Matemáticas II - Apuntes de clase

Departamento de Matemáticas

Sa-Fa - 2022-2023

Colegio Sagrada Familia
de Moratalaz

Índice general

Capítulo I

Probabilidad y Estadística

I.1. Probabilidad

Los sucesos en probabilidad se escriben entre comillas y se representan con una letra mayúscula.

mal $I =$ impar

mal $I =$ probabilidad de sacar un número impar

mal $I =$ "Probabilidad de sacar un número impar"

bien $I =$ "Sacar un número impar"

Operaciones con conjuntos (o sucesos)

$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$ (Unión)

$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$ (Intersección - Probabilidad compuesta)

$A^c = \overline{A} = \{x \notin A$ (Complementario) *No se llama contrario.*

$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$ (Diferencia)

Observación: $A - B = A \cap \overline{B}$

Leyes de de Morgan

Definición I.1 **Leyes de de Morgan**.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Compatibilidad

Definición I.2 **Compatibilidad**. *Sean A, B dos sucesos.*

Son compatibles si $A \cap B \neq \emptyset$. Son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Sistema completo de sucesos

Definición I.3 **Sistema completo de sucesos**. *Sean $A_1, ..., A_n$ sucesos de un cierto experimento aleatorio. Se dice que forman un sistema completo de sucesos del espacio muestral E cuando:*

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1...n$

Ejemplo: *Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ¿Son sistemas completos de sucesos las siguientes agrupaciones?*

- $A_1 = \{1, 2, 3\}; A_2 = \{4, 5\}; A_3 = \{6\}$
- $A_1 = \{\textit{múltiplos de 3}\}; A_2 = \{\textit{números pares}\}; A_3 = \{1, 5\}$

Proposición I.1. *Sea $A_1, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Regla de Laplace

Definición I.4 **Regla de Laplace**. *Si los sucesos elementales de un experimento aleatorio son* ***equiprobables****, entonces, $P(A) = \frac{\textit{casos favorables}}{\textit{casos posibles}}$*

Observación: ¿Y si no son equiprobables?

Probabilidad Ley de los grandes números

Definición I.5 **Probabilidad Ley de los grandes números**. *Sea A un suceso y $h(A)$ su frecuencia de ocurrencia relativa*[1] *en n repeticiones del experimento. Entonces*

$$P(A) = \lim_{n \leftrightarrow \infty} h(A)$$

Probabilidad Axiomática de Kolmogorov

Definición I.6 **Probabilidad Axiomática de Kolmogorov**. *Sea p una función que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S un número real designado por $p(A)$.*

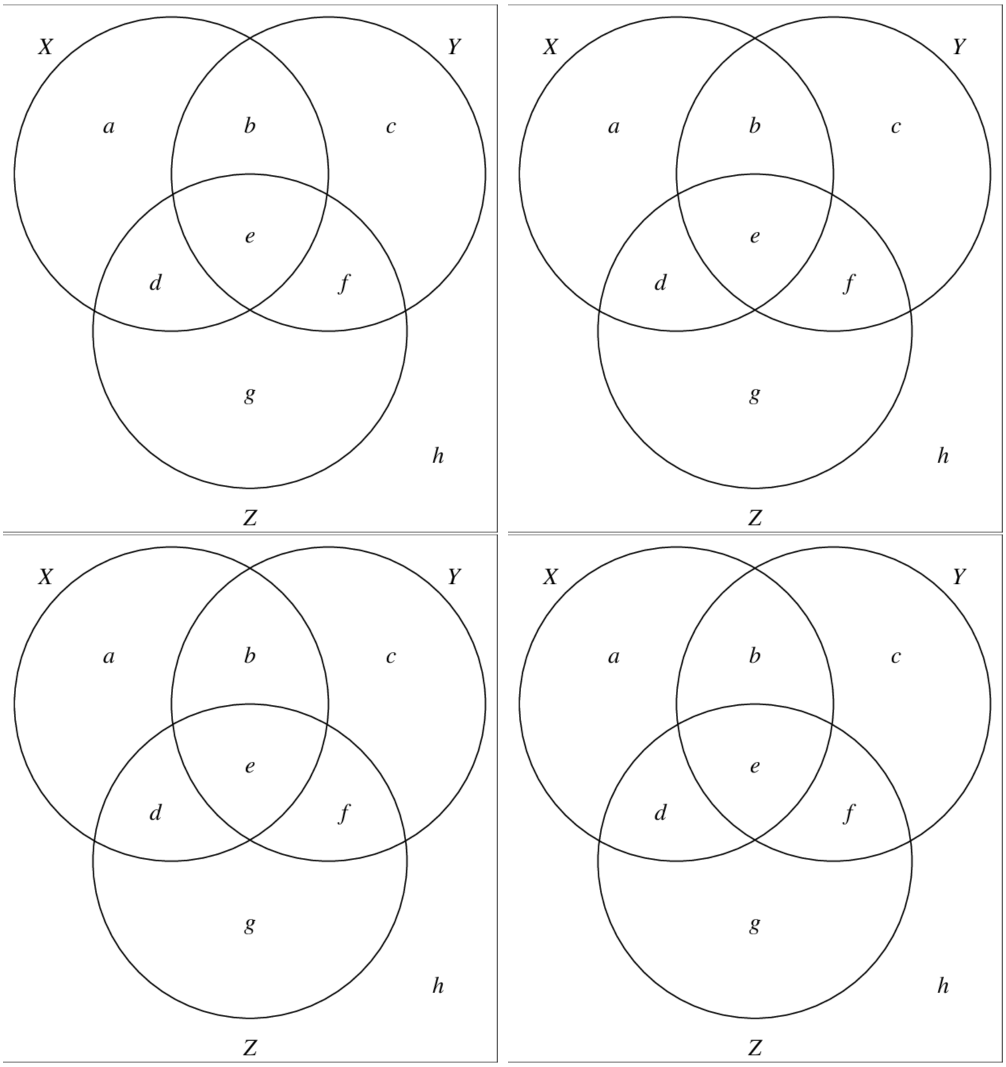
Decimos que p es una probabilidad si cumple las siguientes propiedades:

- $0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall A \in S$
- $p(E) = 1$
- $A \cap B = \emptyset \implies p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

[1] El porcentaje de veces que ese suceso ocurre.

Propiedades de la probabilidad: Sea A un suceso cualquiera:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Probabilidad condicionada

Definición I.7 **Probabilidad condicionada**. *Sean A, B sucesos de un suceso aleatorio.*

Se define la probabilidad condicionada $p(A/B)$ como la probablidad de que se produzca A si sabemos que se ha producido B.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Este es un buen momento para hacer algún ejercicio. Página 349, ejer 36 por ejemplo. Recordamos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Independencia de sucesos

Definición I.8 **Independencia de sucesos**. *A, B son sucesos independientes si y sólo si*

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A)$$

Teorema I.2.

$$A, B \text{ independientes} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Demostración.

$$\left.\begin{array}{r} P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \iff P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \\ A, B \text{ independientes} \iff P(A/B) = P(A) \end{array}\right\} *$$

$$(*) \implies P(A \cap B) = P(B) \cdot \underbrace{P(A)}_{P(A/B)} = P(B) \cdot P(A)$$

□

Teorema I.3 (Teorema Probabilidad Total). *Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos y sea B otro suceso.*

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B) =$$

$$P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Teorema I.4 (Teorema de Bayes).

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Demostración.

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \\ P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \end{array}\right\} \implies P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \iff$$

$$\iff P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

□

Bayesian trap (obtenido de youtube.com/Veritasium)

Ejemplo: *Se sabe que una enfermedad rara sólo afecta al 1 % de la población. El porcentaje de falsos positivos de las pruebas médicas es del 10 %, y el porcentaje de falsos negativos es del 1 %.*

Intuitivamente, ¿cuál dirías que es la probabilida de tener la enfermedad sabiendo que has dado positivo en el test? ¿Podrías calcularlo numéricamente?

Los datos son: $P(E) = 0.01$, $P(-|E) = 0.01$ *y* $P(+|\overline{E}) = 0.1$

Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(E|+) = \frac{P(+|E) \cdot P(E)}{P(+)} = \frac{P(+|E) \cdot P(E)}{P(+|E) \cdot P(E) + P(+|\overline{E}) \cdot P(\overline{E})} = 0.01$$

I.2. Distribuciones de probabilidad

Introducimos el tema con 4 preguntas que iremos contestando a lo largo del tema. Acabaremos el tema cuando sepamos contestar a las 4 preguntas.

- ¿Probabilidad de sacar 2 caras en 4 lanzamientos? Lo resolvemos como un árbol.
- ¿Probabilidad de sacar 2 caras en 10 lanzamientos? Binomial. Contestamos esta pregunta y deducimos la fórmula de la binomial. Algunos ejemplos más para interiorizar la intuición de la binomial.
- ¿Probabilidad de sacar exactamente 120 caras en 2000 lanzamientos? Casi 0.
- ¿Probabilidad de sacar menos de 120 caras en 2000 lanzamientos? Normal.

Ejemplo: *Tiramos un dado de 6 caras 10 veces.*

- *Calcula la probabilidad de sacar 1 uno.*
- *Calcula la probabilidad de sacar 2 unos.*

Se resuelve utilizando la lógica y la combinatoria.

Desde el ejemplo, generalizamos para obtener la fórmula general.

2 ejercicios de cálculo de binomial para entender la fórmula.

Dada la fómrula, desde el libro, vamos viendo las definiciones de probabilidad. Esperanza(media) y varianza: ¿cuántas caras podemos esperar en 10 lanzamientos? Si el experimento de tirar 10 monedas lo hago 10000 veces, podría hacer la media.

¡Unión de la probabilidad y de la estadística! Hago cosas de estadística (varianza, esperanza-media) con probabilidades.

I.3. Distribuciones de probabilidad

Variables aleatorias

Definición I.9 **Variables aleatorias**. *Una v.a. asociada a un experimento aleatorio es una* *variable que a cada suceso elemental del espacio muestral le asigna un número* Sucesos de tirar 10 veces una moneda: "CCCCCCC..", "ZZZZ....","CZCZCZCZ...". Necesitamos asignar a cada suceso un número. Podríamos llamar "X" al número de caras obtenidas. "X" sería una variable aleatoria.

- **Discretas:** puede asignar un número de valores finito. La más importante es la binomial.
- **Continuas:** puede asignar un número de valores infinito. La más importante es la normal.

Distribución binomial

Definición I.10 **Distribución binomial**. *Una variable aleatoria "X" sigue una distribución binomial con parámetros n y p (se escribe $X \equiv B(n,p)$) cuando se basa en un experimento aleatorio que se repite n veces y que sólo tiene 2 posibles resultados:*

- ***Éxito:*** *que incrementa la variable aleatoria.*
- ***Fracaso:*** *no incrementa la variable aleatoria.*

Esperanza y varianza *Aquí confluyen la estadística y la probabilidad ya que podemos hablar de "medias" (esperanza) y varianza de variables aleatorias. Es la intersección de estadística y probabilidad.*

La esperanza matemática es el número de éxitos que podemos esperar que ocurran si repitiéramos el experimento origen de la v.a. X un nº infinito de veces. Sería la media de los resultados: $E[X] = np$

La varianza mide la dispersión de los datos. $V[x] = np(1-p)$

Ejercicios y ejemplos. Página 369 el 9 y el 10.

Distribución normal

Definición I.11 **Distribución normal**. *Una v.a. X sigue una distribución normal de parámetros μ [media[2]] y σ [desviación típica] cuando la probabilidad de que tome valores entre "a" y "b" es igual al área comprendida por la gráfica de la campana de Gauss (en función de μ y σ) entre el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.*

Observación: Esta distribución es continua.

Observación: La campana de Gauss tiene esta forma y viene definida por la fórmula:

$$f(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Función de probabilidad

Definición I.12 **Función de probabilidad**. *Sea X una variable aleatoria. Llamamos función de probabilidad a $P(x = k)$.*

[2] Tal vez fuera más técnico llamarla esperanza

Observación: La "formulita" de la binomial es una función de probabilidad.

Observación: $X \equiv N(\mu, \sigma) \implies P(x = k) = 0$ (por ser una distribución continua).

Función de distribución

Definición I.13 **Función de distribución**. *Sea X una variable aleatoria. Llamamos función de distribución $F(x) = P(x \leq k)$.*

Observación: ¿Por qué existe la función de distribución? Dado que la probabilidad puntual de la normal es prácticamente 0 en todos los casos, al trabajar con la distribución normal, trabajaremos con su función de distribución.

Para ello, utilizaremos la tabla de la distribución normal. En ella se encuentran los valores de la función de distribución dados números reales con 2 decimales.

Explicación de la tabla *con algún ejemplo*

Observación: $X \equiv N(\mu, \sigma)$. Si $P(X = k) = 0 \implies P(x < k) = P(x \leq k)$

Observación: ¿Cómo utilizo la tabla si $X \equiv N(\mu, \sigma)$?

Tipificación

Definición I.14 **Tipificación**. *Tipificar consiste en convertir en típica ($\mu = 0, \sigma = 1$) una distribución normal cualquiera.*

Si $X \equiv N(\mu, \sigma) \implies Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} \equiv N(0, 1)$

Ejemplo: $X \equiv N(3, 8)$. *Calcula*

- $P(X \leq 5)$
- $P(X \leq 3)$
- $P(X > 6) = P\left(\frac{X-3}{8} > \frac{6-3}{8}\right) = P(Z > {}^{3}/_{8}) = 1 - P(Z \leq {}^{3}/_{8}) = ...$
- $P(X > 2) = P\left(\frac{X-3}{8} > \frac{2-3}{8}\right) = P(Z > {}^{-1}/_{8})$ *¿Suceso contrario? No gano nada. Vamos a por otro argumento:*

  Simetría

  Simetría $P(Z > {}^{-1}/_{8}) = P(Z < {}^{1}/_{8}) = ...$
- $P(X < 2) = P\left(\frac{X-3}{8} < \frac{2-3}{8}\right) = P(Z < {}^{-1}/_{8}) = P(Z > {}^{1}/_{6}) = 1 - P(Z \leq {}^{1}/_{6}$
- $P(1 < X < 8) = P(X < 8) - P(X < 1) = ...$

373.19 + problemita de la normal.

I.3.1. Aproximación de la binomial por la normal

PPT del departamento.

Capítulo II

Álgebra (Matrices y determinantes)

II.1. Matrices

Definición de matriz

Operaciones con matrices

Traspuesta Ejercicio: **Demuestra que cualquier matriz puede escribirse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica**

Producto de matrices

II.1.1. Matriz inversa

Se puede calcular de 3 formas. Definición, Gauss-Jordan y matriz adjunta. Vamos a ver ahora los 2 primeros métodos.

Definición y propiedades

II.1.2. Algunas ecuaciones matriciales sencillas

Gauss-Jordan La base del método de Gauss es que toda transformación lineal de Gauss se puede expresar como una matriz. Simplemente buscamos la matriz que transforma la matriz dada en la identidad. Para ello, ponemos la identidad a la derecha. (Espero que leyendo esta explicación te hayas enterado)[1]

[1] Puedes encontrar aquí una respuesta más elaborada.

II.1.3. Utilidades: Grafos

II.2. Determinantes

Determinante *Definición II.1* **Determinante.** $| \; | : \mathcal{M}_n \longmapsto \mathbb{R}$

II.2.1. Cálculo de determinantes de orden 3

II.2.2. Propiedades

II.2.3. Cálculo de determinantes de orden 4 o más

Menores, Gauss

II.2.4. Matriz inversa por determinantes

II.2.5. Ecuaciones matriciales a tope

II.2.6. Rango

Gauss

Determinantes Si $|A| \neq 0$, significa que no hay 2 filas (ni 2 columnas) linealmente independientes. Si las hubiera, $|A| = 0$.

Por lo tanto, si $|A| \neq 0 \iff rg(A) = \text{ máx}$

¿Qué ocurre si $A \notin \mathcal{M}_n$?

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, cogiendo $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$*, pero* $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$*, por lo que estas 2 filas tienen que ser linealmente independientes, por lo que la matriz tiene rango 2.*

También valdría argumentarlo desde $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Proposición II.1 (Cálculo del rango por menores). *Sea M_p un menor de orden p de la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$*

$$\exists M^p \text{ tal que } M_p \neq 0 \iff rg(A) \geq p$$

$$\forall M^p \;\; M_p = 0 \iff rg(A) < p$$

II.2.6.1. Matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Determinante: El determinante se calcula con la siguiente fórmula:

$$\left|V\right| = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \underbrace{\overbrace{(3-2)}^{j=2}\overbrace{(4-2)}^{j=3}\overbrace{(5-2)}^{j=4}}_{i=1}\underbrace{\overbrace{(4-3)}^{j=3}\overbrace{(5-3)}^{j=4}}_{i=2}\underbrace{\overbrace{(5-4)}^{j=4}}_{i=3} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Demostración. [por Inducción]

Base: n=2 Es fácil notar que en el caso de una matriz de 2×2 el resultado es correcto.

$$\left|V\right| = v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1} = \alpha_2 - \alpha_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Paso Suponiendo cierta la fórmula para el caso $n-1$, procedemos a calcular el determinante de orden n. Para ello, basta con realizar la siguiente operación elemental sobre cada columna: $C_j \to C_j - (\alpha_1 \times C_{j-1})$. Esta operación no afecta al determinante, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$\left|V\right| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ 1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila:

$$\left|V\right| = \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

Extrayendo de cada fila un factor, obtenemos:

$$\left|V\right| = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\dots(\alpha_n-\alpha_1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-2} \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \dots & \alpha_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{(1)}$$

(1): es una matriz de Vandermonde de orden $n-1$, por lo que podemos aplicar la fórmula por la hipótesis de inducción, quedando así demostrada la fómrula del determinante de Vandermonde para orden n □

II.3. Sistemas de ecuaciones

Sistemas, expresión matricial de sistemas.

Rouché-Frobenius, corregimos.

Resolución de sistemas escalonados y método de Gauss Jordan.

"Repaso" de Sistema Compatible Indeterminado. 2 sistemas resueltos por mi. El primero con ecuaciones. El segundo con matricial.

Ejercicio 1:

Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +2y & -2z & = & 4 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +2y & -2z & = & 4 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} x & +2y & -2z & = & 4 \\ & y & +2z & = & 2 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 \end{array}\right\} \overset{(2)}{\iff}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +2y & -2z & = & 4 \\ & y & +2z & = & 2 \\ & y & +2z & = & 2 \end{array}\right\} \iff \underbrace{\left\{\begin{array}{ccccc} x & +2y & -2z & = & 4 \\ & y & +2z & = & 2 \end{array}\right\}}_{\text{Discusión: C.I (*)}}$$

(*): Es un sistema compatible indeterminado porque es un sistema escalonado con más incógnitas que ecuaciones.

Al ser compatible indeterminado, el sistema tiene infinitas soluciones (que no se calculan en 1º de Bachillerato).

Resolución: Aunque un sistema de ecuaciones Compatible Indeterminado tiene infinitas soluciones, no cualquier trío de números es solución. Por ejemplo, en este caso, la terna $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ no es solución. **Infinitas soluciones no significa que todo sea solución**.

La pregunta lógica sería, ¿cómo podemos escribir **todas** las soluciones del sistema? Utilizando un parámetro. Al dar un valor a una incógnita, ya forzamos los otros 2 valores. Para cada valor inventado de x, solo hay un único valor posible de y y de z (normalmente).

En este caso, vamos a dar un valor concreto a y, pero en forma de parámetro. Tomamos $y = \lambda$ y sustituimos en E_2.

$$y + 2z = 2 \iff \lambda + 2z = 2 \iff z = \frac{2-\lambda}{2}$$

Sustituimos $y = \lambda, z = \frac{2-\lambda}{2}$ en E_1:

$$x+2y-2z = 4 \iff x = 4+2z-2y = 4+2\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)-2\lambda = 4+2-\lambda-2\lambda = 6-3\lambda = 3(2-\lambda)$$

Solución: $(x, y, z) = \left(3(2-\lambda), \lambda, \frac{2-\lambda}{2}\right)$

1) $E_2 = E_2 - 2E_1$

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & +4y & -4z & = & 8 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 \\ \hline & -y & -2z & = & -2 \end{array}\right\}$$

2) $E_3 = E_2 - 4E_1$

$$\left\{\begin{array}{cccc} 4x & +9y & -6z & = & 18 \\ 4x & +10y & -4z & = & 20 \\ \hline & -y & -2z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Comprobación: Sustituimos $(x, y, z) = \left(3(2-\lambda), \lambda, \frac{2-\lambda}{2}\right)$ en el sistema inicial:

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +2y & -2z & = & 4 & \to 6-3\lambda+2\lambda-2\left(\dfrac{2-\lambda}{2}\right) = 6-\lambda-2+\lambda = 4 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 & \to 12-6\lambda+5\lambda-2\left(\dfrac{2-\lambda}{2}\right) = 12-\lambda-2+\lambda = 10 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 & \to 24-12\lambda+9\lambda-6\left(\dfrac{2-\lambda}{2}\right) = 24-3\lambda-6+3\lambda = 18 \end{array}\right\} \text{ cqc}$$

Ejercicio 2:

Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 3x & -y & +z & = & 3 \\ 6x & -2y & +2z & = & 6 \\ -3x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 3x & -y & +z & = & 3 \\ 6x & -2y & +2z & = & 6 \\ -3x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

Ojo con el cambio de columnas $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Tiene grado de indeterminación 2, por lo que necesitaremos 2 parámetros.

Llamamos $x = \lambda$ e $y = \mu$ con $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ y sustituimos para hallar z.

$$z - y + 3x = 3 \Longrightarrow z - \mu + 3\lambda = 3 \Longleftrightarrow z = 3 + \mu - 3\lambda$$

Solución: $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 3 + \mu - 3\lambda)\,, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ejercicio 59 de deberes.

Resolución por inversa de stma. ¿Funciona siempre? Sólo en sistemas de Cramer, es decir, matriz de coeficientes cuadrada con rango máximo.

Deberes el 15b,16b.

II.3.1. Regla de Cramer

En todos los sistemas cuya matriz de coeficientes tenga inversa, puede generalizarse el método de la inversa.

Así, $Ax = B \Longleftrightarrow x = A^{-1} \cdot B$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(\text{Adj}(A)\right)^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \dots A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \dots A_{n2} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + A_{3n}b_3 \dots A_{nn} \cdot b_n \end{pmatrix}$$

Deberes : 21b, 22b

Corregimos Cramer.

Inconvenientes: ¿y si es incompatible?

Numéricos: 61a,b;62a,b

Parámetros:64a,c (ojo con eliminar una solución)

Deberes para el punete: 57,60

Capítulo III

Geometría analítica

III.1. Espacio vectorial

Espacio vectorial

Definición III.1 **Espacio vectorial**. *Un espacio vectorial es una estructura algebraica,* $(\mathcal{V}, +, \cdot)$*, donde* $\mathcal{V}$ *es un conjunto cualquiera y* $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}$ *y* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}$

Las operaciones + y · deben cumplir las siguientes propiedades:

- $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}, \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ *(asociativa)*
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}, \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ *(conmutativa)*
- $\exists \overrightarrow{0} \in V : \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u} \in V$ *(elemento neutro)*
- $\forall \overrightarrow{u} \in V, \quad \exists \overrightarrow{-u} \in V : \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{-u}) = \overrightarrow{0}$ *(elemento opuesto)*
- $a \cdot (b \cdot \overrightarrow{u}) = (a \cdot b) \cdot \overrightarrow{u}, \forall a, b \in K, \forall \overrightarrow{u} \in V$
- $\exists e \in K : e \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{u} \in V$ *(elemento neutro del producto)*
- $a \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a \cdot \overrightarrow{u} + a \cdot \overrightarrow{v}, \forall a \in K, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ *(propiedad distributiva)*
- $(a + b) \cdot \overrightarrow{u} = a \cdot \overrightarrow{u} + b \cdot \overrightarrow{u}, \forall a, b \in K, \forall \overrightarrow{u} \in V$ *(propiedad distributiva)*

En nuestro caso, el espacio vectorial con el que trabajaremos será $\mathcal{V}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{R}$, siendo la operación + la suma de vectores habitual y · el producto por un **escalar real**.

Los elementos de $\mathcal{V}^3$ se denominan vectores y son ternas de números (reales) con los que se pueden hacer operaciones. Escribiremos $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Ejemplo: *Recordamos: Sean* $u_1 = (1, 2, 3)$ *y* $u_2 = (0, 1, -2)$*, tenemos:*

- $u_1 + u_2 = (1 + 0, 2 + 1, 3 - 2) = (1, 3, 1)$
- $-u_2 = (0, -1, 2)$
- $u_1 - u_2 = u_1 + (-u_2) = (1, 2, 3) + (0, -1, 2) = (1, 1, 1)$

- $2 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 = (2,4,6) + (0,3,-6) = (2,7,0)$

Combinación lineal de vectores

***Observación**: A esta operación la llamamos **combinación lineal de vectores**.*

Observación: Las matrices también forman un espacio vectorial. Ver libro página 179.

Observación: Todavía no hemos definido nada de producto de vectores. *Explicación de porqué el orden seguido es diferente*

Observación: Todavía no hemos hablado (ni lo vamos a hacer de momento) de vectores libres y vectores fijos.

III.1.1. Bases de espacios vectoriales y coordenadas

Subespacio generado

Definición III.2 **Subespacio generado**. *Sean $G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial.*

Llamamos subespacio generado al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de G.

Sistema de generadores

***Observación**: Llamaremos a G **Sistema de generadores**.*

Ejemplo: *Dado $G = \{(1,2,1),(0,0,1)\}$. ¿Podemos decir que $\overrightarrow{a} = (2,2,3) \in G$? ¿Y que $\overrightarrow{b} = (1,2,0) \in G$?*

a) $\overrightarrow{a} = (2,2,3)$

b) $\overrightarrow{b} = (1,2,0)$

Ejemplo: *Siempre que tengamos un origen de coordenadas y un sistema de referencia...*

- *El subespacio generado por un vector sería una recta.*
- *El subespacio generado por 2 vectores sería un plano.*
- *El subespacio generado por 3 vectores sería el espacio.*

Un concepto fundamental a la hora de trabajar con vectores es la "base del espacio vectorial". (Libro página 257)

Base de un espacio vectorial

Definición III.3 **Base de un espacio vectorial**. *Un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base de $\mathcal{V}^3$ si:*

- *Son linealmente independientes.*

- *El subespacio que generan es $\mathcal{V}^3$. (Es decir, que cualquier vector de $\mathcal{V}^3$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores de la base).*

Dimensión de un espacio vectorial

Definición III.4 **Dimensión de un espacio vectorial**. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una base del mismo.*

*Llamamos **Dimensión** del espacio vectorial al número de vectores de $\mathcal{B}$.*

En este curso, para saber si un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial, basta comprobar que son linealmente independientes y que hay tantos vectores linealmente independientes como dimensión tiene el espacio vectorial.

Ejercicio 1:

Determina si los siguientes conjuntos son bases de $\mathcal{V}^3$ (que tiene dimensión: 3)

a) $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$

b) $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

c) $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$

d) $\mathcal{B}_4 = \{(1,0,3),(1,2,-1),(0,1,2)\}$

e) $\mathcal{B}_5 = \{(2,-1,5),(1,-2,-4),(4,-5,-3)\}$

Apartado a)

$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$

No es base porque hay vectores de $\mathcal{V}^3$ que no se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_1$, por ejemplo, $(0,1,0)$

Apartado b)

$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Sí es una base porque $\mathcal{B}_2$ tiene 3 vectores linealmente independientes: $Rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 3.$

Apartado c)

$\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$

No es una base porque el vector $(1,1,1)$ se puede expresar como combinación lineal de los 3 primeros.

Así, aunque $Rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} = 3$, no podríamos decir que $\mathcal{B}_3$ fuera una base. Solo podríamos decir que es un **Sistema de generadores de** $\mathcal{V}^3$

Apartado d)

$\mathcal{B}_4 = \{(1,0,3),(1,2,-1),(0,1,2)\}$

Estudiamos $\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Buscamos si tiene rango máximo. Para ello, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies$ por lo que podemos decir que son linealmente independientes[1]. Así, tenemos 3 vectores linealmente independientes, por lo que podemos decir que **sí son una base de $\mathcal{V}^3$.**

Apartado e)

$\mathcal{B}_5 = \{(2,-1,5),(1,-2,-4),(4,-5,-3)\}$

Estudiamos $\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Su determinante es 0, por lo que no tiene rango 3, por lo que no son linealmente independientes.

Observación: También podríamos haber estudiado $\left(\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}\right)$

Coordenadas de un vector

Definición III.5 **Coordenadas de un vector**. *Sea $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3\}$ es una base de $\mathcal{V}$.*

Si $\overrightarrow{u} = c_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + c_3 \overrightarrow{b_3}$, decimos que (c_1, c_2, c_3) son las coordenadas del vector $\overrightarrow{u}$ en la base $\mathcal{B}$.

Observación: "Sea el vector $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$" deja de tener sentido, ya que necesitamos estar refiriéndonos a una base. Por ello, a partir de ahora, intentaremos escribir los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, dejando bien claro en qué base estamos trabajando.

Notación: $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ forman la base canónica, con $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$; $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$; $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$

Ejercicio 2:

Sea $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1,1,1), u_2(0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1,2,3), w_2 = (1,1,0), w_3 = (3,-1,1)\}$

***a)** Si $\overrightarrow{z} = (2,-2,1)$ son las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$, halla las coordenadas de $\overrightarrow{z}$ en la base canónica.*

***b)** Si $\overrightarrow{q} = (2,-2,1)$ son las coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$, halla las coordenadas de $\overrightarrow{q}$ en la base canónica.*

***c)** Halla las coordenadas de $\overrightarrow{z}$ en $\mathcal{B}_2$*

[1] Si no lo fueran, el determinante sería 0

Observación: *El vector $\overrightarrow{u_1}$ de la base $\mathcal{B}_1$ son las coordenadas respecto de una base concreta. Si no se dice nada, suponemos la canónica.*

Cambios de base APARTADO A)

$$\overrightarrow{z}_1 = 2\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = 2 \cdot (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) - 2 \cdot (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = (2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k})$$

Este $\overrightarrow{z}_c = (2, 0, 3)$ son las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base canónica.

APARTADO B)

$$\overrightarrow{q}_1 = 2\overrightarrow{w_1} - 2\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{w_3} = 2 \cdot (\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) - 2 \cdot (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + 3(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$$

Este $\overrightarrow{q} = (2, 0, 3)$ son las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base canónica.

APARTADO C)

Buscamos $\overrightarrow{z} = (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}) = c_1(1, 2, 3) + c_2(1, 1, 0) + c_3(3, -1, 1)$.

$$2 \cdot (1, 1, 1) - (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = c_1(1, 2, 3) + c_2(1, 1, 0) + c_3(3, -1, 1) \iff \left\{ \begin{array}{l} 2 = c_1 + c_2 + 3c_3 \\ 1 = 2c_1 + c_2 - c_3 \\ 3 = 3c_1 \qquad + c_3 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, obteniendo: $(x, y, z) = \left({}^{6}/_{13}, {}^{11}/_{13}, {}^{-3}/_{13}\right)$

Estas son las coordenadas de $\overrightarrow{z}$ en la base $\mathcal{B}_2$

Problemas recomendados, especialmente 267.48,49 + 269.60,61:

- Página 267.48,49
- Página 269.56-65
- Página 271.102,103

III.2. Geometría afín

III.2.1. Vectores y sistemas de referencia

III.2.2. Ecuaciones de la recta y del plano

Observación: Dado que la única manera que tenemos de determinar los puntos es a través de vectores de posición, utilizaremos $\overrightarrow{p} = (x, y, z)$ de forma equivalente a $[\overrightarrow{OP}]$

para referirnos a un punto cualquiera del espacio, al que accedemos a través de su vector de posición.

Formas de determinar una recta:

1. Un punto (o su vector de posición) y un vector director.

   Dos puntos (se reduce al caso anterior)

   Un punto y una condición de paralelismo (se reduce al primer caso)

2. Dos planos secantes.

3. Un punto y un plano perpendicular (se verá en geometría euclídea).

Observación: Como todo con lo que vamos a trabajar son operaciones con vectores con coordenadas en un sistema de referencia, en realidad el punto de origen del sistema de referencia no es relevante.

III.2.2.1. Ecuaciones de la recta

Ecuación vectorial de la recta

La **ecuación vectorial de la recta** r determinada por el punto $A \in \mathcal{E}_3$, cuyo vector de posición es $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}^3$, con vector director $\overrightarrow{u_r} \in \mathcal{V}^3$ es

$$r : \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{u_r}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}, \forall P \in \mathcal{E}_3$ (ver figura III.1) De esta manera quedan determinados los vectores de posición de todos los puntos de la recta r.

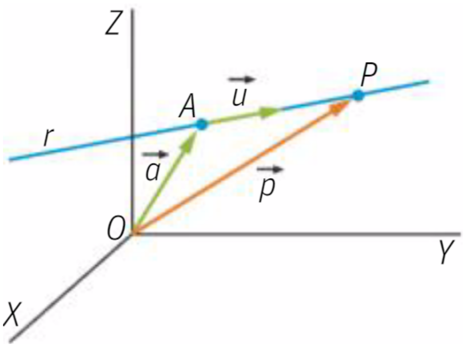


Figura III.1: *Representación gráfica de la ecuación vectorial de la recta.*

¿Es posible construir la recta sin ese parámetro λ? En realidad,

$$\underbrace{r : \overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{u_r}}_{(0)} \iff \underbrace{r : \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{array} \right\}}_{(1)} \implies \underbrace{r : \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}}_{(2)}$$

Ecuación paramétrica de la recta

Ecuación continua de la recta

- A (1) lo denominamos **ecuación paramétrica de la recta**
- A (2) lo denominamos **ecuación continua de la recta**

$$\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2} \\ \dfrac{y-a_2}{u_2}=\dfrac{z-a_3}{u_3} \end{array} \right\} \Longrightarrow \underbrace{\left\{ \begin{array}{lllr} Ax+ & By & & =D \\ & B'y & +C'z & =D \end{array} \right\}}_{(2)}$$

Donde:

- (1) Se han elegido estas 2 parejas, pero podrían haberse elegido otras, dando lugar a otras ecuaciones implícitas de la misma recta.

Ecuación implícita de la recta

- (2) **ecuación implícita de la recta**

  Observación: Si interpretáramos las ecuaciones implícitas de la recta como un sistema de ecuaciones, tendríamos un sistema compatible indeterminado con grado de libertad 1.

  Observación: La dimensión de la recta es 1. *¿Como el grado de indeterminación? Guau...*

Ejercicio 1:

a) *Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por $A(0,1,2)$ y es paralela a la que pasa por $B(1,-2,-1)$ y $C(1,0,0)$*

b) *Halla un vector director de la recta* $r:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{4}$

c) *Halla un vector director de la recta* $r:\left\{ \begin{array}{c} 2x+3y=4 \\ 2x-y+3z=0 \end{array} \right\}$

Ejercicios:

- Página 279.13,14.
- Página 281.18-21.

III.2.2.2. Ecuaciones del plano

Un plano queda determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes

Ecuación vectorial del plano

La **ecuación vectorial del plano** π determinada por el punto $A\in\mathcal{E}_3$ y los vectores linealmente independientes $\overrightarrow{V_\pi}\in\mathcal{V}^3$ y $\overrightarrow{W_\pi}\in\mathcal{V}^3$ es $r:\overrightarrow{p}=\overrightarrow{A}+\lambda\overrightarrow{V_\pi}+\mu\overrightarrow{W_\pi}$, con $\lambda\in\mathbb{R}$ (ver). De esta manera quedan determinados los vectores de posición de todos los puntos del plano.

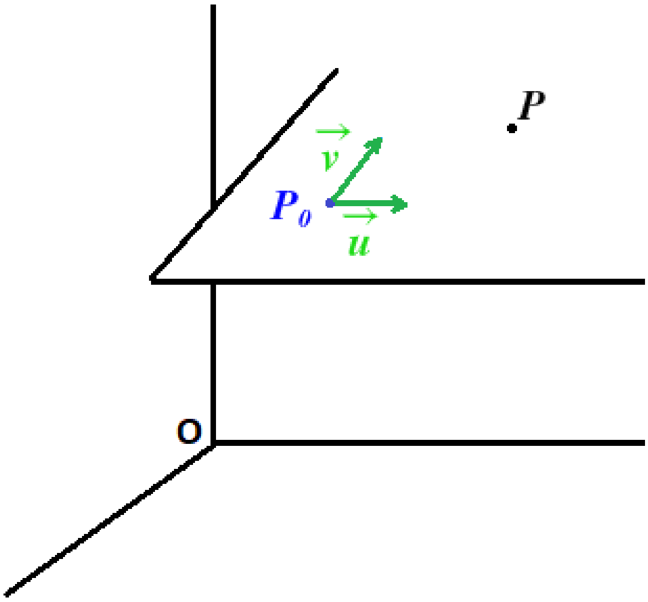


Figura III.2: *Plano generado por un punto y dos vectores*

¿Sería posible evitar el parámetro λ? Como en el caso de la recta, podemos escribir esta ecuación en forma de sistema:

$$\pi : \overrightarrow{p} = \overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{V_\pi} + \mu\overrightarrow{W_\pi} \iff \underbrace{\pi : \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{array} \right\}}_{(1)}$$

Ecuación paramétrica del plano

A (1) lo denominamos **ecuación paramétrica del plano**

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} x - a_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y - a_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z - a_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 \end{array} \right\}$$

Como los vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ son linealmente independientes y el vector AX es una combinación lineal de los otros 2 (ver III.3), tenemos:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando esta ecuación, tendríamos una ecuación del tipo $Ax+By+Cz+D = 0$, que llamamos **Ecuación implícita del plano**.

Ecuación implícita del plano

> **Ejercicio 2**: ***Calcula las ecuaciones del plano que pasa por los puntos*** $A(1,1,1), B(2,2,2), C(1,2,3)$

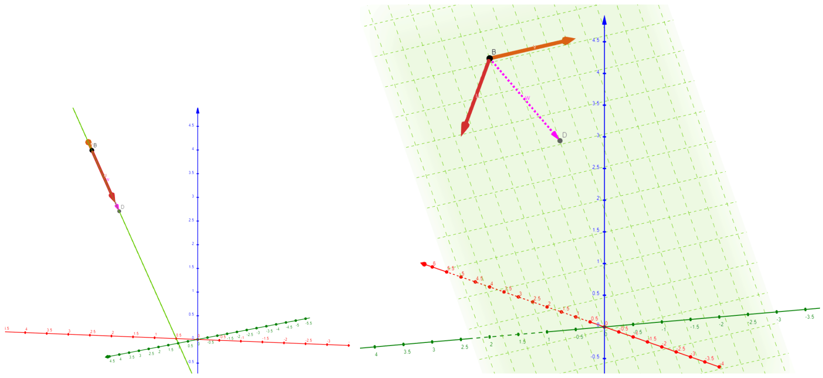


Figura III.3: *En la figura de la izquierda puede comprobarse que el vector rosa pertenece al plano, formado por el punto en común y los otros 2 vectores (naranjas). La versión tridimensional se encuentra en https://www.geogebra.org/m/pyh6nnsp.*

El primer paso sería calcular 2 vectores linealmente independientes de estos 3 puntos, para comprobar que los 3 puntos forman un plano (y no una recta).

$\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (0,1,2)$, que son linealmente independientes al no ser proporcionales.

Ecuación vectorial: $\pi : \overrightarrow{p} = (1,1,1) + \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ecuación paramétrica: $\left\{ \begin{array}{c} x = 1 + \mu \\ y = 1 + \mu + \lambda \\ z = 1 + \mu + 2\lambda \end{array} \right\}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff \cdots \iff x - 2y + z = 0$$

Ejercicio 3:

a) *Halla la ecuación de 2 rectas que pertenezcan al mismo plano.*

b) *Halla un vector director del plano:* $\pi_1 : x + y + z = 3$

c) *Halla el plano paralelo a* $\pi_2 : x+y+z = 3$ *que pase por el origen de coordenadas.*

d) *Halla el plano paralelo al* XY *que pasa por* $A(-1,2,-2)$.

Observación: *Llamamos plano* XY *al plano "del suelo", es decir, al plano* $z = 0$.

e) *Página 283, ejercicios 25-28.*

III.2.3. Posiciones relativas

III.2.3.1. Entre 2 planos

Ecuaciones vectoriales o paramétricas: A continuación, se ofrecen algunos criterios para realizar el estudio de la posición relativa de dos planos.

- Si 2 planos comparten 3 puntos, entonces son el mismo plano.
- Si la matriz formada por los 4 vectores directores de los 2 planos tiene rango 2, los planos son paralelos.
- Si 2 planos paralelos comparten un punto, entonces son coincidentes.
- Si la matriz formada por los 4 vectores directores de los 2 planos tiene rango 3, los planos son secantes en una recta.
- *Criterio de perpendicularidad*

Ecuaciones implícitas: En el caso concreto de que los 2 planos estén expresados en ecuaciones implícitas, podremos estudiar su posición relativa discutiendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_1 : Ax + By + Cz = D \\ \pi_2 : A'x + B'y + C'z = D' \end{array} \right\}$$

Obtenemos las matrices: $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

- $Rg(M) = Rg(M^*) = 1$ coincidentes.
- $Rg(M) < Rg(M^*) = 2$ paralelos.
- $Rg(M) = Rg(M^*) = 2$ secantes.

Observación: Las ecuaciones implícitas de la recta, en realidad, es la expresión de 2 planos secantes (que, como no puede ser de otra manera, forman una recta)

Ejercicio 4: *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$\pi : \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{array} \right\}$$

$$\pi' : x - 2y + z = 1$$

III.2.3.2. Entre 3 planos

Ecuaciones vectorial o paramétricas El estudio de posición relativa en este caso se hace demasiado complejo. Es preferible pasar los planos a ecuaciones implícitas para el estudio.

Ecuaciones implícitas Como antes, discutiremos el sistema formado por las ecuaciones implícitas del plano.

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_1 : Ax + By + Cz = D \\ \pi_2 : A'x + B'y + C'z = D' \\ \pi_3 : A''x + B''y + C''z = D'' \end{array} \right\}$$

Obtenemos las matrices: $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$

Las posibilidades son: (ver figura III.4)

- $Rg(M) = Rg(M^*) = 1$ SCI, secantes en un plano [grado de indeterminación 2, por lo que hay dos parámetros. **Coincidentes**.
- $Rg(M) < Rg(M^*) = 2$ paralelos.
- $Rg(M) = Rg(M^*) = 2$ SCI, secantes en una recta [grado de indeterminación 1, por lo que hay un parámetro.
- $Rg(M) = 2 < Rg(M^*) = 3$ no se cortan los 3. Sistema incompatible
- $Rg(M) = Rg(M^*) = 3$ SCD, secantes en un punto que es la solución del sistema.

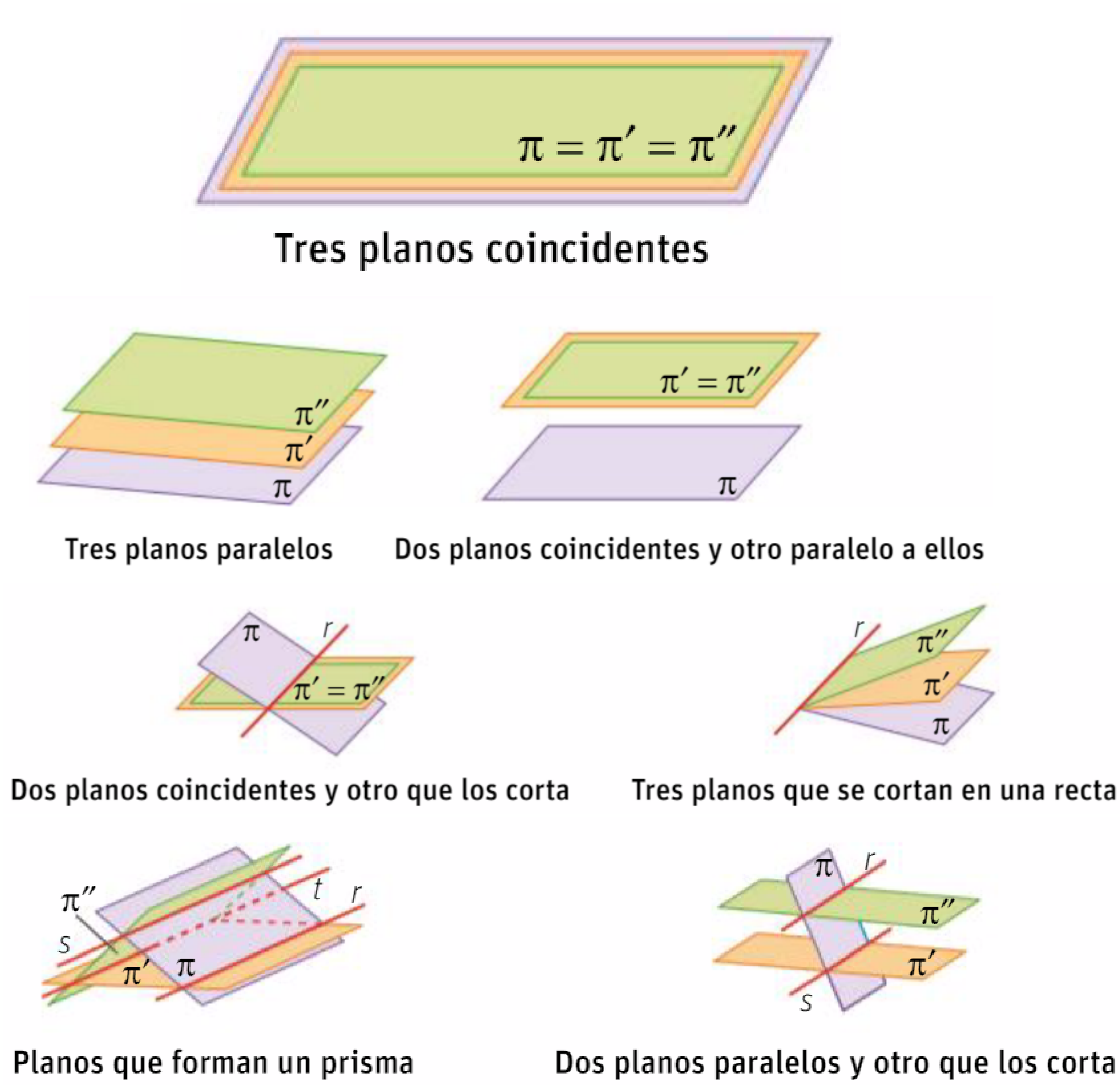


Figura III.4: *Representación gráfica de las posiciones relativas de 3 planos.*

Ejercicio 5: *Estudia la posición relativa de los planos:*

$$\pi_1 : 2x - 3y + 2z = 7$$
$$\pi_2 : -3 + y - z = -5$$
$$\pi_3 : 2x - 2x + 3z = 7$$

$$\left\{\begin{array}{c} \pi_1 : 2x - 3y + 2z = 7 \\ \pi_2 : -3 + y - z = -5 \\ \pi_3 : 2x - 2x + 3z = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -7 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

III.2.3.3. Posiciones relativas entre recta y plano

Ecuaciones implícitas: Si la recta y como el plano están dados en ecuaciones implícitas, estaríamos en la posición relativa de 3 planos, sabiendo que 2 de ellos son secantes en una recta.

Ecuaciones paramétrica: $\pi : \{P_\pi, \overrightarrow{v_\pi}, \overrightarrow{w_\pi}\}$

$P_r \in \pi$	$\overrightarrow{v_r}$ LD de $v_\pi, \overrightarrow{w}_\pi$	**Conclusión**
No	No	Secantes en un punto
No	Sí	Recta paralela
Sí	No	Secantes en un punto
Sí	Sí	Recta contenida en el plano

Ejercicio 6: *Dada la recta* $r : \left\{\begin{array}{c} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 \end{array}\right\}$ *y el plano* $\pi : (0,1,1) + \mu \cdot (-1,0,0) + \lambda \cdot (2,0,1)$

Plano implícito, recta paramétrica: comprobamos si existe algún valor de λ_r para el que se cumpla la ecuación implícita del plano.

- $\exists! \lambda \implies$ secante.
- $\lambda \in \mathbb{R} \implies$ contenida.
- $\nexists \lambda \implies$ paralela.

Ejercicio 7: *Estudia la posición relativa del plano* $\pi : 2x - 2y + z = 0$ *y de ña recta* $r : \left\{\begin{array}{c} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + 5\lambda \end{array}\right\}$

Ejercicio 8: *Estudia la posición relativa del plano* $\pi : 2x - 2y + z = 0$ *y de ña recta* r : $\left\{ \begin{array}{c} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right\}$

Sustituimos los valores de x, y, z de las ecuaciones de r en el plano π:

$$3(1+\lambda) - (-2+2\lambda) + 3 - \lambda = 0 \iff 3 + 3\lambda + 2 - 2\lambda - 2\lambda + 3 - \lambda \iff 8 = 0$$

Conclusión La recta y el plano no tienen nada en común, por lo que tienen que ser paralelos.

Ejercicios recomendados: 105ab,107ab

III.2.3.4. Posiciones relativas entre dos rectas

Las distintas posibilidades de posición relativa son:

Posición relativa	Vectores	Puntos
Paralelas coincidentes	Paralelos	Todos en común (*)
Paralelas no coincidentes.	Paralelos	Ninguno en común
Secantes en un punto	No paralelos	Solamente uno en común.
Se cruzan en el espacio	No paralelos	Ninguno en común

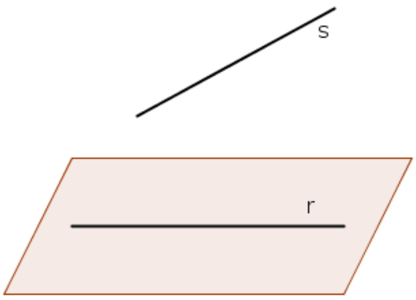


Figura III.5: *Representación gráfica de dos rectas que se cruzan en el espacio.*

Dadas las rectas $r : \vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ y $s : \vec{p} = \vec{b} + \lambda\vec{w}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u} || \vec{w} \rightarrow$ Paralelas o coincidentes.

  $A_r \in s$ ó $B_s \in r \implies$ coincidentes.

  En caso contrario, paralelas no coincidentes.

- $\vec{u} \not|| \vec{w} \rightarrow$ secantes o se cruzan.

  Ver *procedimiento general.*

Procedimiento general: Si los vectores directores son paralelos (proporcionales), las rectas pueden ser paralelas o coincidentes. Para poder distinguir, podríamos ver si un vector formado por un punto de cada recta es también proporcional (entonces serían coincidentes) o si no (entonces serían secantes).

De la misma manera, si los vectores son linealmente independientes las rectas pueden cruzarse o cortarse. Para distinguir estos 2 casos, podríamos ver si un vector formado por un punto de cada recta es linealmente dependiente a los otros 2 (entonces serían secantes porque formarían un plano que contiene al vector) o si no (entonces se cortarían en el espacio).

Así, buscamos estudiar la dependencia lineal de los 2 vectores directores ($\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}$) y de los 2 vectores directores respecto de un vector formado, arbitrariamente, con 2 puntos de las rectas ($\overrightarrow{AB}$, con $A(a_1, a_2, a_3) \in r$ y $B(b_1, b_2, b_3) \in s$). Para ello, formamos las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & w_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & w_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

- $Rg(M) = Rg(M^*) = 1$ SCI, secantes en una recta [grado de indeterminación 1, por lo que hay dos parámetros.] **Coincidentes**.]
- $Rg(M) = 1 < Rg(M^*) = 2$ paralelas.
- $Rg(M) = Rg(M^*) = 2$ SCI, secantes en un plano [dimensión 2]. $\overrightarrow{AB}$ se puede escribir como combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$
- $Rg(M) = 2 < Rg(M^*) = 3$ se cruzan en el espacio.

Ejercicio 9: *Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right\} \quad s : \left\{ \begin{array}{c} x = 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{array} \right\}$$

Se toma un punto y un vector de cada recta:

$$r : A(0, -1, 1), \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \qquad s : B(0, 2, 2), \overrightarrow{w_s} = (2, 1, -3)$$

Se consideran las matrices: $M = \left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{w_s}\right) \quad M^* = \left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{w_s}, [\overrightarrow{AB}]\right)$ y se estudia el rango.

Para hallar las coordenadas el punto de corte:

Ejercicio 10: *Página 289, ejercicios 52, calculando puntos de cortes*

Ambas rectas en general: Formamos la matriz de 4x4 y estudiamos la posición relativa de 4 planos. Consultando figura III.4 tenemos todos los casos cubiertos en los que uno de los planos es combinación lineal de los demás. En el caso en el que no haya ningún plano que sea combinación lineal de los demás, tendremos que la matriz ampliada tendrá rango 4 por lo que el sistema será incompatible. Geométricamente, tendremos rectas que se cruzan.

Ejercicio 11: *Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:*

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -3x+y+z=1 \end{array} \right\} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} 2x-y+z=1 \\ -x+z=0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -3x+y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ -x+z=0 \end{array} \right\} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $|M^*|$

$$|M^*| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = ... = -6$$

$Rg(M) \leq 3 < 4 = Rg(M^*)$, por lo que el sistema es incompatible. Por ello, las rectas se cruzan en el espacio.

Haz de rectas

Practicamos en general Tema 11: 122,127,130,134,135,136,139,140,143,145,149,150

Tema 11:

- Básicos: 83,91,92,93a,98,100,101a,103a,104a,105,106,107d,108
- Síntesis: 111-119
- Completos: 122-124,127,129-133

III.3. Geometría euclídea

Llamamos geometría euclídea al espacio en el que podemos medir, cosa que hasta ahora no era posible.

Módulo de un vector

Todo surge desde el módulo de un vector. Llamamos **módulo de un vector** a la longitud que tiene. Dado $\overrightarrow{v}$, se define el módulo como $|\overrightarrow{v}|$.

Si el vector $\overrightarrow{v}$ tiene como coordenadas $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en la base canónica, podemos calcular su módulo como $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Proposición III.1. $\left|\lambda\overrightarrow{v}\right| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{v}|$

Demostración.

$$|\lambda \cdot \overrightarrow{v}| = \sqrt{(\lambda \cdot v_1)^2 + (\lambda \cdot v_2)^2 + (\lambda \cdot v_3)^2} = \sqrt{\lambda^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right|$$

□

Vector unitario

Definición III.6 **Vector unitario.**

$$\overrightarrow{u} \in V^3 \text{ es unitario} \iff \left|\overrightarrow{u}\right| = 1$$

Ejercicio 1: *Dado el vector $\overrightarrow{u} = (0, 3, 4)$, encuentra:*

a) *Un vector unitario con la misma dirección. ¿Cuántos hay?*

b) *Un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido. ¿Cuántos hay?*

Calculamos $\overrightarrow{u} = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^5} = \sqrt{25} = 5$

APARTADO A)

Buscamos $\overrightarrow{v} = (0, 3\lambda, 4\lambda)$ tal que $|\overrightarrow{v}| = 1$

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{0^2 + (3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \sqrt{25\lambda^2} = 1 \iff \lambda = \pm{}^1/_5$$

Hay dos vectores unitarios ocn la misma dirección: $\overrightarrow{v_1} = \left(0, {}^3/_5, {}^4/_5\right)$ y $\overrightarrow{v_2} = \left(0, -{}^3/_5, -{}^4/_5\right)$

Hay 2 vectores unitarios con la misma dirección.

Observación: Estos dos vectores tienen la misma dirección pero sentido contrario.

APARTADO B)

El único vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido es $\overrightarrow{v_2}$

Observación: ¿Es casualidad que $\lambda = {}^1/_{|\overrightarrow{u}|}$?

Proposición III.2. *Dado* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\text{\textit{El vector} } \frac{1}{|\overrightarrow{u}|}\overrightarrow{u} = \left(\frac{u_1}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_2}{|\overrightarrow{u}|}, \frac{u_3}{|\overrightarrow{u}|}\right) \text{ \textit{es unitario}}$$

Demostración. Para demostrarlo solamente es necesario aplicar la propiedad del módulo: $|\lambda \cdot \overrightarrow{u}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{u}|$

$$\left|\frac{1}{|\overrightarrow{u}|}\overrightarrow{u}\right| = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|}|\overrightarrow{u}| = 1$$

□

III.3.1. Productos (escalar, vectorial y mixto)

III.3.1.1. Producto escalar

Producto escalar

Definición III.7 **Producto escalar.**

Dados $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$, *se define* $\cdot : V^3 \times V^3 \longmapsto \mathbb{R}$ *como*

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{w}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right)$$

Propiedades: $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \in V^3$

- **Conmutativo:** $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$
- **Bilineal:**
  $(\lambda\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \lambda(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})$
  $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}$
- **No negatividad:** $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} \geq 0$

¿Qué ocurre si no cooncemos el ángulo que forman los 2 vectores? Necesitamos otra manera de calcular el producto escalar.

Proposición III.3 (Expresión analítica del producto escalar). *Dados* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3), \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3) \in V^2$ *respecto de la base canónica* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$, *entonces* $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$

Demostración.

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \left(v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k}\right) \cdot \left(w_1\overrightarrow{i} + w_2\overrightarrow{j} + w_3\overrightarrow{k}\right)$$
$$v_1w_1\overrightarrow{i}\overrightarrow{i} + v_1w_2\overrightarrow{i}\overrightarrow{j} + v_1w_3\overrightarrow{i}\overrightarrow{z} +$$
$$v_2w_1\overrightarrow{j}\overrightarrow{i} + v_2w_2\overrightarrow{j}\overrightarrow{j} + v_2w_3\overrightarrow{j}\overrightarrow{z} +$$

$$v_3w_1\overrightarrow{z}\overrightarrow{i}+v_3w_2\overrightarrow{z}\overrightarrow{j}+v_3w_3\overrightarrow{z}\overrightarrow{z}=$$
$$v_1w_1+v_1w_2\cdot 0+v_1w_3\cdot 0+$$
$$v_2w_1\cdot 0+v_2w_2+v_2w_3\cdot 0+$$
$$v_3w_1\cdot 0+v_3w_2\cdot 0+v_3w_3=$$
$$v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2+w_3\cdot v_3$$

□

Proposición III.4.

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=|\overrightarrow{u}|^2$$

Ortogonalidad y perpendicularidad

Definición III.8 **Ortogonalidad y perpendicularidad.**

*Decimos que $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in V^3$ son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. Escribiremos $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$.*

*Decimos que $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in V^3$ son **ortogonales** si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$*

Observación: Hay ligero matiz. Fíjate que $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\implies\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ pero no al revés, ya que $\overrightarrow{0}=(0,0)$ es ortogonal a todos pero perpendicular a ninguno.

Clasificación de bases de vectores Dada la base $\mathcal{B}=\left\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right\}$.

Ortogonal

- Decimos que es una base **ortogonal** si y solo si $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}$.

Ortonormal

- Decimos que es una base **ortonormal** si y solo si es una base ortogonal y $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|$

Angulo que forman 2 vectores

Observación: Con el producto escalar podemos calcular el **angulo que forman 2 vectores**. Dado que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{u}|\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)$, podemos despejar

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{u}|}$$

Ejercicio 2:

Halla el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u}=(2,-3,1)\,,\overrightarrow{v}=(1,2,-2)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right)=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{u}|}=\frac{2\cdot 1-3\cdot 2+1\cdot(-2)}{\sqrt{14}\sqrt{9}}=\frac{-2}{\sqrt{14}}$$

Para calcular el ángulo que forman:

$$\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}=\arccos\frac{-2}{\sqrt{14}}=12219'$$

Ejercicio 3:

Halla el valor de k *para que el ángulo que forman los vectores* $\vec{a} = (1, k, k)$ *y* $\vec{b} = (1, -2, 1)$ *sea de 60º.*

$k = -{}^{1}/_{2}$

Interpretación geométrica del producto escalar Por terminar

III.3.1.2. Producto vectorial

Producto vectorial

Definición III.9 **Producto vectorial**. *Dados* $\vec{v}, \vec{w}$, *se define* $\times : V^3 \times V^3 \longmapsto V^3$ *como*

$$\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}\right) \cdot \vec{n}$$

donde $\vec{n}$ *es un vector unitario y ortogonal a* $\vec{v}, \vec{w}$ *y su sentido está dado por la regla de la mano derecha.*

Propiedades: $\forall \vec{x}, \vec{x}, \vec{z} \in V^3$

- **Anticonmutativo:** $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

  Al alterar el orden del producto, el sentido del vector resultante es contrario.
- **Homogénea:** $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$
- **Distributiva:** $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
- $\vec{x} \times \vec{x} = 0$

  Dados dos vectores $\vec{v} \neq 0$ y $\vec{w} \vec{v} \times \vec{w} = 0 \iff \vec{v} \,||\, \vec{w}$

Proposición III.5 (Expresión analítica del producto vectorial). *Dados* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in V^2$ *respecto de la base canónica* $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, *entonces*

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Demostración.

Para la demostración es necesario tener en cuenta que: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}\right) \times \left(w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}\right)$$

$$v_1w_1\vec{i}\times\vec{i}+v_1w_2\vec{i}\times\vec{j}+v_1w_3\vec{i}\times\vec{z}+$$
$$v_2w_1\vec{j}\times\vec{i}+v_2w_2\vec{j}\times\vec{j}+v_2w_3\vec{j}\times\vec{z}+$$
$$v_3w_1\vec{z}\times\vec{i}+v_3w_2\vec{z}\times\vec{j}+v_3w_3\vec{z}\times\vec{z}=$$
$$v_1w_2\vec{k}-v_1w_3\vec{j}-v_2w_1\vec{k}+v_2w_3\vec{i}+v_3w_1\vec{j}-v_3w_2\vec{i}=$$
$$(v_2w_3-w_2v_3)\vec{i}-(v_1w_3-w_3v_1)\vec{j}+(v_1w_2-w_2v_1)\vec{k}=$$
$$\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 w_3 & \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 w_3 & \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 w_2 & \end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$\square$

Ejemplo: *Dados* $\vec{u}=(-1,3,-3)$ *y* $\vec{v}=(3,-2,0)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-6\vec{i}-9\vec{j}+-7\vec{k}$$

Interpretación geométrica del producto vectorial Por terminar

III.3.1.3. Producto mixto

Producto mixto

Definición III.10 **Producto mixto**. *Dados* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, *se define* $\times : V^3\times V^3\times V^3\longmapsto\mathbb{R}$ *como*

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

Propiedades: $\forall\vec{x},\vec{x},\vec{z}\in V^3, a,b,c\in\mathbb{R}$

- $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=[\vec{z},\vec{x},\vec{y}]=[\vec{y},\vec{z},\vec{x}]$
- $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=-[\vec{x},\vec{z},\vec{y}]$

  De la misma manera, también se cumplen: $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=-[\vec{y},\vec{x},\vec{z}]$ y $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=-[\vec{z},\vec{y},\vec{x}]$
- $[a\vec{x},b\vec{y},c\vec{z}]=abc[\vec{z},\vec{x},\vec{y}]$
- $[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=0\iff\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ son linealmente dependientes.

Proposición III.6 (Expresión analítica del producto vectorial). *Dados* $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3),\vec{v}=(v_1,v_2,v_3),\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)\in V^3$ *respecto de la base canónica* $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, *entonces*

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Demostración.

Para la demostración es necesario tener en cuenta que: $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 w_3 & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 w_3 & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 w_2 & \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

□

Ejemplo: *Dados* $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (-1, -2, 2)$, $\overrightarrow{w} = (-2, 3, -1)$

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) + (-8) + (-0) - (0) - (-6) - (2) = -6$$

Interpretación geométrica del producto mixto: Por terminar

Observación: Acabado tema 9.

III.3.2. Aplicación de los productos

III.3.2.1. Vector normal del plano

Proposición III.7. *Dado el plano* $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, *el vector* $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ *es un vector perpendicular (o normal).*

Demostración.

Consideramos dos puntos del plano diferentes: $P \in \pi, Q \in \pi$, con $P(p_1, p_2, p_3), Q(q_1, q_2, q_3)$ y $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

Comprobamos que $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \cdot (A, B, C) =$$

$$Aq_1 - Ap_1 + Bq_2 - Bp_2 + Cq_3 - Dp_3 = Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 - (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) \overset{(1)}{=} D - D = 0$$

(1) : Dado que $P \in \pi$, las coordenadas del punto P cumplen la ecuación del plano. □

Ejercicio 4:

Construye el plano perpendicular a la recta $r : (x, y, z) = (0, 1, 3) + \lambda(2, 3, 1)$ *que pasa por* $P(0, 1, 1)$

Buscamos $\pi \perp r$, por lo que podemos tomar $\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (2, 3, 1)$.

Así: $\pi : 2x + 3y + z + D = 0$. Como $P \in \pi \to 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 + D = 0 \iff D = -4$

Ejercicio 5:

Halla la recta perpendicular a $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{2z-2}{3}$ *que pasa por el punto* $P(1, -2, 0)$.

La recta pedida es $t : \begin{cases} P \in t \\ t \perp r \end{cases}$

Todas las rectas perpendiculares a una recta forman un plano. Llamamos π a ese plano. Así, $t \in \pi,$ con $\pi : \begin{cases} P \in \pi \\ \pi \perp r \end{cases}$.

t será la recta determinada por $A = t \cap \pi$, y $P(1, -2, 0)$

$\pi \perp r \implies n_\pi \mid\mid \overrightarrow{v_r}$. Tomamos $n_\pi = \left(2, 3, {}^3/_2\right)$

Como $P \in \pi \implies 2P_1 + 3P_2 + {}^3/_2 P_3 + D = 0 \iff 2 - 6 + D = 0 \iff D = 4$

Así, $\pi : 2x + 3y + {}^3/_2 z + 4 = 0$

2) Buscamos $A = \pi \cap r$. Tendremos $t : \{A, P\}$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + 3y + {}^3/_2 z + 4 = 0 \\ x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 + {}^3/_2 \lambda \end{array} \right\} \implies 2 + 4\lambda - 6 + 9\lambda + {}^3/_2 + {}^9/_4 \lambda + 4 = 0 \iff$$

$$\frac{3}{2} + \left(13 + {}^9/_4\right) \lambda = 0 \iff \lambda = \frac{{}^{61}/_4}{{}^3/_2} = \frac{61}{6}$$

Sustituimos λ en la ecuación de la recta para obtener A: $\left\{ \begin{array}{c} x = 1 + 2{}^{61}/_6 = \frac{64}{3} \\ y = -2 + 3{}^{61}/_6 = \frac{57}{2} \\ z = 1 + {}^3/_2 {}^{61}/_6 = \frac{57}{4} \end{array} \right\}$

$$A = \pi \cap r = \left(\frac{64}{3}, \frac{57}{2}, \frac{57}{4}\right)$$

3) Buscamos la recta r que pasa por los puntos A y P.

$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{64}{3} - 1, \frac{57}{2} + 2, \frac{57}{4}\right) = \left(\frac{61}{3}, \frac{61}{2}, \frac{57}{4}\right)$

$$r : \{A, \overrightarrow{v_r}\} = \left\{ \begin{array}{c} x = {}^{64}/_3 + 2\lambda \\ y = {}^{57}/_2 + 3\lambda \\ z = {}^{57}/_4 + {}^3/_2 \lambda \end{array} \right\}$$

Paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano:

Paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano:

- $r \parallel \pi \iff \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$
- $r \perp \pi \iff \overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{n_\pi}$

> **Ejercicio 6**: *Dados el plano* $\pi : 3x + 4y - 7z + 2 = 0$ *y la recta:*
> $$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$
> *¿Son paralelos?*

Para comprobar el paralelismo, estudiamos $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = (1,1,1) \cdot (3,4,-7) = 0 \implies \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{n_\pi} \iff \pi \parallel r$

III.3.2.2. Vector director de la recta en implícitas

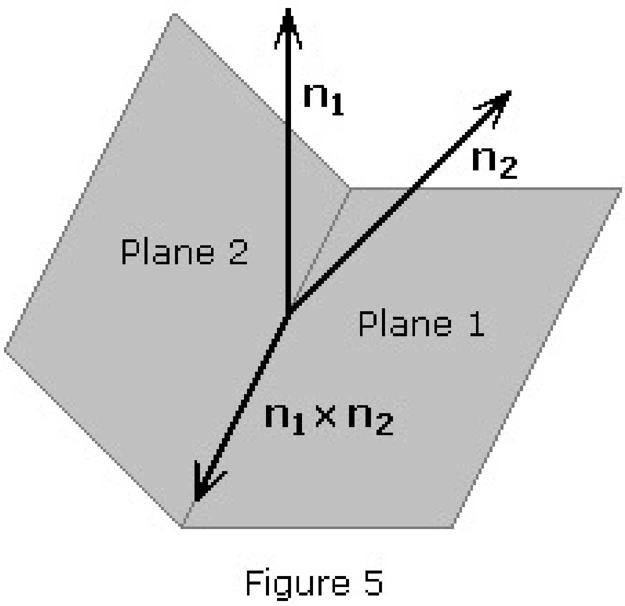


Figura III.6: *Vector director de una recta dada por sus ecuaciones implícitas.*

Dada una recta r que pertenece a ambos planos, π_1 y π_2, $\overrightarrow{v_r} \perp n_{\pi_1} \wedge \overrightarrow{v_r} \perp n_{\pi_2}$ (Ver figura III.6). Por eso, para buscar un vector perpendiculamr a la vez a 2 vectores dados, el camino más corto es el producto vectorial.

$$\overrightarrow{v_r} = n_{\pi_1} \times n_{\pi_2}$$

> **Ejercicio 7**:
>
> *Dada las rectas* $r : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$ *y* $s : (x,y,z) = (1,1,1) + (-1,2,4)\lambda.$

Aunque se puede hacer de muchas maneras diferentes, vamos a aplicar el resultado que acabamos de ver.

Los planos que forman la recta r son $\pi_1 : 2x + y = 2$ con $\overrightarrow{n_{\pi_1}} = (2,1,0)$ y $\pi_2 : 2y - z = 2$ con $\overrightarrow{n_{\pi_2}} = (0,2,-1)$

Obtenemos $\overrightarrow{v_r} = (2,1,0) \times (0,2,-1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\overrightarrow{i} - -2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k} =$ $(-1,2,4)$

Tenemos $\overrightarrow{v_r} \mid\mid \overrightarrow{v_s}$. Estudiamos $P_s \in r$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 1 \neq 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \neq 2 \end{array} \right. \implies P_s \notin r \implies r \mid\mid s \text{ no coincidentes.}$$

Observación: Fíjate que podríamos haber obtenido $\overrightarrow{v_r}$ parametrizando. ¿Cuándo es más corto parametrizar y cuándo utilizar el producto vectorial?

Ejercicio 8: *Dadas las siguientes rectas, obtén un vector director por el camino más corto*

a) $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 2y - z = 2 \end{array} \right.$

b) $r_2 : \left\{ \begin{array}{r} 2x + 5y + z = 2 \\ 3x - 2y - 7z = 2 \end{array} \right.$

c) $r_3 : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 2 \end{array} \right.$

Ejercicio 3.Junio 2019:

Dados los puntos $A(1,1,1), B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) *Determinar la ecuación del plano que contiene a los 3 puntos.*

b) *Obtener un punto D (distinto a los anteriores) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.*

c) *Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A,B,C,P sea igual a 1.*

Problemas recomendados: T12 - 127,128 APARTADO A)

Tomamos $\overrightarrow{AB} = (0,2,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4,-2,0)$ como vectores directores del plano y calculamos su ecuación implícita:

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -4 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z-1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff 16y - 16 + 8z - 8 - 8x + 8 = 0$$

$$\iff -8x + 16y + 8z - 16 = 0 \iff -x + 2y + z - 2 = 0$$

Apartado b)

Basta con tomar $D \in \pi$. Por ejemplo: $D(0,1,0) \in \pi$.

Comprobamos que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes calculando el determinante de la matriz que forman.

$\overrightarrow{AD} = (1,0,1)$

$$|\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Apartado c)

(Ojo que aquí no se puede simplificar, aunque antes sí hubiéramos podido)

Buscamos $P(a,0,0)$. El volumen del tetraedro será ${}^1\!/_6$ del voluen del paralelepípedo.

$$\left|\left|\overrightarrow{AP} \quad \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AC}\right|\right| = 6 \iff \left\|\begin{vmatrix} a-1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix}\right\| = 2 \cdot 2 \cdot \left\|\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right\| = 6$$

$$\left\|\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right\| = \frac{3}{2} \iff |2a+4| = {}^3\!/_2 \implies$$

$$\begin{cases} 4 + 2a_1 = -{}^3\!/_2 \iff a_1 = \frac{-11}{4} \to P_1\left({}^{-11}\!/_4, 0, 0\right) \\ 4 + 2a_2 = {}^3\!/_2 \iff a_2 = \frac{-5}{4} \to P_2\left({}^{-5}\!/_4, 0, 0\right) \end{cases}$$

III.3.3. Proyecciones y simetrías

III.3.3.1. Proyección

Proyección de punto sobre plano Para calcular la proyección de un punto P sobre un plano π (ver figura III.7):

1. $r \perp \pi$ con $P \in r$
2. $P' = r \cap \pi$

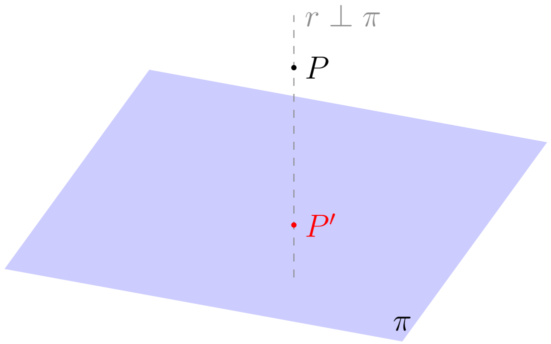


Figura III.7: *Proyección de punto sobre plano*

Proyección de recta sobre plano Se reduce a proyectar 2 puntos de la recta sobre el plano. Se puede utilizar el punto de intersección de la recta con el plano.

Observación: Buenas prácticas: calcular el punto de intersección para saber si la recta pertenece al plano o es paralela.

- Si $r \in \pi$, la proyección de la recta será ella misma.
- Si $r \,||\, \pi$, necesitaremos proyectar 2 puntos de la recta.
- En los demás casos, se proyecta un punto sobre la recta y la proyección será la que pasa por el punto proyectado y el punto de intersección. Ver figura III.8.

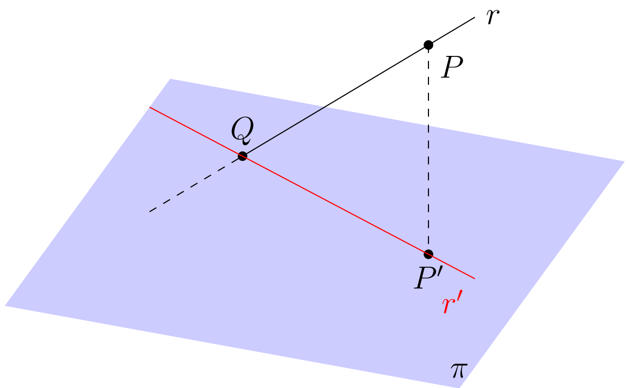


Figura III.8: *Proyección de recta sobre plano*

Ejercicio 10:

Dada la recta $r : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ *y el plano* $\pi : 2x + 2y + z = 2$, *halla la proyección de* r *sobre* π

<u>Cálculo intersección $r \cap \pi$</u> *Seguimos el consejo de buenas prácticas.*

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \overset{E_3 - E_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x = 0 \end{array} \right\} \overset{E_1 - E_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} 2x + y + z = 1 \\ x - y = -1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=1 \\ y=1 \\ x=0 \end{array}\right\} \rightarrow A=\pi\cap r=(0,1,0)$$

Ya tenemos un punto de la recta buscada. Necesitamos hallar la proyección de un P_r sobre el plano.

Cálculo de proyección de un punto P_r

1) Tomamos $x=1$ y sustituimos en r para hallar P_r

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} y+z=-1 \\ 2y+z=1 \end{array}\right\} \overset{E_2-E_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} y+z=-1 \\ y=2 \end{array}\right\} \rightarrow (x,y,z)=(1,2,-3)$$

2) Buscamos $t\perp\pi$ con $P_r\in t$.

$$t:\left\{\overrightarrow{n_\pi},P_r\right\}:\left\{\ x=1+2\lambda y=2+2\lambda z=-3+\lambda\ \right\}$$

3) La recta proyección será la formada por A y $B=t\cap\pi$

$$B: 2(1+2\lambda)+2(2+2\lambda)+(-3+\lambda)=2 \iff 9\lambda+3=2 \iff \lambda={}^{-1}/_{9}$$

Así, $B\left(1+2^{-1}/_9,2+2^{-1}/_9,-3+{}^{-1}/_9\right)$

Conclusión: $A(0,1,0)$ y $B\left({}^{7}/_9,{}^{16}/_9,{}^{-28}/_9\right)$ forman la recta r.

$\overrightarrow{AB}=\left({}^{7}/_9,{}^{7}/_9,{}^{-28}/_9\right)$. Como $\overrightarrow{AB}\ ||\ (7,7,-28)\ ||\ (1,1,-4)$ tomamos como $\vec{v}=(1,1,-4)$

$$\text{Solución: } r:\{A,\vec{v}\}:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-4\lambda \end{array}\right.$$

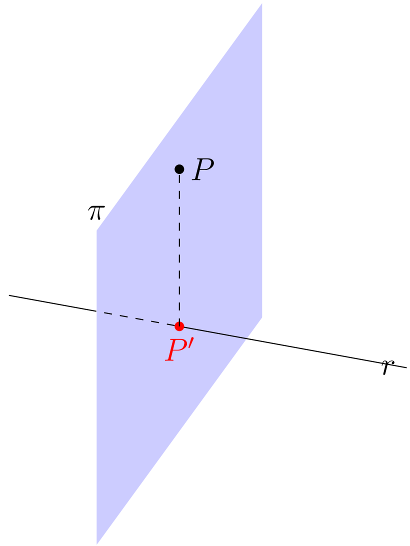


Figura III.9: *Proyección de punto sobre recta*

> **Ejercicio 11**: *Página 311, ejercicio 11*

Proyección de punto sobre recta:

III.3.3.2. Simetría de un punto respecto de otro punto

Todo el cálculo de objetos simétricos respecto de otros se va a basar en este caso, el caso más simple.

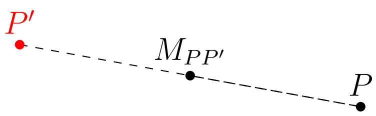


Figura III.10: *Simetría de un punto respecto de otro punto*

> **Ejercicio 12**:
> *Dado el punto $A(2,3,4)$ halla su simétrico respecto de $B(1,1,1)$.*

Buscamos A' que cumpla que B es el punto medio entre A y $A'(x,y,z)$.

Sabemos que el punto medio entre P y Q tiene coordenadas:$M_{PQ}\left(\frac{p_1+q_1}{2},\frac{p_2+q_2}{2},\frac{p_3+q_3}{2}\right)$

Resolvemos:

$$\left(\frac{2+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{4+z}{2}\right)=(1,1,1)\iff\ldots\iff(x,y,z)=(0,-1,-2)$$

III.3.3.3. Simetría de un punto respecto de una recta

Plano perpendicular a la recta que contenga al punto, intersección con la recta (ver figura III.11).

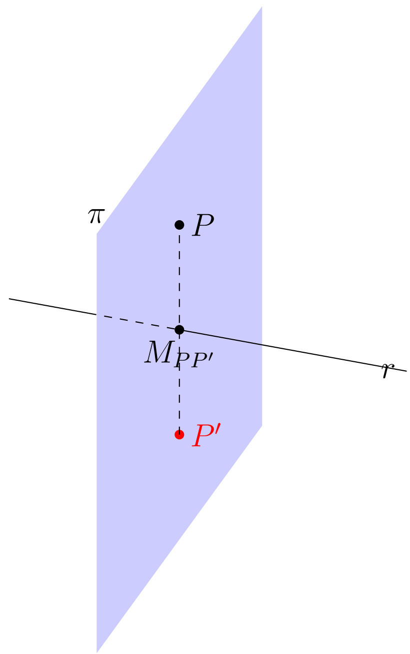


Figura III.11: *Simetría de punto respecto de recta*

III.3.3.4. Simetría de un punto respecto de un plano

Recta perpendicular al plano, que pasa por el punto (ver figura III.12).

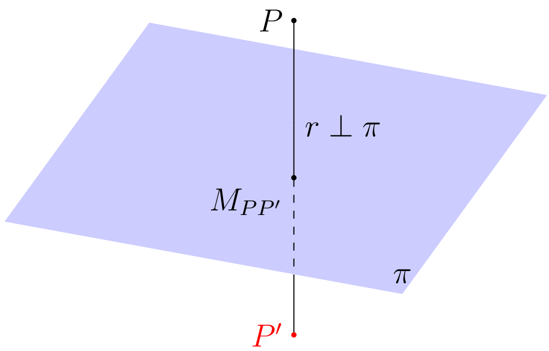


Figura III.12: *Simétrico de punto respecto de un plano*

III.3.3.5. Simetría de una recta respecto de un plano

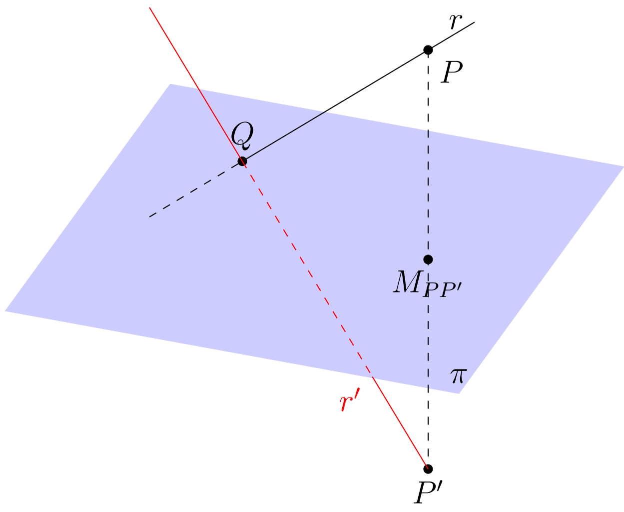


Figura III.13: *Simetría de una recta respecto de un plano*

Ejercicio 13:

Halla la recta simétrica de r *respecto del plano* $\pi : 2x + 2z = 0$.

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

III.3.4. Ángulos

III.3.4.1. Ángulo formado por dos rectas

Llamamos ángulo formado por 2 rectas al menor de los 2 ángulos que forman (en la figura III.14, llamaríamos $\widehat{r,s} = \alpha$). Según su posición relativa se distinguen:

- **Secantes:** el ángulo de las rectas será el ángulo de los vectores directores.
- **Paralelas/coincidentes:** ángulo 0.
- **Rectas que se cruzan:** el ángulo que forman es el que forman 2 paralelas a ellas que sean secantes.

Se calcula el ángulo desde la definición de producto escalar.

$$\cos(\alpha) = \cos(\hat{r,s}) = \left|\cos\left(\overrightarrow{v_r},\hat{} \overrightarrow{v_s}\right)\right| = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|} \implies 0 \leq \alpha \leq {}^{\pi}/_{2}$$

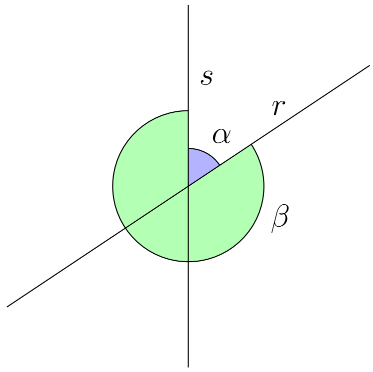


Figura III.14: *Ángulo formado por 2 rectas*

III.3.4.2. Ángulo formado por dos planos

Llamamos ángulo formado por 2 planos al menor de los 2 ángulos diedros que forman 2 planos secantes (ver figura III.15).

Observación: Si los planos son paralelos, no forman ningún ángulo.

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\widehat{\pi_1, \pi_2}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}\right)\right| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} \implies 0 \leq \alpha \leq {}^{\pi}/_{2}$$

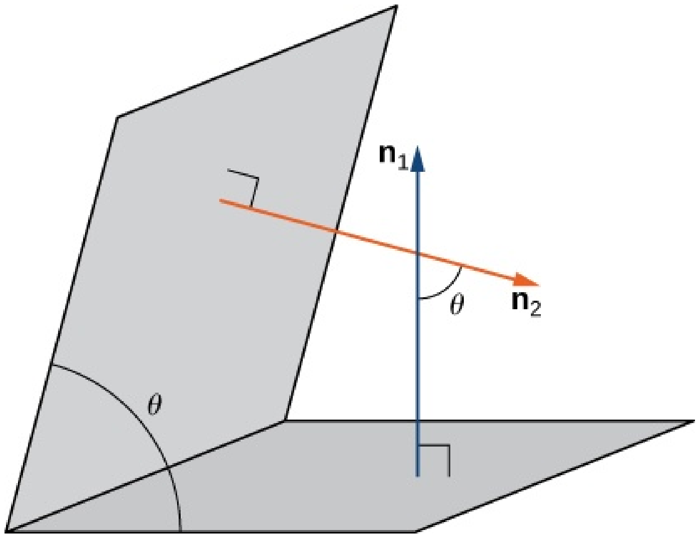


Figura III.15: *Ángulo formado por 2 planos*

III.3.4.3. Ángulo formado por recta y plano

- Sería posible calcular el ángulo que forma la recta con su proyección. Ver figura III.16.
- Otra posibilidad, utilizar el vector normal del plano: $\widehat{r,\pi} = 90 - \widehat{r,\overrightarrow{n_\pi}}$

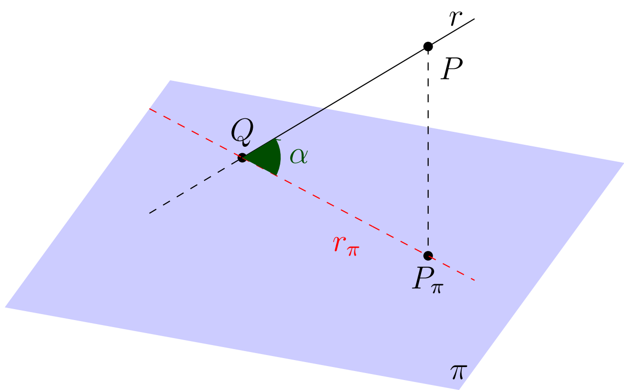


Figura III.16: *Ángulo formado por una recta y un plano*

Ejercicio 14:

Calcula el ángulo formado por la recta r y el plano π.

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \pi : x + y - 2z = 3$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta, calculando las soluciones del sistema compatible indeterminado:

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=0\\x-z=0\end{cases}\overset{x=\lambda}{\to}\begin{cases}2\lambda-3y+\lambda=0\to y=\lambda\\x=z=\lambda\end{cases}\iff\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

Método 1: Angulo entre vectores

$$\widehat{\pi,\overrightarrow{v_r}}=90-\widehat{\overrightarrow{n_\pi},\overrightarrow{v_r}}$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_\pi},\overrightarrow{v_r}}\right)=\frac{|\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{n_\pi}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}=\frac{(1,1,1)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=0$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{n_\pi},\overrightarrow{v_r}}\right)=0\implies\widehat{\overrightarrow{n_\pi},\overrightarrow{v_r}}=90\implies\widehat{\pi,\overrightarrow{v_r}}=0\implies\pi\,||\,r$$

Método 2: Ángulo con la proyección (no merece la pena)

Para calcular la proyección de una recta sobre un plano:

1. Comprobamos $r\in\pi:\lambda+\lambda-2\lambda=3\nexists\lambda\in\mathbb{R}\implies r\,||\,\pi$ con $r\cap\pi=\emptyset$
2. Varias opciones:

   a) Necesitamos proyectar 2 puntos de la recta sobre el plano. Tomamos los puntos $A(0,0,0)\in r$ y $B(1,1,1)\in r$.

   A_π: Calculamos $t\perp\pi(\implies\overrightarrow{v_t}\,||\,\overrightarrow{n_\pi})$ con $A\in t\to t\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=-2\lambda\end{cases}$

   Calculamos $t\cap\pi:\lambda+\lambda+4\lambda=3\iff\lambda=1/2\implies t\cap\pi=A_\pi=\left(1/2,1/2,-1\right)$

   B_π: Calculamos $t'\perp\pi(\implies\overrightarrow{v_t'}\,||\,\overrightarrow{n_\pi})$ con $B\in t'\to t'\begin{cases}x=1+\mu\\y=1+\mu\\z=1-2\mu\end{cases}$

   Calculamos $t'\cap\pi:(1+\mu)+(1+\mu)-2(1-2\mu)=3\iff\mu=1/2\implies t\cap\pi=B_\pi=\left(3/2,3/2,0\right)$

   Calculamos $r_\pi:\{A,\overrightarrow{AB}\}\iff r:\begin{cases}x=1/2+\lambda\\y=1/2+\lambda\\z=1/2+\lambda\end{cases}$

   Observación: ¿Es casualidad que $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_{r_\pi}}$? No, una recta paralela a un plano y su proyección sobre ese plano son rectas paralelas, por lo que tienen vectores directores proporcionales.

III.3.4.4. Perpendicular común

Ver figura III.17. Buscamos la recta t, perpendicular a la vez a s y a r, que las corte. Para ello:

- $\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}$
- Dado que encontrar los puntos de intersección es muy complejo, podemos recurrir a construir 2 planos.
    - $\pi_1 : \{\overrightarrow{v_t}, \overrightarrow{v_r}, P_r\}$
    - $\pi_2 : \{\overrightarrow{v_t}, \overrightarrow{v_s}, P_s\}$

  Así, $t : \{\pi_1, \pi_2\}$

Ejercicio 15: *Video de unicoos.*

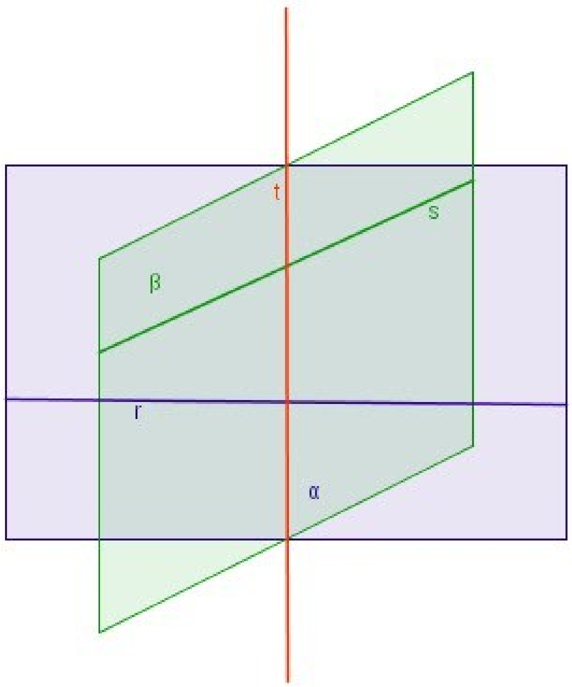


Figura III.17: *Perpendicular común*

III.3.4.5. Recta que corta a 2 rectas y pasa por un punto.

III.3.5. Distancias

III.3.5.1. Entre 2 puntos

Módulo del vector.

III.3.5.2. Entre punto y plano

La distancia entre el punto y su proyección sobre el plano. Ver figura III.18.

- $d(P,\pi) = |PP_\pi|$, siendo P_π la proyección del punto sobre el plano.
- Se puede utilizar otro camino más corto para calcular esta distancia. Ver figura III.18.

  Consideramos $Q \in \pi$.

  $|\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{n_\pi}| \cdot |\overrightarrow{QP}| \cdot \cos(\alpha)$, siendo α el ángulo que forman estos vectores.

  Aplicando la definición de coseno: $\cos(\alpha) = {}^{d(P,\pi)}/_{|\overrightarrow{QP}|}$.

  Sustituyendo y despejando: $|\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{n_\pi}| \cdot d(P,\pi) \to d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{QP}|}{|\overrightarrow{n_\pi}|}$

  $|\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{QP}| = |A(p_1 - q_1) + B(p_2 - q_2) + C(p_3 - q_3)| = Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D$

  Conclusión:

$$d(P,\pi) = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D|}{|(A,B,C)|}$$

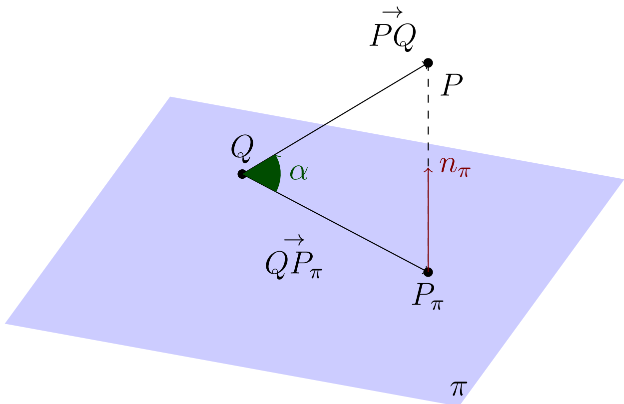


Figura III.18: *Distancia de un punto a un plano*

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{|(A,B,C)|}$$

III.3.5.3. Entre 2 planos o entre una recta y un plano

- Se comprueba si son paralelos (porque sino, distancia 0).
- Si no lo son, calculamos la distancia entre un punto que pertenezca al plano o a la recta y al otro plano.

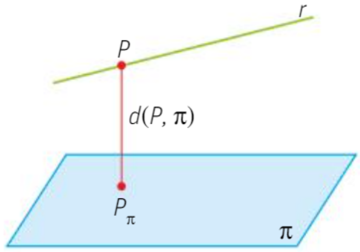


Figura III.19: *Distancia de una recta a un plano paralelo*

III.3.5.4. Entre punto y recta

- $d(P, r) = |PP_r|$, siendo P_r la proyección de P sobre r.
- Otra manera de calcular sería considerar un punto $Q \in r$. Ver figura III.20.

  Considerando $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{v_r}$ (ambos fáciles de calcular), $d(P, r)$ se podría calcular utilizando la definición de seno. Así,

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{QP}}\right) = \frac{|d(P,r)|}{|\overrightarrow{QP}|}$$

  Utilizando $|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{v_r}| = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \operatorname{sen}(\alpha)$, despejamos:

$$|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{v_r}| = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \frac{|d(P,r)|}{|\overrightarrow{QP}|} \iff d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{v_r}|}{|\overrightarrow{v_r}|}$$

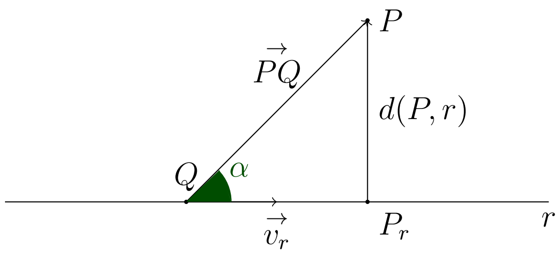


Figura III.20: *Distancia de un punto a una recta*

III.3.5.5. Entre 2 rectas

- Si $r \cap s \neq \emptyset \implies d(r, s) = 0$
- Comprobamos si $r \parallel s$.

  Si $r \parallel s \implies d(r, s) = d(P_r, s) = d(P_s, r)$

  Si $r \not\parallel s \implies d(r, s) = d(r, \pi)$, con $\pi : \{v_r, v_s, P_s\}$

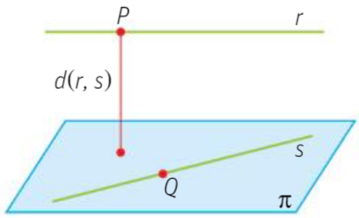


Figura III.21: *Distancia entre 2 rectas que se cruzan*

III.3.6. Lugares geométricos

III.3.6.1. Plano mediador

Es el Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan dedos puntos A y B. Utilizando la definición, consideramos un punto genérico $P(x, y, z)$ al que obligamos a cumplir que

$$\pi : d(P, A) = d(P, B) \iff$$

$$\pi : +\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} = +\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} \iff$$

$$\pi : (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 \iff \ldots$$

Otra opción: Podemos considerar $\pi : \{\overrightarrow{AB} = n_\pi, M_{AB}\}$

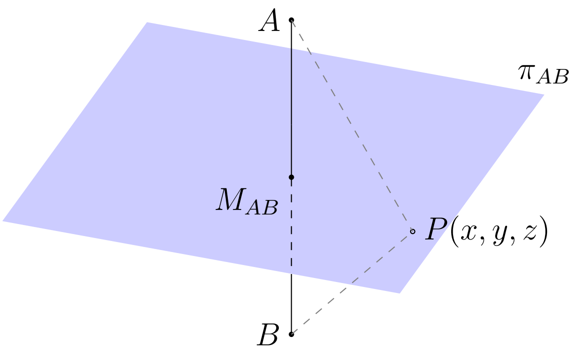


Figura III.22: *Plano mediador de un segmento.*

III.3.6.2. Planos bisectores

Es el Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de2 planos π y τ. Utilizando la definición, consideramos un punto genérico $P(x, y, z)$ al que obligamos a cumplir que

$$d(P, \pi) = d(P, \tau) \iff \frac{|A_\pi x + B_\pi y + C_\pi z + D|}{\sqrt{A_\pi^2 + B_\pi^2 + C_\pi^2}} = \frac{|A_\tau x + B_\tau y + C_\tau z + D|}{\sqrt{A_\tau^2 + B_\tau^2 + C_\tau^2}}$$

Dado que $|A| = |B| \iff \left\{ \begin{array}{c} A = B \\ A = -B \end{array} \right\}$, tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{A_\pi x + B_\pi y + C_\pi z + D}{\sqrt{A_\pi^2 + B_\pi^2 + C_\pi^2}} = + \dfrac{A_\tau x + B_\tau y + C_\tau z + D}{\sqrt{A_\tau^2 + B_\tau^2 + C_\tau^2}} \\ \dfrac{A_\pi x + B_\pi y + C_\pi z + D}{\sqrt{A_\pi^2 + B_\pi^2 + C_\pi^2}} = - \dfrac{A_\tau x + B_\tau y + C_\tau z + D}{\sqrt{A_\tau^2 + B_\tau^2 + C_\tau^2}} \end{cases}$$

Hay 2 soluciones.

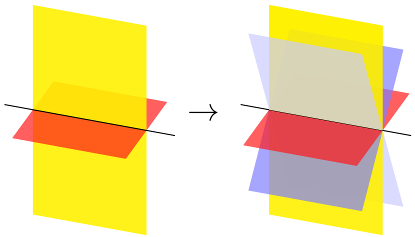


Figura III.23: *En azul, olos planos bisectores de un diedro.*

> **Ejercicio 16**: *Calcula la ecuación de los planos que dividen a los diedros determinados por los planos $\pi : 2x + y - 2z = 1$ y $\pi' : 2x + 2y + z = 5$ en dos partes iguales.*

Sea $P(x, y, z)$

$$d(P, \pi) = d(P, \pi') \iff \frac{|2x + y - 2z - 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2x + 2y + z - 5|}{\sqrt{4+4+1}} \iff |2x+y-2z-1| = |2x+2y+z-5|$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 2x + 2y + z - 5 \\ 2x + y - 2z - 1 = -(2x + 2y + z - 5) \end{cases} \implies \begin{cases} \tau_1 : y + 3z - 4 = 0 \\ \tau_2 : 4x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

Observación: ¿Qué ángulo forman los 2 planos bisectores? La intuición dice que deberían ser perpendiculares, igual que, en 2 dimensiones, las bisectrices de 2 rectas son perpendiculares. Vamos a demostrarlo.

$$\tau_1 \perp \tau_2 \iff \overrightarrow{n_{\tau_1}} \perp \overrightarrow{n_{\tau_2}} \iff \overrightarrow{n_{\tau_1}} \cdot \overrightarrow{n_{\tau_2}} = 0$$

Comprobamos $\overrightarrow{n_{\tau_1}} \cdot \overrightarrow{n_{\tau_2}} = (0,1,3) \cdot (4,3,-1) = 3 - 3 = 0 \implies \tau_1 \perp \tau_2$

¿Qué ocurre si los planos iniciales, π, π', son paralelos? En ese caso solo existe un único plano bisector. Vamos a verlo en otro problema diferente.

> **Ejercicio 17**:
>
> *Determina el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos $\pi : x + y + z + 4 = 0$ y $\pi' : 2x + 2x + 2z + 4 = 0$.*

Sea $P(x, y, z)$

$$d(P,\pi) = d(P,\pi') \iff \frac{|x+y+z+4|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|2x+2y+2z+4|}{\sqrt{4+4+4}} \iff$$

$$\frac{|x+y+z+4|}{\sqrt{3}} = \frac{|2x+2y+2z+4|}{2\sqrt{3}} \iff 2\cdot|x+y+z+4| = |2x+2y+2z+4| \iff$$

$$\begin{cases} 2x+2y+2z+8 = 2x+2y+2z+4 \rightarrow \nexists \tau_1 \\ 2x+2y+2z+8 = -2x-2y-2z-4 \rightarrow 4x+4y+4z+12=0 \iff \tau_2 : x+y+z+3=0 \end{cases}$$

Solo se ha obtenido una solución, debido a que $\pi \,||\, \pi'$.

Definición	**Solución**	**Este curso**
2 puntos	Plano mediador	Sí
2 plano	Plano bisector	Sí
2 rectas paralelas	Plano ¿mediador?	Sí
2 rectas que se cruzan	Ver figura III.24	No
1 puntos	Superficie esférica	Sí, pero no
1 recta	Superficie cilíndrica	No
1 plano	No tiene solución	

Tabla III.1: *Lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de...*

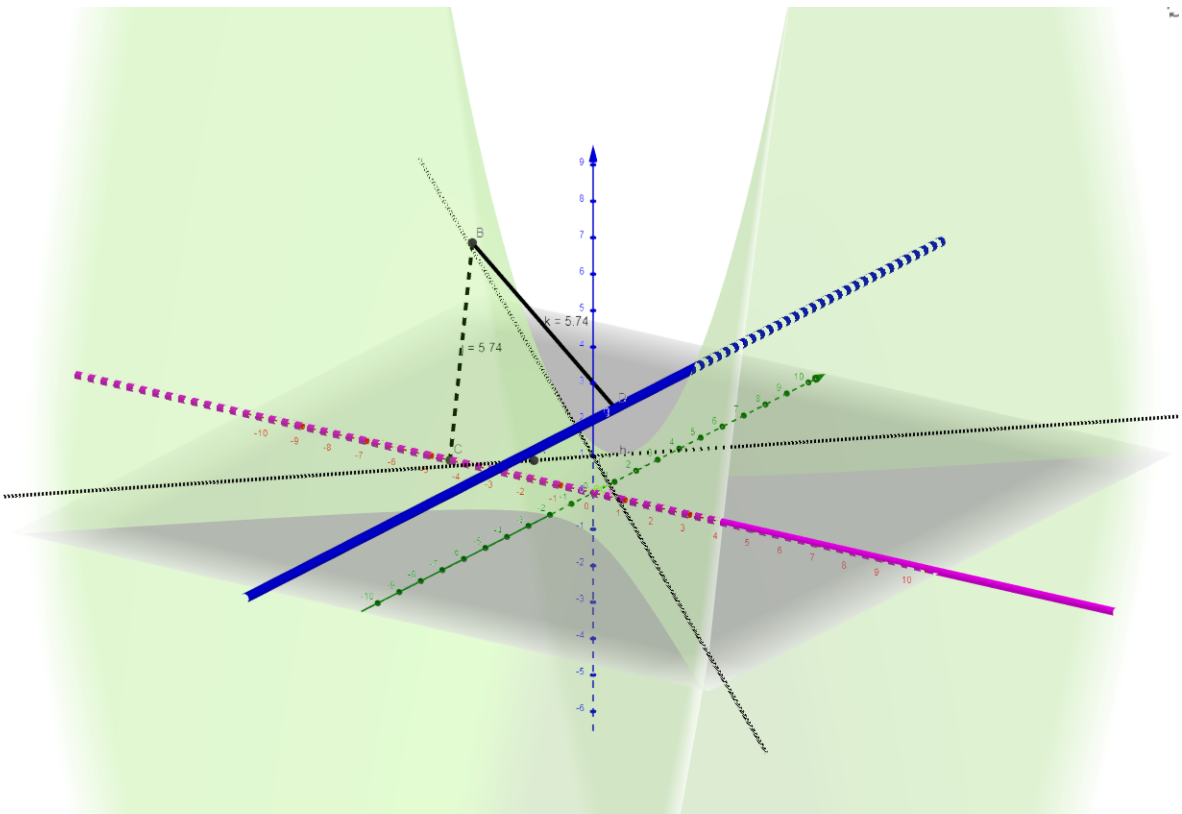


Figura III.24: *Representación geométrica del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan. Para ver en 3 dimensiones, consultar: https://www.geogebra.org/m/rabpxx8t*

III.3.7. Áreas y volúmenes

- Área del paralelogramo: $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$
- Área del triángulo: ${}^{1}/_{2} \cdot \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$
- Volumen del paralelepípedo: $\left|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]\right|$
- Volumen del tetraedro: ${}^{1}/_{6}[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$

Ejercicio 18: *Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,0,-1)$ y corta a las rectas r y s, siendo:*

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}$$

$$s : \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$$

Vídeo de unicoos.

Plan b: Método alternativo: mates con Andrés.

Capítulo IV

Análisis

Función real de variable real

Definición IV.1 **Función real de variable real**. *Una función real de una variable real es una aplicación definida entre dos conjuntos de números reales tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto.*

$f : D \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

- f*: símbolo de la función.*
- $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists f(x)\}$
- $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists x \in \mathbb{R} f(x) = y\}$

Ejemplos de dominios de funciones: Ver hoja adjunta de dominio de funciones elementales.

Ejercicio 1: *Halla el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+5x+4}{x+4}}$

Observación: *¿Cambia el dominio de la función al simplificar?*

b) $f(x) = \log\left(x^2+1\right)$

c) $f(x) = \log\left(-2x^2+10x-12\right)$

d) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(x^2-9\right)$

IV.1. Límites y continuidad

Teorema IV.1 (Teorema de existencia del límite).

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Ejercicio 1: *Página 13, ejercicios 11-14.*

IV.1.1. Indeterminaciones

- Racionales: ${}^0/_0, {}^\infty/_\infty, \infty - \infty, 0\cdot\infty, {}^k/_0$ (Ver por el libro, se dan por supuestas)
- Exponenciales $1^\infty; 0^0; \infty^0$

Ejercicio 2: *Para repasar en sus casas:*

a) *19b,d*

b) *23g,h*

c) *25ac*

Proposición IV.2 (Indeterminación 1^∞).

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \to 1^\infty \implies \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^\lambda, \lambda = \lim_{x\to a}\big(g(x)\cdot[f(x)-1]\big)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a}(1+f(x)-1)^{g(x)} \\
&= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)\frac{f(x)-1}{f(x)-1}} \\
&= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)} \\
&= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}
\end{aligned}$$

$\square$

IV.1.1.1. Infinitésimos equivalentes

Libro página 19. Ver tabla y hacer ejercicio 30.

Infinitésimos equivalentes

Definición IV.2 **Infinitésimos equivalentes**. *Dadas $f(x)$, $g(x)$, $a \in \mathbb{R}$ decimos que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes* **en** *$x = a$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$*

Ejercicio 3: *Ejercicio 30*

IV.1.2. Continuidad (¡Tiene resumen para entregar!)

Continuidad en un punto

Definición IV.3 **Continuidad en un punto**. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.*

Se dice que $f(x)$ es continua en $x = a$ sí y solo si se cumplen las 3 condiciones siguientes:

- $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\exists f(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

También se puede decir de manera abreviada:

$$f(x) \text{ continua en } x = a \iff \text{existen y son iguales } \lim_{x \to a} f(x) \text{ y } f(a)$$

Ejercicio 4: *Halla el valor de m para que la función sea continua en $x = 0$.*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x+m}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aplicamos: "$f(x)$ continua en $x = 0$ si existen y son iguales $\lim\limits_{x \to 0}$ y $f(0)$".

- $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Para calcularlo necesitamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + m}{x + 1} = \frac{2 \cdot 0 + m}{0 + 1} = m$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2 \cdot x - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -5 \iff m = -5 \text{ porque } \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = m \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -5 \end{cases}$$

- Si $m = -5$, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Tipos de discontinuidad

$$\begin{cases} \text{Continua} \\ \text{Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{Esencial} \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ especie} \begin{cases} \text{Salto finito} \\ \text{Salto infinito} \end{cases} \\ 2^{\text{a}} \text{ especie} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Descripción: Libro página 22.

- Evitables: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pero $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a) \\ \text{o} \\ \nexists f(a) \end{cases}$

  Para evitarlas, se define una nueva función: $f(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$

- Esenciales (o inevitables):
  - De primera especie:
    De salto finito: ambos límites laterales son finitos pero distinto.
    De salto infinito: al menos un límite lateral es infinito.
  - De 2^{a} especie: al menos un límite lateral no existe. $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \log(x)$ en $x = 0$.

Observación: Ver figura IV.1.

Continuidad en un intervalo abierto

Definición IV.4 **Continuidad en un intervalo abierto**. *$f(x)$ es continua en (a, b) $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in (a, b)$, $f(x)$ es continua.*

Continuidad por la izquierda y/o por la derecha

Definición IV.5 **Continuidad por la izquierda y/o por la derecha**.

- *Una función (x) es continua por la derecha de a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(x)$*
- *Una función (x) es continua por la izquierda de a si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(x)$*

Continuidad en un intervalo cerrado

Definición IV.6 **Continuidad en un intervalo cerrado**. *$f(x)$ es continua en $[a, b]$ $\Longleftrightarrow$*

$$\forall x \in [a, b], \begin{cases} f(x) \textit{ es continua en } (a, b) \\ \textit{Continua por la derecha de } a \\ \textit{Continua por la izquierda de } b \end{cases}$$

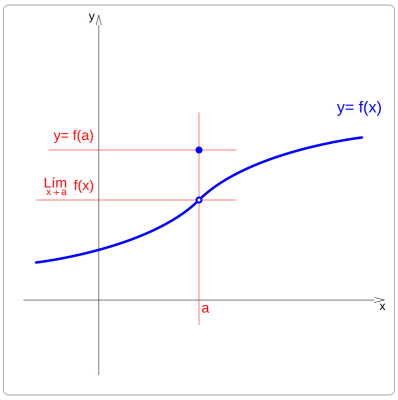


Figura IV.1: *Ejemplo de discontinuidad evitable*

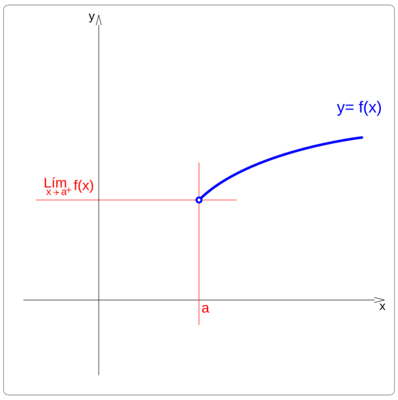


Figura IV.2: *Ejemplo de discontinuidad de 2ª especie*

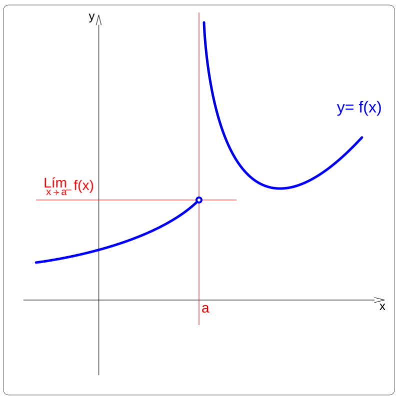


Figura IV.3: *Ejemplo de discontinuidad de salto infinito*

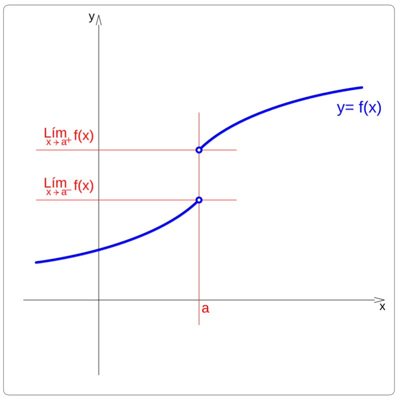


Figura IV.4: *Ejemplo de discontinuidad de salto finito*

Ejemplo: *Dada* $f(x) = +\sqrt{x}$.

$f(x)$ *es continua en su dominio, por ser función radical.* $f(x)$ *continua en* $(0, \infty)$.

$f(x)$ *no es continua en* $x = 0$*, pero sí es continua por la derecha en* $x = 0$*, ya que* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ *en* $[0, \infty)$.

Funciones polinómicas	Continuas en $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x), Q(x)$ polinomios	Continuas en $\mathbb{R} - \{x \,/\, Q(x) = 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$\begin{cases} n \text{ impar: continua en } \mathbb{R} \\ n \text{ par: continua en } \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) \geq 0\} \end{cases}$
$f(x) = a^x$ con $a > 0$	Continua en $\mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$ (con $a > 0, a \neq 1$)	Continua en $\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)$	Continua en $\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg}(x)$	Continua en $\mathbb{R} - \left\{x = {}^{\pi}/_{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$ $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(x)$ $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$	Continua en su dominio. Continua en su dominio. Continua en su dominio.

Tabla IV.1: *Continuidad de las funciones elementales*

Ejercicio 5: *Ejercicios 23.41 y 23.42.*

Ejercicio 6: *Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades*

- $f_1(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x}$
- $f_2(x) = \begin{cases} \log x + 1 & x \leq -1 \\ x & x > 1 \end{cases}$

Teorema IV.3 (Teorema de Bolzano). *Sea* $f : D \longmapsto \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \textit{ continua en } [a, b] \\ \textit{Signo}(f(a)) \neq \textit{Signo}(f(b)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a, b) \,/\, f(c) = 0$$

Observación: Es una condición suficiente, no necesaria. Es decir, es $\Longrightarrow$. Por ejemplo, $f(x) = (x-1)^2$ corta en $x = 1$, pero no cumple las condiciones.

Ejercicio 7: *Demuestra que la ecuación $x^3 - 7x^2 - 1$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, 10]$.*

Sea $f(x) = x^3 - 7x^2 - 1$. Se trata de demostrar que $\exists c \in [0, 10] \ / \ f(c) = 0$. Comprobamos que cumple el teorema de Bolzano.

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \text{ es continua en } [0,10] \text{ por ser polinómica} \\ \left. \begin{array}{c} f(x) = -1 \\ f(10) = 299 \end{array} \right\} \Longrightarrow Signo(f(0)) \neq Signo(f(10)) \end{array} \right\} \Longrightarrow \exists c \in (0,10) \ / \ f(c) = 0$$

Teorema IV.4 (Teorema del valor intermedio). *Sea $f : D \longmapsto \mathbb{R}$.*

$$\left. \begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} f(a) \leq k \leq f(b) \\ f(b) \leq k \leq f(a) \end{cases} \end{array} \right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \ / \ f(c) = k$$

Observación: Para $k = 0$, el teorema del valor intermedio se convierte en teorema de Bolzano.

Ejercicio 8: *Demuestra que las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = x$ se cortan en algún punto.*

Basta considerar la función $h(x) = f(x) - g(x) = \cos(x) - x$. Así, demostrar que las funciones se cortan será equivalente a demostrar que $\exists c \in \mathbb{R} \ / \ h(x) = 0$.

Esta función es continua en $\mathbb{R}$, por ser resta de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Buscamos $c \in \mathbb{R} \ / \ h(c) = 0$. Consideramos $h(0) = 1$ y $h\left(\pi/2\right) = -\pi/2 < 0$.

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in \left(0, \pi/2\right) \ / \ h(c) = 0$, por lo que podemos concluir que las funciones se cortan.

Ejercicio 9:

- *35.108 (continuidad)*
- *36.113 (continuidad)*
- *36.117 (problema - continuidad)*
- *36.119,120 (límites)*
- *Página 37.autoevaluación.*

Teorema IV.5 (Teorema de Weierstrass). *Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en $[a, b]$.*

Observación: Este teorema se utilizará en el siguiente tema.

IV.2. Derivadas y derivabilidad

IV.2.1. Introducción y repaso

Pendiente de una recta

Definición IV.7 **Pendiente de una recta**. *Sea la recta $y = mx + n$.*

*Se define **pendiente de la recta**, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$*

Derivada en un punto

Definición IV.8 **Derivada en un punto**. *Se define $f'(a)$ como la derivada de $f(x)$ en el punto $x = a$.*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$(1) : h = x - a \iff x = a + h$

Ver figura ??.

Ejemplo: *Dada $f(x) = |x|$, calcula $f'(0)$.*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Calculamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto, $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \iff \nexists f'(a)$

IV.2.1.1. Interpretación geométrica de la derivada

Ver figura ??.

IV.2.1.2. Derivabilidad

Derivabilidad en un punto

Definición IV.9 **Derivabilidad en un punto**.

$$f(x) \text{ derivable en } x = a \iff \exists f'(a)$$

Proposición IV.6. *$f(x)$ derivable en $x = a \implies f(x)$ continua en $x = a$*

Observación: *El recíproco no es cierto. Basta comprobar el ejemplo IV.2.1 ($f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no derivable en $x = 0$).*

Derivabilidad en un intervalo abierto

Definición IV.10 **Derivabilidad en un intervalo abierto.**

$$f(x) \text{ derivable en } (a,b) \iff \forall c \in (a,b) \exists f'(c)$$

Dominio de derivabilidad

Definición IV.11 **Dominio de derivabilidad.** *El dominio de derivabilidad de una función $f(x)$ es el mayor conjunto en el que la función es derivable.*

Ejemplo: *$f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.*

El dominio de derivabilidad de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

Derivabilidad lateral: De la misma manera que existía la *continuidad lateral*, también podemos hablar de *derivabilidad lateral*.

Derivada lateral

Definición IV.12 **Derivada lateral**. *La derivada lateral de f en $x = a$ por la derecha, escrita $f'(a^+)$, si existe:*

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada lateral de f en $x = a$ por la izquierda, escrita $f'(a^-)$, si existe:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

Observación: *Esta última igualdad se debe a que $h \to 0^- \implies h < 0$. Si resulta menos confuso, puede elegirse trabajar siempre con $h > 0$ y así los signos quedan explicitados.*

Ejercicio 1: *Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x \leq 0 \\ 3 \cdot \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ será derivable en $x = 0$ si $\exists f'(0)$. Dado que $f(x)$ está definida a trozos, calculamos la derivadas laterales.

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0-h)^2 + 3 \cdot (0-h) - (0^2 + 3 \cdot 0)}{-h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(h-3)}{-h} = +3$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot\frac{(0+h)^2+(0+h)}{0+h+1} - (0^2-3\cdot 0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot\frac{h^2+h}{h+1}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot h\cdot(h+1)}{h(h+1)} = 3$$

Conclusión: Dado que $f'(0^-) = f'(0^+) \implies f'(0) = 3$, por lo que la función es derivable en $x = 0$.

Observación: También podríamos haber calculado la derivada lateral por la izquierda de la siguiente manera:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+3\cdot h-(0^2+3\cdot 0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+3)}{h} = +3$$

Ejercicio 2.Página 43, 14.: *¿Es la siguiente función derivable en $x=-2, x=0, x=2$?*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -4(x+1) & \text{si } -2 < x \le 0 \\ 3x^2-4 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ 12x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.Página 56, ejercicio 78.: *Dada la función $f(x)$, calcula $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función sea derivable en $x=1$, sabiendo que $f(0)=f(4)$.*

Solución: $a = -{}^7/_4; b = 1; c = {}^1/_4$

IV.2.1.3. Función derivada

Función derivada

Definición IV.13 **Función derivada**. *Dada $f : D(f) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Sea $Dv(f)$ el dominio de derivabilidad de f.*

La función derivada denotada por $f'(x) : Dv(f) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ hace corresponder a cada $a \in Dv(F)$ el valor $f'(a)$.

Ejercicio 4:

- *51.58 (2 trigonométricas inversas)*
- *59.113 (8 variadas. Solo la h tiene una trigonométrica inversa.)*
- *57.79-81 (Ejercicios resueltos)*

IV.2.2. Aplicaciones de la derivada

IV.2.2.1. Recta tangente y recta normal

Ecuación de la recta tangente: Utilizando la ecuación de la recta punto-pendiente y la interpretación gráfica de la derivada (ver ??), se obtiene fácilmente la siguiente ecuación:

$$\text{Recta tangente a } f(x) \text{ en } x_0 \rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad \text{(IV.1)}$$

Ejercicio 5: *Demuestra que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación: $y = x^3 + 6x^2 + 8x$*

Consideramos $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$.

Buscamos $c \in \mathbb{R} \,/\, f'(c) = -1$.

$$3c^2 + 12c + 8 = -1 \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Los posibles puntos de tangencia son $P_1(c_1, f(c_1)) = (1, 3)$ y $P_2(c_2, f(c_2)) = (3, -3)$.

Es necesario comprobar que dichos puntos son realmente de tangencia, es decir, que pertenecen a la recta y a la gráfica.

$$P_1 : 3 \neq -1 \implies \text{no pertenece a la recta}$$
$$P_2 : -3 = -3 \implies \text{sí pertenece a la recta}$$

Conclusión: El punto de tangencia de la recta $y = -x$ a la gráfica $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ es $P_2(3, -3)$

Ecuación de la recta normal: Dos rectas dadas, en 2 dimensiones, $r : y = m_r x + n_r \quad ; \quad s : y = m_s x + n_s$ son perpendiculares si y sólo si $m_r \cdot m_s = -1 \iff m_s = {}^{-1}/_{m_r}$. Aplicando este resultado a la fórmula de la recta tangente anterior, tenemos:

$$\text{Recta normal a } f(x) \text{ en } x_0 \rightarrow y - f(x_0) = {}^{-1}/_{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad \text{(IV.2)}$$

IV.2.2.2. Teoremas de derivabilidad

Teorema IV.7 (Teorema de Rolle).

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } [a, b] \\ f(x) \text{ derivable en } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \implies \exists c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$$

Observación: ¿Puede haber más de un punto? ¡Claro que sí! Basta pensar en una función horizontal.

Ejercicio 6: *Sea* $f(x) = 2x^5 + x + a$. *Demuestra que* $\exists! c \in \mathbb{R} \;/\; f(c) = 0$

Por el teorema de Bolzano, hay al menos una raíz real.

Veamos que es única. Si hubiera otra raíz real, d, tendríamos $f(c) = f(d)$ en una función continua en $[c, d] \subset \mathbb{R}$ y derivable en $(c, d) \subset \mathbb{R}$ por ser una función polinómica. Así, se puede aplicar el teorema de Rolle, argumentando que $\exists c \in \mathbb{R} \;/\; f'(c) = 0$, pero $f'(x) = 10x^4 + 1 \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Conclusión: dado que $f(x)$ cumple todas las hipótesis del teorema de Rolle, debemos concluir necesariamente que no hay otra raíz real d[1].

Ejercicio 7: *67.8*

Teorema IV.8 (Teorema del valor medio).

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \implies \exists c \in (a,b) \;/\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación: *El teorema de Rolle es un caso particular de este teorema que se da cuando* $f(a) = f(b)$

Observación: ¿Puede haber más de un punto? ¡Claro que sí!

Ejercicio 8: *Considera la función* $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

Calcula el valor del parámetro real a *para el que se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo* $[0, 1]$ *a la función* $g(x) = f(x) + ax$

$$g(x) = x \cdot e^{-x^2} + ax = x \cdot \left(a + e^{-x^2}\right)$$

Las hipótesis del teorema de Rolle son:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ continua en } [0,1] \rightarrow \text{ En este caso se cumple por ser suma de función polinómica y exponencial} \\ g(x) \text{ derivable en } (0,1) \rightarrow \text{ En este caso se cumple por ser suma de función polinómica y exponencial} \\ g(a) = g(b) \end{array}\right\}$$

[1] Sino, el teorema fallaría y eso no es posible.

Necesitamos que $g(0) = g(1)$.

$$0 \cdot \left(a + e^{-0^2}\right) = 1 \cdot \left(a + e^{-1^2}\right) \iff 0 = a + e^{-1} \iff a = -e^{-1}$$

Observación: Este problema salió en las noticias de 2019 porque se preguntó en la EVAU de valencia y los alumnos se enfadaron mucho.

Ejercicio 9:

17.2-MadA) *Estudia la derivabilidad en* $x = 0$ *de* $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$.

16.1-MadB) *Determina el polinomio* $f(x)$, *sabiendo que* $\forall x \in \mathbb{R} f'''(x) = 12$ *y además verifica* $f(1) = 3; f'(1) = 1; f''(1) = 4$.

16.1-MadB) *Estudie la continuidad y la derivabilidad en* $x = 0$ *y en* $x = 1$ *de* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \ln(x) & \text{si} x > 0 \end{cases}$

IV.2.2.3. Regla de L'Hôpital

IV.2.2.4. Monotonía

Teorema IV.9 (Teorema de monotonía).

Teorema IV.10 (Teorema de extremos relativos).

IV.2.2.5. Optimización

Teorema IV.11 (Teorema de Weierstrass). *Si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$, *entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en* $[a, b]$.

IV.3. Análisis sistemático de una función

IV.4. Integrales

IV.4.1. Cálculo de áreas de recintos cerrados

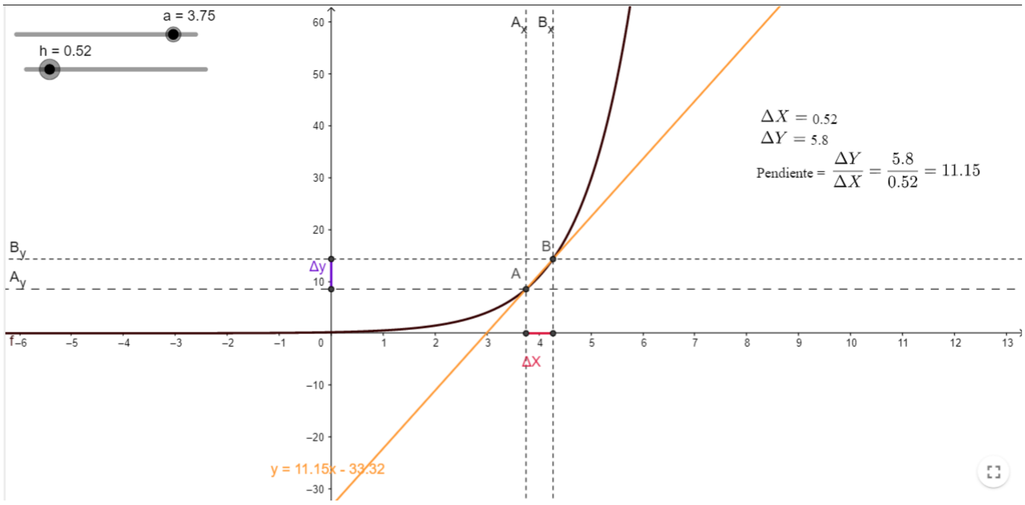


Figura IV.5: *Interpretación geométrica de la derivada*
Cuando $h \to 0$, el punto B se acercará cada vez más al punto A, dando lugar a la recta tangente. Para una mejor comprensión consultar la versión de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/jwtw6mdt#material/f52nQ7T5

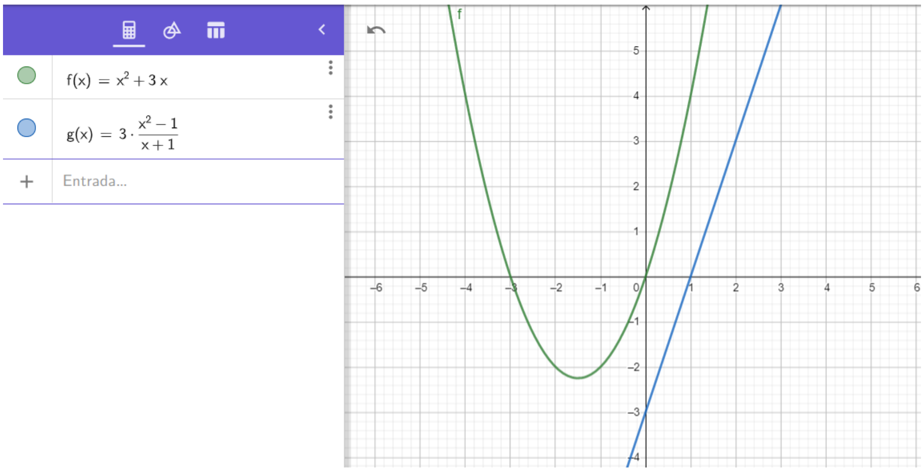


Figura IV.6: *Representación gráfica del problema 1.*
Claramente la derivada en $x = 0$ no puede existir, dado que la función no es continua.

Estudio de la derivabilidad en función de parámetros

78. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ cx & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

calcula a, b y c para que la función sea derivable en $x=1$ sabiendo que $f(0)=f(4)$.

La condición $f(0)=f(4) \Rightarrow b=4c$.

Para que la función sea derivable en $x=1$ debe cumplirse:

- que sea continua en dicho punto: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} cx=c=f(1)\end{array}\right\} 1+a+b=c$$

- que $f'(1^-)=f'(1^+)$:

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+a(1+h)+4c-c}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+(2+a)h+1+a+3c}{h}$$

Para que el límite anterior exista: $1+a+3c=0$ y el límite es $2+a$.

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c(1+h)-c}{h}=c \text{ y por tanto } f'(1^+)=f'(1^-) \Rightarrow c=2+a$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases}1+a+b=c \\ 2+a=c \\ b=4c\end{cases} \Rightarrow b=1,\ c=\frac{1}{4}$ y $a=-\frac{7}{4}$, luego $f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{7}{4}x+1 & \text{si } x<1 \\ \frac{1}{4}x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

Figura IV.7: *Ejercicio sacado del libro de SM*

Índice alfabético

Índice de figuras

Índice de tablas