;

1 Spheroidal coordinates em N+1 dimensões

;

vamos combinar de notações. usam essas mesmas!

a é uma constante; deixamos por enquanto, pode ser útil no futuro

prolate spheroidal coordinates - two-sheet hypeboloids

$$\begin{aligned} x &= a \sinh v \sin\theta \cos\varphi \\ y &= a \sinh v \sin\theta \sin\varphi \\ z &= a \cosh v \cos\theta \\ 0 &\le v < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= a \sinh v \sin\theta \cos\varphi \\ y &= a \sinh v \sin\theta \sin\varphi \\ z &= a \cosh v \cos\theta \end{aligned}$$

$$0 \le v < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$$

;

oblate spheroidal coordinates - one-sheet hypeboloids - o nosso caso atual

$$\begin{aligned} x &= a \cosh v \cos\theta \cos\varphi \qquad (1) \\ y &= a \cosh v \cos\theta \sin\varphi \\ z &= a \sinh v \sin\theta \\ 0 &\le v < \infty,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

temos o sistema de hiperboloides:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\cos^2\theta} - \frac{z^2}{a^2\sin^2\theta} = 1$$

;

depois passa para coordenadas

$$\xi = \sin\theta,\ \zeta = \sinh v,\ \varphi$$

Uma observação.

{para preparação para o caso de altas dimensões e ter uma analogia com coordenadas esféricas e com a parametrização de two-sheet hypeboloid é melhor usar a parametrização um pouco diferente:

$$\begin{aligned} x &= a\cosh v \sin\theta\cos\varphi \\ y &= a\cosh v\sin\theta\sin\varphi \\ z &= a\sinh v\cos\theta \\ 0 &\le v<\infty,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi \end{aligned} \tag{2}$$

nesse caso as expressões para coeficientes métricos e para Laplaciano mudam. mas para dim 4 isso ja pode ser útil.

}

por enquanto na sua descrição vamos usar a parametrização da forma (1) como está no site

na descrição deve obter a métrica na forma explícita para usa-lo na técnica do operador de Laplace-Beltrami e depois na eq de Dirac. para obter a metrica usa o material do Aleff.

{qual é arq do relatorio do Aleff vc tem? pode me enviar. vou fazer referecias na formulas desse arq.}

para usar a metodologia descrita no rel do Aleff vamos usar a parametrização da forma (2) e a notação de coord.s Cartesianas seguinte:

$$\begin{aligned} x_3 &= a\sinh\chi\cos\theta_2 \\ x_2 &= a\cosh\chi\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ x_1 &= a\cosh\chi\sin\theta_2\cos\theta_1 \end{aligned}$$

escrevemos o sistema de 2-hiperboloides como:

$$\frac{1}{a^2\sin^2\theta_2}\sum_{i=1}^{2}x_i^2-\frac{1}{a^2\cos^2\theta_2}x_{N+1}^2=1$$

quando passar para dimensão 4 será mais fácil generalizar:

$$\begin{aligned} x_4 &= a\sinh\chi\cos\theta_3 \\ x_3 &= a\cosh\chi\sin\theta_3\cos\theta_2 \\ x_2 &= a\cosh\chi\sin\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1 \\ x_1 &= a\cosh\chi\sin\theta_3\sin\theta_2\cos\theta_1 \end{aligned}$$

temos nesse caso temos o sistema de 3-hiperboloides:

$$\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta_3} \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta_3} x_4^2 = 1$$

na caso de dim $(N+1)$ temos o sistema de N-hiperboloides:

$$\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta_N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta_N} x_{N+1}^2 = 1$$

e as coordenadas são

$$\begin{aligned}
x_{N+1} &= a \sinh \chi \cos \theta_N \\
x_N &= a \cosh \chi \sin \theta_N \cos \theta_{N-1} \\
x_{N-1} &= a \cosh \chi \sin \theta_N \sin \theta_{N-1} \cos \theta_{N-2} \\
&\ldots \\
x_3 &= a \cosh \chi \sin \theta_N \ldots \sin \theta_3 \cos \theta_2 \\
x_1 &= a \cosh \chi \sin \theta_N \ldots \sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\
x_2 &= a \cosh \chi \sin \theta_N \ldots \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1
\end{aligned}$$

;