Definiciones

Notación asintótica

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$, se define:

$$O(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ | (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) \leq c \cdot f(n))\}$$

$$\Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ | (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c \cdot f(n) \leq g(n))\}$$

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+ | (\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c_1 \cdot f(n) \leq g(n)) \leq c_2 \cdot f(n)\}$$

Teorema maestro

La forma general de la ecuación de recurrencia es:

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 0 \\ a \cdot T(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) & n \geq 1 \end{cases}$$

Con a, b, c constantes y $f(n)$ una función arbitraria.

(Se puede cambiar $T(\lfloor n/b \rfloor)$ por $T(\lceil n/b \rceil)$).

(a,b) regularidad

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ y constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \geq 1$ y $b \geq 1$

f es (a, b)-regular si existen constantes $c \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $c < 1$ y

$$(\forall n \geq n_0)(a \cdot f(\lfloor n/b \rfloor) \leq c \cdot f(n)$$

Definición teorema maestro

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$, $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ tales que $a \geq 1$ y $b > 1$ y $T(n)$ una función definida por la siguiente ecuación de recurrecnia:

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 0 \\ a \cdot T(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) & n \geq 1 \end{cases}$$

Se tiene que:

1. Si $f(n) \in O(n^{\log_b(a) - \epsilon})$ para $\epsilon > 0$, entonces $T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$
2. Si $f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$, entonces $T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \cdot \log_2(n))$
3. Si $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a) + \epsilon})$ para $\epsilon > 0$ y f es (a, b)-regular, entonces $T(n) \in \Theta(f(n))$