Ejercicio 1: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Es una función Racional y, por tanto, continua y derivable en todo su dominio.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\} \\ &= (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x + 1 = 0$

Soluciones: $x_0 = -1$;

Asintota en $x = -1$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto -1} \frac{x^2}{x+1} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \mapsto -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \mapsto -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \end{cases}$$

Aunque el límite no exista (porque los límites laterales son diferentes), su magnitud sigue siendo infinita por ambos lados, por lo que la recta x = -1 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2}{x+1} = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{x+1} = ... = 1$$

En este caso tenemos m=1 por lo que sí hay asíntota oblícua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1x \right) = \lim_{x \mapsto +\infty} -x + \frac{x^2}{x+1} = -1$$

En $+\infty$, f(x) tiene una **asíntota oblícua** en $y = x - 1$.

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x^2}{x+1} = ... = -\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x}{x+1} = ... = 1$$

En este caso tenemos m=1 por lo que sí hay asíntota oblícua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1x \right) = \lim_{x \mapsto -\infty} -x + \frac{x^2}{x+1} = -1$$

En $-\infty$, f(x) tiene una **asíntota oblícua** en $y = x - 1$.

Puntos de corte con los ejes ***Eje X*** Para calcular los puntos de corte de la función con el eje x resolvemos la ecuación $f(x) = 0$ cuya solución es:

$x_0 = 0 \rightarrow (0, 0)$;

Obs: Sólo puede haber puntos de corte en puntos del dominio.

Eje Y Para calcular los puntos de corte de la función con el eje y calculamos $f(0)$. En este caso: $f(0) = 0$, con lo que la gráfica corta en $(0, 0)$ al eje Y.

Simetría Para estudiar la simetría de una función calculamos $f(-x)$ y comparamos con $f(x)$. En este caso:

$$f(-x) = -\frac{x^2}{x-1}$$

¿Es igual a f(x) o a -f(x)? No, entonces la función no tiene simetría respecto del eje Y.

Monotonía $f'(x) = \frac{x^2+2\,x}{x^2+2\,x+1}$

Calculamos los puntos críticos, aquellos en los que $f'(x) = 0$

$x_0 = -2; \quad x_1 = 0;$

Añadimos a estos puntos aquellos en los que la función primitiva no exista y aquellos puntos en los que la función derivada no exista, si hay alguno. En este caso, $x_0 = -1$;

Los intervalos a estudiar son: $(-\infty, -2)$; $(-2, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, +\infty)$; Ver tabla **??**, con el estudio de f′(x)

$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
$\mathrm{f}'(-4) = 0.889 > 0$	$\mathrm{f}'(-1.5) = -3.0 < 0$	$\mathrm{f}'(-0.5) = -3.0 < 0$	$\mathrm{f}'(2) = 0.889 > 0$
Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Tabla 1: *Estudio del signo de* $f'(x) = \frac{x^2+2\,x}{x^2+2\,x+1}$

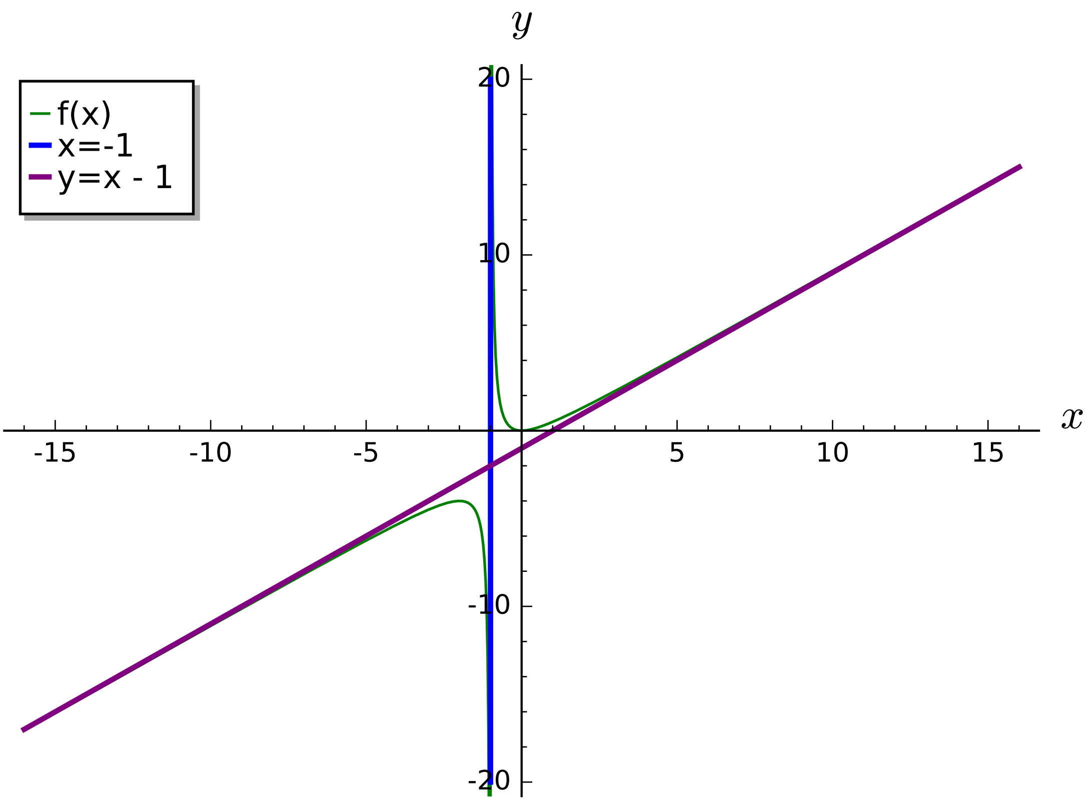

Figura 1: *Gráfica de la función.*

Lista de máximos y mínimos: obtenidos estudiando la monotonía a ambos lados de cada puntos, siempre que el punto esté en el dominio.

Criterio:

- *Si por un lado crece, y por el otro decrece, entonces será un mínimo.*
- *Si por un lado decrece, y por el otro crece, será un máximo.*
- *Si a ambos lados tiene el mismo comportamiento, no será un máximo ni un mínimo*

- El punto $x = -2$ es un máximo de la función.

- El punto $x = 0$ es un mínimo de la función.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.