Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Maximiliano González, Nicolás Vargas y Andrés Navarro
Ayudante Jefe Francisco Tamarín
Segundo Semestre 2024

Tarea 1:
Repaso de Probabilidades

Instrucciones

- Esta tarea debe ser realizada **individualmente** o **en parejas** (pueden ser de diferentes secciones dentro de las que son coordinadas). Deben indicar en la primera plana del PDF los nombres de los/as integrantes, junto con las secciones respectivas de c/u.

- Tienen plazo hasta el **Martes 27 de agosto a las 23:59 hrs** para entregar sus soluciones.

- Deben entregar un archivo reporte, **en formato PDF**. En el archivo PDF deben entregar sus respuestas de los 3 problemas. Los códigos implementados deben adjuntarse como un archivo .zip aparte en el buzón. En el PDF deberá estar el desarrollo, resumen de resultados y correspondiente análisis. Se recomienda fuertemente utilizar LaTeX. Sin embargo, estas también pueden ser escritas en algún otro editor de texto o a mano y escaneadas, pero **debe estar ordenado y legible**, de lo contrario, se descontarán 3 décimas a la nota final de la tarea. Cualquier código que utilicen de internet debe ser debidamente citado insertando el *link* asociado.

- Si realizan la tarea completa en LaTeX, incluyendo todas las fórmulas y ecuaciones, tendrán **3 décimas extras**.

- La tarea tiene un total de 60 puntos. La nota final será calculada como la suma de las tres preguntas mediante la fórmula
$$Nota = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{60} \cdot 6 + 1$$
Donde P_i corresponde al puntaje de la pregunta i. Se aproxima a dos decimales.

- Las preguntas se harán a través del foro de discusión asociado a la Tarea 1 en Canvas, por lo que les pedimos que **NO** manden dudas por mail sobre la tarea. De esta manera, todos tienen acceso a las respuestas.

- Seremos estrictos en que **no se aceptarán envíos por mail**. Evite problemas de internet, del sistema Canvas, de la calidad de la foto o cualquier otro que pudiese ocurrir al entregar sobre la hora. El/La alumno/a que envíe su tarea después de la hora límite, tendrá **nota 1.0**.

Problema 1 (20 puntos)

Parte 1 (10 puntos)

Responda las siguientes preguntas de forma independiente:

a) (5 puntos) Demuestre que, si A, B y C son eventos mutuamente independientes, entonces también los son A y $B \cup C$, y $A \cap \overline{B}$ y C.

b) (3 puntos) Sean A, B y C, tres eventos posibles. Muestre que si

$$\mathbb{P}(A \mid C) \geq \mathbb{P}(B \mid C) \text{ y } \mathbb{P}(A \mid \overline{C}) \geq \mathbb{P}(B \mid \overline{C}),$$

entonces $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$.

c) (2 puntos) Sean los eventos $A_1, \ldots, A_n$ y A, subconjuntos de un espacio muestral S. Demuestre que si

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq A,$$

entonces

$$\mathbb{P}(A) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) - (n-1).$$

Parte 2 (10 puntos)

Un equipo de fiscales, con apoyo de un gigante informático, revisa cientos de correos electrónicos identificando como sospechosos (cuando se está solicitando apoyo monetario ilegalmente). Estos correos son enviados por tres partidos políticos (digamos I, C y D), los que compiten por la presidencia. De estos, la mitad de los correos fueron enviados por D, mientras que los restantes están en relación 3:2 entre C e I. Considere que se comete delito cuando una empresa accede a la solicitud, y que el sistema es "infalible" (es decir, si el mail revisado fue respondido y entregó dinero la empresa, llevando a cabo el delito, este es detectado).

Por otra parte, del total de envíos que las empresas reciben de D, le dan una respuesta solo al 40 % de ellas (positiva y negativa), valores que bajan a 30 % y 10 % en el caso de C e I, respectivamente. Finalmente, un análisis de las respuestas muestra que entre todas las respuestas de D, en 8 de cada 10 los apoyan monetariamente, mientras que en C, en relación a D, es la mitad, y en I, en relación a C es la mitad. Si los fiscales seleccionan un mail al azar, determine:

d) (3 puntos) La probabilidad de que solo el partido D sea sometido a juicio.

e) (2 puntos) La probabilidad de que ningún partido sea sometido a juicio.

f) (5 puntos) La probabilidad de que no se haya cometido delito, si la empresa respondió el mail.

Problema 2 (20 puntos)

Responda las siguientes preguntas de forma independiente:

a) (6 puntos) Suponga que el tiempo entre accidentes automovilísticos en una carretera concesionada distribuye Exponencial de parámetro λ días. Sea T una variable aleatoria Exponencial(ν) que representa el período (en días) de observación.

- **i) (2 puntos)** Si Y representa el número de accidentes observados incondicional al tiempo de observación, muestre que

$$\mathbb{P}(Y = y) = \frac{\nu}{\lambda + \nu} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \nu} \right)^y, \quad y \in \mathbb{N}_0.$$

- **ii) (2 puntos)** Determine el valor esperado y varianza de Y.
- **iii) (2 puntos)** Muestre que $Z = Y + 1 \sim$ Geométrica(p). Proponga una expresión para p en términos de los parámetros ν y λ.

b) (4 puntos) Cuando un alumno enfrenta un problema se incrementa la probabilidad de cometer errores a medida que demora más en encontrar la solución. Suponga que T es el tiempo en minutos que le toma al alumno desarrollar, el cual se comporta de acuerdo a una variable aleatoria Gamma(k, ν), mientras que el número de errores que se cometen en un minuto distribuye Poisson($1/\nu$).

- **iv) (2 puntos)** Determine la distribución del tiempo T dado que cometieron k errores durante el desarrollo.
- **v) (2 puntos)** Determine el grado de asociación (covarianza) entre el tiempo en resolver el problema y la cantidad de errores cometidos.

c) (4 puntos) Una variable aleatoria continua X posee la propiedad de pérdida de memoria si es que para todo $t, s > 0$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t)$$

Si X es una variable aleatoria continua con soporte $[0, \infty)$, muestre que X posee la propiedad de pérdida de memoria si, y solo si, distribuye Exponencial.

Hint: Si X es una variable aleatoria continua, plantee su CDF: $1 - G(x)$, igual a $\mathbb{P}(X \leq x)$. Luego, si X posee la pérdida de memoria, entonces trate de llegar explícitamente a que $1 - G(x)$ es la CDF de una distribución exponencial.

d) (6 puntos) El viejito pascuero cuenta con $n > 1$ diferentes flotas. Cada flota, contiene trineos a cargo de los renos del viejito pascuero. A la estación, el tiempo de llegada entre cada trineo de la flota $i \in \{1, \ldots, n\}$ distribuye Exponencial de parámetro $\lambda_i > 0$, en horas.

¿Cuál es la probabilidad que en un día cualquiera, los primeros trineos de cada flota lleguen en orden? Es decir, que el primer trineo de la flota 1 llegue antes que el primer trineo de la flota 2 y este, a su vez, antes que el primer trineo de la flota 3 y así sucesivamente.

Hint: Puede ser útil considerar los eventos $Z_i = \min_{i \leq j \leq n} \{T_1^j\}$ donde T_1^j es el tiempo en el que sucede la primera llegada de un trineo de la flota j.

Problema 3 (20 puntos)

Parte 1 (10 puntos)

Considere siguientes preguntas independientes relacionadas a *paradojas probabilísticas* aplicadas a experimentos aleatorios:

a) **(6 puntos)** El problema de Monty Hall consiste en que un concursante en un programa de televisión debe elegir una puerta entre tres puertas cerradas, detrás de las cuales se encuentra en una un automóvil, y tras las otras dos, cabras. Una vez que el concursante haya elegido una puerta, el presentador, quien sabe lo que hay detrás de cada puerta, abrirá una de las otras dos (no elegidas por el concursante) en la que haya una cabra. A continuación, el presentador le da al concursante la opción de mantener la puerta o cambiar su elección. Aquí puede encontrar el **video**.

Demuestre que al cambiar su elección, el concursante tiene mayores probabilidades de ganar el automóvil. Realice el procedimiento tanto teórico como empírico, registrando el número de repeticiones y evolución de la probabilidad (puede presentar esto en un gráfico). Analice y comente detalladamente.

b) **(4 puntos)** Sea n el número de personas en un grupo. Supongamos que hay 365 días en un año (ignorando años bisiestos). Queremos encontrar la probabilidad de que al menos dos personas compartan el mismo cumpleaños. Realice el cálculo de forma teórica, y luego vía experimentos aleatorios. Grafique, para diferentes valores de n, como evoluciona la probabilidad solicitada (incluya la comparación entre el valor teórico y empírico). Analice y compare detalladamente.

Parte 2 (10 puntos)

Usted ha tenido una caótica toma de ramos por diversas razones, entre ellas, la caída frecuente del sistema, el robo de sus preciados cupos o simplemente el no alcanzar a tomar el ramo que quería. No obstante, usted ha vuelto a recuperar la fe en que alcanzará su preciado cupo luego de haber visto que ODOC abrió un formulario de solicitudes excepcionales. Como sabe, no es el único en esta situación y tendrá que combatir frente a otras personas para lograr un cupo y para esto, decide aprovechar sus conocimientos en Probabilidades para calcular ciertas expresiones. De fuentes muy confiables obtuvo ciertas métricas que muestran que el tiempo de respuesta de solicitudes de personas que pertenecen a Ingeniería distribuye Exponencial de parámetro μ horas y el tiempo de respuesta de personas que pertenecen a College distribuye Exponencial de parámetro τ horas. Considere que si una persona recibe respuesta es porque sí o sí se le va a asignar un cupo en el ramo que quiere. Asuma independencia entre los tiempos de respuesta. Con esto, responda las siguientes preguntas:

c) **(4 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad que 3 personas de Ingeniería reciban respuesta antes que 2 personas de College? Realice el cálculo anterior de forma teórica y empírica. Luego, para diferentes valores de μ y τ (a su elección) compare el error teórico, y además adjunte un gráfico de la evolución de la probabilidad empírica a partir de los diferentes valores de μ y τ (el gráfico puede ser 3D o 2D, queda a su elección). Analice y compare detalladamente.

d) **(6 puntos)** Considerando que usted pertenece a Ingeniería y su amigo pertenece a College, ¿Cuál es la probabilidad de que usted y su amigo reciban respuesta antes que 5 personas que pertenecen a College? Realice el cálculo anterior de forma teórica y empírica. Luego, para diferentes valores de μ y τ (a su elección) compare el error teórico, y además adjunte un gráfico de la evolución de la probabilidad empírica a partir de los diferentes valores de μ y τ (el gráfico puede ser 3D o 2D, queda a su elección). Analice y compare detalladamente.