Matemáticas aplicadas CCSS II - Apuntes de clase

Departamento de Matemáticas

Sa-Fa - 2023-2024

Colegio Sagrada Familia
de Moratalaz

Índice general

Capítulo I

Análisis

Función real de variable real

Definición I.1 **Función real de variable real.** *Una función real de una variable real es una aplicación definida entre dos conjuntos de números reales tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto.*

$f : D \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

- f*: símbolo de la función.*
- $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \diagup \exists f(x)\}$
- $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \diagup \exists x \in \mathbb{R} f(x) = y\}$

Ejercicio 1: *Halla el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+5x+4}{x+4}}$

Observación: *Ojo con simplificar.*

b) $f(x) = \sqrt{(x^2-9)}$

c) $f(x) = \log\left(-2x^2+10x-12\right)$

d) $f(x) = \log\left(x^2+1\right)$

..

Funciones de valor absoluto: (visto en pizarra)

I.1. Límites y continuidad

I.1.1. Introducción al concepto de límite

Visto con Eduardo.

I.1.2. Estudio analítico de límites

I.1.2.1. Propiedades de los límites

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\right)^p = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^p \quad \forall p \in \mathbb{R}$
5. $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0 \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a} \log f(x) = \log\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

Teorema I.1 (Teorema de existencia del límite).

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Ejercicio 1:

- *Página 123, ejercicio 20.*
- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\log(x-2)}{x-1}$
- *Sea* $f(x) = \begin{cases} x+3 & \textit{si } x > 0 \\ \frac{2x+3}{x+1} & \textit{si } x \leq 0 \end{cases}$ *Calcula:*

  $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

  $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

..

I.1.2.2. Indeterminaciones

- Racionales: ${}^0/_0, {}^\infty/_\infty, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, {}^k/_0$
- Exponenciales $1^\infty; 0^0; \infty^0$

De estas indeterminaciones, no veremos $0^0; \infty^0$ y de $0 \cdot \infty$ nos saldrá alguna en el sigueinte tema.

I.1.3. Asíntotas

I.1.3.1. Verticales

Asíntota vertical

Definición I.2 **Asíntota vertical**.

La recta $x = a$ *es* ***asíntota vertical*** *de* $f(x)$ $\iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \\ \text{ó} \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \end{cases}$

Ejercicio 2: *Estudia las asíntotas verticales de* $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ *y de* $g(x) = \log(x)$

I.1.3.2. Horizontales

Asíntota horizontal

Definición I.3 **Asíntota horizontal.**

La recta $y = b$ es ***asíntota horizontal*** *de $f(x)$ en $+\infty$ si y solo si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$

La recta $y = b$ es ***asíntota horizontal*** *de $f(x)$ en $-\infty$ si y solo si* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

I.1.3.3. Oblicuas

Asíntota oblicua

Definición I.4 **Asíntota oblicua.**

La recta $y = mx + n$ es ***asíntota oblicua***

$$\text{en } +\infty \text{ de } f(x) \iff \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m \cdot x) = n \end{cases}$$

La recta $y = mx + n$ es ***asíntota oblicua***

$$\text{en } -\infty \text{ de } f(x) \iff \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m \cdot x) = n \end{cases}$$

Observación: Las asíntotas oblicuas y horizontales son mutuamente excluyentes, es decir, no puede haber una asíntota horizontal y una oblicua simultáneamente en un extremo del dominio. Sí podría haber una asíntota horizontal en $+\infty$ y una oblicua en $-\infty$.

Ejercicio 3: *Estudia el comportamiento asintótico en $\pm\infty$ de las siguientes funciones:*

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \frac{x^2}{3x+1}$
- $f(x) = \frac{x^2}{3x^2+1}$
- $f(x) = \frac{x^2}{3x^3+1}$

..

Observación: Las funciones racionales tienen el mismo comportamiento asintótico en $+\infty$ que en $-\infty$

Ejercicio 4: *Funciones obtenidas de exámenes EvAU*

Estudia el comportamiento asintótico de las siguientes funciones

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

..

Proposición I.2 (Indeterminación 1^∞).

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \to 1^\infty \implies \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^\lambda, \lambda = \lim_{x\to a} \big(g(x)\cdot[f(x)-1]\big)$$

Demostración.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}(1+f(x)-1)^{g(x)}$$

$$= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)\frac{f(x)-1}{f(x)-1}}$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)}$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}$$

$\square$

Ejercicio 5: *Estudia el comportamiento asintótico de* $f(x) = \left(\frac{5x^2+1}{x+5x^2}\right)^x$ *en* $+\infty$

..

Ejercicio 6: *Estudia el comportamiento asintótico de* $f(x) = \left(\frac{5x^2+1}{x+5x^2}\right)^{x^n}$ *en* $+\infty$ *en función del parámetro* n.

El clásico parámetro de 2º Bach.

..

I.1.4. Continuidad

Continuidad en un punto

Definición I.5 **Continuidad en un punto**. *Sea* $f : D \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.

Se dice que $f(x)$ *es continua en* $x = a$ *sí y solo si se cumplen las 3 condiciones siguientes:*

- $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
- $\exists f(a)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

También se puede decir de manera abreviada:

$$f(x) \text{ continua en } x = a \iff \text{ existen y son iguales } \lim_{x \to a} f(x) \text{ y } f(a)$$

Ejercicio 7: *Halla el valor de* m *para que la función sea continua en* $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x+m}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aplicamos: "$f(x)$ continua en $x = 0$ si existen y son iguales $\lim_{x \to 0}$ y $f(0)$".

- $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$

- $\lim_{x\to 0} f(x)$. Para calcularlo necesitamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+m}{x+1} = \frac{2\cdot 0+m}{0+1} = m$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2\cdot x - 5 = -5$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -5 \iff m = -5 \text{ porque } \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = m \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -5 \end{cases}$$

- Si $m=-5$, $f(x)$ es continua en $x=0$.

Tipos de discontinuidad

$$\begin{cases} \text{Continua} \\ \text{Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{Esencial} \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ especie} \begin{cases} \text{Salto finito} \\ \text{Salto infinito} \end{cases} \\ 2^{\text{a}} \text{ especie} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Descripción:

- Evitables: $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ pero $\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \\ \text{o} \\ \nexists f(a) \end{cases}$

  Para evitarlas, se define una nueva función: $f(x) = \begin{cases} f(x) & x\neq a \\ b & x=a \end{cases}$

- Esenciales (o inevitables):
  - De primera especie:
    De salto finito: ambos límites laterales son finitos pero distinto.
    De salto infinito: al menos un límite lateral es infinito.
  - De 2ª especie: al menos un límite lateral no existe. $f(x)=\sqrt{x}$ y $f(x)=\log(x)$ en $x=0$.

Observación: Ver figura I.1.

Ejercicio 8: *Estudia la continuidad de la función del ejercicio 1 en el punto $x=0$:*

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x>0 \\ \frac{2x+3}{x+1} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

..

Continuidad en un intervalo abierto

Definición I.6 **Continuidad en un intervalo abierto.**

$f(x)$ es continua en $(a, b) \iff \forall x \in (a, b), f(x)$ es continua.

Continuidad por la izquierda y/o por la derecha

Definición I.7 **Continuidad por la izquierda y/o por la derecha.**

- *Una función (x) es continua por la derecha de a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(x)$*
- *Una función (x) es continua por la izquierda de a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(x)$*

Continuidad en un intervalo cerrado

Definición I.8 **Continuidad en un intervalo cerrado.**

$$f(x) \text{ es continua en } [a, b] \iff \forall x \in [a, b], \begin{cases} f(x) \text{ es continua en } (a, b) \\ \text{Continua por la derecha de } a \\ \text{Continua por la izquierda de } b \end{cases}$$

Ejemplo: *Dada $f(x) = +\sqrt{x}$.*

$f(x)$ es continua en su dominio, por ser función radical. $f(x)$ continua en $(0, \infty)$.

$f(x)$ no es continua en $x = 0$, pero sí es continua por la derecha en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ en $[0, \infty)$.

Funciones polinómicas	Continuas en $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x), Q(x)$ polinomios	Continuas en $\mathbb{R} - \{x \,/\, Q(x) = 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$\begin{cases} n \text{ impar: continua en } \mathbb{R} \\ n \text{ par: continua en } \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) \geq 0\} \end{cases}$
$f(x) = a^x$ con $a > 0$	Continua en $\mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$ (con $a > 0, a \neq 1$)	Continua en $\mathbb{R}$

Tabla I.1: *Continuidad de las funciones elementales*

Ejercicio 9: *Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades*

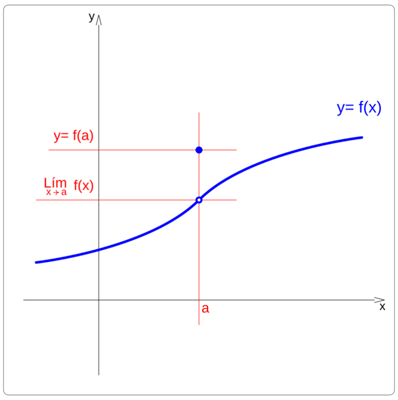

Figura I.1: *Ejemplo de discontinuidad evitable*

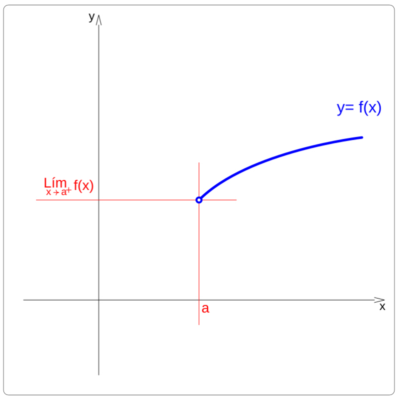

Figura I.2: *Ejemplo de discontinuidad de 2ª especie*

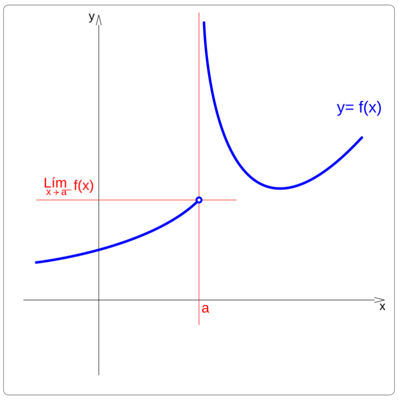

Figura I.3: *Ejemplo de discontinuidad de salto infinito*

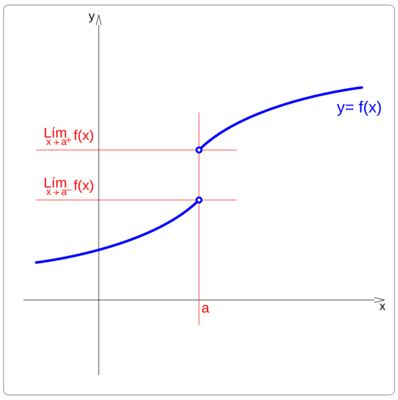

Figura I.4: *Ejemplo de discontinuidad de salto finito*

- $f_1(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$
- $f_2(x) = \begin{cases} \log x + 1 & x \leq -1 \\ x & x > 1 \end{cases}$

Teorema I.3 (Teorema de Bolzano). *Sea* $f : D \longmapsto \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \textit{ continua en } [a,b] \\ \textit{Signo}(f(a)) \neq \textit{Signo}(f(b)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \diagup f(c) = 0$$

Observación: Es una condición suficiente, no necesaria. Es decir, es $\Longrightarrow$. Por ejemplo, $f(x) = (x-1)^2$ corta en $x = 1$, pero no cumple las condiciones.

Ejercicio 10: *Demuestra que la ecuación* $x^3 - 7x^2 - 1$ *tiene al menos una solución real en el intervalo* $[0, 10]$.

Sea $f(x) = x^3 - 7x^2 - 1$. Se trata de demostrar que $\exists c \in [0,10] \diagup f(c) = 0$. Comprobamos que cumple el teorema de Bolzano.

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ es continua en } [0,10] \text{ por ser polinómica} \\ \left.\begin{array}{c} f(x) = -1 \\ f(10) = 299 \end{array}\right\} \Longrightarrow Signo(f(0)) \neq Signo(f(10)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (0,10) \diagup f(c) = 0$$

Teorema I.4 (Teorema del valor intermedio). *Sea* $f : D \longmapsto \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \textit{ continua en } [a,b] \\ \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} f(a) \leq k \leq f(b) \\ \text{ó} \\ f(b) \leq k \leq f(a) \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \diagup f(c) = k$$

Observación: Para $k = 0$, el teorema del valor intermedio se convierte en teorema de Bolzano.

Ejercicio 11: *Demuestra que las funciones $f(x) = \log(x + 10)$ y $g(x) = x$ se cortan en algún punto.*

Basta considerar la función $h(x) = f(x) - g(x) = \log_5(x + 10) - x$. Así, demostrar que las funciones se cortan será equivalente a demostrar que $\exists c \in \mathbb{R} \not h(x) = 0$.

Esta función es continua en $\mathbb{R}$, por ser resta de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Buscamos $c \in \mathbb{R} \not h(c) = 0$. Consideramos $h(-9) = -8 < 0$ y $h(0) = 1 > 0$.

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-9, 0) \not h(c) = 0$, por lo que podemos concluir que las funciones se cortan.

I.2. Derivadas y derivabilidad

I.2.1. Introducción y repaso

Pendiente de una recta

Definición I.9 **Pendiente de una recta**. *Sea la recta* $y = mx + n$.

Se define ***pendiente de la recta***, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Derivada en un punto

Definición I.10 **Derivada en un punto**. *Se define* $f'(a)$ *como la derivada de* $f(x)$ *en el punto* $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$(1) : h = x - a \iff x = a + h$

Ver figura ??.

Ejemplo: *Dada* $f(x) = |x|$, *calcula* $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Calculamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto, $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \iff \nexists f'(a)$

I.2.1.1. Interpretación geométrica de la derivada

Ver figura ??.

I.2.2. Derivabilidad

Derivabilidad en un punto

Definición I.11 **Derivabilidad en un punto.**

$$f(x) \text{ derivable en } x = a \iff \exists f'(a)$$

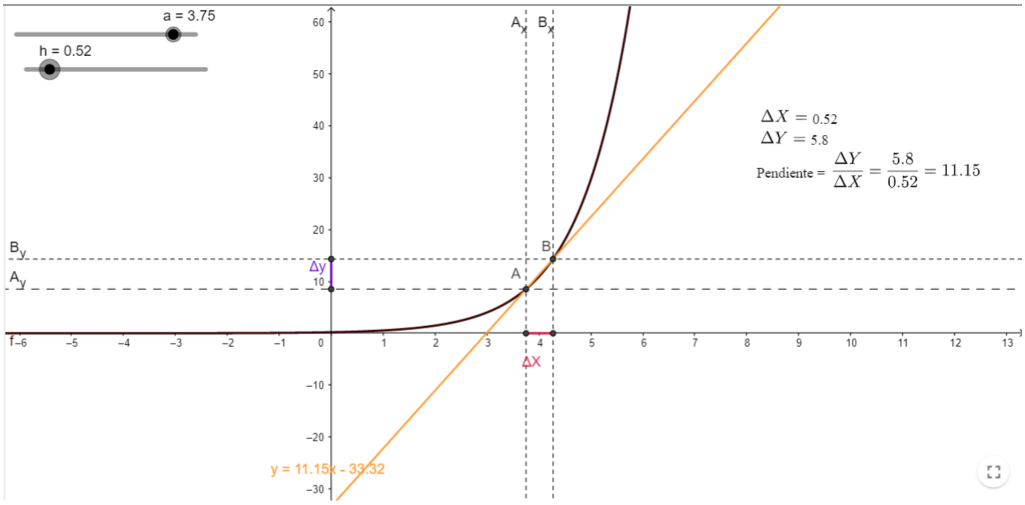

Figura I.5: *Interpretación geométrica de la derivada*
Cuando $h \to 0$, el punto B se acercará cada vez más al punto A, dando lugar a la recta tangente. Para una mejor comprensión consultar la versión de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/jwtw6mdt#material/f52nQ7T5

Proposición I.5. *$f(x)$ derivable en $x = a \implies f(x)$ continua en $x = a$*

***Observación**: El recíproco no es cierto. Basta comprobar el ejemplo I.2.1 ($f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no derivable en $x = 0$).*

Derivabilidad en un intervalo abierto

Definición I.12 **Derivabilidad en un intervalo abierto.**

$$f(x) \text{ derivable en } (a,b) \iff \forall c \in (a,b) \exists f'(c)$$

Dominio de derivabilidad

Definición I.13 **Dominio de derivabilidad**. *El dominio de derivabilidad de una función $f(x)$ es el mayor conjunto en el que la función es derivable.*

Ejemplo: *$f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.*

El dominio de derivabilidad de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

Derivabilidad lateral: De la misma manera que existía la *continuidad lateral*, también podemos hablar de *derivabilidad lateral*.

Derivada lateral

Definición I.14 **Derivada lateral**. *La derivada lateral de f en $x = a$ por la derecha, escrita $f'(a^+)$, si existe:*

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada lateral de f en $x = a$ por la izquierda, escrita $f'(a^-)$, si existe:

$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

***Observación**: Esta última igualdad se debe a que $h \to 0^- \implies h < 0$. Si resulta menos confuso, puede elegirse trabajar siempre con $h > 0$ y así los signos quedan explicitados.*

Ejercicio 1: *Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x \leq 0 \\ 3 \cdot \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ será derivable en $x = 0$ si $\exists f'(0)$. Dado que $f(x)$ está definida a trozos, calculamos las derivadas laterales.

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(0-h)^2 + 3\cdot(0-h) - (0^2+3\cdot 0)}{-h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h-3)}{-h} = +3$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot\frac{(0+h)^2+(0+h)}{0+h+1} - (0^2-3\cdot 0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot\frac{h^2+h}{h+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot h\cdot(h+1)}{h(h+1)} = 3$$

Conclusión: Dado que $f'(0^-) = f'(0^+) \implies f'(0) = 3$, por lo que la función es derivable en $x = 0$.

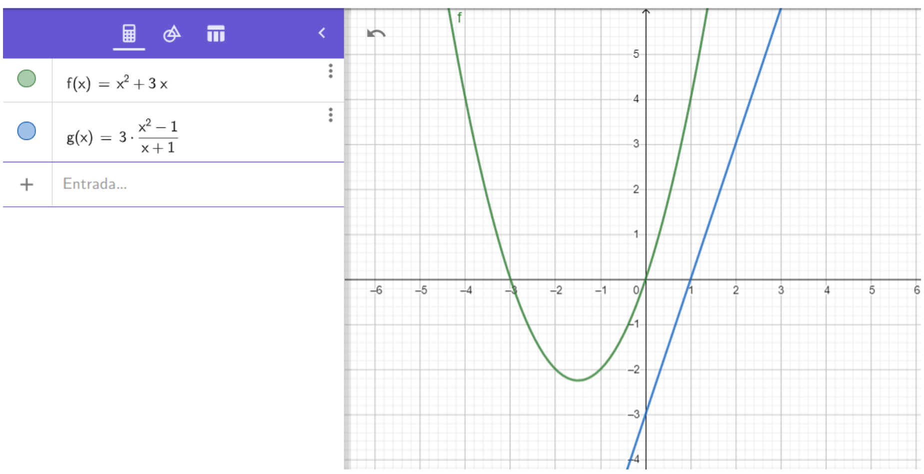

Figura I.6: *Representación gráfica del problema 2.*

Claramente la derivada en $x = 0$ no puede existir, dado que la función no es continua.

Observación: También podríamos haber calculado la derivada lateral por la izquierda de la siguiente manera:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+3\cdot h-(0^2+3\cdot 0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+3)}{h} = +3$$

Ejercicio 2: *Estudia la derivabilidad en $x=0$ de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x & \textit{si } x \le 0 \\ 3\cdot\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) & \textit{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ será derivable en $x = 0$ si $\exists f'(0)$. Dado que $f(x)$ está definida a trozos, calculamos las derivadas laterales.

..

Conclusión:

Observación: También podríamos haber calculado la derivada lateral por la izquierda de la siguiente manera:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+3\cdot h-(0^2+3\cdot 0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+3)}{h} = +3$$

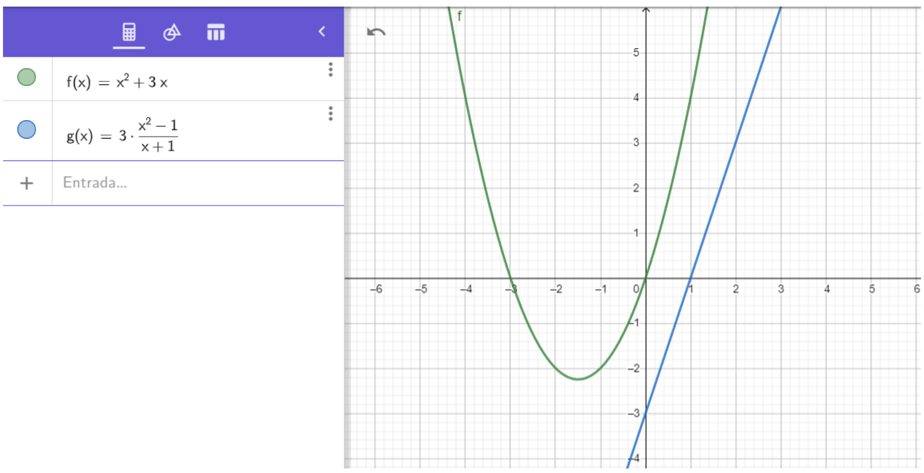

Figura I.7: *Representación gráfica del problema 2.*
Claramente la derivada en $x=0$ no puede existir, dado que la función no es continua.

Ejercicio 3: *¿Es la siguiente función derivable en $x = -2, x = 0, x = 2$?*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -4(x+1) & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 12x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

..

I.2.2.1. Función derivada

Función derivada

Definición I.15 **Función derivada**. *Dada $f : D(f) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Sea $Dv(f)$ el dominio de derivabilidad de f.*

La función derivada denotada por $f'(x) : Dv(f) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ hace corresponder a cada $a \in Dv(F)$ el valor $f'(a)$.

Observación: Nos saltamos todas las reglas de derivación porque ya las conoces.

Observación: Para estudiar la derivabilidad de una función a trozos en un punto $x = a$ puedes calcular la función derivada de cada rama y comprobar dos condiciones:

- Los límites laterales en $x = a$ de esa función derivada coinciden.
- $f(x)$ es continua en $x = a$

Observación de la observación: si estudias las derivadas laterales, no es necesario estudiar la continuidad puesto que, si la función no es continua, no será derivable.

¿Distingues "derivadas laterales" de "límites laterales de la derivada"? Son conceptos bastante diferentes

Ejercicio 4: *¿Es la siguiente función derivable en $x = -2, x = 0, x = 2$?*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -4(x+1) & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 12x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

..

Ejercicio 5: *Dada la función $f(x)$, calcula $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función sea derivable en $x = 1$, sabiendo que $f(0) = f(4)$.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ cx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución: $a = -{}^{7}/_{4}; b = 1; c = {}^{1}/_{4}$

I.2.3. Aplicaciones de la derivada

I.2.3.1. Recta tangente y recta normal

Ecuación de la recta tangente: Utilizando la ecuación de la recta punto-pendiente y la interpretación gráfica de la derivada (ver ??), se obtiene fácilmente la siguiente ecuación:

$$\text{Recta tangente a } f(x) \text{ en } x_0 \rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{I.1}$$

Ejercicio 6: *Calcula las rectas tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x$ en $x = 1$.*

Aplicamos: Recta tangente a $f(x)$ en $x_0 \rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Para ello, calculamos:

- $f(x_0) =$
- $f'(x)$

  $f'(x_0)$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos: ..

Ejercicio 7: *Demuestra que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación: $y = x^3 + 6x^2 + 8x$*

Consideramos $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$.

Buscamos $c \in \mathbb{R} \ / \ f'(c) = -1$.

$$3c^2 + 12c + 8 = -1 \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Los posibles puntos de tangencia son $P_1(c_1, f(c_1)) = (1, 3)$ y $P_2(c_2, f(c_2)) = (3, -3)$.

Es necesario comprobar que dichos puntos son realmente de tangencia, es decir, que pertenecen a la recta y a la gráfica.

$$P_1 : 3 \neq -1 \implies \text{ no pertenece a la recta}$$
$$P_2 : -3 = -3 \implies \text{ sí pertenece a la recta}$$

Conclusión: El punto de tangencia de la recta $y = -x$ a la gráfica $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ es $P_2(3, -3)$

Ecuación de la recta normal: Dos rectas dadas, en 2 dimensiones, $r: y = m_r x + n_r \quad ; \quad s: y = m_s x + n_s$ son perpendiculares si y sólo si $m_r \cdot m_s = -1 \iff m_s = {}^{-1}/_{m_r}$. Aplicando este resultado a la fórmula de la recta tangente anterior, tenemos:

$$\text{Recta normal a } f(x) \text{ en } x_0 \rightarrow y - f(x_0) = {}^{-1}/_{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad \text{(I.2)}$$

Ejercicio 8: *Calcula las rectas tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x$ en $x = 1$.*

Aplicamos: Recta normal a $f(x)$ en $x_0 \rightarrow y - f(x_0) = {}^{-1}/_{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

Para ello, calculamos:

- $f(x_0) =$
- $f'(x)$

  $f'(x_0)$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos: ..

I.2.3.2. Teoremas de derivabilidad

(Ver documento aparte)

Ejercicio 9: *Sea $f(x) = 2x^5 + x + a$. Demuestra que $\exists! c \in \mathbb{R} \ / \ f(c) = 0$*

Por el teorema de Bolzano, hay al menos una raíz real.

Veamos que es única. Si hubiera otra raíz real, d, tendríamos $f(c) = f(d)$ en una función continua en $[c, d] \subset \mathbb{R}$ y derivable en $(c, d) \subset \mathbb{R}$ por ser una función polinómica. Así, se puede aplicar el teorema de Rolle, argumentando que $\exists c \in \mathbb{R} \ / \ f'(c) = 0$, pero $f'(x) = 10x^4 + 1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Conclusión: dado que $f(x)$ cumple todas las hipótesis del teorema de Rolle, debemos concluir necesariamente que no hay otra raíz real d[1].

Ejercicio 10: *Considera la función $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.*

Calcula el valor del parámetro real a para el que se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$

[1] Sino, el teorema fallaría y eso no es posible.

$$g(x) = x \cdot e^{-x^2} + ax = x \cdot \left(a + e^{-x^2}\right)$$

Las hipótesis del teorema de Rolle son:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ continua en } [0,1] \rightarrow \text{ En este caso sí por ser suma de función polinómica y exponencial} \\ g(x) \text{ derivable en } (0,1) \rightarrow \text{ En este caso sí por ser suma de función polinómica y exponencial} \\ g(a) = g(b) \end{array}\right\}$$

Necesitamos que $g(0) = g(1)$.

$$0 \cdot \left(a + e^{-0^2}\right) = 1 \cdot \left(a + e^{-1^2}\right) \iff 0 = a + e^{-1} \iff a = -e^{-1}$$

Observación: Este problema salió en las noticias de 2019 porque se preguntó en la EVAU de valencia y los alumnos se enfadaron mucho.

Ejercicio 11:

17.2-MadA) *Estudia la derivabilidad en* $x = 0$ *de* $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{2x} & \textit{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \textit{si } x \geq 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$.

16.1-MadB) *Determina el polinomio* $f(x)$, *sabiendo que* $\forall x \in \mathbb{R} f'''(x) = 12$ *y además verifica* $f(1) = 3; f'(1) = 1; f''(1) = 4$.

16.1-MadB) *Estudie la continuidad y la derivabilidad en* $x = 0$ *y en* $x = 1$ *de* $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \leq 0 \\ |x \ln(x) & \textit{si} x > 0 \end{cases}$

I.2.3.3. Regla de L'Hôpital

(Ver documento aparte)

I.2.3.4. Monotonía

I.2.3.5. La segunda derivada: Curvatura

I.2.3.6. Optimización

I.3. Análisis sistemático de una función

I.4. Integrales

I.4.1. Primitivas

I.4.2. Cálculo de áreas de recintos cerrados

Índice alfabético

Índice de figuras

Índice de tablas