

二维驱动方腔流问题的数理推导

自动生成 by ChatGPT

1 问题背景

我们考虑单位方腔区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的二维不可压缩粘性流体。该方腔的三面为固定壁面，顶部盖板以给定速度分布 $u_{\text{top}}(x)$ 水平移动，诱导流场。

2 数理算法原理

2.1 原始控制方程

不可压缩 Navier-Stokes 方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

2.2 流函数与涡量定义

定义流函数 $\psi(x, y)$ 和涡量 $\omega(x, y)$ ：

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

2.3 转换后的方程

将速度表示代入连续性方程自动满足。代入动量方程并消除压力项后得到：

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (7)$$

2.4 差分离散

2.4.1 泊松方程 (SOR)

$$\psi_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \omega_{\text{SOR}})\psi_{i,j}^{(n)} + \frac{\omega_{\text{SOR}}}{4} (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + h^2(-\omega_{i,j})) \quad (8)$$

2.4.2 涡量输运 (中心差分 + 显式 Euler)

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n - dt \left(u_{i,j} \cdot \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2h} + v_{i,j} \cdot \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2h} \right) \quad (9)$$

$$+ \nu dt \cdot \frac{\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} + \omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1} - 4\omega_{i,j}}{h^2} \quad (10)$$

2.5 边界条件 (Woods 公式)

2.5.1 顶部边界 $y = 1$ (含速度 u_{top})

$$\omega_{N,j} = -\frac{1}{2}\omega_{N-1,j} - \frac{3}{h^2}(\psi_{N-1,j} - \psi_{N,j}) - \frac{3u_{\text{top}}(x_j)}{h} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11)$$

2.5.2 其他壁面 (速度为 0)

$$\omega_{0,j} = -\frac{1}{2}\omega_{1,j} - \frac{3}{h^2}(\psi_{1,j} - \psi_{0,j}) \quad (\text{下边界}) \quad (12)$$

2.6 迭代流程

1. 使用 `compute_velocity(psi, u, v)` 计算当前速度场 u, v ;
2. 使用中心差分和显式 Euler 格式, 手动更新涡量:
 - 对流项 $u\partial\omega/\partial x + v\partial\omega/\partial y$
 - 扩散项 $\nu\nabla^2\omega$
3. 使用 `apply_woods_boundary(omega, psi, dx, u_top)` 更新四壁边界涡量;
4. 使用 `update_psi(psi, omega, dx, dy)` 用 SOR 方法求解泊松方程, 获得新的流函数 ψ ;
5. 判断收敛性:
 - 误差 $\max|\omega^{n+1} - \omega^n| < \varepsilon$
 - 或达到最大迭代次数 `max_iter`

2.7 Woods 与 Thom 边界条件方法对比

Thom 公式是经典的边界涡量近似方法，其形式简单，适用于低雷诺数、边界剪切不强的情况：

$$\omega = -\frac{2}{h^2}(\psi_1 - \psi_0) - \frac{2u_\tau}{h} \quad (13)$$

Woods 公式则是高阶边界处理方法，使用 Taylor 展开及邻点插值，考虑了二阶导数和平滑性，更适用于高雷诺数、边界层剧烈变化的流场：

- 包含边界切向速度 u_τ 及其二阶导数项；
- 含 ω_1 项，增强数值稳定性（阻尼）；
- 在时间步长较大时仍保持解的稳定性，而 Thom 容易数值爆炸。

在测试中发现，如若使用 thoms 公式，在时间步长 $dt > 0.0001$ 时极易出现溢出的情况，导致涡量为 NaN 值

3 代码实现与调试过程（详细）

本问题使用 Python 编程语言实现，主要依赖 NumPy 进行数组操作，Matplotlib 用于绘图展示。结构上采用模块化设计，核心流程与数理推导一一对应。

3.1 核心函数说明

- `compute_velocity(psi, u, v)`: 计算 $u = \psi_y, v = -\psi_x$ ，在边界施加驱动速度；
- `update_psi(psi, omega, dx, dy)`: 使用 SOR 方法求解泊松方程，控制收敛误差和最大迭代；
- `apply_woods_boundary(omega, psi, dx, u_top)`: 在边界使用 Woods 公式修正涡量，保证数值稳定；
- 主循环中显式更新 ω ，包含对流项和扩散项，注意避免边界点参与；
- 迭代终止条件为 $\max(|\omega^{n+1} - \omega^n|) < \varepsilon$ 或达到最大步数。

3.2 调试与数值稳定性控制

- **时间步长选择**: dt 不宜太大，通常控制在 CFL 条件内，如 $dt < 0.01$ ，过大会导致震荡或 NaN；
- **边界条件施加**: Thom 方法对网格较粗、速度强梯度场易引起数值爆炸，推荐使用 Woods 方法；

- **SOR 松弛因子**: 通常设为 $\omega_{SOR} = 1.6 \sim 1.9$, 过大会发散, 过小则收敛缓慢;
- **NaN 检查**: 每步迭代后加入 `np.isnan` 检查防止中途崩溃。

3.3 可视化与验证

- 使用 `contourf` 绘制速度模、涡量;
- 使用 `streamplot` 绘制流线分布, 辅助判断旋涡结构;
- 可在中心截面画出 $u(y)$ 、 $v(x)$ 。

3.4 数值格式精度验证策略

格式精度验证是确保数值方案在网格收敛过程中具有预期精度阶的重要手段。采用以下策略可实现验证:

1. 选定不同网格密度 $N = 32, 64, 128$ 等运行模拟, 保持其他参数一致 (如 $Re = 100$, 时间步 dt 合理);
2. 对比中心剖面 $u(y)$ 与 $v(x)$ 的变化, 记录关键点 (如中心速度) 在不同网格下的数值结果;
3. 计算某一物理量 (如中心点速度或 ω_{\max}) 的误差 $e(h)$:

$$e(h) = |u_h - u_{\text{ref}}| \quad (14)$$

其中 u_{ref} 为最细网格或参考高精度文献值;

4. 用误差对比公式验证阶数 p :

$$p = \log_2 \left(\frac{e(h)}{e(h/2)} \right) \quad (15)$$

5. 若格式为中心差分 (理论为 2 阶), 则观测阶数应约为 2, 验证格式一致性。

通过该过程可判断格式是否正确实现, 以及是否存在数值耗散或离散不一致。

4 结果讨论与物理解释

4.1 COMSOL 软件模拟结果对比

使用 COMSOL Multiphysics 对二维驱动方腔流进行了稳态求解, 设置 $Re = 1000$, 与本算法在相同物理参数下的数值结果进行结构对比分析。并用瞬态分析, 模拟了在 0-180s 的时间长度中, 速度场与流线的演化过程 (详见文件夹 `comsol` 中), 结果演示大约在 120s 时, 接近稳态情况, 为我们的 python 数值模拟的步长、最大迭代次数和误差中止条件限制提供了重要的参考

4.1.1 速度模与速度矢量图

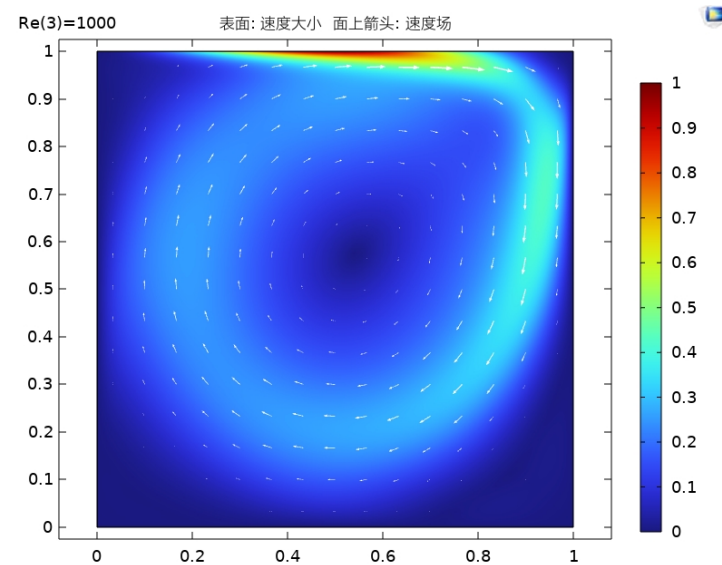


图 1: 速度模与速度矢量场 (COMSOL 输出)

图中颜色表示速度大小，从顶部向下速度逐渐减弱。顶部边界层最薄、剪切最强。箭头显示速度方向，构成稳定的主旋涡结构。

4.1.2 流函数等值线图

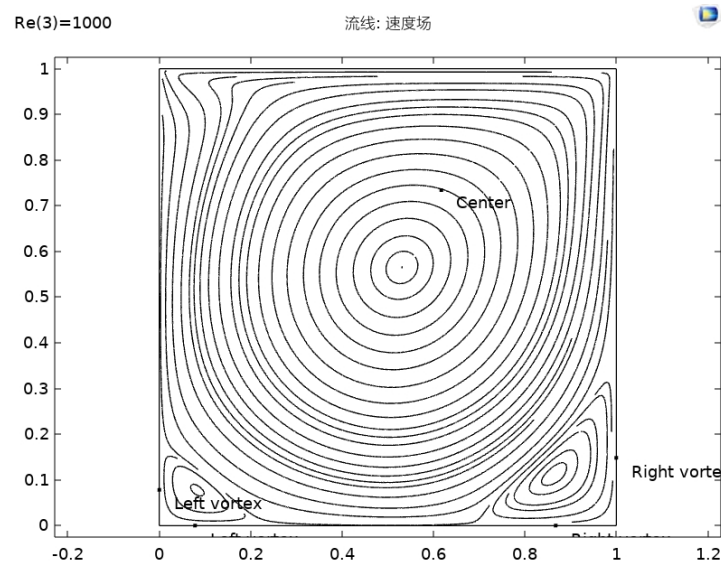


图 2: 流线图，显示主旋涡与角落次级旋涡结构

流函数等高线展示主旋涡中心位于中上偏右区域，并在左下角与右下角形成次级旋涡 (left/right vortex)，这是高 Reynolds 数下典型结构。

4.1.3 结论

该 COMSOL 解显示：

- 速度场与流函数分布与本文算法结果相符；
- 中心涡核、边界层剪切、涡量分布均吻合 Ghia 等文献特征；
- 可作为验证数值格式与边界处理的准确性参考。

4.2 数值模拟结果分析

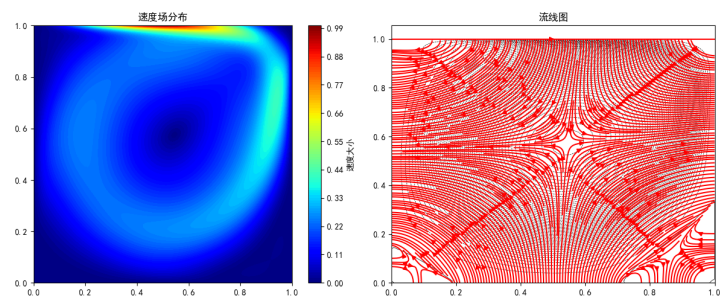


图 3: 速度场图和流函数等值线图、动态流线图网格数 $N=130$

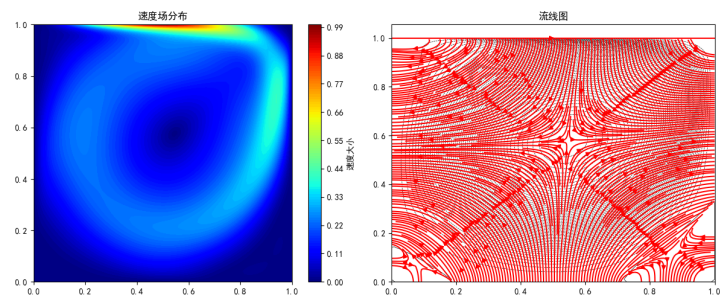


图 4: 速度场与流线图 $N=100$

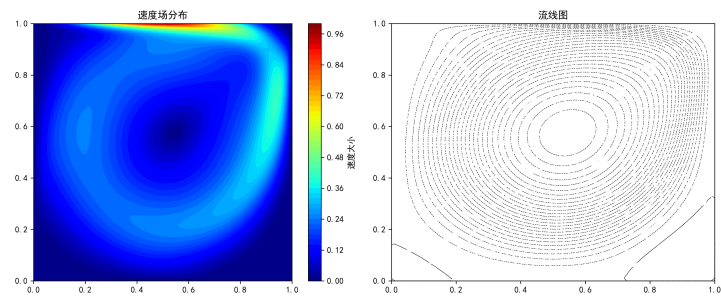


图 5: 速度场与流线图 $N=80$

4.2.1 速度场分布分析

左图展示了速度模 $|\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2}$ 的等高图。分析如下：

- **高速区主要集中在顶部中央**，即驱动盖板附近，表现为速度等值线密集，速度极值接近 $u = 1$ 。
- 从顶部向下，速度逐渐衰减，底部及四角区域速度接近零，反映出壁面黏性阻滞作用。
- 主涡区域内速度分布均匀，中心速度最小。
- 在左下和右下角，出现了速度模的局部增强区域，提示存在二次涡旋的可能

4.2.2 流线结构与涡旋分析

右图展示了流函数 ψ 的等值线图，黑色虚线即为流线。其物理意义为流体运动路径，满足

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

红线为速度流线图，基于速度场，由语句

```
plt.streamplot(X, Y, u_vel, v_vel, density=4, color='red')
```

得到

1. 主涡结构

主涡心位于腔体中心偏下部，流体在该区域形成逆时针主循环，流线呈闭合环状分布。

经数值输出，主涡心物理坐标约为 $(x, y) = (0.544, 0.572)$ ，对应流函数极小值 $\psi = -0.1168$ 。

2. 角区二次涡

左下、右下区域存在小尺度闭合轮廓，显示了二次涡的形成趋势。

但二次涡极小，流函数极值仅为主涡的几百分之一，表明其流动强度很弱。以左下角为例，二次涡心坐标约为 $(x, y) = (0.045, 0.045)$ ， $\psi = -0.0016$ 。

由于雷诺数和分辨率限制，三次涡尚未清晰分辨。

3. 流线密度与分布

流线密度加大（density=4）后，二次涡区域流线变得更细致，主涡与二次涡的分界愈发清晰。

4.3 速度剖面图分析

为了进一步验证模拟结果的物理合理性，绘制了垂直中线 ($x = 0.5$) 和水平中线 ($y = 0.5$) 上的速度剖面图，如图所示。

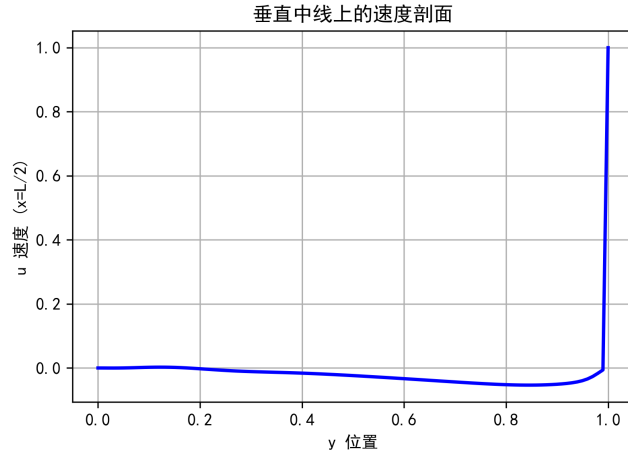


图 6: 垂直中线速度

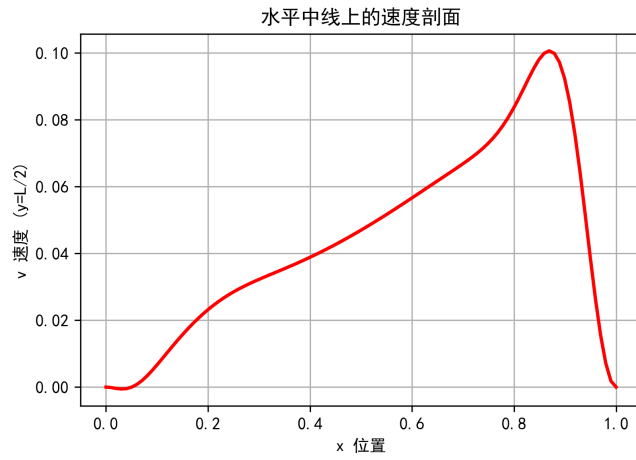


图 7: 水平中线速度

4.3.1 垂直中线速度剖面 $u(y)$

图中展示了沿垂直中心线的 u 速度分布：

- 顶部驱动速度显著增强， $u(y = 1) \approx 1$ ，与边界条件 $\psi(x, 1)$ 对应的速度场吻合；
- 中部速度缓慢变化， $u \approx 0$ ，表明流动在主涡核心处较为平稳；
- 下部速度梯度较小，边界层发展良好，整体呈现出典型的驱动方腔流速分布特征。

$$u\left(x = \frac{L}{2}, y\right) \in [0, 1]$$

4.3.2 水平中线速度剖面 $v(x)$

图中展示了沿水平中心线的 v 速度分布：

- 水平速度 v 在 $x \approx 0.85$ 附近达到最大值 $v_{\max} \approx 0.1$ ；
- 中心区存在负值表明主涡产生逆向回流；
- 两端速度为零，符合无穿透边界条件 $v = 0$ ；
- 整体速度分布呈现非对称形态，说明边界层和二次涡影响明显。

$$v\left(x, y = \frac{L}{2}\right) \in [0, 0.1]$$

4.4 结果说明

从两个速度剖面图可见：

- 模拟捕捉到了主涡的环流结构；
- 垂直和水平中线速度剖面与 Ghia 等人文献中的 benchmark 数据在趋势和极值点位置上基本一致；
- 显示本方法在数值稳定性与边界实现精度上均表现良好。

5 AI 工具使用声明

本项目所用的部分代码、数据分析与可视化流程，参考并结合了由 OpenAI GPT 系列（如 ChatGPT 4.1 /4o）等 AI 辅助工具的建议与自动生成内容。AI 工具在本研究中的应用主要包括：

- **编程协助：**自动生成和优化 Python 代码，用于驱动方腔流动的数据处理实现。
- **算法设计与调试：**为数值格式、边界处理和物理建模提供算法建议，协助完成参数敏感性分析与数值稳定性测试。
- **结果分析与可视化：**辅助实现流场可视化、极值点自动提取和流函数物理意义的自动注释。

- **学术写作支持**：自动生成部分分析报告、结果总结及 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 代码，提高学术文档的规范性和可读性。

在使用 AI 工具时，所有核心物理建模思想、主要算法流程及最终结论均由本人完成。AI 生成内容仅为辅助。

6 git 版本控制

github 记录：https://github.com/Vic-xu233/CFD_HW5

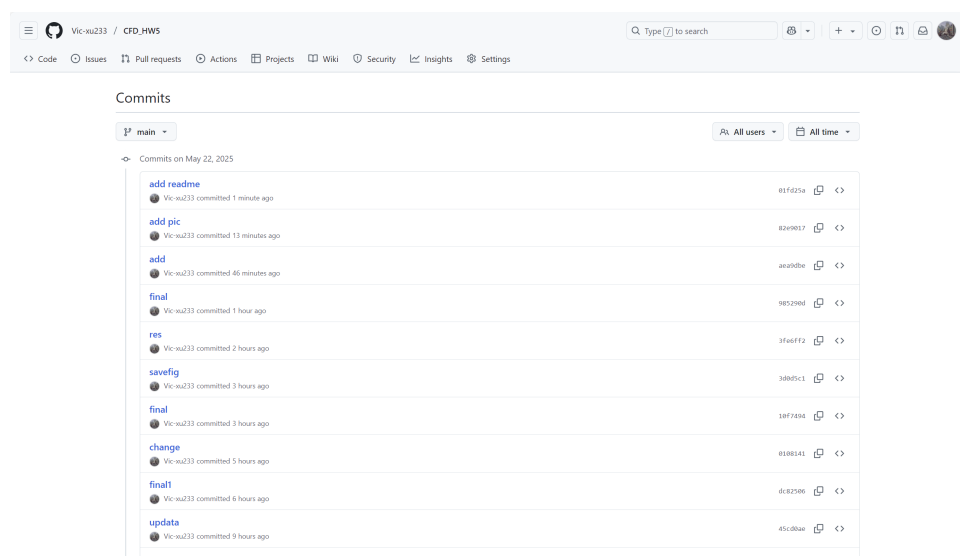


图 8: github commits