Тема 4

N 1

$f(x) = \ln(x+1)$, $x \in [0, 1]$ ст. мн. = 4 ($n = 4$)

вузли Чебишова, оцінити похибку (залишковий член)

$$|r_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)| \quad , \; M_{n+1} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$|r_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

$$x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} t_k \quad , \; t_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \; , \; k = \overline{0,n}$$

$$f' = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

$$f'' = -\frac{1}{(x+1)^2} = -1 \cdot (x+1)^{-2}$$

$$f''' = \frac{2}{(x+1)^3} = -2 \cdot (-1)(x+1)^{-3}$$

$$f^{(4)} = \frac{-6}{(x+1)^4} = -3(-2)(-1)(x+1)^{-4}$$

$$f^{(5)} = \frac{24}{(x+1)^5}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f^{(5)}(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{24}{(x+1)^5} \right| = 24$$

$$|r_4(x)| \le \frac{24}{5!} \cdot \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{5\cdot 512} = \frac{1}{2560} =$$

$$= 0{,}000390625 = 3{,}90625\cdot 10^{-4}$$

N2

$x_0 = 100$, $h = 1$

$x_i = x_0 + ih_i$, $i = \overline{1,4}$

x_i	100	101	102	103	104
$f(x_i)$	$\ln(100)$	$\ln(101)$	$\ln(102)$	$\ln(103)$	$\ln(104)$

$100{,}5 = x^* \in [100;101]$ x^* ділить $[100;101]$ навпіл

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x) = f(x;x_0;\dots x_n)\,\omega_n(x)$$

$$r_4 = f(x;x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)\,\omega_4(x)$$

$$f(x;x_0;\dots;x_4) = \frac{f(x)}{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_4)} + \sum_{k=0}^{4} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i\ne k}^{4}(x-x_i)} =$$

$$= \frac{f(x)}{\underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_4)}_{\omega_n(x)}} + \frac{f(x_0)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)} +$$

$$+\frac{f(x_1)}{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}+\frac{f(x_2)}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}+$$

$$+\frac{f(x_3)}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}+\frac{f(x_4)}{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}=$$

$$=\frac{f(x)}{\omega_n(x)}+\dots$$

$$r_4(x)=f(x)+f(x_0)(x-x_0)+f(x_1)(x-x_1)+$$
$$+f(x_2)(x-x_2)+f(x_3)(x-x_3)+f(x_4)(x-x_4)$$

$$r_4(100{,}5)=\ln 100{,}5+0{,}5\cdot\ln 100-0{,}5\ln 101-$$
$$-1{,}5\ln 102-2{,}5\ln 103-3{,}5\ln 104=-30{,}1745$$

N3

$f(x)=\ln(1+x)$, $x\in[0,1]$, $\varepsilon=0{,}0001$

к-ть вузлів - ?
$\shortparallel$
ст. інт. пол. +1

$$|r_n(x)|=|f(x)-L_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|\le\varepsilon$$

$$|r_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}\le\varepsilon$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(x+1)^n}\le(n-1)!=g^{(n)}(x)$$

$$M_{n+1}=\sup_{x\in[0,1]}|f^{(n)}(x)|\le\sup_{x\in[0,1]}g^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)\iff$$

$$\Rightarrow |r_n(x)| \leq \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \leq \varepsilon$$

$$\frac{1^{n+1}}{n(n+1) \cdot 2^{2n+1}} \leq \varepsilon$$

$$n(n+1)\, 2^{2n+1} \geq \frac{1}{\varepsilon} = 10^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 4$$

Отже, к-ть вузлів інтерполяції має бути більшою або дор. 5.

N4

$x \in [0, 1]$ 3 ст. коеф. при старшому степені дор. 1

$$T_n^{[a,b]}(t) = \bar{\bar{T}}_n\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right) =$$

$$= 2^{1-n}\cos\left(n \arccos\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right)\right)$$

$$T_3^{[0,1]}(t) = 2^{1-3} \cdot \cos(3 \cdot \arccos(2x-1))$$

N4

$x \in [0, 1]$ 3ст. коеф. при ст. степ. дор. 1

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$T_3(x) = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$

$\overline{T}_3(x) = x^3 - \frac{3x}{4}$, $\underline{x \in [-1;1]}$

Знайдімо вигляд м-на Чеб. на проміжку [0;1] :

$T_3(\xi) = 4\xi^3 - 3\xi$

$\xi = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{b+a}{2}\right) = 2x - 1$, $a = 0$, $b = 1$

1
1 2 1
1 3 3 1

$T_3^{[0,1]}(x) = 4(2x-1)^3 - 3(2x-1) = 4\left(8x^3 - 3\cdot 4x^2 + 3\cdot 2\cdot x - 1\right) -$

$- 6x + 3 = 32x^3 - 48x^2 + 24x - 4 - 6x + 3 =$

$= 32x^3 - 48x^2 - 18x - 1$

$\overline{T}_3^{[0,1]} = x^3 - \frac{3\cdot x^2}{2} - \frac{9x}{16} - \frac{1}{32}$

Відхилення від 0 :

$\|\overline{T}_3^{[0,1]}\| = \frac{1}{32}$