SUMA 47
Noviembre 2004, pp.47-58

Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas

Inicialmente, se tratará de delimitar el campo de acción al que se refiere la palabra juego y qué tipo de juegos se propone utilizar. A continuación se considerarán las razones culturales, matemáticas, educacionales, sociológicas y psicológicas que aconsejan su incorporación en la enseñanza de las Matemáticas y algunas sugerencias que ayuden a determinar su forma de utilización en el aula. Posteriormente se realizará el análisis de algunos juegos y, para finalizar, el artículo se centrará en la experimentación en el aula y las conclusiones.

At the beginning, a definition of the field to which the word play is applied will be attempted, and it will be stated what kind of games are proposed to be used. Then, the cultural, mathematical, educational, sociological and psychological reasons that advise its incorporation into the teaching of Maths will be considered, along with some suggestions that will help to determine the way they should be used in the classroom. Subsequently, some games will be analysed and, to finish with, the article will focus on the experimentation in the classroom and the conclusions.

Educación como formación integral de la persona

Entendemos la educación como formación integral de la persona. Consideramos que la labor de los docentes consiste en preparar a los estudiantes en las clases de hoy para vivir y trabajar en el mundo de mañana, en una sociedad cada vez más compleja que exige personas capaces de resolver problemas y de adaptarse a las distintas situaciones (Burrill, 1998; Chamoso y Rawson, 2003).

Hasta ahora se ha enseñado a los alumnos a hacer, no a pensar. Pero las Matemáticas no son simplemente una colección de hechos y destrezas sino, sobre todo, una forma de pensamiento (Kehle, 1999). El N.C.T.M. (1991, 2000) recomendó que los estudiantes, esencialmente, trabajaran las mismas Matemáticas que se estaban enseñando pero con un enfoque distinto, de forma que los fines que deberían conseguir todos los alumnos con relación a la importancia de la instrucción matemática deberían ser: Aprender a valorar la Matemática, sentirse seguros en su capacidad de hacer Matemáticas, llegar a resolver problemas matemáticos, aprender a comunicarse mediante las Matemáticas y aprender a razonar matemáticamente.

Por ello, las recomendaciones más recientes para reformar la Educación Matemática enfatizan la necesidad de un cambio en la forma en que se enseñan y aprenden las Matemáticas en los centros de enseñanza (N.C.T.M., 1991, 2000). Ya en ese sentido se decía en el Colloquium de Utrech, en 1967:

> El problema no es qué tipo de matemáticas sino cómo deben enseñarse las matemáticas

(citado por Rico, 1990, pág. 33).

> El arte de enseñanza tiene poco que ver con un comercio de conocimiento; su propósito fundamental debe ser fomentar el arte del aprendizaje

(von Glasersfeld, 1995, pág. 192). Sin embargo, no se puede olvidar el hecho de que es el área de Matemáticas en la que se obtienen rendimientos más bajos (I.N.C.E., 1997) y se percibe como la más difícil (por ejemplo Alcalá, 1997), aunque a la vez sea considerada importante y con un alto valor predictivo sobre las capacidades del individuo (Guerrero Ojeda, 1989). Lo cierto es que despierta la antipatía de mucha gente que la ve como algo ajeno.

José María Chamoso Sánchez
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca.
Jesús Durán Palmero
IES Vía de la Plata. Guijuelo. Salamanca.
Juan Francisco García Sánchez
Javier Martín Lalanda
Mercedes Rodríguez Sánchez
Escuela de Magisterio de Zamora. Universidad de Salamanca.

Los cambios están afectando a todos los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo:

- Se abandonan las Matemáticas entendidas como un conjunto de contenidos acabado que hay que dominar y en el que no se puede intervenir, y se da paso a otras Matemáticas en las que se resalta el proceso de construcción del conocimiento matemático, y se considera su formalización y estructuración como el punto de llegada en lugar del de partida.

- El objetivo de esta materia ya no es tanto que el alumno conozca unas reglas como que explore, experimente, haga preguntas y conjeturas... En definitiva, que razone.

- A los contenidos tradicionales de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría y funciones se añaden el análisis de datos y la estadística, la teoría de probabilidad y de estimación y lo relativo a las matemáticas discretas. Además, se destacan las interrelaciones de todas estas ramas de las Matemáticas para que se consideren un todo integrado y no una agregación de conocimientos aislados. De esa forma se proporciona una idea más clara y certera del objetivo de las mismas.

- El dominio del cálculo pierde protagonismo y la atención se centra en la resolución de problemas. Esto facilita que el alumno relacione las Matemáticas que estudia en la escuela con sus propias experiencias y con situaciones que le son familiares, utilice diferentes métodos y materiales, maneje los conceptos matemáticos, escuche a los demás, ponga sus ideas en común y tenga la posibilidad de aplicar las Matemáticas y descubrir su utilidad.

- Cambia el ambiente de las clases: los alumnos dejan de ser receptores pasivos, meros espectadores y se convierten en participantes activos, capaces de trabajar en equipo, investigar, discutir, crear, conjeturar y validar. En definitiva, de hacer Matemáticas.

- El profesor abandona su papel de autoridad, que proporciona información, para ser alguien que facilita el aprendizaje. Se le pide que estimule a los alumnos y alimente su curiosidad, fomente la interacción entre los mismos, diversifique los medios que utiliza (materiales manipulativos, calculadoras, ordenadores...) y la forma de organizar el trabajo (pequeños grupos, actuaciones individuales, exposición ante toda la clase...). El objetivo es conseguir que los estudiantes tengan confianza en sí mismos, desarrollen su capacidad matemática y valoren esta ciencia.

Los Estándares del N.C.T.M. (1991, 2000) presentaron una visión de los estudiantes como seres que piensan y razonan activamente en Matemáticas.

> ¡La buena enseñanza no es hacer el aprendizaje fácil! Tampoco es hacerlo duro. Estudiantes, profesores, padres y administración deberían entender que la buena enseñanza significa que los estudiantes tomen parte activamente en el proceso de aprendizaje

(Burrill, 1997). Para conseguir esos objetivos se va a presentar la introducción de juegos en el aula como una forma de modificar la metodología de enseñanza. Posteriormente se verán los resultados de su experimentación y las conclusiones.

Los juegos en la enseñanza de las Matemáticas

El juego es una actividad universal que no conoce fronteras. A lo largo del tiempo, todas las personas han practicado alguno de una forma seria. Como se puede descubrir a través de las referencias que proporciona la literatura, el arte, la arqueología o la antropología, las culturas más diversas los han utilizado en sus ritos religiosos, para adivinar el futuro, ejercitar la agilidad, la puntería, la perspicacia o, sencillamente, para entretenerse. De hecho, las comunidades humanas siempre han expresado con juegos su interpretación de la vida y del mundo. Incluso es más antiguo que la misma cultura pues (Huizinga, 1951, pp. 84)

> la cultura, en sus fases primitivas, tiene apariencia de juego y se desarrolla en un ambiente similar a un juego.

También ha estado presente de forma activa en el nacimiento de las importantes formas de expresión colectiva del hombre: religión, guerra, poesía, música.... También en la ciencia y, en concreto, en las Matemáticas (Bell y Cornelius, 1990; Huizinga, 1951). El desarrollo de diversas disciplinas matemáticas (Combinatoria, Teoría de juegos, Teoría de probabilidades, Teoría de grafos, Teoría de números, Topología...) comenzó como algo puramente recreativo. De hecho, cada campo de la Matemática tiene aspectos recreativos (Gardner, 1998). Así, los problemas matemáticos poseen dos posibles orígenes: por un lado están los problemas surgidos de problemas técnicos y que se le plantean al matemático; por otro lado tenemos los problemas de pura curiosidad, los acertijos.

En la vida ordinaria de muchos ciudadanos están presentes juegos electrónicos y de ordenador, de azar y malabares, concursos y deportivos, al aire libre y de mesa. Socialmente, el término juego se utiliza para referirse a multitud de actividades cotidianas con las que muchas personas se entretienen y ocupan su tiempo libre, ya sea practicándolas directamente o presenciando cómo lo hacen otros. Sin embargo no es fácil dar una definición que abarque los múltiples significados enlazados que conlleva esta palabra. El diccionario de la Real Academia Española (2001) lo define como *ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde*. Por tanto, le asocia tres características fundamentales:

- *Carácter lúdico*: Se utiliza como divertimento y deleite sin esperar que proporcione una utilidad inmediata ni que ejerza una función moral. Por ello se organizan adaptados a un interés propio, lo que permite encerrarse en un pequeño mundo alejado de la difícil y complicada realidad.

> Cuando jugamos, e incluso cuando presenciamos cómo lo hacen otros, abandonamos el incomprensible universo de la realidad dada para encerrarnos en el reducido mundo de factura humana donde todo es claro, intencional y fácil de comprender

(Huxley, citado por Gardner, 1992, pág. 87).

• *Con reglas propias*: Está sometido a reglas propias que han de ser claras, sencillas y fáciles de entender, aceptadas libremente por los participantes y de cumplimiento obligatorio para todos. No obstante, los juegos no son rígidos y las reglas se pueden variar por mutuo acuerdo entre los competidores.

> "La cultura, en sus fases primitivas, tiene apariencia de juego y se desarrolla en un ambiente similar a un juego."
> Huizinga, 1951

• *Carácter competitivo*: Aporta el desafío personal de ganar a los contrincantes y conseguir los objetivos marcados, ya sea de forma individual o colectiva. La emoción de la competición los hace más excitantes.

Más completa es la definición de Johan Huizinga (1951, pp. 57-58), que considera que

> es una acción u ocupación voluntaria que se desarrolla dentro de unos límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias aunque libremente aceptadas; es una acción que tiene un fin en sí misma y está acompañada de un sentimiento de tensión y alegría.

Es decir, además de lúdico, reglado y competitivo, considera que el juego es:

• *Libre*: Los jugadores lo practican voluntariamente.

• *Limitado espacial y temporalmente*: Se separa de la realidad y del mundo por el espacio y tiempo que previamente se ha fijado para su práctica. En general, después de un número finito de movimientos o acciones, tienen un final que se corresponde con la consecución o no del objetivo propuesto.

• *Improductivo*: Ni genera riqueza ni pretende conseguir otro fin que el propio juego. Los jugadores sólo aspiran al placer de ganar al contrincante.

• *Se acompaña de tensión y alegría*: Tensión por ganar y alegría por jugar.

Bright, Harvey y Wheeler (1985) y Corbalán (1994), además, añaden otros aspectos importantes:

• *Son inciertos*: Al empezar cualquier juego no se conocen ni su resultado ni la situación en un momento determinado de su desarrollo. Esta característica hace a estos más atractivos pues libera la imaginación de los jugadores y les invita a hacer predicciones.

• *Tienen un mínimo reconocimiento social*: No se les suele dar importancia, a pesar del protagonismo que han alcanzado algunos deportes.

En resumen, el juego se caracteriza por ser una actividad humana lúdica, libre, reglada, limitada espacial y temporalmente, competitiva, improductiva y de resultado incierto.

Una metodología de trabajo en ese sentido, ¿se pueden utilizar en el aula?

Razones que aconsejan usar los juegos en el aula

Aun siendo variadas y profundas las relaciones entre juegos y Matemáticas, las razones principales para utilizar los juegos en el aula son las que enumeramos a continuación (Chamoso y Durán, 2003):

1. Son unas actividades atractivas y aceptadas con facilidad por los estudiantes que las encuentran variadas, las reconocen como elementos de su realidad y les permiten desarrollar su espíritu competitivo. Pueden crear un ambiente lúdico que contribuya a despertar la curiosidad de los alumnos y les ayude a disfrutar de la alegría del descubrimiento y el placer del conocimiento. La utilización habitual de juegos y otras actividades recreativas en el aula hará más fácil esquivar el rechazo de algunos estudiantes hacia esta materia y superar bloqueos de otros. Con ello se espera que la clase sea más participativa, práctica, receptiva y amena. Los juegos matemáticos constituyen un material de valor excepcional para la enseñanza de la Matemática. La atracción y el interés que despiertan garantizan el esfuerzo que requiere la investigación matemática. En cada época, hay docentes que saben aprovechar en sus clases la motivación excepcional que suscitan las actividades recreativas. Éstas son generadoras de placer espontáneo y por esa vía la Matemática deja de parecer una disciplina triste y los matemáticos unos aguafiestas (Guzmán, 1996).

2. Cualquier situación de juego que se plantee en el aula favorecerá el desarrollo social de los estudiantes pues estimulará el trato con otras personas, la colaboración entre iguales y el trabajo en equipo, la aceptación de normas, la comunicación y discusión de ideas, el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos. El juego introduce elementos como la novedad, la suerte o la variabilidad. Ello favorece la igualación entre todos, incluido el profesor. Ese ambiente nuevo ayuda a que cambie el papel de los alumnos en el aula, con lo que se favorece una instrucción más cooperativa: cualquier cosa puede afirmarse y todos manipulan, aprenden y enseñan.

3. No se pretende considerar el estudio de juegos porque sí, sino como un tipo de problemas o como una fuente de problemas dentro del movimiento general de resolución de problemas. Los matemáticos valoran los juegos porque se comportan siguiendo unas reglas de forma similar a como las Matemáticas lo hacen en sí mismas (Corbalán, 1998). De hecho, se puede estudiar un paralelismo entre los procesos seguidos al tratar de resolver problemas de la vida real aplicando las Matemáticas y la búsqueda de una estrategia ganadora en los juegos de estrategia. Ambos tienen las mismas fases y permiten ejercitar los mismos hábitos y habilidades por lo que no parece descabellado utilizar los juegos de estrategia para proporcionar herramientas al alumno que serán útiles para la tarea matemática (Gallagher, 1980).

4. Requieren esfuerzo, rigor, atención y memoria, estimulan la imaginación, favorecen la creatividad y enseñan a pensar con espíritu crítico. Fomentan la independencia, desarrollan la capacidad para seguir unas instrucciones, permiten manejar conceptos, procedimientos matemáticos y destrezas de conocimiento en general, y favorecen la discusión sobre Matemáticas y un rico uso de formas de expresión.

En la sociedad no se suele dar importancia a los juegos a pesar del protagonismo que han alcanzado algunos deportes.

5. Se recomiendan como generadores de aprendizajes duraderos. Las habilidades adquiridas en condiciones de aprendizaje agradables se retienen normalmente durante periodos de tiempo más largos que las que se adquieren por imposición o en condiciones adversas y no se olvidan después de superar metas a corto plazo como los exámenes (Gallagher, 1980).

6. Pueden ser comprendidos y apreciados sin necesidad de tener muchos conocimientos previos de Matemáticas y provocan situaciones en las que es posible realizar alguna investigación al alcance de todos. Además, permiten una corrección inmediata de la solución pues si no es la apropiada no se llega al resultado deseado (Corbalán, 1998).

El objetivo no es jugar sino utilizar los juegos como instrumentos para conseguir los objetivos que se pretenden. Precisamente por ello no puede esperarse que los documentos oficiales indiquen cómo y cuándo utilizarlos dentro del proceso educativo, pues corresponde a los centros tomar decisiones para establecer el modelo de educación por el que se haya optado en el Proyecto Educativo de Centro (P.E.). Posteriormente los departamentos, en el Proyecto Curricular de Área, deben adecuarse a ello, lo que influirá en la concepción más formativa o más instrumental de cada disciplina, en particular de las Matemáticas.

No obstante, en las orientaciones didácticas generales se mencionan expresamente los juegos lógicos y matemáticos entre los materiales que se recomienda utilizar. Por ejemplo, concretamente, cuando se refieren al bloque de tratamiento del azar, recomiendan utilizar juegos para desarrollar conceptos, procedimientos y actitudes referidos a él (MEC, 1992). Además, entendidos los juegos como generadores de problemas, las directrices oficiales de Matemáticas del MEC (1992) hacen referencia a ello en sus objetivos, criterios de evaluación y como un aspecto transversal de la secuencia por ciclos.

Los juegos se utilizan a cualquier edad pues las ventajas de aprender en un ambiente agradable son independientes de ésta. Son un recurso habitual en las aulas con estudiantes menores de 7 u 8 años pero, a partir de ese momento, empiezan a desaparecer de las mismas ante la idea de que las cosas importantes deben excluir cualquier componente lúdico. Conviene no olvidar que divertido es lo contrario de aburrido, no de serio. Además, para obtener provecho de ellos hay que practicarlos con absoluta seriedad.

Gardner (1987) consideró que, seguramente, el mejor método para mantener despierto a un estudiante es proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco matemático, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades.

> Un buen pasatiempo matemático vale más, y aporta más a la matemática que una docena de artículos mediocres

(Littlewood, citado por Gardner, 1992, pp. 9). Por ello deben utilizarse de un modo habitual en la clase de Matemáticas y no limitarse a su utilización en circunstancias excepcionales, pues se corre el riesgo de que se consideren actividades especiales y raras.

En la sociedad no se suele dar importancia a los juegos a pesar del protagonismo que han alcanzado algunos deportes. Si los padres se enteran de que sus hijos juegan en las clases de Matemáticas, sin saber más, es indudable que esto despertará en ellos todo tipo de suspicacias. También existe una resistencia general del profesorado a introducirlos en ellas. En parte es entendible porque sus efectos no son rápidos ni fácilmente cuantificables.

Características que deben tener los juegos para llevarlos al aula

Cuando los juegos se incorporan a las aulas, si se pretende que no se desvirtúen, hay que cuidar las características que los definen:

- *Lúdica e improductiva*: En el momento de su presentación, mientras los alumnos se familiarizan con ellos, tienen que considerarlos un divertimento y utilizarlos exclusivamente para jugar. La utilidad didáctica que hizo que el profesor los eligiese surgirá en el desarrollo posterior si se trabajan de forma adecuada.

- *Libre*: Si no se consigue despertar en los estudiantes el deseo de juego, éste perderá su sentido y se convertirá en un simple ejercicio rutinario.

Los juegos son un recurso didáctico más y, como cualquier otro instrumento, debe incorporarse al aula de un modo meditado y planificado y con una programación previa que tenga en cuenta todos los factores del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- *Con reglas propias, limitados espacial y temporalmente*: Las sesiones de clase están limitadas temporalmente por lo que, si queremos sacar provecho de un juego, conviene que éste sea de pocas reglas y de fácil comprensión. Muchas normas y confusas no invitan a jugar y pueden suponer un bloqueo inicial. Además sería deseable que el desarrollo de sus partidas fuera rápido pues, si duran mucho, harán que el alumno se aburra. Por eso no son aconsejables juegos como el ajedrez (aunque conocido, es complejo y obligaría a dejar partidas sin terminar) o el go (su dinámica de funcionamiento tardaría en aprenderse más de una sesión).

- *De resultado incierto*: Si son muy previsibles los estudiantes se cansarán enseguida.

Los juegos son un recurso didáctico más y, como cualquier otro instrumento, debe incorporarse al aula de un modo meditado y planificado (ver fases de utilización del material en Chamoso y Rawson, 2003) y con una programación previa que tenga en cuenta todos los factores del proceso de enseñanza-aprendizaje como, por ejemplo, los conocimientos previos de los alumnos. En cada caso hay que valorar si es el instrumento más adecuado para conseguir los objetivos propuestos. Pero sea cual fuere el nivel de conocimiento de los estudiantes, el empleo cuidadosamente planificado de rompecabezas y juegos matemáticos puede contribuir a clarificar el conocimiento y a desarrollar el pensamiento lógico.

Tipos de juegos

Es obvio que no se trata de jugar a las canicas. En general, tampoco se considerará la práctica de juegos en que prevalezca alguna característica física o habilidad manual, aunque algún aspecto puede ser motivo de interés como los recintos o tableros que se utilizan para tales juegos o incluso sus clasificaciones. El objetivo fundamental será centrarse en aquellos que obligan al jugador a pensar, a discurrir ante las diversas posibilidades de actuación, a desarrollar razonamientos lógicos para investigar la mejor manera de actuar, a establecer conjeturas y justificarlas para tratar de convencer a los demás. Es decir, aquellos en que prima el desarrollo de capacidades mentales ya sean deductivas, inductivas, experimentadoras, de análisis, síntesis, etc. Pero que se busque el impulso del pensamiento no significa que sea una actividad únicamente mental pues la manipulación de objetos va a ser fundamental para jugar y desarrollar esas cualidades intelectivas.

Existe un amplio abanico de posibilidades que cumplen ese objetivo. Por ejemplo, multitud de enigmas, paradojas y antinomias, curiosidades, adivinanzas y otros divertimentos matemáticos tienen un indudable carácter lúdico y, en muchos casos, un gran poder formativo. Pero difícilmente se pueden considerar como juegos propiamente dichos, quizás por la falta de reglas.

Para clasificar los juegos se va a considerar el trabajo de Corbalán (1994) en ese sentido, aunque en trabajos de otros autores o del mismo Corbalán se realizan otras clasificaciones diferentes. Por ello se abarcan tres grandes grupos: juegos de conocimiento, juegos de estrategia y juegos de azar, o aquellos en que intervengan dos o más de dichas características.

Se denominan *juegos de conocimiento* aquellos que utilizan, en su desarrollo, uno o varios de los tópicos habituales existentes en los currícula de Matemáticas y su utilización persigue desarrollar una enseñanza más activa, creativa y participativa. Por tanto su objetivo es alcanzar, afianzar o repasar determinados conceptos o procedimientos matemáticos de un modo más atractivo.

Por *juegos de estrategia* se entienden aquellos que, para conseguir su objetivo (lograr una determinada posición, dejar al contrincante sin fichas, ser el último en coger un objeto de un montón...), en cada momento el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes. El conjunto y la combinación de estas elecciones o tácticas es la estrategia que el jugador emplea para ganar o no perder. Son un buen recurso para introducir a los estudiantes en la resolución de problemas y en los hábitos típicos del pensamiento matemático (Gallagher, 1980). El modo en que se procede cuando se quiere encontrar una estrategia ganadora en un juego es similar al proceso de resolución de un problema: una primera etapa de comprensión, otra de exploración y planificación, una tercera de ejecución y una última de revisión (Fases de resolución de un problema de Polya, 1984). Tienen la gran ventaja de que, al requerir escasos o nulos conocimientos matemáticos previos, permite centrar la atención en las habilidades que se quieren desarrollar. No todos los juegos tienen estrategia ganadora pero, descubrir esto, también es importante.

Los *juegos de azar* se caracterizan por tener un desarrollo completamente aleatorio. Depende del resultado que se consiga al lanzar un dado o extraer cartas de una baraja. Son juegos que resultan familiares a los alumnos y proporcionan oportunidades para buscar regularidades, realizar recuentos sistemáticos y asignar probabilidades.

Análisis de algunos juegos

Vamos a analizar algunos juegos con el objetivo de mostrar que, al hacerlo, se trabajan contenidos matemáticos que se incluyen en el currículum oficial. Un ejemplo de juego de conocimiento puede ser Números y operaciones, muy conocido por ser la sección matemática del popular concurso *Cifras y letras* de Televisión Española, *Des chiffres et des lettres* de la televisión francesa y *Countdown* del Channel 4 británico (Corbalán 1994, 149-150; Crawford 1997, 31-32 y Ferrero 1991, 103-104). Intercambio de fichas es un juego de estrategia que recibe diversos nombres según los autores: Todas cambian (Bolt, 1988, 35, 101-102), Las seis fichas (Ferrero, 1991, 263) y Jugando a cambiar (Sánchez Pesquero y Casas García, 1998, 47-48, 61). Lu-Lu, un juego tradicional de Hawai, es un buen ejemplo de juego de azar al jugarse con dados de dos caras (monedas) diferentes entre sí (Bell y Cornelius, 1990, 77, 86, 102-103 y 123). A continuación se estudia cada uno de ellos.

Números y operaciones

Las reglas son las siguientes:

Número de jugadores: Tantos como se quiera (es posible utilizarlo tanto para gran grupo como de forma individual).

Materiales:

Quince tarjetas numeradas en una de sus caras: diez con los números del 1 al 10 y cinco con los números 10, 25, 50, 75 y 100.

Un sistema para generar números de tres cifras de forma aleatoria (por ejemplo, tirar tres dados de diez caras o extraer cartulinas de una bolsa, con devolución, cada una de las cuales tiene escrito un número del 0 al 9).

Un cronómetro.

Lápiz y papel para cada jugador para realizar cálculos.

Reglas:

1. Se eligen seis tarjetas numeradas entre las quince disponibles y se genera un número de tres cifras aleatorio.
2. El objetivo es conseguir dicho número de tres cifras o la mejor aproximación posible con los números de las seis tarjetas y las cuatro operaciones aritméticas elementales. Para ello se dispone de treinta segundos (o el tiempo que se acuerde). Las operaciones se pueden repetir mientras que los números sólo se pueden utilizar una vez. No es obligatorio utilizar ni todas las operaciones ni todos los números.
3. Los cálculos se indicarán en el papel, jerarquizando las operaciones mediante el uso de paréntesis. Por ejemplo, el número 856 se puede obtener con las tarjetas 4, 7, 50, 10, 9 y 75, al menos, de dos formas distintas: $(75+50) * 7 - (10+9)$, $75 * (4+7) + 50 - (10+9)$.
4. Gana el jugador que consigue, en primer lugar, el número de tres cifras propuesto o, una vez finalizado el tiempo, su mejor aproximación.

Para un análisis del mismo ver Chamoso y Durán (2003).

Intercambio de fichas

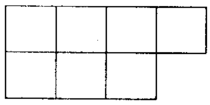
Veamos inicialmente la descripción del juego para, posteriormente, pasar a analizarlo.

Número de jugadores: Uno.

Materiales:

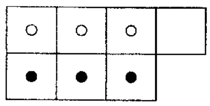
Seis fichas (tres blancas y tres negras).

Un tablero con siete celdillas cuadradas dispuestas en dos filas adosadas, una de cuatro casillas (por ejemplo, la superior) y la otra de tres. Es decir, un tablero formado por un rectángulo de 2x3 casillas al que se agrega una casilla en una de las filas.



Reglas:

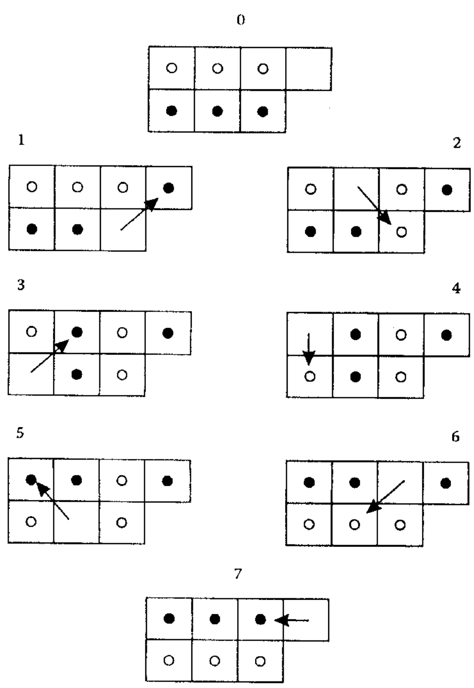
Para comenzar a jugar se colocan las tres fichas blancas en una fila y las tres negras en la otra, enfrentadas a las blancas como se ve en la figura. La casilla que sobresale en la fila superior queda vacía.



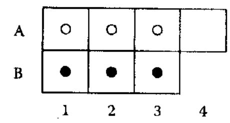
Las fichas se mueven como el rey del ajedrez: una casilla en horizontal, vertical o diagonal, en cada momento, para ocupar un lugar vacío. No pueden coincidir dos en la misma casilla.

El juego termina cuando las fichas blancas y negras han intercambiado sus posiciones. Es decir, si en un principio están colocadas como en la figura anterior, al finalizar las negras deben ocupar la fila superior, las blancas la inferior y la casilla que sobresale en la fila superior debe quedar vacía. El objetivo es conseguir esa posición final con el menor número de movimientos posible.

Encontrar una secuencia de jugadas con las que se intercambien las fichas es inmediato. Algo más laborioso es conseguirla con un número mínimo de movimientos. Una forma puede ser la siguiente:



Siete movimientos son suficientes para completar el intercambio. No es posible hacerlo con menos movimientos pues, al menos, es necesario uno por ficha además de otro para abrir la posición. Si se designa a las filas con letras y a las columnas con números se puede escribir la solución como sigue:

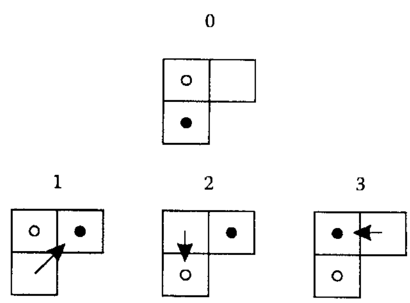


B3 ⟶ A4; A2 ⟶ B3; B1 ⟶ A2; A1 ⟶ B1;

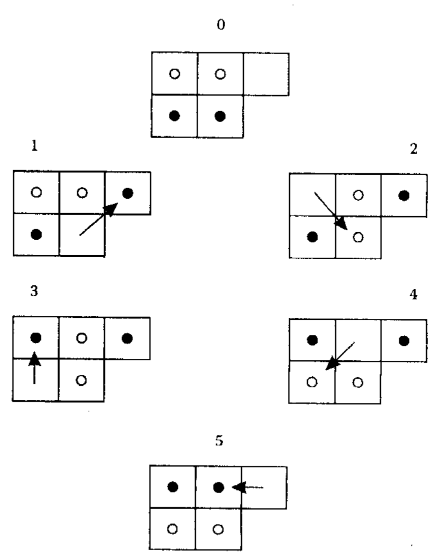
B2 ⟶ A1; A3 ⟶ B2; A4 ⟶ A3.

Lo interesante de este juego es investigar qué sucede cuando se modifica el número de fichas de cada color, n, y el correspondiente número de casillas del tablero, $2n+1$.

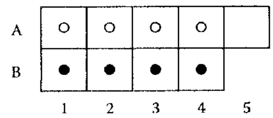
Así, si $n = 1$, el tablero tiene 3 casillas y son necesarios 3 movimientos para realizar el cambio.



Si $n = 2$ el tablero está compuesto por 5 casillas y con 5 movimientos se completa el intercambio.



Para $n = 4$ el tablero está constituido por 9 casillas y se necesitan, al menos, 9 movimientos para que las fichas cambien de posición.



B4 → A5; A3 → B4; B2 → A3; A1 → B2;B1 →

A1; A2 → B1; B3 → A2; A4 → B3; A5 → A4.

Así, para cada valor de n se calcula el número mínimo de movimientos necesarios para realizar el intercambio. De esa forma se obtienen pares ordenados que representan la relación entre el número de fichas de cada color y el número mínimo de movimientos necesarios para realizar el intercambio de fichas propuesto. Los resultados se recogen en la siguiente tabla (se observa que $f(n) = 2n + 1$):

N.º de fichas de un color, n	1	2	3	4	5	6	...
N.º mínimo de movimientos, $f(n)$	3	5	7	9	11	13	...

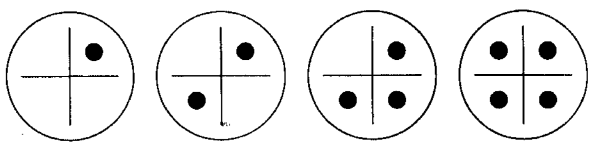
Lu-Lu

Se presenta primeramente su descripción.

Número de jugadores: Todos los que quieran.

Materiales:

Cuatro pequeños discos de unos 2,5 cm. de diámetro que, por una cara, no tienen ninguna señal y, por la otra, están divididos en cuadrantes con diferentes marcas: Uno tiene un punto en un cuadrante, otro tiene un punto en dos cuadrantes opuestos, el tercero tiene un punto en tres cuadrantes y el cuarto tiene uno en cada cuadrante (ver figura).



Se pueden adaptar unas monedas en cuyas caras se pongan pegatinas marcadas como las de la figura anterior.

Reglas:

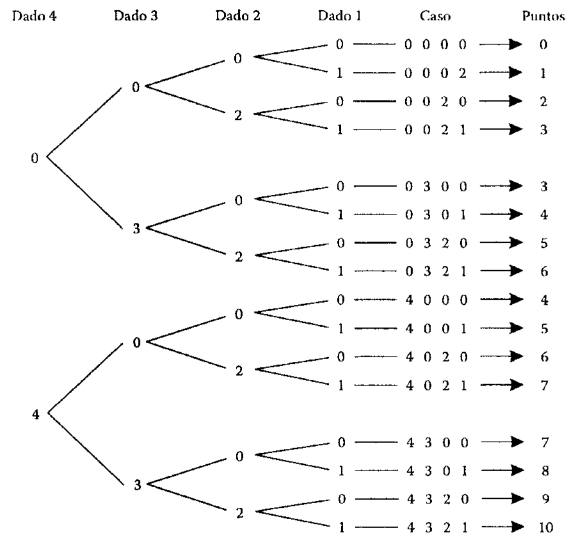
Los jugadores, según un orden previamente establecido, lanzan los cuatro discos y cuentan los puntos que obtienen.

Si un jugador alcanza la máxima puntuación, 10 puntos, puede realizar otro lanzamiento suplementario una sola vez.

Los discos que caen por el lado que no tiene nada marcado cuentan cero puntos para el jugador que los ha tirado y quedan a disposición del jugador siguiente para que los lance y añada los puntos que saque a su puntuación total. Este lanzamiento se añade al que le corresponde por turno.

Gana el primer jugador que alcanza o supera la puntuación que inicialmente se haya acordado (por ejemplo, 100 puntos).

Si se considera el experimento aleatorio *sumar los puntos obtenidos al lanzar cuatro discos diferentes de dos caras, una sin marcar mientras que la otra, en cada caso, es una de las de la figura anterior*, los resultados posibles son:



Los cuatro discos son diferentes y los lanzamientos independientes, por lo que hay 16 posibles resultados distintos. Como se supone que las dos caras de cada disco tienen la misma posibilidad de aparición, es decir, esos 16 lanzamientos son equiprobables, la probabilidad de cada uno de ellos es 1/16. El espacio muestral del experimento es $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y las probabilidades de los sucesos elementales son (se puede comprobar que la suma de estas probabilidades es 1 por lo que la función de probabilidad p está bien definida):

$p(0) = p(1) = p(2) = p(8) = p(9) = p(10) = 1/16.$
$p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p(7) = 2/16.$

Pero este experimento se modifica en el juego de Lu-lu. Al introducir que sacar un 10 permite realizar otro lanzamiento suplementario se amplían las puntuaciones posibles y varían las probabilidades de algunos sucesos. De esta forma se pueden conseguir de 0 a 20 puntos.

Aunque las posibilidades de obtener 0, 1, 2, ..., 8 ó 9 puntos no varían de las señaladas anteriormente, para sacar 10 puntos hay que realizar un lanzamiento ordinario de 10 (L10) y uno suplementario de 0 (S0), donde L = lanzamiento ordinario y S = lanzamiento suplementario; se consiguen 11 puntos con un lanzamiento por turno de 10 puntos (L10) y uno suplementario de 1 punto (S1), etc. Aunque la realización del lanzamiento suplementario está condicionada por haber conseguido un lanzamiento ordinario de 10 puntos, la puntuación que se obtiene en este segundo lanzamiento es independiente de la del primero. Por tanto, las probabilidades de las puntuaciones de 10 a 20 se calculan como sigue:

p(10) = p(L10∩S0) = p(L10) · p(S0) = 1/16 · 1/16 = $1/16^2$ (análogos los demás casos).

Por tanto, el nuevo espacio muestral será:

Ω' = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

y la función de probabilidad p' toma los valores (fácilmente se comprueba que la suma de todas ellas es 1):

p'(0) = p'(1) = p'(2) = p'(8) = p'(9) = 1/16.
p'(3) = p'(4) = p'(5) = p'(6) = p'(7) = 2/16.
p'(10) = p'(11) = p'(12) = p'(18) = p'(19) = p'(20) = $1/16^2$.
p'(13) = p'(14) = p'(15) = p'(16) = p'(17) = 2/162.

Finalmente se incorpora la regla de que los discos que han quedado por la cara que no tiene puntos después del lanzamiento de un jugador, se lanzan de nuevo por el jugador con el siguiente turno. Esta condición es la que hace que el juego se complique. La puntuación de un jugador, en cada uno de sus turnos, queda condicionada por el resultado del lanzamiento del anterior salvo en la primera jugada de cada partida. En este caso los resultados pueden llegar hasta 30. Ante tan elevado número de posibilidades sólo estudiaremos algunos casos.

Si el jugador anterior sacó 10 en su tirada (A10), el que tiene el turno realiza directamente el lanzamiento que le corresponde y puede conseguir entre 0 y 20 puntos según los resultados de la tirada ordinaria y, si se realiza, de la suplementaria. Se reproduce el espacio probabilístico anterior por lo que Ω/A10 = Ω' y p(/A10) = p'.

Si el jugador anterior sacó un 9 en su lanzamiento (A9), necesariamente quedó en blanco el disco con un punto. Según las reglas del juego, el jugador en turno lo lanzará y podrá conseguir 0 (D0) ó 1 (D1), con D = lanzamiento de los dados del anterior, ambos con probabilidad de ½. A ello hay que añadir el lanzamiento que le corresponde. Las posibilidades globales en este caso son:

D L S	Ptos.	D L S	Ptos.	D L S	Ptos.	D L S	Ptos.
0 0 -	0	0 10 0	10	1 0 -	0	1 10 0	10
0 1 -	1	0 10 1	11	1 1 -	1	1 10 1	11
0 2 -	2	0 10 2	12	1 2 -	2	1 10 2	12
0 3 -	3	0 10 3	13	1 3 -	3	1 10 3	13
0 4 -	4	0 10 4	14	1 4 -	4	1 10 4	14
0 5 -	5	0 10 5	15	1 5 -	5	1 10 5	15
0 6 -	6	0 10 6	16	1 6 -	6	1 10 6	16
0 7 -	7	0 10 7	17	1 7 -	7	1 10 7	17
0 8 -	8	0 10 8	18	1 8 -	8	1 10 8	18
0 9 -	9	0 10 9	19	1 9 -	9	1 10 9	19
		0 10 10	20			1 10 10	20

Por tanto, el espacio muestral es:

Ω/A9 = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21}

y la distribución de probabilidades queda como sigue:

p(0/A9) = p(D0∩L0) = p(D0)p(L0) = 1/2 · 1/16.
p(1/A9) = p((D0∩L1) ∪ (D1∩L0)) = p(D0∩L1) + p(D1∩L0) = 2 · 1/2 · 1/16 = 1/16.
p(2/A9) = p((D0∩L2) ∪ (D1∩L1)) = p(D0∩L2) + p(D1∩L1) = 2 · 1/2 · 1/16 = 1/16.
p(3/A9) = p((D0∩L3) ∪ (D1∩L2)) = p(D0∩L3) + p(D1∩L2) = 1/2 · 2/16 + 1/2 · 1/16 = 3/2 · 1/16.
p(4/A9) = p((D0∩L4) ∪ (D1∩L3)) = p(D0∩L4) + p(D1∩L3) = 2 · 1/2 · 2/16 = 2/16.
p(5/A9) = p(6/A9) = p(7/A9) = 2/16.
p(8/A9) = 3/2 · 1/16.
p(9/A9) = 1/16.
p(10/A9) = p((D0∩L10∩S0)∪(D1∩L9)) = 1/2 · 1/16 · 1/16 + 1/2 · 1/16 = 1/2 · 1/16 + 1/2 · $1/16^2$.
p(11/A9) = p((D0∩L10∩S1)∪(D1∩L10∩S0)) = 1/2 · 1/16 · 1/16 + 1/2 · 1/16 · 1/16 = $1/16^2$.
p(12/A9) = p((D0∩L10∩S2)∪(D1∩L10∩S1)) = 1/2 · 1/16 · 1/16 + 1/2 · 1/16 · 1/16 = $1/16^2$.
p(13/A9) = p((D0∩L10∩S3)∪(D1∩L10∩S2)) = 1/2 · 1/16 · 2/16 + 1/2 · 1/16 · 1/16 = 3/2 · $1/16^2$.
p(14/A9) = p((D0∩L10∩S4)∪(D1∩L10∩S3)) = 1/2 · 1/16 · 2/16 + 1/2 · 1/16 · 2/16 = $2/16^2$.
p(15/A9) = p(16/A9) = p(17/A9) = $2/16^2$.
p(18/A9) = 3/2·$1/16^2$.
p(19/A9) = p(20/A9) = $1/16^2$.
p(21/A9) = p(D1∩L10∩S10) = p(D1) p(L10) p(S10) = 1/2 · 1/16 · 1/16 = 1/2 · $1/16^2$.

Como la suma de todas estas probabilidades es 1 entonces es una función de probabilidad.

Finalmente se va a considerar el caso de que el jugador anterior saque 7 puntos en la tirada que le corresponde (A7). Como hay únicamente dos posibilidades de conseguir 7 puntos (4 0 2 1 ó 4 3 0 0), el jugador en turno tendrá que lanzar, dependiendo de la que se produzca, el disco con tres marcas o los discos con una y dos marcas. Como ambas posibilidades son equiprobables, el que se consigan los 7 puntos a partir de un lanzamiento u otro tiene la misma probabilidad, ½ en cada caso. Se analizan ambas posibilidades por separado (con un poco de paciencia, el lector puede realizar los cálculos detallados).

1. Si el lanzamiento del jugador anterior fue 4 0 2 1 (caso Aa7), el que tiene el turno debe tirar el disco con tres marcas y puede obtener 0 (D0) ó 3 (D3), ambos con la misma probabilidad (½). El cuadro de posibilidades es semejante al que se obtiene cuando el jugador anterior consigue 9 puntos aunque los resultados varían desde 0 hasta 23.

2. Si el lanzamiento del jugador anterior fue 4 3 0 0 (Ab7), el jugador que tiene el turno deberá lanzar los discos con uno y dos puntos con los que puede obtener de 0 a 3 tantos. Estos sucesos, siguiendo la notación utilizada, serán D0, D1, D2 y D3 y cada uno se da con una probabilidad de ¼.

¿Se inventó el juego pensando en las Matemáticas o es que éstas sirven, en muchos casos, para descubrir el funcionamiento de instrumentos cotidianos?

Una vez estudiados todos los casos dependiendo de los resultados que saca el jugador anterior en su tirada se podrían calcular las probabilidades de todos los resultados posibles en el juego Lu-lu. Dichas probabilidades serán, para cada n, utilizando la definición de probabilidad condicionada y que el sistema de sucesos {A0, A1, ..., A9, A10} es completo:

$$p(n) = p(n / (A0 \cup A1 \cup \dots \cup A9 \cup A10)) =$$
$$= p(n \cap (A0 \cup A1 \cup \dots \cup A9 \cup A10))/p(A0 \cup A1 \cup \dots \cup A9 \cup A10) =$$
$$= p(n \cap A0) + p(n \cap A1) + \dots + p(n \cap A9) + p(n \cap A10) =$$
$$= p(A0)p(n/A0) + p(A1)p(n/A1) + \dots + p(A9)p(n/A9)+ p(A10)p(n/A10)$$

De esta forma se puede considerar el juego del Lu-lu como un experimento aleatorio con su espacio muestral asociado y una función de probabilidad definida sobre él.

Experimentación en el aula

Se observa que el análisis de los juegos anteriores permite manejar numerosos contenidos del currículum de Matemáticas de ESO y aplicar diversas estrategias para la resolución de problemas (un ejemplo referido a Números y operaciones está en Chamoso y Durán, 2003). Por esa razón se han experimentado con estudiantes y docentes. Números y operaciones era un juego conocido por la mayor parte de ellos que, en muchos casos, lo habían experimentado en las aulas en alguna ocasión. Sugerir la búsqueda de variantes del mismo y sus posibilidades llevó a descubrir una gran cantidad de actividades en las que aparecían diversos contenidos matemáticos. Por ejemplo, conseguir el número más alejado del que había que aproximar llevó a trabajar las potencias, operaciones entre ellas y las propiedades que verifican; que el número que se tratara de acercar fuera un número fraccionario convertía la actividad en conseguir no sólo un número sino un par o diversos pares de números que representaran la misma fracción; si estuviese comprendido entre 0 y 1 permitía estudiar los distintos tipos de números decimales; si fuese un número entero negativo posibilitaría utilizar las operaciones y propiedades de los números enteros...

En esas variantes, y otras que puede haber, se trabajan contenidos matemáticos muy diversos como, por ejemplo, las operaciones elementales y sus propiedades, prioridad de las operaciones, importancia de los paréntesis, probabilidad, cálculo y estrategias mentales, agilidad mental, divisibilidad, verbalización de la respuesta, distintos caminos para encontrar la solución, realización de conjeturas, comprobaciones y revisión del resultado. También aparecieron aspectos importantes como el respeto a los demás, comportamiento en grupo, estímulo por obtener la solución, competitividad, motivación. Además, este juego tiene un componente interesante ya que la actividad no tiene un final previsto. Es una cuestión abierta y coloca al profesor en un lugar cercano al alumno ya que, a priori, no goza de la solución ni del procedimiento para la resolución del problema. Por tanto, se convierte en un jugador más con un incentivo importante por ser el docente.

Intercambio de fichas proporciona la oportunidad de recoger datos, representarlos y analizarlos para tratar de obtener un modelo algebraico y su correspondiente modelo geométrico en el caso de una función afín. También es importante utilizar una notación apropiada. Se ha experimentado con estudiantes a partir de la siguiente ficha de trabajo:

1. ¿Cuántos movimientos mínimos son necesarios para completar el juego cuando el tablero tiene 3 * 4 casillas? ¿Cuántos son necesarios en el caso de que el tablero tenga 2 * 3 casillas?

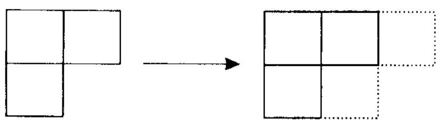
2. Construye un tablero de 4 * 5 y completa el juego. ¿Cuántos movimientos se necesitan para acabar? ¿Es el número mínimo?

3. También es posible reducir el tamaño del tablero. ¿Qué ocurriría en un tablero 1 * 2?

4. Rellena la siguiente tabla:

Número de casillas	Número mínimo de movimientos para concluir del juego
1 x 2	
2 x 3	
3 x 4	
4 x 5	
5 x 6	

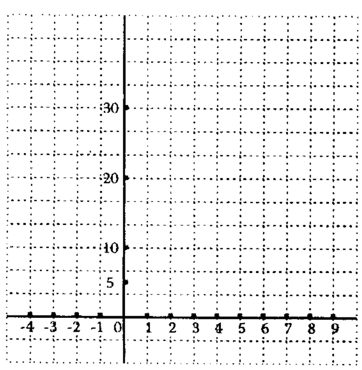
5. Para pasar de un caso al siguiente se amplía el tablero, es decir, se añade una casilla a cada fila adosadas a las ya existentes. Por ejemplo,



Para contar los movimientos necesarios para completar un caso podemos partir de los necesarios en el caso anterior y estudiar únicamente los desplazamientos que hay que añadir.

a. ¿Cuántos movimientos de diferencia hay entre el caso en que el tablero tiene 1 * 2 casillas y el que tiene 2 * 3?
b. ¿Cuántos de diferencia hay entre el caso del tablero de 2 * 3 y el de 3 * 4?
c. A partir de la casilla en que finaliza el juego cuando hay 2 * 3 casillas, ¿cuántos movimientos hay que realizar para resolverlo cuando hay 3 * 4? ¿Coincide con la respuesta del apartado a? ¿Cuándo se producen los movimientos que faltan?
d. Estudia las preguntas de c) para la situación en que se pasa de jugar con 3 * 4 casillas al caso de 4 * 5 casillas.
e. Suponiendo que se conocen los movimientos a realizar para completar el juego en el tablero de n * (n+1) casillas, ¿cuántos hay que hacer en el de (n+1) * (n+2)?

6. En el plano cartesiano que está dibujado a continuación, representa los puntos correspondientes a los pares de la tabla anterior.



Une los puntos marcados. ¿Qué figura resulta? ¿Te permite predecir cuántos movimientos son necesarios para completar este juego cuando el tablero tiene 6 * 7, 7 * 8 ó 8 * 9 casillas?

7. ¿Cuántos movimientos hay que hacer, como mínimo, para realizar el intercambio en el caso de que haya 100 fichas de cada color? Si alguien ha realizado 231 movimientos, ¿con cuántas fichas ha jugado? Explica cómo se deduce a partir de la gráfica. Es decir, generaliza el resultado para un número par de fichas (2n, n de cada color) y un tablero con 2n+1 casillas (un rectángulo de 2xn celdillas con una más adosada a una de las filas).

8. Con esos datos trata de establecer una fórmula que refleje el número de movimientos necesarios para completar el juego Intercambio de fichas en función del número de casillas del tablero. Ahora intenta responder las preguntas del apartado anterior.

En cuanto al juego Lu-lu, como se ha podido observar se complica mucho y se dispara el número de posibilidades cuando se condiciona la puntuación de un jugador en un turno al resultado del lanzamiento del jugador anterior. Se puede trabajar en los cursos de 1º y 2º de ESO si se pretenden estudiar las distintas maneras en que pueden caer los discos y relacionar los casos posibles con los puntos que se pueden conseguir, las puntuaciones que puede lograr un jugador en su turno, formas de conseguirlas... En 3º de ESO se puede trabajar, además, el espacio muestral y la función de probabilidad del experimento aleatorio *lanzar cuatro discos diferentes marcados por una de sus caras con 1, 2, 3 y 4 puntos respectivamente y sumar los puntos obtenidos* con alguna modificación. En 4º de ESO se puede utilizar para desarrollar los conocimientos sobre probabilidad, incluida la condicionada, con un experimento que no es habitual en los libros de texto. También existen variantes pues se puede considerar un juego análogo, pero más sencillo, que consiste en lanzar únicamente tres discos diferentes marcados con 1, 2 y 3 puntos, respectivamente, en una de sus caras.

Conclusiones

Después de la experimentación efectuada, ha sorprendido la gran cantidad de contenidos matemáticos que pueden surgir al trabajar un juego generalmente conocido como Números y operaciones, siempre que se tenga interés en ello y se trabaje con suficiente profundidad. También llama la atención que Intercambio de fichas, que a primera vista no tiene ninguna apariencia matemática se pudiera convertir en un instrumento para trabajar las Matemáticas. Incluso se ha visto que se puede llegar a descubrir una regla general para poder deducir el número mínimo de movimientos en un tablero de amplitud cualquiera. Otro aspecto llamativo es que, a partir del juego

Lu-lu se pueda, prácticamente, recorrer la mayor parte de los contenidos del currículum de Matemáticas relacionados con probabilidad de los cuatro años de Secundaria e incluso más. Con ello se ha mostrado que los juegos pueden utilizarse para trabajar elementos del currículum de muy diversas formas. No se considera que sean la solución de los problemas de Educación Matemática, ni mucho menos, pero sí que pueden ser un recurso que puede ayudar a desarrollar la enseñanza cuando el docente lo considere adecuado. En cualquier caso, hay que tener en cuenta las posibilidades del entorno educativo en que se quiera trabajar: docente, aula de trabajo, número de estudiantes, posibilidades de los alumnos, materiales...

Pero, sin embargo, en nuestra mente queda la pregunta: ¿Es que el juego se inventó pensando en las Matemáticas o es que éstas sirven, en muchos casos, para descubrir el funcionamiento de instrumentos cotidianos? ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCALÁ, M. (1997): "Enseñanza de la Matemática y Niveles Operatorios", *Actas VIII J.A.E.M.*, Salamanca, 51-56.

BELL, R. y CORNELIUS, M. (1990): *Juegos con tablero y fichas: Estímulos a la investigación matemática*, Labor, Barcelona.

BOLT, B. (1988): *Más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona.

BRIGHT, G. W., HARVEY J. G. y WHEELER, M. M. (1985): "Learning and Mathematics Games", *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 1 (monográfico), N.C.T.M., Reston.

BURRILL, G. (1997): "President's Report: Choices and Challenges", *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 5, 602-611.

BURRILL, G. (1998): "Changes in Your Classroom: From the Past to the Present to the Future", *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 5, 583-596.

CHAMOSO, J. Mª y DURÁN, J. (2003): "Algunos juegos para aprender Matemáticas", *Actas VII Seminario Regional Castellano-Leonés de Educación Matemática*, Ponferrada, 163-176.

CHAMOSO, J. Mª y RAWSON, W. (2003): "Matemáticas en una tarde de paseo", *Colección Diálogos de Matemáticas*, Nivola, Madrid.

CORBALÁN, F. (1998): "Juegos de estrategia en la enseñanza secundaria", *Uno, n.º* 18, 59-71.

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, Madrid.

CRAWFORD, D. (1997): "Number games", *Mathematics in School*, 26, 4, 31-33.

FERRERO, L. (1991): *El juego y la matemática*, Colección Aula Abierta, Muralla, Madrid.

GALLAGHER, K. (1980): *Problem Solving through Recreational Mathematics*, En Krulik y Reys (Ed.), *Problem solving in School Mathematics*, 169-177, 1980 NCTM Yearbook, Virginia, Reston, NCTM.

GARDNER, M. (1987): *Carnaval matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

GARDNER, M. (1992): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GARDNER, M. (1998): "Un cuarto de siglo de matemáticas recreativas", *Investigación y Ciencia*, octubre, 50-57.

GUERRERO OJEDA, J. (1989): "Ámbitos y funciones del currículum matemático", Epsilon 14, 57-62.

GUZMÁN, M. de (1996): *Aventuras Matemáticas: Una ventana hacia el caos y otros episodios*, Pirámide, Madrid.

HUIZINGA, J. (1951; original de 1938): "Homo ludens, essai sur la fonction sociale du jeu", *Colección Tel*, n.º 130, Gallimard.

I.N.C.E. (1997): "Resultados de Matemáticas", *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)*, MEC, Madrid.

KEHLE, P. (1999): "Shifting Our Focus From Ends to Means: Mathematical Reasoning", *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 4, 468-474.

MEC (1992): *Secundaria, Área de Matemáticas*, Secretaría de Estado de Educación, Madrid.

N.C.T.M. (1991): "Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática", *SAEM THALES*, Sevilla.

N.C.T.M. (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, NCTM, Virginia.

POLYA, G. (1984): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas (primera edición en 1945), México.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (22ª edición) (2001): *Diccionario de la Lengua Española*, Espasa Calpe, Madrid.

RICO, L. (1990): *Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural*, en Llinares, S. y Sánchez, Mª V. (Ed.), Teoría y Práctica en Educación Matemática, 17-62 Alfar, Sevilla.

SÁNCHEZ PESQUERO, C. y CASAS GARCÍA, L. M. (1998): *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en Matemáticas*, Centro de Investigación y Documentación Educativa, MEC, Madrid.

VON GLASERSFELD, E. (1995): *Radical constructivism: A way of knowing and learning*, Falmer Press, London.