Capítulo I

Geometría

1. Puntos y vectores en $\mathbb{R}^2$

Vamos a comenzar definiendo formal y matemáticamente el plano:

El plano es el conjunto de los puntos. La manera formal y matemática de definir el conjunto de puntos es el producto cartesiano.

Producto cartesiano

Definición 1.1 **Producto cartesiano**. *Sean A y B 2 conjuntos cualesquiera. Se define el producto cartesiano como*

$$A \times B = \{(a,b) \;/\; a \in A, b \in B\}$$

Observación: $A \times B \neq B \times A$

Ejemplo:

$$\{2,4,6\} \times \{1,3,5\} = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),...,(6,5)\}$$
$$\{1,3,5\} \times \{2,4,6\} = \{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),...,(5,6)\}$$

Vamos a definir $\mathbb{R}^2$, con el que vamos a trabajar a partir de ahora.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo:

- $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$
- $(\sqrt{-1}, \pi) \notin \mathbb{R}^2$
- $(e, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$

1.1. Espacio vectorial sobre $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los puntos sobre el que podemos construir el conjunto donde viven los vectores.

Espacio vectorial sobre $\mathbb{R}^2$

Definición 1.2 **Espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}^2$. *Un espacio vectorial es una estructura algebraica, $V^2 = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, donde:*

- $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *y se define como* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$ *y se define como* $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$

Las operaciones $+$ y $\cdot$ deben cumplir las siguientes propiedades:

- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}, \qquad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ *(asociativa)*
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ *(conmutativa)*
- $\exists \vec{0} \in V : \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V$ *(elemento neutro)*
- $\forall \vec{u} \in V, \quad \exists \vec{-u} \in V : \vec{u} + (\vec{-u}) = \vec{0}$ *(elemento opuesto)*

- $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}, \forall a, b \in K, \forall \vec{u} \in V$
- $\exists e \in K : e \cdot \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V$ *(elemento neutro del producto)*
- $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}, \forall a \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ *(propiedad distributiva)*
- $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}, \forall a, b \in K, \forall \vec{u} \in V$ *(propiedad distributiva)*

Observación: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$

Observación: $\nexists \vec{a} \cdot \vec{b}$ (todavía).

Ejemplo: $(2, 3) + (-1, 4) \overset{(1)}{=} (2 + (-1), 3 + 4) \overset{(2)}{=} (1, 7)$

Donde en (1) *aplicamos la suma en* V^2 *y en* (2) *aplicamos la suma en* $\mathbb{R}$.

Igual que hemos definido $\mathbb{R}^2$, podríamos haber definido $\mathbb{R}^3$, estructura con la que trabajaréis el año que viene. De hecho, podríamos definir $\mathbb{R}^{25}$ de una manera muy similar. Como curiosidad matemática, hasta podríamos definir $\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ infinitas veces y estudiar qué pasa con ello.

Combinación lineal

Definición 1.3 **Combinación lineal**. *Combinación lineal de* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^2$ *es cualquier expresión algebraica de la forma* $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \lambda\vec{z}$ *con* $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

- $2 \cdot (1, 1) + \sqrt{2} \cdot (0, 1) = (2, 2 + \sqrt{2})$

- $1 \cdot (1,0) + (-1/2)(2,0) = (0,0)$ *(Combinación lineal nula)*
- *Completa con dos ejemplos de tu propia cosecha.*

Observación: Es la misma idea de fondo que la de combinaciones lineales de ecuaciones en el método de Gauss.

Dependencia lineal de dos vectores

Definición 1.4 **Dependencia lineal de dos vectores**. *Sean* $\vec{x}, \vec{y} \in V^2$.

$$\vec{y} \textit{ depende linealmente de } \vec{x} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \vec{y} = \lambda \vec{x}$$

Dependencia lineal de tres vectores

Definición 1.5 **Dependencia lineal de tres vectores**. *Sean* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^2$.

$$\vec{z} \textit{ depende linealmente de } \vec{x}, \vec{y} \iff \exists \alpha, \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \vec{z} = \alpha \vec{x} + \lambda \vec{y}$$

Dependencia lineal de n vectores

Definición 1.6 **Dependencia lineal de n vectores**. *Sean* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n, \vec{y} \in V^2$.

$$\vec{y} \textit{ depende linealmente de } \vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n \iff$$
$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \;/\; \vec{y} = \alpha_1 \vec{x} + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + ... + \alpha_n \cdot \vec{x}_n$$

Independencia lineal

Definición 1.7 **Independencia lineal**. *Sean* $\vec{x}, \vec{y} \in V^2$.

$$\vec{x}, \vec{y} \textit{ linealmente independientes} \iff \nexists \lambda \in \mathbb{R} \textit{ tal que } \lambda \vec{x} = \vec{y}$$

Ejercicio 1.1: *Demostrar que* $\vec{a} = (2,2)$ *y* $\vec{b} = (3,5)$ *son linealmente independientes.*

Buscamos α tales que $\alpha\vec{a} = \vec{b}$.

$$\alpha(2,2) = (3,5) \iff \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha = 3 \\ 2\alpha = 5 \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$$\Longrightarrow \nexists\alpha \text{ tal que } \alpha\vec{a} = \vec{b}$$

Ejercicio 1.2: *Halla el valor o valores de* m *para que* $\vec{a} = (1,3)$ *y* $\vec{b} = (2,m)$ *sean linealmente dependientes.*

Por definición de dependencia lineal, buscamos α tal que $\alpha\vec{a} = \vec{b}$.

$$\alpha(1,3) = (2,m) \iff$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha = 2 \\ 3\alpha = m \end{array} \right\} \iff m = 6$$

Conclusión: para $m = 6$ los vectores son linealmente dependientes.

Observación: $(1,3), (2,6)$ son linealmente dependientes porque son proporcionales. Esto es cierto en general:

Proposición 1.1. *Los vectores* $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in V^2$ *son linealmente dependientes* $\iff \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ *(es decir, son proporcionales)*

> **Ejercicio 1.3**: *Halla el valor o valores de* m *para que* $a = (1,3)$ *y* $b = (2, m)$ *sean linealmente dependientes.*

Utilizamos: "2 vectores son linealmente dependientes si y sólo si son proporcionales".

Buscamos m tal que ${}^1/_2 = {}^3/_m$, lo cual es cierto si $m = 6$.

1.2. Base de un espacio vectorial

Base

Definición 1.8 **Base**. *Un conjunto* $B = \{\vec{x}, \vec{y}\}$ *con* $\vec{x}, \vec{y} \in V^2$ *es una base de* V^2 *si y sólo si cumple:*

- $\vec{x}, \vec{y}$ *linealmente independientes.*

Coordenada de un vector

Definición 1.9 **Coordenada de un vector**. *Dados* $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ *una base de* V^2*. Sea* $\vec{z} \in V^2$ *con* $\vec{z} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$*.*

A esos coeficientes α, β *los llamamos coordenadas del vector en la base* $\mathcal{B}$*. Podemos escribir* $\vec{z} = (\alpha, \beta)$

Ejemplo: *Sea* $B_1 = \{(0,1),(1,0)\}$ *una base de* V^2*. Por ejemplo, el vector* $\vec{z}$ *de coordenadas* $(3,6)$ *en la base* B_1 *se puede construir como combinación lineal de los vectores de la base:* $(3,6) = 3 \cdot (1,0) + 6 \cdot (0,1)$*.*

Base canónica

***Observación**: B_1 se denomina **base canónica** y se suele representar por $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.*

Observación: Las coordenadas de un vector en una base son únicas. Pero un mismo vector puede tener coordenadas diferentes en basees diferentes.

Ejemplo: *Sea $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ una base de V^2. Por ejemplo, el vector anterior $\vec{z} = (3,6)$ se puede construir como combinación lineal de los vectores de la base: $(3,6) = \alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (0,1)$*

Haciendo las cuentas obtendríamos $\alpha = 3, \beta = 3$, por lo que $\vec{z} = (3,3)$ en la base B_2.

Ejercicio 1.4:

***a)** ¿Es $B_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$ una base de V^2?*

***b)** ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(7,5)$ en esta base?*

APARTADO A)

Buscamos demostrar que los vectores son linealmente independientes y que, por tanto, las coordenadas de un vector cualquiera $\vec{z} = (z_1, z_2)$ son únicas.

Independencia lineal:

$$\alpha(1,1) = (1,-1) \iff \left\{ \begin{array}{c} \alpha = \beta \\ \alpha = -\beta \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$$\iff \text{Linealmente independientes}$$

Podemos concluir que B_2 es una base de V^2.

Comprobamos coordenadas únicas: Solo como ejercicio interesante, podemos comprobar que las coordenadas de un vector cualquiera $\vec{z} = (z_1, z_2)$ son únicas.

$$(z_1, z_2) = \alpha(1,1)+\beta(1,-1) \iff (z_1, z_2) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta) \iff$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha+\beta = z_1 \\ \alpha-\beta = z_2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} \alpha+\beta = z_1 \\ 2\alpha = z_2 \end{array} \right\} \implies$$
$$\textit{SCD} \implies \textit{Solución única}$$

APARTADO B)

Para encontrar las coordenadas resolvemos:

$$(7,5) = \alpha(1,1)+\beta(1,-1) \iff (7,5) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta) \iff$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha+\beta = 7 \\ \alpha-\beta = 5 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} \alpha+\beta = 7 \\ 2\alpha = 12 \end{array} \right\} \implies (\alpha, \beta) = (6,1)$$

Ejercicio 1.5: *Sea* $B = \{(3,0), (1,-1)\}$.

a) *¿Es una base de* V^2*?*

b) *En caso de que sea una base, calcula las coordenadas del vector* $(6,6)$ *en la base* B.

APARTADO A)

Linealmente independientes:

.

.

APARTADO B)

$$(6,6) = \alpha(3,0) + \beta(1,-1) \iff (6,6) = (3\alpha+\beta, -\beta)$$
$$\iff (\alpha,\beta) = (4,-6)$$

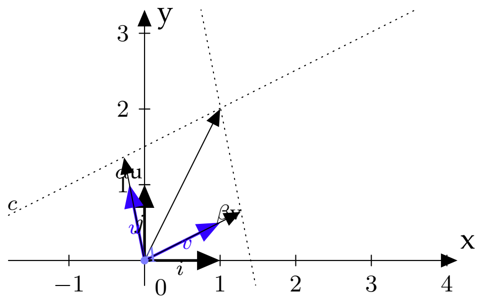

Figura I.1: *Cambio de base de unos vectores gráficamente. Puedes encontrar en https://www.geogebra.org/classic/FhJF4aBr un ejemplo gráfico editable*

2. Plano afín

Concreción ¿Qué necesitamos para orientarnos en el plano? ¿Cuál puede ser un sistema de referencia?

Sistema de referencia

Imagínate un punto cualquiera dibujado en una pizarra. ¿Cómo ponernos de acuerdo de cómo llegar a él? Necesitamos un **sistema de referencia**, es decir, un origen y una escala (base). Normalmente tomamos como origen el $(0,0)$ y como base la canónica $\{(1,0),(0,1)\}$.

Plano afín

Relación de equipolencia

Definición 2.1 **Plano afín**. *Llamamos plano afín a la estructura algebraica $\{\mathbb{R}^2, V^2, \rho\}$, donde $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de los puntos del planos, $\overrightarrow{V}^2$ es el espacio vectorial de los vectores* ***libres*** *del plano y ρ es la* ***relación de equipolencia*** *que nos permite construir vectores a partir de los puntos.*

Vector fijo

Definición 2.2 **Vector fijo**. *Dados $A, B \in \mathbb{R}^2$, llamamos vector fijo $\vec{AB}$ al segmento que une los puntos A y B, orientado desde A hasta B.*

Módulo

Así, de esta definición se deduce que los vectores tienen un origen y un destino, una dirección, un sentido y una longitud (**módulo**).

Vector libre

Definición 2.3 **Vector libre**. *Representante canónico del conjunto de vectores con mismo módulo, dirección y sentido.*

Para entender el concepto de vector libre vamos a recurrir a otro ejemplo: las fracciones equivalentes.

Representante canónico

$[{}^1/{}_2] = \{{}^1/{}_2, {}^2/{}_4, {}^4/{}_8, ...\}$. Tenemos distintas fracciones de expresar la misma realidad. Así, llamamos **representante canónico** a la fracción ${}^1/{}_2$. ¿Qué relación hay entre ${}^1/{}_2, {}^2/{}_4$?

De la misma manera, el vector libre es el representante canónico de los vectores con el mismo módulo, dirección y sentido. ¿Qué relación hay entre ellos? Se llama relación de equipolencia y, por ello, se dice que 2 vectores son *equipolentes* si tienen el mismo módulo, misma dirección y mismo sentido.

Como no se puede operar con puntos y nuestras operaciones las hemos definido para vectores, necesitamos conocer cómo obtener vectores a partir de los puntos. Para ello, definimos

Vector de posición

Definición 2.4 **Vector de posición**. *Llamamos $[\vec{OA}]$ al vector de posición del punto $A = (a_1, a_2)$, cuyas coordenadas son $[\vec{OA}] = (a_1 - 0, a_2 - 0) = (a_1, a_2)$*

***Observación**: Si tuviéramos un sistema de referencia con otro origen, cambiaría ligeramente la expresión.*

Coordenadas de un vector entre los puntos $A = (a_1, a_2)$ **y** $B = (b_1, b_2)$**:** $[\vec{OA}] + [\vec{AB}] = [\vec{OB}] \iff [\vec{AB}] = [\vec{OB}] - [\vec{OA}] = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Observación: Escribiremos $\vec{AB}$ para referirnos al vector fijo que une los puntos A y B y $[\vec{AB}]$ para referirnos al vector libre.

Ejemplo: *Hallar las coordenadas de* $[\vec{AB}]$ *con* $A = (1, 2)$ *y* $B = (3, 5)$.

$[\vec{AB}] = (1 - 3, 2 - 5)$

Ejercicio 2.1: *Sean 3 puntos* $A = (1, -1), B = (0, 2), C = (-1, m)$.

***a)** Halla, si es posible, el valor de* m *para que* $[\vec{AB}] = [\vec{BC}]$

***b)** Halla, si es posible, el valor de* m *para que* $[\vec{AB}] = [\vec{AC}]$

***c)** Halla, si es posible, el valor de* m *para que* $\vec{AB} = \vec{BC}]$

***d)** Halla, si es posible, el valor de* m *para que* $\vec{AB} = \vec{AC}$

APARTADO A)

$$\left.\begin{aligned} \left[\overrightarrow{AB}\right] &= (-1, 3) \\ \\ \left[\overrightarrow{BC}\right] &= (-1, m-2) \end{aligned}\right\} \implies m - 2 = 3 \iff m = 5$$

APARTADO B)

$$\left.\begin{aligned} \left[\overrightarrow{AB}\right] &= (-1, 3) \\ \\ \left[\overrightarrow{AC}\right] &= (-2, m+1) \end{aligned}\right\} \implies \text{Imposible } [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AC}]$$

APARTADO C)

$\nexists m \in \mathbb{R}$ ya que los dos vectores fijos no pueden ser iguales puesto que el origen de cada vector es diferente.

APARTADO D)

$\nexists m \in \mathbb{R} \;/\; B = C$

Observación: ¿Es importante la base en la que estén definidos los vectores? No, porque los 2 están en la misma base.

Punto medio de un segmento Dados $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Por definición, el punto medio $M = (m_1, m_2)$ cumplirá: $[\overrightarrow{AM}] = [\overrightarrow{MB}]$

$$[\vec{AB}] = [\vec{AM}] + [\vec{MB}] \iff [\vec{AB}] = 2[\vec{AM}] \iff$$

$$2(m_1 - a_1, m_2 - a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_1) \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2m_1 - 2a_1 = b_1 - a_1 \\ 2m_2 - 2a_2 = b_2 - a_2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} m_1 = \dfrac{b_1 + a_1}{2} \\ m_2 = \dfrac{b_2 + a_2}{2} \end{array} \right\}$$

$$\iff (m_1, m_2) = \left(\frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2} \right)$$

Ejercicio 2.2: *Dados* $A(2,2), B(6,12)$ *halla*

a) *El punto medio del segmento* AB

b) *El punto que, dividiendo el segmento* AB *en tres partes iguales, está al doble de distancia de* A *que de* B.

Proposición 2.1 (Cálculo del módulo de un vector en la base canónica)**.** *Sea* $\vec{x} = (x_1, x_2)$.

$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Observación*: Esto es posible en la base canónica.*

Demostración. En la base canónica el vector forma un triángulo rectángulo en el que los catetos miden x_1 y x_2 respectivamente. Aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud del vector será la hipotenusa del triángulo rectángulo. □

Vector unitario

Definición 2.5 **Vector unitario**. $\vec{v} \in V^2$ *es unitario si* $|\vec{v}| = 1$

Ejercicio 2.3: *Dado* $\vec{v} = (3, 4)$ *haya un vector unitario con la misma dirección y sentido.*

2.1. Producto escalar

Producto escalar

Definición 2.6 **Producto escalar**. *Sean* $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in V^2$.

El producto escalar es una operación: $\cdot : V^2 \times V^2 \longmapsto V$ *que opera de la siguiente manera:*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}\right)$$

Propiedades: $\forall \vec{x}, \vec{x}, \vec{z} \in V^2$

- **Conmutativo:** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- **Bilineal:**
  $(\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y})$
  $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
- **No negatividad:** $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$

Ejemplo: *Dados* $\vec{v} = (1,1), \vec{w} = (-1,5) \in V^2$*:*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})$$

¿Cómo podemos calcular el ángulo que forman los vectores? Este es un ejercicio de trigonometría muy recomendable que se deja como ejercicio para el lector.

Existe otra manera de calcular el producto escalar de dos vectores. Pero antes de verlo necesitamos definir:

Ortogonalidad

Definición 2.7 **Ortogonalidad**. $\vec{x}, \vec{y} \in V^2$ *son ortogonales* $\iff \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Perpendicular

Definición 2.8 **Perpendicular**. $\vec{x}, \vec{y} \in V^2$ *son perpendiculares* $\iff$ *forman un ángulo recto.*

¿Es lo mismo perpendicular que ortogonal? Perpendicular $\implies$ ortogonal, pero no al revés. El vector $\vec{0} = (0,0)$ es ortogonal a todos los demás vectores pero perpendicular a ninguno.

Base ortogonal

Definición 2.9 **Base ortogonal**. $\mathcal{B} = \{\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} =$

$(b_1, b_2)\}$ *es ortogonal si* $\vec{a}, \vec{b}$ *son ortogonales, es decir,* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Base ortonormal

Definición 2.10 **Base ortonormal**. $\mathcal{B} = \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ *es ortonormal si* $\vec{a}, \vec{b}$ *son vectores unitarios ortogonales.*

Proposición 2.2 (Expresión analítica del producto escalar en una base ortonormal)**.** *Dados* $\vec{v} = (v_1, v_2), \vec{w} = (w_1, w_2) \in V^2$ *respecto de una base ortonormal* $\mathcal{B} = \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$*, entonces* $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

Demostración.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1 \cdot \vec{a} + v_2 \vec{b})(w_1 \cdot \vec{a} + w_2 \vec{b}) =$$

$$v_1 w_1 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + v_1 w_2 (\vec{a} \cdot \vec{b}) + v_2 w_1 \vec{b} \cdot \vec{a} + v_2 w_2 \vec{b}\vec{b} =$$

$$v_1 w_1 \cdot 1 + v_1 w_2 \cdot 0 + v_2 w_1 \cdot 0 + v_2 w_2 \cdot 1 =$$

$$v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

$\square$

Ejemplo: *Dados* $\vec{v} = (1, 1), \vec{w} = (-1, 5) \in V^2$*:*

En lugar de utilizar la definición, vamos a utilizar la expresión analítica:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (1, 1) \cdot (-1, 5) = 1 - 5 = -4$$

2.1.1. Ángulo entre vectores

Ahora que tenemos otra manera de calcular el producto escalar, podemos calcular el ángulo que forman dos vectores. Despejando el coseno de la definición de producto escalar obtenemos:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \iff \cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{v_1w_1+v_2w_2}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$$

Ejemplo: *Dados* $\vec{v} = (1,1), \vec{w} = (-1,5) \in V^2$*, calcula el ángulo que forman.*

Calculamos:

- $\vec{v}\cdot\vec{w} = (1,1)\cdot(-1,5) = 1-5 = -4$
- $|\vec{v}| = \sqrt{2}$
- $|\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{26}$

$$\cos\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{2}\sqrt{26}} = \frac{-2\sqrt{13}}{13}$$

2.2. Ejercicios recomendados

Todos los del libro.

2.3. Ejercicios variados resueltos

Ejercicio 2.4: *Sea* $B = \{(-2,2),(1,-1)\}$.

a) *¿Es una base de* V^2*?*

b) *En caso de que sea una base, calcula las coordenadas del vector* $(6,6)$ *en la base* B.

APARTADO A)

Linealmente independientes:

$$\alpha(-2,2) = (1,-1) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{c} -2\alpha = 1 \\ 2\alpha = -1 \end{array} \right\} \iff \alpha = {}^1\!/_2$$

Los vectores no son linealmente independientes.

APARTADO B)

No se pueden calcular las coordenadas de un vector respecto de unos vectores que no son linealmente independientes. La única posibilidad sería que el vector $(6,6)$ fuera proporcional a los 2 vectores de la base.

Ejercicio 2.5: *Sean* $A = (0,0), B = (-1,3), C = (2,5)$. *¿Están alineados?*

Que estén alineados es lo mismo que decir que 2 de ellos sean linealmente dependientes, o proporcionales y que tengan algún punto en común.

$[\vec{AB}] = (-1,3)$, $[\vec{AC}] = (2,5)$. Como vectores fijos tienen en común el punto A. ¿Son linealmente dependientes (LD)?

$$\frac{-1}{2} \neq \frac{3}{5} \implies \text{No L.D.} \iff \text{No alineados.}$$

Ejercicio 2.6: *Sean* $A = (0,0), B = (-1,3), C = (m, m+8)$. *Halla* m *para que estén alineados.*

$[\vec{AB}] = (-1,3)$, $[\vec{AC}] = (m, m+8)$

$$\frac{-1}{m} = \frac{3}{m+8} \implies -m-8 = 3m \iff -8 = 4m \iff m = -2$$

Para $m = -2$ son linealmente dependendientes y, puesto que comparten el punto A, podemos decir que los 3 puntos están alineados.

Observación: También podríamos haber construido el vector $[\vec{BC}]$, pero hemos elegido $[\vec{AC}]$ por simplificar los cálculos.

Ejercicio 2.7: *Sean* $A = (0,0), B = (-1,3), C = (2,m)$. *Halla* m *para que* $||[\vec{AB}]|| = \lambda||[\vec{AC}]||$

$[\vec{AB}] = (-1, 2\sqrt{6}) \to ||[\vec{AB}]|| = \sqrt{1+24} = 5$

$[\vec{AC}] = (3, m) \to ||[\vec{AB}]|| = \sqrt{9+m^2}$

Necesitamos $\sqrt{9+m^2} = 5 \implies 9+m^2 = 25 \iff m^2 = 16 \iff m = \pm 4$.

3. Rectas