Cuaderno de clase

Resumen

Desarrollo del inicio de la geometría analícita bidimensional, temario de Matemáticas I.

Departamento de Matemáticas SaFa

Sa-Fa - 22/23

2023-04-12 08:43

Colegio Sagrada Familia
de Moratalaz

Índice general

[0] Documento compilado el 2023-04-12 a las 08:43

Capítulo I

Análisis

1. Funciones

El objetivo de esta función es ser capaz de representar gráficas de funciones dada su expresión algebraica. Para ello vamos a ir desarrollando diferentes herramientas que nos van a resultar tremendamente útiles para este propósito.

1.1. Concepto

Lo primero es tener claro qué es una función.

Función

Definición 1.1 **Función**. *Una función asigna a cada elemento de un conjunto X, un único elemento de otro, Y. Escribimos $f : X \to Y; x \in X \to f(x) \in Y$*

Ejemplos hablados. Añade 2 de tu propia cosecha.

- A cada uno le asigno su edad.
- A cada uno su estatura.
- A cada uno su brazo.
- A un número su doble.
- A un número su raíz cuadrada.
- A un número complejo su conjugado.

Funciones reales de variable real

Sí, pero sólo vamos a hablar de **funciones reales de variable real**.

Escribimos: $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}; x \to f(x)$

Como curiosidad hay funciones de variable "funcional", es decir, que asocia funciones con otras cosas. Este tipo de cosas se estudian en matemáticas.

1.1.1. Dominio y recorrido

Condiciones generales de cada función:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad D(f) = x/\exists f(x)$

Ejemplos:

- $f_1(x) = 3x^2 + 2$
- Racionales $f_2(x) = \frac{x+2}{x-1}$
- Radicales $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
- Radicales $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2 - 16}$
- Exponenciales $f_5(x) = e^x$
- Logaritmos $f_6(x) = \log(x + 2)$
- Trigonométricas $f_7(x) = \cos(x)$
- Trigonométricas $f_8(x) = \sin(x)$
- Combo: $f_9(x) = \frac{\log(x-5)}{x+7}$
- Combo: $f_{10}(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x+7}$

1.1.2. Clasificacion de funciones

Inyectividad

Definición 1.2 **Inyectividad**. *$f(x) : D(f) \to \mathbb{R}$ inyectiva $\iff \forall a, b \in D(f) a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$*

Sobreyectividad

Definición 1.3 **Sobreyectividad**. *$f(x) : D(f) \to \mathbb{R}$ sobreyectiva $\iff \forall b \in \mathbb{R} \exists a \in D(f)$ tal que $f(a) = b$*

Es decir, una función es sobreyectiva si su imagen son todos los números reales.

Biyectividad

Definición 1.4 **Biyectividad**. *Inyectividad y sobreyectividad*

Ejemplos: Razonando gráficamente.

- $f(x) = x^3$ (biyectiva)
- $f(x) = x^2$ (nada)
- Dibujo función cúbica sí sobreyectica, no inyectiva.
- $f(x) = e^x$ (inyectiva)
- $f(x) = \log(x)$ (inyectiva)

Gráfica de una función:

Gráfica de una función: $G(f) = \big(a, f(a)\big)$

1.2. Operaciones con funciones

- Suma, resta $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

  $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$.
- Producto

  $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.

- Cociente
  $$D\left({}^{f(x)}/_{g(x)}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x/g(x) = 0\}$$
- Composición $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$ y se lee "f compuesta con g".
  El dominio se recalcula.

Función inversa

Función inversa $f^{-1}(x) : Y \to X$ y cumple $(f \circ f^{-1})(x) = x$

Ejemplo: Comprueba si son inversas

- $f(x) = x^3 - 1$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ (sí)
- $f(x) = x^2 + 1$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (no)

Ejemplo: Calcula la función inversa de $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ y de $g(x) = \frac{-1}{3x}$

Construir funciones inversas. **Observación**: Una función no inyectiva no puede tener inversa.

2. Continuidad

2.1. Límites

Introducción Con el excel y geogebra. Definición intuitiva de límite. *Reto: escribe tu propia definición de límite y vete hablándola conmigo.*

- Excel: valor del límite: me voy acercando sin llegar a tocar.
- Geogebra: mismo gráficamente. Hacer zoom hasta la saciedad.

Límite en un punto finito

Definición 2.1 **Límite en un punto finito**. *Sea* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

El límite de la función $f(x)$ en un punto $x = a$ es el valor b al que se aproxima la función cuando la variable se aproxima al punto, sin nunca alcanzarlo.

Ejemplos:

- $\lim_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cálculo con calculadora) ¿Existe la función en el punto? Nooooo ¿Existe el límite? Siiiii.
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ (cálculo con calculadora). ¿Existe la función en el punto? Nooooo ¿Existe el límite? Puede existir. Decimos que es $\pm\infty$.

  Observación: Puede ser que la función no se acerque a ningún valor, sino que cada vez se haga más grande. En ese caso el resultado del límite será $+\infty$.

Observación: Puede ser que la función no se acerque a ningún valor, sino que cada vez se haga más pequeño. En ese caso el resultado del límite será $-\infty$.

Infinito, ¿concepto o valor?

Límite en el infinito

Aritmética del infinito *Definición 2.2* **Límite en el infinito**. *Sea* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

El límite de una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *en el infinito* ($\pm\infty$) *es el valor* b *al que se aproxima la función cuando la variable toma valores arbitrariamente grandes (o pequeños).*

Observación: Se cumplen las mismas observaciones de antes.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exsitencia del límite en un punto finito

Definición 2.3 **Exsitencia del límite en un punto finito**. *El límite existe si existen y son iguales los límites laterales.*

Propiedades de los límites Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que dado a, $\exists \lim_{x\to a} f(x)$; $\exists \lim_{x\to a} g(x)$

- $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm g(x)$
- $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm g(x)$
- $\lim_{x\to a} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big)^{\lim_{x\to a} g(x)}$
- $\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = ?$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x-4}}$$

Indeterminaciones

- $k/0$

  Vistas (la h). Son indeterminaciones a medias, ya que sólo tienen 2 posibilidades: $\pm\infty$

- ∞/∞ (potencia más alta del denominador)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x}+5\frac{x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+5+{}^6/_x}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty$$

- $0/0$ (simplificar)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

- $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to -\infty} x^2+x = \lim_{x\to -\infty} x(x+1) = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$$

  El problema viene con

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

- $1^{+\infty}$

  Estas indeterminaciones aparecen cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ y se resuelven utilizando:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lambda}, \text{ donde } \lambda = \lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x = e^{\lambda} \text{ donde } \lambda = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}-1\right)\cdot x = -1$$

2.2. Continuidad

Continuidad en un punto

Definición 2.4 **Continuidad en un punto**.

Una función $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en un punto a si y sólo si se cumplen:

- $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$
- $\exists f(a)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Observación: *Normalmente diremos: si existen y son iguales el límite y el valor en el punto.*

Tipos de discontinuidades Explicar gráficamente los casos.s

Ejemplo:

- *¿Es continua la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en $x = 2$?*
- *¿Es continua la función $f(x)$ en $x = 1$?*
- *¿Es continua la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$?*
- *Funciones definidas a trozos (hasta aquí).*

Continuidad en un intervalo abierto

Definición 2.5 **Continuidad en un intervalo abierto**. *Una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $(a, b) \in \mathbb{R}$ si es continua $\forall c \in (a, b)$.*

- ¿Es continua la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en $(2, \infty)$?
- ¿Es continua la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $(0, \infty)$?

Ejemplo: *Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$*

Observación: *Una función sólo puede ser continua en su dominio. En este caso: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\} - \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 4 = 0\} = [0, \infty) - \{4\}$*

La función es continua en $(0, 4) \cup (4, \infty)$

3. Derivabilidad

Derivada en un punto

Definición 3.1 **Derivada en un punto**. *Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una función continua. Se define la derivada de f en el punto a como:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivable

Observación: f **derivable** en $x = a \iff \exists f'(a)$

Observación: A la función inicial la llamaremos primitiva.

Ejemplo: *Cálculo de la derivada de $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en $x = 3$.*

$$f'(3) = \lim_{\times \to 3} \frac{x^2 + 2x - 1 - (3^2 + 2 \cdot 3 - 1)}{x - 3} = \lim_{\times \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{\times \to 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x - 3} = \lim_{\times \to 3} (x+5) = 8$$

Ejemplo: *Cálculo de la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$.*

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

Conclusión: La función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$. ¿Es continua? Sí.

Ejemplo: *Cálculo de la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 0$.*

$$f'(0) = \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1/x - 1/0}{x - 0}$$

No es derivable. ¿Es continua? No.

Observación: Derivable $\implies$ Continua. *Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua en ese punto*[1].

¿En física habéis derivado polinomios? ¿Cuál sería la "derivada" del polinomio? $f'(x) = 2x + 2$. ¿Cuánto vale $f'(3)$? $f'(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$. ¿Casualidad?

Pero... ¿porqué esto es cierto? ¿De dónde sale ese $3x^2 + 2$? Esto es a lo que llamamos la función derivada:

Función derivada

Definición 3.2 **Función derivada**. *Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una función continua. Se define la función derivada de f como la función que a cada punto le asigna el valor de su derivada.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: *Cálculo de la función derivada $f'(x)$ de un polinomio, por ejemplo $f(x) = x^2 + 2x - 1$*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - 1 - x^2 + 2x - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 1 - x^2 - 2x + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h + 2) = 2x + 2$$

Conclusión: la función derivada de $f(x) = x^2 + 2x - 1$ es $f'(x) = 2x + 2$.

Propiedades de la derivada:

Proposición 3.1 (Cálculo operativo). *Sean f, g derivables en a. Entonces*

- $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \forall k \in \mathbb{R}$
- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- *Si* $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$
- *Si* $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$
- $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

Explicación de la tabla de derivadas

[1] Está en su tabla de derivadas

Regla de la cadena

A practicar:

- $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$
- $f(x) = x \cdot e^x$
- $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x)$
- $f(x) = x \cdot \ln(x)$
- $f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$
- $f(x) = (x^2+2x) \cdot \operatorname{sen}(x)$
- $f(x) = (e^x - x) \cdot \ln x$
- $f(x) = \sqrt{x^2+x}$
- $f(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)^3$
- $f(x) = \ln(4x)$
- $f(x) = (\cos x)^2 = \cos^2 x$
- $f(x) = \operatorname{sen}\left(3x^2\right)$
- $f(x) = \cos\left(x^2+1\right)$
- $f(x) = \operatorname{tg}\left(x^2-3x\right)$
- $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+3x}$
- $f(x) = \cos\dfrac{x-1}{x}$
- $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x-1}$
- $f(x) = -\operatorname{sen}\dfrac{x}{-x^4+x-1}$
- $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$

3.1. Interpretación geométrica de la derivada

4. Integrales inmediatas

5. Estudio sistemático de una función

- Dominio, siempre.
- Puntos de corte con los ejes.
- Simetría.

- Asíntotas, repaso de 4º.
- Monotonía.
- Curvatura.

5.1. Monotonía

Diferenciar los intervalos en los que la función crece de aquellos en los que la función decrece. También, ¿dónde están los máximos y los mínimos?

- Ejemplo: dada la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, encuentra sus extremos relativos.
- Los extremos relativos se encuentran en los puntos donde la derivada se hace 0. ¿Por qué? Interpretación gráfica.
- ¿Cómo distinguir máximo de mínimo? En este caso, la parábola va hacia arriba, por lo que debe ser mínimo.

  Por un lado negativa (función decrece), por otro positiva (función creciente).

  Segunda derivada positiva, lo que marca que es un mínimo.
- Concavidad: segunda derivada positiva -> mínimo, convexa.

- $f'(x) > 0 \implies f(x)$ crece.
- $f'(x) < 0 \implies f(x)$ decrece.
- $f'(x) = 0 \implies$ extremo relativo. ¿Máximo, mínimo?
- $f''(x) > 0 \implies$ mínimo y convexa-contenta (desde el semieje negativo de y).
- $f''(x) < 0 \implies$ máximo y cóncava desde el semieje negativo de y.
-

Clase del jueves:

- Corregir: demuestra que el vértice de la parábola es ${}^{-b}/_{2a}$
- Halla las rectas tangentes a la función $f(x)$ en los máximos (no es necesario intervalos de crecimiento y decrecimiento).

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$$

- Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos y absolutos) de $f(x) = x^4 - 2x^2$
- Estudia sistemáticamente la función: $f(x) = \frac{2(x-2)+1}{(x-2)^2} = \frac{2x-1}{x^2-4x+4}$

  Punto de corte eje x: $(1.5, 0)$, eje y: $(0, -0.75)$, mínimo absoluto: $(1, -1)$
- Estudia las asíntotas de $f(x) = \frac{x^3-4x^2+x+6}{2x^3-14x^2+32x-24}$
- Deriva $f(x) = \tan(x^2 - 3x)$