Тема 3 №1

Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для ф-ї $y=3^x$, $x\in[-1,1]$. Використати 3 рівновіддалених вузла. Знайти наближене значення в точці 0,5.

x_i	-1	0	1
f_i	$\frac{1}{3}$	1	3

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y_i$$

$$p_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$p_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

$$p_0(x)=c_0(x-x_1)(x-x_2)$$

$$p_1(x)=c_1(x-x_0)(x-x_2)$$

$$p_2(x)=c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

Знаходимо c_i:

$$c_0\cdot(-1-0)(-1-1)=1 \Rightarrow c_0=\frac{1}{2}$$

$$c_1\cdot(0-(-1))(0-1)=1 \Rightarrow c_1=-1$$

$$c_3\cdot(1-(-1))(1-0)=1 \Rightarrow c_2=\frac{1}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{1}{6}x(x-1) - 1(x+1)(x-1) + \frac{3}{2}(x+1)(x-0) =$$

$$= \frac{1}{6}x(x-1) + (1-x^2) + \frac{3}{2}x(x+1)$$

$$L(0,5) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{1}{24} = \frac{44}{24} = \frac{11}{6}$$

N3

$$S(n) = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) \sim y(x) = 1+3+\ldots+(2x-1)$$

	0	1	2	3	4	
x_i	1	2	3	4	5	...
y_i	1	4	9	16	25	...

$$f_{10} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3}{1} = 3 \qquad f_{20} = \frac{f_{11} - f_{10}}{x_2 - x_0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f_{11} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5}{1} = 5 \qquad f_{21} = \frac{f_{12} - f_{11}}{x_3 - x_1} = \frac{2}{2} = 1$$

...

$$f_{12} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{7}{1} = 7$$

...

$$f_{30} = 0 \qquad f_{40} = 0 \ldots$$

$$P_2(x) = y_0 + f_{10}(x - x_0) + f_{20}(x - x_0)(x - x_1) =$$

$$= 1 + 3(n-1) + 1(n-1)(n-2) = 1 + 3n - 3 + n^2 - 3n + 2 = n^2$$

№2

$f(x) = 3^x, \; x \in [-1; 1]$

3 вузли – нулі поліному Чебишева

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \quad x_k \in [-1;1], \quad k=\overline{0,2} \quad // n=3$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_1 &= \cos\frac{3\pi}{6} = 0 \\ x_2 &= \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{6\pi-\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \text{вузли}$$

Таблиця розділених різниць:

	x_s	f_s		
x_0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3^{\sqrt{3}}}$		
			$f(x_0,x_1)$	
x_1	0	1		$f(x_0,x_1,x_2)$
			$f(x_1,x_2)$	
x_2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$		

$$f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{i \neq j}^{2} (x_i - x_j)} = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} +$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3^{\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{\sqrt{3^{\sqrt{3}}}}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{3^{\sqrt{3}}}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3^{\sqrt{3}}}}$$

$$f(x_0, x_1) = \sum_{i=0}^{1} \frac{f(x_i)}{\prod_{i \neq j}^{1} (x_i - x_j)} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} +$$

$$+ \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{\sqrt{3^{\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3^{\sqrt{3}}} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\left(\sqrt{3^{\sqrt{3}}} - 1\right)}{\sqrt{3}}$$

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{f(x_i)}{\prod_{i \neq j}^{2} (x_i - x_j)} =$$

$$= \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3^{\sqrt{3}}}}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3^{\sqrt{3}}}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(\sqrt{3^{\sqrt{3}}} - 1) \cdot 2}{\sqrt{3^{\sqrt{3}+1}}}$$

$$L_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) =$$

$$= \sqrt{3^{\sqrt{3}}} + \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) f(x_0, x_1) + x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) f(x_0, x_1, x_2) =$$

$$= 2{,}589 + \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 1{,}835 + x\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 1{,}574$$

N 4

	x_i	$f(x_i)$
0	-1	-4
1	1	-2
2	2	5
3	3	16
4	4	31
5	5	50

Розділені різниці першого порядку

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$[x_0, x_1] = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

$[x_1, x_2] = \frac{7}{1} = 7$

$[x_2, x_3] = 11$

$[x_3, x_4] = 15$

$[x_4, x_5] = 19$

Розділені різниці другого порядку

$[x_0, x_1, x_2] = \frac{7-1}{3} = 2$

$[x_1, x_2, x_3] = \frac{11-7}{2} = 2$

$[x_2, x_3, x_4] = \frac{15-11}{2} = 2$

$[x_3, x_4, x_5] = \frac{19-15}{14} = 2$

Розділені різниці третього порядку:

$[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{2-2}{4} = 0$

$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{2-2}{3} = 0$

$[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{2-2}{3} = 0$

Лема

Нехай $P_n(x)$ – поліном n-го степеня, тоді будь-які розділені різниці $(n+1)$-го порядку дорівнюють нулю. $\Rightarrow \boxed{n=2}$