Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Ayudante Jefe Francisco Tamarín
Segundo Semestre 2024

Tarea 3:
CMTD y Proceso de Poisson

Instrucciones

- Esta tarea debe ser realizada **individualmente** o **en parejas** (pueden ser de diferentes secciones dentro de las que son coordinadas). Deben indicar en la primera plana del PDF los nombres de los/as integrantes, junto con las secciones respectivas de c/u.
- Tienen plazo hasta el **Martes 29 de octubre a las 23:59 hrs** para entregar sus soluciones.
- Deben entregar un archivo reporte, **en formato PDF**. En el archivo PDF deben entregar sus respuestas de los 3 problemas. Los códigos implementados deben adjuntarse como un archivo .zip aparte en el buzón. En el PDF deberá estar el desarrollo, resumen de resultados y correspondiente análisis. Se recomienda fuertemente utilizar LaTeX. Sin embargo, estas también pueden ser escritas en algún otro editor de texto o a mano y escaneadas, pero **debe estar ordenado y legible**, de lo contrario, se descontarán 3 décimas a la nota final de la tarea. Cualquier código que utilicen de internet debe ser debidamente citado insertando el *link* asociado.
- Si realizan la tarea completa en LaTeX, incluyendo todas las fórmulas y ecuaciones, tendrán **3 décimas extras**.
- La tarea tiene un total de 60 puntos. La nota final será calculada como la suma de las tres preguntas mediante la fórmula
$$Nota = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{60} \cdot 6 + 1$$
Donde P_i corresponde al puntaje de la pregunta i. Se aproxima a dos decimales.
- Las preguntas se harán a través del foro de discusión asociado a la Tarea 3 en Canvas, por lo que les pedimos que **NO** manden dudas por mail sobre la tarea. De esta manera, todos tienen acceso a las respuestas.
- Seremos estrictos en que **no se aceptarán envíos por mail**. Evite problemas de internet, del sistema Canvas, de la calidad de la foto o cualquier otro que pudiese ocurrir al entregar sobre la hora. El/La alumno/a que envíe su tarea después de la hora límite, tendrá **nota 1.0**.

Problema 1 (20 puntos)

Los *Oscar* son considerado como una de las jornadas de premios más importantes y reconocidas de todo el mundo artístico cineasta. Entre todas las versiones que han existido, la ocurrida en el año 2022 fue sin duda una de las más impactantes de toda la historia. Esto ya que, en medio de la presentación del actor/comediante *Chris Rock*, *Will Smith*(que no requiere presentación alguna) lo abofeteó al frente de todo el público. Quedémonos con este contexto para enunciar el problema.

En particular usted se siente intrigado por la situación y quiere modelarla mediante evaluaciones estocásticas. Es importante mencionar que, para representar fidedignamente la situación y el contexto, los movimientos de Will hasta llegar a Chris (y al eventual Oscar) son en forma aleatoria, pero definida bajo ciertos patrones claros.

En el tablero de la Figura 1 se muestra a Will en la esquina superior izquierda, simulando su posición en el asiento de aquel día, y a Chris con el Oscar cerca del otro costado del tablero (que vendría a ser el escenario de la ceremonia). Se asumirá (por ahora) que estos últimos no se mueven y solamente es Will el que puede realizar movimientos. Dichos movimientos que puede realizar dentro del tablero están definidos de la siguiente manera:

- ◇ Usted sabe (por información fidedigna y de alta fuente confiable), que Will se puede desplazar en cualquier dirección un máximo de 2 casillas (incluyendo la posibilidad de quedarse quieto). O sea considerando la posición de Will (1,1), puede moverse a la (2,1); (1,2); (3,1); (1,3) y (1,1).
- ◇ La probabilidad de cambiar de estado de Will es equiprobable en función a sus movimientos disponibles. O sea con el ejemplo anterior, Will tiene una probabilidad de 0.2 de moverse a cualquiera de las otras celdas (incluyendo a si misma).

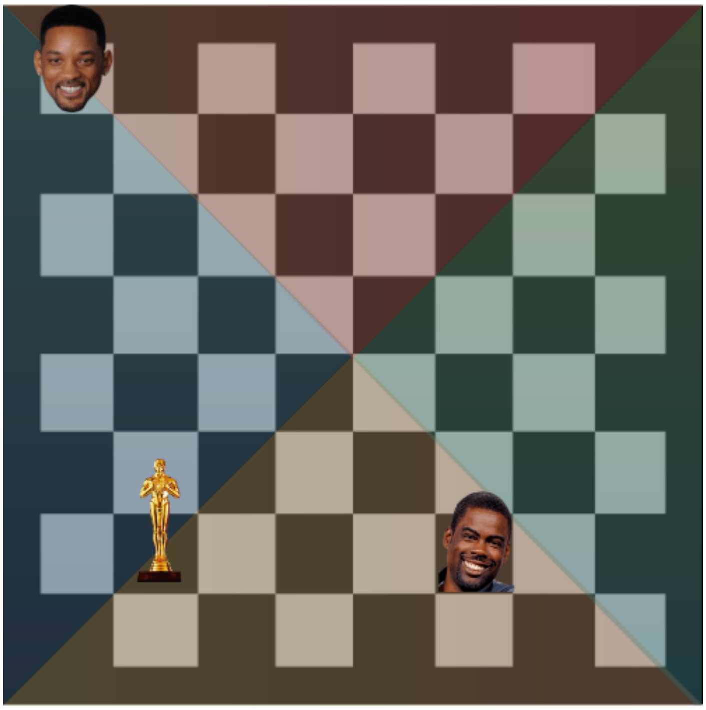

Figura 1: Tablero Ejemplo

Ejemplo para la definición de eventos

Cosidere que cada casilla es una estado, y desde la casilla en que está Will inicialmente, se tiene una probabilidad de 0.2 de moverse a la casilla de la primera fila y segunda columna, 0.2 de moverse a la casilla de la primera fila y tercera columna, 0.2 de moverse a la casilla de la segunda fila y primera columna, 0.2 de moverse a la casilla de la tercera fila y primera columna, 0.2 de quedarse en la posición de primera fila y primera columna y 0 en todas las otras casillas.

Por otro lado, si Will se encuentra en alguna de las casillas centrales, se podrá mover equiprobablemente en las 9 casillas disponibles para sus movimientos (8 diferentes y 1 igual).

Dada la definición de transiciones de Will y las casillas definidas como estados, responda los siguientes ítems, incluyendo el código en Python, su respectiva explicación y resultados de forma ordenada.

a) **(4 puntos)** Calcule la matriz de probabilidades de transición de Will e indique qué significan estas probabilidades en función del estado en donde se encuentra en el tablero. Además, muestre el código utilizado para obtener la matriz de probabilidades. Se espera que la matriz, dada todas las posibilidades, sea muy grande, por lo que basta argumentar y presentar algunos ejemplos concisos.

b) **(4 puntos)** Consideremos ahora que Chris también puede moverse en forma paralela a Will (o sea que ambos en una etapa se mueven). Este lo hace como la pieza de un caballo del ajedrez. En este caso, para recrear la situación de lo vivido en el Oscar, es necesario que Will quede **justo al frente** de Chris. No detrás, ni a los costados, si no justamente al frente de él. (Por ejemplo si Chris está en la posición (2,2), Will debe estar en la posición (1,2) para recrear lo vivido). Se le solicita entonces, por requisito de la propia academia de cineastas, la probabilidad de que durante 15 movimientos, se haya sido testigo de la bofetada de Will a Chris. Esto implica, que pudo haber visto la bofetada tras una transición, dos, tres, etc.

c) **(4 puntos)** Considere las CMTD que describen el movimiento de Will y Chris (por separado). Para cada CMTD, indique y argumente correspondientemente:

- **i)** Si la cadena es irreducible.
- **ii)** Si es que existen todos los límites de las probabilidades límite.
- **iii)** Si es que existe distribución límite.
- **iv)** Si es que existe distribución estacionaria.

d) **(8 puntos)** Encuentre los π asociados a largo plazo para los estados de Will y Chris. Calculando lo anterior, responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad a largo plazo de que Will esté en la casilla del Oscar? ¿Y para Chris?
- Muestre un tablero de colores con las probabilidades de largo plazo, mostrando significativamente dónde son más altas mediante tonos distintos. Realice esto para Will y Chris, y compare exhaustivamente las similitudes y diferencias de los tableros.

Problema 2 (20 puntos)

Suponga que uno de sus conocidos se encuentra trabajando para el terminal de buses de *La Ligua*. Este terminal trabaja con $n > 1$ compañías de buses todos los días de la semana de 08:00 a 20:00. Le piden hacer un estudio del comportamiento de los buses y los pasajeros con el fin de mejorar el servicio brindado.

Para lograr su cometido, una primera revisión estadística le permitió concluir que el tiempo de llegada entre cada bus de la compañía $i \in \{1, \ldots, n\}$ distribuye *Exponencial* de parámetro $\lambda_i > 0$ buses por hora. Además, la llegada de los pasajeros corresponde a un Proceso de Poisson de parámetro $\alpha > 0$ pasajeros por hora. Suponga que los tiempos de llegada de los buses son todos independientes e independientes de la llegada de pasajeros. Para los incisos **a)**, **b)**, **c)** y **d)**, considere la siguiente asignación de valores: $\lambda = \{10, 20, 30, 10, 2\}$ y $\alpha = 50$.

a) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad que el segundo bus de la compañía 1 llegue antes que el tercer bus de la compañía 2? Realice el procedimiento anterior de forma teórica como empírico (con simulación) y compare.

b) **(3 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad que hayan llegado exactamente 10 buses de la compañía 1 hasta las 11:00 y exactamente 40 buses de la misma compañía entre las 9:00 y las 12:00? Realice el cálculo anterior tanto de forma téorica como empírica con simulación y compare.

c) **(4 puntos)** Suponga que son las 19:30 y solo queda un bus de la compañía 1 que sale a las 20:00. Si todos los pasajeros que llegan de ahora en adelante desean abordar ese bus (asuma que este tiene la capacidad de recibir a todos los pasajerons que lleguen) ¿cuál es el tiempo promedio esperado de espera de los clientes? Realice el procedimiento anterior tanto de forma teórica como empírica con simulación y compare.

d) **(6 puntos)** Considere que solo quedan dos buses en el terminal, uno de la compañía 1 y otro de la compañía 2, cada uno con capacidad para $M \in \mathbb{Z}^+$ pasajeros más. Con probabilidad $p \in (0, 1)$, los pasajeros que lleguen decidirán tomar el bus de la compañía 1, y con probabilidad $1 - p$ el de la compañía 2. Antes de partir, en el bus de la compañía 1, el chofer esperará un tiempo que distribuye $Uniforme(a, b)$ con $0 < a < b$, en minutos, mientras que en el bus de la compañía 2, el chofer esperará un tiempo que distribuye *Exponencial* de parámetro $\beta > 0$, en minutos. Considere que si llega un pasajero y el bus de su preferencia ya no está disponible, simplemente se va. Una vez los buses partieron, determine la probabilidad de que el bus de la compañía 1 haya recibido más de $r \in \mathbb{Z}^+$ veces el número de pasajeros que recibió el bus de la compañía 2. Realice el procedimiento anterior tanto de forma teórica, como empírica con simulación, considerando la siguiente asignación de valores $\{p, a, b, M, r, \beta\} = \{0.3, 15, 30, 100, 3, 1/5\}$.

e) **(4 puntos)** Piense que estamos en un instante concreto donde el terminal ya cerró sus puertas y quedan dos buses (considere que no llegarán ni más buses o pasajeros). Vendedores ambulantes de dulces de *La Ligua* llegan al terminal según un Proceso de Poisson de tasa $\gamma > 0$ vendedores/hora. Los vendedores intentarán vender sus criminales malandrísticos, criminalísticos malandriosos productos a los pasajeros de ambos buses (considere que el tiempo de venta, así como el de rotación entre buses es despreciable). El chofer del bus 1 esperará un tiempo que distribuye $U(a, b)$ antes de partir, mientras que el chofer del bus 2 esperará un tiempo que distribuye $U(c, d)$, con $0 < c < d < a < b$. Después de este tiempo, los buses se van y los vendedores dejan de vender. Determine la probabilidad de que la cantidad de vendedores que intentaron vender al bus 2 sea a lo más $k \in \mathbb{Z}^+$, dado que la cantidad de vendedores que intentaron vender al bus 1 fue de exactamente $n \in \mathbb{Z}^+$ personas (con $n > k$). Realice el procedimiento anterior tanto de forma teórica, como empírica con simulación, considerando la siguiente asignación de valores $\{a, b, c, d, n, k, \gamma\} = \{20, 30, 5, 15, 30, 20, 80\}$.

Problema 3 (20 puntos)

Parte 1 (8 puntos)

Suponga que autobuses llegan en intervalos de tiempo aleatorios (llamémosle T a dichos tiempos) a una parada, y que un pasajero llega a la parada en un momento también aleatorio. El pasajero tendrá que esperar un cierto tiempo antes de que llegue el próximo autobús. Ese es el *tiempo residual* T_{res}.

a) (5 puntos) Demuestre que el tiempo de espera residual esperado $\mathbb{E}[T_{\text{res}}]$ está dado por la expresión:

$$\mathbb{E}[T_{\text{res}}] = \frac{\mathbb{E}[T]}{2}\left(1 + \text{CV}_T^2\right)$$

donde CV_T es el coeficiente de variación de los tiempos entre llegadas dado por $\text{CV}_T = \frac{\sigma_T}{\mathbb{E}[T]}$.

b) (3 puntos) Analice el comportamiento de la expresión anterior en los siguientes casos:

i) Baja variabilidad ($\text{CV}_T < 1$)
ii) Marginal ($\text{CV}_T = 1$)
iii) Alta variabilidad ($\text{CV}_T > 1$)

Parte 2 (12 puntos)

Unos conocidos astrónomos del país estudian la aparición de estrellas en la constelación "Po1sSSs0n". La tasa de avistamientos por hora $\lambda(t)$ es variable, debido principalmente a que hay horarios donde por la "falta de luz", es más difícil conseguir un avistamiento. Considerando que $t = 0$, representa las 00:00, para un día cualquiera, $\lambda(t)$ está definido por:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{10}{t+1} & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ \\ \dfrac{t}{3} & \text{si } 6 < t < 18 \\ \\ e^{t/6} & \text{si } 18 \leq t < 24 \end{cases}$$

Cuando un astrónomo identifica un avistamiento, las estrellas aparecen en grupos. Sea Y_i la cantidad de estrellas vistas en el avistamiento $i \in \mathbb{N}$. Esta es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 1, 2 y 3 equiprobablemente (es decir, $Y_i \sim \mathcal{U}(1,3)$ para todo $i \in \mathbb{N}$). A partir de la descripción anterior, se le solicita:

c) (3 puntos) Si hasta las 05:30 AM, los astrónomos habían identificado 3 estrellas, ¿Cuál es la cantidad esperada de estrellas a avistar en la jornada completa?

d) (5 puntos) Determine la probabilidad de que hasta las 06:00 el equipo de astrónomos hayan avistado exactamente 4 estrellas.

e) (4 puntos) Si los astrónomos desde las 13:00 hasta las 23:00 habían contabilizado al menos 200 avistamientos, ¿cuál es la probabilidad de que entre las 06:00 y las 16:00 hayan registrado menos de 90 avistamientos?