多种数值格式计算一阶波动方程的解

许可为 2200011170

April 2025

1 数理算法原理

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

本节研究一维线性对流方程的数值格式精度，通过推导 Lax、Upwind 与 Lax-Wendroff 三种格式的局部截断误差，分析它们的理论阶数和主导误差项。

1.1 Lax 格式截断误差分析与理论精度推导

Lax 格式的差分格式写作：

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1}^n+u_{i-1}^n)-\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n) \tag{2}$$

设其局部截断误差定义为：

$$\tau_i^n=\frac{u(x_i,t_{n+1})-[\text{Lax 格式右端}]}{\Delta t} \tag{3}$$

对解 $u(x,t)$ 在时间和空间方向进行泰勒展开。

时间方向展开：

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\Delta t\,u_t^n+\frac{(\Delta t)^2}{2}u_{tt}^n+\frac{(\Delta t)^3}{6}u_{ttt}^n+\cdots \tag{4}$$

空间方向展开：

$$u_{i+1}^n=u_i^n+\Delta x\,u_x^n+\frac{(\Delta x)^2}{2}u_{xx}^n+\frac{(\Delta x)^3}{6}u_{xxx}^n+\cdots \tag{5}$$

$$u_{i-1}^n=u_i^n-\Delta x\,u_x^n+\frac{(\Delta x)^2}{2}u_{xx}^n-\frac{(\Delta x)^3}{6}u_{xxx}^n+\cdots \tag{6}$$

计算格式右端展开：

$$\frac{1}{2}(u_{i+1}^n+u_{i-1}^n)=u_i^n+\frac{\Delta x^2}{4}u_{xx}^n+\cdots \tag{7}$$

$$\frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n-u_{i-1}^n)=a\Delta t\left(u_x^n+\frac{\Delta x^2}{6}u_{xxx}^n+\cdots\right) \tag{8}$$

故右端合并为：

$$u_i^n + \frac{\Delta x^2}{4} u_{xx}^n - a\Delta t u_x^n - \frac{a\Delta t \Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \cdots \tag{9}$$

与精确解比较得截断误差：

$$\tau_i^n = \frac{1}{\Delta t}\left[u_i^n + \Delta t u_t^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}^n + \cdots \right. \tag{10}$$

$$\left. - \left(u_i^n + \frac{\Delta x^2}{4} u_{xx}^n - a\Delta t u_x^n - \frac{a\Delta t \Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \cdots \right)\right] \tag{11}$$

$$= u_t^n + a u_x^n + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}^n - \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} u_{xx}^n + \frac{a\Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \cdots \tag{12}$$

由于原方程满足 $u_t + a u_x = 0$，可消去主导项，得最终形式：

$$\boxed{\tau = \frac{\Delta t}{2} u_{tt} - \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \cdots} \tag{13}$$

当 CFL 数 $C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ 保持常数时，有 $\Delta t \sim \Delta x$，从而主导误差为：

$$\tau = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \tag{14}$$

因此，Lax 格式的总体误差阶数为：

$$\boxed{\text{Lax 格式为一阶精度格式} \quad \mathcal{O}(\Delta x)} \tag{15}$$

1.2 Lax-Wendroff 格式

Lax-Wendroff 格式为：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{16}$$

精确解的 Taylor 展开：

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\, u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}^n + \cdots = u_i^n - a\Delta t u_x^n + \frac{a^2\Delta t^2}{2} u_{xx}^n + \cdots \tag{17}$$

数值项展开：

$$\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = u_x^n + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx}^n + \cdots \tag{18}$$

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = u_{xx}^n + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx}^n + \cdots \tag{19}$$

代入 Lax-Wendroff 格式：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t\left(u_x^n + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx}^n\right) + \frac{a^2\Delta t^2}{2}\left(u_{xx}^n + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx}^n\right) + \cdots \tag{20}$$

与精确解比较，误差为：

$$\tau = -\frac{a\Delta t\Delta x^2}{6}u^n_{xxx} + \frac{a^2\Delta t^2\Delta x^2}{24}u^n_{xxxx} + \cdots \tag{21}$$

主导误差项阶数为：

$$\boxed{\tau = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)} \tag{22}$$

1.3 一阶迎风格式（Upwind）

在 $a > 0$ 的情形下，Upwind 格式为：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \tag{23}$$

Taylor 展开精确解 $u(x_i, t_{n+1})$：

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\, u_t^n + \frac{\Delta t^2}{2}u_{tt}^n + \cdots \tag{24}$$

由原方程：

$$u_t = -au_x, \quad u_{tt} = a^2u_{xx}$$

则有：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t u_x^n + \frac{a^2\Delta t^2}{2}u_{xx}^n + \cdots \tag{25}$$

对数值格式右端展开 u_{i-1}^n：

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x u_x^n + \frac{\Delta x^2}{2}u_{xx}^n - \frac{\Delta x^3}{6}u_{xxx}^n + \cdots \tag{26}$$

代入格式中得到：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \tag{27}$$

$$= u_i^n - a\Delta t\left(u_x^n - \frac{\Delta x}{2}u_{xx}^n + \cdots\right) \tag{28}$$

与精确解比较，得截断误差：

$$\tau = \frac{a\Delta x}{2}(1-C)u_{xx}^n + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad C = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \tag{29}$$

因此，Upwind 格式为时间与空间均为一阶精度：

$$\boxed{\tau = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)} \tag{30}$$

表 1: 不同格式的理论精度比较

格式	时间精度	空间精度	主导误差阶数
Upwind	一阶	一阶	$\mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$
Lax	一阶	二阶	$\mathcal{O}(\Delta x)$（若 $\Delta t \sim \Delta x$）
Lax-Wendroff	二阶	二阶	$\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$

1.4 三种格式的精度比较

2 核心代码说明

三种格式的核心实现与误差阶数估计方法

为验证不同差分格式的数值精度，本文选取 Lax 格式、Lax-Wendroff 格式与一阶迎风（Upwind）格式进行误差对比分析，并通过数值实验估计其空间精度阶数。三种格式的离散更新公式实现如下：

- **Lax 格式：**

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \tag{31}$$

  对应 Python 代码实现为：

```
u_next = 0.5 * (np.roll(u, -1) + np.roll(u, 1))
         - 0.5 * C * (np.roll(u, -1) - np.roll(u, 1))
```

- **Lax-Wendroff 格式：**

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{32}$$

  对应 Python 代码实现为：

```
u_next = u - 0.5 * C * (np.roll(u, -1) - np.roll(u, 1))
            + 0.5 * C**2 * (np.roll(u, -1) - 2*u + np.roll(u, 1))
```

- **一阶迎风格式（Upwind，$a > 0$）：**

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_i^n - u_{i-1}^n) \tag{33}$$

  对应 Python 代码实现为：

```
u_next = u - C * (u - np.roll(u, 1))
```

在每种格式下，数值解 u 与解析解 u_{exact} 的误差采用离散 L^2 范数计算，其表达式为：

$$\text{err} = \sqrt{\sum_i \left(u_i - u_{\text{exact},i}\right)^2 \cdot \Delta x} \tag{34}$$

为估计格式的空间精度阶数，令 Δx 取不同网格尺寸，在对数坐标下绘制误差 $\log(\text{err})$ 与步长 $\log(\Delta x)$ 的关系，采用 `NumPy` 中的最小二乘拟合方法计算对数斜率 p，其表达式为：

$$p = \texttt{np.polyfit}(\log(\Delta x), \log(\text{err}), 1)[0] \tag{35}$$

其中，p 即为误差与网格步长之间的拟合斜率，用于估计数值格式的收敛阶数。

3 结果分析与讨论

考虑 `Nx_values` $= [50, 100, 150, 400, 600, 800, 1000]$，$C$ 的取值为 0.8 或 1.2。

3.1 Lax 格式

3.1.1 稳定性条件与发散现象

当 Courant 数 $C < 1$ 时，值稳定，如图所示。

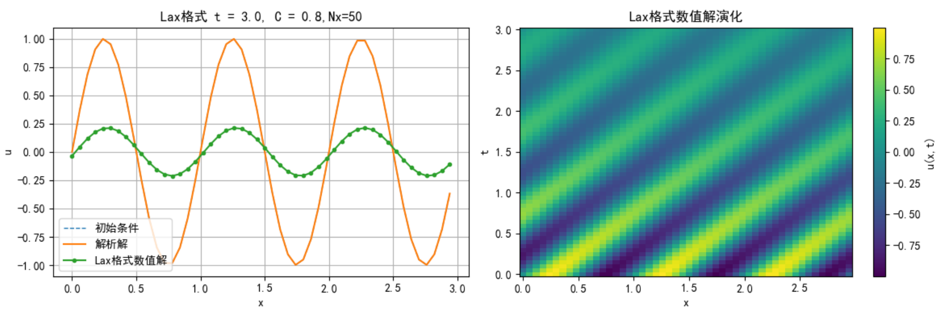

图 1: C=0.8，Nx=50

当 $C > 1$ 时，数值解发散。

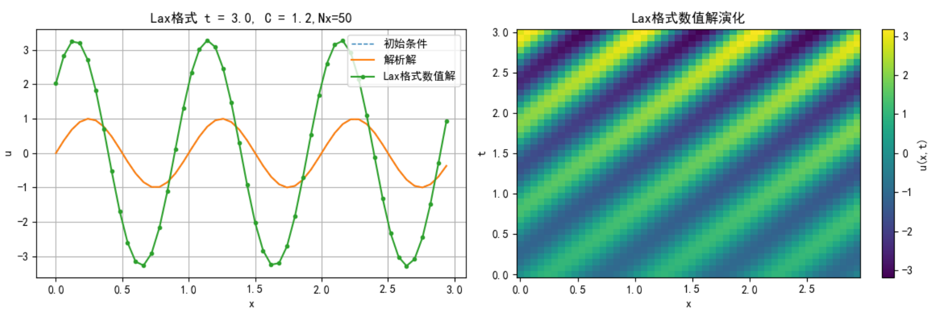

图 2: C=1.2，Nx=50

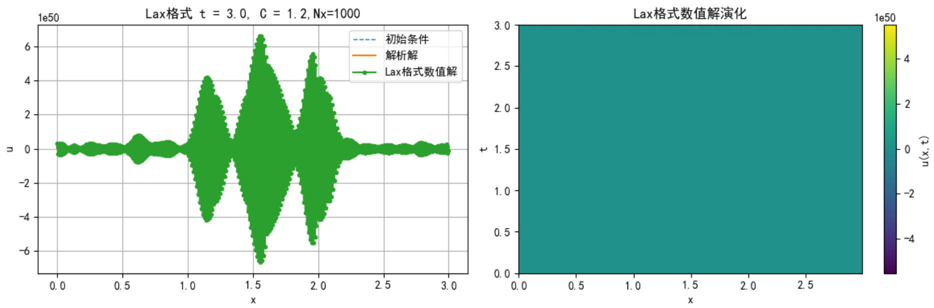

图 3: C=1.2，Nx=1000

原因：CFL 条件失效相当于模拟中“过快推进时间”，导致信息跳跃传递，引发高频误差迅速积累。

3.1.2 验证精度阶数

实验数据表明：

- 拟合斜率 0.796 ~0.944，符合一阶精度
- C 越贴近 1，误差越小

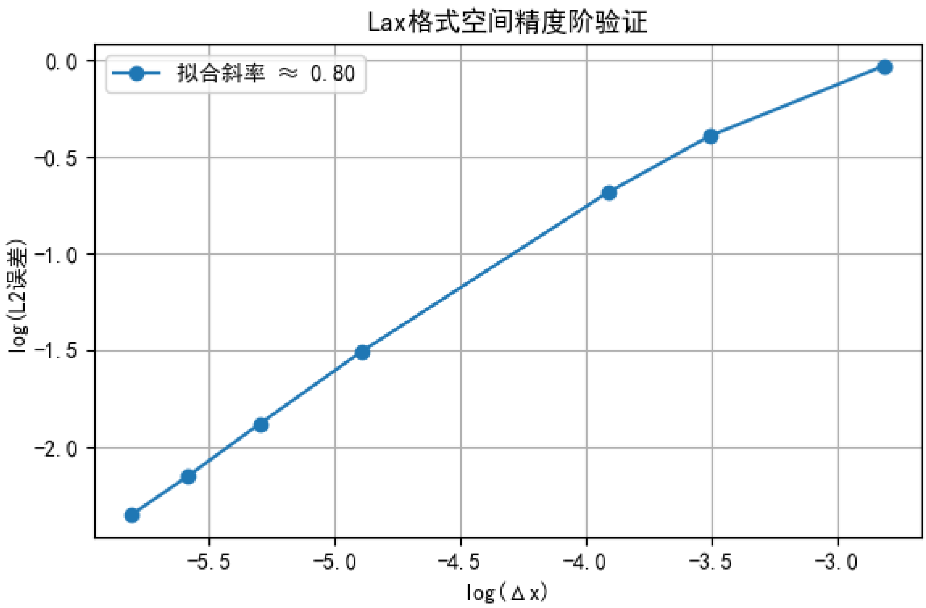

图 4: C=0.8，Nx=[50,100,150,400,600]

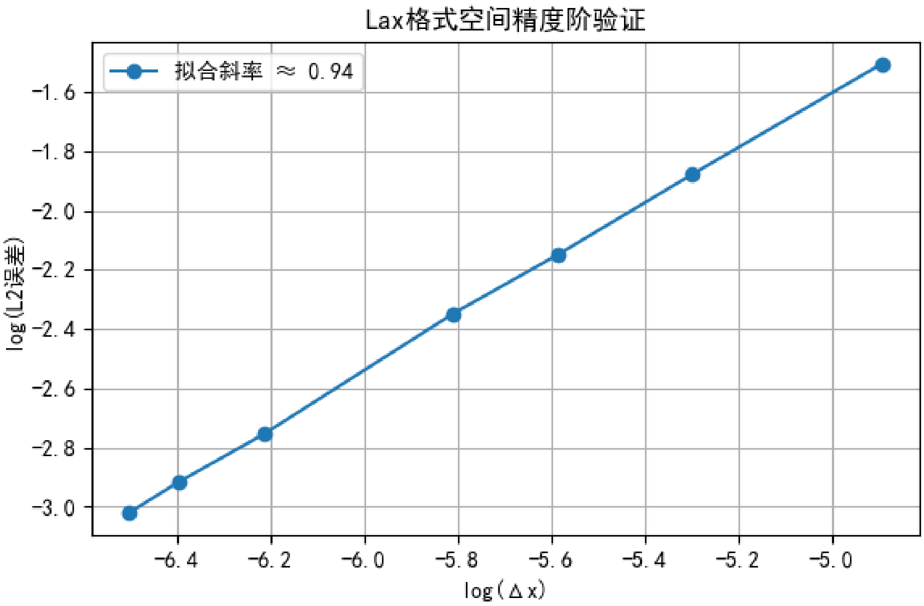

图 5: C=0.8，Nx=[400,600,800,1000,1500,1800,2000]

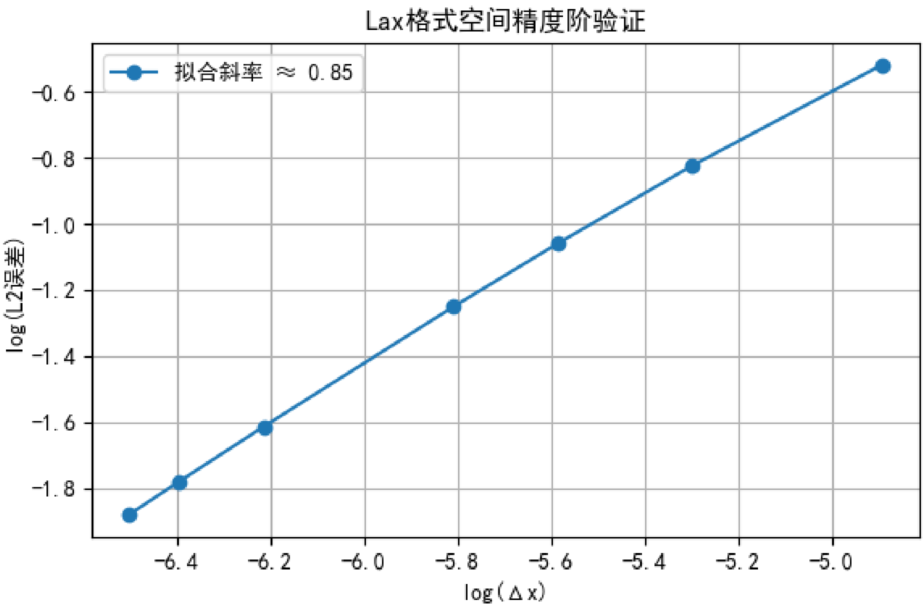

图 6: C=0.5，Nx=[400,600,800,1000,1500,1800,2000]

当 $\Delta t \sim \Delta x$ 时，Lax 格式中误差项最小，从而提高数值精度。

3.1.3 数值解的耗散以及相位的超前和滞后

观察图像可知波幅衰减明显，出现耗散。

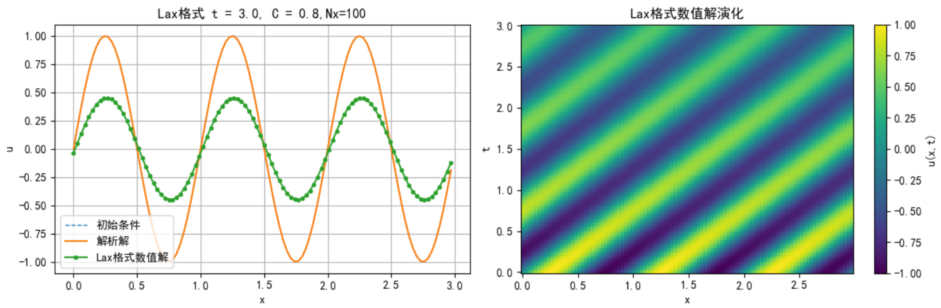

图 7: C=0.8，Nx=100

3.2 Lax–Wendroff 格式

3.2.1 稳定性与发散现象

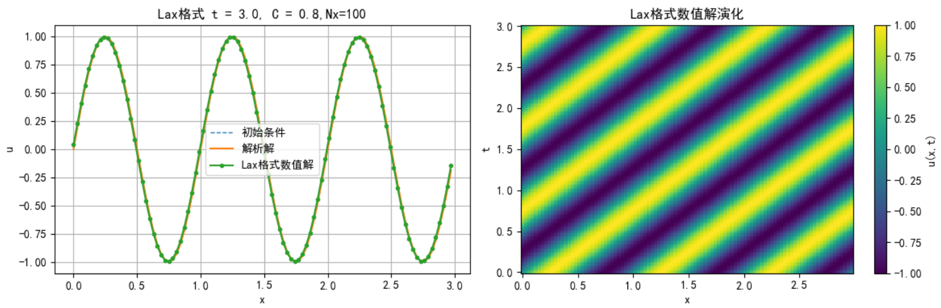

图 8: C=0.8，Nx=100

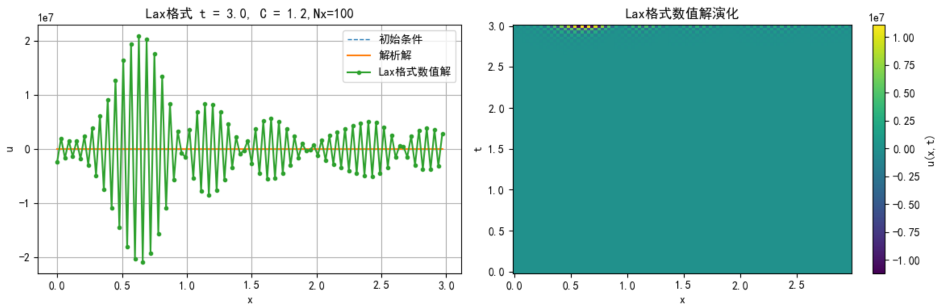

图 9: C=1.2，Nx=100

3.2.2 验证精度阶数

实验数据斜率 $p = 1.9996$，完全符合理论精度。

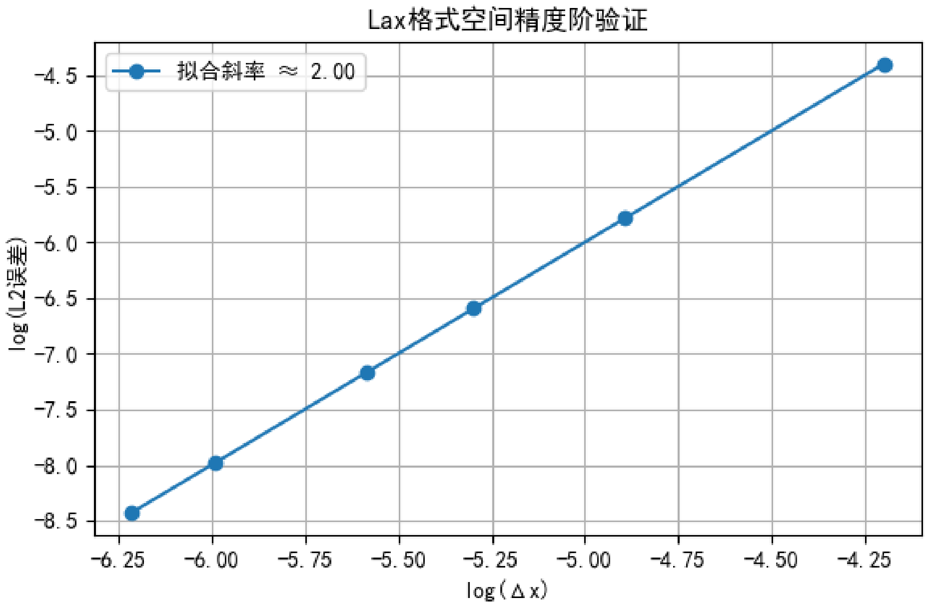

图 10: C=1.2，Nx=100

3.2.3 相位滞后

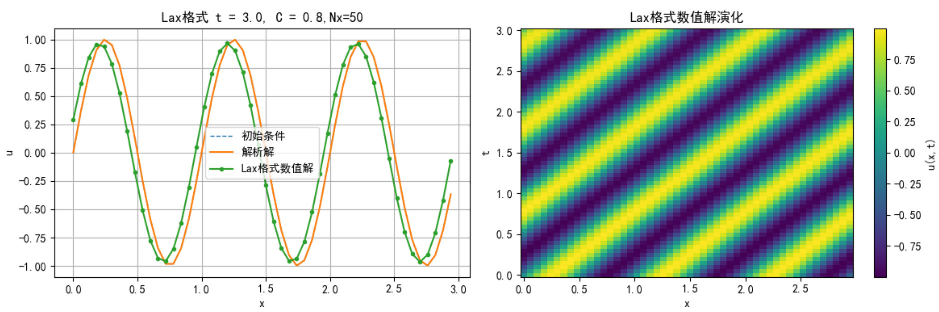

图 11: C=0.8，Nx=50

原因：相位滞后由色散误差引起，即不同频率的波传播速度不同。

3.3 Upwind 格式

3.3.1 稳定性条件与误差验证

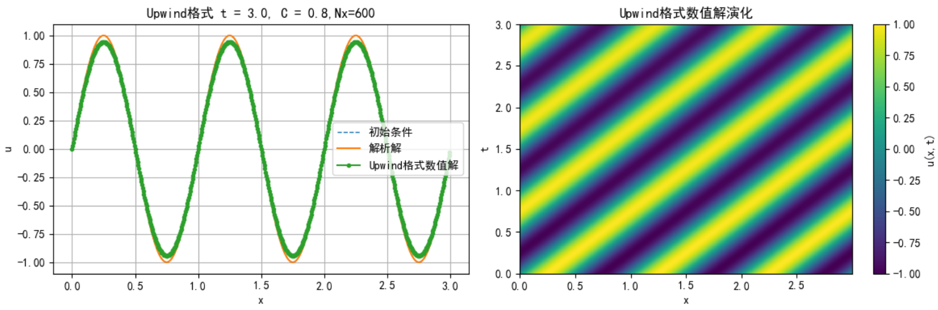

图 12: C=0.8，Nx=600

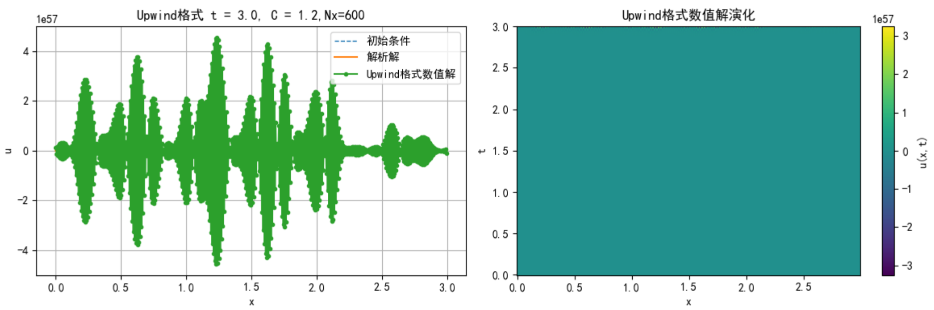

图 13: C=1.2，Nx=600

3.3.2 精度阶数

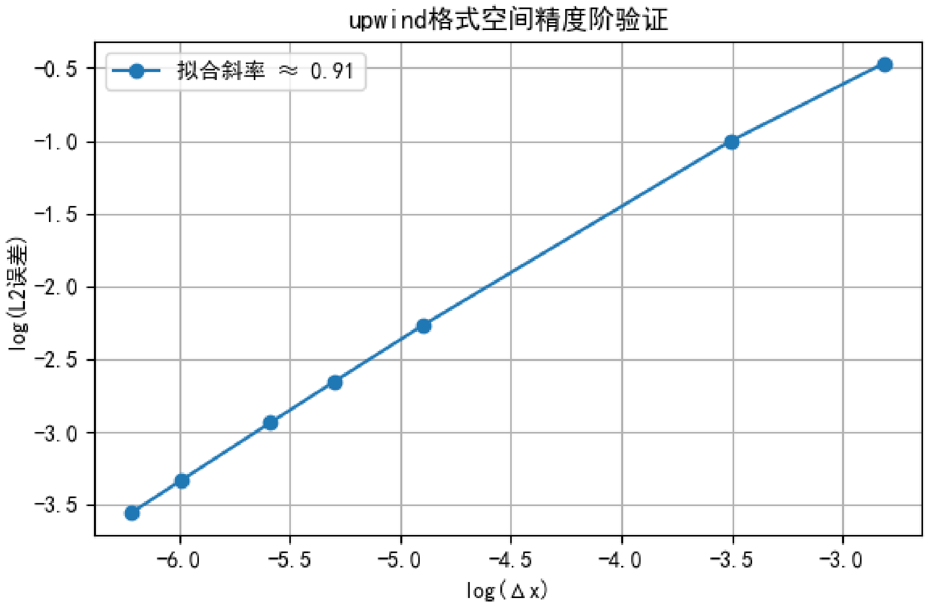

图 14: C=0.8 精度验证

解释：拟合斜率 ≈ 0.91，符合一阶预期。由于人工粘性，误差控制良好但耗散明显。

3.3.3 耗散与相位现象

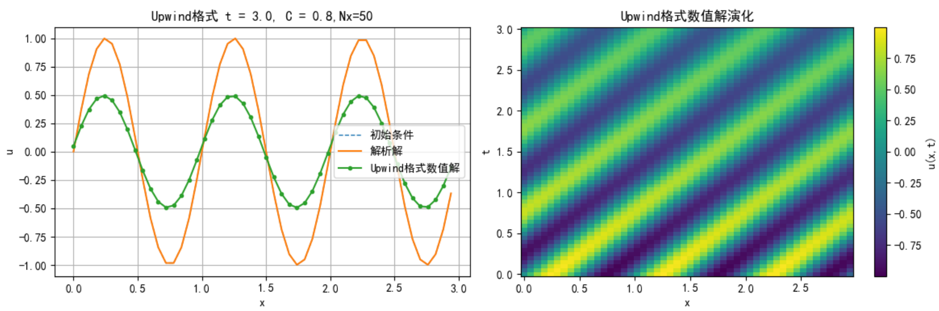

图 15: C=0.8，Nx=50

Lax-Wendroff 格式在精度上表现最佳；Upwind 稳定但耗散强；Lax 格式居中，适用于稳定性与效率折中场景。