NOMBRE: Vicente Espinosa

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 36

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 1

1. El operador $A * B$ se podría definir como $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$, esto debido a que solo se cumple la afirmación $x \in A \leftrightarrow x \in B$, si x pertenece al mismo tiempo a A y B, o si no pertenece a ninguno.

   A continuación se demostrará que la interpretación es correcta:

   Hay 4 casos posibles para la afirmación $x \in A * B$ si, solo sí, $x \in A \leftrightarrow x \in B$

   Primero, que x no pertenezca ni a A ni a B:

   $x \in (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$ y también, $x \in A \leftrightarrow x \in B$

   Sabemos ya que $x \in A = 0$, y también $x \in B = 0$, por lo tanto se cumple "$x \in A \leftrightarrow x \in B$", ya que $0 \leftrightarrow 0 = 1$

   Luego, debería cumplirse también para $A * B$:

   $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

   Como sabemos que $x \notin A \wedge x \notin B$, podemos concluir que $x \in A^c \wedge x \in B^c$, pues para cualquier conjunto C, $C \cup C^c =$ universo, por lo tanto, si x pertenece al universo, pertenece a C o a C^c.

   Entonces, como $x \in A^c \wedge x \in B^c$, veremos si x pertenece a $A * B$:

   $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$. Como tanto A^c como B^c contienen a x, $(A^c \cap B^c)$ contiene a x, y luego al unir este conjunto con $A \cap B$, sabemos que no se perderá ningún elemento, pues la unión solo agrega elementos.

   Por lo tanto, en este caso, se cumple la condición para que x pertenezca a $A * B$, tanto la dada por el enunciado, como la propuesta.

   Luego, revisamos para el caso $x \in A \wedge x \notin B$

   Según lo dicho anteriormente, podemos asumir que $x \notin A^c \wedge x \in B^c$

   La primera formula, "$x \in A \leftrightarrow x \in B$", se evalúa como $1 \leftrightarrow 0$, por lo tanto, es falso, lo que significa que la interpretación dada no debería cumplirse.

   $x \in (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

   Sabemos que $x \in A, x \notin B, x \notin A^c, x \in B^c$. Por lo tanto, como $x \notin B, (A \cap B)$ no contiene a x, y de igual forma, $(A^c \cap B^c)$ no contiene a x, pues $x \notin A^c$, así que la unión de estos tampoco lo contendrá, entonces tampoco se cumple la afirmación para la proposición en este caso.

   Ahora el caso de $x \notin A \wedge x \in B$

   Igual que en los otros casos, podemos asumir que $x \in A^c \wedge x \notin B^c$

   La formula del enunciado sería falsa en este caso, pues se evaluaría como $0 \leftrightarrow 1$, lo que da como resultado 0.

Ahora evaluamos en la proposición, y como sabemos que $x \notin A$, podemos afirmar que x no esta contenido en $A \cap B$, y también como $x \notin B^c$, podemos decir que x no esta contenido en $A^c \cap B^c$, y como no esta contenido en ninguno de los 2, tampoco lo sera en la unión de estos.

Por ultimo, queda el caso en que $x \in A \wedge x \in B$

Acá podemos decir que $x \notin A^c \wedge x \notin B^c$.

Para la formula del enunciado, su evaluación sería $1 \leftrightarrow 1 = 1$, por lo que es verdadero.

Luego, en la formula propuesta, sabemos que como $x \in A \wedge x \in B$, entonces $x \in (A \cap B)$ y por lo tanto, sabemos que estará en la unión de estos con $A^c \cap B^c$, pues la unión solo agrega cosas.

En conclusión, en los dos casos que x no pertenecería a $A * B$, tampoco lo hace a la formula propuesta, y las dos veces que si pertenece a $A * B$, también lo hace a la formula propuesta, por lo tanto, es una representación correcta de *.

2. Si se logra demostrar que todos las posibles proposiciones de lógica proposicional son representables por operadores de conjuntos, entonces se demuestra la proposición.

   De igual forma, si se demuestra que cualquier operador de lógica proposicional (los que manejamos), entonces cualquier proposición también lo sera, pues sera simplemente una conjunción de operadores. Por lo tanto, a continuación se mostrará la equivalencia en operadores de conjuntos de cada operador de lógica.

   "$\neg A$", este operador es el equivalente a "A^c " en conjuntos.

   Para todos las demostraciones se tomara como que $(x \in C)$ equivalente a que $C = 1$, siendo C el conjunto con el que se trabaje.

   Por lo tanto, si $\neg A = 1$, entonces significa que $A = 0$, y por lo tanto, $x \notin A$ por otro lado, evaluamos en $x \in A^c = 1$, , luego si $x \in A$, entonces $A = 0$ y por lo tanto $\neg A = 1$, por lo tanto se cumple la igualdad.

   $(A \leftrightarrow B)$, esto es equivalente a $((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c))$, luego evaluamos en todos los posibles casos:

   Como se dijo antes $x \in A$ implica que A es 1:

   Tabla $(A \leftrightarrow B)$ vs $((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c))$

A	B	$(A \leftrightarrow B)$	$((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c))$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

   Por lo tanto, son equivalentes.

   $(A \wedge B)$, esto es equivalente a $(A \cap B)$, se demostrará con la tabla de verdad:

   Tabla $(A \wedge B)$ vs $(A \cap B)$

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \cap B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Por lo tanto, son equivalentes.

$(A \vee B)$ es equivalente a $(A \cup B)$, comparamos las tablas de verdad:

Tabla $(A \vee B)$ vs $(A \cup B)$

A	B	$(A \vee B)$	$(A \cup B)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Por lo tanto, son equivalentes.

$(A \to B)$ es equivalente a (AB), comparemos las talbas:

Tabla $(A \to B)$ vs $(A^c \cup B)$

A	B	$(A \to B)$	$(A^c \cup B)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Por lo tanto, son equivalentes.

Luego de demostrar por separado que $(A \to B)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\neg A$, queda demostrado que cualquier proposición lógica formada por estos conectores se puede armar con operadores de conjuntos.