Estudios asintóticos de funciones

Algunos ejemplos resueltos para 1º Bachillerato

Resumen

Este documento trata el estudio de las asíntotas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
2. $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 + 25}$
3. $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$
4. $f(x) = \frac{x+6}{x-1}$
5. $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
7. $f(x) = -\frac{2x^2 - 1}{x-5}$
8. $f(x) = \log(x-2)$
9. $f(x) = \log\left(-2x^2 + 8\right)$

   Difíciles:

10. $f(x) = \frac{e^x}{x}$
11. $f(x) = x(e^x - 1)$

    Muy difíciles:

12. $f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$
13. $f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$

Nota: Este documento se ha generado automáticamente a partir de las funciones utilizando Sage para los cálculos matemáticos, LaTeX para la generación del pdf y sagetex para la integración de las 2 herramientas mencionadas.

Ejercicio 1: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\} \\ &= (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x + 1 = 0$

Soluciones: $x_0 = -1$;

Asintota en $x = -1$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto -1} \frac{x^2}{x+1} = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto -1^-} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty \end{cases}$$

Aunque el límite no exista (porque los límites laterales son diferentes), su magnitud sigue siendo infinita por ambos lados, por lo que la recta x = -1 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x^2}{x+1}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2}{x+1} = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{x+1} = ... = 1$$

En este caso tenemos m=1 por lo que sí hay asíntota oblícua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1x \right) = \lim_{x \mapsto +\infty} -x + \frac{x^2}{x+1} = -1$$

En $+\infty$, f(x) tiene una **asíntota oblícua** en $y = x - 1$.

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x^2}{x+1} = ... = -\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x}{x+1} = ... = 1$$

En este caso tenemos m=1 por lo que sí hay asíntota oblícua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1x \right) = \lim_{x \mapsto -\infty} -x + \frac{x^2}{x+1} = -1$$

En $-\infty$, f(x) tiene una **asíntota oblícua** en $y = x - 1$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

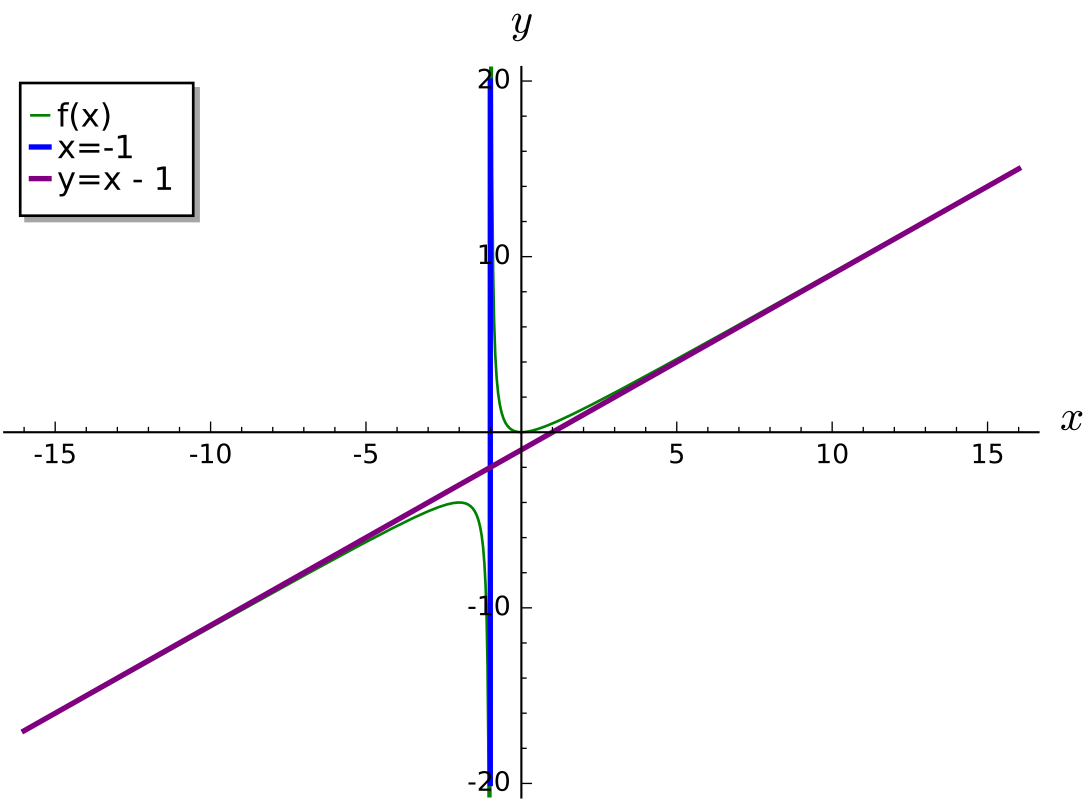

Figura 1: *Gráfica de la función.*

> **Ejercicio 2**: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*
>
> $$f(x) = \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 + 25}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 25 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\} \\ &= (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x^2 + 25 = 0$

Soluciones: No tiene soluciones reales

Asíntotas verticales

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 + 25}$$

Límite de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 + 25} = ... = 1$$

En $+\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 + 25} = ... = 1$$

En $-\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

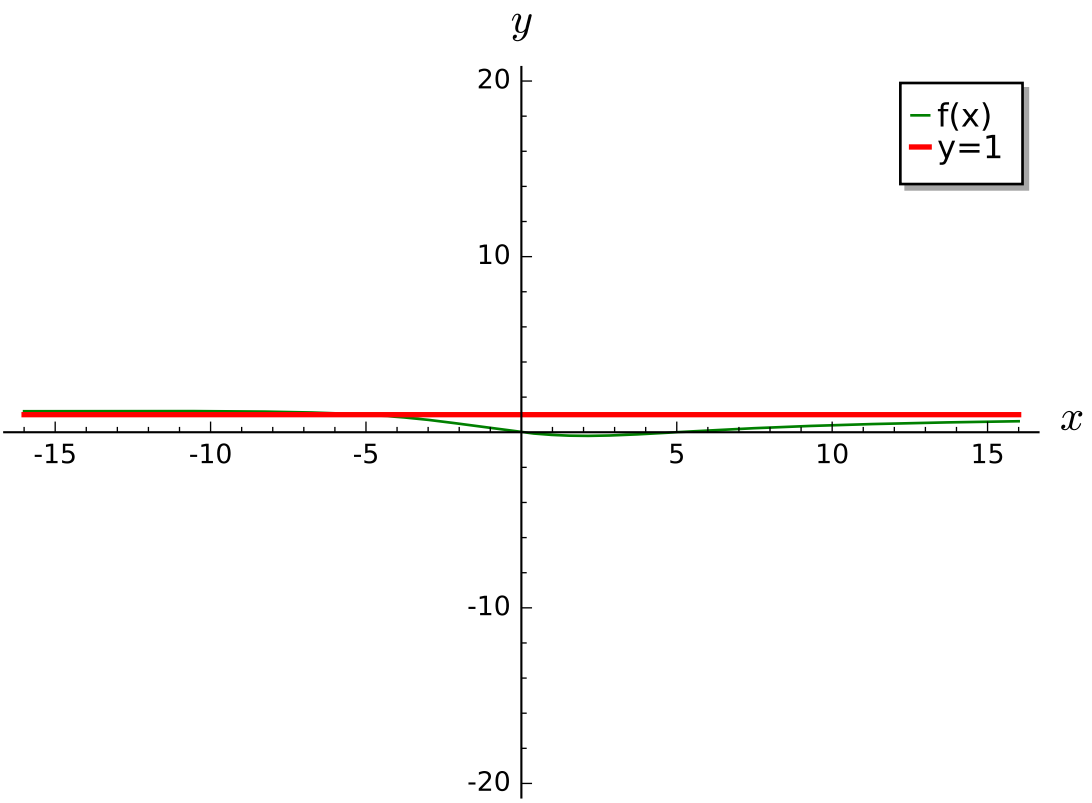

Figura 2: *Gráfica de la función.*

Ejercicio 3: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 - 25}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-5\} \\ &= (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x + 5 = 0$

Soluciones: $x_0 = -5$;

Asintota en $x = -5$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto -5} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 - 25} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \mapsto -5^+} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 - 25} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \mapsto -5^-} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 - 25} = +\infty \end{cases}$$

Aunque el límite no exista (porque los límites laterales son diferentes), su magnitud sigue siendo infinita por ambos lados, por lo que la recta x = -5 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 - 25}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 - 25} = ... = 1$$

En $+\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

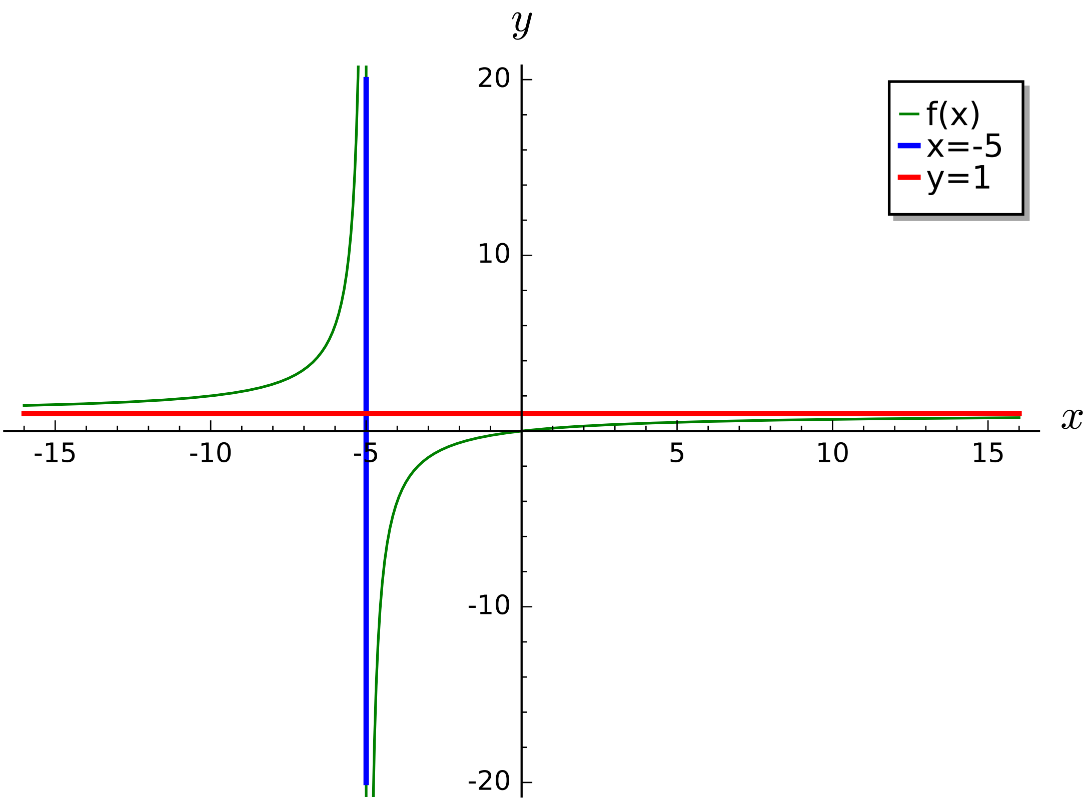

Figura 3: *Gráfica de la función.*

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x^2 - 5\,x}{x^2 - 25} = ... = 1$$

En $-\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

Ejercicio 4: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \frac{x+6}{x-1}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\} \\ &= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x - 1 = 0$

Soluciones: $x_0 = 1$;

Asintota en $x = 1$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 1} \frac{x+6}{x-1} = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 1^+} \dfrac{x+6}{x-1} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto 1^-} \dfrac{x+6}{x-1} = -\infty \end{cases}$$

Aunque el límite no exista (porque los límites laterales son diferentes), su magnitud sigue siendo infinita por ambos lados, por lo que la recta x = 1 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x+6}{x-1}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x+6}{x-1} = ... = 1$$

En $+\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

Límite de la función en $-\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x+6}{x-1} = ... = 1$$

En $-\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

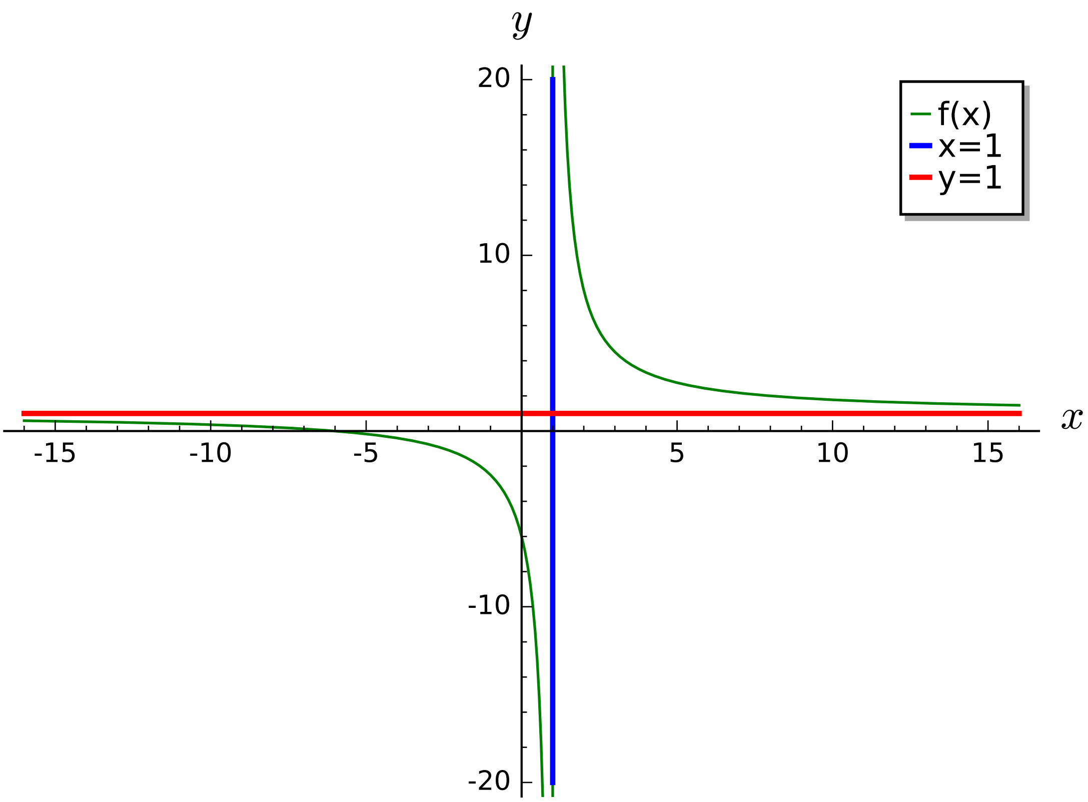

Figura 4: *Gráfica de la función.*

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

Ejercicio 5: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$
$$= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x - 2 = 0$

Soluciones: $x_0 = 2$;

Asintota en $x = 2$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 2} \frac{x+2}{x-2} = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty \end{cases}$$

Aunque el límite no exista (porque los límites laterales son diferentes), su magnitud sigue siendo infinita por ambos lados, por lo que la recta x = 2 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{x+2}{x-2}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x+2}{x-2} = ... = 1$$

En $+\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

Límite de la función en $-\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x+2}{x-2} = ... = 1$$

En $-\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 1$.

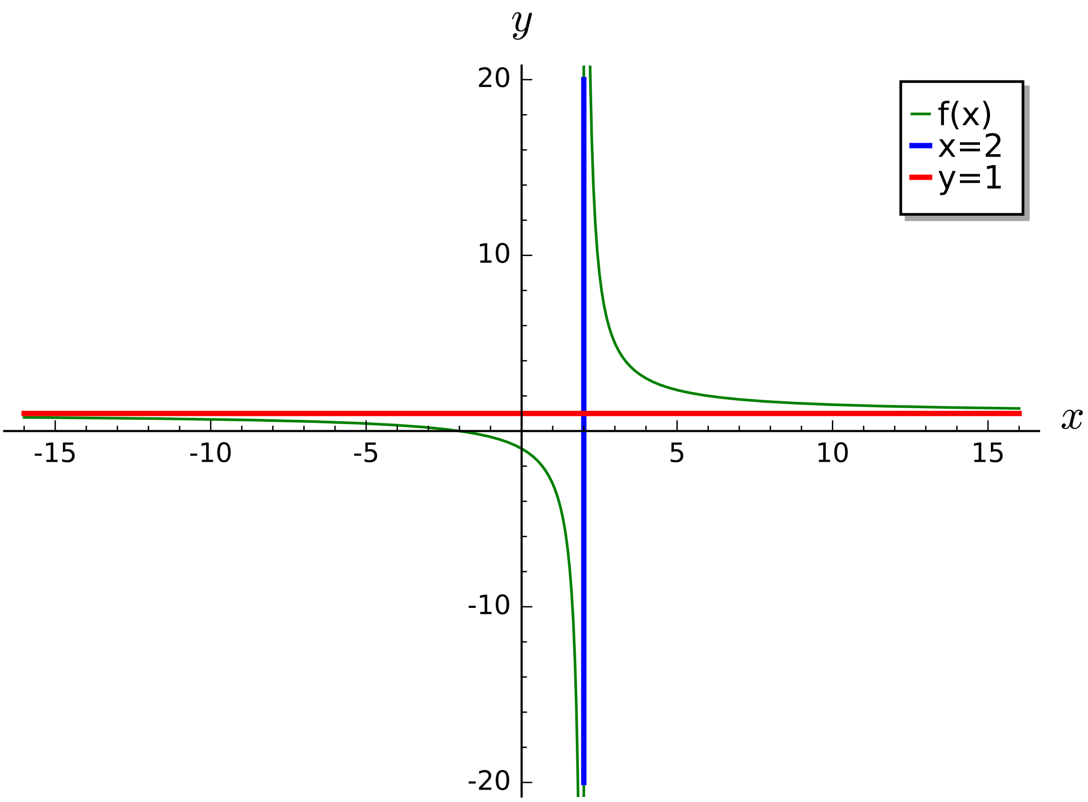

Figura 5: *Gráfica de la función.*

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

Ejercicio 6: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} \\ &= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x^2 = 0$

Soluciones: $x_0 = 0$;

Asintota en $x = 0$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{1}{x^2} = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$$

La recta x = 0 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{1}{x^2}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{x^2} = ... = 0$$

En $+\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Límite de la función en $-\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x^2} = ... = 0$$

En $-\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

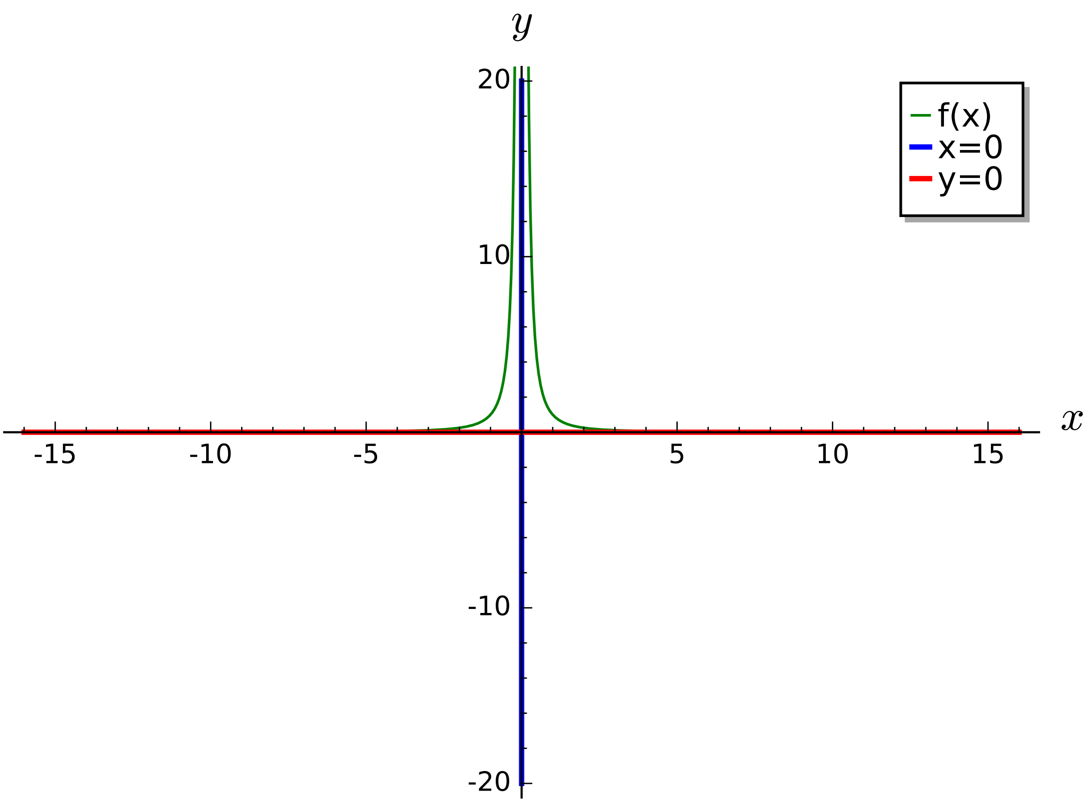

Figura 6: *Gráfica de la función.*

Ejercicio 7: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = -\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x - 5 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{5\} \\ &= (-\infty, 5) \cup (5, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x - 5 = 0$

Soluciones: $x_0 = 5$;

Asintota en $x = 5$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 5} -\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5} = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 5^+} -\dfrac{2\,x^2 - 1}{x - 5} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto 5^-} -\dfrac{2\,x^2 - 1}{x - 5} = +\infty \end{cases}$$

Aunque el límite no exista (porque los límites laterales son diferentes), su magnitud sigue siendo infinita por ambos lados, por lo que la recta x = 5 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} -\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} -\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5} = ... = -\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{-\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5}}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} -\frac{2\,x^2 - 1}{(x - 5)x} = ... = -2$$

En este caso tenemos m=-2 por lo que sí hay asíntota oblícua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \mapsto +\infty} \left(-\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5} - -2x \right) = \lim_{x \mapsto +\infty} 2\,x - \frac{2\,x^2 - 1}{x - 5} = -10$$

En $+\infty$, f(x) tiene una **asíntota oblícua** en $y = -2\,x - 10$.

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} -\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5} = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{-\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5}}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} -\frac{2\,x^2 - 1}{(x - 5)x} = ... = -2$$

En este caso tenemos m=-2 por lo que sí hay asíntota oblícua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(-\frac{2\,x^2 - 1}{x - 5} - -2x \right) = \lim_{x \mapsto -\infty} 2\,x - \frac{2\,x^2 - 1}{x - 5} = -10$$

En $-\infty$, f(x) tiene una **asíntota oblícua** en $y = -2\,x - 10$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

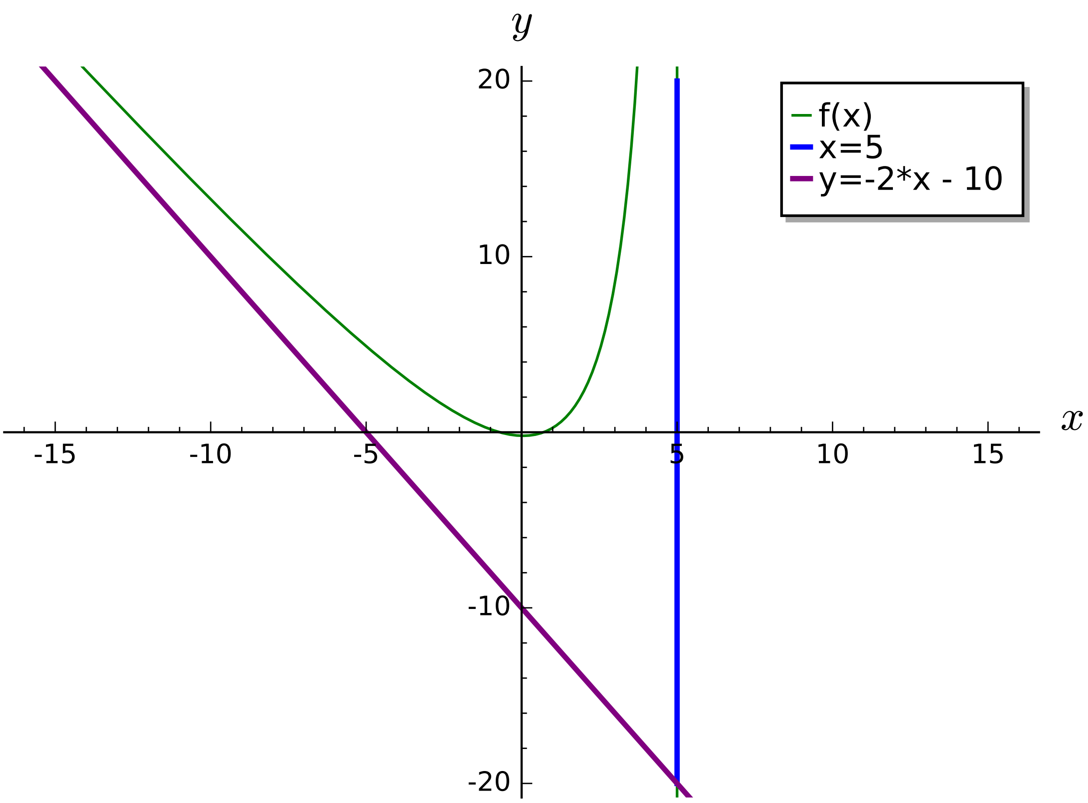

Figura 7: *Gráfica de la función.*

Ejercicio 8: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \log(x-2)$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x-2 > 0\} \\ &= ((2, +oo)) \\ &= (2, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

No tiene denominador, por lo que no hay puntos canditatos aquí.

Soluciones: No tiene soluciones reales

Atención: Como la función es un logaritmo, podríamos tener una asíntota vertical (ya que $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \log(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \log(x) = \infty$). Vamos a comprobarlo.
Para ello, calculamos los puntos en los que se haga 0 o $+\infty$ el interior del logaritmo .
En este caso:

$$x - 2 = 0$$

Soluciones: $x_0 = 2$;

Asintota en $x = 2$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 2} \log(x-2) = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 2^+} \log(x-2) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto 2^-} \log(x-2) = \nexists \end{cases}$$

$x = 2$ es **A.V.** de f(x) por la derecha.

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \log(x-2)$$

No existe el límite de la función en $-\infty$:

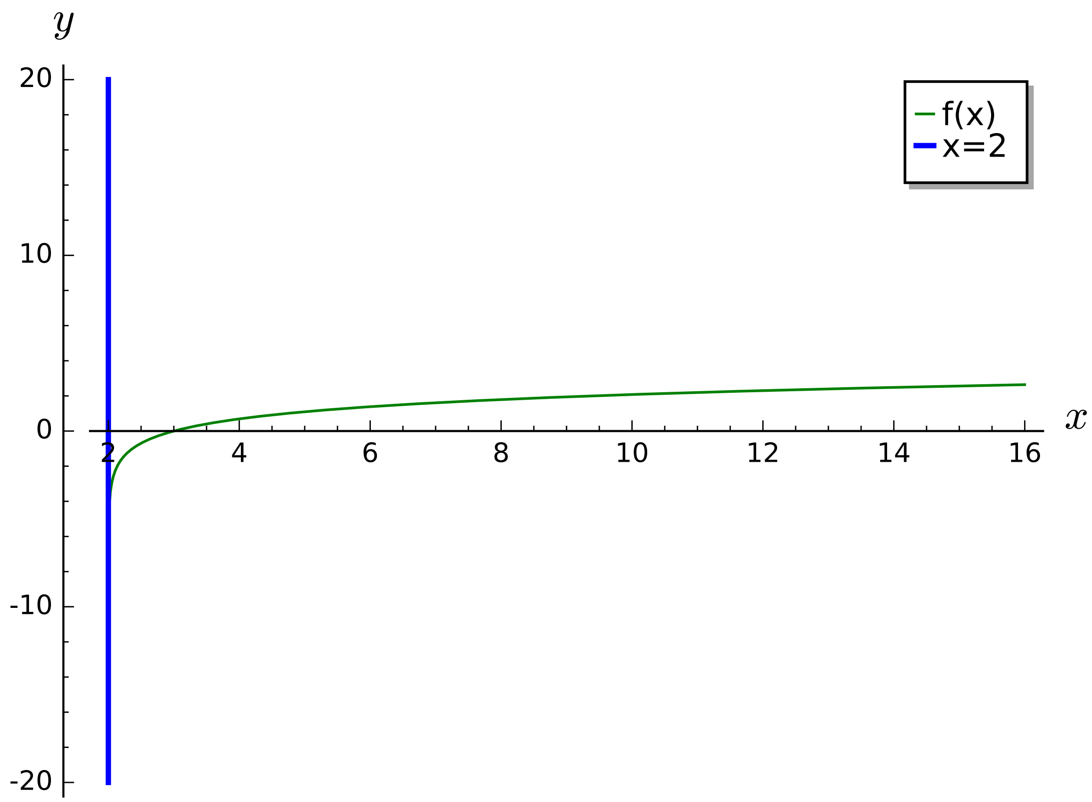

Figura 8: *Gráfica de la función.*

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \log(x-2) = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\log(x-2)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\log(x-2)}{x} = ... = 0$$

En este caso, tenemos $m = 0$ por lo que **no hay asíntota** oblícua (ni horizontal).

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

Ejercicio 9: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \log\left(-2\,x^2 + 8\right)$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2\,x^2 + 8 > 0\} \\ &= ((-2, 2)) \\ &= (-2, 2) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

No tiene denominador, por lo que no hay puntos canditatos aquí.

Soluciones: No tiene soluciones reales

Atención: Como la función es un logaritmo, podríamos tener una asíntota vertical (ya que $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \log(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \mapsto \infty} \log(x) = \infty$). Vamos a comprobarlo.
Para ello, calculamos los puntos en los que se haga 0 o $+\infty$ el interior del logaritmo .
En este caso:

$$-2\,x^2 + 8 = 0$$

Soluciones: $x_0 = -2;\quad x_1 = 2;$

Asintota en $x = -2$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto -2} \log\left(-2\,x^2 + 8\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto -2^+} \log\left(-2\,x^2 + 8\right) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto -2^-} \log\left(-2\,x^2 + 8\right) = \nexists \end{cases}$$

$x = -2$ es **A.V.** de f(x) por la derecha.

Asintota en $x = 2$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 2} \log\left(-2\,x^2 + 8\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 2^+} \log\left(-2\,x^2 + 8\right) = \nexists \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto 2^-} \log\left(-2\,x^2 + 8\right) = -\infty \end{cases}$$

$x = 2$ es **A.V.** de f(x) por la izquierda.

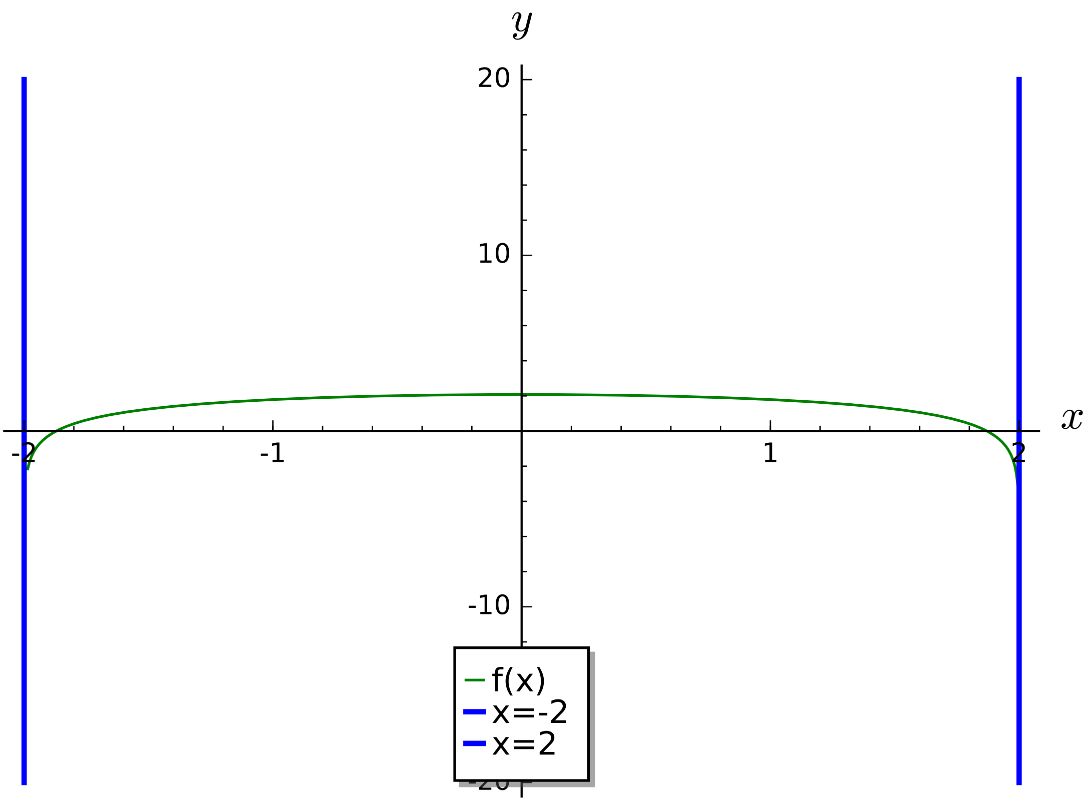

Figura 9: *Gráfica de la función.*

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \log\left(-2\,x^2 + 8\right)$$

No existe el límite de la función en ∞:

No existe el límite de la función en $-\infty$: La función no puede tener asíntotas horizontal por no estar definida en $\pm\infty$

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

1. Difíciles

Ejercicio 1: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} \\ &= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

Por ello calculamos: $x = 0$

Soluciones: $x_0 = 0$;

Asintota en $x = 0$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty \end{cases}$$

Aunque el límite no exista (porque los límites laterales son diferentes), su magnitud sigue siendo infinita por ambos lados, por lo que la recta x = 0 es una **asíntota vertical** de f(x)

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \frac{e^x}{x}$$

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x}{x} = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x}{x^2} = ... = +\infty$$

En este caso, tenemos $m = +\infty$ por lo que **no hay asíntota** oblícua (ni horizontal).

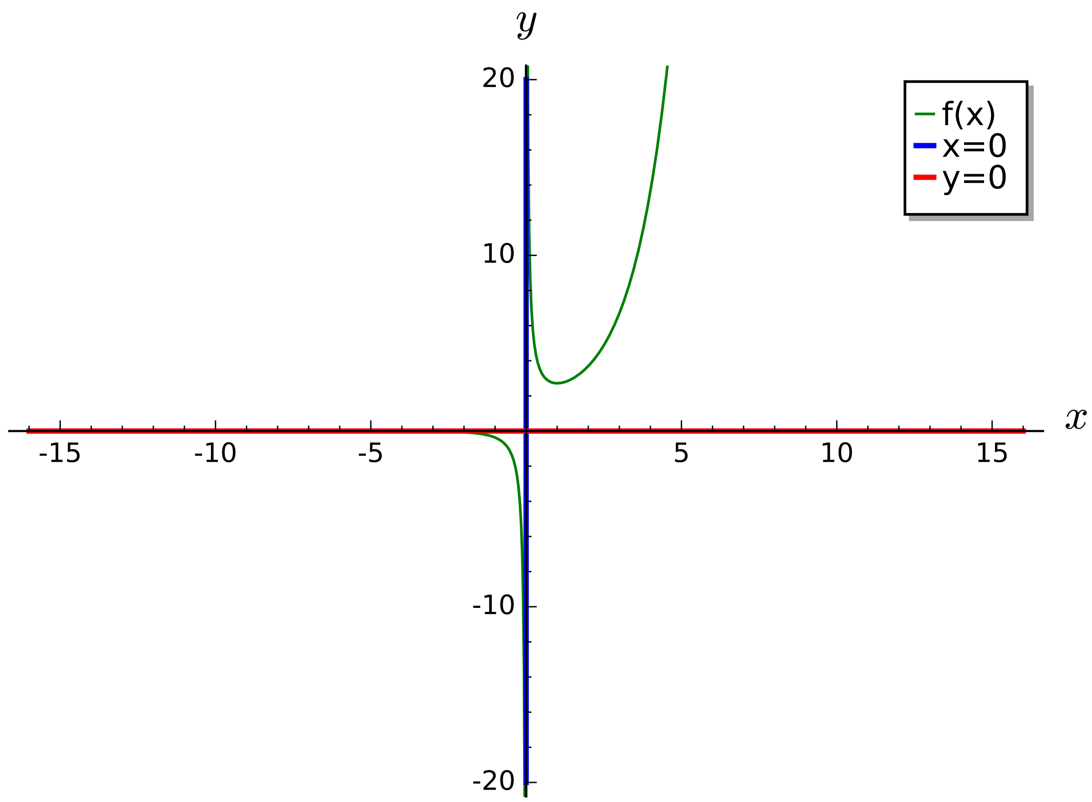

Figura 10: *Gráfica de la función.*

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{e^x}{x} = ... = 0$$

En $-\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

Ejercicio 2: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = x(e^x - 1)$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R} \\ &= (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

No tiene denominador, por lo que no hay puntos canditatos aquí.

Soluciones: No tiene soluciones reales

Asíntotas verticales

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} x(e^x - 1)$$

Límite de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} x(e^x - 1) = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} e^x - 1 = ... = +\infty$$

En este caso, tenemos $m = +\infty$ por lo que **no hay asíntota** oblícua (ni horizontal).

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} x(e^x - 1) = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} e^x - 1 = ... = -1$$

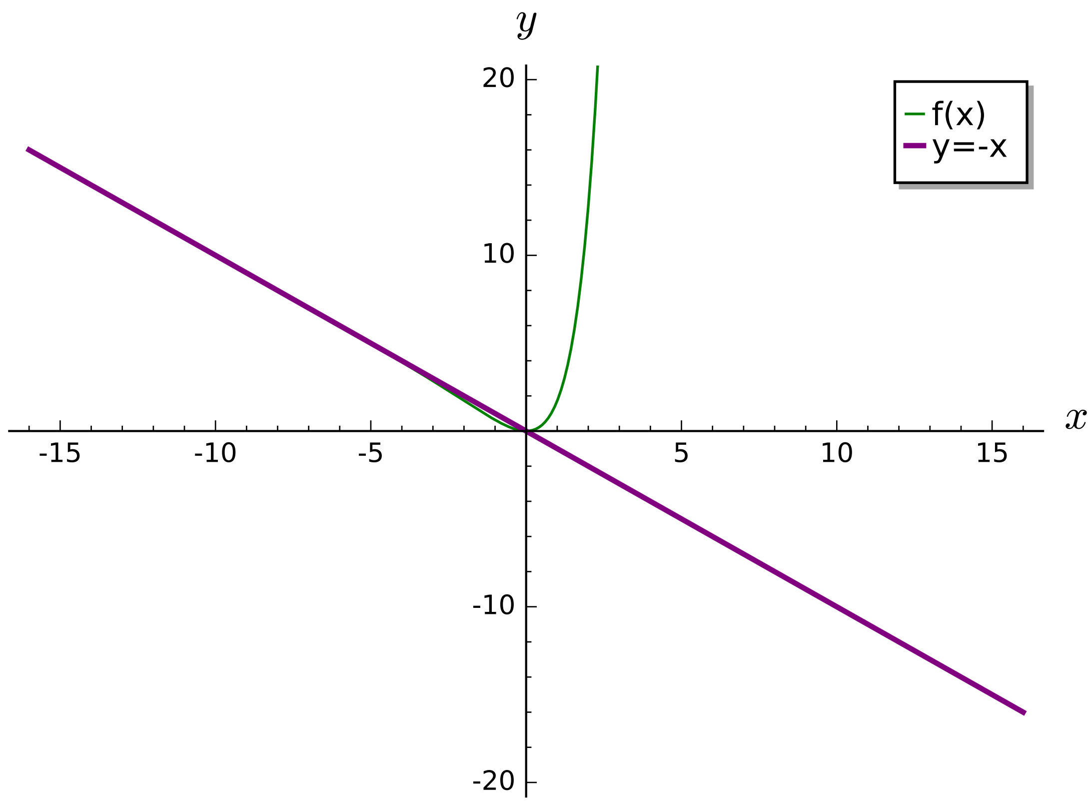

Figura 11: *Gráfica de la función.*

En este caso tenemos m=-1 por lo que sí hay asíntota oblícua. Calculamos n:

$$n = \lim_{x \mapsto -\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \mapsto -\infty} \big(x(e^x - 1) - -1x\big) = \lim_{x \mapsto -\infty} x(e^x - 1) + x = 0$$

En $-\infty$, f(x) tiene una **asíntota oblícua** en $y = -x$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

2. Muy difíciles

Ejercicio 1: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \diagup \frac{x+2}{x-1} > 0\} \\ &= \big((-oo, -2) \cup (1, +oo)\big) \\ &= (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

No tiene denominador, por lo que no hay puntos canditatos aquí.

Soluciones: No tiene soluciones reales

Atención: Como la función es un logaritmo, podríamos tener una asíntota vertical (ya que $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \log(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \log(x) = \infty$). Vamos a comprobarlo.
Para ello, calculamos los puntos en los que se haga 0 o $+\infty$ el interior del logaritmo .
En este caso:

$$\frac{x+2}{x-1} = 0$$

Soluciones: $x_0 = -2; \quad x_1 = 1;$

Asintota en $x = -2$ Calculamos

$$\lim_{x\mapsto -2} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\mapsto -2^+} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \nexists \\ \\ \lim\limits_{x\mapsto -2^-} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = -\infty \end{cases}$$

$x = -2$ es **A.V.** de f(x) por la izquierda.

Asintota en $x = 1$ Calculamos

$$\lim_{x\mapsto 1} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\mapsto 1^+} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\mapsto 1^-} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \nexists \end{cases}$$

$x = 1$ es **A.V.** de f(x) por la derecha.

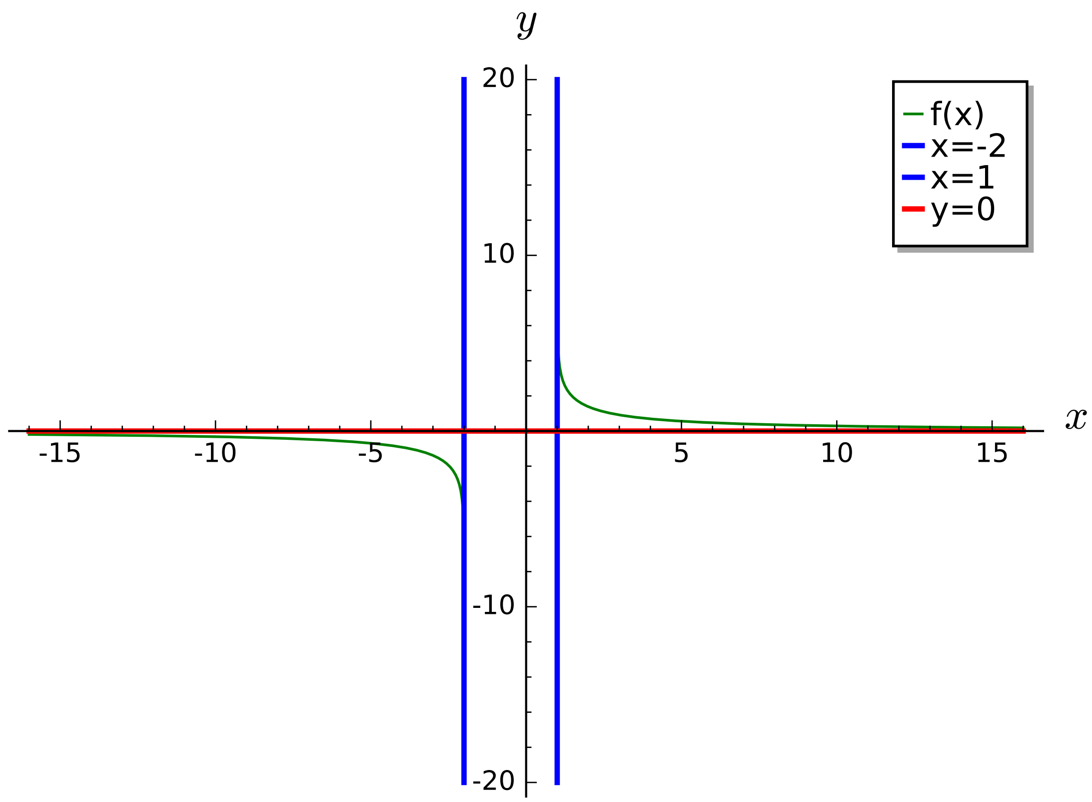

Figura 12: *Gráfica de la función.*

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

Límite de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = ... = 0$$

En $+\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Límite de la función en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \log\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = ... = 0$$

En $-\infty$ f(x) tiene una **asíntota horizontal** en $y = 0$.

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

Ejercicio 2: *Estudia sistemáticamente la siguiente función*

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right)$$

Esta solución ha sido generada automáticamente. Puede contener errores.

Dominio

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; \frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1} > 0\} \\ &= \big((1,2) \cup (3,+oo)\big) \\ &= (1,2) \cup (3,+\infty) \end{aligned}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Los posibles puntos en los que la función puede tener una asíntota vertical son aquellos en los que se anula el denominador.

No tiene denominador, por lo que no hay puntos canditatos aquí.

Soluciones: No tiene soluciones reales

Atención: Como la función es un logaritmo, podríamos tener una asíntota vertical (ya que $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \log(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \log(x) = \infty$). Vamos a comprobarlo.
Para ello, calculamos los puntos en los que se haga 0 o $+\infty$ el interior del logaritmo .
En este caso:

$$\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1} = 0$$

Soluciones: $x_0 = 3$; $\quad x_1 = 2$; $\quad x_2 = 1$;

Asintota en $x = 3$ Calculamos

$$\lim_{x\mapsto 3} \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\mapsto 3^+} \log\left(\dfrac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\mapsto 3^-} \log\left(\dfrac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = \nexists \end{cases}$$

$x = 3$ es **A.V.** de f(x) por la derecha.

Asintota en $x = 2$ Calculamos

$$\lim_{x\mapsto 2} \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\mapsto 2^+} \log\left(\dfrac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = \nexists \\ \\ \lim\limits_{x\mapsto 2^-} \log\left(\dfrac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = -\infty \end{cases}$$

$x = 2$ es **A.V.** de f(x) por la izquierda.

Asintota en $x = 1$ Calculamos

$$\lim_{x \mapsto 1} \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \mapsto 1^+} \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \mapsto 1^-} \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = \nexists \end{cases}$$

$x = 1$ es **A.V.** de f(x) por la derecha.

Asíntotas horizontales u oblícuas Las asíntotas horizontales y oblicuas nos dan la información acerca de la tendencia de la función en $-\infty$ y en $+\infty$.

Para calcular las asíntotas, necesitamos calcular el límite de la función tanto en $+\infty$ como en $-\infty$:

$$\lim_{x \mapsto \pm\infty} \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right)$$

No existe el límite de la función en $-\infty$**:**

Límite de la función en $+\infty$**:**

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right) = ... = +\infty$$

Como el límite obtenido es de magnitud infinita la función no tiene asíntota horizontal, pero puede tener una asíntota oblícua. Para saber si tiene una asíntota oblícua calculamos:

$$m = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\log\left(\frac{x^2 - 5\,x + 6}{x - 1}\right)}{x} = ... = 0$$

En este caso, tenemos $m = 0$ por lo que **no hay asíntota** oblícua (ni horizontal).

Gráfica de la función En azul se marcan las asíntotas verticales, en rojo las horizontales y en morado las oblícuas.

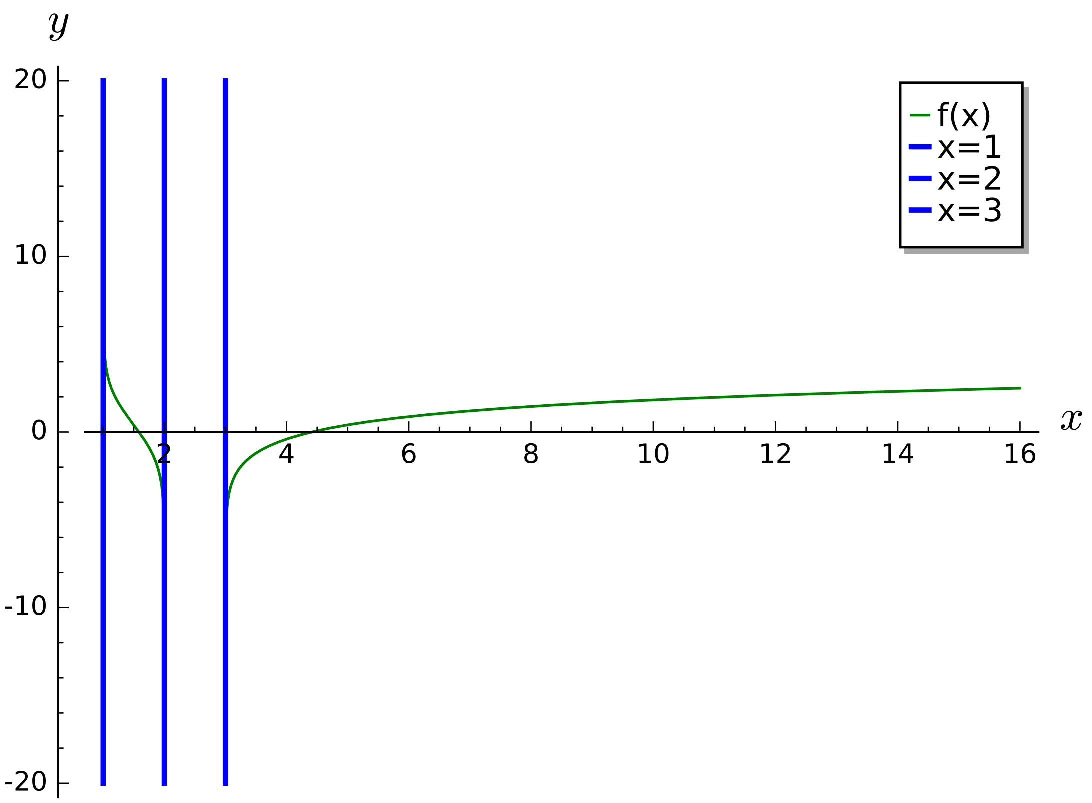

Figura 13: *Gráfica de la función.*