

Vicente

1-) Para que $(A \times A \setminus R)^{-1}$ sea orden parcial, debe cumplir que sea: Reflexiva, antisimétrica y Transitiva.

Debemos que R es reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

$$\text{reflexiva} = \forall a \in A, (a, a) \in R$$

$$\text{transitiva} = \forall a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$$

$$\text{anti-simétrica} = \forall a, b \in A, (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b$$

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow \underbrace{a = b}$$

Si $a \neq b$

$$\therefore ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R = 0 \mid a \neq b) \text{ esto es } 0$$

$$a \neq b \rightarrow (b, a) \in R \vee (a, b) \in R.$$

$$\therefore \forall a, b \in A, a \neq b \rightarrow (a, b) \in R \vee (b, a) \in R \quad (1)$$

$$(1) \rightarrow (a, b) \notin (A \times A \setminus R)^{-1} \vee (b, a) \notin (A \times A \setminus R)^{-1}$$

(2)

Luego, R irreflexa

$$\forall a \in A, (a, a) \notin R \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (a, a) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \quad (4)$$

Con (4) vemos que $(A \times A \setminus R)^{-1}$ es reflexa.

Luego con (2) y (4) vemos que es antisimétrica.

Solo falta demostrar que es transitiva:

de (1) sabemos que si $a \neq b$

existe o (a, b) o (b, a) o ambos en R .

Si existen ambos, entonces es suficiente para $(A \times A \setminus R)^{-1}$, pero si R solo contiene a uno

$$\neg \exists (a,b) \in R \rightarrow (a,b) \notin (A \times A \setminus R)^{-1}$$

$$(a,b) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \rightarrow (a,b) \notin R \quad (5)$$

$$(b,c) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \rightarrow (b,c) \notin R \quad (6)$$

(A) juntando (5) y (6) :

$$(a,b) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \wedge (b,c) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \rightarrow (a,b) \notin R \wedge (b,c) \notin R \quad / \text{ por transitiva}$$

$$(a,b) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \wedge (b,c) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \rightarrow (a,c) \notin R$$

$$(a,b) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \wedge (b,c) \in (A \times A \setminus R)^{-1} \rightarrow (a,c) \in (A \times A \setminus R)^{-1}$$

$\therefore (A \times A \setminus R)^{-1}$ es transitiva.

Demostremos que es transitiva, antisimétrica
y reflexa, se puede afirmar que
es orden parcial