Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Ayudante Jefe Francisco Tamarín
Segundo Semestre 2024

Tarea 4:
CMTC y Sistemas de Espera

Instrucciones

- Esta tarea debe ser realizada **individualmente** o **en parejas** (pueden ser de diferentes secciones dentro de las que son coordinadas). Deben indicar en la primera plana del PDF los nombres de los/as integrantes, junto con las secciones respectivas de c/u.
- Tienen plazo hasta el **Viernes 29 de noviembre a las 23:59 hrs** para entregar sus soluciones.
- Deben entregar un archivo reporte, **en formato PDF**. En el archivo PDF deben entregar sus respuestas de los 3 problemas. Los códigos implementados deben adjuntarse como un archivo .zip aparte en el buzón. En el PDF deberá estar el desarrollo, resumen de resultados y correspondiente análisis. Se recomienda fuertemente utilizar LaTeX. Sin embargo, estas también pueden ser escritas en algún otro editor de texto o a mano y escaneadas, pero **debe estar ordenado y legible**, de lo contrario, se descontarán 3 décimas a la nota final de la tarea. Cualquier código que utilicen de internet debe ser debidamente citado insertando el *link* asociado.
- Si realizan la tarea completa en LaTeX, incluyendo todas las fórmulas y ecuaciones, tendrán **3 décimas extras**.
- La tarea tiene un total de 60 puntos. La nota final será calculada como la suma de las tres preguntas mediante la fórmula
$$Nota = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{60} \cdot 6 + 1$$
Donde P_i corresponde al puntaje de la pregunta i. Se aproxima a dos decimales.
- Las preguntas se harán a través del foro de discusión asociado a la Tarea 1 en Canvas, por lo que les pedimos que **NO** manden dudas por mail sobre la tarea. De esta manera, todos tienen acceso a las respuestas.
- Seremos estrictos en que **no se aceptarán envíos por mail**. Evite problemas de internet, del sistema Canvas, de la calidad de la foto o cualquier otro que pudiese ocurrir al entregar sobre la hora. El/La alumno/a que envíe su tarea después de la hora límite, tendrá **nota 1.0**.

Problema 1 (20 puntos)

Suponga que un ayudante conocido suyo lleva ya varios semestres sacrificando su salud mental a costas de hacer muchas ayudantías del departamento ICS. En concreto, es ayudante de Métodos de Optimización, Modelos Estocásticos y el Taller de Investigación Operativa (Capstone). Ahora, ya avanzado el semestre, se encuentra un poco colapsado de su súbita decisión de tomar tantas responsabilidades, dado que ha estado recibiendo muchos correos de los alumnos de las dos primeras ayudantías (dado que en la tercera solo tiene reuniones semanales con sus grupos asignados). Considere que su amigo recibe correos de los alumnos de Métodos de Optimización y Modelos Estocásticos según un Proceso de Poisson a tasas $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ correos por minuto, respectivamente. Por otro lado, el tiempo de respuesta de su amigo para cada curso distribuye Exponencial con media $\frac{1}{\mu_1} > 0$ y $\frac{1}{\mu_2} > 0$, respectivamente (en minutos). Considerando que el correo tiene un espacio limitado de almacenamiento, su amigo decide recibir a lo más $O \in \mathbb{N}$ correos de Métodos de Optimización y a lo más $E \in \mathbb{N}$ correos de Modelos Estocásticos. Si llegan más correos, estos rebotan (se mandan automáticamente a la carpeta de *spam*). En base a esto responda:

a) (3 puntos) Modele el estado de ocupación de su amigo (a partir de la cantidad de correos) como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Identifique claramente las variables de estado, el espacio (o conjunto) de estados, las tasas de transición instantáneas, las tasas de permanencia y las probabilidades de transición instantáneas.

b) (3 puntos) Plantee las ecuaciones de equilibrio en el largo plazo.

Considere ahora que, además de lo anterior, si la cantidad de correos totales es igual a $K \in \mathbb{N}$, su amigo ayudante decide tomarse un receso en donde no se aceptan correos y todos se pierden para siempre (rebotan). En dicho descanso procede a ayudar a sus grupos asignados del Taller de Investigación Operativa con su entrega final (dado que no les corre el modelo). Cuando esto ocurre, su amigo permanece en este estado de ayuda a sus grupos un tiempo que distribuye Exponencial de media $\frac{1}{\tau} > 0$ (en minutos).

A su vez, dado que a su amigo ayudante no le gusta acumular tantos correos, cuando los sin responder de Métodos de Optimización superan los $M \in \mathbb{N}$ correos (con $O > M > K$), su amigo decide *speedrunear* la respuesta a estos correos y es capaz de responderlos (los de Métodos de Optimización únicamente) tres veces más rápido de lo normal, sin pérdida de calidad en el proceso.

Llega un momento en que su amigo tan cansado de todo, pierde su cordura y cuando la cantidad de correos supera los $J \in \mathbb{N}$ correos en total (con $J \leq E + O, J > E, O$), decide eliminar todos los correos y tomarse una siesta para recuperar energía. El tiempo que duerme distribuye Exponencial de media $\frac{1}{\gamma} > 0$ (en minutos). En base a los nuevos cambios de la situación responda:

c) (6 puntos) Modele el estado de ocupación de su amigo ayudante como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo, indicando claramente las variables de estado, el espacio (o conjunto) de estados y las tasas de transición instantáneas.

Considere ahora que en cada estado del conjunto de estados de la CMTC, su amigo recibe un desincentivo por encontrarse en ese estado específico. Este desincentivo corresponde a sus ganas de no querer responder correos y disfrutar de la vida. El desincentivo en cada uno de los estados se comporta de manera estocástica según una variable aleatoria discreta Z_s para un estado $s \in S$ en específico, con S el conjunto de estados de la CMTC. De esta forma, $\mathbb{P}(Z_s = z)$ representa la probabilidad de que, para el estado s, el desincentivo tome el valor $z \in \Phi_s$. A su amigo le han dado la posibilidad de elegir a su conveniencia la distribución a largo plazo en cada uno de los estados $s \in S$, pero con ciertas restricciones que debe cumplir. Entre ellas se encuentran, que debe permanecer como mínimo y máximo en cada uno de los estados un porcentaje $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ del tiempo, respectivamente. Asimismo, por compromiso con la ayudantía y sus grupos, debe permanecer en estado de ayuda, un $\alpha > 0$ del tiempo total. Por otra parte, dado que usted valora sus tiempos de descanso, el tiempo que no permanece respondiendo correos, deben abarcar un $\beta > 0$ de las veces totales. Además, como las horas asignadas en Modelos Estocásticos es mayor, debe cumplir con que las tasas de respuesta para los correos de Modelos Estocásticos sea a lo menos un 20 % más alta en comparación a las de Métodos de Optimización. A su amigo le gustaría minimizar el desincentivo total esperado, a partir de la decisión sobre sea las tasas de respuesta de correos. Considere además que μ_1, μ_2 solo pueden tomar valores en el conjunto $\mathcal{U}$.

d) (8 puntos) Plantee un modelo de optimización que permita encontrar los μ_1, μ_2 y la distribución de probabilidad a largo plazo óptimos para la situación descrita anteriormente. Considere que $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$ y τ, son parámetros del problema que no varían. Indique, con las herramientas vistas en el curso, como intentaría resolver este problema. Justifique.

Problema 2 (20 puntos)

Parte 1 (10 puntos)

Considere un servidor con dos filas cuyo tiempo de atención distribuye Exponencial con tasa $\mu > 0$ (atenciones por minuto). A la primera cola llegan clientes preferenciales de acuerdo a un Proceso de Poisson de tasa $\lambda_1 > 0$ (clientes por minuto), mientras que a la otra llegan clientes normales de acuerdo a un Proceso de Poisson de tasa $\lambda_2 > 0$ (clientes por minuto). Se prioriza la atención de los clientes preferenciales de manera tal que solo se atiende a los clientes normales en caso que no haya ningún cliente preferencial en el sistema. Esto implica que, en caso de que se esté atendiendo un cliente normal, su atención será interrumpida si es que llega un cliente preferencial, y reanudada recién cuando no queden más clientes preferenciales por atender.

a) **(1 punto)** Calcule la cantidad promedio de clientes preferenciales y el tiempo promedio de éstos en el sistema.

b) **(1 punto)** Encuentre la proporción del tiempo en la cual se está atendiendo a los clientes preferenciales.

c) **(1 punto)** Calcule la cantidad promedio de clientes normales y el tiempo promedio de éstos en el sistema.

d) **(2 puntos)** Encuentre la proporción del tiempo en la cual se está atendiendo a clientes normales.

e) **(2 puntos)** Indique la cantidad total promedio de clientes así como el tiempo promedio de un cliente cualquiera en el sistema.

f) **(3 puntos)** Suponga ahora que los clientes preferenciales siguen teniendo prioridad de atención sobre los clientes normales, pero si el servidor está atendiendo a un cliente regular y llega un cliente preferencial, el servidor empieza a atender clientes preferenciales solo después de despachar al cliente regular que está siendo atendido en ese momento. Para cada uno de los indicadores solicitados en los incisos anteriores, indique si en esta nueva situación estos índices serían mayores, menores o iguales. Justifique brevemente para casa caso. No es necesario que calcule los indicadores para esta nueva situación, solo basta que argumente cómo varían.

Parte 2 (10 puntos)

Un local de comida vegana gluten free cuenta con $C \in \mathbb{N}$ cajas en paralelo y opera con una cola única de capacidad ilimitada. Los clientes llegan según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$ (clientes por hora). Si al llegar una persona al local, hay $j \in \mathbb{N}$ clientes en la fila, entra al sistema con probabilidad $p_j > 0$ y en caso contrario, se va.

En caso que no haya clientes en la fila los clientes se quedan con probabilidad 1 ($p_i = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N} : i \leq C$). Una vez en la cola, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que llega al sistema hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria Exponencial de media $\frac{1}{\mu} > 0$ (en horas). Además se sabe que la atención de cada uno de los cajeros es una variable aleatoria de distribución Exponencial de media $\frac{1}{\beta} > 0$ (en horas).

g) **(3 puntos)** Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Para esto debe determinar las variables de estado, el espacio (o conjunto) de estados, las tasas de transición instantáneas y el diagrama de la cadena.

h) **(4 puntos)** Argumente sobre la existencia de probabilidades estacionarias y entregue expresiones genéricas que le permitan calcularlas.

i) **(3 puntos)** Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguiente preguntas:

- **i)** ¿Qué fracción de los clientes, que en una hora llegan al sistema, deciden no ponerse en la cola y retirarse sin entrar al sistema?
- **ii)** ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por pérdida de paciencia)?

Problema 3 (20 puntos)

En el consejo de la ANFP, el presidente Pablo Milad y sus secuaces se encuentran analizando las diferentes alternativas para que Colo-Colo salga campeón este año 2024. Entre sus acciones preferidas se encuentran: brindar penales a favor en demasía y con dudosa causa, expulsar jugadores rivales de forma descriteriada, aplazar partidos para darle descanso injustificado a Colo-Colo, y su favorita, que es la de desestimar y destruir pruebas de denuncias válidas hacia el equipo "popular".

Entre dichos secuaces se encuentra el mismísimo Aníbal Mosa, encargado de destruir las pruebas de las denuncias hechas. Como el campeonato se encuentra en la recta final, se puede considerar que existen infinitas pruebas que deben ser destruidas. En el punto de destrucción donde se encuentra Aníbal, puede haber un máximo de $M \geq 8$ (con $M \in \mathbb{N}$ y par) pruebas a la vez, y el tiempo que demora en destruir una prueba distribuye Exponencial de tasa $\lambda > 0$ (destrucciones por minuto). Cuando en el punto de destrucción hay $\frac{M}{2}$ pruebas totales, Aníbal se estresa, y decide aumentar la tasa de destrucción en un 50 %.

El mensajero de la ANFP es el que recopila las denuncias válidas desde diversos origenes (fiscalía, otros equipos, sindicatos de jugadores profesionales, etc.). Este mensajero es el encargado de ir entregando las denuncias al punto de destrucción de Anibal Mosa. El tiempo que demora en entregar una prueba distribuye Exponencial con media $\frac{1}{\mu} > 0$ (minutos). Sin embargo, si se percata que este (Aníbal) tiene 2 o menos pruebas en el punto de destrucción, decide entregar pruebas de forma más rápida, reduciendo así la media de los tiempos de entrega en un 60 %. El mensajero no entrega pruebas en caso que Aníbal tenga M aún en su poder. A partir de lo anterior, se le solicita:

a) **(2 puntos)** Construya una Cadena de Markov de Tiempo Continuo que modele la cantidad de pruebas sin destruir que hay en el punto de destrucción de la ANFP. Identifique pertinentemente las variables de estado, el espacio (o conjunto) de estados, y las tasas de transición instantáneas. Esboce el grafo y/o la matriz de esta CMTC.

b) **(3 puntos)** Indique condiciones para la existencia de las probabilidades en el largo plazo y luego plantee las ecuaciones de equilibrio del problema.

c) **(4 puntos)** Realice una función en Python que resuelva las ecuaciones del apartado **b)** para distintos valores de M, λ y μ. Con ello, indique la proporción del tiempo en el largo plazo que Aníbal se encuentra destruyendo a una tasa de destrucción aumentada en un 50 % para los siguientes valores $M = 24$, $\lambda = 0.5$ y $\mu \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$. Analice detalladamente los resultados obtenidos.

Ahora se sabe también que a Aníbal, cuando destruye pruebas, le encanta hacer una pausa para aprovechar de sobornar a los árbitros del VAR. El tiempo que transcurre para que Aníbal haga una pausa distribuye Exponencial con tasa $\gamma > 0$ (pausas por minuto), y el tiempo que demora en sobornar un arbitro también distribuye Exponencial con media $\frac{1}{\rho} > 0$ (minutos). Por cada pausa, Aníbal alcanza a sobornar a un árbitro. Considere que hay infinitos árbitros a los que puede sobornar. Asumiendo que no pierde tiempo en los trayectos de traslado, y que solo destruye pruebas cuando se encuentra en el punto de destrucción, agregue esta información a la proporcionada anteriormente y realice lo siguiente:

d) **(4 puntos)** Modele la nueva situación descrita con una Cadena de Markov en Tiempo Continuo, identificando las variables de estado, el espacio (o conjunto) de estados, y las tasas de transición instantáneas. Esboce el grafo y/o la matriz de esta CMTC.

e) **(4 puntos)** Indique condiciones para la existencia de las probabilidades en el largo plazo y luego plantee las ecuaciones de equilibrio de la cadena. Posteriormente resuelva de forma explícita para la siguiente asignación de valores $M = 30$, $\lambda = 0.7$, $\mu = 0.8$, $\gamma = 0.2$ y $\rho = 0.5$. Con ello, indique la proporción del tiempo en el largo plazo que Aníbal se encuentra destruyendo a una tasa de destrucción aumentada en un 50 %.

f) **(3 puntos)** De expresiones generales para los siguientes elementos en el largo plazo y luego con la solución obtenida de **e)** determine el valor explícito de:

- **i)** ¿Cuál es la probabilidad en el largo plazo de que Aníbal se encuentre sobornando árbitros?
- **ii)** ¿Cuál es la tasa efectiva, en el largo plazo, de entrada de pruebas al punto de destrucción?
- **iii)** ¿Cuál es la tasa efectiva, en el largo plazo, de destrucción de pruebas?
- **iv)** ¿Cuál es el valor esperado, en el largo plazo, de pruebas en el punto de destrucción? ¿Y el número promedio de pruebas esperando a ser destruidas?
- **vi)** ¿Cuál es el tiempo promedio que pasa una prueba en el sistema? ¿Y el tiempo promedio desde que entra hasta que comienza a ser destruida?