

# 多种数值格式计算一阶波动方程的解

许可为 2200011170

April 2025

## 1 数理算法原理

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

本节研究一维线性对流方程的数值格式精度，通过推导 Lax、Upwind 与 Lax-Wendroff 三种格式的局部截断误差，分析它们的理论阶数和主导误差项。

### 1.1 Lax 格式截断误差分析与理论精度推导

Lax 格式的差分格式写作：

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (2)$$

设其局部截断误差定义为：

$$\tau_i^n = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - [\text{Lax 格式右端}]}{\Delta t} \quad (3)$$

对解  $u(x, t)$  在时间和空间方向进行泰勒展开。

时间方向展开：

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t u_t^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}^n + \frac{(\Delta t)^3}{6} u_{ttt}^n + \dots \quad (4)$$

空间方向展开：

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x u_x^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} u_{xx}^n + \frac{(\Delta x)^3}{6} u_{xxx}^n + \dots \quad (5)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x u_x^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} u_{xx}^n - \frac{(\Delta x)^3}{6} u_{xxx}^n + \dots \quad (6)$$

计算格式右端展开：

$$\frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) = u_i^n + \frac{\Delta x^2}{4} u_{xx}^n + \dots \quad (7)$$

$$\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = a\Delta t \left( u_x^n + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \dots \right) \quad (8)$$

故右端合并为：

$$u_i^n + \frac{\Delta x^2}{4} u_{xx}^n - a\Delta t u_x^n - \frac{a\Delta t \Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \dots \quad (9)$$

与精确解比较得截断误差：

$$\tau_i^n = \frac{1}{\Delta t} \left[ u_i^n + \Delta t u_t^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}^n + \dots \right] \quad (10)$$

$$- \left( u_i^n + \frac{\Delta x^2}{4} u_{xx}^n - a\Delta t u_x^n - \frac{a\Delta t \Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \dots \right) \quad (11)$$

$$= u_t^n + a u_x^n + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}^n - \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} u_{xx}^n + \frac{a\Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \dots \quad (12)$$

由于原方程满足  $u_t + a u_x = 0$ ，可消去主导项，得最终形式：

$$\tau = \frac{\Delta t}{2} u_{tt} - \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \dots \quad (13)$$

当 CFL 数  $C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$  保持常数时，有  $\Delta t \sim \Delta x$ ，从而主导误差为：

$$\tau = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (14)$$

因此，Lax 格式的总误差阶数为：

$$\boxed{\text{Lax 格式为一阶精度格式 } \mathcal{O}(\Delta x)} \quad (15)$$

## 1.2 Lax-Wendroff 格式

Lax-Wendroff 格式为：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{a^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (16)$$

精确解的 Taylor 展开：

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \dots = u_i^n - a\Delta t u_x^n + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} u_{xx}^n + \dots \quad (17)$$

数值项展开：

$$\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = u_x^n + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \dots \quad (18)$$

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = u_{xx}^n + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx}^n + \dots \quad (19)$$

代入 Lax-Wendroff 格式：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t \left( u_x^n + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx}^n \right) + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \left( u_{xx}^n + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx}^n \right) + \dots \quad (20)$$

与精确解比较，误差为：

$$\tau = -\frac{a\Delta t\Delta x^2}{6}u_{xxx}^n + \frac{a^2\Delta t^2\Delta x^2}{24}u_{xxxx}^n + \dots \quad (21)$$

主导误差项阶数为：

$$\boxed{\tau = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)} \quad (22)$$

### 1.3 一阶迎风格式 (Upwind)

在  $a > 0$  的情形下，Upwind 格式为：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (23)$$

Taylor 展开精确解  $u(x_i, t_{n+1})$ ：

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2}u_{tt}^n + \dots \quad (24)$$

由原方程：

$$u_t = -au_x, \quad u_{tt} = a^2u_{xx}$$

则有：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t u_x^n + \frac{a^2\Delta t^2}{2}u_{xx}^n + \dots \quad (25)$$

对数值格式右端展开  $u_{i-1}^n$ ：

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x u_x^n + \frac{\Delta x^2}{2}u_{xx}^n - \frac{\Delta x^3}{6}u_{xxx}^n + \dots \quad (26)$$

代入格式中得到：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (27)$$

$$= u_i^n - a\Delta t \left( u_x^n - \frac{\Delta x}{2}u_{xx}^n + \dots \right) \quad (28)$$

与精确解比较，得截断误差：

$$\tau = \frac{a\Delta x}{2}(1 - C)u_{xx}^n + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad C = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \quad (29)$$

因此，Upwind 格式为时间与空间均为一阶精度：

$$\boxed{\tau = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)} \quad (30)$$

表 1: 不同格式的理论精度比较

格式	时间精度	空间精度	主导误差阶数
Upwind	一阶	一阶	$\mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$
Lax	一阶	二阶	$\mathcal{O}(\Delta x)$ (若 $\Delta t \sim \Delta x$ )
Lax-Wendroff	二阶	二阶	$\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$

## 1.4 三种格式的精度比较

## 2 核心代码说明

### 三种格式的核心实现与误差阶数估计方法

为验证不同差分格式的数值精度，本文选取 Lax 格式、Lax-Wendroff 格式与一阶迎风 (Upwind) 格式进行误差对比分析，并通过数值实验估计其空间精度阶数。三种格式的离散更新公式实现如下：

- **Lax 格式：**

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (31)$$

对应 Python 代码实现为：

```
u_next = 0.5 * (np.roll(u, -1) + np.roll(u, 1))
          - 0.5 * C * (np.roll(u, -1) - np.roll(u, 1))
```

- **Lax-Wendroff 格式：**

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (32)$$

对应 Python 代码实现为：

```
u_next = u - 0.5 * C * (np.roll(u, -1) - np.roll(u, 1))
          + 0.5 * C**2 * (np.roll(u, -1) - 2*u + np.roll(u, 1))
```

- **一阶迎风格式 (Upwind,  $a > 0$ ):**

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (33)$$

对应 Python 代码实现为：

```
u_next = u - C * (u - np.roll(u, 1))
```

在每种格式下，数值解  $u$  与解析解  $u_{\text{exact}}$  的误差采用离散  $L^2$  范数计算，其表达式为：

$$\text{err} = \sqrt{\sum_i (u_i - u_{\text{exact},i})^2 \cdot \Delta x} \quad (34)$$

为估计格式的空间精度阶数，令  $\Delta x$  取不同网格尺寸，在对数坐标下绘制误差  $\log(\text{err})$  与步长  $\log(\Delta x)$  的关系，采用 NumPy 中的最小二乘拟合方法计算对数斜率  $p$ ，其表达式为：

$$p = \text{np.polyfit}(\log(\Delta x), \log(\text{err}), 1)[0] \quad (35)$$

其中， $p$  即为误差与网格步长之间的拟合斜率，用于估计数值格式的收敛阶数。

### 3 结果分析与讨论

考虑  $\text{Nx\_values} = [50, 100, 150, 400, 600, 800, 1000]$ ， $C$  的取值为 0.8 或 1.2。

#### 3.1 Lax 格式

##### 3.1.1 稳定性条件与发散现象

当 Courant 数  $C < 1$  时，值稳定，如图所示。

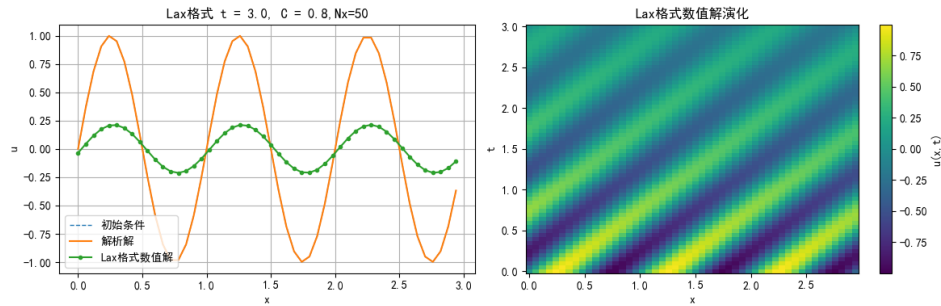


图 1:  $C=0.8$ ,  $N_x=50$

当  $C > 1$  时，数值解发散。

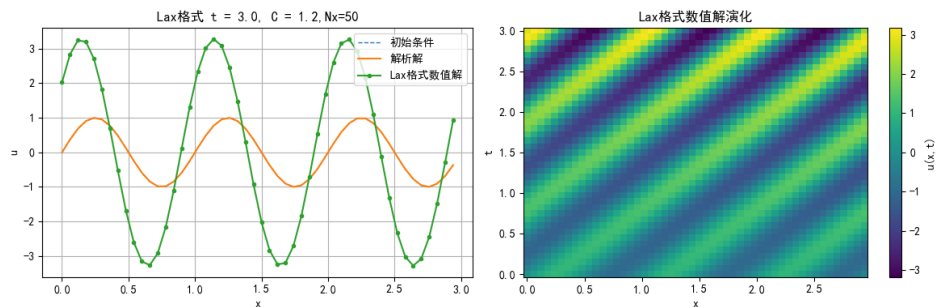


图 2:  $C=1.2$ ,  $N_x=50$

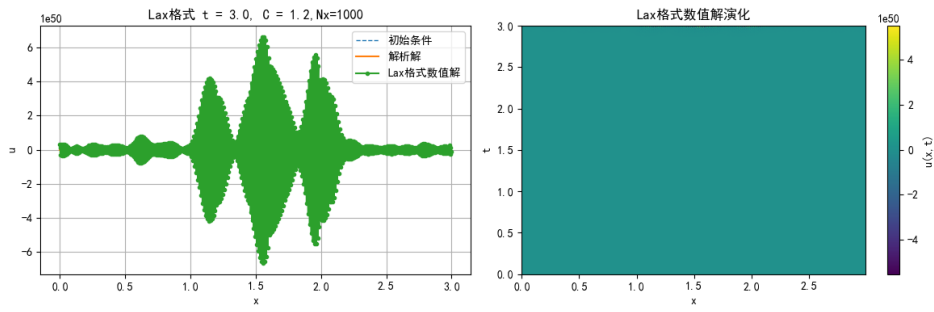


图 3:  $C=1.2$ ,  $N_x=1000$

**原因：**CFL 条件失效相当于模拟中“过快推进时间”，导致信息跳跃传递，引发高频误差迅速积累。

### 3.1.2 验证精度阶数

实验数据表明：

- 拟合斜率  $0.796 \sim 0.944$ ，符合一阶精度
- $C$  越贴近 1，误差越小

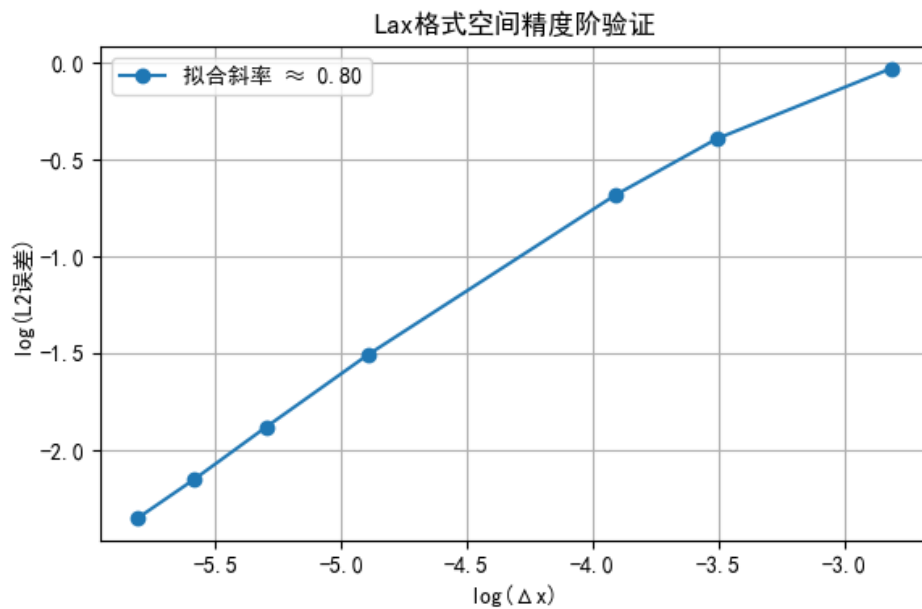


图 4:  $C=0.8$ ,  $N_x=[50,100,150,400,600]$

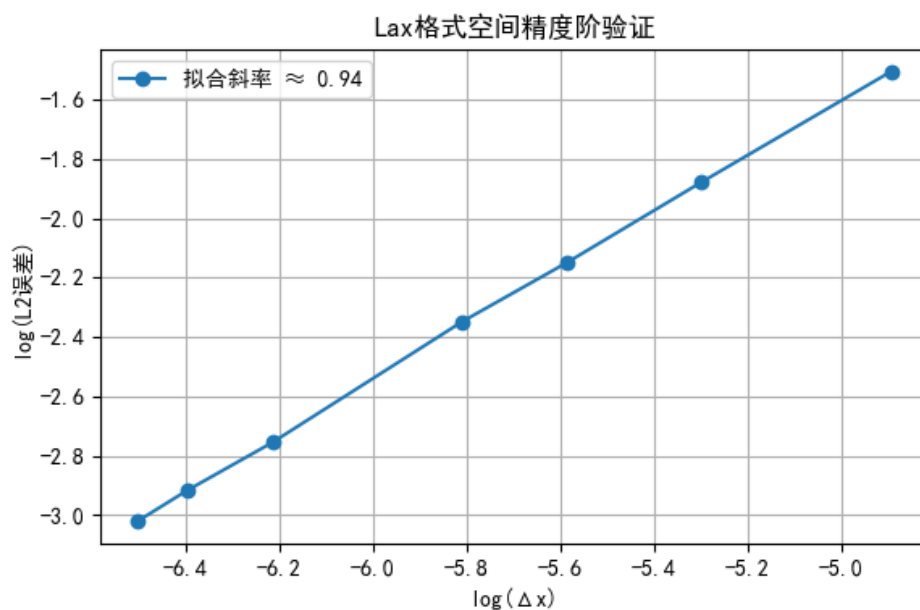


图 5:  $C=0.8$ ,  $N_x=[400,600,800,1000,1500,1800,2000]$

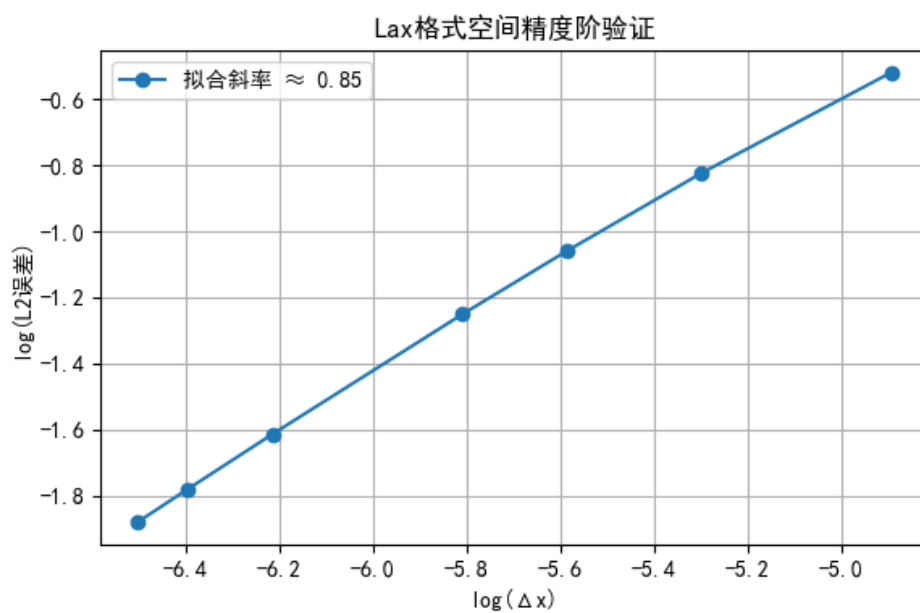


图 6:  $C=0.5$ ,  $N_x=[400,600,800,1000,1500,1800,2000]$

当  $\Delta t \sim \Delta x$  时, Lax 格式中误差项最小, 从而提高数值精度。

### 3.1.3 数值解的耗散以及相位的超前和滞后

观察图像可知波幅衰减明显, 出现耗散。

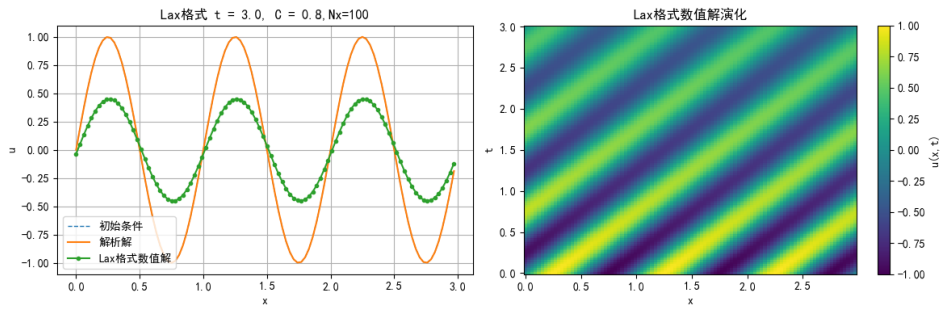


图 7:  $C=0.8$ ,  $N_x=100$

## 3.2 Lax-Wendroff 格式

### 3.2.1 稳定性与发散现象

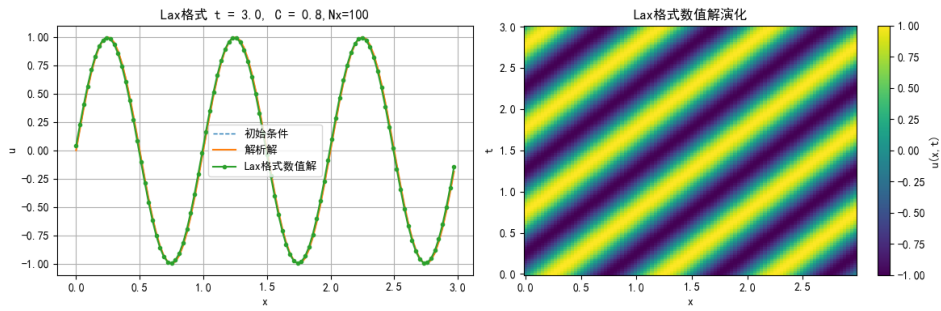


图 8:  $C=0.8$ ,  $N_x=100$

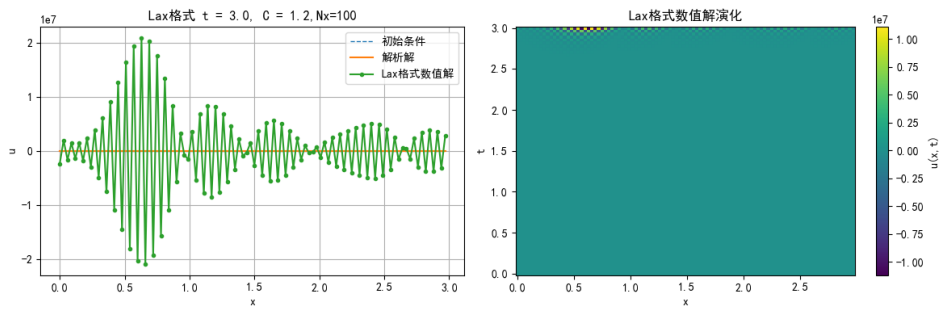


图 9:  $C=1.2$ ,  $N_x=100$

### 3.2.2 验证精度阶数

实验数据斜率  $p = 1.9996$ ，完全符合理论精度。



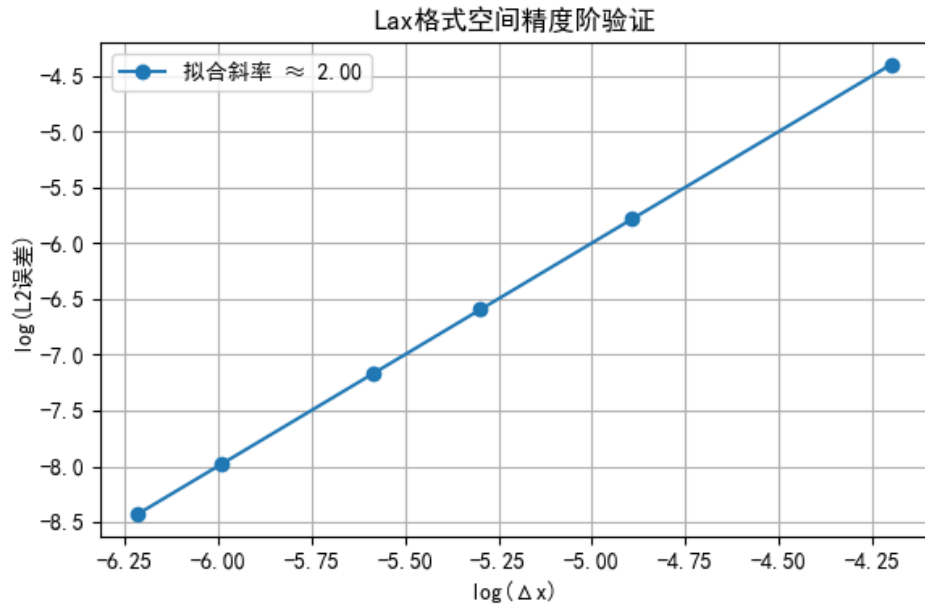


图 10:  $C=1.2$ ,  $N_x=100$

### 3.2.3 相位滞后

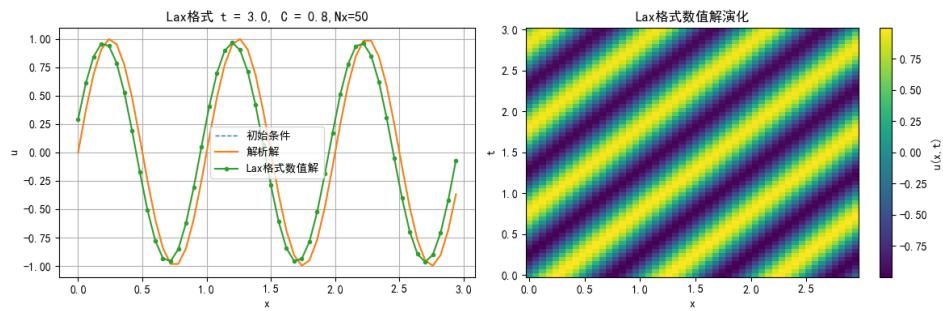


图 11:  $C=0.8$ ,  $N_x=50$

**原因：**相位滞后由色散误差引起，即不同频率的波传播速度不同。

### 3.3 Upwind 格式

#### 3.3.1 稳定性条件与误差验证

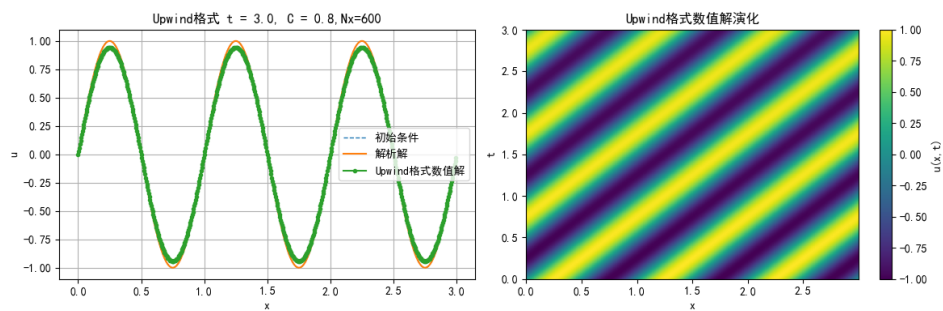


图 12:  $C=0.8$ ,  $N_x=600$

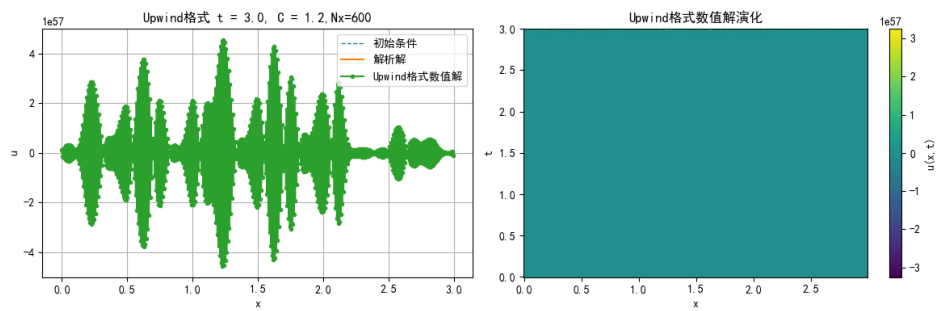


图 13:  $C=1.2$ ,  $N_x=600$

### 3.3.2 精度阶数

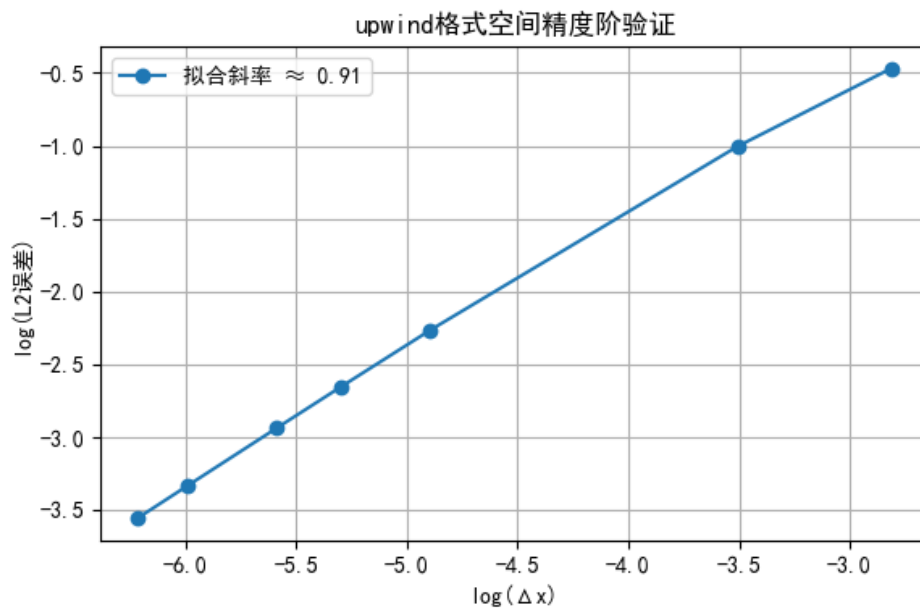


图 14:  $C=0.8$  精度验证

解释：拟合斜率  $\approx 0.91$ ，符合一阶预期。由于人工粘性，误差控制良好但耗散明显。

### 3.3.3 耗散与相位现象

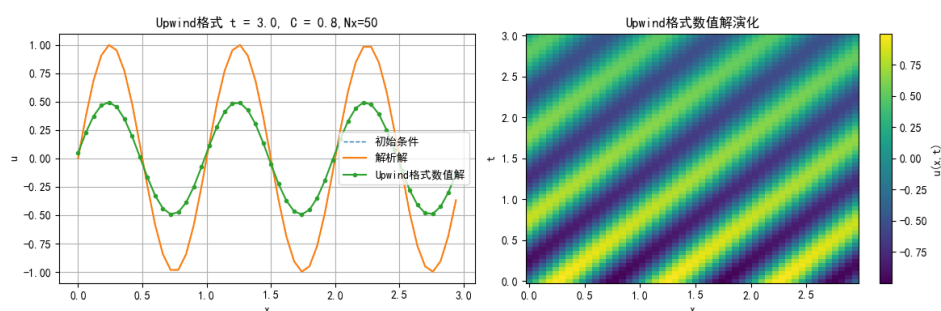


图 15:  $C=0.8, N_x=50$

Lax-Wendroff 格式在精度上表现最佳；Upwind 稳定但耗散强；Lax 格式居中，适用于稳定性与效率折中场景。

## 4 Git 版本记录

<https://github.com/Vic-xu233/HW3-CFD.git>

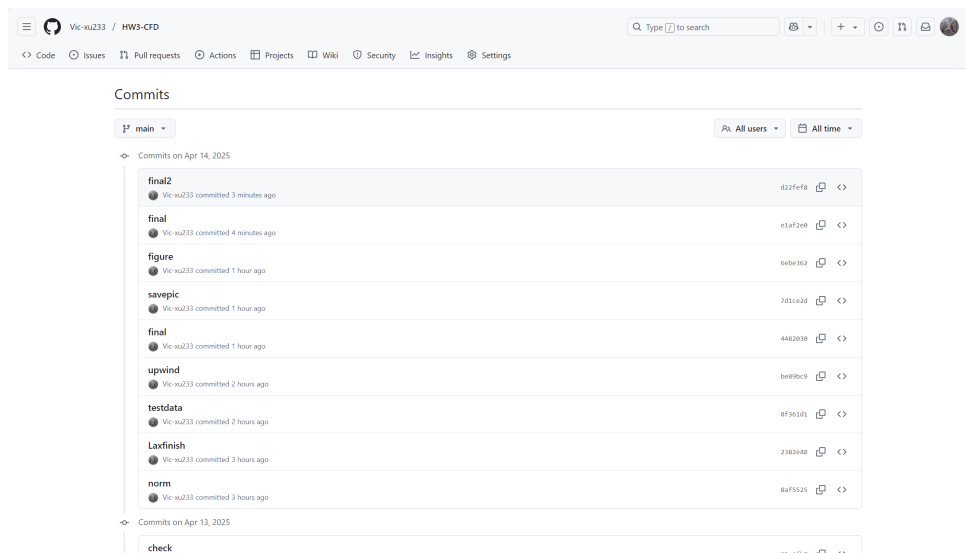


图 16: git