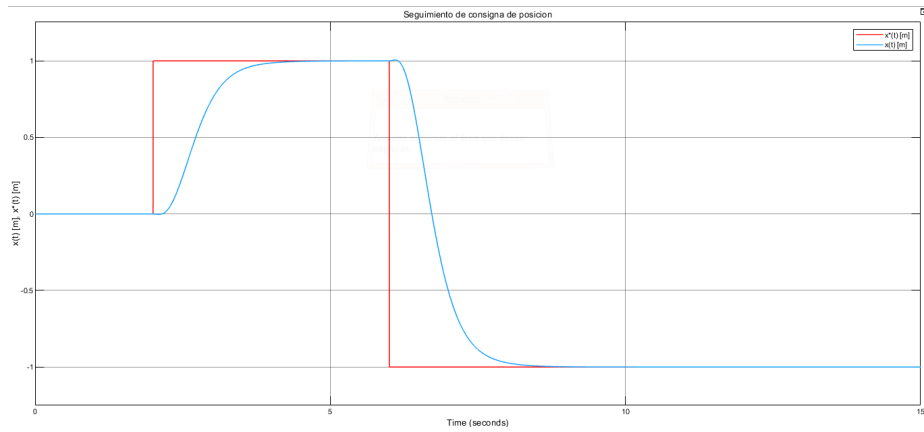


Figure 14: Seguimiento de consigna de posición ante doble escalón

Las posiciones angulares obtenidas fueron las mostradas en las imagenes 15 y 16. Llegando la del péndulo a 12° pero manteniendo la estabilidad y siendo este aún un ángulo pequeño.

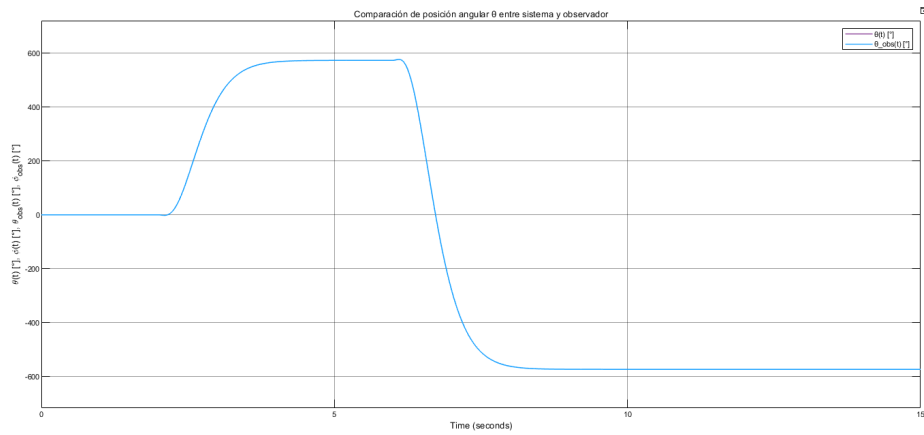


Figure 15: Comparación de posición angular θ entre sistema y observador ante doble escalón

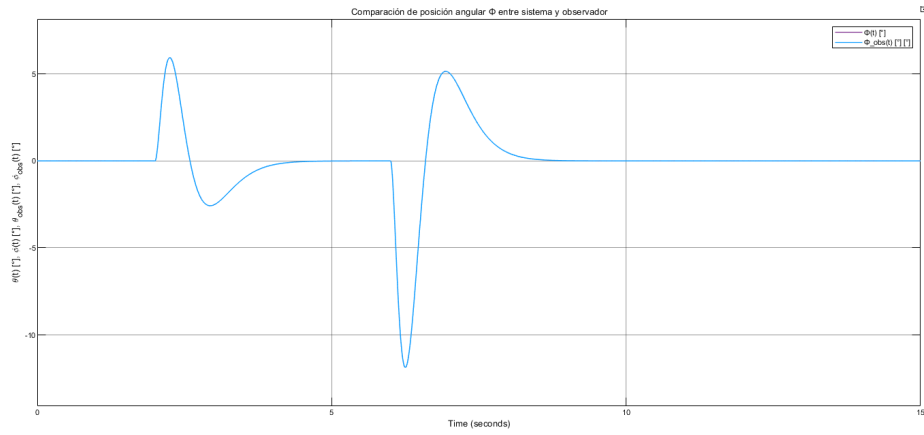


Figure 16: Comparación de posición angular ϕ entre sistema y observador ante doble escalón

Las velocidades angulares de las variables de estado del sistema y observador se muestran en la imagen 17 y 18.

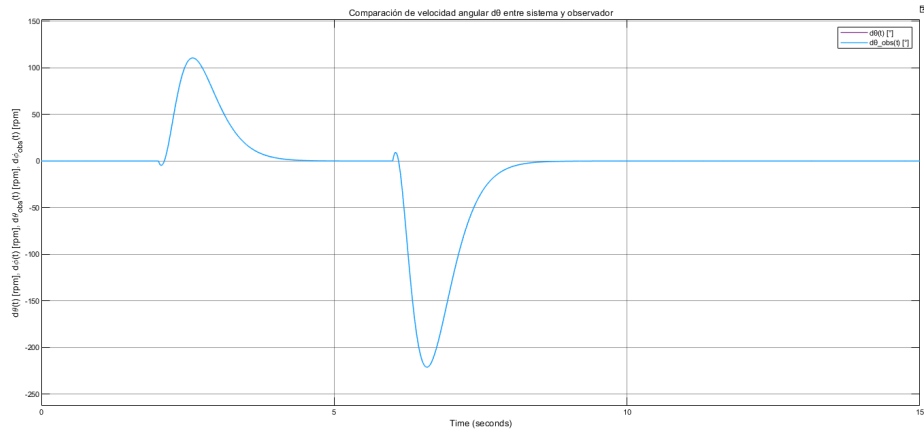


Figure 17: Comparación de posición angular $\dot{\theta}$ entre sistema y observador ante doble escalón

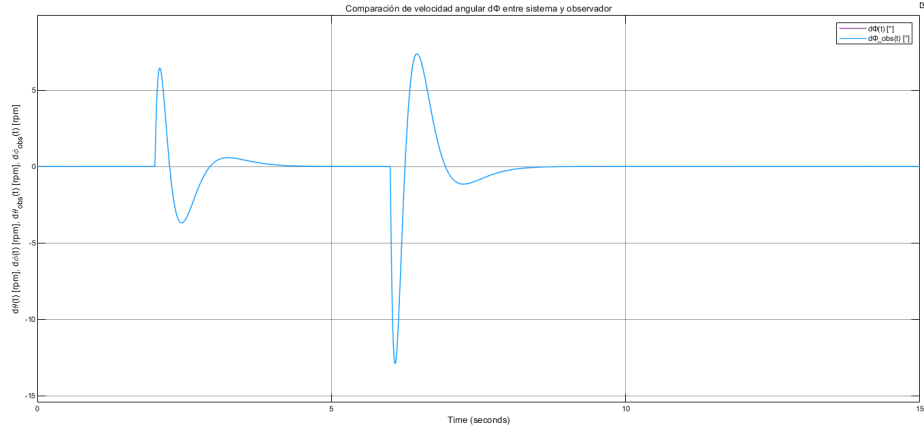


Figure 18: Comparación de posición angular $\dot{\phi}$ entre sistema y observador ante doble escalón

4.3 Caso 3

En este caso se tiene una consigna de doble escalón de posición con un torque de perturbación con forma de pulso como se observa en la imagen 19.

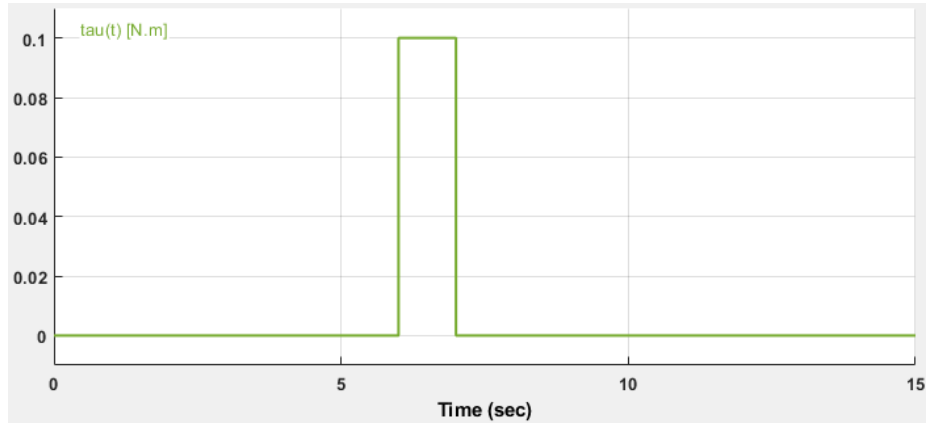


Figure 19: Pulso de torque perturbador

En la figura 20 se muestra la respuesta del sistema ante el torque de perturbación.

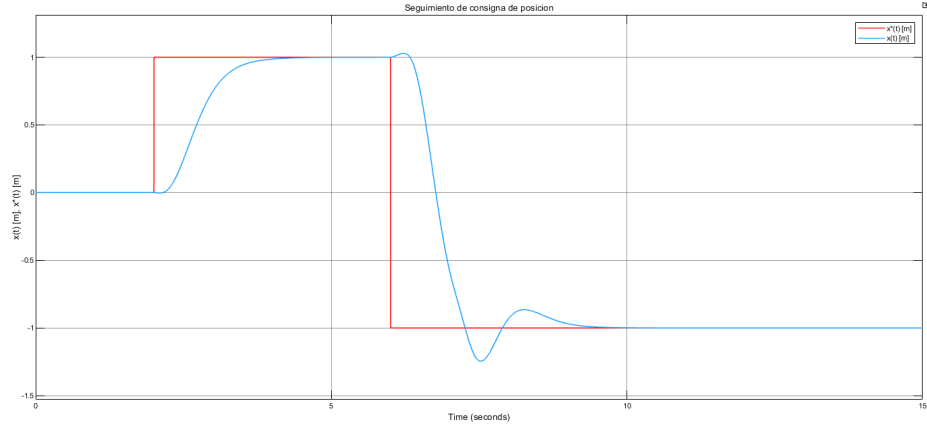


Figure 20: Seguimiento de consigna de posición ante doble escalón y perturbación

Las posiciones angulares del sistema y del observador se mantienen similares al ocurrir la perturbación con un mayor transitorio pero llegando al valor deseado como se muestra en la imagen 21 y 22.

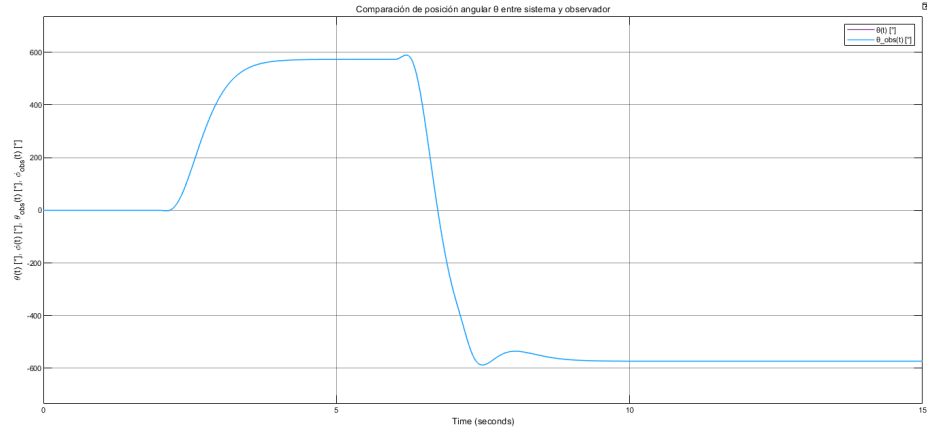


Figure 21: Comparación de estado de posición angular θ entre sistema y observador ante doble escalón y perturbación

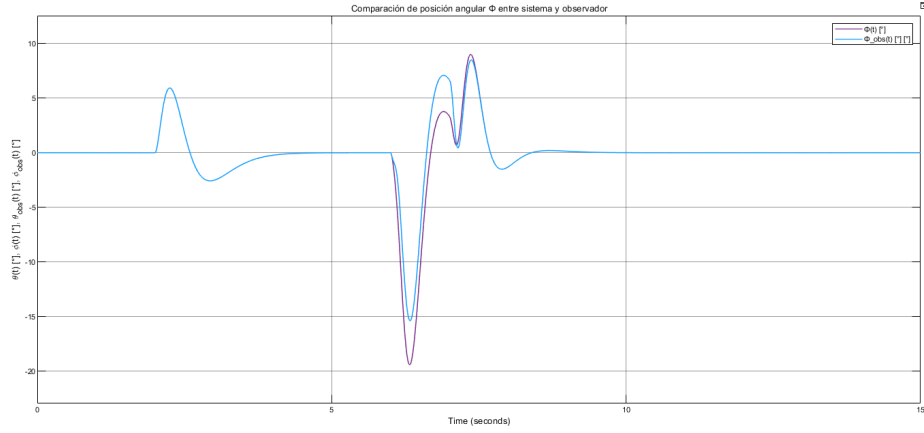


Figure 22: Comparación de estado de posición angular ϕ entre sistema y observador ante doble escalón y perturbación

Se observa en las figuras 23 y 24 la diferencia entre las velocidades angulares del sistema y el observador al momento que se introduce el torque de perturbación.

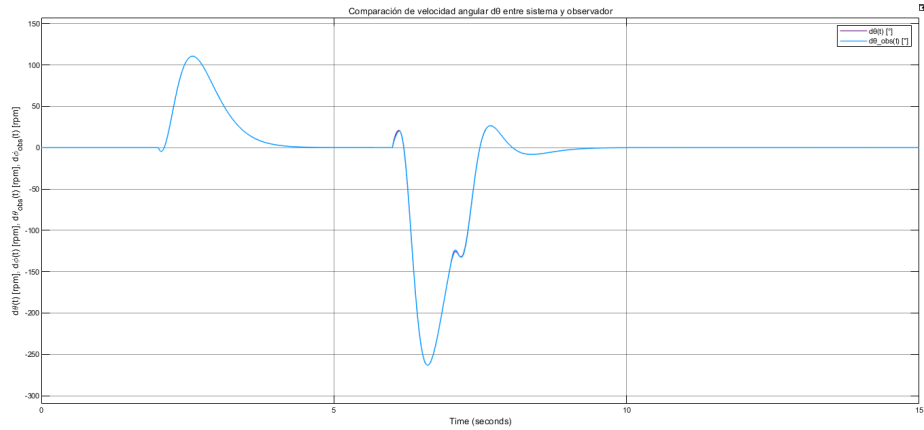


Figure 23: Comparación de estado de velocidad angular $\dot{\phi}$ entre sistema y observador ante doble escalón y perturbación

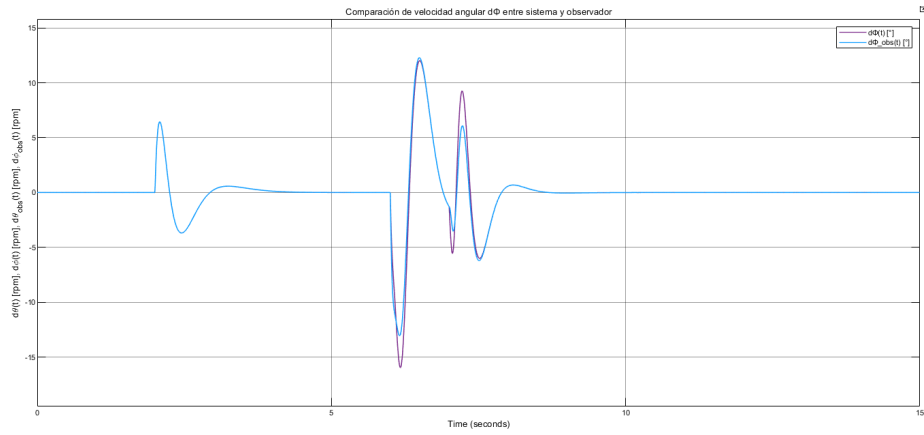


Figure 24: Comparación de estado de velocidad angular $\dot{\phi}$ entre sistema y observador ante doble escalón y perturbación

En la figura 25 se observa un atraso del observador de estados con respecto a la posición del sistema cuando influye el torque de perturbación.

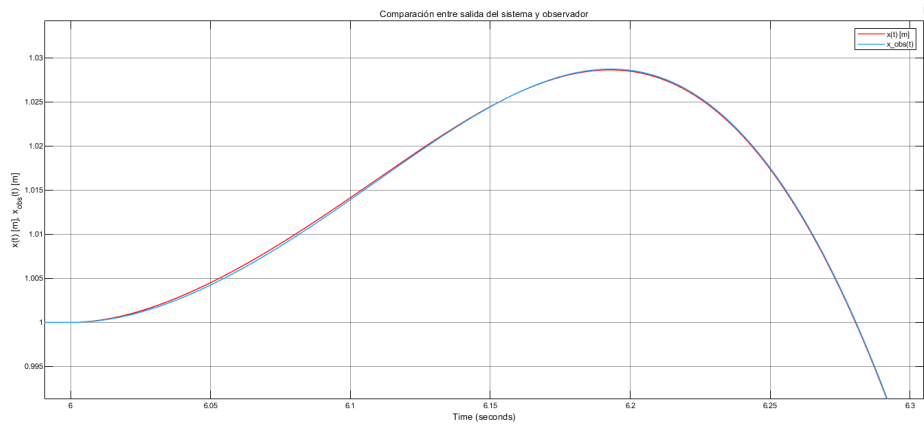


Figure 25: Comparación entre la salida del sistema y del observador con perturbación

5 Conclusiones

Se pudo modelar la planta tanto el subsistema mecánico como el eléctrico dando así un modelo más cercano a la realidad. Se pudo estudiar como aplicando la teoría de control se puede resolver un problema que es naturalmente inestable. Los casos estudiados cumplieron satisfactoriamente con los objetivos planteados siguiendo tanto las consignas como manteniendo las estabilidad en todo momento. Es un sistema interesante de estudiar y que podría seguir aumentando su dificultad a un estudio en el espacio considerando el plano x-y con ruedas independientes.

References

- [1] MathWorks. Help center. <https://www.mathworks.com/help/matlab>.
- [2] Aula abierta. Control y sistemas 2021. <https://aulaabierta.ingenieria.uncuyo.edu.ar/course>.
- [3] Technical datasheet Hengstler. Absolute Encoder AD 58. <https://studylib.net/doc/18222625/technical-datasheet-absolute-encoder-ad-58>.
- [4] Alberto Alejandro Duarte. Control de un robot autónomo tipo péndulo invertido. <http://posgrado.lapaz.tecnm.mx/uploads/archivos/57ab85cdaefba.pdf>.
- [5] Alejandro Astudillo. Control del péndulo invertido simple-UV en régimen de pequeña señal. https://www.researchgate.net/publication/321171396_Control_del_pendulo_invertido_simple-UV_en_regimen_de_pequena_senal.