Matemáticas aplicadas CCSS II - Apuntes de clase

Departamento de Matemáticas
Sa-Fa - 2023-2024

Colegio Sagrada Familia
de Moratalaz

Índice general

Introducción

- 2º de Bachillerato no es un curso para preparar la EVAU. Es un curso orientado a la universidad y es para eso para lo que te vamos a preparar. Ya tendremos tiempo a final de curso para preparar la EVAU.
- 2º de Bachillerato no es solo estudiar. Sed responsables y organizados para poder disfrutar del curso. ¡Tratad bien a vuestras familias! Que los exámenes no os hagan ser unos amargados.
- A vuestra disposición por correo y por el classroom para lo que necesitéis. Colgaremos en el classroom los enunciados de los exámenes, las soluciones, etc.
- Criterios de evaluación:

  10 % actividades, 30 % primer parcial y 60 % examen final.

  Se mantiene la evaluación continua, como el año pasado
- Fomento de la lectura: el Árbol de Emmy. Lectura voluntaria que sube la nota en la 1ª o en la 2ª ev. porque en la 3ª estará el concurso de fotografía matemática.
- Sobre la EVaU (primera y última mención en mucho tiempo). Nos convocarán a una reunión y ya os contaremos cuando sepamos más. De momento, hay mucho temario que ir disfrutando. Relax.
- *Notas para mi:*

  5 problemas de 2 puntos cada uno.

  1- Números, álgebra (Matrices y Sistemas) y programación lineal.

  2- Álgebra / análisis

  3- Análisis

  4- Probabiblidad (igual que la de 1º)

  5- Estadística, inferencia estadística [Distribución de la diferencia de media no entran]

Capítulo I

Probabilidad y Estadística

I.1. Probabilidad

Los sucesos en probabilidad se escriben entre comillas y se representan con una letra mayúscula.

mal $I =$ impar

mal $I =$ probabilidad de sacar un número impar

mal $I =$ "Probabilidad de sacar un número impar"

bien $I =$ "Sacar un número impar"

Operaciones con conjuntos (o sucesos)

$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$ (Unión)

$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$ (Intersección - Probabilidad compuesta)

$A^c = \overline{A} = \{x \notin A$ (Complementario) *No se llama contrario.*

$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$ (Diferencia)

Observación: $A - B = A \cap \overline{B}$

Leyes de de Morgan

Definición I.1 **Leyes de de Morgan.**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Compatibilidad

Definición I.2 **Compatibilidad.** *Sean A, B dos sucesos.*

Son compatibles si $A \cap B \neq \emptyset$. Son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Sistema completo de sucesos

Definición I.3 **Sistema completo de sucesos.** *Sean $A_1, ..., A_n$ sucesos de un cierto experimento aleatorio. Se dice que forman un sistema completo de sucesos del espacio muestral E cuando:*

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$
- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j = 1...n$

Ejemplo: *Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ¿Son sistemas completos de sucesos las siguientes agrupaciones?*

- $A_1 = \{1, 2, 3\}; A_2 = \{4, 5\}; A_3 = \{6\}$
- $A_1 = \{\text{múltiplos de 3}\}; A_2 = \{\text{números pares}\}; A_3 = \{1, 5\}$

Proposición I.1. *Sea $A_1, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Regla de Laplace

Definición I.4 **Regla de Laplace**. *Si los sucesos elementales de un experimento aleatorio son* ***equiprobables****, entonces, $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$*

Observación: ¿Y si no son equiprobables?

Probabilidad Ley de los grandes números

Definición I.5 **Probabilidad Ley de los grandes números**. *Sea A un suceso y $h(A)$ su frecuencia de ocurrencia relativa*[1] *en n repeticiones del experimento. Entonces*

$$P(A) = \lim_{n \leftrightarrow \infty} h(A)$$

Probabilidad Axiomática de Kolmogorov

Definición I.6 **Probabilidad Axiomática de Kolmogorov**. *Sea p una función que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S un número real designado por $p(A)$.*

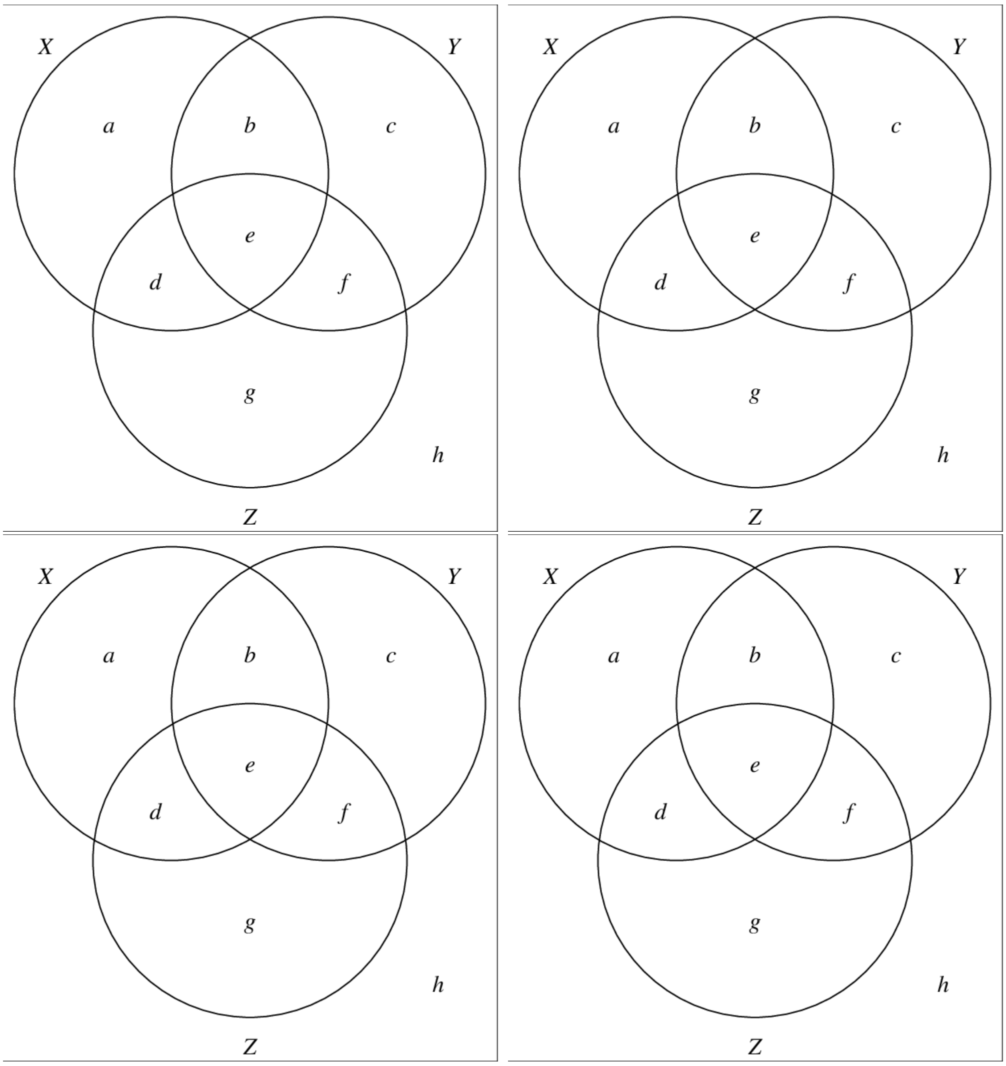
Decimos que p es una probabilidad si cumple las siguientes propiedades:

- $0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall A \in S$
- $p(E) = 1$
- $A \cap B = \emptyset \implies p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

[1] El porcentaje de veces que ese suceso ocurre.

Propiedades de la probabilidad: Sea A un suceso cualquiera:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Probabilidad condicionada

Definición I.7 **Probabilidad condicionada**. *Sean A, B sucesos de un suceso aleatorio.*

Se define la probabilidad condicionada $p(A/B)$ como la probablidad de que se produzca A si sabemos que se ha producido B.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Independencia de sucesos

Definición I.8 **Independencia de sucesos**. *A, B son sucesos independientes si y sólo si*

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A)$$

Teorema I.2.

$$A, B \text{ \textit{independientes}} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Demostración.

$$\left.\begin{array}{rl} P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} & \iff P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \\ A, B \text{ independientes} & \iff P(A/B) = P(A) \end{array}\right\} *$$

$$(*) \implies P(A \cap B) = P(B) \cdot \underset{P(A/B)}{P(A)} = P(B) \cdot P(A)$$

□

Teorema I.3 (Teorema Probabilidad Total). *Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos y sea B otro suceso.*

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B) =$$

$$P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + ... + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Teorema I.4 (Teorema de Bayes).

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Demostración.

$$\left.\begin{array}{r} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \\ P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \end{array}\right\} \implies P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \iff$$

$$\iff P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

□

Bayesian trap (obtenido de youtube.com/Veritasium)

Ejemplo: *Se sabe que una enfermedad rara sólo afecta al 1 % de la población. El porcentaje de falsos positivos de las pruebas médicas es del 10 %, y el porcentaje de falsos negativos es del 1 %.*

Intuitivamente, ¿cuál dirías que es la probabilida de tener la enfermedad sabiendo que has dado positivo en el test? ¿Podrías calcularlo numéricamente?

Los datos son: $P(E) = 0.01$, $P(-|E) = 0.01$ *y* $P(+|\overline{E}) = 0.1$

Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(E|+) = \frac{P(+|E) \cdot P(E)}{P(+)} = \frac{P(+|E) \cdot P(E)}{P(+|E) \cdot P(E) + P(+|\overline{E}) \cdot P(\overline{E})} = 0.01$$

I.2. Estadística

A la hora de hacer un estudio estadístico buscamos obtener información sobre toda la población. A veces, esa cantidad de información es inmanejable e inconseguible. Por ejemplo, test de COVID a toda la población para ver cuántos lo han pasado, no es viable. Por ello, se selecciona una parte de la población y se le hacen los test a una parte para después extrapolar esos resultados.

Así, definimos:

Población

Definición I.9 **Población**.

Muestra

Definición I.10 **Muestra**.

Individuo

Definición I.11 **Individuo**.

Nota: estos términos también se utilizan al tratar de tornillos en una fábrica.

Parámetros poblacionales
Muestrales

Este año vamos a trabajar y a distinguir los **parámetros poblacionales** de los **muestrales**. Llamaremos μ y $\sigma\cdot$ a la media y desviación típica *poblacionales* y $\bar{x}$ y S a la media y desviación típica *muestral*.

El **objetivo** de este tema es conseguir información sobre los parámetros poblacionales a partir de los parámetros muestrales.

Para ello, antes de empezar es necesario que intentemos contestar la pregunta: ¿Cómo se asegura uno de que su muestra es buena? Porque si queremos saber lo que opinan los alumnos del colegio sobre la semipresencialidad y tomamos de muestra a los alumnos de 2º de Bachillerato, la información que saquemos no será fiable.

Representativas
Muestreo

Necesitaremos que las muestras sean **representativas** de toda la población, esto es, que refleje fielmente las características de la población. Llamamos **muestreo** al proceso por el que se construye una muestra de una población. Como seguro que te imaginas, hay distintos tipos de *muestrear* una población. Vamos a verlos:

I.2.1. Tipos de muestreo

Los muestreos pueden ser aleatorios (si todos sus miembros tienen la misma posibilidad de ser elegidos) o no aleatorios (si no es así). Dado que los muestreos aleatorios otorgan una mayor representatividad, nos centraremos en ellos:

Consideremos que eres el encargado de calidad de una fábrica de tornillos, que fabrica tornillos de distintos tipos.

- Aleatorio simple.

  ¿Cuántas muestras se pueden formar?

  Estimación de los parámetros poblacionales desde los muestrales.

  Con reposición (días de la semana que se tienen que elegir), sin reposición (personas).

- Sistemático.

  Constante de elevación

  Ordenados, de h en h (**Constante de elevación**).

- Estratificado:

  Agrupación por característica. Estratos diferentes entre ellos. Elementos iguales en cada estrato.

  Afijación igual o proporcional.

  Dentro de cada estrato... ¿Aleatorio simple? ¿Sistemático?

- Conglomerados:

  División de cada característica. Conglomerados iguales entre ellos. Elementos diferentes en cada estrato.

  Dentro de cada estrato... ¿Aleatorio simple? ¿Sistemático?

Importancia de los grupos control

I.3. Distribuciones de probabilidad

Repaso de la distribución normal desde el PPT del departamento.

I.4. Inferencia estadística

Inferir significa deducir algo o sacarlo como conclusión de otra cosa. [2]

La tarea que nos va a mantener ocupados unas semanas va a ser la siguiente: *Disponemos de una población con un parámetro desconocido. Tomaremos una muestra e inferiremos acerca del valor del parámetro poblacional utilizando información sobre la muestra.*

[2] https://dle.rae.es/inferir

I.4.1. Inferencia sobre la media

Trabajaremos haciendo inferencia de la media. Tendremos poblaciones de las que conocemos su desviación típica (irreal en la vida diaria, pero así es el mundo de 2º de Bachillerato). Más adelante, en vuestra historia con las matemáticas, haréis inferencia de una manera más seria.

Ejemplo: *Los de casa, rellenad en el enlace que os doy vuestro dato sobre la altura. Nuestra población serán todos los alumnos que están en casa.*

Una vez dispongamos de los datos, vamos a tomar una muestra para estimarla media de la población. ¿De cuánto cogemos la muestra? De cuantas más personas, mejor, ¿no?

Hay un resultado fundamental en inferencia estadística (Teorema Central del Límite) del que se deduce que la ***media muestral se distribuye*** $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Media muestral se distribuye

Ejemplo: *Ejemplo de cálculo, siguiendo el libro.*

I.4.1.1. Estimación de la media

Lo que acabamos de hacer no es inferir, sino entender que la media muestral se distribuye según una distribución normal cuando tenemos suficientes datos (>30) o los datos poblacionales siguen una distribución normal.

¿Qué ocurre si desconocemos la media de la población y queremos inferirla con una muestra? Tenemos **dos opciones**, estimación puntual y estimación por intervalos.

Estimación puntual: Inferimos μ a partir de $\overline{X}$ y decimos: $\mu \sim \overline{X}$

Estimación por intervalos de confianza: Inferimos μ a partir de $\overline{X}$ y σ y decimos: $\overline{X} - E < \mu < \overline{X} + E$, donde E es una amplitud del intervalo que dependerá de varios factores:

- **La confianza:** no hay ninguna duda que $-\infty < x < \infty$. Esta inferencia tiene una confianza del 100 %, pero no da mucha información.
- **La desviación típica poblacional** σ: ya que, cuanto más dispersos estén los datos de la población, más variabilidad tendrá $\overline{X}$ y más grande deberá ser el intervalo para la misma confianza.

Teorema I.5 (Intervalo de confianza para la media). *Un intervalo de confianza para la media población de una distribución normal con desviación típica conocida, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n es:*

$$(\overline{x} - \mathcal{E}, \overline{x} + \mathcal{E})$$

Donde $\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y se denomina ***Error máximo admisible*** *(no es otra cosa* *que la amplitud del intervalo de confianza).*

Y $z_{\alpha/2}$ es el valor que cumple:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

***Observación**: Nivel de confianza $1-\alpha \iff$ Nivel de significación α*

Ejemplo: *Ejemplo de cálculo sacado del libro.*

Ejercicio 11

Cálculo del tamaño de la muestra: Dado que $\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, podríamos buscar qué tamaño de la muestra debo escoger para construir un intervalo de confianza de amplitud dada.

Ejemplo: *Ejemplo de cálculo del libro.*

Ejercicio 16

I.4.2. Inferencia sobre la proporción

Error máximo admisible

Lo primero que necesitamos tener claro es lo que es una **proporción**:

Llamaremos $\hat{P}$ a la distribución de la proporción meustral. Será ρ el parámetro a estimar.

$$\hat{P} \sim N\left(\rho, \sqrt{\frac{\rho q}{n}}\right), q = 1-\rho$$

Ejemplo: *Ejemplo de cálculo del libro*

I.4.2.1. Estimación sobre la proporción

Aquí también tenemos la estimación puntual $\left(\hat{P} \approx \rho\right)$ y una estimación por intervalos de confianza.

Proposición I.6 (Intervalo de confianza para la proporción). *Un intervalo de confianza para la proporción de individuos que cumplen una característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n es:*

$$(\hat{p} - \mathcal{E}, \hat{p} + \mathcal{E})$$

Proporción

*Donde $\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ y se denomina **Error máximo admisible** (no es otra cosa que* *la amplitud del intervalo de confianza).*

Y $z_{\alpha/2}$ *es el valor que cumple:*

$$P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Observación*: Nivel de confianza* $1-\alpha \iff$ *Nivel de significación* α

Ejemplo: *Ejemplo de cálculo del libro*

Ejercicio 17

Cálculo del tamaño de la muestra: Dado que $\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, podríamos buscar qué tamaño de la muestra debo escoger para construir un intervalo de confianza de amplitud dada.

Ejemplo: *Ejemplo de cálculo del libro.*

Ejercicio 19

Capítulo II

Álgebra (Matrices y determinantes)

II.1. Matrices

Definición de matriz

Operaciones con matrices

Traspuesta Ejercicio: **Demuestra que cualquier matriz puede escribirse como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica**

Producto de matrices

II.1.1. Matriz inversa

Se puede calcular de 3 formas. Definición, Gauss-Jordan y matriz adjunta. Vamos a ver ahora los 2 primeros métodos.

Definición y propiedades

II.1.2. Algunas ecuaciones matriciales sencillas

Gauss-Jordan La base del método de Gauss es que toda transformación lineal de Gauss se puede expresar como una matriz. Simplemente buscamos la matriz que transforma la matriz dada en la identidad. Para ello, ponemos la identidad a la derecha. (Espero que leyendo esta explicación te hayas enterado)

II.1.3. Utilidades: Grafos

II.2. Determinantes

Determinante *Definición II.1* **Determinante.** $|\ |: \mathcal{M}_n \longmapsto \mathbb{R}$

II.2.1. Cálculo de determinantes de orden 3

II.2.2. Propiedades

II.2.3. Cálculo de determinantes de orden 4 o más

Menores, Gauss

II.2.4. Matriz inversa por determinantes

II.2.5. Ecuaciones matriciales a tope

II.2.6. Rango

Gauss

Determinantes Si $|A| \neq 0$, significa que no hay 2 filas (ni 2 columnas) linealmente independientes. Si las hubiera, $|A| = 0$.

Por lo tanto, si $|A| \neq 0 \iff rg(A) =$ máx

¿Qué ocurre si $A \notin \mathcal{M}_n$?

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, cogiendo $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$, *pero* $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, *por lo que estas 2 filas tienen que ser linealmente independientes, por lo que la matriz tiene rango 2.*

También valdría argumentarlo desde $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Proposición II.1 (Cálculo del rango por menores). *Sea M_p un menor de orden p de la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$*

$$\exists M^p \text{ tal que } M_p \neq 0 \iff rg(A) \geq p$$

$$\forall M^p \ \ M_p = 0 \iff rg(A) < p$$

II.2.6.1. Matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Determinante: El determinante se calcula con la siguiente fórmula:

$$\left|V\right| = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \underbrace{\overbrace{(3-2)}^{j=2}\overbrace{(4-2)}^{j=3}\overbrace{(5-2)}^{j=4}}_{i=1}\underbrace{\overbrace{(4-3)}^{j=3}\overbrace{(5-3)}^{j=4}}_{i=2}\underbrace{\overbrace{(5-4)}^{j=4}}_{i=3} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 6$$

Demostración. [por Inducción]

Base: n=2 Es fácil notar que en el caso de una matriz de 2×2 el resultado es correcto.

$$\left|V\right| = v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1} = \alpha_2 - \alpha_1 = \prod_{1\leq i<j\leq 2} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Paso Suponiendo cierta la fórmula para el caso $n-1$, procedemos a calcular el determinante de orden n. Para ello, basta con realizar la siguiente operación elemental sobre cada columna: $C_j \to C_j - (\alpha_1 \times C_{j-1})$. Esta operación no afecta al determinante, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$\left|V\right| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_1) \\ 1 & \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3-\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n-\alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n-\alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n-\alpha_1) \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los adjuntos de la primera fila:

$$\left|V\right| = \begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_1) \\ \alpha_3-\alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3-\alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n-\alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n-\alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n-\alpha_1) \end{vmatrix}$$

Extrayendo de cada fila un factor, obtenemos:

$$\left|V\right| = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\dots(\alpha_n-\alpha_1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-2} \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \dots & \alpha_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{(1)}$$

(1): es una matriz de Vandermonde de orden $n-1$, por lo que podemos aplicar la fórmula por la hipótesis de inducción, quedando así demostrada la fómrula del determinante de Vandermonde para orden n □

II.3. Sistemas de ecuaciones

Sistemas, expresión matricial de sistemas.

Rouché-Frobenius, corregimos.

Resolución de sistemas escalonados y método de Gauss Jordan.

"Repaso" de Sistema Compatible Indeterminado. 2 sistemas resueltos por mi. El primero con ecuaciones. El segundo con matricial.

Ejercicio 1:

Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{cccll} x & +2y & -2z & = & 4 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccll} x & +2y & -2z & = & 4 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{cccll} x & +2y & -2z & = & 4 \\ & y & +2z & = & 2 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{cccll} x & +2y & -2z & = & 4 \\ & y & +2z & = & 2 \\ & y & +2z & = & 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{cccll} x & +2y & -2z & = & 4 \\ & y & +2z & = & 2 \end{array}\right\}}_{\text{Discusión: C.I (*)}}$$

(*): Es un sistema compatible indeterminado porque es un sistema escalonado con más incógnitas que ecuaciones.

Al ser compatible indeterminado, el sistema tiene infinitas soluciones (que no se calculan en 1º de Bachillerato).

Resolución: Aunque un sistema de ecuaciones Compatible Indeterminado tiene infinitas soluciones, no cualquier trío de números es solución. Por ejemplo, en este caso, la terna $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ no es solución. **Infinitas soluciones no significa que todo sea solución**.

La pregunta lógica sería, ¿cómo podemos escribir **todas** las soluciones del sistema? Utilizando un parámetro. Al dar un valor a una incógnita, ya forzamos los otros 2 valores. Para cada valor inventado de x, solo hay un único valor posible de y y de z (normalmente).

En este caso, vamos a dar un valor concreto a y, pero en forma de parámetro. Tomamos $y = \lambda$ y sustituimos en E_2.

$$y + 2z = 2 \iff \lambda + 2z = 2 \iff z = \frac{2-\lambda}{2}$$

Sustituimos $y = \lambda, z = \frac{2-\lambda}{2}$ en E_1:

$$x+2y-2z = 4 \iff x = 4+2z-2y = 4+2\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)-2\lambda = 4+2-\lambda-2\lambda = 6-3\lambda = 3(2-\lambda)$$

Solución: $(x, y, z) = \left(3(2-\lambda), \lambda, \frac{2-\lambda}{2}\right)$

1) $E_2 = E_2 - 2E_1$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & +4y & -4z & = & 8 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 \\ \hline & -y & -2z & = & -2 \end{array}\right\}$$

2) $E_3 = E_2 - 4E_1$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 4x & +9y & -6z & = & 18 \\ 4x & +10y & -4z & = & 20 \\ \hline & -y & -2z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Comprobación: Sustituimos $(x, y, z) = \left(3(2-\lambda), \lambda, \frac{2-\lambda}{2}\right)$ en el sistema inicial:

$$\left\{\begin{array}{cccccl} x & +2y & -2z & = & 4 & \to 6-3\lambda+2\lambda-2\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) = 6-\lambda-2+\lambda = 4 \\ 2x & +5y & -2z & = & 10 & \to 12-6\lambda+5\lambda-2\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) = 12-\lambda-2+\lambda = 10 \\ 4x & +9y & -6z & = & 18 & \to 24-12\lambda+9\lambda-6\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) = 24-3\lambda-6+3\lambda = 18 \end{array}\right\} \text{cqc}$$

Ejercicio 2:

Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{cccc} 3x & -y & +z & = & 3 \\ 6x & -2y & +2z & = & 6 \\ -3x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} 3x & -y & +z & = & 3 \\ 6x & -2y & +2z & = & 6 \\ -3x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

Ojo con el cambio de columnas $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Tiene grado de indeterminación 2, por lo que necesitaremos 2 parámetros.

Llamamos $x = \lambda$ e $y = \mu$ con $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ y sustituimos para hallar z.

$$z - y + 3x = 3 \implies z - \mu + 3\lambda = 3 \iff z = 3 + \mu - 3\lambda$$

Solución: $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 3 + \mu - 3\lambda)\,, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ejercicio 59 de deberes.

Resolución por inversa de stma. ¿Funciona siempre? Sólo en sistemas de Cramer, es decir, matriz de coeficientes cuadrada con rango máximo.

Deberes el 15b,16b.

II.3.1. Regla de Cramer

En todos los sistemas cuya matriz de coeficientes tenga inversa, puede generalizarse el método de la inversa.

Así, $Ax = B \iff x = A^{-1} \cdot B$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(\text{Adj}(A)\right)^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \dots A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \dots A_{n2} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + A_{3n}b_3 \dots A_{nn} \cdot b_n \end{pmatrix}$$

Deberes : 21b, 22b

Corregimos Cramer.

Inconvenientes: ¿y si es incompatible?

Numéricos: 61a,b;62a,b

Parámetros:64a,c (ojo con eliminar una solución)

Deberes para el punete: 57,60

Capítulo III

Geometría analítica

Espacio vectorial

Definición III.1 **Espacio vectorial**. *Un espacio vectorial es una estructura algebraica, $(\mathcal{V}, +, \cdot)$, donde $\mathcal{V}$ es un conjunto cualquiera y $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}$ y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}$*

En nuestro caso, el espacio vectorial con el que trabajaremos será $\mathcal{V}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{R}$, siendo la operación $+$ la suma de vectores habitual y $\cdot$ el producto por un escalar real.

Los elementos de $\mathcal{V}^3$ se denominan vectores y son ternas de números (reales) con los que se pueden hacer operaciones. Escribiremos $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Las operaciones $+$ y $\cdot$ son las habituales. Recordamos:

Ejemplo: *Sean $u_1 = (1, 2, 3)$ y $u_2 = (0, 1, -2)$, tenemos:*

- $u_1 + u_2 = (1 + 0, 2 + 1, 3 - 2)$
- $-u_2 = (0, -1, 2)$
- $u_1 - u_2 = u_1 + (-u_2) = (1, 2, 3) + (0, -1, 2) = (1, 1, 1)$
- $2 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 = (2, 4, 6) + (0, 3, -6) = (2, 7, 0)$

Combinación lineal de vectores

***Observación**: A esta operación la llamamos **combinación lineal de vectores**.*

Observación: Las matrices también forman un espacio vectorial. Ver libro página 179.

Observación: Todavía no hemos definido nada de producto de vectores. *Explicación de porqué el orden seguido es diferente*

Subespacio generado

Bases de espacios vectoriales y coordenadas *Definición III.2* **Subespacio generado**. *Sean $G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial.*

Llamamos subespacio generado al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de G.

Sistema de generadores

***Observación**: Llamaremos a G **Sistema de generadores**.*

Ejemplo:

- *El subespacio generado por un vector sería una recta.*
- *El subespacio generado por 2 vectores sería un plano.*
- *El subespacio generado por 3 vectores sería el espacio.*

Un concepto fundamental a la hora de trabajar con vectores es la "base del espacio vectorial". (Libro página 257)

Base de un espacio vectorial

Definición III.3 **Base de un espacio vectorial.** *Un conjunto de vectores* $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ *es una base de* $\mathcal{V}^3$ *si:*

- *Son linealmente independientes.*
- *El subespacio que generan es* $\mathcal{V}^3$. *(Es decir, que cualquier vector de* $\mathcal{V}^3$ *puede escribirse como combinación lineal de los vectores de la base).*

Dimensión de un espacio vectorial

Definición III.4 **Dimensión de un espacio vectorial.** *Sea* $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial y* $\mathcal{B}$ *una base del mismo.*

Llamamos ***Dimensión*** *del espacio vectorial al número de vectores de* $\mathcal{B}$ *(que son linealmente independientes por definición de base de un espacio vectorial)*

En este curso, para saber si un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial, basta comprobar que son linealmente independientes y que hay tantos vectores linealmente independientes como dimensión tiene el espacio vectorial.

Coordenadas de un vector

Definición III.5 **Coordenadas de un vector.** *Sea* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3\}$ *es una base de* $\mathcal{V}$.

Si $\overrightarrow{u} = c_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + c_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + c_3 \overrightarrow{b_3}$, *decimos que* (c_1, c_2, c_3) *son las coordenadas del vector* $\overrightarrow{u}$ *en la base* $\mathcal{B}$.

Observación: "Sea el vector $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$" deja de tener sentido, ya que necesitamos estar refiriéndonos a una base. Por ello, a partir de ahora, intentaremos escribir los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, dejando bien claro en qué base estamos trabajando.

Ejercicio 1:

Determina si los siguientes conjuntos son bases de $\mathcal{V}^3$ *(que tiene dimensión: 3)*

a) $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$

b) $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

c) $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$

d) $\mathcal{B}_4 = \{(1,0,3), (1,2,-1), (0,1,2)\}$

e) $\mathcal{B}_5 = \{(2,-1,5), (1,-2,-4), (4,-5,-3)\}$

Apartado a)

$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$

No es base porque hay vectores de $\mathcal{V}^3$ que no se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_1$, por ejemplo, $(0,1,0)$

Apartado b)

$\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Sí es una base porque $\mathcal{B}_2$ tiene 3 vectores linealmente independientes: $Rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 3.$

Apartado c)

$\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$

No es una base porque el vector $(1,1,1)$ se puede expresar como combinación lineal de los 3 primeros.

Así, aunque $Rg\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} = 3$, no podríamos decir que $\mathcal{B}_3$ fuera una base. Solo podríamos decir que es un **Sistema de generadores de** $\mathcal{V}^3$

Apartado d)

$\mathcal{B}_4 = \{(1,0,3),(1,2,-1),(0,1,2)\}$

Estudiamos $\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{u_2}\\\overrightarrow{u_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&3\\1&2&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$ Buscamos si tiene rango máximo. Para ello, $\begin{vmatrix}1&0&3\\1&2&-1\\0&1&2\end{vmatrix} \neq 0 \implies$ por lo que podemos decir que son linealmente independientes[1]. Así, tenemos 3 vectores linealmente independientes, por lo que podemos decir que **sí son una base de** $\mathcal{V}^3$.

Apartado e)

$\mathcal{B}_5 = \{(2,-1,5),(1,-2,-4),(4,-5,-3)\}$

Estudiamos $\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{u_2}\\\overrightarrow{u_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&5\\1&-2&-4\\4&-5&-3\end{pmatrix}$ Su determinante es 0, por lo que no tiene rango 3, por lo que no son linealmente independientes.

[1] Si no lo fueran, el determinante sería 0

Ejercicio 2:

Sea $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1,1,1), u_2(0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{w_1 = (1,2,3), w_2 = (1,1,0), w_3 = (3,-1,1)\}$

a) *Si* $\overrightarrow{z} = (2,-2,1)$ *son las coordenadas en la base* $\mathcal{B}_1$*, halla las coordenadas de* $\overrightarrow{z}$ *en la base canónica.*

b) *Si* $\overrightarrow{q} = (2,-2,1)$ *son las coordenadas en la base* $\mathcal{B}_2$*, halla las coordenadas de* $\overrightarrow{q}$ *en la base canónica.*

c) *Halla las coordenadas de* $\overrightarrow{z}$ *en* $\mathcal{B}_2$

Observación*: El vector* $\overrightarrow{u_1}$ *de la base* $\mathcal{B}_1$ *son las coordenadas respecto de una base concreta. Si no se dice nada, suponemos la canónica.*

Cambios de base APARTADO A)

$$\overrightarrow{z}_1 = 2\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = 2\cdot(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) - 2\cdot(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = (2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k})$$

Este $\overrightarrow{z}_c = (2,0,3)$ son las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base canónica.

APARTADO B)

$$\overrightarrow{q}_1 = 2\overrightarrow{w_1} - 2\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{w_3} = 2\cdot(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) - 2\cdot(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + 3(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$$

Este $\overrightarrow{q} = (2,0,3)$ son las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ en la base canónica.

APARTADO C)

Buscamos $\overrightarrow{z} = (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}) = c_1(1,2,3) + c_2(1,1,0) + c_3(3,-1,1)$.

$$2\cdot(1,1,1) - (0,1,0) + (0,0,1) = c_1(1,2,3) + c_2(1,1,0) + c_3(3,-1,1) \iff \left\{ \begin{array}{l} 2 = c_1 + c_2 + 3c_3 \\ 1 = 2c_1 + c_2 - c_3 \\ 3 = 3c_1 \qquad\quad + c_3 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, obteniendo: $(x,y,z) = \left({}^{6}/_{13}, {}^{11}/_{13}, {}^{-3}/_{13}\right)$

Estas son las coordenadas de $\overrightarrow{z}$ en la base $\mathcal{B}_2$

Deberes: terminar los ejemplos de clase.

Hecho 1, hechos todos. Problemas recomendados, especialmente 267.48,49 + 269.60,61:

- Página 267.48,49
- Página 269.56-65
- Página 271.102,103

Capítulo IV

Análisis

Función real de variable real

Definición IV.1 **Función real de variable real**. *Una función real de una variable real es una aplicación definida entre dos conjuntos de números reales tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto.*

$f : D \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

- f: *símbolo de la función.*
- $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists f(x)\}$
- $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \,/\, \exists x \in \mathbb{R} f(x) = y\}$

Ejemplos de dominios de funciones: hojita impresa de repaso.

Ejercicio 1: *Halla el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+5x+4}{x+4}}$

Observación: *Ojo con simplificar.*

b) $f(x) = \sqrt{(x^2-9)}$

c) $f(x) = \log\left(-2x^2+10x-12\right)$

d) $f(x) = \log\left(x^2+1\right)$

Ejercicios 49,50 y 51 de la página 202.

IV.1. Límites y continuidad

IV.1.1. Introducción al concepto de límite

- Con la hoja excel de MNieves.

- Con el geogebra.
- Ejercicios gráficos de límites (PDF aparte: "Límites gráficamente")

IV.1.2. Estudio analítico de límites

IV.1.2.1. Propiedades de los límites

Página 116-117

Ejercicio 1: *Ejercicios 7 y 8 de la página 116.*

Teorema IV.1 (Teorema de existencia del límite).

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Ejercicio 2: *Cálcula los siguientes límites:*

a) *Página 118, ejercicios 9 y 10.*

b) *Página 135, ejercicio 88.*

IV.1.3. Indeterminaciones

- Racionales: ${}^0/_0, {}^\infty/_\infty, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, {}^k/_0$ (Ver por el libro, se dan por supuestas)
- Exponenciales $1^\infty; 0^0; \infty^0$

De estas indeterminaciones, no veremos $0^0; \infty^0$ y de $0 \cdot \infty$ nos saldrá alguna en el sigueinte tema.

Ejercicio 3:

Proposición IV.2 (Indeterminación 1^∞).

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \to 1^\infty \implies \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^\lambda, \lambda = \lim_{x\to a} \big(g(x) \cdot [f(x) - 1]\big)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a}(1+f(x)-1)^{g(x)} \\
&= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)\frac{f(x)-1}{f(x)-1}} \\
&= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)} \\
&= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}
\end{aligned}$$

□

IV.1.3.1. Infinitésimos equivalentes

Libro página 19. Ver tabla y hacer ejercicio 30.

Infinitésimos equivalentes

Definición IV.2 **Infinitésimos equivalentes**. *Dadas $f(x)$, $g(x)$, $a \in \mathbb{R}$ decimos que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes* ***en*** *$x = a$ si y sólo si* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Ejercicio 4: *Ejercicio 30*

IV.1.4. Continuidad (¡Tiene resumen para entregar!)

Continuidad en un punto

Definición IV.3 **Continuidad en un punto**. *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.*

Se dice que $f(x)$ es continua en $x = a$ sí y solo si se cumplen las 3 condiciones siguientes:

- $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$
- $\exists f(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

También se puede decir de manera abreviada:

$$f(x) \text{ continua en } x=a \iff \text{existen y son iguales } \lim_{x\to a} f(x) \text{ y } f(a)$$

Ejercicio 5: *Halla el valor de m para que la función sea continua en $x=0$.*

$$f(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{si } x\le 0 \\ \frac{2x+m}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Aplicamos: "$f(x)$ continua en $x=0$ si existen y son iguales $\lim\limits_{x\to 0}$ y $f(0)$".

- $f(0)=2\cdot 0-5=-5$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Para calcularlo necesitamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+m}{x+1}=\frac{2\cdot 0+m}{0+1}=m$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 2\cdot x-5=-5$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-5 \iff m=-5 \text{ porque } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=m \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-5 \end{cases}$$

- Si $m=-5$, $f(x)$ es continua en $x=0$.

Tipos de discontinuidad

$$\begin{cases} \text{Continua} \\ \text{Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{Esencial} \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ especie} \begin{cases} \text{Salto finito} \\ \text{Salto infinito} \end{cases} \\ 2^{\text{a}} \text{ especie} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Descripción: Libro página 22.

- Evitables: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pero $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a) \\ \text{o} \\ \nexists f(a) \end{cases}$

  Para evitarlas, se define una nueva función: $f(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq a \\ b & x=a \end{cases}$

- Esenciales (o inevitables):
  - De primera especie:
    De salto finito: ambos límites laterales son finitos pero distinto.
    De salto infinito: al menos un límite lateral es infinito.
  - De 2ª especie: al menos un límite lateral no existe. $f(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = \log(x)$ en $x = 0$.

Observación: Ver figura IV.1.

Continuidad en un intervalo abierto

Definición IV.4 **Continuidad en un intervalo abierto.** *$f(x)$ es continua en (a, b) $\iff$ $\forall x \in (a, b), f(x)$ es continua.*

Continuidad por la izquierda y/o por la derecha

Definición IV.5 **Continuidad por la izquierda y/o por la derecha.**

- *Una función (x) es continua por la derecha de a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(x)$*
- *Una función (x) es continua por la izquierda de a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(x)$*

Continuidad en un intervalo cerrado

Definición IV.6 **Continuidad en un intervalo cerrado.** *$f(x)$ es continua en $[a, b]$ $\iff$*

$$\forall x \in [a,b], \begin{cases} f(x) \text{ es continua en } (a,b) \\ \text{Continua por la derecha de } a \\ \text{Continua por la izquierda de } b \end{cases}$$

Ejemplo: *Dada $f(x) = +\sqrt{x}$.*

$f(x)$ es continua en su dominio, por ser función radical. $f(x)$ continua en $(0, \infty)$.

$f(x)$ no es continua en $x = 0$, pero sí es continua por la derecha en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ en $[0, \infty)$.

Funciones polinómicas	Continuas en $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x), Q(x)$ polinomios	Continuas en $\mathbb{R} - \{x \,/\, Q(x) = 0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$	$\begin{cases} n \text{ impar: continua en } \mathbb{R} \\ n \text{ par: continua en } \{x \in \mathbb{R} \,/\, P(x) \geq 0\} \end{cases}$
$f(x) = a^x$ con $a > 0$	Continua en $\mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$ (con $a > 0, a \neq 1$)	Continua en $\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)$	Continua en $\mathbb{R}$
$f(x) = \operatorname{tg}(x)$	Continua en $\mathbb{R} - \left\{x = {}^{\pi}/_{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$ $f(x) = \arccos(x)$ $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$	Continua en su dominio. Continua en su dominio. Continua en su dominio.

Tabla IV.1: *Continuidad de las funciones elementales*

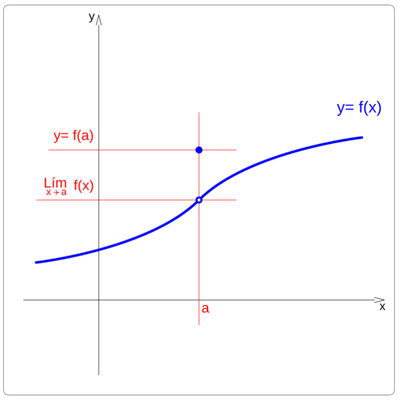


Figura IV.1: *Ejemplo de discontinuidad evitable*

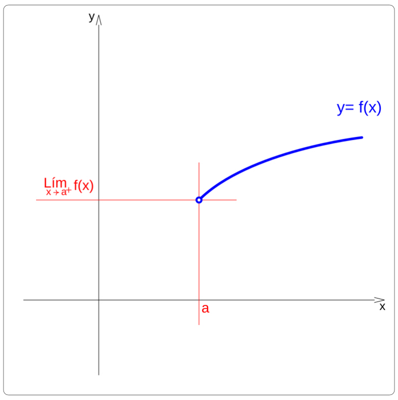


Figura IV.2: *Ejemplo de discontinuidad de 2ª especie*

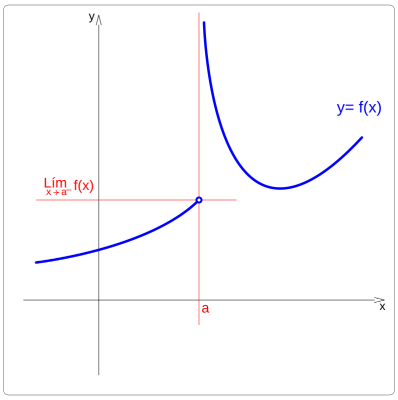


Figura IV.3: *Ejemplo de discontinuidad de salto infinito*

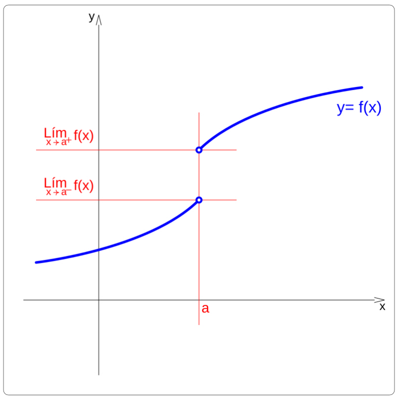


Figura IV.4: *Ejemplo de discontinuidad de salto finito*

Ejercicio 6: *Ejercicios 23.41 y 23.42.*

Ejercicio 7: *Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades*

- $f_1(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$
- $f_2(x) = \begin{cases} \log x + 1 & x \leq -1 \\ x & x > 1 \end{cases}$

Teorema IV.3 (Teorema de Bolzano). *Sea* $f : D \longmapsto \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ \text{Signo}(f(a)) \neq \text{Signo}(f(b)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \;/\; f(c) = 0$$

Observación: Es una condición suficiente, no necesaria. Es decir, es $\Longrightarrow$. Por ejemplo, $f(x) = (x-1)^2$ corta en $x = 1$, pero no cumple las condiciones.

Ejercicio 8: *Demuestra que la ecuación* $x^3 - 7x^2 - 1$ *tiene al menos una solución real en el intervalo* $[0, 10]$.

Sea $f(x) = x^3 - 7x^2 - 1$. Se trata de demostrar que $\exists c \in [0,10] \;/\; f(c) = 0$. Comprobamos que cumple el teorema de Bolzano.

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ es continua en } [0,10] \text{ por ser polinómica} \\ \left.\begin{array}{c} f(x) = -1 \\ f(10) = 299 \end{array}\right\} \Longrightarrow Signo(f(0)) \neq Signo(f(10)) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (0,10) \;/\; f(c) = 0$$

Teorema IV.4 (Teorema del valor intermedio). *Sea* $f : D \longmapsto \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} f(a) \leq k \leq f(b) \\ f(b) \leq k \leq f(a) \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \;/\; f(c) = k$$

Observación: Para $k = 0$, el teorema del valor intermedio se convierte en teorema de Bolzano.

Ejercicio 9: *Demuestra que las funciones $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = x$ se cortan en algún punto.*

Basta considerar la función $h(x) = f(x) - g(x) = \cos(x) - x$. Así, demostrar que las funciones se cortan será equivalente a demostrar que $\exists c \in \mathbb{R} \;/\; h(x) = 0$.

Esta función es continua en $\mathbb{R}$, por ser resta de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Buscamos $c \in \mathbb{R} \;/\; h(c) = 0$. Consideramos $h(0) = 1$ y $h\left(\pi/2\right) = -\pi/2 < 0$.

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in \left(0, \pi/2\right) \;/\; h(c) = 0$, por lo que podemos concluir que las funciones se cortan.

Ejercicio 10:

- *35.108 (continuidad)*
- *36.113 (continuidad)*
- *36.117 (problema - continuidad)*
- *36.119,120 (límites)*
- *Página 37.autoevaluación.*

Teorema IV.5 (Teorema de Weierstrass). *Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en $[a, b]$.*

Observación: Este teorema se utilizará en el siguiente tema.

IV.2. Derivadas y derivabilidad

IV.2.1. Introducción y repaso

Pendiente de una recta

Definición IV.7 **Pendiente de una recta**. *Sea la recta $y = mx + n$.*

Se define ***pendiente de la recta***, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Derivada en un punto

Definición IV.8 **Derivada en un punto**. *Se define $f'(a)$ como la derivada de $f(x)$ en el punto $x = a$.*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$(1) : h = x - a \iff x = a + h$

Ver figura ??.

Ejemplo: *Dada $f(x) = |x|$, calcula $f'(0)$.*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Calculamos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

Los límites laterales no coinciden, por lo tanto, $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \iff \nexists f'(a)$

IV.2.1.1. Interpretación geométrica de la derivada

Ver figura ??.

IV.2.1.2. Derivabilidad

Derivabilidad en un punto

Definición IV.9 **Derivabilidad en un punto**.

$$f(x) \text{ derivable en } x = a \iff \exists f'(a)$$

Proposición IV.6. *$f(x)$ derivable en $x = a \implies f(x)$ continua en $x = a$*

Observación: *El recíproco no es cierto. Basta comprobar el ejemplo IV.2.1 ($f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no derivable en $x = 0$).*

Derivabilidad en un intervalo abierto

Definición IV.10 **Derivabilidad en un intervalo abierto.**

$$f(x) \text{ derivable en } (a,b) \iff \forall c \in (a,b) \exists f'(c)$$

Dominio de derivabilidad

Definición IV.11 **Dominio de derivabilidad.** *El dominio de derivabilidad de una función $f(x)$ es el mayor conjunto en el que la función es derivable.*

Ejemplo: *$f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.*

El dominio de derivabilidad de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{0\}$

Derivabilidad lateral: De la misma manera que existía la *continuidad lateral*, también podemos hablar de *derivabilidad lateral*.

Derivada lateral

Definición IV.12 **Derivada lateral**. *La derivada lateral de f en $x = a$ por la derecha, escrita $f'(a^+)$, si existe:*

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada lateral de f en $x = a$ por la izquierda, escrita $f'(a^-)$, si existe:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

Observación: *Esta última igualdad se debe a que $h \to 0^- \implies h < 0$. Si resulta menos confuso, puede elegirse trabajar siempre con $h > 0$ y así los signos quedan explicitados.*

Ejercicio 1: *Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x \leq 0 \\ 3 \cdot \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ será derivable en $x = 0$ si $\exists f'(0)$. Dado que $f(x)$ está definida a trozos, calculamos la derivadas laterales.

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0-h)^2 + 3 \cdot (0-h) - (0^2 + 3 \cdot 0)}{-h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h(h-3)}{-h} = +3$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot \frac{(0+h)^2+(0+h)}{0+h+1} - (0^2-3\cdot 0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot \frac{h^2+h}{h+1}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot h\cdot (h+1)}{h(h+1)} = 3$$

Conclusión: Dado que $f'(0^-) = f'(0^+) \implies f'(0) = 3$, por lo que la función es derivable en $x = 0$.

Observación: También podríamos haber calculado la derivada lateral por la izquierda de la siguiente manera:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+3\cdot h-(0^2+3\cdot 0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+3)}{h} = +3$$

Ejercicio 2.Página 43, 14.: *¿Es la siguiente función derivable en $x=-2, x=0, x=2$?*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{si } x < -2 \\ -4(x+1) & \textit{si } -2 < x \leq 0 \\ 3x^2-4 & \textit{si } 0 < x \leq 2 \\ 12x+1 & \textit{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.Página 56, ejercicio 78.: *Dada la función $f(x)$, calcula $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función sea derivable en $x = 1$, sabiendo que $f(0) = f(4)$.*

Solución: $a = -^7/_4; b = 1; c = ^1/_4$

IV.2.1.3. Función derivada

Función derivada

Definición IV.13 **Función derivada.** *Dada $f : D(f) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$. Sea $Dv(f)$ el dominio de derivabilidad de f.*

La función derivada denotada por $f'(x) : Dv(f) \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ hace corresponder a cada $a \in Dv(F)$ el valor $f'(a)$.

Ejercicio 4:

- *51.58 (2 trigonométricas inversas)*
- *59.113 (8 variadas. Solo la h tiene una trigonométrica inversa.)*
- *57.79-81 (Ejercicios resueltos)*

IV.2.2. Aplicaciones de la derivada

IV.2.2.1. Recta tangente y recta normal

Ecuación de la recta tangente: Utilizando la ecuación de la recta punto-pendiente y la interpretación gráfica de la derivada (ver ??), se obtiene fácilmente la siguiente ecuación:

$$\text{Recta tangente a } f(x) \text{ en } x_0 \to y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad \text{(IV.1)}$$

Ejercicio 5: *Demuestra que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación: $y = x^3 + 6x^2 + 8x$*

Consideramos $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \to f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$.

Buscamos $c \in \mathbb{R} \,/\, f'(c) = -1$.

$$3c^2 + 12c + 8 = -1 \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Los posibles puntos de tangencia son $P_1(c_1, f(c_1)) = (1, 3)$ y $P_2(c_2, f(c_2)) = (3, -3)$.

Es necesario comprobar que dichos puntos son realmente de tangencia, es decir, que pertenecen a la recta y a la gráfica.

$$P_1 : 3 \neq -1 \implies \text{no pertenece a la recta}$$
$$P_2 : -3 = -3 \implies \text{sí pertenece a la recta}$$

Conclusión: El punto de tangencia de la recta $y = -x$ a la gráfica $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ es $P_2(3, -3)$

Ecuación de la recta normal: Dos rectas dadas, en 2 dimensiones, $r : y = m_r x + n_r \;\; ; \;\; s : y = m_s x + n_s$ son perpendiculares si y sólo si $m_r \cdot m_s = -1 \iff m_s = {}^{-1}/_{m_r}$. Aplicando este resultado a la fórmula de la recta tangente anterior, tenemos:

$$\text{Recta normal a } f(x) \text{ en } x_0 \to y - f(x_0) = {}^{-1}/_{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad \text{(IV.2)}$$

IV.2.2.2. Teoremas de derivabilidad

Teorema IV.7 (Teorema de Rolle).

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \implies \exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$$

Observación: ¿Puede haber más de un punto? ¡Claro que sí! Basta pensar en una función horizontal.

Ejercicio 6: *Sea* $f(x) = 2x^5 + x + a$. *Demuestra que* $\exists! c \in \mathbb{R} \;/\; f(c) = 0$

Por el teorema de Bolzano, hay al menos una raíz real.

Veamos que es única. Si hubiera otra raíz real, d, tendríamos $f(c) = f(d)$ en una función continua en $[c, d] \subset \mathbb{R}$ y derivable en $(c, d) \subset \mathbb{R}$ por ser una función polinómica. Así, se puede aplicar el teorema de Rolle, argumentando que $\exists c \in \mathbb{R} \;/\; f'(c) = 0$, pero $f'(x) = 10x^4 + 1 \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Conclusión: dado que $f(x)$ cumple todas las hipótesis del teorema de Rolle, debemos concluir necesariamente que no hay otra raíz real d[1].

Ejercicio 7: *67.8*

Teorema IV.8 (Teorema del valor medio).

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \implies \exists c \in (a,b) \;/\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación: *El teorema de Rolle es un caso particular de este teorema que se da cuando* $f(a) = f(b)$

Observación: ¿Puede haber más de un punto? ¡Claro que sí!

Ejercicio 8: *Considera la función* $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

Calcula el valor del parámetro real a *para el que se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo* $[0, 1]$ *a la función* $g(x) = f(x) + ax$

$$g(x) = x \cdot e^{-x^2} + ax = x \cdot \left(a + e^{-x^2}\right)$$

Las hipótesis del teorema de Rolle son:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ continua en } [0,1] \to \text{ En este caso se cumple por ser suma de función polinómica y exponencial} \\ g(x) \text{ derivable en } (0,1) \to \text{ En este caso se cumple por ser suma de función polinómica y exponencial} \\ g(a) = g(b) \end{array}\right\}$$

[1] Sino, el teorema fallaría y eso no es posible.

Necesitamos que $g(0) = g(1)$.

$$0 \cdot \left(a + e^{-0^2}\right) = 1 \cdot \left(a + e^{-1^2}\right) \iff 0 = a + e^{-1} \iff a = -e^{-1}$$

Observación: Este problema salió en las noticias de 2019 porque se preguntó en la EVAU de valencia y los alumnos se enfadaron mucho.

Ejercicio 9:

17.2-MadA) *Estudia la derivabilidad en* $x = 0$ *de* $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *en* $x = 0$.

16.1-MadB) *Determina el polinomio* $f(x)$, *sabiendo que* $\forall x \in \mathbb{R} f'''(x) = 12$ *y además verifica* $f(1) = 3; f'(1) = 1; f''(1) = 4$.

16.1-MadB) *Estudie la continuidad y la derivabilidad en* $x = 0$ *y en* $x = 1$ *de* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \ln(x) & \text{si} x > 0 \end{cases}$

IV.2.2.3. Regla de L'Hôpital

IV.2.2.4. Monotonía

Teorema IV.9 (Teorema de monotonía).

Teorema IV.10 (Teorema de extremos relativos).

IV.2.2.5. Optimización

Teorema IV.11 (Teorema de Weierstrass). *Si* $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$, *entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en* $[a, b]$.

IV.3. Análisis sistemático de una función

IV.4. Integrales

IV.4.1. Cálculo de áreas de recintos cerrados

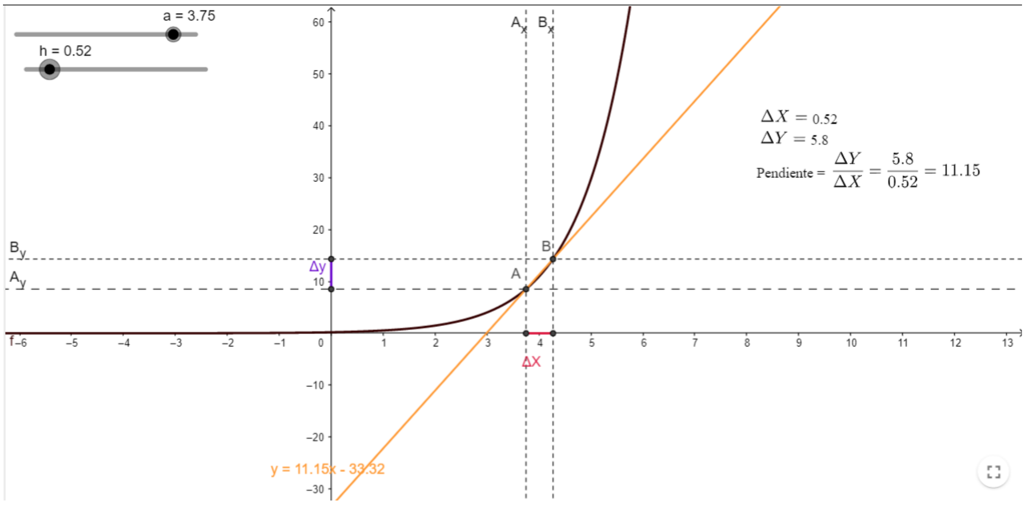


Figura IV.5: *Interpretación geométrica de la derivada*

Cuando $h \to 0$, el punto B se acercará cada vez más al punto A, dando lugar a la recta tangente. Para una mejor comprensión consultar la versión de Geogebra: https://www.geogebra.org/m/jwtw6mdt#material/f52nQ7T5

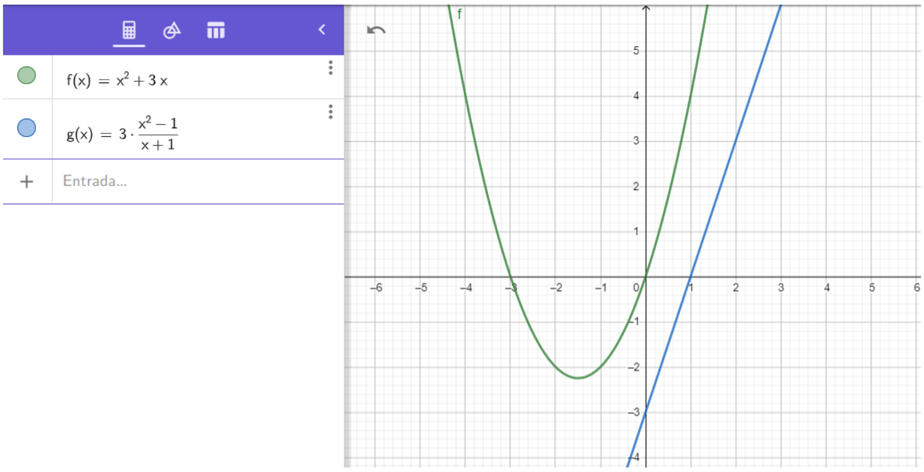
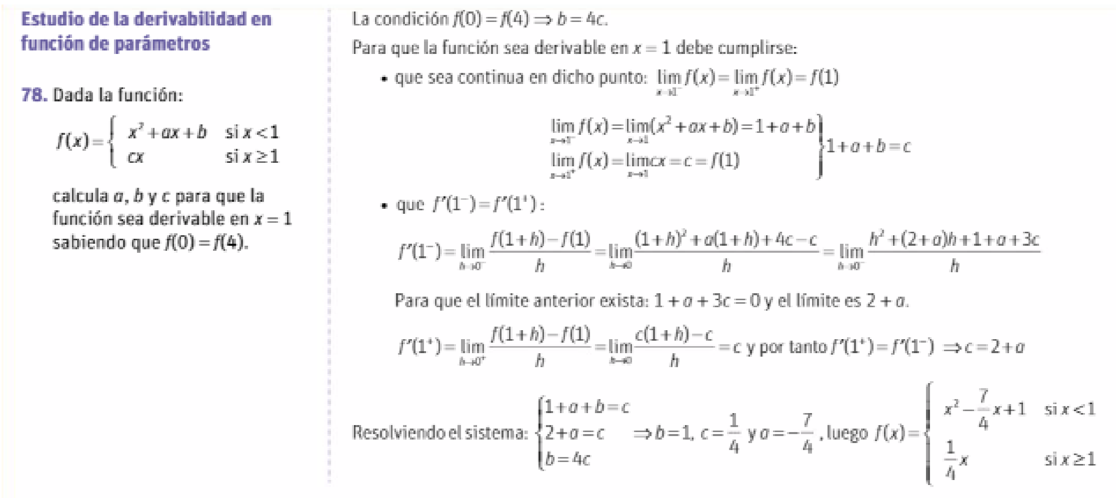


Figura IV.6: *Representación gráfica del problema 1.*

Claramente la derivada en $x = 0$ no puede existir, dado que la función no es continua.



Estudio de la derivabilidad en función de parámetros

78. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ cx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

calcula a, b y c para que la función sea derivable en $x = 1$ sabiendo que $f(0) = f(4)$.

La condición $f(0) = f(4) \Rightarrow b = 4c$.

Para que la función sea derivable en $x = 1$ debe cumplirse:

- que sea continua en dicho punto: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + ax + b) = 1 + a + b \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} cx = c = f(1) \end{array}\right\} 1 + a + b = c$$

- que $f'(1^-) = f'(1^+)$:

$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + a(1+h) + 4c - c}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + (2+a)h + 1 + a + 3c}{h}$$

Para que el límite anterior exista: $1 + a + 3c = 0$ y el límite es $2 + a$.

$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c(1+h) - c}{h} = c \text{ y por tanto } f'(1^+) = f'(1^-) \Rightarrow c = 2 + a$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 1 + a + b = c \\ 2 + a = c \\ b = 4c \end{cases} \Rightarrow b = 1,\ c = \frac{1}{4}$ y $a = -\frac{7}{4}$, luego $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{7}{4}x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4}x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Figura IV.7: *Ejercicio sacado del libro de SM*

Índice alfabético

Índice de figuras

Índice de tablas