2. Parte 2

2.1.

Parte A

Si existe el modelo M tal que $p \in M$.

- La regla $\leftarrow p$ nos dice que p no puede estar en el modelo M, ya que esta regla hace que p sea falso.
- Si $p \in M$, no se cumpliriía la regla $\leftarrow p$, lo cual es una contradicción.
- Si $p \notin M$, la regla p no se satisface, porque exige que p sea verdadero.

De esta forma, asumiendo inicialmente que existe el modelo M tal que $p \in M$, logramos ver que siguiendo una secuencia lógica, nos encontramos frente a una contradicción, por lo tanto el programa no tiene ningún modelo.

Parte B

- Si p es verdadero, entonces por la regla $p \leftarrow$ not q, q debe ser falso.
- Si q es verdadero, entonces por la regla $q \leftarrow$ not p, p debe ser falso.

De esta forma, podemos ver que tenemos 2 posibles modelos:

- $M_1 = \{p\}$. En este caso, p es verdadero y q es falso.
  - La regla $p \leftarrow$ not q se satisface, ya que q es falso.
  - La regla $q \leftarrow$ not p no aplica, porque q es falso.
- $M_2 = \{q\}$. En este caso, q es verdadero y p es falso.
  - La regla $q \leftarrow$ not p se satisface, ya que p es falso.
  - La regla $p \leftarrow$ not q no aplica, porque p es falso.

2.2.

Consideramos que las reglas en los programas lógicos son de la forma Head $\leftarrow$ Body, con $|\text{Head}| = 1$, es decir, la cabeza de la regla contiene un átomo, según lo planteado en el enunciado.

- Sea Π un programa, dado que M es un modelo de Π, este satisfaces las reglas de Π. Por lo tanto para cada regla Head $\leftarrow$ Body, si Body es verdadero en M, entonces Head también debe ser verdadero en M.

- Si agregamos una nueva regla a Π, tenemos un programa Π' de modo tal que $\Pi \subseteq \Pi'$. En ese sentido hay que demostrar que el modelo M puede ampliarse a un modelo M' que $\in \Pi'$.
- Supongamos que el programa Π tiene n_i reglas. Agregando una nueva regla n_{i+1} a Π, tenemos $\Pi' = \Pi \cup \{n_{i+1}\}$.
- Ahora debemos demostrar que existe un modelo M' tal que $M \subseteq M'$.
- Dado que n_{i+1} es una regla de la forma Head $\leftarrow$ Body, si Body es verdadero en M, entonces Head debe añadirse al conjunto, de este modo $M' = M \cup \{\text{Head}\}$.
- Por otro lado, como no hay negación en las reglas, agregar una nueva regla no elimina otras soluciones de reglas previamente definidas. Por lo tanto, M' sigue siendo un modelo de Π, y además cumple con la regla n_{i+1}, por lo que es un modelo de Π'.

De esta forma, por inducción se demuestra que si $\Pi \subseteq \Pi'$ y M es un modelo de Π, entonces existe un modelo M' de Π' tal que $M \subseteq M'$.

2.3.

En este caso queremos demostrar que todo programa que tiene reglas de la forma Head $\leftarrow$ Body, sin negación, y con $|\text{Head}| \leq 1$, tiene a lo más un modelo.

Para esto nos basaremos en una demostración según el número de reglas de un programa.

- Sea el caso de que tenemos un programa que contiene una única regla de la forma Head $\leftarrow$ Body.
- Por definición si Body es verdadero, entonces Head es verdadero, por lo tanto solo tenemos un modelo, el cual es el que contiene Head.
- Si Body es falso, Head no tenemos información de este, por lo que tenemos un modelo vacío. De esta forma vemos que para el caso base existe a lo más un modelo.
- Por ahora vamos a suponer debido a la inducción que todo programa con n reglas tiene a lo más un modelo.
- Sea un programa con $n + 1$ reglas, si nos enfocamos en ver el subconjunto de n reglas, podemos decir por el paso anterior que tiene a lo más un modelo, de esta forma nos enfocaremos en el subconjunto $n + 1$.
- Si Body_{n+1} es falso, Head_{n+1} no se activa por lo que seguimos con el mismo modelo del caso anterior.
- En cambio, si Body_{n+1} es verdadero en el modelo, entonces Head_{n+1} se activa e incorpora al modelo, de esta forma tenemos un nuevo modelo M' el cual de todas formas sigue siendo solo uno.

De esta forma, por inducción podemos demostrar que todo programa que tiene reglas de la forma Head $\leftarrow$ Body, sin negación, y con $|\text{Head}| \leq 1$, tiene a lo más un modelo.