Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta 2 fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la universidad

Vicente

Vicente Espinosa - Sección 2 - Nº lista: 36

1-)

$M = A_0, A_1, \ldots$

$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = S$

$A_i \subset A_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$B_0 = A_0$

$B_i = A_i \cap (A_{i-1})^c$

$B_i = A_i \cap (A_{i-1})^c$

$B_i = A_i \cap S \setminus A_{i-1}$ * es equivalente

$B_i = A \setminus A_{i-1} \cap S$ * es equivalente

$B_i = (A_i \cap S) \setminus A_{i-1}$ * por elemento neutro

$B_i = A_i \setminus A_{i-1}$

Dado que $A_{i-1} \subset A_i$, sabemos que

$A_i \setminus A_{i-1} \neq \emptyset \quad \forall i$

Vicente Espinosa - Sección 2 - Nº lista: 36

2-)

Demostrar $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Dado que ya sabemos que $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$

$B_i \cap B_j$

$A_i \setminus A_{i-1} \cap A_j \setminus A_{j-1}$

- si $j > i$:

$j-1 \geq i$

$\therefore A_{j-1} = A_i$ ó $\underbrace{A_i \subset A_{j-1}}_{\substack{A_i \subset A_{i+1} \subset \ldots \subset A_{j-1} \\ \text{por transitividad} \\ A_i \subset A_{j-1}}}$

Vicente Espinosa - Sección 2 - Nº lista: 36

- Si $A_{j-1} = A_i$

$$A_j \setminus A_{j-1} = A_j \setminus A_i$$

$$\therefore \quad A_i \setminus A_{i-1} \cap A_j \setminus A_i = \emptyset$$

- Si $A_i \subset A_{j-1}$

Sabemos entonces que

$$A_j \setminus A_{j-1} \subseteq A_j \setminus A_i$$

$\therefore$

$$(A_i \setminus A_{i-1} \cap A_j \setminus A_{j-1}) \subseteq (A_i \setminus A_{i-1} \cap A_j \setminus A_i)$$

$$(A_i \setminus A_{i-1} \cap A_j \setminus A_{j-1}) \subseteq \emptyset$$

$$\therefore (A_i \setminus A_{i-1} \cap A_j \setminus A_{j-1}) = \emptyset$$

Vicente Espinosa - Sección 2 - Nº lista: 36

Si $i > j$ se repite lo mismo intercambiando i con j.

Con eso queda demostrado que

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$$

3-)

$$B_0 = A_0$$

$$B_1 = A_1 \setminus A_0$$

$$B_0 \cup B_1 = A_0 \cup A_1 \setminus A_0$$

$$B_0 \cup B_1 = A_0 \cup A_1$$

como $A_0 \subset A_1$

$$B_0 \cup B_1 = A_1$$

Vicente Espinosa - Sección 2 - Nº lista: 36

Luego, usando inducción

Si $\bigcup_{i=0}^{K} B_i = A_K$

probar que

$$\bigcup_{i=0}^{K+1} B_i = A_{K+1}$$

$$\underbrace{\bigcup_{i=0}^{K} B_i} \cup B_{K+1} = A_{K+1}$$

$$A_K \cup B_{K+1} = A_{K+1}$$

$$A_K \cup A_{K+1} \setminus A_K = A_{K+1}$$

dado que $A_K \subset A_{K+1}$

$$A_K = A_K$$

$\therefore$ queda probado que $\bigcup_{i=0}^{K} B_i = A_K$

Vicente Espinosa - Sección 2 - Nº lista: 36

Como ya sabemos que

$\bigcup_{i=0}^{k} B_i = A_k$ y $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = S$

Como $A_i \subset A_{i+1}$

$A_i \cup A_{i+1} = A_{i+1}$

$\therefore \bigcup_{i=0}^{c} A_i = A_c$ * con $c = \infty$

$\bigcup_{i=0}^{c} A_i = \underline{S = A_c}$

$\bigcup_{i=0}^{c} B_i = A_c$

$\therefore \underline{\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = S}$