Cuaderno de clase

Resumen

Desarrollo del inicio de la geometría analícita bidimensional, temario de Matemáticas I.

Departamento de Matemáticas SaFa

Sa-Fa - 22/23

2023-09-12 14:03

Colegio Sagrada Familia
de Moratalaz

Índice general

[0] Documento compilado el 2023-09-12 a las 14:03

Capítulo I

Números y complejos

0.0.1. Conjuntos numéricos

¿Qué conjuntos de números conocéis? $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, I, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ Diagrama de contenidos e historia de cómo van surgiendo.

Si sobrara tiempo: belleza intrínseca de las matemáticas: ¿Qué hay más, enteros o pares?

Cómo distinguir que un número dado pertenece a un conjunto o no. Por ejemplo, $\sqrt{2}$. ¿A qué conjunto pertenece y porqué? ¿Por qué $\sqrt{2}$ es irracional? $^4/_3 = 1.\hat{3}$ también tiene infinitos decimales. En este curso ya no vale creerse lo que los profesores os contamos sin más. Es fundamental entender las demostraciones y ser capaz de razonar el porqué de los asuntos.

Demostración. [**Reducción al absurdo**] Suponemos $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Entonces
$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \diagup \left(\sqrt{2} = {}^a/_b\right) \wedge \left(\text{mcd}\,(a,b) = 1\right)$$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies 2 \cdot b^2 = a^2 \implies a^2 \text{ es par} \overset{1}{\implies} a \text{ es par}$$

Si a^2 es par, necesariamente a es par también. Por reducción al absurdo, si a no fuera par, $a \cdot a$, producto de impares no sería par. Como a es par, podemos escribirlo como $a = 2 \cdot k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

$$2b^2 = (2k)^2 \implies b^2 = 2k^2 \overset{1}{\implies} b \text{ par.}$$

Conclusión: mcd $(a, b) = 2 \neq 1$. Hemos llegado a una contradicción partiendo de un supuesto ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) "inventado", por lo que ese supuesto debe ser falso.

Un argumento alternativo no tan convincente aunque más fácil de entender sería:

$2 \cdot b^2 = a^2$. Así, en la descomposición factorial de a^2 aparecería el factor b^2, por lo que mcd $\left(a^2, b^2\right) = b^2$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{mcd}\,(a,b) = 1 \implies \text{mcd}\left(a^2,b^2\right) = 1 \\ \text{mcd}\left(a^2,b^2\right) = b^2 \end{array}\right\} \implies b = \pm 1 \implies \sqrt{2} \in \mathbb{Z}$$

$\square$

No os creáis cualquier demostración: Partiendo de $x = y$

$$x^2 = xy \iff x^2 - y^2 = xy - y^2 \iff (x+y)(x-y) = y(x-y) \iff x+y = y \iff 2y = y \implies 2{=}1$$

1. Introducción

Vamos a interntar resolver $x^2 + 9 = 0 \iff x^2 = -9 \iff x = \sqrt{-9}$. Siempre hemos dicho que no tiene solución. Pero yo podría escribir $(\sqrt{-9})^2 + 9 = 0$. Es decir, $\sqrt{-9}$ es solución de la ecuación. ¡Y también lo es $x_2 = -\sqrt{-9}$!

La manera de trabajar con raíces negativas es sacar todos los factores hasta dejar simplemente $\sqrt{-1}$, es decir: $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3\sqrt{-1}$ y escribimos $\sqrt{-1} = i$. **Conclusión:** las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3i$ y $x_2 = -3i$.

Podemos resolver ecuaciones que antes eran imposibles y, además, podemos calcular raíces que antes no "existirían".

Pongamos otro ejemplo:

¿Podríamos factorizar el polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 2$? El **teorema fundamental del álgebra** dice que tiene 2 soluciones, pero las 2 son complejas. Vamos a verlo

Para factorizar el polinomio calculamos sus raíces resolviendo la ecuación: $P(x) = 0$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{2i}{2} = 1 \pm i$$

Hemos obtenido 2 raíces: $\alpha_1 = 1 + i$ y $\alpha_2 = 1 - i$. ¿Cómo quedaría el polinomio factorizado?

$$P(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) = (x - (1+i)) \cdot (x - (1-i))$$

Primera utilidad de los números complejos: resolver ecuaciones que antes eran "imposibles" y factorizar polinomios que considerábamos irreducibles.

Hay otra utilidad más: $\sqrt[6]{64}$ tiene 6 soluciones: $\sqrt[6]{64} = \{2, -2, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}\}$. ¿Las comprobamos entre todos?

2. Formalización y operaciones en $\mathbb{C}$

Un número complejo es de la forma $z = a + bi$, donde $i = \sqrt{-1}$, y llamamos $a = Re(z)$ y $b = Im(z)$.

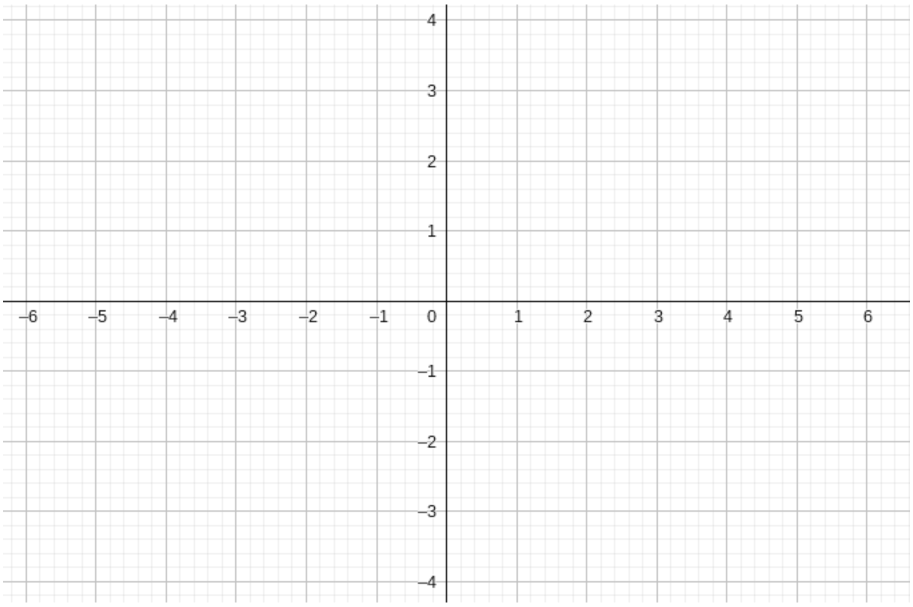
Ejemplos

- $z_1 = 3 \to Re(z_1) =$; $Im(z_1) =$ [1]
- $z_2 = 2 - i \to Re(z_2) =$; $Im(z_2) =$
- $z_3 = \sqrt{2} + 6i \to Re(z_3) =$; $Im(z_3) =$

[1] Luego, todos los números reales son complejos.

Representación gráfica: como los vectores en física, sólo que aquí no hay $\vec{i}$ ni $\vec{j}$. El eje y es el eje *imaginario* y el eje x es el eje *real*.

Ejemplo: *Representa los números complejos* $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 0$; $z_3 = 2 + 3i$.



Complejos Conjugado

Definición 2.1 **Complejos Conjugado**. *Llamamos conjugado de un número complejo* $z = a + bi$ *a* $\bar{z} = a - bi$.

Observación: *Los conjugados son simétricos respecto del eje* x.

2.1. Operaciones en forma binómica

$$[(2+i)+(3-2i)-(-2i)]\cdot[(^1/_5+i)] = \ldots$$

División Para dividir $z_1 = a + bi$ entre $z_2 = c + di$ hacemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}}$$

¿Por qué se multiplica por el conjugado? En la división buscamos $z_? = x + yi$ tal que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = x + yi$$

Al multiplicar arriba y abajo por el conjugado estamos quitando el número complejo del denominador. De esa manera, operando podemos obtener x e y.

Ejemplo:

Practicar con el ejercicio 8

2.1.1. Forma polar

Ejemplo: $z = 1 - i$, *dibujando el punto y sacando el ángulo que forma.*

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\alpha_z = \frac{-\pi}{4}$

$z = 1 - i = \sqrt{2}_{-\pi/4}$

Coordenadas polares

En la representación gráfica de números complejos, podemos utilizar otro sistema de referencia: *módulo* $|z| = r$ y *argumento (ángulo)* $\arg z = \alpha$. Estas son las **coordenadas polares** de un número complejo y escribimos $z = r_\alpha$

Módulo

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, definimos **módulo** como $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Observación: La representación geométrica del módulo es la distancia hasta el origen de coordenadas.

Argumento

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, definimos **argumento** como $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$.

Escribe en forma polar:

- $z_1 = 1 + i$
- $z_2 = 1 - i$
- $z_3 = 6i$
- $z_4 = -2 - \sqrt{3}i$

Transformación de forma polar a binómica Dado $z = r_\alpha$, las coordenadas en el plano del número complejo son $(r\cos(\alpha), r\sin(\alpha))$, por lo que podemos escribir:

$$z = \underbrace{r_\alpha}_{\text{Polar}} = \underbrace{r \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))}_{\text{Trigonométrica}} = \underbrace{r\cos(\alpha)}_{a} + \underbrace{r\sin(\alpha)}_{b} i = \underbrace{a + bi}_{\text{Binómica}}$$

Operaciones en forma polar y trigonométrica Sean $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = s_\beta$

$z_1 \pm z_2$ necesitamos pasar a forma binómica/trigonométrica. ¿Para qué sirve esta forma entonces? Para multiplicar y dividir, que se hace realmente sencillo

Corregir 8ef, 15 abc (solo polar). Introducir trigonométrica desde el ejercicio 15.

Operaciones en polar.

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Ver **??** para la demostración.

División: $\frac{z_1}{z_2} = (^r/_s)_{\alpha-\beta}$

Ejemplo

$$\frac{3_{30} \cdot 5_{120}}{\sqrt{15_{60}} \cdot 1_{420}}$$

$$\frac{2_{120} \cdot 1_{240}}{\sqrt{2_{60}} \cdot 2_{30}}$$

3. Radicación

Sabemos que $\sqrt{16} = \pm 4$, ¿verdad? Y $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, ¿no?

¿Nos habrán mentido desde pequeños sobre esto también? Siento decirte que sí. Vamos a verlo.

Calcula:

- $2^4 = 16$
- $(-2)^4 = 16$
- $(2i)^4 = 16 \cdot i^4 = 16$
- $(-2i)^4 = 16 \cdot i^4 = 16$

¡Cuatro raíces! De una manera general $\sqrt[n]{z}$ tiene n soluciones. ¡Vamos a calcularlas! Y para esto es imprescindible la forma polar.

Radicación compleja

Definición 3.1 **Radicación compleja**. $\sqrt[n]{z} = \{s_\beta\}$ *con* $s = +\sqrt[n]{|z|}$ *y* $\beta = \left\{\dfrac{\arg(z) + 360k}{n} \quad k \in \mathbb{N}\right\}$

Ejemplo: *Calcula las 5 raíces de $z = 1 + i$*

Solución

- *Forma polar:* $z = 1 + i = \sqrt{2}_{45}$
- *Las raíces serán de la forma s_β con $s = \sqrt[5]{\sqrt{2}}$ y $\beta = \frac{45+360k}{5}$*
    - $k = 0 \rightarrow \sqrt[10]{2}_9$
    - $k = 1 \rightarrow \sqrt[10]{2}_{81}$
    - $k = 2 \rightarrow \sqrt[10]{2}_{153}$
    - $k = 3 \rightarrow \sqrt[10]{2}_{225}$
    - $k = 4 \rightarrow \sqrt[10]{2}_{297}$

4. Números reales

4.1. Introducción

4.1.1. Entornos (libro, pero dando las definiciones algebraicas):

Dado un intervalo $(3, 7)$, ¿cuál es su centro? ¿cuál es su amplitud? (Calcular). A veces nos interesará escribir el mismo intervalo de puntos haciendo énfasis en el centro y el radio. Entonces, estaremos escribiendo *entornos* en lugar de intervalos. Y como los intervalos, hay varios tipos de entornos.

Entorno abierto

Definición 4.1 **Entorno abierto**. *Llamamos entorno abierto de centro a y radio r, y se denota por $E_r(a)$, al conjunto de puntos que distan de a a una distancia menor que r:*

$$E_r(a) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

Entorno cerrado

Definición 4.2 **Entorno cerrado**. *Llamamos entorno cerrado de centro a y radio r, y se denota por $E_r(a)$, al conjunto de puntos que distan de a a una distancia menor o igual que r::*

$$E_r[a] = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$$

Entorno reducido

Definición 4.3 **Entorno reducido**. *Llamamos entorno reducido de centro a y radio r, y se denota por $E_r(a)$ a:*

$$E_r^*(a) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < r\} - \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r)$$

El libro utiliza otra notación que no nos gusta. Apuntad la buena.

Seguimos pasando páginas del libro y comentando

4.2. Logaritmos

En el curso COVID (20-21) se hizo el repaso en sus casas con vídeos

Introducción Vamos a aprender una nueva manera de multiplicar. En realidad ya sabéis, aunque no seáis conscientes.[2]

- Caso 1: $1000000 \cdot 10000000 = 10^6 \cdot 10^7 = 10^{13}$. ¿Y podremos hacer esto con otros números que no sean el 10?
- Caso 2: $64 \cdot 128 = 2^6 \cdot 2^7 = 2^{13} = 8192$
- ¿Caso 3?: Me construyo la tabla del 3.

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

[2]Fuente: Mark Foskey, youtube.com

- Caso 4: ¿Y para números que no son potencias enteras? Por ejemplo, $64 * 40$. Pues si $32 = 2^5$ y $64 = 2^6$, $40 = 2^{5,\cdots}$ ¿Tiene sentido?
- Caso 5: Lo que hicieron, Yost y Napier, fue coger la tabla del 1,0001 en lugar de la tabla del 3 y dividir por mil los números rojos, dando lugar a la tabla de logaritmos:

0.0	1.0
0.001	1.001
0.002	1.002
0.003	1.003
0.004	1.00401
0.005	1.00501
0.006	1.00602
0.007	1.00702
0.008	1.00803
0.009	1.00904
⋮	⋮
0.991	2.69259
0.992	2.69529
0.993	2.69798
0.994	2.70068
0.995	2.70338
0.996	2.70608
0.997	2.70879
0.998	2.7115
0.999	2.71421
1.0	2.71692 (Una aproximación de e)

Logaritmo

Definición 4.4 **Logaritmo**. *Sean $a \in \mathbb{R} > 0, a \neq 1$ y $N \in \mathbb{R}$.*

Se llama logaritmo en base a de N al exponente x que cumple: $a^x = N$ y se escribe:

$$\log_a N = x \iff a^x = N$$

Nota: De la propia definición se entiende:

1. $y \in \mathbb{R}, y < 0 \implies \forall a, \nexists \log_a y$
2. $\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$
3. $\log_a a = 1 \iff a^1 = a$
4. $\log_a a^q = q \iff a^q = a^q$ por definición.
5. $a^{\log_a N} = N$

Demostración. Sea $b = \log_a N \iff a^b = N$. Entonces, $a^{\log_a N} = N \iff a^n = N$ □

Propiedades:

- $\log_a(AB) = \log_a(A) + \log_a(B)$

Demostración.

$$\left.\begin{array}{l}\log_a(A) = p \iff a^p = A \\ \log_a(B) = p \iff a^q = B\end{array}\right\} \implies A \cdot B = a^{p+q} \implies \log_a(AB) = \log_a a^{p+q}$$

$$\log_a(AB) = \log_a a^{p+q} \overset{?}{\implies} \log_a(AB) = p + q \overset{?}{=} \log_a A + \log_a B$$

$\square$

"El exponente de un producto es la suma de los exponentes".

- $\log_a \left({}^{A}/_{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$

Demostración. Análoga. Para completar por vosotros. Si no lo conseguís, intentadlo. $\square$

"El exponente de un cociente es la resta de los exponentes".

- $\log_a(A)^n = n \cdot \log_a(A)$

Demostración.

$$\log_a A^n = \log_a(A \cdot A \cdot A \cdot A...) = \log_a A + \log_a A + ... = n \log_a A$$

$\square$

¿Os convence esta demostración? No debería... ¿Y si $n \notin \mathbb{N}$? La demostración deja de valer. ¡Sed críticos!

Demostración. Tomamos $\log_a A = p \iff a^p = A$

$$a^p = A \iff a^{np} = A^n \iff \log_a a^{np} = \log_a A^n \iff np = \log_a A^n$$
$$\iff n \log_a A = \log_a A^n$$

$\square$

- $\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$ **(Cambio de base)**

Demostración. Tomamos $\log_a A = p \iff a^p = A$

$$\log_b a^p = \log_b A \iff p \log_b a = \log_b A \iff p = \log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

$\square$

Tomar logaritmos:

$$A = B \overset{1}{\iff} a^{\log_a A} = a^{\log_a B} \iff \log_a A = \log_a B$$

¿Implicaciones o equivalencias?

$$A = B \implies a^{\log_a A} = a^{\log_a B} \iff \log_a A = \log_a B$$

4.2.1. Ejemplos con logaritmos

- $\log \sqrt{0,0001}$
- Ejercicio 21.49_a,c,e,g; 52_a,c;104_bd
- Demuestra $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

4.2.2. Aplicación de los logaritmos

pH Para medir el nivel de acidez, pH, que mide la concentración de iones hidronio (H_3O^+)

$$pH = -\log[H_30^+]$$

Despejar el tiempo En el crecimiento exponencial de bacterias: $P = p_0 \cdot k^t$ donde p_0 es la cantidad inicial, t son los periodos de tiempo y k la tasa de multiplicación.

Pag 23, ejer 57.

Interés compuesto **Nota**: Que no copien todo esto, sino que lo entiendan.

Sea C el capital inicial. Tras 1 periodo de tiempo, obtengo el r % de intereses. Entonces tendré: $C_1 = C_0 + {}^r\!/_{100} C_0 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$

Pasado otro periodo de tiempo tendré $C_2 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$

En general, para t periodos de tiempo tendremos: $C_t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$.

La fórmula del interés compuesto capitalizado en p periodos, para un interés nominal r es:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100p}\right)^{pt}$$

3 preguntas? Contestadas más adelante:

a Pero... ¿es lo mismo un interés anual del 5 % capitalizado cada mes, que un interés anual del 5 % capitalizado cada año? No.

b ¿Y si capitalizo cada semana? ¿Y cada día? ¿Y si capitalizo *instantáneamente*? Tampoco

c ¿Cuánto tiempo tengo que dejar el dinero si quiero ganar una cantidad concreta? Aquí sirven los logaritmos.

a) Pero, ¿es lo mismo un interés mensual del 5 % durante 12 meses que un interés anual del 5 % durante 12 años? Sí. ¿A quién le importa que sean meses o años?

Pero... ¿es lo mismo un interés anual del 5 % capitalizado cada mes, que un interés anual del 5 % capitalizado cada año? ¿Hay alguno que sea mayor?

Ejemplo: *Tengo $C = 1000$ a un $r = 5\,\%$. Tengo 2 opciones para elegir y no se cual es mejor.*

a) Un interés anual del 5 % capitalizado cada mes durante 5 años.

$$C = C_0 \cdot (1 + {}^{r}/_{100p})^{t \cdot p} = 1000 \cdot (1 + {}^{5}/_{1200})^{12*5} = 1283.36$$

b) Un interés anual del 5 % capitalizado cada año durante 5 años.

$$C = C_0 \cdot (1 + {}^{r}/_{100p})^{t \cdot p} = 1000 \cdot (1 + {}^{5}/_{100})^{5} = 1276.28$$

Es más rentable la opción a.

Nota: *De hecho, ¿cuál es el interés equivalente que hay que aplicar al año en el caso a)?*

$$C = C_0 \cdot (1 + {}^{r}/_{100})^t \iff \frac{C}{C_0} = (1 + {}^{r}/_{100})^t \implies \sqrt[t]{\frac{C}{C_0}} = \sqrt[t]{(1 + {}^{r}/_{100})^t} \iff$$

$$\sqrt[t]{\frac{C}{C_0}} - 1 = {}^{r}/_{100} \iff r = 100 \cdot \left(\sqrt[t]{\frac{C}{C_0}} - 1 \right) \implies r = 100 \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1283.36}{1000}} - 1 \right) = 5.1162...$$

TAE *Conclusión, un 5 % mensual es lo mismo que un 5.1162... % anual. Por esto, y para que no nos puedan timar los bancos existe la **TAE** (Tasa Anual Equivalente.)*

b) ¿Y si capitalizo cada semana? ¿Y cada día? ¿Y si capitalizo *instantáneamente*?

c) Tengo entendido que durante el mes de julio, ??? ha trabajado de hamaquero en la playa y cobrado 150 al mes. ¿Puede ser? Su banco le ofrece un depósito con un interés del 10 % y Miguel querría pagarse su carrera, que será algo así como 10000, sino sigue subiendo. ¿Cuánto tiempo tiene que dejar su dinero en el banco para pagarse la carrera?

$$C = C_0 \cdot (1 + {}^{r}/_{100})^t \iff \log \frac{C}{C_0} = t \log(1 + {}^{r}/_{100}) \iff t = \frac{\log \frac{C}{C_0}}{\log(1 + {}^{r}/_{100})} = \frac{\log \frac{10000}{150}}{\log\left(1 + {}^{10}/_{100}\right)}$$

$$t = 44.06 \text{ años}$$

Ejercicio 31.122

5. Tema 2: álgebra

5.1. Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Vamos a ir desgranando y entendiendo la fórmula. Empezamos con $\binom{n}{i}$

Combinatoria básica ¿Cuántas parejas puedo hacer con 5 cartas? $\binom{5}{2}$

Número combinatorio

Definición 5.1 **Número combinatorio**. *Dados 2 números naturales no nulos m y n, siendo $m \geq n$, se denomina número combinatorio $\binom{m}{n}$, y se lee "m" sobre "n" a* $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Propiedades

- $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

Demostración.

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = 1$$

□

- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

Demostración.

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$$

□

- $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$

Nota: No copiar

En cursos anteriores hemos visto $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Si tenemos muy buena memoria igual recordamos $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3$. Pero, ¿cómo calcular, sin desarrollar $(a+b)^6$?

$(a+b)^6 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ ¿Cuántos productos $abbbbb$ va a haber? $babbbb, bbabbb, bbbabb, bbbbab, bbbbba$. Esto es lo mismo que preguntarnos, ¿de cuántas maneras diferentes puedo ordenar la secuencia de letras $abbbbb$? O, lo que es lo mismo, ¿cuántas combinaciones hay de colocar la a en las 6 posiciones? ¿Y para el producto $aabbbb$? Hay 6 huecos y queremos rellenar 2 de ellos con a y dejar 4 libres (fijémonos que es lo mismo que querer rellenar 4 con b y dejar 2 libres. Debemos obtener las mismas posibilidades). ¿De cuántas maneras lo puedo hacer? ¿Cuántas parejas de casilleros puedo hacer con 6 casilleros?

Razonando de esta manera, llegamos a que el coeficiente de $aabbbb = a^2b^4 = \binom{6}{2} = \binom{6}{4}$. Repitiendo el razonamiento, llegaríamos a que el coeficiente sería $a^{m-n}b^m = \binom{m}{n}$.

De esta manera podemos escribir:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^0b^6 + \binom{6}{1}a^1b^5 + \binom{6}{2}a^2b^4 + ... = \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}a^ib^{6-i}$$

Generalizando esta idea para cualquier exponente n obtenemos:

Binomio de Newton

Binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$

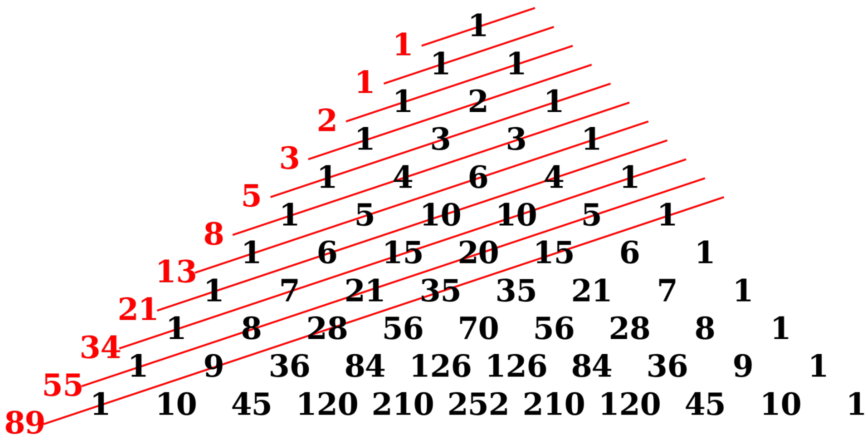


Figura I.1: *Triángulo de Pascal y su relación con la serie de Fibonacci*

Curiosidad matemática: Triángulo de Pascal (vídeo brutal de Numberphile)

De aquí construimos el triángulo y jugamos un rato con él. Potencias de 2 sumando los números, potencias de 11 y Fibonnaci.

Ejemplo de uso de la fórmula para $(3x-2)^5$. Así, utilizamos la calculadora para números combinatorios. Ejercicios del libro. (Yo 15. Ellos 20. Yo 16, ellos 21).

5.2. Teoremas de factorización

Ejemplo. La factorización del polinomio. ¿Qué raíces puede tener? Ni $\pm 1, \pm 3$, ¿entonces? Teorema de las raíces racionales.

Factoriza (yo con ellos): $P(x) = 3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 3(x^2+3)\left(x - {}^1/_3\right)$

Teorema 5.1 (Teorema del factor). *Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.*

$$P(\alpha) = 0 \iff \frac{P(x)}{(x-\alpha)} = Q(x)$$

De hecho este teorema es un caso particular del teorema del resto:

Teorema 5.2 (Teorema del resto). *Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.*

Entonces, el resto de $\frac{P(x)}{x-\alpha} = P(\alpha)$

Teorema 5.3 (Teorema de la factorización). *Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ las raíces o ceros de $P(x)$.*

Entonces,

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$$

Teorema 5.4 (Teorema de las raíces enteras). *Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, una raíz entera r de $P(x)$ tiene que ser divisor del término independiente.*

Teorema 5.5 (Teorema de las raíces racionales). *Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$,$a_i \in \mathbb{Z}$ una raíz fraccionaria ${}^{n}/_{m}$ del polinomio $P(x)$ tiene que cumplir $n|a_0$ y $m|a_n$.*

5.2.1. Ejercicios:

1. (YO) Sea $P(x) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 3(x-1)(x+1)^2$
   - ¿Es divisible por $(x-1)$? Comprobamos $P(1) = 3 - 3 - 3 + 3 = 0 \overset{T.F}{\Longrightarrow}$ Sí.
2. (YO) Sea $P(x) = 6x^3 - 10x^2 + 4x = 6x(x-1)(x - {}^{2}/_{3})$
   - Factoriza.

     $P(0) = 0$. Por el teorema del factor sabemos que $x - 0$ es un factor.

     Posibles raíces: $n = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ y $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

     Por el teorema de la factorización, $Q(x) = 3x^3 - 5x + 2x$ tendrá las mismas raíces que $P(x) = 6x^3 - 10x^2 + 4x$. (Ojo, no podemos simplificar, pero las raíces son las mismas). Ahora las posibles raíces son ${}^{n}/_{m}$ donde $n \in \{\pm 1, \pm 2\}$ y $m \in \{\pm 1, \pm 3\}$

     $P(1) = 0$. Por el teorema del factor sabemos que 0 es una raíz. ¿Es esto más fácil que Ruffini? ¿Y ahora?
3. Sea $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + kx + 4$.
   - Halla el valor de k para que $P(x)$ sea divisible por $x - 2$.

     Por el teorema del factor, buscamos $P(2) = 0$. Entonces:

$$P(2) = 0 \iff 2^4 - 2^3 + 2k + 4 = 0 \iff 16 - 12 + 2k = 0 \iff k = -2$$

4. Sea $P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
   - Factoriza (Newton)
5. Sea $P(x) = x^3 + 2 \cdot k \cdot x^2 + 4 \cdot k \cdot x + 8$
   - ¿Qué valor puede tomar k para que el polinomio tenga una raíz de multiplicidad 3? (Newton)
6. Sea $P(x) = 4x^2 + kx + 1$.
   - Halla el valor de k para que sea divisible por $(x - {}^{1}/_{3})$. $k = \frac{13}{3}$.

- Pero, 3 no divide a 4. ¿Cómo podría ser una raíz $^1/_3$?

7. Sea $P(x) = 6x^3 + ax^2 + bx - 1$, con $a, b \in \mathbb{Z}$
   - Halla el valor de a, b para que $P(x)$ sea divisible por $(x - {}^1/_3)$ y por $(x - {}^1/_5)$.
     Por el teorema de las raíces racionales, 5 no divide al coeficiente principal, por lo que $P(x)$ no puede ser divisible por $(x - {}^1/_5)$.
   - Halla el valor de a, b para que $P(x)$ sea divisible por $(x - {}^1/_3)$ y por $(x - {}^1/_2)$.
     Por el teorema del factor, buscamos:
     $$\left\{ \begin{array}{c} P({}^1/_2) = 0 \iff \frac{6}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - 1 = 0 \\ P({}^1/_3) = 0 \iff \frac{6}{27} + \frac{a}{9} + \frac{b}{3} - 1 = 0 \end{array} \right\} \iff \dots \quad (a, b) = (-1, -4)$$

8. **Ampliación, puesto pero sin corregir** Sea $P(x) = 4x^2 + bx + 1$, con $b \in \mathbb{Z}$.
   - Sabemos que sus raíces α_1, α_2 son fraccionarias y negativas. ¿Cuáles son? ¿Cuánto vale b?
     Por el teorema de las raíces racionales, $\alpha_1 = {}^{n_1}/_{m_1}$, sabemos que n_1 divide a 1. Análogo para α_2.
     Por otro lado, sabemos que m_2 divide a 4. Las posibilidades son $2, 4$, con lo que $\alpha_1, \alpha_2 \in \{{}^1/_2, {}^1/_4\}$
     Por el teorema del factor, $P({}^1/_2) = 1 + b{}^1/_2 + 1 = 0 \implies b = -4$.
     Por el teorema del factor, $P({}^1/_4) = {}^1/_4 + b{}^1/_4 + 1 = 0 \implies b = -2$.
     Si queremos que sea divisible por los 2 factores, b tiene que valer a la vez 4 y -2. Entonces, necesariamente $P(x) = 4(x - {}^1/_2)^2$ o $P(x) = 4(x - {}^1/_4)^2$.
     Desarrollando la segunda opción, obtenemos como término independiente ${}^1/_4 \neq 1$, por lo que no es posible. Por otro lado, desarrollando la primera opción obtenemos algo con sentido.
     $$4\left(x + {}^1/_2\right)^2 = 4\left(x^2 + x + {}^1/_4\right) = 4x^2 + 4x + 1 \implies b = 4$$

9. Sea $P(x) = 21x^2 + 10x - 2$. $P(x) + 3 = 21(x + 1/3)(x + 1/7)$.
10. Factorizar $P(x) = 9x^3 - \frac{27}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 1 = 9 \cdot (x - 1/2)(x - 2/3)(x - 1/3)$. Pista (para ahorraros pruebas innecesarias con Ruffini), todas las raíces son fraccionarias y positivas.
11. Factorizar $P(x) = x^7 + 2x^4 + x = x(x^3 + 1)^2$

5.3. Ecuaciones

5.3.1. Teoría sobre ecuaciones

Definición 5.2 . 2 ecuaciones son equivalentes si y solamente si tienen las mismas soluciones.

Observación: Dividir por 0 no mantiene la equivalencia (ver demostración de $0 = 1$).

Observación:
$$-20 = -20 \iff 25 - 45 = 16 - 36 \iff 5^2 - 5 \cdot 9 = 4^2 - 4 \cdot 9 \iff 5^2 - 5 \cdot 9 + \left({}^9/_2\right)^2 = 4^2 - 4 \cdot 9 + \left({}^9/_2\right)^2 \iff$$
$$\left(5 - {}^9/_2\right)^2 = \left(4 - {}^9/_2\right)^2 \; ; \; 5 - {}^9/_2 = 4 - {}^9/_2 \iff 5 = 4$$
Es decir, en general, tomar una raíz no mantiene equivalencia entre ecuaciones (tampoco elevar a una potencia).

Clasificación de ecuaciones Las ecuaciones según sus soluciones pueden ser:

- Incompatible: no tiene ninguna solución. Ejemplo: $5x = 5x + 2$
- Compatible determinada: tiene un número finito de soluciones. Ejemplo: $3x = 6$.
- Compatible indeterminada: tiene infinitas soluciones. Ejemplo $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{3}$. Solución: $x = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

5.3.2. Ecuación de segundo grado

$ax^2 + bx + c = 0$. ¿Alguien sabe de dónde viene la fórmula?

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 + 2\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \implies x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \iff x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

5.3.3. Racionales

Ecuaciones racionales.

Ejemplos

a) Este ejemplo no está bien:

$$\frac{2x-5}{x-2} = \frac{1}{2x-x^2} + 1 \iff \frac{2x-5}{x-2} = \frac{-x^2+2x+1}{-x(x-2)} \implies -2x^2 + 5x = -x^2 + 2x + 1 \iff$$

$$\iff -x^2 + 3x - 1 = 0 \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x_1 = 1 \wedge x_2 = 2$$

¿Son soluciones las 2? El 2 no. La hemos "ganado" en la equivalencia.

b)

$$\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x+2} = \frac{7x^2}{x^2-4} \iff \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{7x^2}{x^2-4} \iff$$

$$\frac{2x(x+2) + 3x(x-2)}{x^2-4} = \frac{7x^2}{x^2-4} \implies 2x^2+4x+3x^2-6x = 7x^2 \iff 5x^2-7x^2-2x = 0 \iff$$

$$x(-x-1) = 0 \iff x_1 = 0 \wedge x_2 = -1$$

¿Son soluciones las 2?

Para trabajar: Pág 46, ejer 36.

36,a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}} = \frac{x+1}{x} \iff \frac{1}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{x+1}{x} \iff \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x} \implies x+1 = x+1 \iff x = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

- Corregir la otra ecuación (36,b). Mientras alguien la hace en la pizarra, trabajamos con: $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{4}$. Solución: ecuación incompatible.

36,b

$$\frac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{2-\dfrac{x-1}{x+1}}=2 \iff \frac{\dfrac{x-1+x+1}{x-1}}{\dfrac{2x+2-x+1}{x+1}}=2 \iff$$

$$\frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{x+3}{x+1}}=2 \iff 2x^2+2x=2x^2+4x-6 \iff 2x=6 \iff x=3$$

Sin hacer

Mientras corregimos los 2, para los siguientes :

$$\frac{3}{x}-\frac{x}{x+2}=\frac{5x-1}{x^2+x-2}$$

Lo corrigen ellos. El 33.

5.3.4. Radicales

Ejemplo:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-5}=0 \Longrightarrow x+1=x^2-5 \iff (x_0,x_1)=(3,-2)$$

Comprobamos: $\sqrt{-2+1}=\sqrt{(-2)^2-5} \iff \sqrt{-1}=\sqrt{-1}$; -2 no es una solución en los reales.

Por otro lado: $\sqrt{3+1}=\sqrt{3^2-5} \iff \sqrt{2}=\sqrt{2}$

Ejercicio: (creo que está sin corregir)

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5 \Longrightarrow (x+4)+(x-1)+2\sqrt{(x+4)(x-1)}=25 \Longrightarrow (22-2x)^2=4(x^2+3x-4) \iff$$

$$4x^2-88x+484=4x^2+12x-16 \iff -100x+500=0 \iff x=5$$

Comprobamos:

$$\sqrt{5+4}+\sqrt{5-1}=3+2=5$$

Ejercicios 40 b Truco: aplicar el binomio de Newton.

40 a

$$\sqrt{x^3+2\sqrt{x^3}+1}=0 \iff \sqrt{(\sqrt{x^3}+1)^2}=0 \Longrightarrow \sqrt{x^3}=-1 \iff x=-1$$

Comprobamos: $\sqrt{(-1)^2+2\sqrt{-1^3}+1}=\sqrt{2+2\sqrt{-1}}\notin\mathbb{R}$

El otro camino:

$$\sqrt{x^3+2\sqrt{x^3}+1}=0 \Longrightarrow x^3+2\sqrt{x^3}+1=0 \iff 2\sqrt{x^3}=-x^3-1 \Longrightarrow 4x^3=x^6+2x^3+1 \iff$$

$$x^6-2x^3+1=0 \iff t^2-2t+1=0 \iff t_1=-1 \Longrightarrow x^3=t=-1 \Longrightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1$$

Comprobamos: $\sqrt{(-1)^2+2\sqrt{-1^3}+1}=\sqrt{2+2\sqrt{-1}}\notin\mathbb{R}$

5.3.5. Logarítmicas

Los logaritmos tampoco conservan las equivalencias:

Versión corta:

$$(-2)^2 = (2)^2 \Longrightarrow 2\log(-2) = 2\log(2) \iff \log(-2)^2 = \log(2^2) \iff \log(-2) = \log(2) \iff -2 = 2$$

Ecuación de ejemplo:

$$5\log x = 3\log x + 2\log 6 \iff 2\log x = 2\log 6 \Longrightarrow x = 6$$

El libro lo hace de otra manera:

$$5\log x = 3\log x + 2\log 6 \iff \log x^5 = \log 36x^3 \Longrightarrow x^5 = 36x^3 \iff$$
$$x^5 - 36x^3 = 0 \iff x^3(x^2 - 36) = 0 \iff x^3(x+6)(x-6) = 0$$

Aquí aparecen 2 soluciones más que habíamos perdido en la equivalencia, pero no hay problema por las condiciones del logaritmo.

Incluso, habría una tercera manera:

$$\log x = t \Longrightarrow 5t = 3t + \log 6^2 \iff 2t = 2\log 6 \iff t = \log 6 \iff \log x = \log 6 \Longrightarrow x = 6$$

Trabajamos: página 48, ejercicio 45 b,d.

45b

$$\log\frac{2x-2}{x} = 2\log(x-1) - \log x \iff \log\frac{2x-2}{x} = \log\frac{(x-1)^2}{x} \Longrightarrow \frac{2(x-1)}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \overset{1}{\Longrightarrow}$$
$$x - 1 = 2 \iff x = 3$$

En 1 hemos simplificado 2 factores. x y $(x-1)$. En esta simplificación podríamos haber perdido soluciones, en concreto, si $0, 1$ fueran soluciones no lo obtendríamos.

En este caso no son solución porque $\log 0$ no existe.

45d

$$\frac{\log(4-x)}{\log(x+2)} = 2 \Longrightarrow \log(4-x) = \log(x+2)^2 \Longrightarrow 4 - x = (x+2)^2 \iff 4 - x = x^2 + 4x + 4 \iff$$
$$x^2 + 5x = 0 \iff x_1 = 0 \wedge x_2 = -5$$

$x_2 = -5$ no es solución porque $\nexists \log(-5+2) = \log(-3)$. Por otro lado, $\frac{\log 4}{\log 2} = \log_2 4 = 2$ cqc.

Sesión 3/10 (en 2017)

- Empezar re-explicando la pérdida de equivalencias. Cuando simplificamos, marcamos en la equivalencia $x \neq -1$. Al final, comprobamos si los valores intermedios son soluciones o no.

- Corregimos el 45bd.
- Mientras, trabajar el 46 b.
- Comentario al 46a (cambio de base), 45c (rango inexistente).
- Problema.
- Equivalencia exponenciales. Trabajamos 52 abc, mientras corrigen el d.

46a mientras corrigen

$$\log_x 3 = \ln\sqrt{3} \iff \frac{\ln 3}{\ln x} = \ln\sqrt{3} \iff \frac{\ln 3}{\ln x} = \frac{\ln 3}{2} \iff \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{2} \implies \ln x = 2 \implies e^2 = x$$

46b

$$\log_3 32 + \log_{1/3}(6-x) = \log_{\sqrt{3}} x \iff \log_3 32 + \frac{\log_3(6-x)}{\log_3 {}^1\!/_3} = \frac{\log_3 x}{\log_3\sqrt{3}} \iff$$

$$\log_3 32 - \log(6-x) = 2\log_3 x \iff \log_3\left(\frac{32}{6-x}\right) = \log_3 x^2 \implies 32 = x^2(6-x) \iff -x^3+6x^2-32=0$$

$$-(-2)^3 + 6(-2)^2 - 32 = 8 + 24 - 32 = 0 \implies x_1 = -2 \wedge x_2 = x_3 = 4$$

Comprobamos:

$$\log_3 32 + \log_{1/3}(6-4) = \log_{\sqrt{3}} 4 \iff \log_3 32 - \log_3 2 = \log_3 4^2 \iff \log_3 \frac{32}{2} = \log_3 16 \quad \text{cqc.}$$

5.3.6. Exponenciales

Pregunta: $a^x = a^y \overset{?}{\iff} x = y$

$x = y \implies a^x = a^y$ Sí.

$a^x = a^y \implies x = y$ No. Contraejemplo: $1^2 = 1^3$. Basicamente, si los logaritmos no mantenían la equivalencia, tampoco lo iban a hacer estas.

Siempre que la base no sea $0, \pm 1$ sí serán equivalentes. ¿Y si tenemos un polinomio como base? Pues como puede ser uno de esos valores, no mantenemos la equivalencia.

Trabajamos 52 entero.

6. Sistemas de ecuaciones

6.1. Sistemas lineales: Gauss

Clase 1 (9/10/2017 ; 21/10/2019): Plantear un Gauss a ver si lo sacan ellos.

Clase 2: Entrega hojas de teoría impresas y formalización de la idea intuitiva que han tenido + ejemplo de un Gauss CD bien hecho. Deberes: un CD bien hecho.

Discusión de un sistema Una vez llegado al sistema escalonado pueden darse 3 situaciones:

- La ecuación con una única incógnita es incompatible $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.
- Número de incógnitas > número de ecuaciones $\Longrightarrow$ Compatible indeterminado.
- Número de incógnitas = número de ecuaciones, siendo la última ecuación compatible determinada $\Longrightarrow$ Compatible determinado.

Ejercicios.

- Corregimos (si quieren) 113 incompatible y CI.
- ¿En qué consiste discutir un sistema? Escribir completo los 3 casos
- Sistemas con parámetros

6.1.1. Gauss con parámetro (viernes 25)

Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +z & = & 6 \\ x & -y & +2z & = & 4 \\ 2x & -y & +az & = & 0 \end{array}\right\}$$

Se pide:

- Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
- Resolverlo para $a = 2$.

Escribir: Para encontrar los casos posibles para discutir, se iguala a 0 el coeficiente de la "z" (o de la incógnita correspondiente).

- Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & -z & = & 0 \\ 2x & -ay & +z & = & 0 \\ -x & +2y & -2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

  Se pide:

  - Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
  - Resolverlo para $a = 0$.

- Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +2z & = & 2 \\ -3x & +2y & +3z & = & -2 \\ 2x & -ay & -5z & = & -4 \end{array}\right\}$$

  Se pide:

  - Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
  - Resolverlo para $a = 2$.

Sesión 24/10/2017

- Corregir el anterior.
- Trabajar los 2 siguientes.

- Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 5x & -2y & -az & = & 3 \\ & -y & +z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & a \end{array} \right\}$$

Se pide:

- Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
- Resolverlo para $a = 2$.

- Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & +2y & +z & = & 0 \\ ax & -y & +2z & = & 0 \\ x & -ay & +2z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Se pide:

- Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
- Resolverlo para $a = 1$.

- Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & (a+2)y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & (2-a)y & + & (a-2)z & = & 0 \end{array} \right\}$$

Se pide:

- Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
- Resolverlo para $a = 2$.

6.2. Sistemas no lineales

Ejercicios: 114cf (f es interesante),115acdf

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - 2xy + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{array} \right\}$$

Capítulo II

Trigonometría

1. Repaso de 4º

¿Qué es un radián? Pequeño debate sobre una medida de ángulos que no dependa de una medida externa (como podría ser una circunferencia).

Geogebra del radián (ver **??**). Trabajar el concepto de radián y la equivalencia. ¿Hablas inglés pensando en español o en inglés? Este año toca *pensar en radianes*.

Utilizando geogebra (ver **??**) las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica.

- ¿De dónde vienen los nombres?
- ¿Triángulos rectángulos para aplicar Pitágoras?

Proyectando el libro, explicar:

- Identidades trigonométricas (página 80). Ojo al "ten en cuenta de la izquierda".
- Signo de las razones trigonométricas (página 77).
- Reducción al primer cuadrante (página 78).
- Tabla de valores notables.
- Ángulos complementarios.

Ejercicios 16 del libro (utilizando las 2 páginas donde vienen todas las fórmulas) [Corregimos proyectando el libro].

Demuestra (corregimos proyectando el libro).

$$\frac{\cos\alpha - \sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{tg}^3\alpha$$

Deberes: demuestra algebraicamente $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ y $\operatorname{cotg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha$

2. Identidades trigonométricas

2.1. Suma y diferencia de ángulos

Las coordenadas de $\vec{u} = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ y $\vec{v} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Vamos a calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}$, teniendo en cuenta que son vectores unitarios.

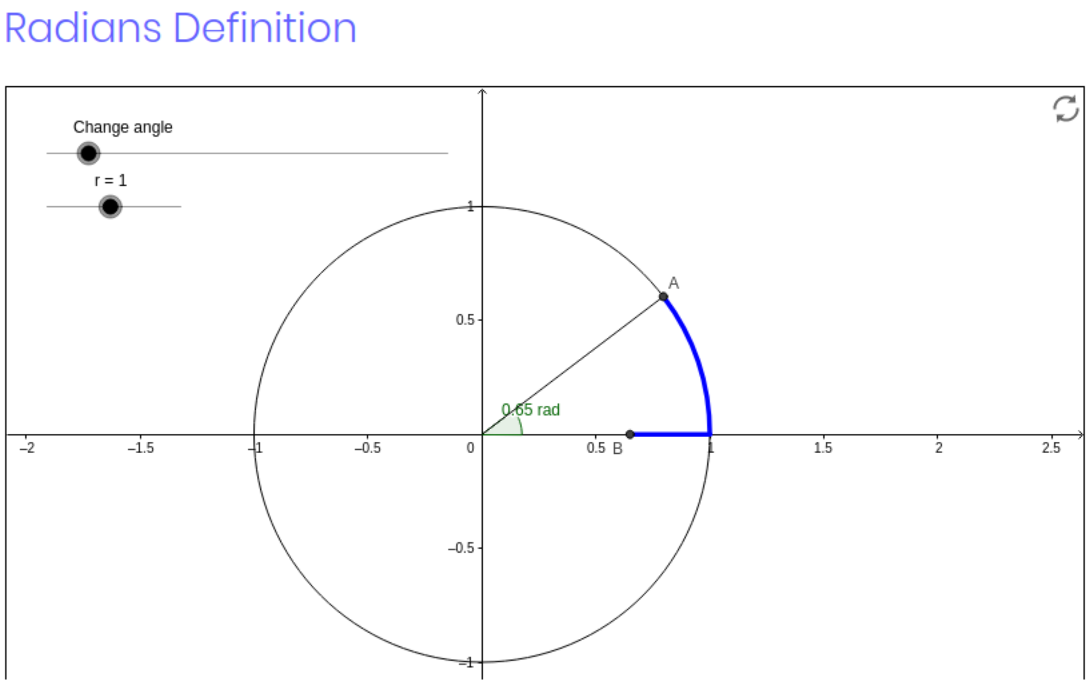


Figura II.1: *Definición de radián*

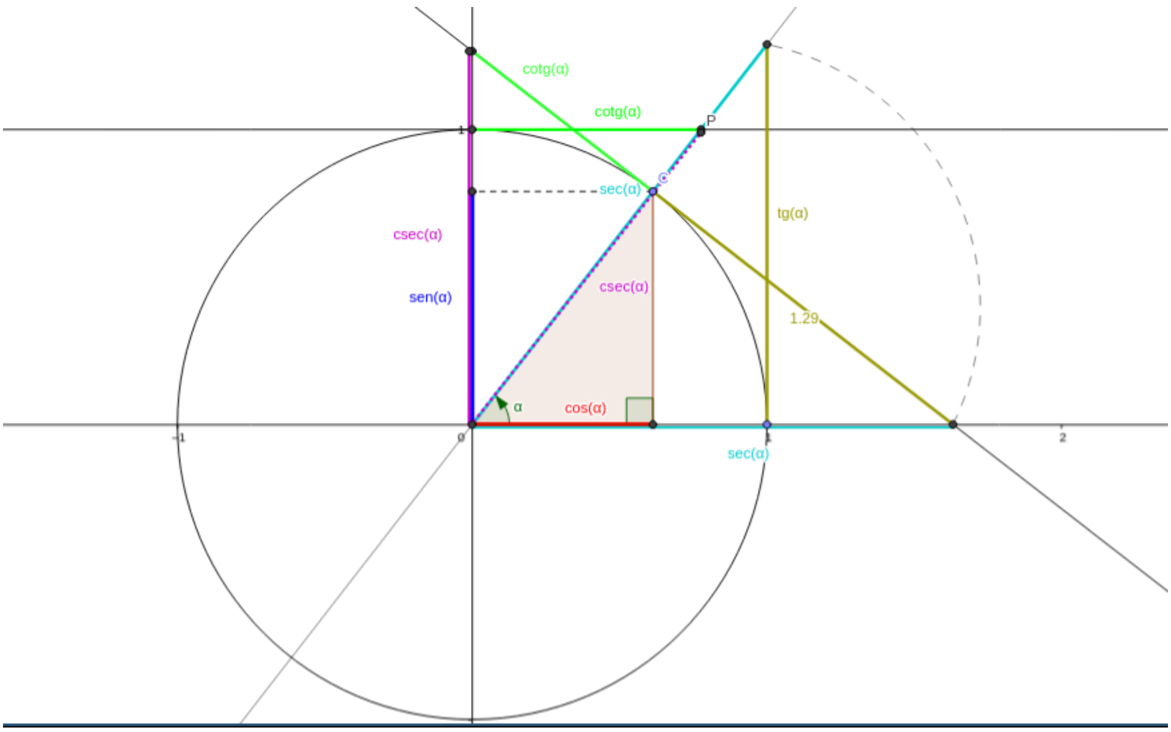


Figura II.2: *Razones trigonométricas*

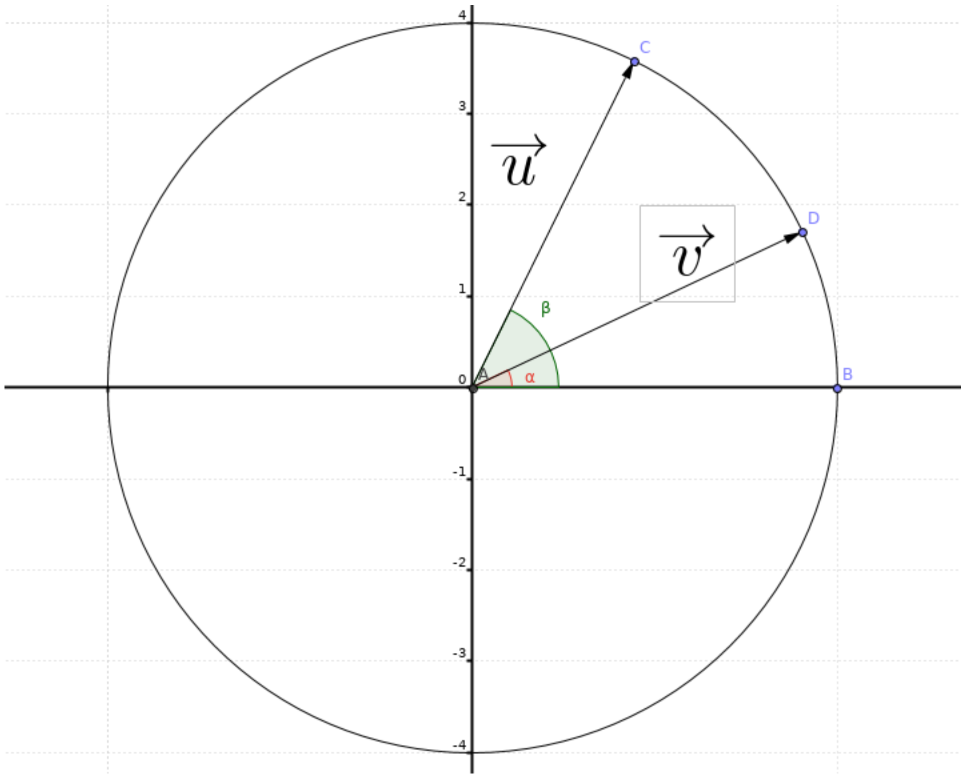


Figura II.3: *Razonamiento coseno de la diferencia.*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos(\beta - \alpha) \iff (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \cos(\beta - \alpha)$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$$

Escribiendo $\alpha = -\alpha$, obtendríamos las razones del ángulo suma.

Ejemplo:

- $\operatorname{sen}\left({}^{5\pi}/_{12}\right) = \operatorname{sen}\left({}^{2\pi}/_{12} + {}^{3\pi}/_{12}\right)$

  Para trabajar (ellos):

- $\cos\left({}^{\pi}/_{2} + {}^{\pi}/_{3}\right)$ (ellos)
- $\operatorname{sen}\left({}^{\pi}/_{12}\right)$ (ellos)
- Demuestra: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

Multiplicación compleja en forma polar: $z_1 = r_1\cos(\alpha_1) + r_1 \cdot i \cdot \operatorname{sen}(\alpha_1)$ y $z_2 = r_2\cos(\alpha_2) + r_2 \cdot i \cdot \operatorname{sen}(\alpha_2)$

Haciendo $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2)\right) + i \cdot r_1 r_2\left(\cos(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\right) = r_1 r_2\left(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2)\right) = r_1 r_{2_{\alpha_1+\alpha_2}}$

2.1.1. Ángulo doble y ángulo mitad

- $\cos(2\alpha)$ (ellos)

- $\operatorname{sen}(2\alpha)$ (ellos)
- Calcula $\cos\left({}^{\alpha}/_{2}\right)$ utilizando $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$ y $\beta = {}^{\alpha}/_{2}$
- $\operatorname{sen}\left({}^{\beta}/_{2}\right)$

Fin clase 2.

3. Resolución de triángulos

3.1. Ecuaciones trigonométricas

$$\cos(x) = \cos(2x) \overset{?}{\iff} x = 2x$$

No, ni en un sentido ni en el otro.

No es $\Rightarrow$ según qué razón trigonométrica y en qué cuerpo estemos trabajando. En $\mathbb{R}$ $a = b \implies \cos(a) = \cos(b)$ y $a = b \implies \operatorname{sen}(a) = \operatorname{sen}(b)$ pero

$a = b \not\Longrightarrow \operatorname{tg}(a) = \operatorname{tg}(b)$. El ejemplo más claro sería: $x = {}^{\pi}/_{2} \not\Longrightarrow \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(4)$.

No es $\Leftarrow$

$\cos(x) = \cos(2x) \iff \cos(x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \iff \cos(x) = \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) \iff 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1$

Cambio de variable: $t = \cos(x)$

$$2t^2 - t - 1 = 0 \iff \left(t + {}^{1}/_{2}\right)(t-1) = 0$$

Deshacemos el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_1 = \cos(x) \end{array}\right\} \implies \cos(x) = 1 \implies \left\{ x_1 = 0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} t_2 = {}^{-1}/_{2} \\ t_2 = \cos(x) \end{array}\right\} \implies \cos(x) = {}^{-1}/_{2} \implies \left\{ \begin{array}{l} x_2 = {}^{2\pi}/_{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = {}^{-2\pi}/_{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ejercicios 49 y 50.

3.2. Teorema del seno y del coseno

Teorema 3.1 (Teorema del seno)**.** *En un triángngulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)}$$

Demostración. Se igualan 2 maneras diferentes de calcular la altura del triángulo. □

Teorema 3.2 (Teorema del coseno)**.** *En un triágngulo cualquiera se cumplen las siguientes relaciones:*

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(a)$

Demostración. Se divide el lado a en 2 partes según la altura y se aplica Pitágoras en los 2 triángulos resultantes.

Se reducen incógnitas hasta que todo dependa sólo de a, b, c. □

Problemitas de ejemplo de resolución de triángulos para poder aplicarlo a problemas.

Capítulo III

Análisis

1. Funciones

El objetivo de esta función es ser capaz de representar gráficas de funciones dada su expresión algebraica. Para ello vamos a ir desarrollando diferentes herramientas que nos van a resultar tremendamente útiles para este propósito.

1.1. Concepto

Lo primero es tener claro qué es una función.

Función

Definición 1.1 **Función**. *Una función asigna a cada elemento de un conjunto X, un único elemento de otro, Y. Escribimos $f : X \to Y; x \in X \to f(x) \in Y$*

Ejemplos hablados. Añade 2 de tu propia cosecha.

- A cada uno le asigno su edad.
- A cada uno su estatura.
- A cada uno su brazo.
- A un número su doble.
- A un número su raíz cuadrada.
- A un número complejo su conjugado.

Funciones reales de variable real

Sí, pero sólo vamos a hablar de **funciones reales de variable real**.

Escribimos: $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}; x \to f(x)$

Como curiosidad hay funciones de variable "funcional", es decir, que asocia funciones con otras cosas. Este tipo de cosas se estudian en matemáticas.

1.1.1. Dominio y recorrido

Condiciones generales de cada función:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad D(f) = x/\exists f(x)$

Ejemplos:

- $f_1(x) = 3x^2 + 2$
- Racionales $f_2(x) = \frac{x+2}{x-1}$
- Radicales $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
- Radicales $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2 - 16}$
- Exponenciales $f_5(x) = e^x$
- Logaritmos $f_6(x) = \log(x + 2)$
- Trigonométricas $f_7(x) = \cos(x)$
- Trigonométricas $f_8(x) = \sin(x)$
- Combo: $f_9(x) = \frac{\log(x-5)}{x+7}$
- Combo: $f_{10}(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x+7}$

1.1.2. Clasificacion de funciones

Inyectividad

Definición 1.2 **Inyectividad**. $f(x) : D(f) \to \mathbb{R}$ *inyectiva* $\iff \forall a, b \in D(f) a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$

Sobreyectividad

Definición 1.3 **Sobreyectividad**. $f(x) : D(f) \to \mathbb{R}$ *sobreyectiva* $\iff \forall b \in \mathbb{R} \exists a \in D(f)$ *tal que* $f(a) = b$

Es decir, una función es sobreyectiva si su imagen son todos los números reales.

Biyectividad

Definición 1.4 **Biyectividad**. *Inyectividad y sobreyectividad*

Ejemplos: Razonando gráficamente.

- $f(x) = x^3$ (biyectiva)
- $f(x) = x^2$ (nada)
- Dibujo función cúbica sí sobreyectica, no inyectiva.
- $f(x) = e^x$ (inyectiva)
- $f(x) = \log(x)$ (inyectiva)

Gráfica de una función:

Gráfica de una función: $G(f) = \big(a, f(a)\big)$

1.2. Operaciones con funciones

- Suma, resta $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

  $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g)$.
- Producto

  $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.

- Cociente
  $$D\left({}^{f(x)}/_{g(x)}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x/g(x) = 0\}$$
- Composición $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$ y se lee “f compuesta con g”.
  El dominio se recalcula.

Función inversa

Función inversa $f^{-1}(x) : Y \to X$ y cumple $(f \circ f^{-1})(x) = x$

Ejemplo: Comprueba si son inversas

- $f(x) = x^3 - 1$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ (sí)
- $f(x) = x^2 + 1$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (no)

Ejemplo: Calcula la función inversa de $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ y de $g(x) = \frac{-1}{3x}$

Construir funciones inversas. **Observación**: Una función no inyectiva no puede tener inversa.

2. Continuidad

2.1. Límites

Introducción Con el excel y geogebra. Definición intuitiva de límite. *Reto: escribe tu propia definición de límite y vete hablándola conmigo.*

- Excel: valor del límite: me voy acercando sin llegar a tocar.
- Geogebra: mismo gráficamente. Hacer zoom hasta la saciedad.

Límite en un punto finito

Definición 2.1 **Límite en un punto finito**. *Sea* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

El límite de la función $f(x)$ en un punto $x = a$ es el valor b al que se aproxima la función cuando la variable se aproxima al punto, sin nunca alcanzarlo.

Ejemplos:

- $\lim_{x \to 3} x^2 + 1 = 10$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cálculo con calculadora) ¿Existe la función en el punto? Nooooo ¿Existe el límite? Siiiii.
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ (cálculo con calculadora). ¿Existe la función en el punto? Nooooo ¿Existe el límite? Puede existir. Decimos que es $\pm\infty$.

  Observación: Puede ser que la función no se acerque a ningún valor, sino que cada vez se haga más grande. En ese caso el resultado del límite será $+\infty$.

Observación: Puede ser que la función no se acerque a ningún valor, sino que cada vez se haga más pequeño. En ese caso el resultado del límite será $-\infty$.

Infinito, ¿concepto o valor?

Límite en el infinito

Aritmética del infinito *Definición 2.2* **Límite en el infinito**. *Sea* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

El límite de una función $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el infinito ($\pm\infty$) es el valor b al que se aproxima la función cuando la variable toma valores arbitrariamente grandes (o pequeños).

Observación: Se cumplen las mismas observaciones de antes.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exsitencia del límite en un punto finito

Definición 2.3 **Exsitencia del límite en un punto finito**. *El límite existe si existen y son iguales los límites laterales.*

Propiedades de los límites Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que dado a, $\exists \lim_{x \to a} f(x)$; $\exists \lim_{x \to a} g(x)$

- $\lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm g(x)$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm g(x)$
- $\lim_{x \to a} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \big(\lim_{x \to a} f(x)\big)^{\lim_{x \to a} g(x)}$
- $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) =?$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x-4}}$$

Indeterminaciones

- $k/0$

  Vistas (la h). Son indeterminaciones a medias, ya que sólo tienen 2 posibilidades: $\pm\infty$

- ∞/∞ (potencia más alta del denominador)

  $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x}+5\frac{x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5+{}^{6}/_{x}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\infty$$

- $0/0$ (simplificar)

  $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}$$
  $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

- $\infty-\infty$

  $$\lim_{x\to-\infty}x^2+x=\lim_{x\to-\infty}x(x+1)=(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$$

  El problema viene con

  $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

- $1^{+\infty}$

  Estas indeterminaciones aparecen cuando $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ $\lim_{x\to a}f(x)=1$ $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ y se resuelven utilizando:

  $$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lambda},\text{ donde }\lambda=\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)$$

  $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}=e^{\lambda}\text{ donde }\lambda=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}-1\right)\cdot x=-1$$

2.2. Continuidad

Continuidad en un punto

Definición 2.4 **Continuidad en un punto**.

Una función $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en un punto a si y sólo si se cumplen:

- $\exists\lim_{x\to a}f(x)$
- $\exists f(a)$
- $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

***Observación**: Normalmente diremos: si existen y son iguales el límite y el valor en el punto.*

Tipos de discontinuidades Explicar gráficamente los casos.s

Ejemplo:

- *¿Es continua la función* $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *en* $x = 2$*?*
- *¿Es continua la función* $f(x)$ *en* $x = 1$*?*
- *¿Es continua la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *en* $x = 0$*?*
- *Funciones definidas a trozos (hasta aquí).*

Continuidad en un intervalo abierto

Definición 2.5 **Continuidad en un intervalo abierto**. *Una función* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* $(a, b) \in \mathbb{R}$ *si es continua* $\forall c \in (a, b)$.

- ¿Es continua la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en $(2, \infty)$?
- ¿Es continua la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $(0, \infty)$?

Ejemplo: *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-4}$

Observación: *Una función sólo puede ser continua en su dominio. En este caso:* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0\} - \{x \in \mathbb{R} \ / \ x - 4 = 0\} = [0, \infty) - \{4\}$

La función es continua en $(0, 4) \cup (4, \infty)$

3. Derivabilidad

Derivada en un punto

Definición 3.1 **Derivada en un punto**. *Sea* $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ *una función continua. Se define la derivada de* f *en el punto* a *como:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivable

Observación: f **derivable** en $x = a \iff \exists f'(a)$

Observación: A la función inicial la llamaremos primitiva.

Ejemplo: *Cálculo de la derivada de* $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *en* $x = 3$.

$$f'(3) = \lim_{\times \to 3} \frac{x^2 + 2x - 1 - (3^2 + 2 \cdot 3 - 1)}{x - 3} = \lim_{\times \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{\times \to 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x - 3} = \lim_{\times \to 3} (x+5) = 8$$

Ejemplo: *Cálculo de la derivada de* $f(x) = |x|$ *en* $x = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

Conclusión: La función $f(x)$ *no es derivable en* $x = 0$. *¿Es continua? Sí.*

Ejemplo: *Cálculo de la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 0$.*

$$f'(0) = \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1/x - 1/0}{x - 0}$$

No es derivable. ¿Es continua? No.

Observación: **Derivable** $\Longrightarrow$ **Continua**. *Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua en ese punto*[1].

¿En física habéis derivado polinomios? ¿Cuál sería la "derivada" del polinomio? $f'(x) = 2x + 2$. ¿Cuánto vale $f'(3)$? $f'(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$. ¿Casualidad?

Pero... ¿porqué esto es cierto? ¿De dónde sale ese $3x^2 + 2$? Esto es a lo que llamamos la función derivada:

Función derivada

Definición 3.2 **Función derivada**. *Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una función continua. Se define la función derivada de f como la función que a cada punto le asigna el valor de su derivada.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: *Cálculo de la función derivada $f'(x)$ de un polinomio, por ejemplo $f(x) = x^2 + 2x - 1$*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - 1 - x^2 + 2x - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 1 - x^2 - 2x + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h + 2) = 2x + 2$$

Conclusión: la función derivada de $f(x) = x^2 + 2x - 1$ es $f'(x) = 2x + 2$.

Propiedades de la derivada:

Proposición 3.1 (Cálculo operativo). *Sean f, g derivables en a. Entonces*

- $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \forall k \in \mathbb{R}$
- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- *Si* $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$
- *Si* $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$
- $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

Explicación de la tabla de derivadas

[1] Está en su tabla de derivadas

Regla de la cadena

A practicar:

- $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$
- $f(x) = x \cdot e^x$
- $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x)$
- $f(x) = x \cdot \ln(x)$
- $f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$
- $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot \operatorname{sen}(x)$
- $f(x) = (e^x - x) \cdot \ln x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$
- $f(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)^3$
- $f(x) = \ln(4x)$
- $f(x) = (\cos x)^2 = \cos^2 x$
- $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2)$
- $f(x) = \cos(x^2 + 1)$
- $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 - 3x)$
- $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + 3x}$
- $f(x) = \cos\dfrac{x-1}{x}$
- $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x-1}$
- $f(x) = -\operatorname{sen}\dfrac{x}{-x^4 + x - 1}$
- $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$

3.1. Interpretación geométrica de la derivada

4. Integrales inmediatas

5. Estudio sistemático de una función

- Dominio, siempre.
- Puntos de corte con los ejes.
- Simetría.

- Asíntotas, repaso de 4º.
- Monotonía.
- Curvatura.

5.1. Monotonía

Diferenciar los intervalos en los que la función crece de aquellos en los que la función decrece. También, ¿dónde están los máximos y los mínimos?

- Ejemplo: dada la función $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, encuentra sus extremos relativos.
- Los extremos relativos se encuentran en los puntos donde la derivada se hace 0. ¿Por qué? Interpretación gráfica.
- ¿Cómo distinguir máximo de mínimo? En este caso, la parábola va hacia arriba, por lo que debe ser mínimo.

  Por un lado negativa (función decrece), por otro positiva (función creciente).

  Segunda derivada positiva, lo que marca que es un mínimo.
- Concavidad: segunda derivada positiva -> mínimo, convexa.

- $f'(x) > 0 \implies f(x)$ crece.
- $f'(x) < 0 \implies f(x)$ decrece.
- $f'(x) = 0 \implies$ extremo relativo. ¿Máximo, mínimo?
- $f''(x) > 0 \implies$ mínimo y convexa-contenta (desde el semieje negativo de y).
- $f''(x) < 0 \implies$ máximo y cóncava desde el semieje negativo de y.
-

Clase del jueves:

- Corregir: demuestra que el vértice de la parábola es ${}^{-b}/_{2a}$
- Halla las rectas tangentes a la función $f(x)$ en los máximos (no es necesario intervalos de crecimiento y decrecimiento).

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$$

- Estudia la monotonía (intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos y absolutos) de $f(x) = x^4 - 2x^2$
- Estudia sistemáticamente la función: $f(x) = \frac{2(x-2)+1}{(x-2)^2} = \frac{2x-1}{x^2-4x+4}$

  Punto de corte eje x: $(1.5, 0)$, eje y: $(0, -0.75)$, mínimo absoluto: $(1, -1)$
- Estudia las asíntotas de $f(x) = \frac{x^3-4x^2+x+6}{2x^3-14x^2+32x-24}$
- Deriva $f(x) = \tan(x^2 - 3x)$