

$$a(b+c)=ab+ac$$

π



రాష్ట్ర విద్యా పరిశోధన సైక్షణా సంస్థ.
తెలంగాణ రాష్ట్రం, హైదరాబాదు

తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

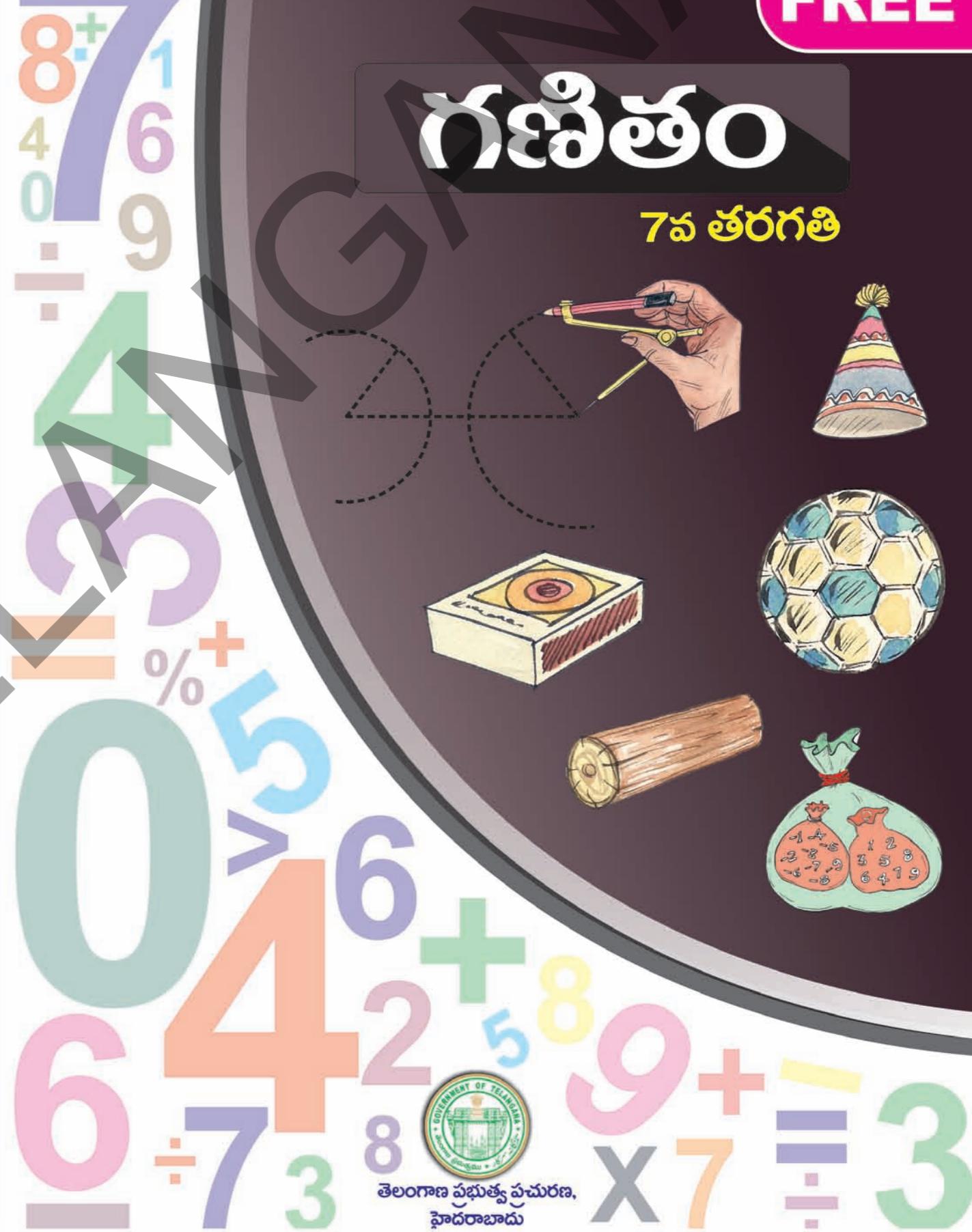
7వ తరగతి

గణితం

FREE

గణితం

7వ తరగతి



తెలంగాణ రాష్ట్ర ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ

ఆశించిన అభ్యర్థిను ఫలితాలు

గణితం

7వ తరగతి

విద్యార్థులు ఇవన్నీ నేర్చుకుంటారు.....

- పూర్ణ సంబులపై చతుర్భుజ ప్రక్రియల అధారంగా సమస్యలను సాధించగలరు.
- జిన్నాలు మరియు దశాం సంబులపై చతుర్భుజ ప్రక్రియల అధారంగా నిజజీవితంలోని సమస్యలను సాధించగలరు.
- అతిపెద్ద సంబుల గుణకార, భాగపొర ప్రక్రియలను సరళంగా చేసుకొనుటకు ఘూతరూపాలను, ఘూతాంక న్యాయాలను వినియోగించుకొంటారు.
- నిష్పత్తి, శాతాలను ఉపయోగించి నిజజీవితంలో లాభ - నవ్వెలు, వడ్డీలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించగలరు.
- నిజజీవితంలోని సమస్యలను ఏక చరరాశితో కూడిన సమీకరణం ఉపయోగించి సాధించగలరు.
- ఏవైనా రెండు రేఖలు ఖండిచుకొన్నప్పుడు ఏర్పడే కోణాల రకాలను వివరించగలరు.
- త్రిభుజం లోని కోణాలు, త్రిభుజానికి చెందిన ఇతర కోణాల గురించి వివరించగలరు.
త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ నియమాలను వివరించగలరు (బు.బు.బు., బు.కో.బు., కో.బు.కో., లం.క.బు.).
- ఇచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజాలను స్నేహి, వృత్తలేఖిని సహాయింతో నిర్మించగలరు.
- సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం, రాంబన్ల వైశాల్యాలను సూత్రాల అధారంగా కనుకోస్తగలరు.
వృత్తపరిధి అధారంగా π విలువను అంచనా వేయగలరు.
- నిజజీవితంలోని సందర్భాల నుండి సేకరించిన అవస్తలకు దత్తాంశానికి సగటు, ముధ్యగతం, భావుళకంలను కనుకోస్తగలరు. కమ్మి రేఖా చిత్రాలను నిర్మించి దత్తాంశాన్ని వ్యాఖ్యానించగలరు.
- నిజజీవితంలోని వస్తువులలో త్రమితీయ వస్తువులైన గోళం, ఘనం, బీర్బమునం, స్ఫూర్థం, శంకువు వలరూపాలను తయారుచేయగలరు.
- వస్తువులను / ఆకారాలను సౌష్టవంగా ఉన్నాయా లేవో సౌష్టవ రేఖ, భ్రమణ సౌష్టవం, జందు సౌష్టవం అధారంగా తెలుపగలరు.

పిల్లలూ! మీ కోసమే ఈ సూచనలు...

- ◆ పార్శ్వపుస్తకంలో ప్రతి భావన అవగాహన కోసం సందర్భం లేదా ఉదాహరణలు లేదా సమస్యలు లేదా ఆటలు మొదలగునవి దానికి సంబంధించిన బోమ్మలు/పటాలు ఇవ్వబడినవి. సందర్భాన్ని పటంతో/బోమ్మతో పాటుచదివి భావనను అవగాహన చేసుకొనుటకు ప్రయత్నించాలి.
- ◆ భావనలు అవగాహన చేసుకోవడానికి నిర్వహిస్తున్న కృత్యాలలో పాల్గొంటున్న సందర్భంలో మీకు వచ్చే అనుమాలను వెంటనే మీ ఉపాధ్యాయులను అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- ◆ భావన అవగాహన అయినది అని తెలుసుకొనుటకు “ఇవి చేయండి”లోని సమస్యలను మీరు స్వంతంగా సాధించాలి. ఒకవేల సాధించలేకపోతే మాదిరి సమస్యను పరిశీలించి అవగాహన పొందాలి. లేదా ఉపాధ్యాయున్ని అడిగి తెలుసుకోవాలి.
- ◆ “ప్రయత్నించండి” శీర్షిక కింద ఉన్న సమస్యలు మీ ఆలోచనలను పదునుపెట్టడానికి ఉపయోగపడతాయి. అనగా మీకు ఆలోచన నైపుణ్యాలను వెంపొందిస్తాయి. వీటిని స్వయంగా సాధించలేనపుడు తోటివిద్యార్థులతో కలిసి జటలో సాధించడానికి ప్రయత్నించాలి. లేదా ఉపాధ్యాయులతో చర్చించి సాధనను తెలుసుకోవాలి.
- ◆ “ఆలోచించండి-చర్చించండి”లోని కృత్యాలు మీరు భావనను మరింత లోతుగా విస్తృతంగా అవగాహన చేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. కావున వీటిని మీ మిత్రులతో కలిసి చర్చిస్తూ, ప్రశ్నిస్తూ అవగాహన పొందండి.
- ◆ అధ్యాయం చివరన ఇచ్చిన అభ్యాసంలోని సమస్యలు మీరు అధ్యాయంలో నేర్చుకున్న అన్ని భావనలకు సంబంధించినవి. ఈ సమస్యలన్ని ఒకే విధంగా ఉండవు. వీటిని మీరు స్వయంగా ఇంటిపనిగా గాని లేదా విరామ సమయంలో గాని సాధించవచ్చు.
- ◆ “ఇవి చేయండి” “ప్రయత్నించండి”లోని సమస్యలు మాత్రం పారశాలలోనే ఉపాధ్యాయుల సమక్కంలో తప్పక సాధించాలి.
- ◆ పార్శ్వపుస్తకంలో ఎక్కడతే పాటైక్కలు ఇవ్వబడినవో వాటిని మీరు జటలో వేయవలసి ఉంటుంది. అయితే వీటి నివేదికలు మీరు వ్యక్తిగతంగా రాసివ్వపలసి ఉంటుంది.
- ◆ భావన అవగాహన కోసం నిర్వహించే కృత్యాలు, అభ్యాసాలలో ఉండే సమస్యలలో మీ ప్రతిస్పందనలను పార్శ్వపుస్తకంలోనే రాయవలసి ఉంటే వాటిని అక్కడే రాయాలి.
- ◆ మీరు ఏరోజు సాధించవలసిన సమస్యలను ఆ రోజే పూర్తిచేసి మీ ఉపాధ్యాయునితో తప్పక సరిచేయించుకోవాలి.
- ◆ పార్శ్వపుస్తకంలో మీరు నేర్చుకున్న భావనలకు సంబంధించిన సమస్యలను మరికొన్నిటిని సేకరించి లేదా మీరు స్వయంగా తయారుచేసి గాని మీ ఉపాధ్యాయునికి, తోటి విద్యార్థులకు చూపించండి. అందరు కలిసి వాటిని సాధించండి.
- ◆ గణిత భావనలకు సంబంధించి పార్శ్వపుస్తకంలో ఇచ్చిన ఆటలు, పజిల్స్, ఆసక్తికరమైన విషయాలు అవగాహన చేసుకొని అలాంటివి మరికొన్ని సేకరించి సాధించాలి.
- ◆ పార్శ్వపుస్తకం ద్వారా తరగతిగదిలో నేర్చుకున్న భావనలను తరగతిగదికి పరిమితం చేయకుండా జీవితంలో (తరగతి బయట) వివిధ సందర్భాలకు వాటిని జోడించడం, ఉపయోగించడం వంటివి చేయాలి.
- ◆ గణితంలో మీరు ముఖ్యంగా సమస్యసాధన, కారణాలు చెప్పడం-నిరూపణలు చేయడం, గణితభాషలో వ్యక్తపరచడం, గణిత భావనలను, అవగాహన వివిధ సందర్భంలో, విషయాలలో, నిత్య జీవితంలో అనుసందానం చేయడం, ప్రాతినిధ్యపరచడం వంటి సామర్థ్యాలను సాధించాలి.
- ◆ వై గణిత సామర్థ్యాలను సాధించడంలో భావనల అవగాహన పరంగా ఏవైనా ఇబ్బందులు ఎదురైతే ఎప్పటికప్పుడు ఉపాధ్యాయుల సహకారం తీసుకోవాలి.



గణితం

7వ తరగతి

పార్శ్వ పుస్తక అభివృద్ధి, ప్రచురణ కమిటీ

ప్రధాన నిర్వహణాధికారి
శ్రీమతి బి. శేఖ కుమారి
సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ
పైదరాబాదు.

కార్యనిర్వహకులు
డా సన్జురు ఉపేందర్ రెడ్డి
ప్రాఫెసర్, కరికులం & పార్శ్వపుస్తక విభాగం
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
పైదరాబాదు.

శ్రీ. క. బ్రహ్మయ్య, ప్రాఫెసర్
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన శిక్షణ సంస్థ,
పైదరాబాదు.

ప్రధాన వ్యవహారానిర్వహకులు
శ్రీ. బి. సుధాకర్
సంచాలకులు, ప్రభుత్వ పార్శ్వపుస్తక ముద్రణాలయం
పైదరాబాదు.

సహాయ కార్యనిర్వహకులు
శ్రీ. కె. యాదగిరి
లెక్చరర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
పైదరాబాదు.

కోఆర్డినేటర్లు

శ్రీ. కాకుళపరం రాజేందర్ రెడ్డి, కోఆర్డినేటర్
రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ,
పైదరాబాదు.

సంపాదకులు

శ్రీమతి బి. శేఖ కుమారి, సంచాలకులు, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, పైదరాబాదు.

శ్రీ. క. బ్రహ్మయ్య, ప్రాఫెసర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, పైదరాబాదు.

శ్రీ. పి. అదినారాయణ, రిపోర్టర్ లెక్చరర్, న్యూ పైన్స్ కాలేజి, అమీర్పేట్, పైదరాబాద్.

శ్రీర్మణ్ణ, గణిత ఆధార పత్రం, గణిత పార్శ్వప్రణాళిక, పార్శ్వపుస్తక అభివృద్ధి కమిటీ

ప్రాఫెసర్. వి. కస్తున్, గణితం - సాంఘికశాస్త్రవిభాగం, పైదరాబాదు విశ్వవిద్యాలయం.

ముఖ్యసులవోదారు

డా హెచ్. క. దివాన్, విద్య సలహాదారు, విద్యాభవన సాసైటీ, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజన్మెంట్.



తెలంగాణ ప్రభుత్వప్రచురణ, పైదరాబాదు

చట్టాలను గౌరవించండి
హక్కులను పొందండి

విద్యవల్ల ఎదగాలి
వినయంతో మెలగాలి



© Government of Telangana, Hyderabad.

*First Published 2012
New Impressions 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020*

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telangana.

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

తెలంగాణ ప్రభుత్వం వారిచే ఉచిత పంపిణీ 2020-21

*Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.*

పొర్చు పుస్తక అఖివృద్ధి కమిటీ సభ్యులు

రచయితలు

డాక్టర్. పి.రమేష్, లక్ష్మర్, ప్రభుత్వ ఐ.ఎ.ఎస్.ఐ, నెల్లూరు

శ్రీ. ఎమ్. రామాంజనేయులు, లక్ష్మర్, డైట్, వికారాబాద్, రంగారెడ్డి

శ్రీ. కాకుళపరం రాజేందర్ రెడ్డి, కో-ఆర్డినేటర్, రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ, హైదరాబాద్

శ్రీ. టి.వి. రామకుమార్, హెడ్ మాస్టర్, జి.ప.స్.పా., ములుమూడి, నెల్లూరు

శ్రీ. పి. అంధోనిరెడ్డి, హెడ్ మాస్టర్, సెయింట్ పీటర్స్ హైస్కూల్, రంగనాయకులపేట, నెల్లూరు

శ్రీ. ఎస్. ప్రసాదబాబు, పి.జి.టి, గిరిజన గురుకుల పొరశాల, చంద్రశేఖరపురం నెల్లూరు

శ్రీ. జి.వి.బి.సూర్యసారాయణరాజు, సూర్య్ అసిస్టెంట్, మున్సిపల్ హైస్కూల్, కస్టా, విజయనగరం.

శ్రీ. పి. సురేష్కమార్, సూర్య్ అసిస్టెంట్, ప్ర.స్.పా., విజయనగర్ కాలనీ, హైదరాబాద్.

శ్రీ. కె.వి. సుందర్ రెడ్డి, సూర్య్ అసిస్టెంట్, ప్ర.స్.పా., తక్కశిల, అలాంపూర్ మండల్, మహబూబ్ నగర్..

శ్రీ. సి.హెచ్. రఘేం, సూర్య్ అసిస్టెంట్, ఉ.ప్రా.పా., నాగారం మండల్, గుంటూరు.

శ్రీ. ఎస్. నరసింహమార్, సూర్య్ అసిస్టెంట్, జి.ప.స్.పా ముదివర్ధిపొలెం, నెల్లూరు.

శ్రీ. జి. వెంకటేశ్వర్రు, సూర్య్ అసిస్టెంట్, జి.పా.స్.పా., వేములకోటు, ప్రకాశం.

శ్రీ. పి.డి.ఎల్. గజపతి శర్మ, సూర్య్ అసిస్టెంట్, ప్ర.స్.పా., జమిస్తాన్ పుర్, మాటికేశ్వర్ నగర్, హైదరాబాద్.

శ్రీ. పి. అశోక్, హెడ్ మాస్టర్ జి.ప.స్.పా., కుమారి, ఆదిలాబాద్

విద్యావిషయక సహకారం అందించిన సభ్యులు

శ్రీమతి. నమిత బాత్రా, విద్యాభవన్ సానైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

శ్రీ. ఇందర్ మోహన్, విద్యాభవన్ సానైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

శ్రీ. యశ్వంత్కమార్ ధవే, విద్యాభవన్ సానైటి, రిసోర్స్ సెంటర్, ఉదయపూర్, రాజస్తాన్.

శ్రీమతి. పద్మప్రియ శిరాలి, కమ్యూనిటి మేధమేటిక్స్ సెంటర్, రుషివ్యాలి సూర్య్, చిత్తూర్.

కుమారి. ఎమ్. అర్చన, డిపార్ట్మెంట్ ఆఫ్ మేధమేటిక్స్ & స్టేటీస్టిక్స్, యూనివర్సిటీ ఆఫ్ హైదరాబాద్

శ్రీ. శరన్ గోపాల్, డిపార్ట్మెంట్ ఆఫ్ మేధమేటిక్స్ & స్టేటీస్టిక్స్, యూనివర్సిటీ ఆఫ్ హైదరాబాద్

శ్రీ. పి. చిరంజీవి, డిపార్ట్మెంట్ ఆఫ్ మేధమేటిక్స్ & స్టేటీస్టిక్స్, యూనివర్సిటీ ఆఫ్ హైదరాబాద్

శ్రీ. అబ్బరాజు కిశోర్, ఎస్.జి.టి, ఎమ్.పి.యుపిఎస్, చమత్కమాడి, గుంటూరు.

కవర్పేజ్ డిజెనింగ్

శ్రీ కె.సుధాకరాచారి, హెడ్ మాస్టర్, యు.పి.ఎస్.సీలికుర్, మం.మరిపెడ, జి.వరంగల్

ముందుమాట

పిల్లల పారశాల జీవితం వారిదైనందిన జీవితానికి ముడిపడి ఉండాలని రాష్ట్ర ప్రణాళిక పరిధి పత్రం – 2011 (SCF-2011) సూచిస్తున్నది. పారశాలలో చేరిన ప్రతీ విద్యార్థి ఆయా స్థాయిలలో ఆవశ్యక నైపుణ్యాలను సమపార్ించాలని విద్యాహక్కు వట్టం – 2009 నిర్దేశించింది. వీటి దృష్ట్యౌ, విద్యలో నాణ్యతను సాధించడం కోసం ప్రతి పార్శ్వ విషయంలోను విద్యా ప్రమాణాలను రూపొందించారు. జాతీయవిద్యా ప్రణాళిక చుట్టం 2005 మాళిక ఉద్దేశ్యం అమలు యొక్క ప్రాధాన్యతను దృష్టిలో ఉంచుకుని, రాష్ట్ర విద్యా ప్రణాళిక పరిధి పత్రం 2011 ఆధారంగా గణిత పార్శ్వ విషయ ప్రణాళిక మరియు పార్శ్వపుస్తకాలు రూపుద్దికున్నాయి.

పిల్లలు ప్రాథమిక విద్యను పూర్తిచేసుకొని, ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలోకి అడుగిడుతారు. ఈ స్థాయి సెకండరీ విద్యను కొనసాగించడానికి ప్రముఖమైన వారిధిగా ఉంటుంది. పిల్లలు స్నేచ్ఛగా పెద్దలతో, సామాగ్రితో, తోచీవారితో ప్రతిచర్యలు జరుపడం, వివిధ సన్నివేశాలల్లో ప్రక్రియల్లో పరస్పరం సహకరించుకుంటూ పాల్గొనే అవకాశం లభించడం మూలంగా, అన్యోపథతో నూతన జ్ఞానాన్ని నిర్మించుకోగలరని మనం గుర్తిస్తాం. పిల్లలు కేవలం నిప్పియాత్మక గ్రహితలుగా కాకుండా, అభ్యసనంలో భాగస్వాములు అని భావించినపుడు వారిలో సృజనాత్మకత, చొరవలను పెంపొందించడం సాధ్యమవుతుంది. పిల్లలు ఈ దశలో ఉత్సుకత, ఆసక్తి, ప్రశ్నించేతత్త్వం, హేతుబద్ధత, బుజుపులను కోరడం, సవాళ్ళను అంగీకరించడం వంటి లక్షణాలను కలిగి ఉంటారు. అందుచేత ఆనందదాయకంగా పిల్లలు వివిధ భావనలను అన్వేషించడానికి తమ సాంత్రైలిలో సమస్యా సాధనచేయడానికి వీలుగా గణితశాస్త్ర బోధనను అభివృద్ధి పరచాల్సిన ఆవశ్యకత ఉంది. అమూర్ఖస్వభావంతో ఉండే గణితంలోని భావనలను పిల్లలు అర్థం చేసుకొని, సాంతంగా గణిత జ్ఞానాన్ని నిర్మించుకొనే సామర్థ్యానికి తోడ్పడే విధానాలను అభివృద్ధి పరచే కార్యక్రమానికి మనం శ్రీకారం చుట్టాం.

గణితంలోని ప్రధాన విషయాలైన సంఖ్యావ్యవస్థ, అంకగణితం, బీజగణితం, రేఖాగణితం, క్షేత్రమితి మరియు సాంఖ్యక శాస్త్రాలను ప్రాథమికోన్నత స్థాయిలో చేర్చారు.

ఈ విషయాలకు సంబంధించిన అంశాలను బోధించడం వల్ల సమస్య పరిష్కారం, తార్కిక ఆలోచనలు, నిత్యానుష్టాత్మాలను గణిత భాషలో వ్యక్తికరించడం, సేకరించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడం, వివిధ రూపాల్లో పొందుపరచడం, నిత్యజీవితంలో గణితాన్ని ఉపయోగించడం వంటి నిర్దీశ విద్యా ప్రమాణాలు, నైపుణ్యాలు అభివృద్ధి చెందుతాయి. పుస్తకంలో పొందుపరచిన ఇవిచేయండి, ప్రయత్నించండి, ప్రకల్పనలు వంటి అంశాలకు అధిక ప్రాధాన్యత ఇచ్చి పిల్లలు సాంతంగా నేర్చుకునేలా చేయడానికి, జటలో ప్రయత్నించడానికి ఈ పార్శ్వపుస్తకం అవకాశం కల్పిస్తోంది.

ఈ పుస్తకం సరళమైన భాష, పదజాలం కలిగి వుండి పిల్లల మేధస్సు, గణిత భావాలను ఉపయోగించుకోవడానికి తద్వారా తామే స్వయంగా గణిత స్వరూపాలను ఏర్పరచుకోవడానికి అవకాశాలను కల్పిస్తుంది. పుస్తకంలో గల వివిధ ఉదాహరణలు పిల్లలు తమకు తామే సొంతంగా సమస్యలను తయారుచేసుకోవడానికి దోహదపడతాయి. వీటన్నింటినీ సాకారం చేయడానికి తరగతి గదిలో ఉపాధ్యాయులు అవసరమైన సందర్భాలను ఏర్పరచడం, సహాయ సహకారాలు అందించడం అత్యంత అవసరం. మూల్యాంకనం కూడా నేర్చుకోవడంలో భాగంగా పరిగణిస్తూ ప్రతీ అభ్యసన అంశాన్ని నిరంతర సమగ్ర మూల్యాంకనం ద్వారా అంచనా వేసే విధంగా అధ్యాయాలను పొందుపరిచారు.

దీన్ని రూపొందించడంలో విషయనిష్టాత్మలు, చాలాకాలంగా గణిత అభ్యసన, పరిశోధన, పుస్తక రచనలో అనుభవమున్న ఉపాధ్యాయులు పాల్గొన్నారు. వారంతా పిల్లల్లో గణితం పట్ల ఉన్న భయాలను తొలగించడానికి కృషి చేసారు. ఈ పుస్తకానికి తుదిరూపం ఇవ్వడానికి సహాయ సహకారాలందించిన జాతీయ సాంఘిక విషయాలలు, విశ్వవిద్యాలయాల ఆచార్యులు, పరిశోధక విద్యార్థులు, ప్రభుత్వాల సంస్థలు, విద్యార్థులు, ప్రధానోపాధ్యాయులు, రచయితలు, విద్యార్థులు, ముద్రణసంస్థ వారికి పుస్తకరూపకల్పన నిపుణులకు ప్రత్యేక కృతజ్ఞతలు. ఉపాధ్యాయలోకం, పుస్తకంలో పొందుపరచిన అంశాల ద్వారా విద్యా ప్రమాణాలను సాధించే క్రమంలో మనఃపూర్వక ప్రయత్నం చేస్తుందని ఆశిస్తున్నాను.

పుస్తకాభివృద్ధి నిరంతర ప్రకియ. అందరి కృషి ఫలితంగా ఈ పుస్తకం తయారైంది. రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ ఒక నిబధ్ధతతో కూడిన సంస్థగా ప్రయత్నిస్తూ వ్యవస్థాగత సంస్కరణలతో నాణ్యమైన పార్యపుస్తకాలను అందించడానికి కృషి చేస్తున్నది. ఇందులో భాగంగా గణితప్రియుల నుండి తగిన సలహాలు, సూచనలను ఆహ్వానిస్తున్నది. వీటిని పరిగణనలోకి తీసుకొని మరింత నాణ్యత కోసం కృషి చేస్తుంది.

తేది : 28-01-2012

ప్రైంట్ బాధీ

శ్రీమతి బి. శేఖర్ కుమారి

రాష్ట్ర విద్య, పరిశోధన, శిక్షణ సంస్థ

ప్రైంట్ బాధీ

PREAMBLE

THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a **SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC** and to secure to all its citizens:

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the unity and integrity of the Nation;

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949, do HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.

గణితం

7వ తరగతి

క్ర.సం.	విషయం	పూర్తిచేయాల్సిన కాలం	పుట సంఖ్య
1	పూర్తి సంఖ్యలు	జూన్	1-24
2	భీన్మలు, దశాంశాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు	జూలై	25-59
3	సామాన్య సమీకరణాలు	జూలై	60-69
4	రేఖలు - కోణములు	ఆగష్టు	70-87
5	త్రిభుజము ధర్మాలు	ఆగష్టు	88-109
6	నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు	సెప్టెంబర్	110-141
7	దత్తాంశ నిర్వహణ	సెప్టెంబర్	142-162
8	త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం	అక్టోబర్	163-181
9	త్రిభుజాల నిర్మాణాలు	నవంబర్	182-191
10	బీజియ సమాసాలు	నవంబర్	192-210
11	ఘూతాలు మరియు ఘూతాంకాలు	డిసెంబర్	211-226
12	చతుర్భుజాలు	డిసెంబర్	227-244
13	వైశాల్యం - చుట్టుకొలత	జనవరి	245-264
14	త్రిమితీయ మరియు ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన	ఫిబ్రవరి	265-276
15	సౌష్టవం	ఫిబ్రవరి	277-289
	పునర్వ్యవర్థక	మార్చి	

జాతీయ గీతం

- రవీంద్రనాథ్ రాగుర్

జనగణమన అధినాయక జయహో!
భారత భాగ్యవిధాతా!
పంజాబ, సింధ్, గుజరాత, మరాతా,
ద్రావిడ, ఉత్కృష్ట, వంగ!
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగ!
ఉచ్చల జలధి తరంగ!
తవ శుభనామే జాగే!
తవ శుభ ఆశిష మాంగే
గాహో తవ జయగాథ!
జనగణ మంగళదాయక జయహో!
భారత భాగ్య విధాతా!
జయహో! జయహో! జయహో!
జయ జయ జయ జయహో!!

ప్రతిజ్ఞ

- పైడిమురి వెంకట సుబ్బారావు

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరూ నా సహోదరులు.
నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశపు
వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్థత పొందడానికి సర్వదా నేను
కృషి చేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను
మర్యాదగా నడుచుకొంటాను. జంతువులపట్ల దయతో ఉంటాను.
నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను.
వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

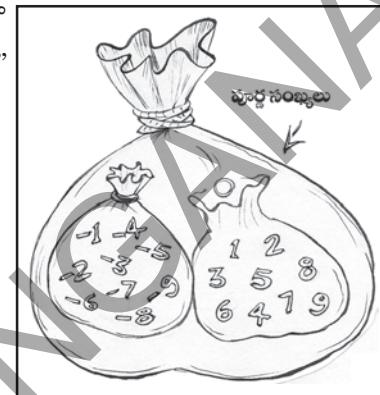
పూర్ణ సంఖ్యలు

1

1.0 పరిచయం

మన చుట్టూ ఉండే పరిసరాలలోని వస్తువులను 1, 2, 3 ... అంటూ లెక్కిస్తాం కదా! అలా లెక్కించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలను “సహజ సంఖ్యలు” లేదా లెక్కించే సంఖ్యలు అంటారు.

- (i) కనిష్ఠ సహజ సంఖ్య ఎంత?
- (ii) 100, 10000 ల మధ్య ఏవైనా ఐదు సహజ సంఖ్యలను తెలపండి.
- (iii) సహజ సంఖ్యల వరుసలో చివరి సంఖ్యను చెప్పగలరా?
- (iv) ఏవైనా రెండు వరుస సహజ సంఖ్యల మధ్య భేదమెంత?

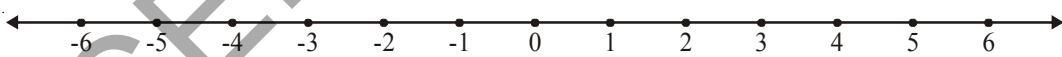


సహజ సంఖ్యలకు ‘0’ (పూర్ణము లేదా సున్నా) ను చేరిస్తే ఏర్పడే సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు అవుతాయి.

వాటిని పూర్ణాంకాలు అంటారు. అవి 0, 1, 2, 3, 4, ...

వె తరగతిలో బుఱ సంఖ్యల గురించి నేర్చుకొని ఉన్నాం. ఈ బుఱ సంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలను కలుపగా ఏర్పడే సంఖ్యలను ‘పూర్ణసంఖ్యలు’ అంటారు. ఈ అధ్యాయంలో మనమిషుడు పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను, పూర్ణసంఖ్యలతో వివిధ ప్రత్యేకించబడుతాయి.

మొదటగా పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యారేఖలైపై ఎలా చూపవచ్చే పరిశీలిద్దాం.

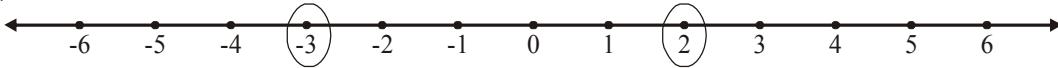


- (i) ఈ సంఖ్యారేఖలైపై ఉన్న సంఖ్యలలో గరిష్ట సంఖ్య ఏది?
- (ii) ఈ సంఖ్యారేఖలైపై ఉన్న సంఖ్యలలో కనిష్ఠ సంఖ్య ఏది?
- (iii) -3 కన్నా 1 పెద్దదేనా? ఎందుకు?
- (iv) -3 కన్నా -6 పెద్దదేనా? ఎందుకు?
- (v) $4, 6, -2, 0, -5$ లను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.
- (vi) 0, 1 మరియు $0, -1$, ల మధ్య భేదమెంతో సంఖ్యారేఖను పరిశీలించి పోల్చండి.

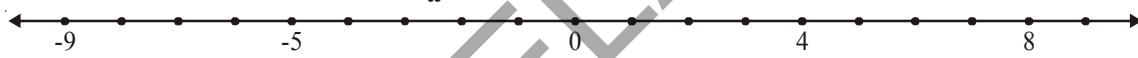


ಅಭ್ಯಾಸಂ - 1

1. కింది సంఖ్యల్లో '0' చుట్టుబడిన సంఖ్యలలో పెద్ద, చిన్న సంఖ్యలను రాయండి.



6. కింది సంఖ్యారేఖలై లోపించిన పూర్తి సంఖ్యలను రాయండి.



7. කිංද සංඛ්‍යා රේඛනු ඡායාදැනී. බාරතයේ ජන ලෝකී විවිධ ප්‍රාංශාලලෝකී නි පදු නගරාල ක්‍රියාශ්‍රම් ගුරුත්වා ඇත්තේ මෙයින් ප්‍රාංශාලලෝකී නි පදු නගරාල ක්‍රියාශ්‍රම් ගුරුත්වා ඇත්තේ මෙයින්



పై సంభ్యారేఖ ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.



- (i) గుర్తించబడిన నగరాల ఉప్పోస్తేగ్రతలు తెల్పండి.

(ii) ఏ నగరం యొక్క ఉప్పోస్తేగ్రత గరిష్టంగా ఉంది?

(iii) ఏ నగరం యొక్క ఉప్పోస్తేగ్రత కనిష్టంగా ఉంది?

(iv) ఎయ్యే నగరాల ఉప్పోస్తేగ్రతలు 0°C కన్నా తక్కువగా ఉన్నాయి?

(v) ఎయ్యే నగరాల ఉప్పోస్తేగ్రతలు 0°C కన్నా ఎక్కువగా ఉన్నాయి?

1.1 పూర్వసంభ్యలు - చతుర్భ్యద ప్రక్రియలు

1.1.1 పూర్ణసంఖ్యల సంకలనం

కింది సంకలనాలను పరిశీలించండి.

$$4 + 3 = 7$$

$$4 + 2 = 6$$

$$4 + 1 = 5$$

$$4 + 0 = 4$$

$$4 + (-1) = 3$$

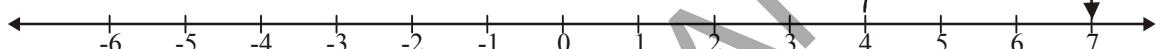
$$4 + (-2) = 2$$

$$4 + (-3) = 1$$



పై సంకలనాల అమరికలో ఉన్న ఏదైనా క్రమాన్ని గమనించారా? 4 తో కూడే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుతున్నప్పుడు $(3, 2, 1, 0, -1, -2, -3)$ ఫలితం కూడా క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గడం గమనించండి. దానిని సంఖ్యారేఖపై పరిశీలించాం.

4 నకు 3 కలిపినపుడు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపుకు 4 నుండి 3 స్థానాలు జరుగుతాం.



ఇదేవిధంగా 4 నకు $2, 1$ లను కలిపినపుడు ఏమిజరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు జరగడం మీరు గమనించవచ్చు.

ఇప్పుడు 4 కి -1 కలిపితే ఏమౌతుంది? పై సంకలనాల అమరిక నుండి $4 + (-1) = 3$ అని తెలుసు కావున సంఖ్యారేఖపై 1 స్థానం ఎడమవైపుకు జరగాలని అర్థమవుంది.



ఇదేవిధంగా 4 నకు $-2, -3$ లను కలిపినపుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకు జరగడం మీరు గమనించవచ్చు.

ఒక సంఖ్యకు ధన పూర్ణసంఖ్యను కలిపినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు, బుఱపూర్ణసంఖ్యను కలిపినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపునకు జరుగుతాము.



ప్రయత్నించండి.

1. $9 + 7 = 16$	$9 + 1 =$
$9 + 6 = 15$	$9 + 0 =$
$9 + 5 =$	$9 + (-1) =$
$9 + 4 =$	$9 + (-2) =$
$9 + 3 =$	$9 + (-3) =$
$9 + 2 =$	

- (i) $9 + 2, 9 + (-1), 9 + (-3), (-1) + (2)$ మరియు $(-5) - 5$ సంకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.
- (ii) ఒక సంఖ్యకు ధనవూర్ణసంఖ్యను సంకలనం చేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎటువైపు జరుగుతాం?
- (iii) ఒక సంఖ్యకు బుఱపూర్ణసంఖ్యను సంకలనం చేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎటువైపు జరుగుతాం?
2. ‘ఏ రెండు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తమైనా ఆ సంఖ్యలకన్నా ఎక్కువ’ అని సంగీత భావించింది. ఆమె భావన నత్యమేనా? నీ సమాధానాన్ని సమర్థించు కారణాలు రాయండి.



అభ్యసం - 2

1. కింది సంకలనాలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.
- (i) $5 + 7$ (ii) $5 + 2$ (iii) $5 + (-2)$ (iv) $5 + (-7)$
2. కింది వానిని గణించండి.
- (i) $7 + 4$ (ii) $8 + (-3)$ (iii) $11 + 3$
 (iv) $14 + (-6)$ (v) $9 + (-7)$ (vi) $14 + (-10)$
 (vii) $13 + (-15)$ (viii) $4 + (-4)$ (ix) $10 + (-2)$
 (x) $100 + (-80)$ (xi) $225 + (-145)$ (xii) $-5 + 7$
 (xiii) $(-15) - (1)$ (xiv) $(-5) + (-3)$

1.1.2. పూర్ణసంఖ్యల వ్యవకలనం

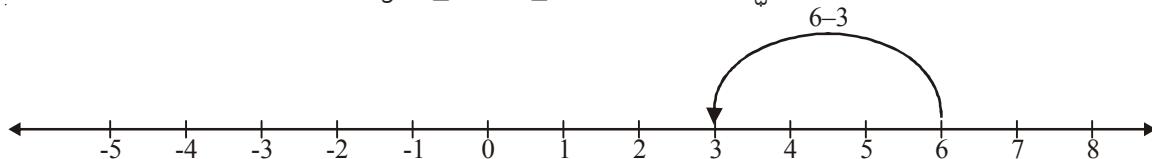
కింది వ్యవకలనాలను పరిశీలించండి.

$$\begin{aligned} 6 - 3 &= 3 \\ 6 - 2 &= 4 \\ 6 - 1 &= 5 \\ 6 - 0 &= 6 \\ 6 - (-1) &= 7 \\ 6 - (-2) &= 8 \\ 6 - (-3) &= 9 \\ 6 - (-4) &= 10 \end{aligned}$$



పై వ్యవకలనాల ఆమరికలో ఏదైనా క్రమాన్ని గమనించారా? 6 నుంచి వ్యవకలనం చేయబడు సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుతున్నప్పుడు ఫలితం క్రమంగా 1 చొప్పున పెరగడం గమనించండి. దీనిని సంఖ్యారేఖపై పరిశీలించాలి.

6 నుండి 3 ను తీసిపేయసపుడు సంఖ్యారేఖపై ఎదుమ వైపునకు 6 నుండి 3 స్థానాలు జరుగుతాం.



ఇదే విధంగా 6 నుండి 2, 1 లను వ్యవకలనం చేయడాన్ని సంఖ్యారేఖపై గుర్తించండి. ప్రతిసారి ఎడమవైపు జరగడాన్ని గమనించవచ్చు.

సంఖ్యారేఖపై 6 నుంచి -1 ని వ్యవకలనం చేయగా ఏమిజరుగుతుంది? పై వ్యవకలనాల అమరికల నుండి $6 - (-1) = 7$ అని తెలుస్తుంది. అందువల్ల సంఖ్యారేఖపై ఒకస్థానం కుడివైపుకు జరగాలని అర్థపైతుంది.



ఇదేవిధంగా 6 నుండి $-2, -3, -4$ లను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతీ సందర్భంలో కూడా సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు జరగడం గమనించవచ్చు.

ఒక సంఖ్యనుండి ధనవ్యాఖ్యానంభ్యాను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపునకు, బ్యాంపూర్ణసంఖ్యను వ్యవకలనం చేసినప్పుడు సంఖ్యారేఖపై కుడివైపునకు జరుగుతాం.



ప్రయత్నించండి.

$$1. \quad 8 - 6 = 2$$

$$8 - 5 = 3$$

$$8 - 4 =$$

$$8 - 3 =$$

$$8 - 2 =$$

$$8 - 1 =$$

$$8 - 0 =$$

$$8 - (-1) =$$

$$8 - (-2) =$$

$$8 - (-3) =$$

$$8 - (-4) =$$

(i) $8 - 6, 8 - 1, 8 - 0, 8 - (-2), 8 - (-4)$ లను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

(ii) ఒక సంఖ్యనుండి ధనవ్యాఖ్యానంభ్యాను తీసివేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై మీర్కెతే ఎటువైపు జరుగుతారు?

(iii) ఒక సంఖ్యనుండి బ్యాంపూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు సంఖ్యారేఖపై మీర్కెతే ఎటువైపు జరగుతారు?

2. ‘ఒక పూర్ణసంఖ్యనుండి మరొక పూర్ణసంఖ్యను తీసివేసినపుడు ఫలితం ఆ సంఖ్యలకన్నా చిన్నది’ అని రిచా భావించింది. ఆమె భావనతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? నీ జవాబును సమర్థించు కారణాలు రాయండి.



అభ్యాసం - 3

1. కింది వ్యవకలనాలను సంఖ్యారేఖపై నూచించండి. ఫలితాన్ని రాయండి.

$$(i) 7 - 2$$

$$(ii) 8 - (-7)$$

$$(iii) 3 - 7$$

$$(iv) 15 - 14$$

$$(v) 5 - (-8)$$

$$(vi) (-2) - (-1)$$

2. కింది వానిని గణించండి.

$$(i) 17 - (-14)$$

$$(ii) 13 - (-8)$$

$$(iii) 19 - (-5)$$

$$(iv) 15 - 28$$

$$(v) 25 - 33$$

$$(vi) 80 - (-50)$$

$$(vii) 150 - 75$$

$$(viii) 32 - (-18)$$

$$(ix) (-30) - (-25)$$

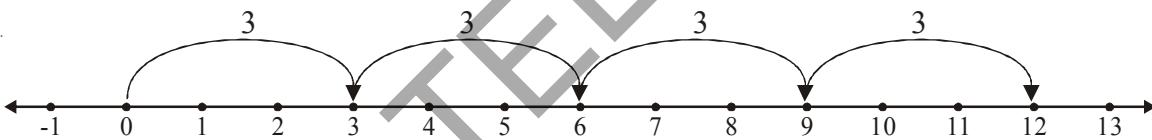
3. ‘-6’ ను బుఱాటుసంఖ్య, పూర్ణాంకాల మొత్తంగా రాయండి.

1.1.3 పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

పూర్ణ సంఖ్యల గుణకారం గురించి తెలుసుకొండాం!

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 \quad (4 \text{ మార్గ } 3) \text{ అని మనకు తెలుసు.}$$

దీనిని సంఖ్యారేఖపై కింది విధంగా నూచించవచ్చు.

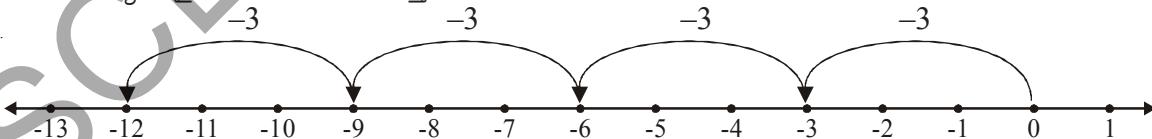


4×3 అనగా 0 నుండి ప్రారంభించి ఒక్కాక్కు సారికి 3 చొప్పున 4 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై కుదిపెపుకు జరుగగా $4 \times 3 = 12$ అవుతుంది.

మనమిప్పుడు $4 \times (-3)$ ను సంఖ్యారేఖపై ఎట్లు నూచించవచ్చే పరిశీలిద్దాం.

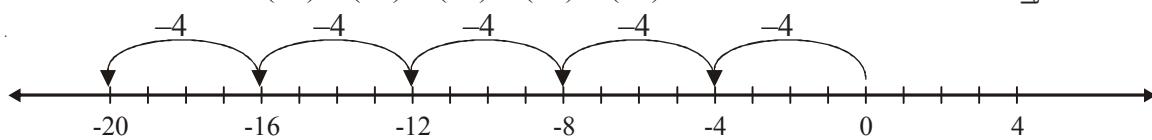
$$4 \times -3 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$$

దీనిని సంఖ్యారేఖపై కింది విధంగా నూచిస్తాం.



$4 \times (-3)$ అనగా 0 నుండి ప్రారంభించి 3 చొప్పున 4 గెంతులు సంఖ్యారేఖపై ఎడమపైపుకి జరుగగా $4 \times (-3) = -12$ అవుతుంది.

ఇదేవిధంగా $5 \times -4 = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$ దీనిని కింది విధంగా నూచిస్తాం.



$5 \times (-4)$ అనగా 4 చొప్పున 5 గెంతలు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపుకు జరుగగా $5 \times (-4) = -20$ అవుతుంది.

అట్టే $2 \times -5 = (-5) + (-5) = -10$

$$3 \times -6 = (-6) + (-6) + (-6) = -18$$

$$4 \times -8 = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -32$$

ఇవి చేయండి

1. కింది వానిని గణించండి.

(i) 2×-6 (ii) 5×-4 (iii) 9×-4

-4×3 ను గుణించాం!

కింది అమరికలోని క్రమాన్ని పరిశీలించండి.

$$4 \times 3 = 12$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$1 \times 3 = 3$$

$$0 \times 3 = 0$$

$$-1 \times 3 = -3$$

$$-2 \times 3 = -6$$

$$-3 \times 3 = -9$$

$$-4 \times 3 = -12$$

పై గుణకారాల అమరికలో గుణకము క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గేకాలది $(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4)$ లబ్బం క్రమంగా 3 చొప్పున తగ్గుతుందని గమనింపచ్చ.

ఈ క్రమంను అనుసరించి $-4 \times 3 = -12$ అని తెలుస్తుంది. కానీ $= 4 \times (-3) = -12$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $-4 \times 3 = 4 \times -3 = -12$

పై గుణకారాలలో బుఱి గుర్తు మారుతున్నప్పుడు ఫలితాన్ని గమనించండి. పై అమరికను ఉపయోగించి

$$4 \times (-5) = -4 \times 5 = -20$$

$$2 \times (-5) = -2 \times 5 = -10 \text{ అని రాయవచ్చు}$$

$$3 \times (-2) =$$

$$8 \times (-4) =$$

$$6 \times (-5) =$$

ఈ గుణకారాలను గమనించినపుడు ‘ఒక ధనవ్యాప్తసంఖ్య, ఒక బుఱివ్యాప్తసంఖ్యల లబ్బము ఎల్లప్పుడు బుఱివ్యాప్తసంఖ్య’ అవుతుంది.

1.1.3 (అ) రెండు బుణపూర్వసంఖ్యలతో గుణకారం

-3, -4 లను గుణిస్తే లబ్దం ఏమెయిస్తుందో చూద్దాం!

కింది గుణకారాల అమరికలోని క్రమాన్ని పరిశీలిద్దాం.

$$-3 \times 4 = -12$$

$$-3 \times 3 = -9$$

$$-3 \times 2 = -6$$

$$-3 \times 1 = -3$$

$$-3 \times 0 = 0$$

$$-3 \times -1 = 3$$

$$-3 \times -2 = 6$$

$$-3 \times -3 = 9$$

$$-3 \times -4 = 12$$

పై గుణకారాల్లో అమరికను గుర్తించారా? గుణించే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుకొలది (4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4) లబ్దం క్రమంగా 3 చొప్పున పెరుగుతున్నట్టుగా గమనించవచ్చును.

ఇప్పుడు $-4 \times (-3)$ ను గుణిద్దాం.

కింది గుణకారాల లబ్దాల అమరికను పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

$$-4 \times 4 = -16$$

$$-4 \times 3 = -12$$

$$-4 \times 2 = -8$$

$$-4 \times 1 = -4$$

$$-4 \times 0 = 0$$

$$-4 \times -1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-4 \times -2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-4 \times -3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

పైగుణకారాల అమరికలో గుణించే సంఖ్యలు క్రమంగా 1 చొప్పున తగ్గుకొలది లబ్దం క్రమంగా 4 చొప్పున పెరుగుతుంది.

పై రెండు గుణకార అమరికల నుండి $-3 \times (-4) = -4 \times (-3) = 12$

ఇదే విధంగా

$$\begin{array}{ll} -3 \times (-1) = 3 & -4 \times (-1) = 4 \\ -3 \times (-2) = 6 & -4 \times (-2) = 8 \\ -3 \times (-3) = 9 & -4 \times (-3) = 12 \end{array}$$

అందుచేత, ప్రతి సందర్భంలో కూడా రెండు బుఱ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్దం ధనపూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.

కృత్యం 1

కింది పట్టికలో మొదటి నిలువు వరుసలో ప్రతి సంఖ్యను, మొదటి అడ్డవరుసలోని ప్రతి సంఖ్యచే గుణిస్తూ పట్టికయు పూరించండి.

\times	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	9	6	3	0	-3	-6	-9
2	6	4	2	0			
1							
0							
-1	-3	-2	-1	0	1	2	3
-2							
-3							



- (i) రెండు ధనపూర్ణ సంఖ్యల లబ్దం ఎల్లపుడు ధన పూర్ణ సంఖ్యనా?
- (ii) రెండు బుఱ పూర్ణసంఖ్యల లబ్దం ఎల్లపుడు ధన పూర్ణ సంఖ్యనా?
- (iii) ఒక బుఱ పూర్ణసంఖ్య, ఒక ధన పూర్ణసంఖ్యల లబ్దం ఎల్లపుడు బుఱ సంఖ్యయేనా?

1.1.3 (ఆ) రెండుకన్నా ఎక్కువ బుఱపూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

రెండు బుఱపూర్ణసంఖ్యల లబ్దం ధనపూర్ణ సంఖ్య అని తెలుసుకొన్నాం. ఇప్పుడు మూడు, బుఱ పూర్ణసంఖ్యల లబ్దాలు ఏమోతాయి? అలాగే నాలుగు ...

కింది వాటిని గమనించండి.

- (i) $(-2) \times (-3) = 6$
- (ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$
- (iii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-3) \times (-4)] \times (-5) = (-24) \times (-5) = 120$
- (iv) $[(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)] \times (-6) = 120 \times (-6) = -720$

పై లబ్దాల నుండి ఏవీ అంశాలను మనం గమనించవచ్చు.

- (i) రెండు బుణపూర్ణసంఖ్యల లబ్దం ధనపూర్ణసంఖ్య
- (ii) మూడు బుణపూర్ణసంఖ్యల లబ్దం బుణపూర్ణసంఖ్య.
- (iii) నాలుగు బుణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్దం ధనపూర్ణ సంఖ్య.
- (iv) ఐదు బుణపూర్ణసంఖ్యల లబ్దం బుణపూర్ణసంఖ్య

ఇలాగే ఆరు బుణపూర్ణసంఖ్యల లబ్దం ధనపూర్ణ సంఖ్యనా? లేక బుణపూర్ణ సంఖ్యనా? కారణం తెల్పుండి.



ప్రయత్నించండి.

- అ) $(-1) \times (-1) = \text{_____}$
- అ) $(-1) \times (-1) \times (-1) = \text{_____}$
- ఇ) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \text{_____}$
- ఈ) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \text{_____}$

పై వాటిని పరిశీలిస్తే (అ) మరియు (ఇ) గుణకారాలలో గుణించాలిన బుణ పూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య సరిపర్యాయములు ఉంటే వాటి లబ్దం ధనపూర్ణ సంఖ్య అయినది. (అ) మరియు (ఈ) గుణకారాలలో బుణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య ‘బేసి సంఖ్య’ గుణించాలిన బుణపూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య బేసి పర్యాయములలో ఉంటే వాటి లబ్దం బుణపూర్ణ సంఖ్య అయినది.

కాబట్టి, గుణకారాలలో బుణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య ‘సరిసంఖ్య’ ఇతే లబ్దం ధనపూర్ణసంఖ్య. అట్లే బుణపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య బేసి సంఖ్య ఇతే లబ్దం బుణపూర్ణ సంఖ్య.

అభ్యాసం - 4



1. శాలను పూరించండి.

- (i) $-100 \times -6 = \text{.....}$
- (ii) $-3 \times \text{.....} = 3$
- (iii) $100 \times (-6) = \text{.....}$
- (iv) $-20 \times (-10) = \text{.....}$
- (v) $15 \times (-3) = \text{.....}$

2. కింది వాటికి లబ్దాలను కనుగొనండి.

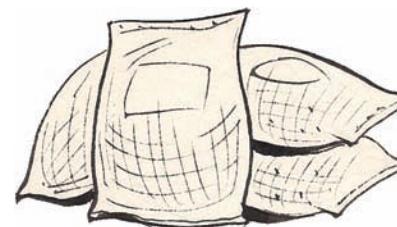
 - $3 \times (-1)$
 - $(-1) \times 225$
 - $(-21) \times (-30)$
 - $(-316) \times (-1)$
 - $(-15) \times 0 \times (-18)$
 - $(-12) \times (-11) \times (10)$
 - $9 \times (-3) \times (-6)$
 - $(-18) \times (-5) \times (-4)$
 - $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$
 - $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

3. శీతలీకరణ ద్వారా 40°C వద్ద గల గది ఉప్పేగ్రథమ ప్రతి గంటకు 5°C చొప్పున చల్లబరచ (తగ్గించ) బదుతుంది. శీతలీకరణం ప్రారంభించిన 10 గంటల తరువాత గది ఉప్పేగ్రత ఎంత ఉంటుంది?

4. ఒక తరగతికి పరీక్షలో 10 ప్రత్యులు ఇవ్వబడినవి. పరీక్షలో రాయబడిన సరైన జవాబుకు ‘3’ మార్కులు, సరిగాని జవాబుకు (-1) మార్కు జవాబు రాయనిచో ‘0’ మార్కులు కేటాయించడం జరిగినది.

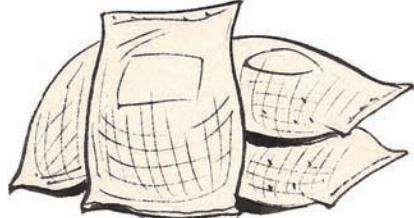
 - గోపి రాసిన జవాబులలో 5 సరైనవి, 5 తప్పయిన, అతనికి వచ్చిన మొత్తం మార్కులన్నీ?
 - రేపు రాసిన 10 జవాబులలో 7 సరైనచో ఆమె పొందిన మార్కులన్నీ?
 - రశ్మి రాసిన 7 జవాబులలో 4 తప్పు 3 సరైనచో ఆమె పొందిన మార్కులన్నీ?

5. ఒక వర్తకడు బియ్యం అమ్మడం ద్వారా ప్రతి బస్తా బాసుమతి బియ్యం పై ₹ 10 లాభం. బాసుమతి కానీ బియ్యం పై ₹ 5 నష్టాన్ని పొందుతున్నాడు.


 - ఒక నెలలో వర్తకడు 3,000 బస్తాలు బాసుమతి బియ్యం, 5,000 బస్తాలు బాసుమతి కానీ బియ్యం అమ్మాడు. లాభమా? నష్టమా? ఎంతో తెలుపండి.
 - బాసుమతి కానీ బియ్యం 6,400 బస్తాలు అమ్మినపుడు లాభంకానీ, నష్టం కానీ రాకుండా ఉండాలంటే ఎన్ని బస్తాలు బాసుమతి బియ్యం అమ్మాలి?

6. ఖాళీలను పూరించండి.

 - $(-3) \times \underline{\hspace{2cm}} = 27$
 - $5 \times \underline{\hspace{2cm}} = -35$
 - $\underline{\hspace{2cm}} \times (-8) = -56$
 - $\underline{\hspace{2cm}} \times (-12) = 132$



1.1.4 పూర్వసంఖ్యల భాగహరం

భాగవీరం, గుణకారంనకు విలోప ప్రక్రియ అని మనకు తెలుసు. సహజ సంఖ్యలలో భాగవీర ప్రక్రియకు చెందిన మరికొన్ని ఉదాహరణలు పరిశీలిదాం.



$3 \times 5 = 15$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $15 \div 5 = 3$ లేక $15 \div 3 = 5$

ఇదే విధంగా $4 \times 3 = 12$

కావున $12 \div 4 = 3$, $12 \div 3 = 4$ అవుతుంది.

అంటే సహజ సంఖ్యలలో ప్రతి గుణకారానికి రెండు భాగహరి వాక్యాలు ఉంటాయని చెప్పావచ్చు.

పూర్ణసంఖ్యలలో కూడా ప్రతి గుణకార వాక్యానికి రెండు భాగహరి వాక్యాలు రాయవచ్చు.

కింది పట్టికలో ఉన్న గుణకార, భాగహరాలను పరిశీలించి మిగిలిన భాషీలను పూరించండి.

గుణకార వాక్యాలు	భాగహరి వాక్యాలు
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$, $(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$, $(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div (-8) = (-9)$, $72 \div (-9) = (-8)$
$(-3) \times (-7) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}} \div (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\underline{\hspace{2cm}} \div \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
$(-8) \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}$
$5 \times (-9) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}$
$(-10) \times (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$	$\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}}$

పై పట్టిక నుండి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఒక ధనపూర్ణసంఖ్యను బుఱపూర్ణసంఖ్యచేగాని, ఒక బుఱపూర్ణసంఖ్యను ధనపూర్ణసంఖ్యచే గాని భాగించినపుడు భాగఫలం ఒక బుఱసంఖ్య పూర్ణంకాలను భాగించునట్టే భాగించి, బుఱ గుర్తు నుంచుతాము. అలా భాగఫలం బుఱ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది. ఇంకా ఏమి గమనించావు?

ఇవి చేయండి

1. కింది వాటిని చేయండి.

- (i) $(-100) \div 5$ (ii) $(-81) \div 9$ (iii) $(-75) \div 5$ (iv) $(-32) \div 2$
 (v) $125 \div (-25)$ (vi) $80 \div (-5)$ (vii) $64 \div (-16)$



ప్రయత్నించండి.

$(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$ అవుతుందా?

ఈ కింద నీయబడినవి సత్యమేనా? తెలుపండి.

- (i) $90 \div (-45) = (-90) \div 45$ (ii) $(-136) \div 4 = 136 \div (-4)$

కింద భాగహరాలను కూడా గమనించండి

$(-12) \div (-6) = 2$; $(-20) \div (-4) = 5$; $(-32) \div (-8) = 4$; $(-45) \div (-9) = 5$

కావున ఒక బుఱపూర్ణసంఖ్యను మరొక బుఱపూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం ఒక ధన సంఖ్య వస్తుందని చెప్పావచ్చు.

ఇవి చేయండి

1. కింది భాగాహాలను చేయండి.

(i) $-36 \div (-4)$ (ii) $(-201) \div (-3)$ (iii) $(-325) \div (-13)$



1.2 పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు

వె తరగతిలో పూర్ణాంకాల $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ధర్మాలు గురించి నేర్చుకొన్నాం. ఈ తరగతిలో $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ పూర్ణసంఖ్యల యొక్క ధర్మాలు గురించి చర్చించాం.

1.2.1 పూర్ణసంఖ్యలలో సంకలన ధర్మాలు

(i) సంవృత ధర్మం

కింది పట్టికలో సంకలనాలను పరిశీలించి పూరించండి.

ప్రవచనం	సారాంశం
$5 + 8 = 13$	మొత్తం ఒక పూర్ణాంకం
$6 + 3 =$	
$13 + 5 =$	
$10 + 2 =$	
$2 + 6 = 8$	మొత్తం ఒక పూర్ణాంకము

రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తం ఎల్లప్పుడు పూర్ణాంకమే అవుతుందా? ఇది సత్యమని మీరు గ్రహించగలరు. కావున పూర్ణాంకాల సంకలనంకు సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

అయితే పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంనకు కూడా సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుందా లేదా? కింది పట్టికలో సంకలనాలు పరిశీలించి పూరించండి.

ప్రవచనం	సారాంశం
$6 + 3 = 9$	మొత్తం ఒక పూర్ణసంఖ్య
$-10 + 2 =$	
$-3 + 0 =$	
$-5 + 6 = 1$	
$(-2) + (-3) = -5$	
$7 + (-6) =$	మొత్తం ఒక పూర్ణసంఖ్య

రెండు పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుందా?

రెండు పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం పూర్ణసంఖ్య కానీ ఉడాహరణ చెప్పగలవా? ఇది అసాధ్యం. కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనాలకు కూడా సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

a మరియు b, లు ఏమైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలను $a + b$ కూడా పూర్ణసంఖ్య.

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం (వినిమయాయం)

కింది ఉదాహరణలను గమనించి పూరించండి.

ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$4 + 3 = 7$	$3 + 4 = 7$	$4 + 3 = 3 + 4 = 7$
$3 + 5 =$	$5 + 3 =$	
$3 + 1 =$	$1 + 3 =$	

రెండు పూర్ణాంకాలను కూడి క్రమంలో సంబులను పరస్పరం మార్చినపుడు వాటి మొత్తాలలో ఏమైనా తేడా ఉందా? తేడా ఉండే పూర్ణాంకాల కూడిక జతలను రాయలేము. కావున పూర్ణాంకాల సంకలనాలకు స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

కింది ఉదాహరణలను గమనించి పూరించండి.

ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$5 + (-6) = -1$	$(-6) + 5 = -1$	$5 + (-6) = (-6) + 5 = -1$
$-9 + 2 =$	$2 + (-9) =$	
$-4 + (-5) =$	$(-5) + (-4) =$	

రెండు పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంలో వాటి క్రమంను పరస్పరం మార్చినపుడు వాటి మొత్తాలలో ఏమైనా తేడా ఉందా? తేడా ఉండే పూర్ణసంఖ్యల జతలను రాయలేము. కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనంలో స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

$$a \text{ మరియు } b \text{ లు ఏమైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలు ఈన } a + b = b + a$$

(iii) సహచర ధర్మం

కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

(i) $\begin{aligned} (2 + 3) + 4 &= 2 + (3 + 4) \\ &= 5 + 4 \\ &= 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= 2 + 7 \\ &= 9 \end{aligned}$
(ii) $\begin{aligned} (-2 + 3) + 5 &= -2 + (3 + 5) \\ &= 1 + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= -2 + 8 \\ &= 6 \end{aligned}$
(iii) $\begin{aligned} (-2 + 3) + (-5) &= (-2) + [3 + (-5)] \\ &= 1 + (-5) \\ &= -4 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= (-2) + (-2) \\ &= -4 \end{aligned}$
(iv) $\begin{aligned} [(-2) + (-3)] + (-5) &= -2 + [(-3) + (-5)] \\ &= -5 + (-5) \\ &= -10 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &= -2 + (-8) \\ &= -10 \end{aligned}$

ప్రతి సందర్భంలో సంకలనాల మొత్తాలు సమానమేనా? ఇది సత్యమని గ్రహిస్తాం. కావున పూర్ణసంఖ్యల సంకలనాలకు సహచర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

a, b మరియు c లు ఏమైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలైన $(a + b) + c = a + (b + c)$



ప్రయత్నించండి.

1. కింది వాటిని సత్యాలో, కాదో పరీక్షించండి.

$$(i) \quad (2 + 5) + 4 = 2 + (5 + 4)$$

$$(ii) \quad (2 + 0) + 4 = 2 + (0 + 4)$$

2. పూర్ణాంకాల సంకలనాలకు సహచరధర్మం వర్తిస్తుందా? మరో రెండు ఉదాహరణలతో వివరించండి.

(iv) సంకలన తత్త్వమాంశం

కింది సంకలనాలను పరిశీలించండి.

$$-2 + 0 = -2$$

$$5 + 0 = 5$$

$$8 + 0 =$$

$$-10 + 0 =$$

పూర్ణసంఖ్యకు ‘0’ ను కూడితే అదే పూర్ణ సంఖ్య వస్తుందా? ఫలితం అదే పూర్ణ సంఖ్య.

కావున ‘0’ ను పూర్ణసంఖ్యలకు సంకలన తత్త్వమాంశం అంటారు.

a ఏమైనా పూర్ణసంఖ్య ఐన $a+0 = 0 + a = a$



ప్రయత్నించండి.

1. కింది గణనలను చేయండి.

$$(i) \quad 2 + 0 =$$

$$(ii) \quad 0 + 3 =$$

$$(iii) \quad 5 + 0 =$$

2. పై ఉదాహరణలలో మాదిరి మరిన్ని పూర్ణాంకాలకు ‘0’ ను కూడండి.

పూర్ణాంకాలకు కూడా ‘0’ సంకలన తత్త్వమాంశమేనా?

(v) సంకలన విలోపం

3 నకు ఏ పూర్ణసంఖ్యను కూడగా ఘలితం సంకలన తత్త్వమాంశం ‘0’ అవుతుంది?

కింది వాటిని పరిశీలించాం.

$$3 + (-3) = 0$$

$$7 + (-7) = 0$$

$$(-10) + 10 = 0$$

పై విధంగా అన్నిపూర్ణసంఖ్యలకు ఇలాంటి జతలను ఏర్పరచగలమా?

పై జతలలో ప్రతీ సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యకు సంకలన విలోపం అంటారు.

‘a’ ఒక పూర్ణసంఖ్య అంఱన $a + (-a) = 0$. అగునట్లుగా $(-a)$ అను పూర్ణసంఖ్య ఉంటుంది.

‘a’ మరియు $(-a)$ లు ఒకదానికొకటి సంకలన విలోపాలు.

1.2.2 పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారధర్మాలు

(i) సంపృత ధర్మం

కింది గుణకారాలను పరిశీలించి పూరించండి.

ప్రవచనం	సారాంశం
$9 \times 8 = 72$	లబ్దం ఒక పూర్ణసంఖ్యయే
$10 \times 0 =$	
$-15 \times 2 =$	
$-15 \times 3 = -45$	
$-11 \times (-8) =$	
$10 \times 10 =$	
$5 \times (-3) =$	

రెండు పూర్ణసంఖ్యల లబ్దం పూర్ణసంఖ్య కానటువంటి పూర్ణసంఖ్యల జతలను రాయగలవా? వీటిని రాయడం సాధ్యం కాదు. కావున పూర్ణసంఖ్యలలో గుణకారాలకు సంపృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయిన $a \times b$ కూడా పూర్ణసంఖ్యయే.



ప్రయత్నించండి.

1. (i) $2 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

(ii) $5 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

(iii) $3 \times 6 = \underline{\hspace{2cm}}$

(iv) అదే విధంగా ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాలను గుణించగా వచ్చు
లభిం ఎల్లప్పుడూ పూర్ణాంకమేనా?

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

పూర్ణాంకాలలో గుణకారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుందని తెలుసుకదా. పూర్ణసంఖ్యలకు కూడా ఈ ధర్మం ఉందా?

ప్రవచనం 1	ప్రవచనం 2	సారాంశం
$5 \times (-2) = -10$	$(-2) \times 5 = -10$	$5 \times (-2) = (-2) \times 5 = -10$
$(-3) \times 6 =$	$6 \times (-3) =$	
$-20 \times 10 =$	$10 \times (-20) =$	

ప్రశ్నలన్నీ ఇది సత్యం. రెండు పూర్ణసంఖ్యల లభిం పూర్ణసంఖ్య కాకుండా ఉండే ఉదాహరణ చెప్పండి.
సాధ్యం కాదు. కావున పూర్ణసంఖ్యల గుణకారానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది.

a మరియు b లు ఏవైనా రెండు పూర్ణసంఖ్యలైన $a \times b = b \times a$

(iii) సహచర ధర్మం

2, -3, -4 లతో గుణకారాలను చేధ్యాం.

పీటిని కింది విధాలుగా గుణించాం.

$$\begin{aligned} & [2 \times (-3)] \times (-4) && 2 \times [(-3) \times (-4)] \\ &= (-6) \times (-4) && = 2 \times 12 \\ &= 24 && = 24 \end{aligned}$$

మొదటి సందర్భంలో మొదటి రెండు పూర్ణసంఖ్యల లభింను మూడవ సంఖ్యతో గుణించడం జరిగింది, రెండవ సందర్భంలో చివరి రెండు పూర్ణసంఖ్యల లభింను మొదటి సంఖ్యతో గుణించడం జరిగింది. ఈ రెండు సందర్భాలలో కూడా చివరగా లభిం సమానమే.

అందుచేత $[2 \times (-3)] \times [(-4)] = 2 \times [(-3) \times (-4)]$

ప్రశ్నలన్నీ ఇది సత్యం. పూర్ణసంఖ్యలు గుణించినపుడు లభించు పూర్ణసంఖ్యలై ఏలాంటి ప్రభావం చూపదు.
కావున పూర్ణసంఖ్యలలో సహచర ధర్మం వర్తిస్తుంది. మూడు పూర్ణసంఖ్యల లభిం అనునది పూర్ణసంఖ్యలు గుణించడంపై ఆధారపడదు.

a, b, c లు ఏవైనా మూడు పూర్ణసంఖ్యలు ఈన $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

ఇవి చేయండి.

1. $[(-5) \times 2] \times 3 = (-5) \times [2 \times 3]$ అవుతుందా?
2. $[(-2) \times 6] \times (-4) = (-2) \times [6 \times -4]$ అవుతుందా?



ప్రయత్నించండి.

$$1. (5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3)$$

2. పూర్కాంకాలలో గుణకారానికి సహచరధర్మం వర్తిస్తుందా? మరికొన్ని ఉదాహరణలతో సరిచూడండి.

(iv) విభాగ న్యాయం

$$9 \times (10 + 2) = (9 \times 10) + (9 \times 2) \text{ అని మనకు తెలుసు.}$$

అందుచే, పూర్కాంకాలలో గుణకారం సంకలనంపై విభాగన్యాయం పాటిస్తుందనడం సత్యం.

కావున పూర్కాంకాలకు కూడ ఈ ధర్మం ఉండా పరిశీలిద్దాం.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad -2 \times (1 + 3) &= [(-2) \times 1] + [(-2) \times 3] \\ -2 \times 4 &= -2 + (-6) \\ -8 &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad -1 \times [3 + (-5)] &= [(-1) \times 3] + [(-1) \times (-5)] \\ -1 \times (-2) &= -3 + (+5) \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

$$-3 \times (-4+2) = [(-3) \times (-4)] + [-3 \times (2)] \text{ ను సరిచూడండి.}$$



పై రెండు సందర్భాలలో ఎదుమవైపు ఉన్న విలువ. కుడివైపు ఉన్న విలువకు నమానం.

కావున పూర్కాంకాలలో గుణకారం సంకలనంపై విభాగన్యాయం పాటిస్తుంది.

$$\boxed{\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ మరియు } \mathbf{c}, \text{లు ఏవైనా మూడు పూర్కాంకాలు లు ఐన } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}}$$

(v) గుణకార తత్త్వమాంశం

కింది గుణకారాలను పరిశీలించి, భారీలను పూరించండి.

$$\begin{aligned} 2 \times 1 &= 2 \\ -5 \times 1 &= -5 \\ -3 \times 1 &= \underline{\hspace{2cm}} \\ -8 \times 1 &= \underline{\hspace{2cm}} \\ 1 \times -5 &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

పూర్కాంకాలలో గుణకార తత్త్వమాంశము ‘1’

పై ఉదాహరణలను ఒక్కటి పూర్కాంకాను 1తో గుణించినపుడు పూర్కాంకాలో ఎటువంటి మార్పులేదు.

కావున 1 ని పూర్కాంకాలలో గుణకార తత్త్వమాంశం అంటారు.

$$\boxed{\mathbf{‘a’ ఒక పూర్కాంకాన్యా అయిన } \mathbf{a} \times 1 = 1 \times a = a}$$

(vi) ० (సున్న) తో గుణకారం

ఏ పూర్ణాంకానైనా ‘0’ తో గుణించినపుడు, వాని లభిం కూడా సున్న అవుతుంది.

అయితే పూర్ణసంఖ్యల విషయంలో ఇది సత్యమా? పరిశీలించండి.

$$(-3) \times 0 = 0$$

$$0 \times (-8) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$9 \times 0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ఐ వాటిని పరిశీలించినపుడు పూర్ణసంఖ్య, సున్నాల లభిం సున్నాయే.

$$\boxed{a, ఏదయిన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన a \times 0 = 0 \times a = 0}$$



అభ్యాసం - 5

1. కింది వానిని సరిచూడండి.

$$(i) 18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$$

$$(ii) (-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$$

2. (i) a, ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $(-1) \times a$ యొక్క విలువ ఎంతపుతుంది?

(ii) (-1) ఏ పూర్ణసంఖ్యయొక్క లభ్యము 5 అగును.

3. నదైన ధర్మాలను ఉపయోగించి కింది వానిని గణన చేయండి.

$$(i) 26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$$

$$(ii) 8 \times 53 \times (-125)$$

$$(iii) 15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$$

$$(iv) (-41) \times 102$$

$$(v) 625 \times (-35) + (-625) \times 65$$

$$(vi) 7 \times (50 - 2)$$

$$(vii) (-17) \times (-29)$$

$$(viii) (-57) \times (-19) + 57$$

1.2.3 పూర్ణసంఖ్యలలో వ్యవకలన ధర్మాలు

(i) సంవృత ధర్మం

కింది ఒక పూర్ణ సంఖ్య నుండి మరొక పూర్ణ సంఖ్యను తీసివేసిన ఎల్లప్పుడు పూర్ణసంఖ్యనే వస్తుందా? వీటిని చేయండి.

$$9 - 7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7 - 10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2 - 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2 - 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2 - (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0 - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ఎమి గమనించారు? పూర్ణ సంఖ్యలలో వ్యవకలనానికి సంవృతధర్మం వర్తిస్తుందని చెప్పవచ్చునా?

$$\boxed{a మరియు b, లు ఏవైనా పూర్ణసంఖ్యలైన a - b కూడా పూర్ణసంఖ్యాయే.}$$

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

ఈక ఉదాహరణ పరిశీలించాం!

$6, -4$ పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకుందాం.

$$6 - (-4) = 6 + 4 = 10 \quad \text{మరియు}$$

$$-4 - (6) = -4 - 6 = -10$$

$$\text{అనగా } 6 - (-4) \neq -4 - (6)$$

పూర్ణసంఖ్యలలో వ్యవకలనానికి స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తించదు.



ప్రయత్నించండి.

ఏవైనా ఐదు జతల పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొని స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

1.2.4 పూర్ణసంఖ్యల భాగహర ధర్మాలు

(i) సంవృత ధర్మం

కింది పట్టికను పరిశీలించి, పూరించండి.

ప్రపచనం	సారాంశం	ప్రపచనం	సారాంశం
$(-8) \div (-4) = 2$	ఫలితం పూర్ణసంఖ్య	$(-8) \div 4 = \frac{-8}{4} = -2$	
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$	ఫలితం పూర్ణసంఖ్య కాదు	$4 \div (-8) = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}$	

పట్టిక నుంచి ఏమి గమనించారు? పూర్ణసంఖ్యలలో భాగహరానికి సంవృత ధర్మం వర్తించదు.



ప్రయత్నించండి.

ఏవైనా ఐదు పూర్ణసంఖ్యల జతలను తీసుకొని భాగహరాలలో సంవృత ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

(ii) స్థిత్యంతర ధర్మం

పూర్ణాంకాలలో భాగహరానికి స్థిత్యంతర ధర్మం లేదు. పూర్ణసంఖ్యలలో ఈ ధర్మాన్ని పరిశీలించాం. పట్టికలోని ఉదాహరణ ఆధారంగా $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ అని తెలియుచున్నది.

ఇంకనూ $(-9) \div 3, 3 \div (-9)$ లు సమానమేనా?

$(-30) \div (-6), (-6) \div (-30)$ లు సమానమేనా?

అందుచే, పూర్ణసంఖ్యలలో భాగహరంనకు స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తించదు.



ప్రయత్నించండి.

ఏవైనా ఐదు పూర్ణ సంఖ్యల జతలను తీసుకొని భాగహరంలో స్థిత్యంతర ధర్మంను సరిచూడండి.

(iii) సున్నతో భాగపోరం

ఒక దానిని రెండు భాగములు, మూడు భాగములు... చేయవచ్చును. కానీ సున్న భాగములుగా విభజించడం అనేది అర్థం లేనిది. సున్నను శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలే భాగించగా భాగఫలం ‘0’ అవుతుంది.

a, ఒక పూర్ణసంఖ్య ఐన $a \div 0$ నిర్వచింపబడదు. a ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య ఐన $0 \div a = 0$

(iv) -1 తో భాగపోరం

కింది భాగపోరాలను పరిశీలించి, పూరించండి.

$$(-8) \div 1 = -8 \quad (-11) \div 1 = -11 \quad (-13) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}} \quad (-25) \div 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

పై ఉదాహరణలనుండి ఒక ధన లేద బుఱ పూర్ణసంఖ్యను 1 చే భాగించగా ఘలితం అదే పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది. కానీ -1 చే భాగించగా ధనపూర్ణసంఖ్య బుఱపూర్ణసంఖ్యగా, బుఱపూర్ణసంఖ్య ధనపూర్ణసంఖ్యగా మారుతుంది.

a, ఏదైన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \div 1 = a$.

ఏవైన ఒకపూర్ణసంఖ్యను (-1) చే భాగిస్తే ఏమెన్నుంది. కింది వాటిని చేసి తెల్పండి.

$$(-8) \div (-1) = 8 \quad 11 \div (-1) = -11 \quad 13 \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (-25) \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్యను (-1) చే భాగించునపుడు ఘలితం అదే పూర్ణసంఖ్య కాదు. అని తెలుస్తుంది.



ప్రయత్నించండి

1. a, ఏదైన ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన

$$(i) a \div 1 = 1$$

$$(ii) a \div (-1) = -a$$

‘ఎ’కు వేరువేరు విలువలు చేసుకొని సరిచూడండి.

(v) సహచర ధర్మం

-16, 4, -2 పూర్ణసంఖ్యలను తీసుకొంటే

$$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-16) \div [4 \div (-2)] \text{ అగునా?}$$

$$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$$

$$(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$$

అందుకే $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

కనుక పూర్ణసంఖ్యలలో భాగపోరానికి సహచర ధర్మం వర్తించదు.



ప్రయత్నించండి.

ఎవైనా ఐదు ఉదాహరణలను తీసుకొని పూర్ణసంఖ్యలలో భాగపోరానికి సహచర ధర్మాన్ని సరిచూడండి.



అభ్యాసం - 6

1. కంది భాళీలను పూరించండి.

- (i) $-25 \div \dots = 25$
- (ii) $\dots \div 1 = -49$
- (iii) $50 \div 0 = \dots$
- (iv) $0 \div 1 = \dots$

1.3 బుఱి పూర్తసంఖ్యలపై కొన్ని సమస్యలు

ఉదాహరణ 1 : ఒక పరీక్షలో ప్రతి సరైన జవాబుకు (+5) మార్కులు. తప్పు జవాబుకు (-2) ఇవ్వబడ్డాయి.

- (i) రాధిక అన్ని ప్రత్యులకు జవాబులు రాయగా 10 సరైనవి. 30 మార్కులు పొందింది.
- (ii) జయ కూడా అన్ని ప్రత్యులకు జవాబులు రాయగా, 4 సరైనవి కానీ, (-12) మార్కులు పొందినది. ఐన పరీక్షలలో రాధిక, జయులు ఎన్ని ప్రత్యులకు తప్పు జవాబులు రాశారు?

సాధన :

$$\begin{aligned}
 & \text{(i) ఒక్కాక్కు సరైన జవాబుకు మార్కులు} & = 5 \\
 & 10 \text{ సరైన జవాబులకు మొత్తం మార్కులు} & = 5 \times 10 = 50 \\
 & \text{రాధికకు వచ్చిన మార్కులు} & = 30 \\
 & \text{తప్పు జవాబులకు ఇవ్వబడిన మార్కులు} & = 30 - 50 = -20 \\
 & \text{ఒక్కాక్కు తప్పు జవాబుకు మార్కులు} & = (-2) \\
 & \text{కాబట్టి రాధిక తప్పు జవాబుల సంఖ్య} & = (-20) \div (-2) = 10 \\
 & \text{(ii) } 4 \text{ సరైన జవాబులకు మార్కులు} & = 5 \times 4 = 20 \\
 & \text{జయకు వచ్చిన మార్కులు} & = -12 \\
 & \text{తప్పు జవాబులకు ఇవ్వబడిన మార్కులు} & = -12 - 20 = -32 \\
 & \text{ఒక్కాక్కు తప్పు జవాబుకు మార్కులు} & = (-2) \\
 & \text{కాబట్టి జయ తప్పు జవాబుల సంఖ్య} & = (-32) \div (-2) = 16
 \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 2 : ఒక దుకాణాదారుడు ఒక్కాక్కు పెన్సు అమృదం వలన ₹ 1 లాభాన్ని ఒక్కాక్కు పాత పెన్సిలు అమృదం వలన 40 పైనల నష్టాన్ని పొందుతున్నాడు.



- (i) ₹ 5. నష్టం పొందిన నెలలో అమృన పెన్సుల సంఖ్య 45 ఐన ఎన్ని పెన్సిల్లు అమృనాడు?
- (ii) తరువాత నెలలో ఎటువంటి లాభం గాని నష్టం గాని లేదు. 70 పెన్సులను అమృంటే, ఎన్ని పెన్సిల్లు అమృనాడు?

సాధన :

$$\begin{aligned}
 & \text{(i) ఒక్కాక్కు పెన్సు అమృకం వలన లాభం ₹ 1} \\
 & 45 \text{ పెన్సుల అమృకం వలన లాభం} = 1 \times 45, \text{ అనగా ₹ 45} \\
 & \text{మొత్తం నష్టము} = ₹ 5, \text{ అనగా } -5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{పెన్సులపై లాభం} + \text{పెన్సీళ్లపై నష్టం} = \text{మొత్తం నష్టం} \quad (\text{ఈ సమస్యలో}) \\
 & \text{కాబట్టి పెన్సీళ్లపై నష్టం} = \text{మొత్తం నష్టం} - \text{పెన్సులపై లాభం} \\
 & = -5 - (45) = (-50) = -\text{₹ } 50 = -5000 \text{ పైసలు} \\
 & \text{ఒక్కొక్క పెన్సిలుపై నష్టము} = 40 \text{ పై. అనగా } -40 \text{ పైసలు} \\
 & \text{కాబట్టి అమ్మిన పెన్సీళ్ల సంఖ్య} = (-5000) \div (-40) = 125 \text{ పెన్సీళ్లు} \\
 & \text{(ii) తరువాత నెలలో 70 పెన్సులపై పొందిన లాభం} = 1 \times 70 = \text{₹ } 70 \text{ అనగా } +70 \\
 & \text{పొందిన మొత్తం లాభం} = 0 \\
 & \text{పెన్సులపై లాభం} + \text{పెన్సీళ్లపై నష్టం} = 0. \\
 & 70 \text{ పెన్సుల అమ్మకం పై వచ్చిన లాభం} = \text{₹ } 70 \\
 & \text{పెన్సీళ్లపై నష్టం} = -70 \text{ అనగా } -7000 \text{ పైసలు} \\
 & \text{అమ్మిన పెన్సీళ్ల సంఖ్య} = (-7000) \div (-40) \\
 & = 175 \text{ పెన్సీళ్లు.}
 \end{aligned}$$



అభ్యాసం - 7

- ఒక తరగతికి ఇవ్వబడ్డ ప్రశ్నాపత్రంలో 15 ప్రశ్నలున్నాయి. ప్రతి సరైన జవాబుకు 4 మార్కులు, ప్రతి తప్ప జవాబుకు (-2) మార్కులు కేటాయిస్తారు. (i) భారతి అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు రాస్తే 9 మాత్రమే సరైనవి. (ii) ఆమె స్నేహితురాలు దీక్షిత 5 ప్రశ్నలకు సరైన జవాబులు రాయగా అన్ని సరైనవి. అయితే వారికి వచ్చిన మార్కులు ఎన్ని?
 - ఒక నెలలో 7000 బస్తాల తెల్ల సిమెంటు పై ₹ 9 లాభం, బూడిదరంగు సిమెంటుపై ₹ 5 నష్టం చొప్పున అమ్మింది.
 - (i) ఒక నెలలో 7000 బస్తాల తెల్ల సిమెంటు, 6000 బస్తాల బూడిద రంగు సిమెంటు అమ్మినట్లయిన ఆ నెలలో పొందిన లాభమా లేదా నష్టమా ఎంత?
 - (ii) 5400 బస్తాల బూడిద రంగు సిమెంటు అమ్మిన నెలలో ఎటువంటి లాభం కానీ నష్టం కానీ రాని పక్షంలో ఎన్ని బస్తాల తెల్ల సిమెంటు అమ్మి ఉండాలి.
- శ్రీనగర్ నందు మధ్యాహ్నం 12 గంటల సమయంలో ఉప్పోగ్రత 10° C అని గుర్తించబడినది. ప్రతి గంటకు 2°C చొప్పున ఉప్పోగ్రత తగ్గుతూ ఉంటే (i) ఎన్ని గంటల సమయంలో ఉప్పోగ్రత 0° C కన్నా 8°C తక్కువగా ఉంటుంది? (ii) అర్ధరాత్రి 12 గంటల సమయంలో ఉప్పోగ్రత ఎంత ఉంటుంది?
- ఒక పరీక్షలో ప్రతి సరైన జవాబుకు (+3) మార్కులు, తప్ప జవాబుకు (-2) మార్కులు, జవాబు రాయకపోతే 0 మార్కులు కేటాయించబడ్డాయి. (i) రాధిక రాసిన జవాబులలో 12 సరైనవి అప్పుడు ఆమె మార్కులు 20 ఐ ఆమె రాసిన తప్ప జవాబులెన్ని? (ii) మోహినికి (-5) మార్కులు వచ్చినవి. ఆమె రాసిన జవాబులలో 7 ఒప్పు జవాబులు ఐన సరికాని జవాబులెన్ని?
- ఒక గనిలో ఏర్పాటు చేయబడిన ఎలివేటరు నిమిషానికి 6 మీ. వేగంతో కిందికి దిగుతుంది. భూమట్టం కన్నా 10 మీ. ఎత్తునుండి బయలు దేరిన ఎలివేటరు -350 మీ. వరకు ప్రయాణించుటకు ఎంత సమయం పడుతుంది.



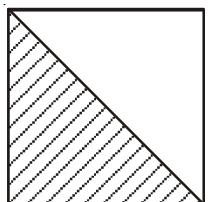
మనం నేర్చుకున్నవి

- సహజ సంఖ్యలు $N = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$
 పూర్ణాంకములు $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$
 పూర్ణసంఖ్యలు $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$
 $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$ అని కూడా రాశ్తారు.
 - (i) సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యకు ధనపూర్ణసంఖ్యను కూడినపుడు కుడివైపుకు, బుఱిపూర్ణసంఖ్యను కూడినపుడు ఎడమ వైపుకు జరుగుతారు.
 - సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యనుండి ధనపూర్ణసంఖ్యను తీసివేస్తే ఎడమ వైపుకు, బుఱిపూర్ణసంఖ్యను తీసివేస్తే కుడివైపునకు జరుగుతారు.
 - (i) ధనపూర్ణసంఖ్యను బుఱిపూర్ణసంఖ్యచే లేక బుఱిపూర్ణసంఖ్యను ధనపూర్ణ సంఖ్యచే గుణించగా లభిం బుఱిపూర్ణసంఖ్య.
(ii) రెండు బుఱిపూర్ణసంఖ్యల లభిం ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య.
(iii) ఒక గుణకారం నందలి బుఱిపూర్ణసంఖ్యల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయిన లభిం ధనపూర్ణసంఖ్య. అట్లే బుఱిపూర్ణ సంఖ్యల సంఖ్య బేసిసంఖ్య అయిన లభిం బుఱిపూర్ణ సంఖ్య అగును.
 - (i) ధనపూర్ణసంఖ్య బుఱిపూర్ణసంఖ్యచే గానీ లేక బుఱిపూర్ణ సంఖ్య ధనపూర్ణ సంఖ్యచే గానీ భాగింపబడినపుడు భాగఫలం బుఱిసంఖ్య.
(ii) ఒక బుఱిపూర్ణసంఖ్యను మరొక బుఱిపూర్ణ సంఖ్యచే భాగించగా భాగఫలం ధనసంఖ్య.
(iii) ఒకే గుర్తు గల రెండు పూర్ణ సంఖ్యలను గుణించినా లేదా భాగించినా ఫలితం ధన సంఖ్య. వేర్పేరు గుర్తుతుంచే బుఱి సంఖ్య.
 - పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలు
- | ధర్మం | సంకలనం(+) | వ్యవకలనం(-) | గుణకారం(\times) | భాగపోరం (\div) |
|------------------|-----------|-------------|---------------------|--------------------|
| సంపృత ధర్మం | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| శ్చిత్యంతర ధర్మం | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ |
| సహచర ధర్మం | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ |
| తత్ప్రమాంశం | ✓ | - | ✓ | - |
| విలోపం | ✓ | - | ✗ | - |
- పూర్ణసంఖ్యలందు గుణకారం సంకలనం పై విభాగిస్తుంది. a, b, c , పూర్ణ సంఖ్యలు ఐన
 $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$
 - (i) a ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $a \div 0$ నిర్వచింపబడదు.
(ii) a ఒక శూన్యతర పూర్ణసంఖ్య అయిన $0 \div a = 0$
(iii) $a \div 1 = a$

2.0 పరిచయం

భిన్నాలను ఉపయోగించి అనేక నిత్యజీవిత సమస్యలు సాధించడం మనకు తెలుసు. క్రమ, అప్కర్మ భిన్నాలను ఏ విధంగా గుర్తించాలో, వాటి సంకలన వ్యవకలనాలు ఎలా చేయాలో కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం. మనం వాటిని మరొకసారి పునశ్చరణ చేసుకొని భిన్నాల గుణకారం, భాగపోరం నేర్చుకోవడంతో పాటు దశాంశ భిన్నాలను గురించి కూడా తెలుసుకుండాం. అదే విధంగా అకరణీయ సంబూలను పరిచయం చేసుకుండాం.

దిగువనిష్టబడిన పటులలో రంగుల భాగాలు భిన్నాలలో సూచింపబడ్డాయి. ఇందులో ఏ భాగాలు సరైనవే తెల్పండి.



పటం 1

$$\frac{1}{2}$$

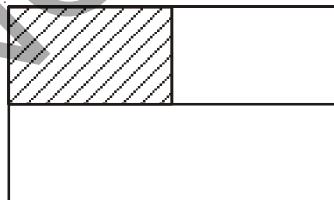
అవును/కాదు



పటం 2

$$\frac{1}{2}$$

అవును/కాదు



పటం 3

$$\frac{1}{3}$$

అవును/కాదు

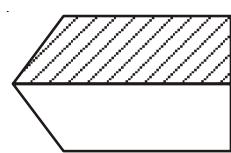
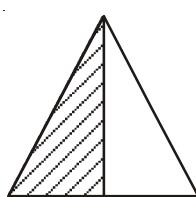
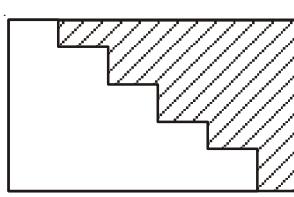
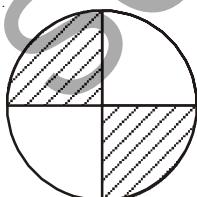
కారణం :

కారణం :

కారణం :

పై పటులను పరిశీలించే క్రమంలో సమానభాగాలు గల పటులను గుర్తించే ఉంటారు. అటువంటి ఐదు ఉడాహరణలను రాశి నీ స్నేహితులకు ఇచ్చి, సరిచూడమనండి.

‘సేపక్’ $\frac{1}{2}$ ను వివిధ పటులలో కింద ఏ విధంగా చూపిందో గమనించండి.



అన్ని పటులలో పేడ్ చేసిన భాగాలు ఆ పటులలో $\frac{1}{2}$ ను సూచిస్తాయని నీవు భావిస్తున్నావా? పేడ్ చేయిని

భాగం ఏ భిన్నాన్ని సూచిస్తుంది.



ప్రయత్నించండి

వివిధ రకాల పటాలు గేని, వాటిలో $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ భిన్నాలను షైఫ్ చేయండి. వీటిని నీవు ఏ విధంగా సూచించావో నీ స్నేహితులతో పరిశీలింపజేసి, సరిమాడండి.

క్రమ, అపక్రమ భిన్నాలు

మీరు గతంలో క్రమ, అపక్రమ భిన్నాల గూర్చి తెలుసుకున్నారు. క్రమభిన్నం అనేది మొత్తంలో ఒక భాగంగా గుర్తించాం.

క్రమ భిన్నాలకు ఐదు ఉదాహరణ లిప్పండి.

$\frac{3}{2}$ అనేది క్రమభిన్నమా? ఇది క్రమ భిన్నం అవునో, కాదో ఏ విధంగా సరిచూస్తావు?

అపక్రమ భిన్నంలో లవం, హోరం కన్నా ఎక్కువగా ఉంటుంది. ప్రతి అపక్రమ భిన్నాన్ని ఒక మిక్రమ భిన్నంగా రాయవచ్చి. ఉదాహరణకు $\frac{3}{2}$ అనే అపక్రమ భిన్నాన్ని $1\frac{1}{2}$ అని రాయవచ్చి. ఇది ఒక మిక్రమ భిన్నం. ఇందులో పూర్ణాంకభాగం, భిన్న భాగాలు ఉంటాయి. భిన్న భాగం తప్పనిసరిగా క్రమభిన్నమవుతుంది.

ఇవి చేయండి

- క్రమ, అపక్రమ, మిక్రమభిన్నాలకు ఏవేని ఐదు చొప్పున ఉదాహరణలు రాయండి.



ప్రయత్నించండి.

$2\frac{1}{4}$ భిన్నాన్ని పటాలలో చూపండి. దీనిని చూపడానికి ఎన్ని యూనిట్ పటాలు అవసరం?

భిన్నాల పోలిక

సజాతి భిన్నాలను ఏ విధంగా పోల్చారో జ్ఞాప్తికి తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ భిన్నాలలో $\frac{3}{5}$ పెద్దది. ఎలా?

అదే విధంగా రెండు విజాతి భిన్నాలను ఏ విధంగా పోల్చారో జ్ఞాప్తికి తెచ్చుకోండి. ఉదాహరణకు $\frac{5}{7}$ మరియు $\frac{3}{4}$ లను తీసుకోండి.

$\frac{5}{7}, \frac{3}{4}$ లను సజాతిభిన్నలుగా మార్చి పోల్చుదాం.

$$\frac{5}{7} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{28}, \quad \text{అలాగే } \frac{3}{4} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{28}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{20}{28} \text{ మరియు } \frac{3}{4} = \frac{21}{28} \text{ ల నుండి } \frac{20}{28} < \frac{21}{28}$$

కావున $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ అయినది

ఇవి చేయండి

1. $\frac{3}{5}$ మరియు $\frac{4}{7}$ భిన్నాలకు ఐదేసి సమానభిన్నాలను రాయండి.
2. $\frac{5}{8}, \frac{3}{5}$ లలో ఏది పెద్దది?
3. కింది జతల భిన్నాలను సూక్ష్మరూపంలో రాసి, ఏ జతలు సమానమో తెలుపండి.
 - (i) $\frac{3}{8}, \frac{375}{1000}$
 - (ii) $\frac{18}{54}, \frac{23}{69}$
 - (iii) $\frac{6}{10}, \frac{600}{1000}$
 - (iv) $\frac{17}{27}, \frac{25}{45}$

ఇప్పుడు మనం కొన్ని సమస్యలు సాధించాం.

ఉదా 1 : రజియా ఇంటి పనిలో $\frac{3}{7}$ భాగం పూర్తిచేసింది. రేఖ $\frac{4}{9}$ భాగం పూర్తి చేసింది. ఎవరు తక్కువ భాగం ఇంటి పని పూర్తి చేసారు?

సాధన : సమస్య సాధనకు $\frac{3}{7}$ ను $\frac{4}{9}$ తో పోల్చాలి

ఈ భిన్నాలను సజ్ఞాతి భిన్నాలుగా మార్చిన

$$\frac{3}{7} = \frac{27}{63}; \quad \frac{4}{9} = \frac{28}{63} \text{ అగును. ఇచ్చట } \frac{27}{63} < \frac{28}{63} \text{ కావున}$$

$$\frac{3}{7} < \frac{4}{9} \text{ అవుతుంది.}$$

దీనిని బట్టి రజియా తక్కువ భాగం ఇంటిపని పూర్తి చేసిందని చెప్పవచ్చు.

ఉదా 2 : ఒక నెలలో శంకర్ కుటుంబం $3\frac{1}{2}$ కి.గ్రా పంచదారను పక్కం రోజులలో వాడారు. మిగిలిన రోజులకు

$3\frac{3}{4}$ కి.గ్రా పంచదార వాడారు. అయిన ఆ నెలలో వారు వాడిన మొత్తం పంచదార ఎంత?

సాధన : నెలలో వాడిన పంచదార మొత్తం బరువు

$$= \left(3\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} \right) \text{కి.గ్రా}$$

$$= \left(\frac{7}{2} + \frac{15}{4} \right) \text{కి.గ్రా} = \left(\frac{7 \times 2}{2 \times 2} + \frac{15}{4} \right) \text{కి.గ్రా} = \left(\frac{14}{4} + \frac{15}{4} \right) \text{కి.గ్రా}$$

$$= \frac{29}{4} \text{ కి.గ్రా} = 7\frac{1}{4} \text{ కి.గ్రా}$$

ఉదా 3 : అహ్వాద్ పుట్టినరోజున కోసిన కేకులో $\frac{5}{7}$ భాగం పంచాదు. ఇంకా ఎంత భాగం కేకు మిగిలి ఉంది?

సాధన : మొత్తం కేకు = 1 లేదా $\frac{1}{1}$

$$\text{పంచిన కేకు భాగం} = \frac{5}{7}$$

$$\text{మిగిలిన కేకు భాగం} = \frac{1}{1} - \frac{5}{7}$$

$$= \frac{1 \times 7}{1 \times 7} - \frac{5}{7}$$

$$= \frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{7-5}{7} = \frac{2}{7}$$

అందువే మొత్తం కేకులో $\frac{2}{7}$ భాగం ఇంకా మిగిలి ఉంది.

అభ్యాసం - 1

1. కింది వానిని సాధించండి.

(i) $2 + \frac{3}{4}$

(ii) $\frac{7}{9} + \frac{1}{3}$

(iii) $1 - \frac{4}{7}$

(iv) $2\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

(v) $\frac{5}{8} + \frac{1}{6}$

(vi) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$

2. కింది భిన్నాలను ఆరోహణ క్రమంలో ఉంచండి.

(i) $\frac{5}{8}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}$

(ii) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}$

3. కింది చదరంలో అడ్డ వరుసలు, నిలువు వరుసలు మరియు కర్ణల వరుసలలో గల భిన్నాల మొత్తం కనుగొనండి వాటి మొత్తం సమానం అయినదో లేదో తెల్పండి.

$\frac{6}{13}$	$\frac{13}{13}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{11}{13}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$

4. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం పొడవు $5\frac{2}{3}$ సె.మీ మరియు వెడల్పు $3\frac{1}{5}$ సె.మీ కలదు. దీని చుట్టూకొలతను కనుగొనండి.
5. ఒక వంటకానికి $3\frac{1}{4}$ కప్పుల పిండి అవసరం. రాధ వద్ద $1\frac{3}{8}$ కప్పుల పిండి కలదు. ఆ వంటకానికి ఇంకనూ కావల్సిన పిండి ఎంత?
6. అబ్బల్ వార్షిక పరీక్షలకు సన్నద్ధం అవుతున్నాడు. అతడు కోర్చులో $\frac{5}{12}$ భాగం పూర్తిచేసాడు. ఇంకా చదవాల్సిన కోర్చు భాగం ఎంత?
7. ప్రక్రష్టంలో (i) ΔABE (ii) దీర్ఘచతురస్రం $BCDE$ ల యొక్క చుట్టూకొలతను కనుగొనండి. దీని చుట్టూకొలత ఎక్కువ? ఎంత ఎక్కువ?

2.1 భిన్నాల గుణకారం

2.1.1 భిన్నాన్ని పూర్ణాంకం చే గుణించుట

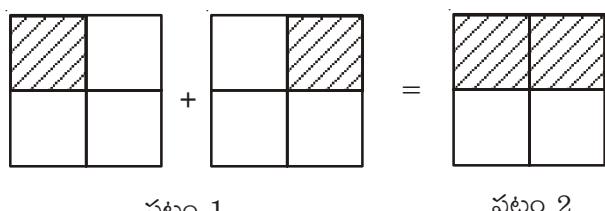
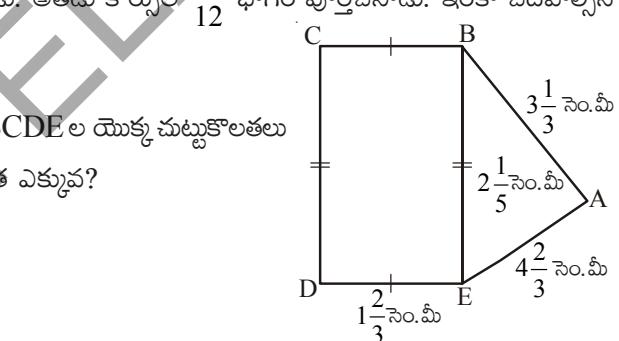
మనం పూర్ణాంకాల గుణకారంలో ఒక సంఖ్యను ఆవర్తన సంకలనం చేయటం ద్వారా లభిం కనుగొంటాం. ఉదాహరణకు 5×4 అనగా 5 మార్లు 4 లను కూడటం. అంటే 4 కు 5 రెట్లు. దీనిని బట్టి మనం

$2 \times \frac{1}{4}$ అంటే 2 మార్లు $\frac{1}{4}$ అనగా $\frac{1}{4}$ అనే భిన్నాన్ని 2 సార్లు కూడటం. దీనిని పటాల ద్వారా సూచించాం. కింది పటాలలో 1 వ దానిని చూడండి. పేడ్ చేసిన ప్రతి

భాగం చతురస్రంలో $\frac{1}{4}$ వ వంతు. అందుచే రెండు

$$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

అగును



ఇప్పుడు $3, \frac{1}{2}$ ల లబ్బిం కనుగొందాం. దీనిని మనం $\frac{1}{2}$ యొక్క 3 రెట్లు లేదా మూడు అరభాగాలు అనవచ్చు.

అందుచే $3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ అగును.

ఇవి చేయండి

1. కనుగొనండి (i) $4 \times \frac{2}{7}$ (ii) $4 \times \frac{3}{5}$ (iii) $7 \times \frac{1}{3}$



జంత వరకు మనం క్రమభిన్నాలను తీసుకొని అంటే $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ మరియు $\frac{3}{5}$ లను పూర్ణాంకంతో గుణకారం చేసాం. ఇప్పుడు కొన్ని అప్క్రమభిన్నాలను తీసుకుందాం. ఉదా : $\frac{5}{3}$

ఉదాహరణకు $2 \times \frac{5}{3}$ తీసుకొనిన

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

పట్టాలతో సూచించిన



$$\frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ అగును}$$

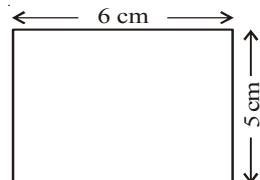


ప్రయుషించండి

1. కనుగొనండి (i) $5 \times \frac{3}{2}$ (ii) $4 \times \frac{7}{5}$ (iii) $5 \times \frac{3}{2}$

దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యం, పొడవు \times వెడల్పుకు సమానమని మనకు తెలుసు.

ఈక దీర్ఘచతురప్రం పొడవు 6 సె.మీ, వెడల్పు 5 సె.మీ అనుకోందాం. దాని వైశాల్యం ఎంత? దాని వైశాల్యం $6 \times 5 = 30$ చ.సె.మీ. అవుతుంది కదా!

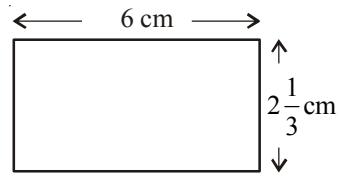


మరొక దీర్ఘచతురప్రం కొలతలు 6 సె.మీ $2\frac{1}{3}$ సె.మీ అయితే, దాని వైశాల్యం ఎంత?

ఇచ్చట ఒక పూర్ణాంకంను, మిశ్రమ భిన్నంచే గుణించాలి. మొదట మిశ్రమ భిన్నాన్ని, అప్క్రమ భిన్నంగా మార్చి తర్వాత పూర్ణాంకంచే గుణించాలి.

$$\text{అందుచే దీర్ఘవర్తులప్ర వైశాల్యం} = 6 \times 2\frac{1}{3}$$

$$6 \times \frac{7}{3} = \frac{6 \times 7}{3} = \frac{42}{3} \text{ చ.సెం.మీ.} = 14 \text{ చ.సెం.మీ.}$$



మనం క్రమ, అపక్రమ భిన్నాలను పూర్ణాంకాలతో గుణించునప్పుడు భిన్నంలో గల లవంను పూర్ణాంకంతో గుణించి, దానిని లబ్ధింలో లవం గానూ, భిన్నంలో హరంను లబ్ధింలో హరం గానూ రాశామని గమనించవచ్చు.

ఇది చేయండి

1. కింది వానిని కనుగొనడి

$$(i) 3 \times 2\frac{2}{7} \quad (ii) 5 \times 2\frac{1}{3} \quad (iii) 8 \times 4\frac{1}{7} \quad (iv) 4 \times 1\frac{2}{9} \quad (v) 5 \times 1\frac{1}{3}$$

$$2. 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \text{ అనే లబ్ధాన్ని పటంలో చూపండి.}$$



ఇప్పుడు $\frac{1}{2} \times 5$ అంటే అర్థమేమి? నీవు ఎలా అర్థం చేసుకొంటావు?

$\frac{1}{2} \times 5$ అనగా 5 లో సగం అని అర్థం

5లో సగం తీసుకొంటే అది $2\frac{1}{2}$ లేదా $\frac{5}{2}$ అగును

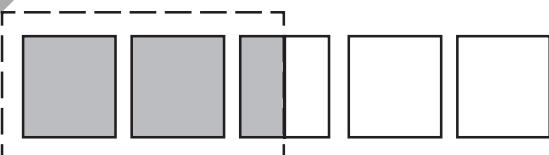
$$\text{అందుచే } 5\text{లో సగం} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$\text{ఆదే విధంగా } 3\text{లో సగం} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \text{ లేదా } 1\frac{1}{2}$$

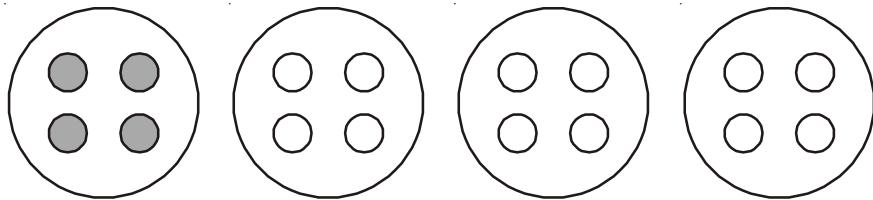
దీని నుండి ‘లో’ అనే పదం గుణకారాన్ని సూచిస్తుందని భావించవచ్చు.

అందుచే 16 లో $\frac{1}{4}$ భాగం అర్థమేమి? 16 పూర్ణాంకాలను 4 సమానభాగాలుగా చేసి దానిలో ఒక భాగం విలువ

తీసుకోవడం. అది 4 అవుతుంది కావున 16 లో $\frac{1}{4}$ భాగం 4 కు సమానం



ఈ లబ్బంను కింది పటంలో గోళీల అమరికతో గమనించవచ్చు.



$$16 \text{ లో } \frac{1}{4} \text{ భాగం} = 4 \quad \text{లేదా} \quad \frac{1}{4} \times 16 = \frac{16}{4} = 4$$

$$\text{ఆదే విధంగా మనకు} \quad 16 \text{ లో } \frac{1}{2} \text{ భాగం} = \frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8.$$

ఉదా 4 : నజియా వద్ద 20 గోళీలు ఉన్నాయి. రేష్ణ వద్ద నజియా వద్ద గల గోళీలలో $\frac{1}{5}$ భాగం ఉంటే, రేష్ణ వద్ద ఎన్న గోళీలు ఉంటాయి?

సాధన : రేష్ణ వద్ద గల గోళీల సంఖ్య $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ గోళీలు

ఉదా 5 : నలుగురు సభ్యులు గల కుటుంబంలో రోజుకు 15 చపాతీలు తింటారు. తల్లి $\frac{1}{5}$ భాగం, $\frac{3}{5}$ భాగం పిల్లలు, మిగిలిన చపాతీలు తండ్రి తిన్నారు. అయిన

- (i) తల్లి తిన్న చపాతీలు ఎన్ని?
- (ii) పిల్లలు తిన్న చపాతీలు ఎన్ని?
- (iii) తండ్రి తిన్న చపాతీలు మొత్తంలో ఎంతభాగం?

సాధన : మొత్తం చపాతీల సంఖ్య $= 15$

$$(i) \text{ తల్లి తిన్న చపాతీల సంఖ్య} = \text{మొత్తంలో } \frac{1}{5} \text{ భాగం} = \frac{1}{5} \times 15 = 3 \text{ చపాతీలు}$$

$$(ii) \text{ పిల్లలు తిన్న చపాతీల సంఖ్య} = \text{మొత్తంలో } \frac{3}{5} \text{ భాగం} = \frac{3}{5} \times 15 = 9 \text{ చపాతీలు}$$

$$(iii) \text{ మిగిలిన చపాతీలు} = 15 - 3 - 9 = 3 \text{ చపాతీలు}$$

$$\text{తండ్రి తిన్న చపాతీల భాగం} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$



అభ్యాసం - 2

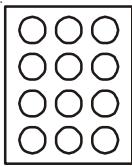
1. కింది వాటిని గుణించండి. లభ్యాన్ని మిక్రమ భిన్నంగా మార్చి రాయండి.

$$(i) \frac{3}{6} \times 10 \quad (ii) \frac{1}{3} \times 4 \quad (iii) \frac{6}{7} \times 2 \quad (iv) \frac{2}{9} \times 5 \quad (v) 15 \times \frac{2}{5}$$

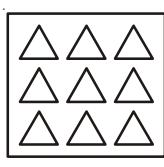
2. కింది పటాలలో ఇచ్చిన భాగాన్ని షేడ్ చేయండి.

$$(i) \text{పటం 'a' లోని వృత్తాలలో } \frac{1}{2} \text{ భాగం} \quad (ii) \text{పటం 'b' లోని త్రిభుజాలలో } \frac{2}{3} \text{ భాగం}$$

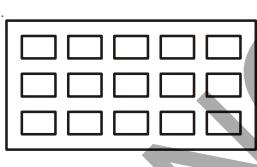
$$(iii) \text{పటం 'c' లోని దీర్ఘవరులపొలాలలో } \frac{3}{5} \text{ భాగం} \quad (iv) \text{పటం 'd' లోని వృత్తాలలో } \frac{3}{4} \text{ భాగం}$$



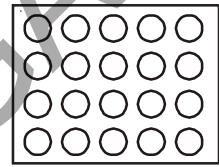
(a)



(b)



(c)



(d)

3. కనుగొనండి. (i) $12 \text{లో } \frac{1}{3} \text{ భాగం}$ (ii) $15 \text{లో } \frac{2}{5} \text{ భాగం}$

2.1.2 భిన్నాన్ని, మరొక భిన్నంతో గుణించడం

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ అంటే అర్థమేమి? ముందు నేర్చుకున్న సమస్యలను బట్టి దీని అర్థం $\frac{1}{4}$ లో $\frac{1}{2}$ అని అర్థము.

$\frac{1}{4}$ భాగాన్ని తీసుకొండి

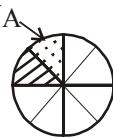


షేడ్ చేసిన భాగంలో $\frac{1}{2}$ భాగాన్ని ఎలా కనుగొంటారు? మనం $\left(\frac{1}{4}\right)$ వ వంతు గల షేడ్ చేసిన భాగాన్ని



రెండు సమాన భాగాలుగా చేస్తాం. (1వ పటం) ఇందు ప్రతిభాగం $\frac{1}{4}$ లో $\frac{1}{2}$ ను తెలుపుతుంది.

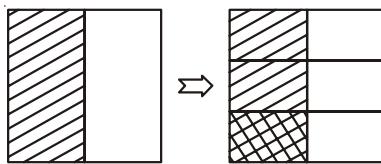
ఇందులో ఒక భాగాన్ని 'A' అనుకుందాం. ఈ భాగం మొత్తం పటంలో ఎన్నపడు భాగం? మిగిలిన వృత్తభాగంలో ప్రతీ భాగాన్ని రెండేసి సమాన భాగాలు చేస్తే మొత్తం 8 భాగాలు వస్తాయి. అందులో 'A' భాగాన్ని తీసుకొని



పరిశీలించండి. ఇది మొత్తంలో $\frac{1}{8}$ భాగం అవుతుంది. కావున $\frac{1}{4} \text{లో } \frac{1}{2} \text{ అంటే } \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ అగును.

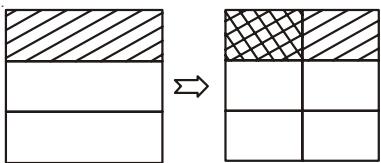
ఇప్పుడు $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ మరియు $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ లను కనుగొందాం.

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \text{ అనగా } \frac{1}{2} \text{ లో } \frac{1}{3} \text{ అనగా}$$



$$= \frac{1}{6} \text{ కావున } \frac{1}{3} \text{ లో } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \text{ అనగా } \frac{1}{3} \text{ లో } \frac{1}{2} \text{ అనగా}$$



$$= \frac{1}{6} \text{ కావున } \frac{1}{3} \text{ లో } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{దీనిని బట్టి } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \text{ అని గమనించవచ్చు.}$$

ఇవి చేయండి

1. కింది వాటిలో గడులను నింపండి

$$(i) \quad \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{5 \times 7} = \boxed{}$$

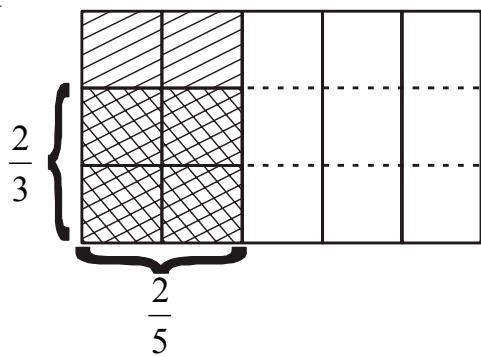
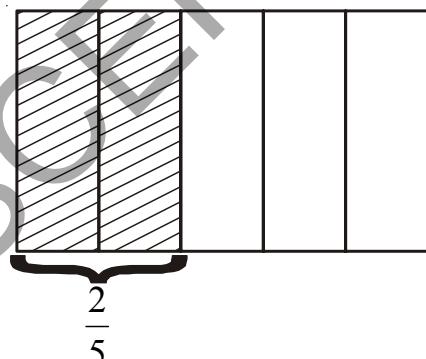
$$(ii) \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \boxed{} = \boxed{}$$



$$2. \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \text{ మరియు } \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \text{ లను పటంను వయ్యాగించి కనుగొని } \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \text{ అని సరిచూడండి.}$$

$$3. \quad \frac{9}{3} \times \frac{5}{5} \text{ లబ్దమును కనుగొనుము. పటమును గీసి జవాబును సరిచూడండి.}$$

మరొక ఉదాహరణ $\frac{2}{5} \text{ లో } \frac{2}{3}$ ఎంతో పరిశీలిదాం. ఇచ్చట 1వ పటంలో $\frac{2}{5}$ భాగం, 2వ పటంలో $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}$ భాగం పేడ్ చేయబడ్డాయి.



$$2\text{వ పటంలో జల్లెడ పేడ్ } \frac{2}{5} \text{ లో } \frac{2}{3} \text{ అంటే } \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

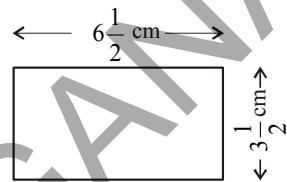
$\frac{2}{5}$ లో $\frac{2}{3}$ విలువ కనుగొనడానికి $\frac{2}{5}$ ను మూడు సమానభాగాలు చేసి అందులో రెండు భాగాలు తీసుకున్నాం. ఇది

మొత్తం 15 భాగాలలో 4 భాగాలకు సమానం అయింది. అందుచే $\frac{2}{5}$ లో $\frac{2}{3}$ అనగా $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ అయింది.

$$\text{దీనిని బట్టి రెండు భిన్నాల లబ్ధం} = \frac{\text{లవాల లబ్ధం}}{\text{పోరాల లబ్ధం}}$$

ఇప్పుడు ఒక దీర్ఘచతురప్రం యొక్క పొడవు $6\frac{1}{2}$ సెం.మీ, వెడల్పు $3\frac{1}{2}$ సెం.మీ అయినపుడు దాని వైశాల్యం కనుగొందాం.

$$\text{దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యం} = 6\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{13}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{91}{4} = 22\frac{3}{4} \text{ చ.సి.సెం.మీ.}$$



ఉదా 6 : నరేంద్ర ఒక నవలలో $\frac{1}{4}$ భాగాన్ని 1 గంటలో చదవగలడు. అయిన

అతడు $2\frac{1}{2}$ గంటలలో చదవగలిగే భాగం ఎంత?

సాధన : నరేంద్ర 1 గంటలో నవలలో చదవగలిగే భాగం = $\frac{1}{4}$

$$2\frac{1}{2} \text{ గంటలలో చదవగలిగే భాగం} = 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

కావున నరేంద్ర $2\frac{1}{2}$ గంటలలో $\frac{5}{8}$ భాగాన్ని చదవగలడు.

ఉదా 7 : ఒక ఈత కొలనులో అరగంటకు $\frac{3}{10}$ భాగం నీటితో నింపవచ్చు. అయిన $1\frac{1}{2}$ గంటలలో ఎంత

భాగం నింపవచ్చు? (సూచన : అరగంట అంటే ఒకగంటలో సగం = $\frac{1}{2}$)

సాధన : అరగంటలో ఈత కొలనులో నిండే భాగం = $\frac{3}{10}$.

అంటే $1\frac{1}{2}$ గంటలలో 3 అరగంటలు ఉంటాయి కావున

$$1\frac{1}{2} \text{ గంటలలో ఈత కొలనులో నిండే భాగం} = 3 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

కావున $\frac{9}{10}$ భాగం ఈతకొలను $1\frac{1}{2}$ గంటలలో నిండుతుంది.



ప్రయత్నించండి

1 కంటే పెద్దవైన రెండు పూర్ణాంకాలు గుణించునపుడు, వాటి లబ్ధం, ఆ రెండు పూర్ణాంకాల కన్నా ఎక్కువ అని మనకు తెలుసు. ఉదాహరణకు $3 \times 4 = 12$ కావున $12 > 4$ మరియు $12 > 3$. ఇదే విధంగా రెండు భీన్వాలను గుణించగా వచ్చే లబ్ధం ఏ విధంగా ఉంటుంది?

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	లబ్ధం, భీన్వాల కన్నా తక్కువ
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} = \text{-----}$		
$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{8} = \frac{21}{40}$		
$\frac{2}{\square} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$		



అభ్యర్థిం - 3

1. కింది లబ్ధాలను కనుగొనండి

$$(i) \frac{5}{6} \times \frac{7}{11}$$

$$(ii) 6 \times \frac{1}{5}$$

$$(iii) 2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{5}$$

2. గుణించండి. లబ్ధాన్ని సూచిస్తుమాపంలో రాయండి.

$$(i) \frac{2}{3} \times 5\frac{1}{5}$$

$$(ii) \frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$$

$$(iii) \frac{9}{3} \times \frac{5}{5}$$

$$(iv) \frac{9}{5} \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{2}$$

3. కింది వానిలో ఏది పెద్దది?

$$(i) \frac{4}{7} \text{ లో } \frac{2}{5} \text{ లేదా } \frac{1}{2} \text{ లో } \frac{3}{4}$$

$$(ii) \frac{4}{7} \text{ లో } \frac{1}{2} \text{ లేదా } \frac{3}{7} \text{ లో } \frac{2}{3}$$

4. రెపొనా ప్రతిరోజు దుస్తుల అల్లిక కొరకు $2\frac{1}{2}$ గంటలు సమయం వెచ్చిస్తుంది. ఇలా ఆమెకు ఒక బట్ట అల్లడానికి

7 రోజులు పట్టింది. ఆమె దీని కొరకు మొత్తం ఎన్ని గంటల సమయం వెచ్చించింది?

5. ఒక లారీ 8 కి.మీ దూరం ప్రయాణించడానికి 1 శీటరు పెట్రోలు అవసరం. అది $10\frac{2}{3}$ శీటర్ల పెట్రోలుతో ఎంత దూరం ప్రయాణించగలదు?

6. రాజు 1 సెకన్డులో $1\frac{1}{2}$ మీటర్లు దూరం నడువగలడు. అయిన 15 నిమిషాలలో అతను నడిచే దూరం ఎంత?

7. క్రింద ఖాళీగడులను $\boxed{\quad}$ పూరించండి.

$$(i) \quad \frac{2}{3} \times \boxed{\quad} = \frac{20}{21}. \quad (ii) \quad \frac{5}{7} \times \frac{\boxed{\quad}}{5} = \frac{3}{\boxed{\quad}}$$

2.2 భిన్నాల భాగహరం

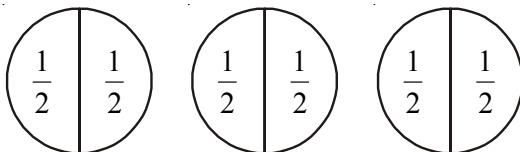
1. నీ వద్ద 15 మీటర్ల బట్ట ఉన్నదనుకో. దానిని $1\frac{1}{2}$ మీటర్ల చొప్పున సమానభాగాలు చేయాలి. నీకు ఎన్ని ముక్కలు వస్తాయి? ఇచ్చట మనం 15 మీటర్ల బట్ట నుండి $1\frac{1}{2}$ మీటర్ల చొప్పున తగ్గిస్తూ చివరకు బట్ట మిగలనంత వరకు పోతే ఎన్నిసార్లు తగ్గిస్తూ పోతామో ఆలోచించండి.
2. మరొక ఉదాహరణ పరిశీలించాం: ఒక కాగితం పొడవు $\frac{21}{2}$ సెం.మీ ఉంది. దానిని $\frac{3}{2}$ సెం.మీ చొప్పున ముక్కలుగా కత్తిరిస్తే మనకు ఎన్ని ముక్కలు వస్తాయి? దీనికి మనం ప్రతిసారి $\frac{3}{2}$ సెం.మీ భాగాలను కత్తిరిస్తాం. లేదా $\frac{21}{2}$ ను $\frac{3}{2}$ చే భాగిస్తాం. అంటే $\frac{21}{2} \div \frac{3}{2}$ అన్నమాట.
3. పూర్ణాంకాల భాగహరం గుర్తుకు తెచ్చుకో. ఈ వద్దతిని భిన్నాల గుణకారానికి వర్తింపచేయ. ఉదాహరణకు $15 \div 3$, అంటే 15లో ఎన్ని మూడులు ఉన్నవో చెప్పాలి అనుకుంటే జవాబు 5 వస్తుంది. ఇదే విధంగా 18 లో ఎన్ని రెండ్లు ఉన్నయో చెప్పాలంటే 18 ను 2 చే భాగించాలి. అంటే $18 \div 2$. ఇది 9 కి సమానం.

ఇప్పుడు మనం పూర్ణాంకాలలో చేసిన భాగహరాలను బట్టి, పూర్ణాంకాన్ని భిన్నంతోనూ, భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంతోనూ భాగించడం తెలుసుకుందాం.

2.2.1 పూర్ణాంకంను భిన్నంతో భాగించడం

$3 \div \frac{1}{2}$ ను కనుగొందాం.

3 లో ఎన్న $\left(\frac{1}{2}\right)$ (సగాలు) ఉన్నయో కనుగొనాలని కిరణ్ అన్నాడు. దీనికి కింది విధంగా వటం గీడ్డాం.



పై వటాలను బట్టి 3లో 6 సగాలు ($\frac{1}{2}$) ఉన్నయని తెలుస్తున్నది.

అందుచే మనం $3 \div \frac{1}{2} = 6$ అని చెప్పవచ్చు.

$2 \div \frac{1}{3}$ గురించి ఆలోచించు

రెండులో ఎన్ని మూడవ భాగాలు $\left(\frac{1}{3}\right)$ ఉన్నాయో కనుగొనడం అని అర్థం. మరే విధంగానైనా కనుకోవచ్చా?

ప్రకృతటాలు పరిశీలిస్తే రెండు పటాలలో 6 మూడవ భాగాలు $\left(\frac{1}{3}\right)$ ఉన్నాయి.

అంటే $2 \div \frac{1}{3} = 6$ అయింది.

జపి చేయండి

$$(i) 2 \div \frac{1}{4}$$

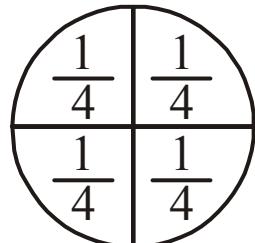
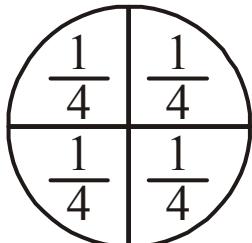
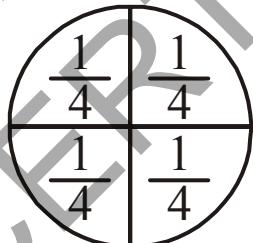
$$(ii) 7 \div \frac{1}{2}$$

$$(iii) 3 \div \frac{1}{5}$$
 కనుగొనండి.



2.2.1 (అ) భిన్నానికి వ్యుత్పమం (గుణకార విలోపమం)

$3 \div \frac{1}{4}$ తీసుకొండి. దీనిని భాగించడం అంటే మూడులో ఎన్ని $\frac{1}{4}$ భాగాలు ఉన్నాయో తెలుసుకోవడం.



3 లో $\frac{1}{4}$ లు 12 ఉన్నాయని చెప్పవచ్చు లేదా $3 \div \frac{1}{4} = 12$ అగును

అనగా $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12$ అని గమనించవచ్చు.

దీని నుండి మనం $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1}$ అని తెలుసుంది.

అదే విధంగా $2 \div \frac{1}{3}$ పరిశీలించండి

$$2 \div \frac{1}{3} = 6 \text{ అగును ఎలా అంటే } 2 \div \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1} = 6$$

$$\text{అలాగే } 4 \div \frac{1}{4} = 16 \text{ ఎందుకంటే } 4 \times \frac{4}{1} = 16.$$

ఇచ్చట $\frac{3}{1}$ అనేది $\frac{1}{3}$ అనే భిన్నంలో లవహాలను తారుషారు చేయగా ఏర్పడింది. అంటే $\frac{1}{3}$ యొక్క వ్యత్పమం $\frac{3}{1}$

అదేవిధంగా $\frac{4}{1}$ అనేది $\frac{1}{4}$ యొక్క వ్యత్పమం అగును.

కింది లబ్దాలను పరిశీలించి, ఖాళీలను నింపండి.

$$7 \times \frac{1}{7} = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{1}{9} \times 9 = \dots\dots\dots$$

$$\frac{2}{7} \times \dots\dots\dots = 1$$

$$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \times \frac{5}{9} = 1$$

ఇటువంటి మరొక ఐదు జతలను తీసుకొని గుణించండి

ఏ రెండు శూన్యేతర సంఖ్యల లబ్దం 1 అగునో, వాటిని ఒకదాని కొకటి వ్యత్పమాలు (గుణకార విలోమాలు) అంటారు.

అందుచే $\frac{4}{7}$ యొక్క వ్యత్పమం $\frac{7}{4}$ అలాగే $\frac{7}{4}$ యొక్క వ్యత్పమం $\frac{4}{7}$ అగును. $\frac{5}{9}$ మరియు $\frac{2}{5}$ భిన్నాల వ్యత్పమాలు రాయండి.



ప్రయత్నించండి

1. ఒక క్రమభిన్నం యొక్క వ్యత్పమం మరొక క్రమభిన్నం అగునా?
2. ఒక అపక్రమ భిన్నం యొక్క వ్యత్పమం మరొక అపక్రమభిన్నం అగునా?

అందువలన

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} \text{ యొక్క వ్యత్పమం} = 1 \times \frac{2}{1}$$

$$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} \text{ యొక్క వ్యత్పమం} = 3 \times \frac{4}{1}$$

$$3 \div \frac{1}{2} = \dots = \dots$$

$$\text{అలాగే } 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{3}{4} \text{ యొక్క వ్యత్పమం} = 2 \times \frac{4}{3}$$

$$5 \div \frac{2}{4} = 5 \times \dots = 5 \times \dots$$

ఈ విధంగా ఒక పూర్తాంకాన్ని ఒక భిన్నంచే భాగించాలంటే, ఆ భిన్నం యొక్క వ్యత్పమం చేత పూర్తాంకాన్ని గుణించాలని భావించాలి.

ఇవి చేయండి

$$1. \text{ కనుగొనండి } (i) 9 \div \frac{2}{5} \quad (ii) 3 \div \frac{4}{7} \quad (iii) 2 \div \frac{8}{9}$$



ఒక పూర్తాంకాన్ని, మిశ్రమభిన్నంచే భాగించునపుడు, మిశ్రమభిన్నాన్ని మొదట అపక్రమ భిన్నంగా మార్చి సాధించాలి.

$$\text{ఉదా : } 4 \div 3\frac{2}{5} = 4 \div \frac{17}{5} = 4 \times \frac{5}{17} = \frac{20}{17} \quad \text{అలాగే } 11 \div 3\frac{1}{3} = 11 \div \frac{10}{3} = ? \text{ ను కనుగొనండి.}$$

ఇవి చేయండి.



$$1. \text{ కనుగొనండి } (i) 7 \div 5\frac{1}{3} \quad (ii) 5 \div 2\frac{4}{7}$$

2.2.2 ఒక భిన్నాన్ని ఒక పూర్తాంకం చే భాగించడం

$\frac{3}{4} \div 3$ ఎంతకు సమానం?

$$\text{ముందు పరిశీలించిన సమయాలను బట్టి మనకు } \frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{అందుచే } \frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = ? \text{ అలాగే } \frac{5}{7} \div 6, \quad \frac{2}{7} \div 8 \text{ ఎంత?}$$

మిత్రము భిన్నాలను పూర్తాంకాలచే భాగించునపుడు, మిత్రము భిన్నాలను మొదట అపక్రమ భిన్నాలుగా మార్చి, సాథన చేయాలి.

$$\text{ఉదాహరణకు } 2\frac{1}{3} \div 5 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{15} \text{ అలాగే } 4\frac{2}{5} \div 3 = \dots \text{ మరియు } 2\frac{3}{5} \div 2 = \dots$$

2.2.3 ఒక భిన్నాన్ని మరొక భిన్నంచే భాగించడం

మనం $\frac{1}{4} \div \frac{5}{6}$ కనుగొందాం

$$\frac{1}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{5} \left(\frac{5}{6} \text{ యొక్క వ్యుత్తము} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\text{ఇదే విధంగా } \frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \text{ యొక్క వ్యుత్తము} \right) = ? \text{ మరియు } \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$$

ఇవి చేయండి

కనుగొనండి. (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$



ఉదా 8 : ఒక భాగీ ఈతకొలను యొక్క సామర్థ్యంలో $\frac{9}{10}$ భాగం నింపబడాలి. దానిలో $\frac{3}{10}$ భాగం నింపడానికి అరగంట

పడితే, $\frac{9}{10}$ భాగం నింపడానికి ఎంతకాలం పడుతుంది?

సాధనమునం $\frac{9}{10}$ భాగంలో $\frac{3}{10}$ భాగాలు ఎన్ని వున్నాయో కనుగొనాలి.

$$\text{ఈ భాగహీర సమస్య సాధిస్తే } \frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{^3\cancel{9}}{\cancel{10}_1} \times \frac{10^1}{\cancel{3}_1} = 3 \text{ అగును.}$$

కావున ఈతకొలను లో $\frac{9}{10}$ భాగం నింపడానికి 3 అర్ధ గంటలు అంటే $1\frac{1}{2}$ గంటల కాలం పడుతుంది.



అభ్యాసం - 4

1. కింది భిన్నాలకు వ్యత్పమాలు రాయండి.

(i) $\frac{5}{8}$

(ii) $\frac{8}{7}$

(iii) $\frac{13}{7}$

(iv) $\frac{3}{4}$

2. కనుగొనండి.

(i) $18 \div \frac{3}{4}$

(ii) $8 \div \frac{7}{3}$

(iii) $3 \div 2\frac{1}{3}$

(iv) $5 \div 3\frac{4}{7}$

3. కనుగొనండి.

(i) $\frac{2}{5} \div 3$

(ii) $\frac{7}{8} \div 5$

(iii) $\frac{4}{9} \div \frac{4}{5}$

4. పై మూడు ప్రశ్నల ఆధారంగా ఒక్కాక్క దానికి 5 ప్రశ్నలను తయారుచేసి వాటి జవాబులను కనుగొనుము.

5. దీపక్ ఒక ఇంటిలో $\frac{2}{5}$ భాగం ఒక రోజులో రంగు వేయగలదు. ఇదే వేగంతో పనిచేస్తే ఆ ఇంటికి పూర్తిగా రంగు వేయుటకు ఎన్ని రోజులు పడుతుంది?

2.3 దశాంశ సంఖ్యలు లేదా దశాంశ భిన్నాలు

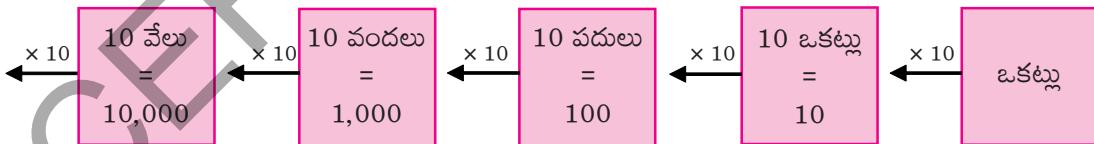
దశాంశ సంఖ్యల గురించి, వాటి సంకలన, వృషటలనాల గురించి మీరు వే తరగతిలో నేర్చుకున్నారు. మనం ఒకసారి వాటిని పునర్వరణ చేసుకుందాం.

12714 అనే సంఖ్య విస్తరణ రూపం రాధా.

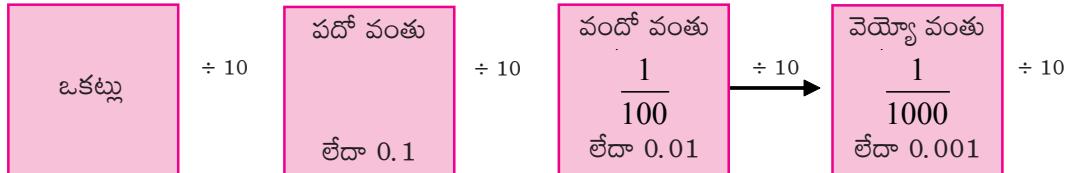
$$12714 = 1 \times 10000 + 2 \times 1000 + 7 \times \dots + 1 \times \dots + 4 \times 1$$

మరి 12714.2 యొక్క విస్తరణ రూపం ఏది?

స్థానవిలువల పట్టికలో కూడి నుండి ఎడమ వైపుకు పోయిన కొలదీ, స్థాన విలువ 10 రెట్లు చొప్పున పెరుగుతుందని గమనించారు.



మనం ఎడమ వైపు నుండి కుడివైపునకు పోవునపుడు ఏమి జరుగుతుంది? ప్రతి స్థానవిలువ దాని ఎడమవైపున కల వెగువ స్థానంలో 10వ భాగం అవుతుంది అంటే ప్రతిస్థానం విలువ దాని ముందు స్థానాన్ని 10చే భాగిస్తే వస్తుంది. కదా ఇదే విధంగా యూనిట్ (బకట్లు) స్థానాన్ని 10 చే భాగిస్తే ఏమి వస్తుంది. $1 \div 10 = \frac{1}{10} = 0.1$ అని జ్ఞాపికి తెచ్చుకో.



కావున 12714.2 యొక్క విస్తరణ రూపం

$$12714.2 = 1 \times 10000 + 2 \times 1000 + 7 \times \dots + 1 \times \dots + 4 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10}$$

3.42 అనే సంఖ్యలో అన్ని అంకెల స్థానవిలువలు కనుగొందాం. ఇచ్చట దశాంశ బిందువు (.) అనేది ఆ సంఖ్యను పూర్ణాంక భాగం మరియు దశాంశ భాగాలుగా విభజిస్తుంది అని గమనించి ఉంటారు. దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున గల సంఖ్య భాగాన్ని ‘దశాంశ భాగం’ అంటారు. అదే విధంగా దశాంశ బిందువుకు ఎడమ వైపుగల సంఖ్యను “పూర్ణాంక భాగం” అంటారు.

3.42 లోని అంకెల స్థాన విలువలు.

	ఒకట్ల స్థానంలో 3 కలదు	దశాంశ భాగంలో దశాంశ బిందువుకు వెంటనే కుడివైపున 4 కలదు	దశాంశ భాగంలో దశాంశ బిందువుకు రెండు స్థానాలు కుడివైపున 2 కలదు
స్థానవిలువ	$3 \times 1 = 3$	$4 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$ లేదా 0.4	$2 \times \frac{1}{100} = \frac{2}{100}$ లేదా 0.02



ప్రయత్నించండి

1. కింది పట్టిక పరిశీలించి, భాళీలను నింపండి.

వందలు	పదులు	ఒకట్లు	పదోవంతు	వందోవంతు	వెయ్యోవంతు	సంఖ్య
(100)	(10)	(1)	$\left(\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{100}\right)$	$\left(\frac{1}{1000}\right)$	
5	4	7	8	2	9	547.829
0	7	2	1	7	7	—
3	2	—	—	5	4	327.154
6	—	4	—	2	—	614.326
2	—	6	5	—	2	236.512

2. కింది సంఖ్యలను విస్తరణ రూపంలో రాయండి

- (i) 30.807 (ii) 968.038 (iii) 8370.705

మనం ద్రవ్యం, పొదవు, బరువు మొదలగు వాటిని తక్కువ లేదా ఎక్కువ యూనిట్లలోనికి మార్చునపుడు దశాంశాలు వాడుతాం. ఔదాహరణకు 5 పైసలు = ₹ $\frac{5}{100}$, 220 రూ. = $\frac{220}{1000}$ కి.రూ., 5 సె.మీ = $\frac{5}{100}$ మీ

ఇవి చేయండి

1. కనుగొనండి.

- (i) 50 పైసలు = ₹ _____ (ii) 22 రూ. = _____ కి.రూ (iii) 80 సె.మీ = _____ మీ॥



2.3.1 దశాంశ భిన్నాలను పోల్చడం.

ఎవరి వద్ద ఎక్కువ డబ్బు ఉన్నదో చూద్దాం.

అభిషేక్ మరియు లాస్యలు ₹ 375.50 మరియు ₹ 375.75 వారి పొదుపు పెట్టె (కిడ్డి బ్యాంకు) లో దాచుకున్నారు. ఎవరి వద్ద ఎక్కువ డబ్బు ఉన్నదో తెలుసుకోగలవా? ముందుగా మనం దశాంశ బిందువుకు ఎడమ వైపున గల పూర్ణాంక భాగాన్ని పరిశీలిస్తాం. ఇద్దరి వద్ద ₹ 375 ఉన్నది కావున, దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున గల దశాంశ స్థానాలలో మొదట పదవ వంతును చూద్దాం. అభిషేక్ వద్ద గల డబ్బులో పదవ వంతు స్థానంలో 7, లాస్య వద్ద గల పదవ వంతు స్థానంలో 5 కలవు. 7 పదవ వంతులు $\frac{7}{10} > 5$ పదవ వంతులు $\frac{5}{10}$ కావున అభిషేక్ పొదుపు చేసిన డబ్బు లాస్య పొదుపు చేసిన డబ్బు కన్నా ఎక్కువ. అంటే $375.75 > 375.50$.

కింది వానిలో ఏది పెద్దదో చెప్పండి.

- (i) 37.65 మరియు 37.60 (ii) 1.775 మరియు 19.780 (iii) 364.10 మరియు 363.10

పై వాటిలాగా ఇంకా 15 జతలను తయారుచేసి వాటిలో పెద్దది, చిన్నది పోల్చండి.

2.3.2 మనం దశాంశ సంఖ్యలను కూడడం, తీసిచేయడం నేర్చుకున్నాం. కొన్ని సమస్యలు సాధించి చూద్దాం.

(i) $221.85 + 37.10$	(ii) $39.70 - 6.85$
221.85	39.70
$+37.10$	$- 06.85$
<hr/> 258.95 <hr/>	<hr/> 32.85 <hr/>

దశాంశ సంఖ్యల సంకలనం లేదా వ్యవకలనంలో ఒకే స్థాన విలువలు కలిగిన అంకెలను కూడాలి లేదా తీసిచేయాలి. అంటే సంఖ్యలను ఒకదాని క్రింద ఒకటి ప్రాయమప్పుడు దశాంశ బిందువులు కూడా భవితంగా ఒకదాని క్రింద మరొకటి వచ్చునట్లు ప్రాయాలి. దశాంశ స్థానంలోని స్థానాలు కుడివైపున సున్నలు' చేర్చడం ద్వారా సమానం చేయాలి.

ఇవి చేయండి

- కనుగొనండి. (i) $0.25 + 5.30$. (ii) $29.75 - 25.97$.



ఉదా 9 : ఒక సమద్విభాగు త్రిభుజంలో రెండు సమాన భుజాల పొడవులు 3.5 సెం.మీ మరియు మూడవ భుజం 2.5 సెం.మీ అయిన త్రిభుజ చుట్టుకొలత ఎంత?

సాధన : సమద్విభాగు త్రిభుజ భుజాలు వరుసగా 3.5 సెం.మీ, 3.5 సెం.మీ మరియు 2.5 సెం.మీ అగును. కావున, త్రిభుజ చుట్టుకొలత = $3.5 \text{ సెం.మీ} + 3.5 \text{ సెం.మీ} + 2.5 \text{ సెం.మీ} = 9.5 \text{ సెం.మీ}$

అభ్యాసం - 5

1. కింది వానిలో ఏది పెద్దది?

- (i) 0.7 లేదా 0.07 (ii) 7 లేదా 8.5
 (iii) 1.47 లేదా 1.51 (iv) 6 లేదా 0.66

2. కింది వానిని రూపాయిలలో దశాంశ సంఖ్యతో సూచించండి

- (i) 9 పైనలు (ii) 77 రూపాయల 7 పైనలు (iii) 235 పైనలు

3. (i) 10 సెం.మీలను మీటర్లలోనూ, కిలోమీటర్లలో వ్యక్తపరచండి.

- (ii) 45 మి.మీ లను సెం.మీ, మీ, కి.మీ లలో వ్యక్తపరచండి.

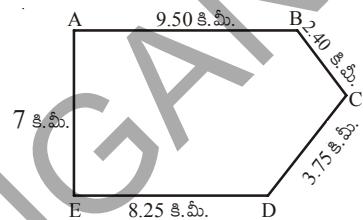
1 మీ = 100 సెం.మీ.

1 కి.మీ. = 1000 మీ.

1 సెం.మీ. = 10 మి.మీ.

1 కి.గ్రా. = 1000 గ్రా.

4. కింది వానిని కిలోగ్రాములలో వ్యక్తపర్చండి
- (i) 190 గ్రా. (ii) 247 గ్రా. (iii) 44 కి.గ్రా 80 గ్రా.
5. కింది దశాంశ సంఖ్యలను విస్తరించి రాయండి
- (i) 55.5 (ii) 5.55 (iii) 303.03
(iv) 30.303 (v) 1234.56
6. కింది దశాంశ సంఖ్యలలో 3 యొక్క స్థానవిలువలు రాయండి.
- (i) 3.46 (ii) 32.46 (iii) 7.43
(iv) 90.30 (v) 794.037
7. అరుణ, రాధ వారి ప్రయాణాన్ని A మరియు E అనే స్థానాల నుండి ప్రారంభించారు. అరుణ A నుండి B కు అచ్చట నుండి C కు చేరింది రాధ E నుండి D కు అచ్చట నుండి C కు చేరింది. ఎవరు ఎక్కువ దూరం ప్రయాణించారు? ఎంత ఎక్కువ ప్రయాణించారు?
8. ఉపేంద్ర కూరగాయలు కొనడానికి బజారుకు వెళ్లాడు. అతడు 2 కి.గ్రా 250 గ్రా. టమాటాలు, 2 కి.గ్రా 500 గ్రా ఆలుగడ్డలు, 750 గ్రా. బెండకాయలు మరియు 125 గ్రా. వచ్చిమిర్చి కొన్నాడు. అయిన ఉపేంద్ర ఇంటికి తీసుకొని పోయే కూరగాయల మొత్తం బరువు ఎంత?



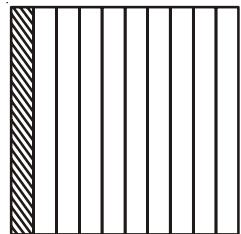
2.4. దశాంశ సంఖ్యల గుణకారం.

7వ తరగతి చదువుతున్న రాజేంద్ర తల్లితో కలసి కూరగాయలు కొనడానికి బజారుకు వెళ్లాడు. వారు 1 కి.గ్రా ₹ 8.50 చూస్తున 2.5 కి.గ్రాల ఆలుగడ్డలను కొన్నారు. వారు ఎంత పొమ్ము చెల్లించాలి?

ఇటువంటి దశాంశ సంఖ్యలతో కూడిన సమస్యలు మనకు నిత్యజీవితంలో అనేకం వస్తుంటాయి. ఈ సందర్భంలో మనం రెండు దశాంశ సంఖ్యల గుణకారం ఏ విధంగా చేయాలో తెలుసుకుండాం.

0.1×0.1 గుణిద్దాం

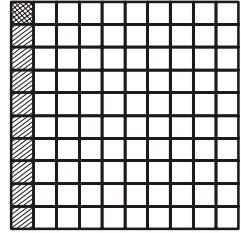
0.1 అంటే 1లో 10 వ వంతు దీనిని మనం పటంలో $\frac{1}{10}$ భిస్సుంగా చూపవచ్చు.



కావున $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ అనగా $\frac{1}{10}$ లో $\frac{1}{10}$. అందుచే ఇక్కడ మనం $\frac{1}{10}$ లో 10వ పటం 1

భాగం కనుగొంటాం. కావున మనం $\frac{1}{10}$ భాగాన్ని 10 సమానభాగాలు చేసి అందులో ఒక

భాగం విలువను తీసుకుండాం. ఇది 2వ పటంలో ఒక చదరాన్ని తెలుపుతుంది. 2వ పటంలో ఎన్ని చదరాలో లెక్కించు మొత్తం 100 చదరాలుఉన్నాయి కదూ! అందులో ఒక చదరం 100



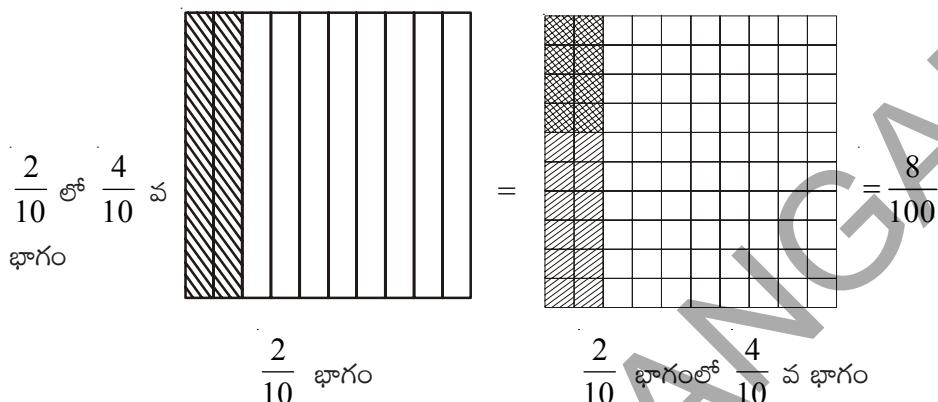
చదరాలలో ఒకదాన్ని తెలుపుతుంది. అంటే $\frac{1}{100}$ అందువలన మనం

$$0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ అని చెప్పవచ్చు.}$$

0.4×0.2 విలువ ఎంతో చూద్దాం.

$$0.4 \times 0.2 = \frac{4}{10} \times \frac{2}{10} \text{ లేదా } \frac{2}{10} \text{ లో } \frac{4}{10} \text{ అని అర్థం}$$

దీనిని పటంలో పరిశీలిస్తే



2వ పటంలో 100 చదరాలలో 8 చదరాలు రెండేసి సార్లు షైడ్ చేయబడి ఉన్నాయి. దీనిని 0.08 అని సూచించవచ్చు మనం 0.1×0.1 మరియు 0.4×0.2 , సంఖ్యలు గుణించునప్పుడు దశాంశ బిందువులని తొలగించి పూర్ణాంకాల వలే గుణిస్తే అంటే 0.1×0.1 , అనగా 01×01 లేదా 1×1 . అదే విధంగా 0.4×0.2 అనగా 04×02 లేదా 4×2 అంటే వరుసగా 1 మరియు 8 లభ్యాలుగా వచ్చాయి.

ఇప్పుడు లభ్యంలో దశాంశ బిందువును ఉంచడానికి గుణకారంలో ఇచ్చిన సంఖ్యలలో దశాంశ స్థానాలలో ఎన్ని అంకాలు ఉన్నాయో చూడాలి. మొత్తం దశాంశ స్థానాలు 2 ఉన్నాయి. అందుచే ఈ సంఖ్యల లభ్యంలో దశాంశ బిందువును రెండు స్థానాలు కుడి నుండి ఎడమకు లెక్కించి పెట్టాం.

$$\text{కావున } 0.1 \times 0.1 = .01$$

$$0.4 \times 0.2 = .08 \text{ అయినది}$$

ఈక దశాంశ సంఖ్యలో పూర్ణసంఖ్య భాగము లోపించిన సాధారణంగా దశాంశమునకు ఎడమ వైపున సున్నను ఉంచుతాం.

ఒకవేళ మనం 0.5×0.05 గుణిస్తే మనం లభ్యంలో దశాంశ భాగంలో మొత్తం మూడు స్థానాలు కుడి నుండి ఎడమకు లెక్కించి దశాంశ బిందువును ఉంచాలి. అంటే $0.5 \times 0.05 = 0.025$.

ఇప్పుడు 1.2×2.5 కనుగొండాం

12 ను 25 చే గుణించండి. మనకు 300 వస్తుంది. 1.2 మరియు 2.5 , లలో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపు 1 స్థానం చూపున ఉన్నది. అందుచే $1 + 1 = 2$ స్థానాలు వచ్చాయి. ఇప్పుడు లభ్యం 300 లలో కుడివైపు నుండి (అంటే '0' నుండి రెండు స్థానాలు ఎడమ వైపుకు వస్తే మనకు 3.00 అగును అంటే 3 కావున $1.2 \times 2.5 = 3$ అగును

ఇదే విధంగా 2.5 మరియు 1.25 గుణించునప్పుడు మొదట 25 ను 125 చే గుణిస్తాం. లభ్యంలో దశాంశ బిందువును పై ఉదాహరణల ప్రకారం పెడతాం. దశాంశ స్థానాల సంఖ్య $1 + 2 = 3$ (ఎలా?) కావున $2.5 \times 1.25 = 3.125$ అగును.

ఇవి చేయండి

1. కనుగొనండి. (i) 1.7×3 (ii) 2.0×1.5 (iii) 2.3×4.35

2. పై సమస్యలోని (1) లబ్దాలను అవరోహణ క్రమంలో రాయండి.



ఉదా 10 : ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 7.1 సె.మీ, వెడల్పు 2.5 సె.మీ అయిన వైశాల్యం ఎంత?

సాధన : దీర్ఘచతురస్ర పొడవు = 7.1 సె.మీ

$$\text{వెడల్పు} = 2.5 \text{ సె.మీ}$$

$$\text{అందువలన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం} = 7.1 \times 2.5 = 17.75 \text{ చాసె.మీ}$$

2.4.1 దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 మొదలగు సంఖ్యలతో గుణించుట

$$3.2 = \frac{32}{10} \text{ అని, } 2.35 = \frac{235}{100} \text{ అని రేప్పు తెలుసుకుంది. దీని నుండి దశాంశ బిందువు యొక్క స్థానం, దశాంశ భిన్నంలో గల హోరాలు అయిన } 10, 100, 1000 \text{ లను బట్టి మారుతుందని గమనించింది.}$$

అదే విధంగా $10, 100, 1000 \dots \dots$ మొదలగు సంఖ్యలతో దశాంశ సంఖ్యను గుణించినపుడు లబ్దాలో దశాంశ బిందువు అమరిక పరిశీలిద్దాం.

కింది పట్టిక పరిశీలించి, ఖాళీలను పూరించండి.

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 = \dots \dots$	$12.356 \times 10 = \dots \dots$
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176 \text{ or } 176.0$	$2.35 \times 100 = \dots \dots$	$12.356 \times 100 = \dots \dots$
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760 \text{ or } 1760.0$	$2.35 \times 1000 = \dots \dots$	$12.356 \times 1000 = \dots \dots$
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5 ; 0.5 \times 100 = \dots \dots$	$; \quad 0.5 \times 1000 = \dots \dots$	

మీ జవాబులను పరిశీలించండి. వాటిలో అమరికను కనిపెట్టారా? లబ్దాలో దశాంశ బిందువు కుడి వైపు $10, 100, 1000 \dots \dots$ మొదలగు సంఖ్యలతో గల సున్నల సంఖ్యకు సమాన స్థానాలు జరుగుతుంది.

2.4.2 దశాంశ సంఖ్యల భాగహరం

గోపాల్ తన తరగతి గదిని అలంకరించడానికి రంగు కాగితాలను సిద్ధం చేసుకుంటున్నాడు. అతనికి 1.6 సెం.మీ. పొడవైన రంగు కాగితాలు కొన్ని కావాలి. అతని దగ్గర మొత్తం 9.6 సెం.మీ. పొడవైన రంగు కాగితం కలదు. ఈ కాగితం నుండి అతనికి కావలసిన కొలత గల ముక్కలు ఎన్ని వస్తాయి? అవి కావాలంటే $\frac{9.6}{1.6}$ అగునని భావించాడు కానీ 9.6 మరియు 1.6 రెండునూ దశాంశ సంఖ్యలే. అందుచే దశాంశ సంఖ్యల భాగహరం మనకు తెలియాలి.

2.4.2 అ) దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100, 1000 మొదలగు వానిచే భాగించడం

ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, మరియు 1000 చే భాగించడం

$31.5 \div 10$ తీసుకొండి

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

$$\text{ఇదే విధంగా } 31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$$

ఈ విధంగా దశాంశ సంఖ్యలను 10, 100, 1000..... మొదలగు సంఖ్యలతో భాగించునపుడు ఏమైనా అమరిక ఉండా?

ఇది తెలిసే 10, 100, 1000 మొదలగు సంఖ్యలతో భాగించడం మరింత సులభతరం అవుతుంది.

$29.5 \div 10 = 2.95$	$132.7 \div 10 = \dots$	$1.5 \div 10 = \dots$	$17.36 \div 10 = \dots$
$29.5 \div 100 = 0.295$	$132.7 \div 100 = \dots$	$1.5 \div 100 = \dots$	$17.36 \div 100 = \dots$
$29.5 \div 1000 = 0.0295$	$132.7 \div 1000 = \dots$	$1.5 \div 1000 = \dots$	$17.36 \div 1000 = \dots$

పై పట్టికలోని అమరికలను పరిశీలించి నీవు గమనించిన అంశాన్ని రాయము.

2.4.2 అ) దశాంశ సంఖ్యను ఒక పూర్తాంకంచే భాగించుట

$\frac{64}{2}$ విలువ ఎంతో కనుగొందాం. దీనిని మనం $6.4 \div 2$ అని కూడా రాస్తాం.

అందుచే $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ (భిన్నాల భాగహరంలో వ్యత్యమం)

$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

$$\text{ఇదే విధంగా } 12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$$

ఇవి చేయండి

1. కనుగొనండి. (i) $35.7 \div 3$ (ii) $25.5 \div 3$



ఉదా 11 : 4.2, 3.8 మరియు 7.6 సంఖ్యల సరాసరి ఎంత?

$$\text{సాధన : } 4.2, 3.8 \text{ మరియు } 7.6 \text{ సంఖ్యల సరాసరి} = \frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$$

2.4.2 (ఇ) ఒక దశాంశ సంఖ్యను మరొక దశాంశ సంఖ్యతో భాగించడం

ఒక దశాంశ సంఖ్యను, మరొక దశాంశ సంఖ్యతో ఏ విధంగా భాగించాలి అనుమతించాలి.

$$\text{ఉదాహరణకు } 35.5 \div 0.5 \text{ తీసుకుందాం. } 35.5 \div 0.5 = \frac{355}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{355}{10} \times \frac{10}{5} = 71$$

కావున $35.5 \div 0.5 = 71$ అయింది.

ఉదా 12 : ఒక బన్ని 92.5 కి.మీ దూరం ప్రయాణించడానికి 2.5 గంటలు పట్టాను. స్థిర వేగంతో బన్ని మొత్తం దూరం ప్రయాణిస్తే అది 1 గంటలో ప్రయాణించే దూరం ఎంత?

సాధన : బన్ని ప్రయాణించిన దూరం = 92.5 కి.మీ

ప్రయాణానికి పట్టిన కాలం = 2.5 గంటలు

$$\text{కావున } 1 \text{ గంటలో ప్రయాణించే కాలం} = \frac{92.5}{2.5} = \frac{925}{25} = 37 \text{ కి.మీ}$$



అభ్యాసం - 6

1. కింది వానిని సాధించండి

- | | | | | | |
|-------|-----------------|------|-----------------|-------|-------------------|
| (i) | 0.3×6 | (ii) | 7×2.7 | (iii) | 2.71×5 |
| (iv) | 19.7×4 | (v) | 0.05×7 | (vi) | 210.01×5 |
| (vii) | 2×0.86 | | | | |

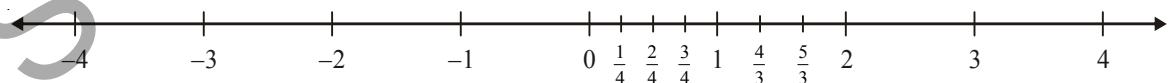
2. పొడవు 6.2 సె.మీ, వెడల్పు 4 సె.మీ గల దీర్ఘశతురపు వైశాల్యం కనుగొనండి.

3. కింది వానిని సాధించండి.
- | | | | | | |
|-------|--------------------|--------|--------------------|-------|--------------------|
| (i) | 21.3×10 | (ii) | 36.8×10 | (iii) | 53.7×10 |
| (iv) | 168.07×10 | (v) | 131.1×100 | (vi) | 156.1×100 |
| (vii) | 3.62×100 | (viii) | 43.07×100 | (ix) | 0.5×10 |
| (x) | 0.08×10 | (xi) | 0.9×100 | (xii) | 0.03×1000 |
4. ఒక మొటర్ బైక్ 1 లీటరు పెట్రోలు తో 62.5 కి.మీ దూరం ప్రయాణించగలదు. అదే వాహనం 10 లీటర్ల పెట్రోల్తో ఎంతదూరం ప్రయాణించగలదు?
5. కింది వానిని సాధించండి.
- | | | | | | |
|-------|--------------------|--------|---------------------|-------|----------------------|
| (i) | 1.5×0.3 | (ii) | 0.1×47.5 | (iii) | 0.2×210.8 |
| (iv) | 4.3×3.4 | (v) | 0.5×0.05 | (vi) | 11.2×0.10 |
| (vii) | 1.07×0.02 | (viii) | 10.05×1.05 | (ix) | 101.01×0.01 |
| (x) | 70.01×1.1 | | | | |
6. కింది వానిని సాధించండి.
- | | | | | | |
|-------|-------------------|------|---------------|-------|------------------|
| (i) | $2.3 \div 100$ | (ii) | $0.45 \div 5$ | (iii) | $44.3 \div 10$ |
| (iv) | $127.1 \div 1000$ | (v) | $7 \div 3.5$ | (vi) | $88.5 \div 0.15$ |
| (vii) | $0.4 \div 20$ | | | | |
7. ఒక క్రమ బహుభుజి యొక్క భుజం పొడవు 3.5 సెం.మీ దాని చుట్టూకొలత 17.5 సెం.మీ అయిన ఆ బహుభుజికి గల భుజాలు ఎన్ని?
8. ఒక ప్రదేశంలో 7 గంటల కాలంలో 0.896 సెం.మీ వర్షపొతం నమోదైనది. అయిన 1 గంటలో పడిన సగటు వర్షపొతం ఎంత?

2.5 అకరణీయ సంఖ్యల పరిచయం

2.5.1 ధనాత్మక భిన్నాలు

మనం పూర్తి సంఖ్యల గురించి, భిన్నాల గూర్చి నేర్చుకున్నాం. ఈ రెండింటిని సంఖ్య రేఖ పై గుర్తిస్తే ఏ విధంగా ఉంటుంది పరిశీలించాం.



మనకు 0 కు 1 కు మధ్య $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ వంటి సంఖ్యలున్నాయి. ఇవన్నీ 1 కన్నా తక్కువైన సంఖ్యలు. ఇవన్నీ క్రమభిన్నాలని,

క్రమభిన్నాలన్నీ $0, 1$ ల మధ్యన ఉంటాయని చెప్పావచ్చు. ఇదే విధంగా $\frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ అనేవి $1, 2$ ల మధ్యగల భిన్నాలు, ఈ

భిన్నాలు అప్క్రమ భిన్నాలని మనకు తెలుసు. వీటన్నింటిని ధనాత్మక భిన్నాలు అనవచ్చు.

ఇవి చేయండి

1. (i) 0 మరియు 1 ల మధ్య (ii) 1 మరియు 2 ల మధ్య ఉండే 5 భిన్నాలను రాయండి
2. $4\frac{3}{5}$ అనే భిన్నం సంఖ్య రేఖపై ఎక్కడ వుంటుంది?



సున్నకు ఎడమవైపున మనకు $-1, -2, -3 \dots$ వంటి హర్షణసంఖ్యలు ఉన్నాయి.

మనం సంఖ్య రేఖపై ఎడమ వైపుకు పోవు కొలది వీటి విలువ పెరుగుతున్నదా తగ్గుతున్నదా?

మనకు తెలిసి సంఖ్య రేఖ పై ఎడమ వైపుకు పోవు కొలది సంఖ్య విలువ తగ్గుతూ ఉంటుంది. సున్నకు ఎడమ ఎంతదూరం జరిగితే, ఆ సంఖ్య అంత చిన్నదవుతున్నది.

ఇవి చేయండి

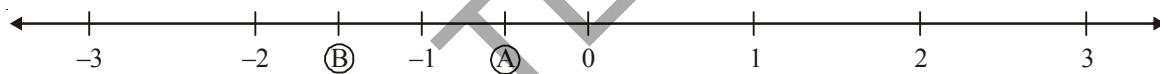
1. కింది సంఖ్యలలో అతి పెద్ద, అతి చిన్న సంఖ్యలేవి?
 - (i) $2, -2, -3, 4, 0, -5$
 - (ii) $-3, -7, -8, 0, -5, -2$
2. కింది సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో రాయండి.

 - (i) $-5, -75, 3 - 2, 4, \frac{3}{2}$
 - (ii) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 0, -1, -2, 5$



2.5.2 బుణాత్మక భిన్నాలు

కింద సంఖ్య రేఖపై A అనే బిందువును చూడండి.



ఇది 0 మరియు -1 ల మధ్య గలదు. ఈ సంఖ్య 0 కన్నా పెద్దదా? చిన్నదా?

అదే విధంగా ఇది $\frac{1}{2}$ అవుతుందా? కానీ ఇది సున్న కన్నా తక్కువ కాబట్టి $\frac{1}{2}$ కానేరదు.

$\frac{-9}{4}$ అనే సంఖ్యను సంఖ్య రేఖపై గుర్తించడానికి నేపో దానిని మొదట మిశ్రమ భిన్నంగా రాసింది $\frac{-9}{4} = -2\frac{1}{4}$ కాబట్టి దీనిని -2 మరియు -3 ల మధ్య గుర్తించింది.

ఇది సున్న కన్నా $\frac{1}{2}$ (సగం) తక్కువ కాబట్టి A ను మనం $-\frac{1}{2}$ అని రాస్తాం

ఇదే విధంగా B అనేది -1 మరియు -2 మధ్య బిందువైపు వున్నది కావున ఇది $-\frac{3}{2}$.

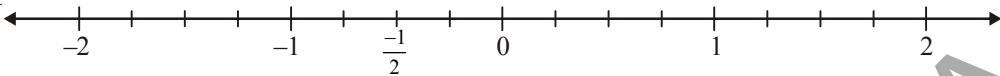
దీనిని బట్టి $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}$ వంటి బుణాత్మక భిన్నాలు, రెండు బుణ హర్షణ సంఖ్యల మధ్య లేదా సున్న మరియు ఒక బుణ హర్షణ సంఖ్యల మధ్య ఉంటాయని తెలుసుకోవచ్చు.

ఇవి చేయండి

1. కింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను ఇచ్చిన సంఖ్య రేఖపై గుర్తించండి.



- (i) $-\frac{5}{4}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $-\frac{7}{4}$ (v) $-\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{4}$



పెద్ద సంఖ్యరేఖను గీసి, దానిపై ఎక్కువ రుణ సంఖ్యలను, ధన సంఖ్యలను గుర్తించండి.

2. సంఖ్యరేఖపై కింది సంఖ్యలను పరిశీలించండి

$$27, -\frac{7}{8}, \frac{11}{943}, \frac{54}{17}, -68, -3, -\frac{9}{6}, \frac{7}{2}$$

(i) సంఖ్య రేఖపై కింది సంఖ్యలు ఏ పూర్ణ సంఖ్యలకు ఎడమవైపున ఉంటాయి?

- (a) 0 (b) -2 (c) 4 (d) 2

(ii) సంఖ్య రేఖపై కింది సంఖ్యలు ఏ పూర్ణ సంఖ్యలకు కుడివైపున ఉంటాయి?

- (a) 0 (b) -5 (c) $3\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{5}{2}$

2.5.3 అకరణీయ సంఖ్యలు

0, 1, 2, 3, 4, 5 సంఖ్యలు పూర్ణాంకాలు. ఆదే విధంగా -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 అనే సంఖ్యలు పూర్ణాంకాల కన్నా పెద్ద సముదాయం అయిన పూర్ణ సంఖ్యలని మనకు తెలుసు.

అన్ని పూర్ణాంకాలు కూడా పూర్ణ సంఖ్యలే కాని, అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు, పూర్ణాంకాలు కావని రాఫీ చెప్పింది. ఆమెతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? రాఫీ చెప్పినది సత్యం. ఎందుకంటే రుణ సంఖ్యలైన -5, -4, -3, -2, -1 వంటి సంఖ్యలు పూర్ణసంఖ్యలే కాని పూర్ణాంకాలు కావు. అందుచే అన్ని పూర్ణాంకాలు పూర్ణ సంఖ్యలే, కాని పూర్ణసంఖ్యలన్నీ పూర్ణాంకాలు కావు.

ధనాత్మక భిన్నాలైన $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{5}, \frac{8}{2}$ వంటివి పూర్ణాంకాల నిష్పత్తులు. అందుచే సాధారణంగా మనం ధనాత్మక

భిన్నాలను $\frac{w_1}{w_2}$ అని రాయవచ్చు. ఇందులో w_1 మరియు w_2 అనేవి రెండు పూర్ణాంకాలు మరియు w_2 సుస్వకు

సమానం కాదు.



ప్రయత్నించండి.

5 ధనాత్మక భిన్నాలను రాసి వాటిలో $w_1 w_2$ లను గుర్తించండి.

అకరణీయ సంఖ్యలనేవి అన్ని పూర్త సంఖ్యలు, ధనాత్మక భిన్నాలు మరియు రుణాత్మక భిన్నాలతో కూడిన ఒక పెద్ద సంఖ్యల సముదాయం. అందుచే $\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}, \frac{-7}{7}, \frac{-2}{7}, 0, \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{17}{5}, \frac{6}{1}$ వంటి సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు అగును.

ఈ సంఖ్యలన్నియూ రెండు పూర్తసంఖ్యల నిష్పత్తిగా చెప్పచ్చు. p, q లు అనేవి ఏవైనా రెండు పూర్త సంఖ్యలు, q సున్నకు సమానం కానప్పుడు $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయగలిగే సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.



ప్రయత్నించండి

- (i) ఏవైనా ఐదు పూర్త సంఖ్యలు తీసుకొని వీలైనన్ని అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.

(ii) ఏవైనా ఐదు అకరణీయ సంఖ్యలు తీసుకొండి. అవి ఏ పూర్తసంఖ్యలను కలిగియున్నవో తెలుపండి.

2.5.4 అకరణీయ సంబ్యులను పోల్చడం

$\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{9}{12}$ అనేవి రెండు సమాన భిన్నాలు. మనం భిన్నాలను పోలుచుటకు వాటిని సమాన భిన్నాలుగా మార్చి,

సమాన హోరాలను బట్టి పోల్చుతాం.

ఉదాహరణకు $\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{5}{7}$ లను పోల్చుదాం.

మొదట వీటికి సమాన భీన్సులను రాశాం.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{18}{24}, \frac{21}{28} \dots \text{முறியு}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14}, \frac{15}{21}, \frac{20}{28}, \dots$$

ఇప్పుడు మనం $\frac{21}{28}$ తో $\frac{20}{28}$ పోల్చువచ్చు. ఈ రెండింటిలో సమానహోరం ఉంది కావన

$\frac{21}{28}$ అనేది $\frac{20}{28}$ కన్నా పెద్దది.

$$\text{అందువలన } \frac{3}{4} > \frac{5}{7}$$



ప్రయత్నించండి

1. $\frac{3}{4}$ యొక్క సమాన భిన్నాలన్నీ సంఖ్యారేఖపై ఒకే బిందువు వద్దనే ఉంటాయా?
2. $\frac{6}{7}$ యొక్క సమాన భిన్నాలన్నీ సంఖ్యారేఖపై ఒకే బిందువు వద్ద ఉంటాయా?

$\frac{-1}{2}$ మరియు $\frac{-2}{3}$ ను పోల్చుదాం.

$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4}, \frac{-3}{6}, \frac{-4}{8} \dots$$

$$\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6}, \frac{-6}{9} \dots$$

$\frac{-3}{6}$ మరియు $\frac{-4}{6}$ లు సమాన హోరాలు కల్గివున్నాయి. కావున మనం వీటిని పోల్చువచ్చు.

$$\frac{-4}{6} < \frac{-3}{6} \quad (\frac{-4}{6} \text{ అనేది } \frac{-3}{6} \text{ కు సంఖ్యారేఖపై ఎడమవైపున ఉంటుంది})$$

$$\text{కావున } \frac{-2}{3} < \frac{-1}{2}$$



ప్రయత్నించండి

1. $\frac{-1}{2}$ మరియు $\frac{-3}{6}$ అనేవి సంఖ్యారేఖపై ఒకే బిందువు వద్ద ఉంటాయా?
2. $\frac{-2}{3}$ మరియు $\frac{-4}{6}$ అనేవి సంఖ్యారేఖపై ఒకేచోట ఉంటాయా?

ఉదా :- $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{4}$ లను సంఖ్యా రేఖపై సూచించునపుడు, రెండునూ ఒకేచోట ఏకీభవిస్తాయని కనుగొంటాం. కావున,

ఈ రెండూ సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు.

ఇవి చేయండి

1. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-7}{9}$ (iii) $-\frac{3}{7}$ లకు ఐదు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.



2. కింది వానిలో సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను గుర్తించండి.

$$(i) \frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-4}{8} \quad (ii) \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{2}{4}, \frac{20}{12}$$

సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కావాలంటే మనం ఇచ్చిన సంఖ్యలో లవ, హోరాలలో గల పూర్ణ సంఖ్యలను ఒకే సంఖ్యతో గుణించాలి లేదా భాగించాలి అని చెప్పంచు.

ఉదాహరణకు

$$\frac{1}{5} \text{ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కావాలంటే } \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10} \text{ మరొకటి } \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15} \text{ అగును.}$$

$$\text{ఇలాగే } \frac{-2}{7} \text{ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు కావాలంటే } \frac{-2 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-4}{14} \text{ మరొకటి } \frac{-2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{-6}{21} \text{ అగును.}$$

$$\text{ఈ విధంగా మనం సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనడానికి అకరణీయ సంఖ్యలను } \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \text{ లతో }$$

గుణిస్తాం.



అభ్యాసం - 7

1. కింది సంఖ్యలకు మూడేసి సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు రాయండి.

$$(i) \frac{2}{3} \quad (ii) -\frac{3}{8}$$

2. (i) హరం 12 ఉండే విధంగా $\frac{-15}{36}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్య రాయండి.

(ii) లవం -75 ఉండే విధంగా $\frac{-15}{36}$ కు సమాన అకరణీయ సంఖ్య రాయండి.

3. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించండి.

$$(i) \frac{1}{2} \quad (ii) \frac{3}{4} \quad (iii) \frac{3}{2} \quad (iv) \frac{10}{3}$$

4. కింది గణిత వాక్యములు సత్యములో, అసత్యములో గుర్తించండి.
- (i) ప్రతి పూర్జ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అట్లే ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య ఒక పూర్జ సంఖ్య ()
 - (ii) $\frac{p}{q}$ రూపంలోని అకరణీయ సంఖ్యలో q ఒక శూన్యేతర పూర్జ సంఖ్య ()
 - (iii) $\frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$ లు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలను సూచిస్తాయి. ()
 - (iv) ధన అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సమాన అకరణీయ సంఖ్యలన్నీ ధన రాశలే. ()

2.5.5 అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనము, వ్యవకలనము

గత తరగతులలో భిన్నాల సంకలనము, వ్యవకలనము గూర్చి తెలుసుకున్నాము. ఇదేవిధంగా అకరణీయ సంఖ్యలకు అన్వయిద్దాము.

అకరణీయ సంఖ్యల సంకలనము

$$\frac{5}{6} \text{ మరియు } \frac{3}{8} \text{ లు దెండు అకరణీయ సంఖ్యలు. ఈ అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తం ఎంత?}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$$

సంకలనము చేయుటకు వాటి హోరముల క.సా.గు. ను కనుగొనవలెను. 6, 8ల క.సా.గు. = 24.

వచ్చిన క.సా.గు.ను (ఒక్కాక్కు) హోరముతో భాగించగా..

$$24 \div 6 = 4$$

$$24 \div 8 = 3$$

జచ్చిన భిన్నాల లవ, హోరములను వచ్చిన భాగఫలములచే గుణించగా

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} + \frac{3 \times 3}{8 \times 3}$$

$$= \frac{20}{24} + \frac{9}{24} \Rightarrow \frac{29}{24}$$

జప్పుడు $\frac{5}{6}$ మరియు $\frac{3}{8}$ లను కూడండి.

$$\frac{5}{6} + \left(\frac{-3}{8} \right) = \left(\frac{5 \times 4}{6 \times 4} \right) + \left(\frac{(-3) \times 3}{8 \times 3} \right)$$

$$= \frac{20}{24} + \left(\frac{-9}{24} \right)$$

$$= \frac{20-9}{24}$$

$$= \frac{11}{24}$$

ఈ విధంగా కూడా చేయవచ్చును.

$$\frac{5}{6} + \left(\frac{-3}{8} \right) = \frac{(5 \times 4) + (-3 \times 3)}{24}$$

$$= \frac{20-9}{24}$$

$$= \frac{11}{24}$$

$$(i) \frac{4}{9} + \left(\frac{-5}{12} \right)$$

(ii) $\frac{-3}{5}$ మరియు $\frac{-7}{15}$ లను కూడండి.

$$(iii) \frac{-10}{11} + \frac{7}{10}$$

$$(iv) \frac{-8}{15} + \frac{-7}{20}$$

1. రెండు సహజ సంఖ్యల సంకలనము, ఎల్లపుడు ఆ రెండు సంఖ్యలతో ఒక్కాక్క దానికంటే పెద్దదేనా?
2. మీ జవాబు అపును అయితే, పై ప్రవచనము పూర్ణ సంఖ్యలకు కూడా వర్తిస్తుందా?
3. ఇది ఆకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా సత్యమేనా?

2.5.6 అకరణీయ సంఖ్యల వ్యవకలనము

$\frac{5}{6}$ మరియు $\frac{3}{8}$ అను రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు తీసుకొనుము.

$\frac{5}{6}$ నుండి $\frac{3}{8}$ ని తీసివేయండి.

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{(5 \times 4) - (3 \times 3)}{24}$$

$$= \frac{20-9}{24}$$

$$= \frac{11}{24}$$

ఉదాహరణలు:

(i) $\frac{-3}{5}$ నుండి $\frac{3}{8}$ ని తీసివేయండి.

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} - \left(\frac{-3}{8} \right) &= \frac{(5 \times 4) - (-3 \times 3)}{24} && 6, 8 \text{ల క.సా.గు.} = 24 \\ &= \frac{20 - (-9)}{24} \\ &= \frac{20 + 9}{24} \\ &= \frac{29}{24}\end{aligned}$$

జవి చేయండి

(i) $\frac{7}{16} - \left(\frac{-5}{12} \right) = ?$

(ii) $\frac{15}{4}$ నుండి $\frac{-12}{7}$ ని తీసివేయండి.

(iii) $\frac{-8}{15} - \frac{6}{21} = ?$



ఆలోచించండి - చర్చించండి

- (i) రెండు సహజ సంఖ్యల భేదం ఎల్లప్పుడు ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఒకొక్క దాని కంటే చిన్నదేనా?
- (ii) పూర్తసంఖ్యలకు కూడా ఇది సత్యమేనా?
- (iii) అకరణీయ సంఖ్యలకు కూడా ఇది సత్యమేనా?



మనం నేర్చుకున్నవి

1. భిన్నాల సంకలనం, వ్యవకలనం చేయాలంటే, వాటిని సజాతి భిన్నాలుగా మార్చాలి.
2. రెండు భిన్నాల గుణకారం అనగా
$$\frac{\text{లవాల లబ్దం}}{\text{హోల లబ్దం}}$$
3. ‘లో’ (OF) అనే అక్షరం రెండు సంఖ్యల గుణకారాన్ని తెల్పుతుంది.
ఉదా : 6 లో
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$
4. రెండు క్రమభిన్నాల లబ్దం, గుణించిన ప్రతి క్రమభిన్నం విలువ కన్నా తక్కువ. ఒక క్రమ, అప్కరమ భిన్నాల లబ్దం గుణించిన అప్కరమ భిన్నం విలువ కన్నా తక్కువ మరియు క్రమభిన్నం విలువ కన్నా ఎక్కువ.

5. ఒక భిన్నం యొక్క వ్యత్పమం అనగా లవ, హరాలను తారుమారు చేయగా ఏర్పడిన భిన్నం.
6. మనం భిన్నాల భాగహరోన్ని గమనించాం.
- (i) ఒక పూర్ణాంకాన్ని భిన్నంచే భాగించునపుడు, ఆ పూర్ణాంకాన్ని భిన్నం యొక్క వ్యత్పమంతో గుణించాం.
 - (ii) ఒక భిన్నాన్ని పూర్ణాంకంచే భాగించునపుడు, ఆ భిన్నాన్ని పూర్ణాంకం యొక్క వ్యత్పమంతో గుణించాం.
 - (iii) ఒక భిన్నాన్ని, మరొక భిన్నంతో భాగించునపుడు, మొదటి భిన్నాన్ని రెండవ భిన్నం యొక్క వ్యత్పమంతో గుణించాం. ఉదా : $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.
7. మనం దశాంశ సంఖ్యలను గుణించడం కూడా నేర్చుకున్నాం. రెండు దశాంశ సంఖ్యలు గుణించునపుడు, వాటిని మనం పూర్ణ సంఖ్యలుగా భావించి గుణించాలి. తర్వాత దశాంశ సంఖ్యలలో దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున గల దశాంశ స్థానాలను లెక్కించి, లబ్బంలో వాటి మొత్తం సంఖ్య స్థానాలు కుడి వైపు నుండి విడిచి దశాంశ బిందువు ఉంచాలి.
8. ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలచే గుణించునపుడు, ఈ సంఖ్యలలో సున్నాల సంఖ్యను లెక్కించి లబ్బంలో అన్ని స్థానాలు కుడివైపుకు దశాంశ సంఖ్యలో గల దశాంశ బిందువును జరుపుతాం.
9. దశాంశ సంఖ్యలను భాగహరం ఏ విధంగా చేయాలో నేర్చుకున్నాం.
- (i) ఒక దశాంశ సంఖ్యను పూర్ణాంకంచే భాగించునపుడు, వాటిని పూర్ణాంకాలుగా భావించి మొదట భాగిస్తాం. తర్వాత భాగఫలంలో దశాంశ బిందువును విభాజింలో వలే ఉంచుతాం.
 - (ii) ఒక దశాంశ సంఖ్యను 10, 100, 1000 వంటి సంఖ్యలచే భాగించునపుడు, ఈ సంఖ్యలలో సున్నాల సంఖ్యను లెక్కించి భాగఫలంలో అన్ని స్థానాలు ఎడమవైపుకు దశాంశ బిందువును జరుపుతాం.
 - (iii) రెండు దశాంశ సంఖ్యలను భాగించునపుడు, విభాజకంను పూర్ణాంకం చేయుటకు లవ, హరాలను సమాన స్థానాలు జరిపి భాగించాలి.
10. అకరణీయ సంఖ్యలనేవి అన్ని పూర్ణ సంఖ్యలు, అన్ని ధనాత్మక భిన్నాలు మరియు అన్ని రుణాత్మక భిన్నాలు కలిసి ఉన్న ఒక పెద్ద సంఖ్యల సముదాయం. $\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}, \frac{-7}{7}, \frac{-2}{7}, 0, \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{17}{5}, \frac{6}{1}$ వంటి సంఖ్యలన్నీ అకరణీయ సంఖ్యలే. ఇవన్నియూ రెండు పూర్ణ సంఖ్యల నిష్పత్తులే. అందుచే (ఆ) p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలై యుండి (ఆ) q సున్నకు సమానం కాకుండా వున్న సందర్భంలో $\frac{p}{q}$ రూపంలో ఉన్న సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

జాన్ నేపియర్ (స్క్యూట్లాండ్) 1550 - 1617 AD

సంవర్గ మానాలను రూపొందించాడు. గుణకారాలకు నేపియర్ పట్టిలను ప్రవేశపెట్టాడు. అదే విధంగా దశాంశ భిన్నాలను ప్రవేశపెట్టిన గణిత శాస్త్రవేత్త.



సామాన్య సమీకరణాలు

3.0 పరిచయం

మీరు 6వ తరగతిలో $4x = 44$, $2m = 10$ వంటి సామాన్య సమీకరణాల గురించి తెలుసుకొని వుంటారు. ఇటువంటి సమీకరణాలతో కొన్ని పజిల్స్ మరియు నిత్యజీవిత సమస్యలు ఎలా సాధించవచ్చే మీకు తెలుసు. మీరు నేర్చుకున్న సామాన్య సమీకరణాలను వాటి సాధనలను పునర్విష్టాలను ద్వారా గుర్తుకు తెచ్చుకుండాం.



అభ్యాసం - 1

1. కింది సామాన్య సమీకరణాలలో L.H.S మరియు R.H.S లను గుర్తించండి.

(i) $2x = 10$	(ii) $2x - 3 = 9$
(iii) $4z + 1 = 8$	(iv) $5p + 3 = 2p + 9$
(v) $14 = 27 - y$	(vi) $2a - 3 = 5$
(vii) $7m = 14$	(viii) $8 = q + 5$
2. క్రింది సమీకరణాలను యత్న-దేఖ పద్ధతిలో సాధించండి.

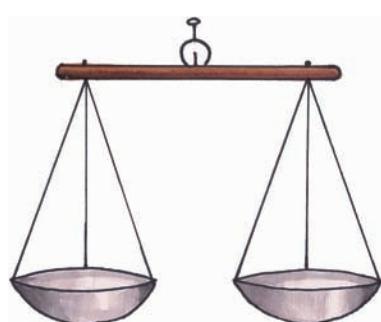
(i) $2 + y = 7$	(ii) $a - 2 = 6$
(iii) $5m = 15$	(iv) $2n = 14$

3.1 సమీకరణం - బరువులు తూచే త్రాను

సామాన్య సమీకరణాలను, సామాన్య త్రానుతో పోల్చువచ్చునని 6వ తరగతిలో మీరు తెలుసుకున్నారు కదా!

ఒక త్రాను యొక్క ఎడమ వైపు పళ్ళింలో 5 కి.గ్రా. బరువు, కుడివైపు పళ్ళింలో 2 కి.గ్రా. బరువు వేస్తే ఏమాతుంది? అదేవిధంగా ఎడమ వైపు పళ్ళింలో 3 కి.గ్రా. బరువు, కుడి వైపు పళ్ళింలో 7 కి.గ్రా. బరువు వేస్తే ఏమాతుంది?

అలాగే ఎడమ వైపు పళ్ళింలో 3 కి.గ్రా. బరువు, కుడివైపు పళ్ళింలో 3 కి.గ్రా. బరువులు వేస్తే త్రాను ఏవిధంగా ఉంటుందో పరిశీలించండి.



త్రాను యొక్క రెండు పళ్ళిలలో సమాన బరువులు ఉన్నప్పుడే అది ఖచ్చితంగా సరి తూగునని గమనించండి.

ఇదే సూత్రం మనకు సమానత్వ సూత్రాలలో కనబడుతుంది.

ఈ సమానత్వాన్ని పరిశీలించండి.

$$12 - 2 = 6 + 4$$

ఇచ్చట

$$(\text{ఎడమవైపు}) \ L.H.S = 12 - 2 = 10 \quad \text{మరియు}$$

$$(కుడివైపు) \quad R.H.S = 6 + 4 = 10$$

కుడి, ఎడమలు సమానం కావున, ఇచ్చట సమానత్వం వర్తించింది.

1. ఇదే సమీకరణానికి ఇరువైపులా 3 కలవండి. ఏమోతుంది? ఇరువైపులా విలువలు సమానం అవుతాయా? ఒకవేళ ఇరువైపులా 10 కలిపినా కూడా సమానమేనా? మీరు కూడా మరికొన్ని సంఖ్యలు తీసుకొని ప్రయత్నించండి.
 2. ఇదే సమీకరణాల నుండి ఇరువైపులా 5 తీసివేయండి. రెండు వైపులా సమానంగా ఉన్నాయా? ఇదే విధంగా 7 ను ఇరువైపులనుండి తీసివేసిన కూడా సమానమేనా? మీరు కూడా మరిన్ని సంఖ్యలు తీసుకుని సమానత్వాన్ని పరిశీలించండి.
 3. ఇదే సమానత్వంనకు ఇరువైపుల గల సంఖ్యలను 6 చేగుణించి పరిశీలించండి. ఇరువైపులా సమానమేనా? ఇదే విధంగా 8 చేత కూడా గుణించి చూడండి. మీకు నచ్చిన మరిన్ని సంఖ్యలు తీసుకొని గుణించి, సమానత్వం చూడండి.
 4. ఇదే సమానత్వ సమీకరణంను తీసుకొని ఇరువైపులా 5 చే భాగించి చూడండి. ఇరువైపులా సమానం అయినదా? ఈ సమీకరణంను ఇరువైపులా 2చే భాగించినప్పుడు సమానమేనా?

పైన మీరు ప్రక్రియలు చేసిన అన్ని సందర్భాలలోనూ మీకు “అవును” అనే సమాధానమే వచ్చింది కదూ!

ఆందుచే, మనం సమానత్వంనకు ఇరువైపులా గల రాశులకు ఒకే సంఖ్యను కూడినా, తీసివేసినా ఒకే సంఖ్యచే గుణించినా లేదా భాగించినా, సమానత్వంలో ఎటువంటి మార్పులేదని గమనించవచ్చును.

ఈ సమానత్వ ధర్మాన్ని మనం సాధించబోయే సమీకరణాల సాధనలలో ఉపయోగిస్తాం!

3.2 సమీకరణాల సాధన

మీరు ఇప్పతీకే యిత్తుదోష పద్ధతిలో సమీకరణాలను సాధించడం నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు మనం సమానత్వ ధర్మాలను ఆధారంగా చేసుకొని సమీకరణాలను మరింత సులభంగా త్వరితంగా సాధించడం నేర్చుకుందా.

మనం సమీకరణాలను సమానత్వ ధర్యాలను ఆధారంగా చేసుకొని సాధించాలంటే మొదట సమానత్వ గుర్తునకు ఇరువైపుల గల అంకపదాలను, బీజీయ పదాలను గుర్తించాలి. తదుపరి సమానత్వ ధర్యాలనుపయోగించి సాధించాలి.

క్రింది ఉదాహరణలను పరిశీలిదాం.

ఉదా. 1: $x + 3 = 7$ సాధించండి.

$$\text{సాధన: } x + 3 = 7 \dots\dots\dots (1)$$

ఈ సమీకరణంలో $L.H.S = x + 3$. ఏలువ కంటే 3 ఎక్కువ.

'x' విలువ కనుగొనాలంటే L.H.S నుండి 3 ను తొలగించాలి. అందుచే L.H.S నుండి 3 ను తీసివేయాలి. సమానత్వధర్యం ప్రకారం L.H.S నుండి 3 తీసివేస్తే, R.H.S నుండి కూడా 3 ను తీసివేయాలి. అప్పుడే సమీకరణం సమానత్వం ధర్యాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

$$\begin{aligned}x + 3 &= 7 \text{ అని ఇవ్వబడింది.} \\x + 3 - 3 &= 7 - 3 \\x &= 7 - 3 \quad \dots \dots \dots \quad (2) \\x &= 4\end{aligned}$$

(1), (2) లనుండి గమనించినది ఏమనగా RHS నుండి '+3' తొలగించాలంటే RHS నుండి 3 తీసివేయబడింది. దీని అర్థం RHS లో గల '+3' పదం RHS లోనికి మార్చేటప్పుడు '-3' గా పక్కాంతరం చెందినది.

ಅಂದುವಲನ, $x = 4$ ಅಯಿನದಿ.

సరి చూచుట : $x = 4$ విలువను సమీకరణంలోగల L.H.S, R.H.S లలో ప్రతిక్షేపించిన

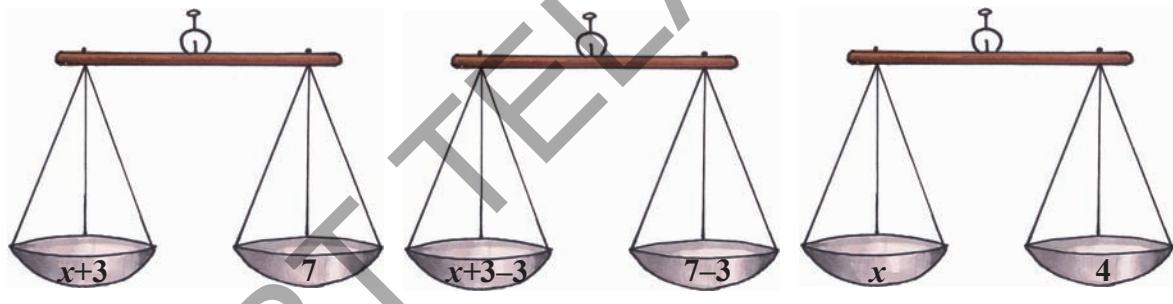
$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= x + 3 \\ &= 4 + 3 && (x = 4 \text{ න්‍ය } [\text{ප්‍රතික්ෂේපීයෝගා]) \end{aligned}$$

$$\text{L.H.S} = 7$$

$$\text{R.H.S} = 7$$

కావున L.H.S = R.H.S.

పై ఉదాహరణను కింది పటంలో చూపినట్లుగా త్రాసునందు పరిశీలించండి.



ಉದಾ. 2 : $y - 7 = 9$ ನು ಸಾಧಿಂಚಂಡಿ.

ఇచ్చట సమీకరణంలో L.H.S = y - 7

y - 7 విలువను కనుగొనడానికి సమీకరణం ఇరువైపులా 7 ను కలపాలి.

$$\text{അംദുചേ, } \quad y - 7 + 7 = 9 + 7$$

$$y = 9 + 7 \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\text{కావున} \qquad \qquad \qquad y = 16.$$

సరిచూచుట : సమీకరణంలో y కు బదులుగా 16ను ప్రతిక్షేపించి $L.H.S = R.H.S$ అగునేమో పరిశీలించండి.

(1), (2) లను గమనిస్తే సమీకరణానికి LHS లోగల '−7' RHS లోనికి '+7' గా పక్కాంతరం చెందివది.

$$\text{ఉదా 3: } 5x = -30 \text{ సాధించండి.}$$

$$\text{సాధన : } \quad 5x = -30 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{-30}{5} \quad (\text{ఇరువైపులనూ 5 చే భాగించగా})$$

$$x = \frac{-30}{5} \dots \dots \dots (2)$$

$$x = -6$$

సరిచూచుట : $x = -6$ విలువను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

L.H.S = R.H.S అగునేమో పరిశీలించండి.

(1), (2)లను పరిశీలిస్తే LHS లో x గుణకం ‘5’, RHS లోనికి విభజకం ‘5’గా ఘర్షించి చెందినది.

కుదా 4: $\frac{z}{6} = -3$ ను సాధించండి.

$$\text{సాధన : } \frac{z}{6} = -3 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$6\left(\frac{z}{6}\right) = 6 \times (-3) \quad (\text{ఇరువైపులా } 6 \text{ చే గుణించగా)$$

$$z = 6 \times (-3) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

z = -18

సరిచూచుట : $z = -18$ విలువను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించిన

L.H.S = R.H.S අගුන්වෝ පරිජ්‍යිලිංචංදී.

(1), (2)లను పరిశీలిస్తే LHS లో
విభాజకం ‘6’, RHS లోనికి గుణకం
‘6’గా రూపొంతరం చెందినట్లుగా
గమనించవచ్చు.

ఉదా 5 : $3x + 5 = 5x - 11$ సాధించండి.

$$\text{సాధన: } 3x + 5 = 5x - 11$$

$$3x + 5 - 5x = 5x - 11 - 5x \quad (\text{ఇరువైపులా } 5x \text{ తీసివేయగా)$$

$$-2x + 5 = -11$$

$$-2x + 5 - 5 = -11 - 5 \quad (\text{ఇరువైపులా '5' తీసివేయగా})$$

$$-2x = -16$$

ఇరువైపులను '-2' చే భాగించగా

$$x = 8$$

సరిచూచుట : $x=8$ విలువను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$$\text{L.H.S} = 3x + 5 = 3(8) + 5 = 24 + 5 = 29$$

$$\text{R.H.S} = 5x - 11 = 5(8) - 11 = 40 - 11 = 29$$

$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$



గమనించండి.

గుర్తులు పక్కాంతరం చెందడమనగా

‘+ రాశి’ పక్కాంతరం చెందిన ‘- రాశి’ గానూ

‘- రాశి’ పక్కాంతరం చెందిన ‘+ రాశి’ గానూ

‘x రాశి’ పక్కాంతరం చెందిన \div రాశి’ గానూ

\div రాశి’ పక్కాంతరం చెందిన ‘x రాశి’ గానూ మార్పు చెందడం.

ఉండా 6 : $12 = x + 3$ సాధించండి.

సాధన : L.H.S లో గల 12 ను R.H.S వైపుకు మార్పునపుడు -12 అగును. అదేవిధంగా R.H.S వైపునగల $x+3$ ను L.H.S కు మార్పునపుడు $-x - 3$ అగును.

$$\text{అనగా } -x - 3 = -12$$

$$\text{ఇరువైపులా } (-1) \text{ చే గుణించగా}$$

$$-1 (-x - 3) = -1 (-12)$$

$$x + 3 = 12$$

అందువలన సమీకరణంలో **L.H.S** మరియు **R.H.S** నందు గల పదాలను తారుమారు చేసిననూ సమీకరణంలో ఎటువంటి మార్పులేదని గమనించగలరు.

$$\text{జప్పుడు } x = 12 - 3$$

$$x = 9 \text{ అయినది}$$



అభ్యాసం - 2

1. కింది సమీకరణాలలో పదాలను పక్కాంతరం చెందించకుండా సాధించి, ఘలితాలను సరిచూడండి.

(i) $x + 5 = 9$

(ii) $y - 12 = -5$

(iii) $3x + 4 = 19$

(iv) $9z = 81$

(v) $3x + 8 = 5x + 2$

(vi) $5y + 10 = 4y - 10$

2. కింది సమీకరణాలలో పదాలను పక్కాంతరం చెందించడం ద్వారా సాధించి, ఘలితాలను సరిచూడండి.

(i) $2 + y = 7$

(ii) $2a - 3 = 5$

(iii) $10 - q = 6$

(iv) $2t - 5 = 3$

(v) $14 = 27 - x$

(vi) $5(x+4) = 35$

(vii) $-3x = 15$

(viii) $5x - 3 = 3x - 5$

(ix) $3y + 4 = 5y - 4$

(x) $3(x - 3) = 5(2x + 1)$

3.3 నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలో సామాన్య సమీకరణాల వినియోగం

కింది ఉండాపూరణాలను పరిశీలించండి.

- (i) తరగతిలో బాలబాలికల మొత్తం సంఖ్య 52. బాలికల సంఖ్య, బాలుర సంఖ్య కన్నా 10 ఎక్కువ అయిన బాలుర సంఖ్య ఎంత?
- (ii) రాము తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు, రాము వయస్సుకు 3 రెట్లు. 5 సంవత్సరాల తర్వాత వారిద్దరి వయస్సుల మొత్తం 70 సంవత్సరాలు అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులు కనుగొనండి.
- (iii) ఒక పర్సులో కొన్ని ₹10 మరియు కొన్ని ₹ 50 నోట్లు మొత్తం కలిపి ₹ 250 కలవు. ₹ 50 నోట్లు సంఖ్య కన్నా, ₹ 10 నోట్లు సంఖ్య ఒకటి ఎక్కువ. అయిన ప్రతి రకం నోట్లు ఎన్నోన్ని గలవో తెలపండి.
- (iv) ఒక దీర్ఘపథురస్తం యొక్క పొదవు దాని వెడల్పుకు రెట్లింపు కన్నా 8 తక్కుపగా కలదు. దీర్ఘపథురస్తం యొక్క చుట్టూకొలత 56 మీ. అయిన పొదవు, వెడల్పులు కనుగొనము.
పైన పేర్కొన్న అనేక రకాల నిత్యజీవిత సమస్యల సాధన కొరకు సామాన్య సమీకరణాలను ఉపయోగిస్తాం.

ఇటువంటి సమస్యల సాధనకొరకు దిగువ సోపానాలు అనుసరించవచ్చను.

సోపానం 1 : సమస్యను సమగ్రంగా చదివాలి.

సోపానం 2 : తెలియని లేదా కనుగొనవల్సిన రాశులను గుర్తించి వాటిని x, y, z, u, v, w, p, t వంటి చరరాశులతో సూచించాలి.

సోపానం 3 : సమస్యలో పదాల మద్య సంబంధం ఏర్పరిచే బీజీయ సమాసాలు పొందుపరిచి సమీకరణం రూపొందించాలి.

సోపానం 4 : సమీకరణం సాధించాలి.

సోపానం 5 : ఫలితాన్ని సరిచూడాలి.

ఉండా 7 : ఒక తరగతిలో గల బాలబాలికల మొత్తం సంఖ్య 52. బాలుర కన్నా బాలికలసంఖ్య 10 ఎక్కువైన, బాలుర సంఖ్య ఎంత?

సాధన : తరగతిలో బాలుర సంఖ్య x అనుకొనుము

$$\text{అయిన బాలికల సంఖ్య} = x + 10$$

$$\begin{aligned} \text{తరగతిలో బాల, బాలికల మొత్తం సంఖ్య} &= x + (x + 10) \\ &= x + x + 10 \\ &= 2x + 10 \end{aligned}$$

$$\text{తక్కుపకారం బాల బాలికల మొత్తం సంఖ్య} = 52$$

$$\text{కావున } 2x + 10 = 52 \text{ అగును.}$$

సమీకరణం సాధించగా

$$2x = 52 - 10 \quad (\text{10 ను L.H.S నుండి R.H.S కు పక్కాంతరం చేయగా)$$

$$2x = 42$$

$$x = \frac{42}{2} \quad (2 \text{ ను L.H.S నుండి R.H.S కు పక్కాంతరం చేయగా)$$

$$x = 21$$

అందుచే బాలుర సంఖ్య = 21 మరియు

బాలికల సంఖ్య = $21 + 10 = 31$ అగును.

సరిచూచుట : $21 + 31 = 52$ అనగా తరగతిలో బాలబాలికల మొత్తం 52.

మరియు $31 - 21 = 10$ అనగా బాలికలు, బాలుర కన్నా 10 మంది ఎక్కువ కలరు.

ఉదా 8 : రాము యొక్క తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు, రాము ప్రస్తుత వయస్సుకు మూడు రెట్లు కలదు. 5 సంల తర్వాత వారి వయస్సులమొత్తం 70 సం॥ అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులు ఎంతం?

సాధన : రాము ప్రస్తుత వయస్సు = x సం॥ అనుకొనిన

ఆతని తండ్రి ప్రస్తుత వయస్సు = $3x$ సం॥

5 సం॥ తర్వాత రాము వయస్సు = $x + 5$ సం॥

ఆతని తండ్రి వయస్సు = $3x + 5$ సం॥

5 సం॥ తర్వాత వారి యొక్క వయస్సుల మొత్తం = $(x + 5) + (3x + 5) = 4x + 10$ సం॥

కానీ లెక్కప్రకారం, 5సం॥ తర్వాత వారి వయస్సుల మొత్తం $4x + 10 = 70$

$$4x = 70 - 10$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4} = 15$$

అందుచే రాము యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు = 15 సం॥

తండ్రి యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు = 3×15 సం॥ = 45 సం॥



సరిచూచుట :

15కు 3 రెట్లు 45 అంటే ప్రస్తుతం తండ్రి వయస్సు రాము వయస్సుకు 3 రెట్లు

5 సం॥ తర్వాత తండ్రి వయస్సు = $45 + 5 = 50$ సం॥

5 సం॥ తర్వాత రాము వయస్సు = $15 + 5 = 20$ సం॥

వారి వయస్సుల మొత్తం = $50 + 20 = 70$ సం॥

సరిచూడబడినది.

ఉదా 9 : ఒక పర్మలో కొన్ని ₹10 మరియు కొన్ని ₹ 50 నోట్లు మొత్తం కలిపి ₹ 250 కలవు. ₹ 50 నోట్లు సంఖ్య కన్నా ₹ 10 నోట్లు సంఖ్య ఒకటి ఎక్కువగా కలదు. అయిన ప్రతి రకం నోట్లు ఎన్నోన్ని కలవో తెలుపండి.

సాధన : ₹ 50 నోట్లు సంఖ్య = x అనుకొనిన

అప్పుడు మొత్తం ₹ 50 నోట్లు విలువ = $50x$

మరియు ₹ 10 నోట్లు సంఖ్య = $x + 1$ అవుతుంది.

మొత్తం ₹ 10 నోట్లు విలువ = $10(x+1)$

$$\begin{aligned}
 \text{పర్సులో మొత్తం పైకం} &= 50x + 10(x + 1) \\
 &= 50x + 10x + 10 \\
 &= 60x + 10
 \end{aligned}$$

కాని లెక్క ప్రకారం పర్సులో గల మొత్తం పైకం = ₹ 250

$$\text{అందుచే } 60x + 10 = 250 \text{ అగును.}$$

$$60x = 250 - 10$$

$$60x = 240$$

$$x = \frac{240}{60}$$

$$x = 4$$

కావున ₹ 50 నోట్ల సంఖ్య = 4

$$₹ 10 \text{ నోట్ల సంఖ్య} = 4 + 1 = 5$$

సరిచూచుట :

$$₹ 10 \text{ నోట్ల సంఖ్య} (5), ₹ 50 \text{ నోట్ల సంఖ్య} (4) \text{ కన్నా } 1 \text{ ఎక్కువ.}$$

$$\text{పర్సులో గల మొత్తం పైకం} = 50(4) + 10(5)$$

$$= 200 + 50$$

$$= ₹ 250 \text{ సరి చూడబడినది.}$$

ఉదా 10 : ఒక దీర్ఘచతురప్రం యొక్క పొడవు దాని వెడల్పుకు రెట్లింపు కన్నా 8 తక్కువగా కలదు. దీర్ఘచతురప్రం యొక్క చుట్టుకొలత 56 మీ. అయిన దాని పొడవు, వెడల్పులు కనుగొనము.

సాధన : దీర్ఘచతురప్రం వెడల్పు = x మీ. అనుకొనము.

$$\text{వెడల్పునకు రెట్లింపు} = 2x \text{ మీ.}$$

$$(\text{లెక్క ప్రకారం}) \text{ పొడవు} = 2x - 8 \text{ మీ.}$$

$$\text{దీర్ఘచతురప్రం చుట్టుకొలత} = 2(\text{పొడవు} + \text{వెడల్పు})$$

$$= 2(2x - 8 + x) \text{ మీ.}$$

$$= 2(3x - 8) \text{ మీ.}$$

$$= 6x - 16 \text{ మీ.}$$

కాని, లెక్క ప్రకారం దీర్ఘచతురప్రం చుట్టుకొలత = 56 మీ॥

$$\text{కావున}$$

$$6x - 16 = 56$$



$$6x = 56 + 16$$

$$6x = 72$$

$$x = \frac{72}{6}$$

$$x = 12$$

దీర్ఘవతురప్రం వెడల్చు = 12 మీ.

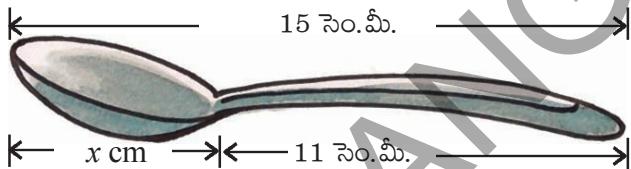
పొడవు = $2 \times 12 - 8 = 16$ మీ.

సరిచూచుట : చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్చు) = 2 (12+16) = 2 (28) = 56 మీ.



అభ్యాసం - 3

1. క్రింది పటంలో చూపిన సమాచారంను సమీకరణ రూపంలో ప్రాయండి. సమీకరణం సాధించి x విలువ కనుగొనండి.



2. క్రింది పటంలో చూపిన సమాచారం ను సమీకరణ రూపంలో ప్రాయండి. సమీకరణం సాధించి 'y' విలువ కనుగొనండి.



3. ఒక సంఖ్యను రెట్టింపు చేసి 7 కలుపగా 49 అయినది. అయిన ఆ సంఖ్యాపుది?
4. ఒక సంఖ్యకు మూడు రెట్లు నుండి 22 ను తీసివేయగా 68 వచ్చింది. అయిన ఆ సంఖ్య ఏది?
5. ఏ సంఖ్యను 7 చే గుణించి లభిం నుండి 3 తగ్గించగా అది 53 కు సమానం అగునో కనుక్కొంది.
6. రెండు సంఖ్యల మొత్తం 95. అందులో ఒక సంఖ్య రెండవ దాని కన్నా 3 ఎక్కువ. అయిన ఆ సంఖ్యలు ఏవి?
7. మూడు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మొత్తం 24. అయిన ఆ సంఖ్యలేవి?
8. క్రింది దీర్ఘవతురప్రం యొక్క చుట్టుకొలత 72 మీ॥ అయిన పొడవు, వెడల్చులను కనుగొనుము.

$$5x + 4$$



9. ఒక దీర్ఘవతురప్రం యొక్క పొడవు, వెడల్చు కన్నా 4 మీ॥ ఎక్కువ. దాని చుట్టు కొలత 84 మీ. అయిన పొడవు, వెడల్చులు కనుగొనుము.

10. 15 సం॥ తర్వాత హేమయ్యుక్క వయస్సు ఆమె ప్రస్తుత వయస్సుకు 4 రెట్లు అగును. అయిన ఆమె ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?
11. 63 బహుమతుల మొత్తం విలువ ₹ 3000. ఈ బహుమతులలో ₹ 100 మరియు ₹ 25 విలువ గలవి ఉన్నచో అవి ఒక్కొక్కరకం ఎన్నోన్ని ఉన్నాయో తెలపండి.
12. ఒక సంఖ్యను రెండు భాగాలు చేయగా మొదటి భాగం రెండవ దాని కన్నా 10 ఎక్కువ మరియు ఈ భాగాల నిప్పుత్తి 5:3 అయిన ఆ సంఖ్యను మరియు రెండు భాగాలను కనుగొనండి.
13. “నేను అనుకున్న ఒక సంఖ్యను 5 చే గుణించి 8 కలిపినా లేదా అదే సంఖ్యను 20 నుండి తీసివేసినా ఘలితం ఒకటే వస్తుంది” అని సుహోనా చెప్పింది. సుహోన అనుకున్న సంఖ్యను తెల్పండి.
14. “తరగతిలో అత్యధిక మార్గులు పొందిన విద్యార్థి మార్గులు, అత్యల్పమార్గులు పొందిన విద్యార్థి మార్గులను రెట్లింపు చేసి 7 కలిపిన సమానమైనాయి” అని ఉపాధ్యాయుడు తెలిపాడు. తరగతిలో అత్యధిక మార్గులు పొందిన విద్యార్థికి 87 వచ్చిన అయిన అత్యల్ప మార్గులు పొందిన విద్యార్థి మార్గులు ఎన్ని?
15. ప్రక్క పటంలో 3 కోణాలు ఇప్పబడ్డాయి. వాటిని కనుగొనండి.
(సూచన : సరళరేఖ పై ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పడిన కోణాల మొత్తం 180°)
16. క్రింది పొదుపు కథను చదివి సాధించండి.

నేనోక సంఖ్యను

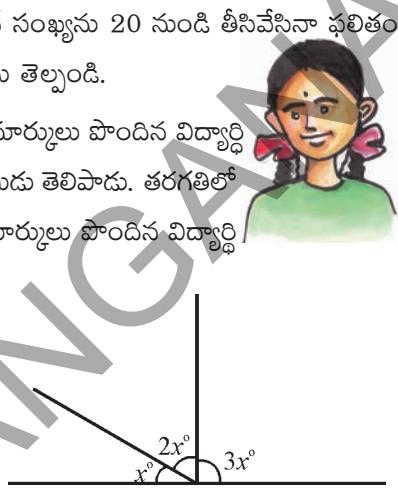
నన్ను గుర్తించగలవా?

నన్ను రెట్లింపు చేసి

దానికి 36 కలిపి చూడు!

నేను శతకానికి చేరాలంటే

నాకు ఇంకా నాలుగు కావాలి.



మనం నేర్చుకున్నవి.



- సామాన్య సమీకరణాలు మన నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలో అనేక రకాలుగా ఉపయోగపడతాయి.
- సమీకరణాన్ని సమానత్వం చేయడానికి మనం
 - ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యను కలుపవచ్చు.
 - ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యను తీసివేయవచ్చు.
 - ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యతో గుణించవచ్చు.
 - ఇరువైపులా ఒకే సంఖ్యతో భాగించవచ్చు.
- ఒక సమీకరణం యొక్క ఎడమ వైపు పదాలు (LHS) మరియు కుడివైపు పదాలు (RHS) ఇరువైపులా తారుమారు చేసిననూ సమానత్వంలో మార్పు ఉండదు.

రేఖలు - కోణములు

4

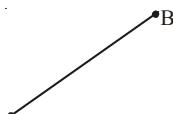
4.0 పరిచయం

క్రింది తరగతులలో కొన్ని జ్యామితీయ భావనలను గూర్చి నేర్చుకొనియున్నారు. వీటిని గూర్చి మరికొన్ని విషయాల్ని సరదాగా నేర్చుకుండా!



అభ్యసం - 1

1. కింది వాటికి పేర్లివ్వండి.



(i)



(ii)



(iii)



(iv)

2. కింది వానిని సూచించు పట్టాలను గీయండి.

(i) \overrightarrow{OP}

(ii) బిందువు X

(iii) \overrightarrow{RS}

(iv) \overline{CD}

3. కింద ఇవ్వబడిన పటములో సాధ్యమైనన్ని రేఖాఖండాల పేర్లను తెలుపండి.



4. నీ పరిశీలనలో నీవుగమనించిన కోణములకు సంబంధించిన ఏవేని ఐదు ఉదాహరణలిమ్ము.

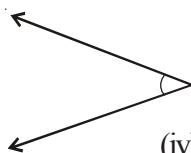
ఉదా : కత్తెరనుపయోగించునపుడు, రెండు పదునైన అంచుల మధ్యకోణం.

5. కింద ఇవ్వబడిన కోణాలలో ఏవేవి అల్లు, లంబ మరియు అధిక కోణాలో గుర్తించండి.

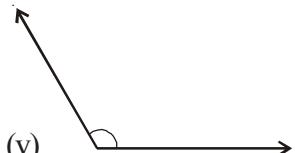
(i)

(ii)

(iii)

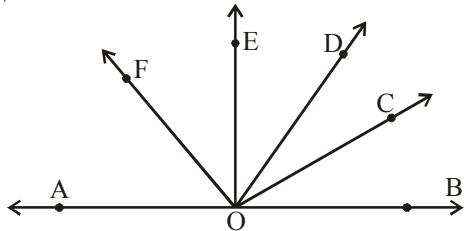


(iv)

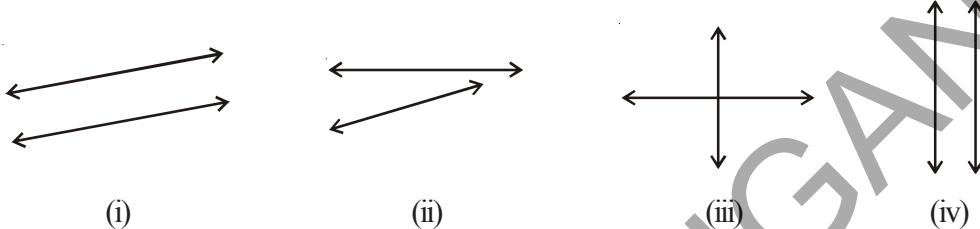


(v)

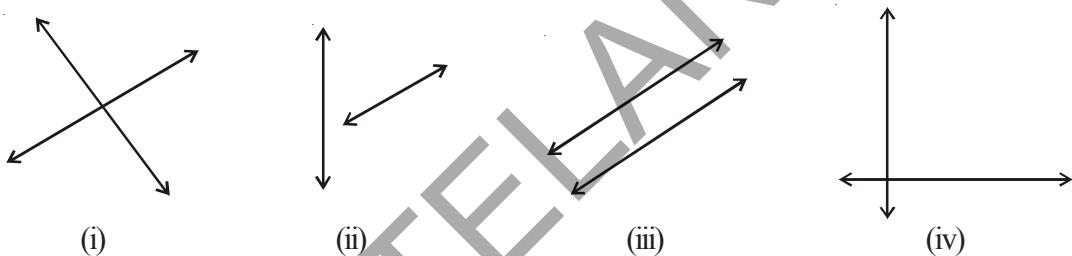
6. క్రింద ఇవ్వబడిన వటము నుంచి సాధ్యమైనన్ని కోణాలను గుర్తించుము. అందులోపేవి అల్ప, లంబ, అధిక కోణాలో తెలుపుము.



7. కిందివానిలో ఏ రేఖల జతలు సమాంతరములు? ఎందుకు?



8. కింద ఇవ్వబడిన రేఖల జతలలో ఏవి ఖండన రేఖలు.



4.1 కోణాల జతలను గూర్చి నేర్చుకుండాం

కొన్ని కోణాలను ఎలా గుర్తించాలో ముందు అభ్యాసంలో నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు మరికొన్ని కోణాలను, వివిధ కోణాల జతలను గూర్చి నేర్చుకొండాం!

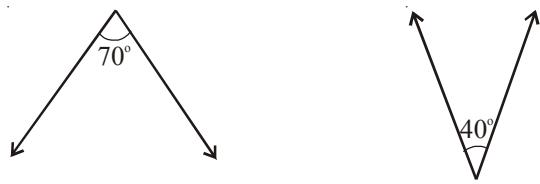
4.1.1 పూరక కోణాలు

ఏవేని రెండు కోణాల మొత్తం 90° కు సమానమైతే ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి పూరక కోణాలు అంటాం.



పై కోణాలు 30° , 60° లను పూరక కోణాలు అంటాం. ఎందుకనగా $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

30° కు 60° ని, 60° కు 30° ని పూరక కోణమని కూడా అంటాం.



పై పటంలో ఇవ్వబడిన 70° , 40° పూరక కోణాలు కావు. ఎందుకనగా $70^\circ + 40^\circ \neq 90^\circ$.



ప్రయత్నించండి.

నీకు ఇష్టం వచ్చిన ఏవేని ఐదుజతల పూరక కోణాలను గీయండి.

ఇవి చేయండి.

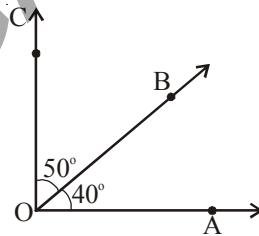
$\angle AOB = 40^\circ$ అగునట్లు గీయండి. ‘O’ ను శీర్షముగా \overrightarrow{OB} తొలికిరణంగా

$\angle BOC = 50^\circ$ అగునట్లు గీయండి.

ఈ రెండుకోణాల మొత్తం 90° , అనగా ఆ మొత్తం ఒకలంబకోణాన్ని ఏర్పరుస్తాంది.

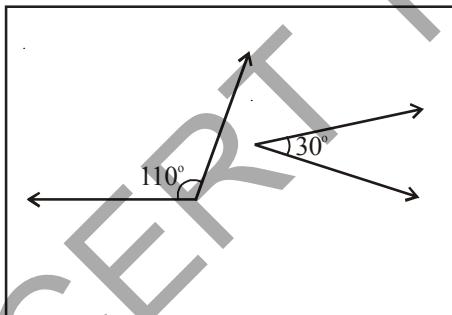
మరియుక జతకోణాలు 60° మరియు 50° లుగా తీసుకొని పై విధంగా చేయండి.

అవికూడా పూరక కోణాలను ఏర్పరుస్తాయా? ఏర్పరచవా? ఎందుకు?

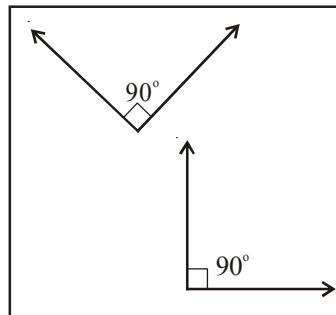


అభ్యసం - 2

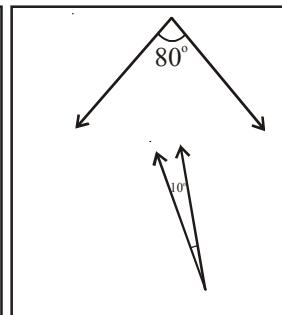
1. క్రింది వానిలో ఏ జతకోణాలు పూరక కోణాలవుతాయి?



(i)



(ii)



(iii)

2. క్రింది ఇవ్వబడిన కోణాలకు పూరక కోణాలను కనుగొనండి.

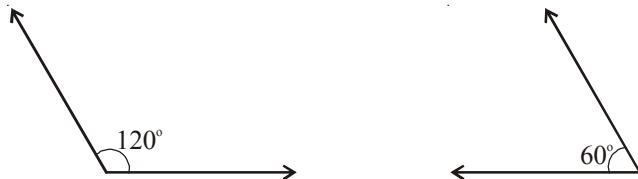
(i) 25° (ii) 40° (iii) 89° (iv) 55°

3. రెండుకోణాలు ఒకదానికాకటి పూరకాలు మరియు సమానము. ఆ కోణాలను కనుగొనండి.

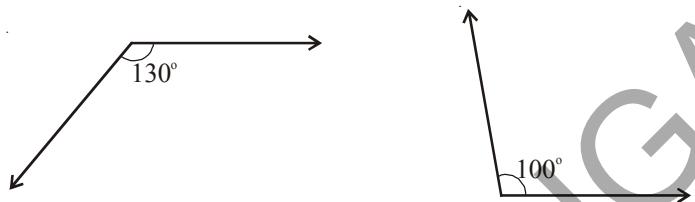
4. “పూరక కోణాలు ఎల్లప్పుడూ అల్పకోణాలు” అంటున్నది మానస. నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

4.1.2 సంపూర్క కోణాలు

ఏవేని రెండు కోణాల మొత్తం 180° అయిన ఆ కోణాలను ఒకదానికి మరొకటి సంపూర్క కోణము అంటారు.



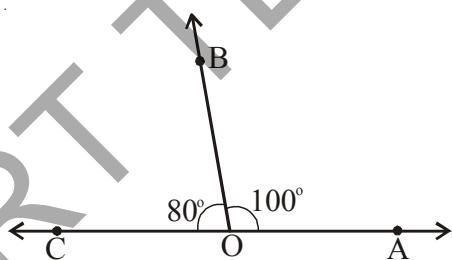
పైన ఇవ్వబడిన కోణాలు 120° , 60° ల మొత్తం 180° . కావున అవి సంపూర్కకాలు. అనగా 120° , లు 60° కు, 60° లు 120° కి సంపూర్క కోణాలు.



130° మరియు 100° సంపూర్క కోణాల జతకాదు. ఎందుకు?

ఇవి చేయండి.

$\angle AOB = 100^\circ$ అగునట్లు గీచి, \overrightarrow{OB} ఉమ్మడి కిరణముగా O ఉమ్మడి శీర్షముగా ఉండునట్లు $\angle BOC = 80^\circ$ అగునట్లు గీయండి.



పై రెండు కోణాల కలయిక 180° లతో ఒక సరళ కోణము ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చు. అనగా 100° మరియు 80° లు సంపూర్క కోణాలు.

130° మరియు 70° సంపూర్క కోణాలేనా? ఎందుకు?



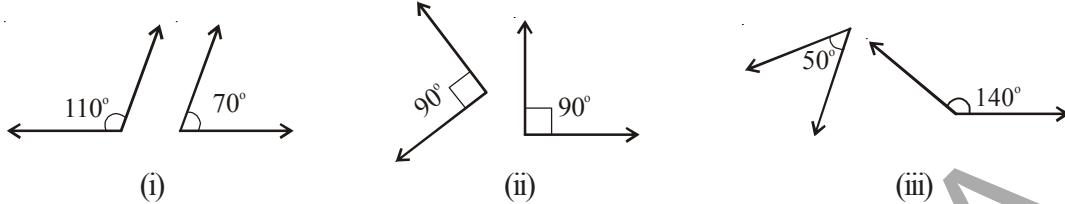
ప్రయత్నించండి.

నీకు ఇష్టమైన ఏవేని ఐదు జతల సంపూర్క కోణాలను రాయండి.



అభ్యసం - 3

1. కింది వానిలో ఏవి సంపూర్ణక కోణాల జతలు?



2. కింది కోణాలకు సంపూర్ణక కోణాలను కనుగొనుము.

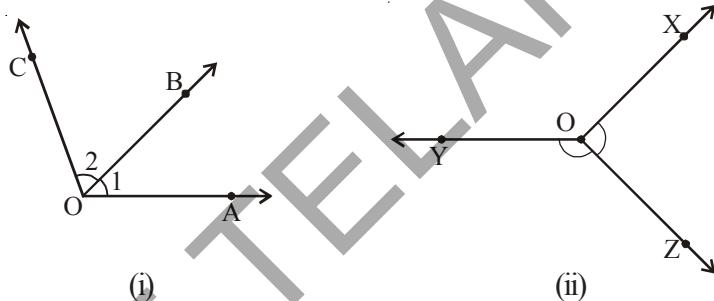
- (i) 105° (ii) 95° (iii) 150° (iv) 20°

3. “రెండు అల్పకోణాలు సంపూర్ణకాలు కానేరవు” సమర్థింపుము.

4. రెండు కోణాలు సమానములు మరియు సంపూర్ణకాలు. అవి ఏవి?

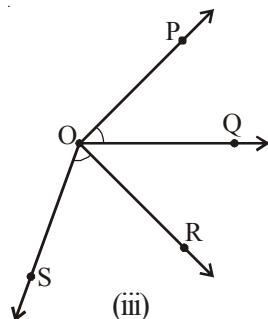
4.1.3 ఆసన్నకోణాలు

ఉమ్మడి భుజము మరియు ఉమ్మడి శీర్షములు గల కోణాలను “ఆసన్నకోణాలు” అంటాం.



పటము (i)లో $\angle AOB$, $\angle BOC$ లు ఆసన్నకోణాలు. ఎందుకనగా వాటికి ఉమ్మడి శీర్షము ‘O’, ఉమ్మడి భుజము \overrightarrow{OB} ఉన్నాయి.

పటము (ii)లో ఆసన్నకోణాలు ఉన్నాయా? ఉంటే ఉమ్మడి శీర్షమేది? ఉమ్మడి భుజాలు ఏవి?



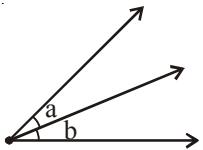
పటము (iii)ని చూడండి $\angle QOP$ మరియు $\angle SOR$ లు ఆసన్నకోణాలేనా? ఎందుకు?

ఈ పటములో ఏ, ఏ కోణాలు ఒకదానికొకటి ఆసన్న కోణాలు అవుతాయా? ఎందుకివి ఆసన్న కోణాలు అవుతాయని భావిస్తున్నావు?

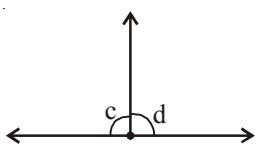


అభ్యాసం - 4

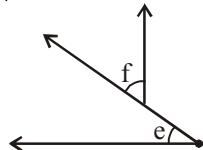
1. కింది వాటిలో ఏవి ఆసన్న కోణాలు?



(i)

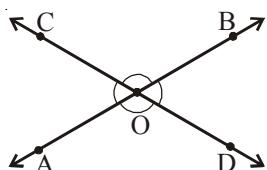


(ii)



(iii)

2. కింది పటంలోని ఆసన్నకోణాలన్నింటినీ పేర్కొనండి. ఎన్ని జతల ఆసన్నకోణాలు ఏర్పడతాయి? వాటిని ఎందుకు ఆసన్న కోణాలు అని అంటాం?



3. రెండు ఆసన్న కోణాలు సంఖ్యారకాలు అవుతాయా? పటము గీచి చూపండి.

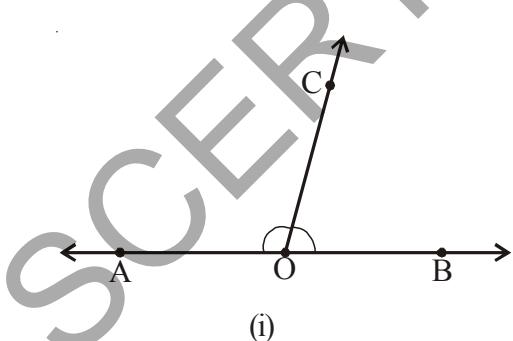
4. రెండు ఆసన్న కోణాలు పూర్కరకాలు అవుతాయా? పటము గీచి చూపండి.

5. దైనందిన జీవితంలో ఆసన్నకోణాలకు ఏవేని నాలుగు ఉండాహరణ లిప్యండి.

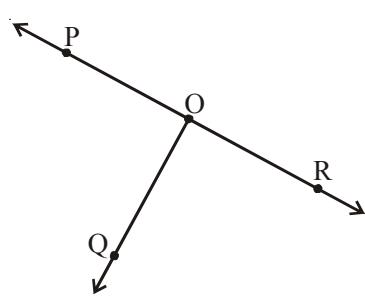
ఉదా : సైకిలు చక్రపు చుప్పల మధ్య కోణాలు

- (i) _____ (ii) _____
 (iii) _____ (iv) _____

4.1.3 (అ) రేఖీయ ద్వయము



(i)



(ii)

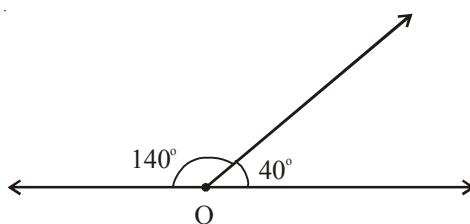
పటము (i)లో $\angle COA$ మరియు $\angle BOC$ లు ఆసన్న కోణాలు. వాటి మొత్తం తెలుసా? ఈ రెండు కోణాల కలయిక ఒక సరళ కోణము ఏర్పరుస్తుంది. పటము (ii)లో $\angle POQ$, $\angle QOR$ లు సరళకోణాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

ఒక జత ఆసన్న కోణాల మొత్తం 180° అయితే దానిని 'రేఖీయ ద్వయము' అంటాం.

జవి చేయండి

40° మరియు 140° అనునవి ఆసన్న కోణాలు. ఆ కోణాలు రేఖీయ ద్వయాన్ని ఏర్పరుస్తాయా? పటము గీచి సరిచూడండి.

ఆస్తు ఆ పటాన్ని ఇలా గీచింది.

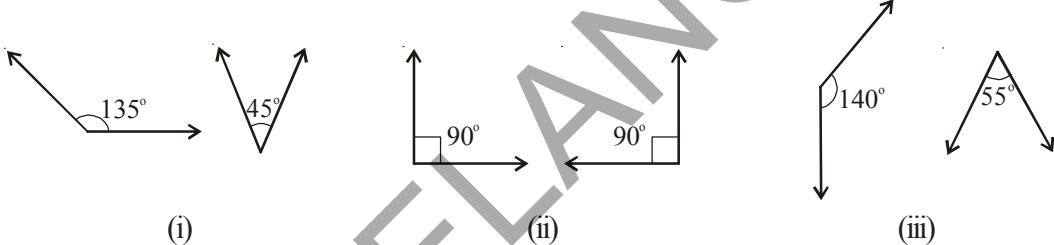


ఆమె సరిగా గీసిందా? ఆ ఆసన్నకోణాలు రేఖీయ ద్వయాన్ని ఏర్పరుస్తాయా?

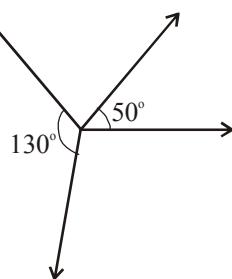


అభ్యాసం - 5

1. కింది జతల కోణాలను ఆసన్నకోణాలగా గీయండి. ఏవి రేఖీయద్వయమును ఏర్పరుస్తాయా?



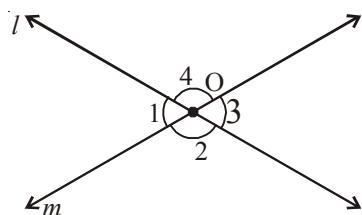
2. నీహారిక 130° మరియు 50° అను రెండు కోణాలలో రేఖీయ ద్వయమును ఏర్పరచవచ్చునేమో సరిచూడాలను కని క్రింది విధంగా తయారు చేసింది.



పై పటములో ఆ రెండు కోణాలు రేఖీయ ద్వయాన్ని ఏర్పరచాయని చెప్పవచ్చునా? అలా కాకపోతే నీహారిక చేసిన పొరపాటేమిటి?

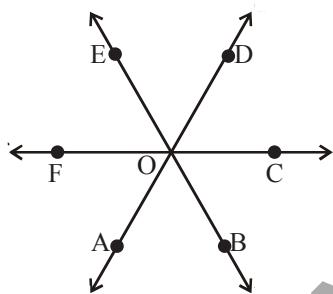
4.1.4 శీర్షాభిముఖ కోణాలు

రెండు రేఖలు ఖండించుకొన్నవుడు ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడు ఎదురెదురు కోణాలను ‘శీర్షాభిముఖ కోణాలు’ అంటాం.



‘l’ మరియు ‘m’ అనురేఖలు ‘O’ బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటున్నాయి.

కోణము $\angle 1$ అనునది కోణము $\angle 3$ నకు ఎదుటి కోణము అలాంటి జత మరొకటి $\angle 2$ మరియు $\angle 4$. కావున, $\angle 1, \angle 3$ లను $\angle 2, \angle 4$ లను శీర్షాభిముఖ కోణముల జతలు అంటాం.



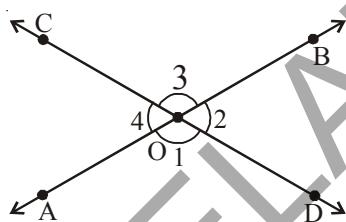
ప్రకృత పటం నందలి శీర్షాభిముఖ కోణాల జతలను తెలుపండి.

ఇవి చేయండి.

AB, CD అనురేఖలు ‘ O ’ వద్ద ఖండించుకొనునట్లు గీయండి.

ఉన్న పొరకాగితమును పయోగించి క్రింది పటమునకు నకలును గీచి, ఈ నకలును పటముపైన ఉంచి $\angle AOD, \angle BOC, \angle COA, \angle DOB$ తో ఏకీభవించునట్లు భ్రమణము చేయము. (త్రిపుష్టము)

$\angle AOD = \angle BOC$ మరియు $\angle COA = \angle DOB$ అగుటను మీరు గమనించురు.

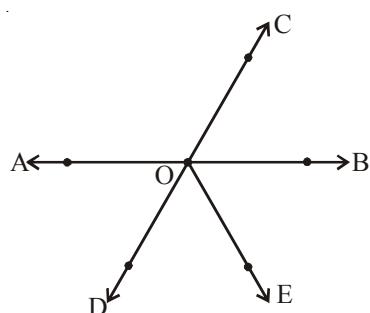


దీనిని ఒట్టి శీర్షాభిముఖ కోణములు సమానమని చెప్పవచ్చును.

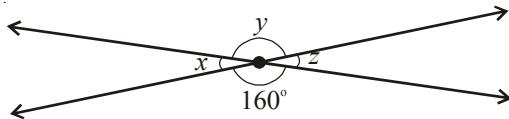
గమనిక : రెండు ప్రాణీల లను తీసుకొని వాటిమధ్య బిందువు వద్ద పిన్నను గుచ్చి ఒకదానిపై మరొకటి వుండునట్లు చేయము. రెండు ప్రాణీలో ఏదో ఒకదానిని త్రిపుష్టముగా శీర్షాభిముఖ కోణములు ఏర్పడుట మనము గమనించవచ్చును.

అభ్యాసము - 6

1. కింది పటంలో ఒక జత శీర్షాభిముఖ కోణాలను పేర్కొనుము.



2. కొలవకుండానే x , y మరియు z కోణాల కొలతలను కనుగొనుము.



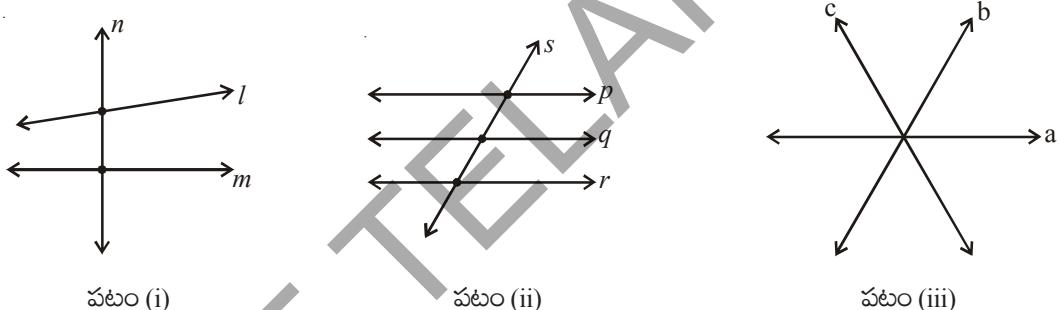
3. మీ పరిసర ప్రాంతాలలో నీవు గమనించిన శీర్షాభిముఖ కోణాలకు ఉధారణలిమ్ము.

4.2 తిర్యగ్రేభలు

బహుశా మీరు రైలు పట్టాలను గమనించి వుంటారు. కింది పటమును తిర్యగ్రేభలకు ఉధారణగా పేర్కొనవచ్చును.



ఒకరేఖ రెండులేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే ఆ రేఖను తిర్యగ్రేభ అంటాం.



పటం (i)లో 'l', 'm' అను రెండు రేఖలను 'n' అనురేఖ రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తోంది.

కావున 'l' మరియు 'm' రేఖలకు 'n' అనేది తిర్యగ్రేభ.

పటం (ii)లో 'p', 'q' మరియు 'r' అనుమాడు రేఖలను 's' అనురేఖ, మూడు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తోంది.

కావున, 'p', 'q' మరియు 'r' అనురేఖలకు 's' అనేది తిర్యగ్రేభ.

పటం (iii)లో రెండు రేఖలు ℓ మరియు b లను 'c' ఖండిస్తోంది. a మరియు b రేఖల ఖండన బిందువు వద్దనే, 'c' అను రేఖ వాటిని ఖండిస్తోంది. ఈ మూడు రేఖలు ఖండన రేఖలే గానీ ఏర్పాత కూడా మిగిలిన రెండు రేఖలకు తిర్యగ్రేభ కాదు. కారణము ఏర్పాత కూడా మిగిలిన రెండు రేఖలను విభిన్న బిందువుల దగ్గర ఖండించక పోవడమే.



ప్రయత్నించండి.

రెండు విభిన్న రేఖలకు వీలైనన్ని తిర్యగ్రేభలను గీయుము.

4.2.1 తిర్యగ్రేభచే ఏర్పడు కోణాలు

రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేభ ఖండించినపుడు 8 కోణాలు ఏర్పడుతాయి. కారణము ప్రతిభండనకు 4 కోణాలు ఏర్పడటమే. ప్రక్క పటాన్ని పరిశీలించండి.

l మరియు m అనురేఖలను p అను తిర్యగ్రేభ ఖండించగా $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ అను 8 కోణాలు ఏర్పడుతాయి.

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ మరియు $\angle 8$, కోణాలు l మరియు m రేఖలకు బయట (బాహ్యంలో) వున్నాయి. కావున ఈ కోణాలను బాహ్యకోణాలు అంటాం. $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ మరియు $\angle 6$ కోణాలు l మరియు m రేఖలకు లోపల (అంతరంలో) వున్నాయి. కావున ఈ కోణాలను అంతరకోణాలు అంటాం.

ప్రక్కపటాన్ని పరిశీలించండి.

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ మరియు $\angle 8$ కోణాలను బాహ్యకోణాలు అంటాం.

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ మరియు $\angle 6$ కోణాలను అంతర కోణాలు అంటాం.

శీర్షాభిముఖ కోణాలను గూర్చి మనం ఇదివరకే నేర్చుకొని యున్నాము. శీర్షాభిముఖ కోణాలు సమానము అని కూడా మనకు తెలుసు.

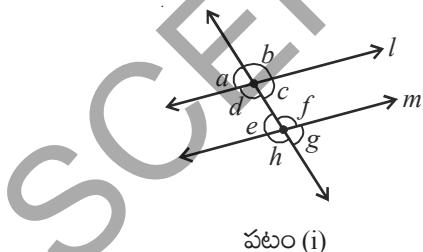
ఈ పటాన్ని చూస్తూ రేణు $\angle 1 = \angle 3$ మరియు $\angle 2 = \angle 4$ అంది.

మరి మిగిలిన రెండు జతల శీర్షాభిముఖ కోణాలేవి? ఇంకా రేణు ఇలా అంటోంది. “ప్రతి బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణానికి జత మరియు ఇలాంటి జతల కోణాలు సమానంగా వుంటాయి”. ఈ విషయంలో నీవు రేణుతో ఎకీభవిస్తావా?

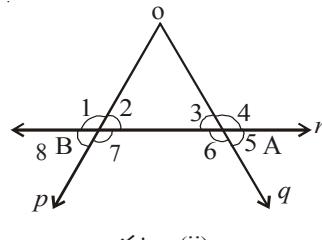
ఇవి చేయండి.

- (i), (ii) పటాలలో తిర్యగ్రేభాలను గుర్తించండి.

అలాగే అంతర, బాహ్య కోణాలను గుర్తించి కింది పట్టికలో రాయండి.



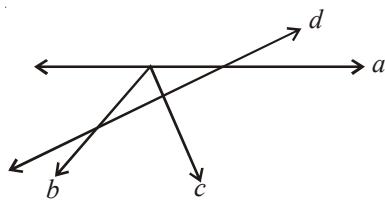
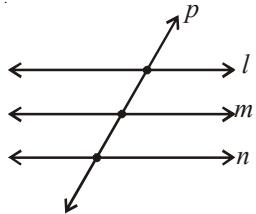
పటం (i)



పటం (ii)

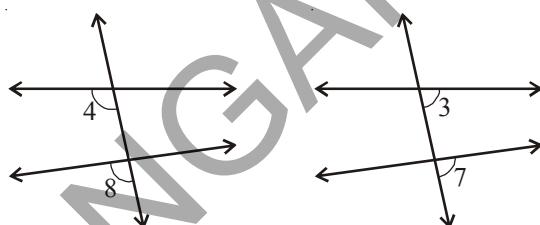
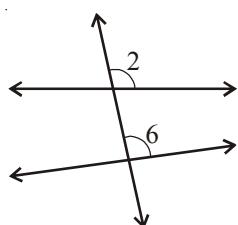
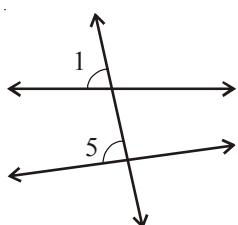
పటం	తిర్యగ్రేభ	బాహ్యకోణాలు	అంతర కోణాలు
(i)			
(ii)			

2. కింది పటాలను పరిశీలించి ప్రతి పటములోని తిర్యగేఖలను తెలుపండి. ప్రతి పటములో ఏర్పడు కోణాల సంఘ్యాను తెలిపి వాటి జాబితాను ప్రాయండి. మరియు అంతర, బాహ్య కోణాలను తెలుపండి.



4.2.1 (ఎ) సదృశ కోణాలు (అనురూప కోణాలు)

(i), (ii), (iii) మరియు (iv) పటాలను పరిశీలించండి.



(i)

(ii)

(iii)

(iv)

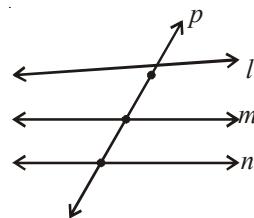
కింది కోణాల జతలను పరిగణించండి. $(\angle 1, \angle 5), (\angle 2, \angle 6), (\angle 4, \angle 8), (\angle 3, \angle 7)$. ఈ జతలలో కోణాల మధ్య సారూప్యతను గమనించారా? ప్రతి జతలోని కోణాలు, ఏఫిన్సు శీర్షాల వద్ద ఏర్పడి, తిర్యగేఖకు ఒకే వైపున వుంటూ, ఒక కోణము బాహ్య కోణముగాను, మరియుక కోణము అంతర కోణముగానూ వున్నది. కావున పై కోణాల జతలలో ప్రతి జతకోణాలను సదృశ (అనురూప) కోణాలు అంటాం.

మరి మూడు రేఖలకు ఒక తిర్యగేఖ వుంటే ఏమోతుంది? ఈ సందర్భములో

సదృశ కోణాలేవి? మరియు బాహ్య, అంతర కోణాలు ఎన్ని?

ఒక తిర్యగేఖచే ఖండింపబడే రేఖలసంఘ్య 4, 5 లేక అంతకన్నా ఎక్కువైతే ఏమవుతుంది?

అంతర, బాహ్య కోణాలు మరియు వాటి సదృశ కోణాలను ఊహించగలవా?

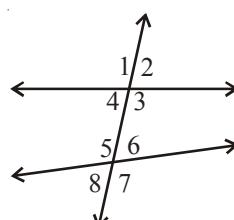


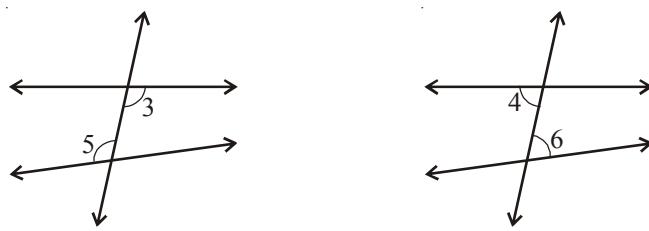
4.2.1 (బి) ఏకాంతర, ఏక బాహ్య కోణాలు

ప్రక్క పటమును పరిశీలించి క్రింద ఇవ్వబడిన ధర్మాలు గల కోణాలను కనుగొనుము.

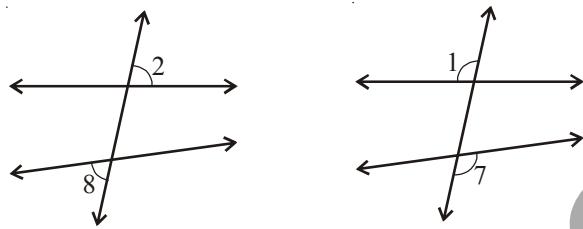
- (i) ఏఫిన్సు శీర్షాల వద్ద గల కోణాలు
- (ii) తిర్యగేఖకు ఇరువైపులా గలకోణాలు
- (iii) రెండు రేఖల అంతరములో గల కోణాలు (అంతర కోణాలు)

పై ధర్మాలు గల కోణాలను “ఏకాంతర కోణాలు” అంటాం.





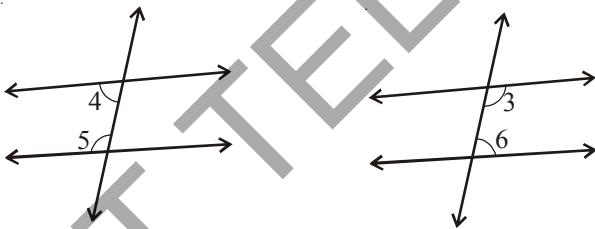
పై పటాలనుంచి ($\angle 3, \angle 5$) మరియు ($\angle 4, \angle 6$) కోణాల జతలను ఏకాంతర కోణాలు అంటాం. అలాగే ఏక బాహ్య కోణాలను కనుగొందాం!



పై పటాలనుంచి $\angle 2, \angle 8$ మరియు $\angle 1, \angle 7$ కోణాల జతలను ఏక బాహ్యకోణాలు అంటాం.

4.2.1 (సి) తిర్యగ్రేభకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు

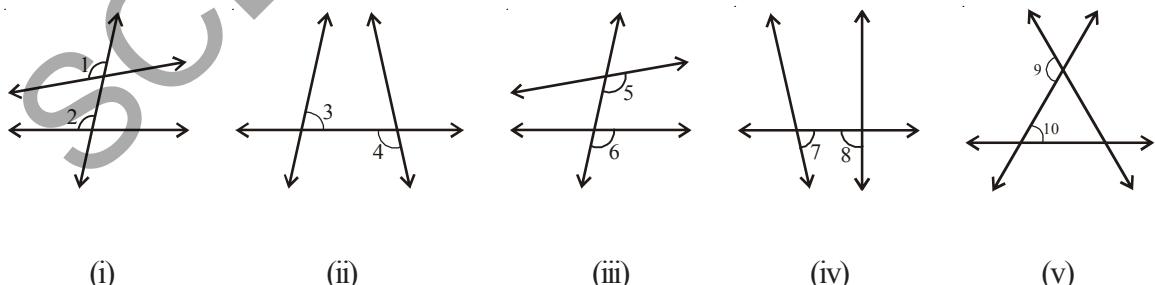
అంతర కోణాలు తిర్యగ్రేభకు ఒకే వైపున కూడా ఉండవచ్చును.



పై పటముల నుంచి ($\angle 4, \angle 5$) మరియు ($\angle 3, \angle 6$) అనునవి తిర్యగ్రేభకు ఒకేవైపున గల అంతరకోణాలు.

ఇవి చేయండి

- ధర్మములను బట్టి కింద ఇవ్వబడిన జతల కోణాల పేర్లు ప్రాయంది.

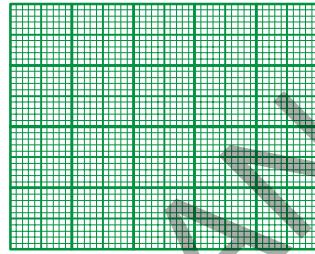
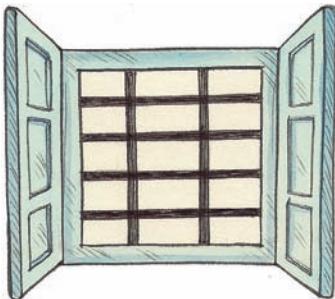


4.2.2. సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేభ

ఈకే తలములోని రెండు రేఖలు ఖండన రేఖలు కాకుంటే, అల్సై రేఖలను సమాంతర రేఖలు అంటాం.

సమాంతర రేఖలపై తిర్యగ్రేభను గీచినవుడు ఏర్పడు కోణాల ధర్మాలను గూర్చి తెలుసుకుందాం!

క్రింది పటాలను పరిశీలించండి.



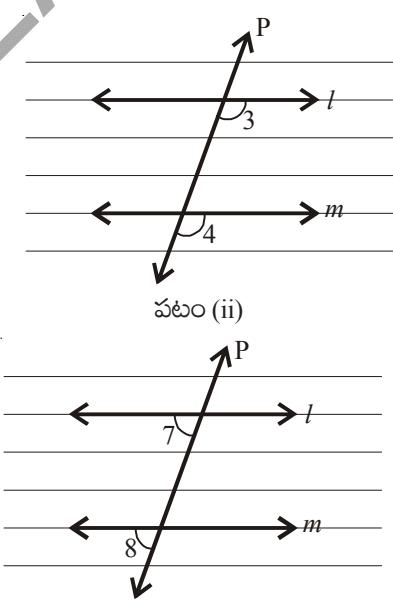
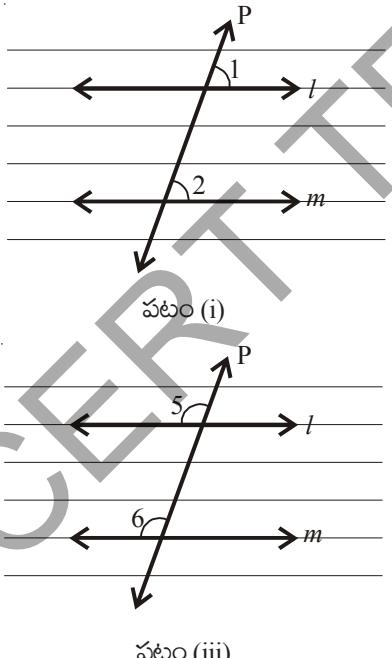
పై పటాలు సమాంతర రేఖలపై గీయబడిన తిర్యగ్రేభలకు ఉదాహరణ

ఇవి చేయండి.

రూళ్ళు కాగితములను తీసుకొని వాటిపై 'l' మరియు 'm' రేఖలను గేచి వాటికి 'p' అను తిర్యగ్రేభను గీయుము.



పటములు (i), (ii), (iii) మరియు (iv) లలో చూపబడి ఉన్నట్లు సదృశ కోణాలను గుర్తించండి.



పటం (iii)

పటం (iv)

ఉన్నిటిపొర కాగితము నుపయోగించి పటము (i) కి నకలుగా l , m , p రేఖలు గీయండి. ' p ' వెంబడి ఉన్నిటిపొర కాగితమును జరుపుతూ ' l ', ' m ' తో ఏకీభవించునట్లు చేయండి. ఉన్నిటిపొర కాగితము మీది $\angle 1$ అనలు పటములోని $\angle 2$ తో ఏకీభవించుట మనము గమనించగలము. కావున $\angle 1 = \angle 2$

అలాగే మిగిలిన జతలలోని సదృశ కోణాలు కూడా సమానమేనా? ఉన్నిటిపొర కాగితపు నకలును జరుపుట ద్వారా సరిచూడండి.

రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేభ ఖండించగా ఏర్పడు ప్రతి జతయొక్క సదృశ కోణాలు సమానము.

సమాంతర రేఖలకు చెందిన సదృశ కోణాలు సమానత్వ ధరాన్ని ఉపయోగించి మరియుక ధరాన్ని రాబడడాం.

ప్రక్క పటములో 'l' మరియు 'm' అను రేఖలకు 'p' అనునది తిర్యగ్రేభ.

కావున అన్నిజతల సదృశ కోణాలు సమానము.

$$\angle 1 = \angle 5$$

కానీ $\angle 1 = \angle 3$ (శీర్షాఫీముఖ కోణాలు)

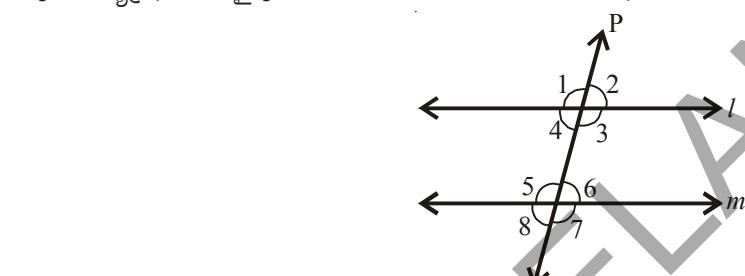
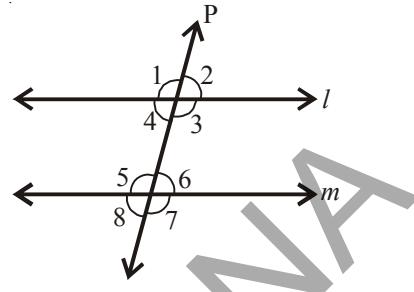
$$\text{కావున } \angle 3 = \angle 5$$

$$\text{అలాగే } \angle 4 = \angle 6 \text{ అని చూపవచ్చును.}$$

కావున రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేభ ఖండించగా ఏర్పడు ప్రతి జత ఏకాంతర కోణాలు సమానము.

ఏక బాహ్య కోణాలకు కూడా ఈ సమానత్వ ధర్మము వర్తిస్తుందా? ప్రయత్నించి బుజువు చేయండి.

ఇప్పుడు తిర్యగ్రేభకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణములకు సంబంధించి మరియుక ఆసక్తి కరమైన అంశాన్ని కనుగొందాం!



ప్రక్క పటములో 'l' మరియు 'm' అను సమాంతర రేఖలను 'p' అను తిర్యగ్రేభ ఖండిస్తోంది.

$$\text{కావున } \angle 3 = \angle 5 \text{ (ఏకాంతర కోణాలు)}$$

$$\text{కానీ } \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ \text{ (ఎందుకు?)}$$

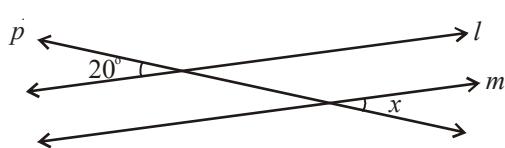
$$\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\text{అలాగే } \angle 3 + \angle 6 = 180^\circ \text{ (కారణమివ్వండి)}$$

కావున రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేభ ఖండించగా తిర్యగ్రేభకు ఒకే వైపునగల అంతర కోణాలు సంపూర్ణారకాలు.

ఉధారణ 1: క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో 'l' మరియు 'm' లు సమాంతర రేఖలు మరియు 'p' ఒక తిర్యగ్రేభ అయితే ' $\angle x$ ' ను కనుగొనుము.

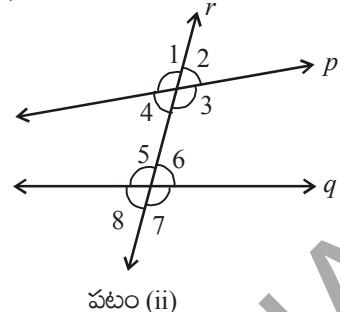
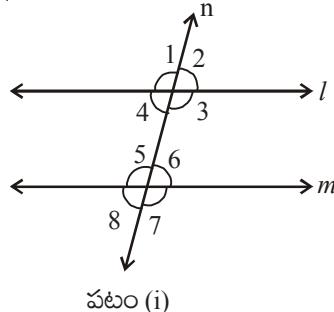
సాధన :



$l \parallel m$ మరియు p ఒక తిర్యగ్రేభ.

$\angle x$ మరియు 20° ఏక బాహ్యకోణాలు. కావున అవి సమానము కావున $\angle x = 20^\circ$.

జవి చేయండి.



(i), (ii) పటాలను ఉపిషద్ కాగితము నుపయోగించి మీ నోటు పుస్తకాలలో నకలు చేయండి. కోణమానిసుపయోగించి ఫలితాలను క్రింది పద్ధీకరణలో నింపండి.

పద్ధీక 1 : సదృశ కోణాల కొలతలను పద్ధీకరించాలి.

పటం	సదృశ కోణాల జతలు			
	మొదటి జత	రెండవ జత	మూడవ జత	నాలుగవ జత
(i)	$\angle 1 = \dots$	$\angle 2 = \dots$	$\angle 3 = \dots$	$\angle 4 = \dots$
	$\angle 5 = \dots$	$\angle 6 = \dots$	$\angle 7 = \dots$	$\angle 8 = \dots$
(ii)	$\angle 1 = \dots$	$\angle 2 = \dots$	$\angle 3 = \dots$	$\angle 4 = \dots$
	$\angle 5 = \dots$	$\angle 6 = \dots$	$\angle 7 = \dots$	$\angle 8 = \dots$

ఏయే జతల సదృశకోణాలు సమానంగా ఉన్నాయి?

కావున 'l' మరియు 'm' రేఖలను గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?

అలాగే 'p' మరియు 'q' రేఖలను గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఏయే రేఖల జతలు సమాంతరాలు?

కావున రెండు రేఖలను ఒక తీర్యగ్రేఫు ఖండించినపుడు ఏర్పడు సదృశ కోణాలు సమానమైతే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు.

పద్ధీక 2 : మీరు కొలిచిన ఏకాంతర కోణాలను ఈ పద్ధీకరించాలి.

పటము	ఏకాంతర కోణాల జతలు	
	మొదటి జత	రెండవ జత
(i)	$\angle 3 = \dots$	$\angle 4 = \dots$
	$\angle 5 = \dots$	$\angle 6 = \dots$
(ii)	$\angle 3 = \dots$	$\angle 4 = \dots$
	$\angle 5 = \dots$	$\angle 6 = \dots$

పటంలో ఏ పటంలోని ఏకాంతర కోణాలు సమానంగా వున్నాయి.

కావున ' l ' మరియు ' m ' రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

' p ' మరియు ' q ' రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

కాబట్టి రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేభ ఖండించగా ఏర్పడు ఏకాంతర కోణాలు సమానమైతే ఆరేఖలు సమాంతర రేఖలు.

పట్టిక 3 : తిర్యగ్రేభకు ఒకే వైపునగల అంతర కోణాలను కొలిచి పట్టికలో ప్రాయము.

పటం	తిర్యగ్రేభకు ఒకే వైపునగల అంతరకోణాలు			
	మొదటి జత		రెండవ జత	
(i)	$\angle 3 = \dots\dots$ $\angle 6 = \dots\dots$	$\angle 3 + \angle 6 = \dots\dots$	$\angle 4 = \dots\dots$ $\angle 5 = \dots\dots$	$\angle 4 + \angle 5 = \dots\dots$
(ii)	$\angle 3 = \dots\dots$ $\angle 6 = \dots\dots$	$\angle 3 + \angle 6 = \dots\dots$	$\angle 4 = \dots\dots$ $\angle 5 = \dots\dots$	$\angle 4 + \angle 5 = \dots\dots$

ఏ పటములోని తిర్యగ్రేభకు ఒకే వైపున గల అంతరకోణాలు సంపూర్చకాలు? అనగా వాటి మొత్తము 180° .

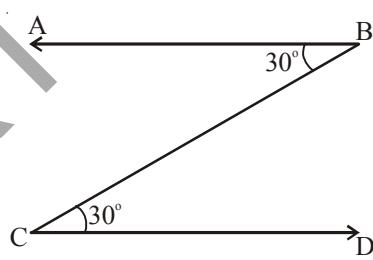
' l ' మరియు ' m ' రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

' p ' మరియు ' q ' రేఖల గూర్చి ఏమి చెప్పగలవు?

కావున రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేభ ఖండించినపుడు తిర్యగ్రేభకు ఒకే వైపుగల అంతర కోణాలు సంపూర్చక కోణాలయితే ఆ రేఖలు సమాంతర రేఖలు.

ఉధారణ 2 : కింద ఇవ్వబడిన పటంలో, రెండు కోణాలను ప్రతి ఒకటి 30° ఉండేలా గుర్తించబడినవి. ఐతే $AB \parallel CD$

అవుతుందా? ఎలా?



సాధన : ఇవ్వబడిన కోణాలు, \overline{BC} తిర్యగ్రేభతో ఏర్పడిన ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు

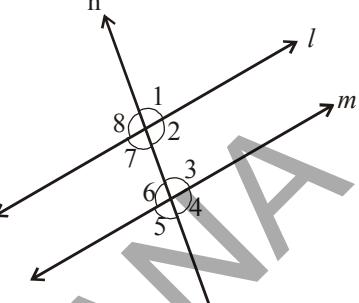
కావున ఈ కోణాలు సమానం, $AB \parallel CD$

అభ్యాసం - 7

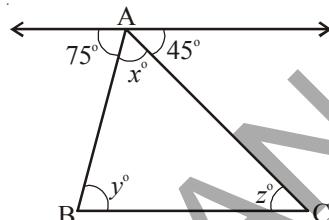
1. కింది ఖాళీలను పూరించండి.

- (i) ఒక రేఖ, రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖలను విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే ఆ రేఖను అంటారు.
- (ii) ఒక జత ఏకాంతర కోణాలు సమానమైతే ఆరేఖలు

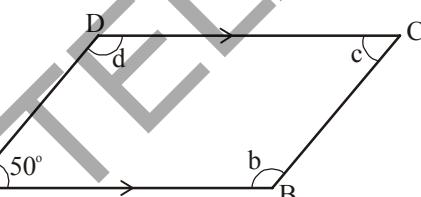
- (iii) తిర్యగ్రేభకు ఒకే వైపున గల అంతర కోణాలు సంపూర్చకాలైతే ఆశలు
 (iv) దెండు రేఖలు పరస్పరము ఖండించుకుంటే ఆ రేఖలకు ఉమ్మడి బిందువుల సంఖ్య
2. ప్రక్కన చూపబడిన పటంలో 'l' మరియు 'm' లు సమాంతర రేఖలు మరియు 'n' వాటి తిర్యగ్రేభ. అయితే కింద ఇప్పబడిన సందర్భాలలో ఖాళీలను పూరించండి.
- (i) $\angle 1 = 80^\circ$ అయితే $\angle 2 =$ _____
 (ii) $\angle 3 = 45^\circ$ అయితే $\angle 7 =$ _____
 (iii) $\angle 2 = 90^\circ$ అయితే $\angle 8 =$ _____
 (iv) $\angle 4 = 100^\circ$ అయితే $\angle 8 =$ _____



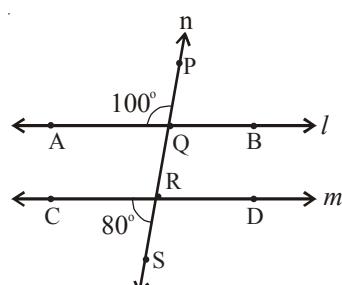
3. ఇప్పబడిన పటంలో $l \parallel BC$ అయిన x, y, z కోణాల పరిమాణములను కనుగొనుము.



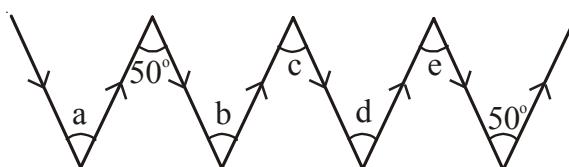
4. ABCD ఒక చతుర్భజములో $AB \parallel DC$ మరియు $AD \parallel BC$ అయినచో $\angle b, \angle c$ మరియు $\angle d$ లను కనుగొనుము.



5. ఇప్పబడిన పటములో 'l' మరియు 'm' రేఖలకు 'n' తిర్యగ్రేభ $l \parallel m$ అవునా?



6. కింది పటములో $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e$ మరియు $\angle e$ లను కనుగొనుము. కారణాలను తెలుపండి.

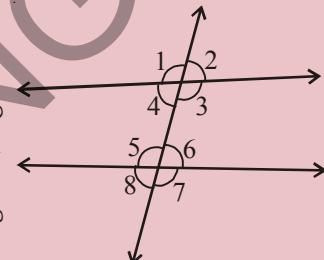


(సూచన : రేఖలపై ఒకే దిశలో చూపిన బాణాల గుర్తులు సమాంతర రేఖలను సూచించును).



మనం నేర్చుకున్నవి

1. (i) రెండు కోణాల మొత్తము 90° అయినచో ఆ కోణాలను పూర్క కోణాలు అంటాం.
(ii) పరిపూర్క కోణాలలో ప్రతి కోణము అల్పకోణము.
2. (i) రెండు కోణాల మొత్తము 180° అయినచో ఆ కోణాలను సంపూర్క కోణాలు అంటాం.
(ii) పూర్క కోణాలలో ప్రతి కోణము అల్పకోణములేదా లంబకోణం లేదా అధిక కోణం అగును.
(iii) రెండు లంబకోణాలు ఎల్లప్పుడు పరస్పర సంపూర్కాలు.
3. ఉమ్మడి శీర్షము కలిగి ఉమ్మడి భుజానికి ఇరువైపులా గల కోణాలను ఆసన్న కోణాలు అంటాం.
4. పూర్క కోణాలు గానీ, సంపూర్క కోణాలు గానీ ఆసన్న కోణాలు కానవసరములేదు.
5. ఒక జత ఆసన్న కోణాలు సంపూర్కాలయితే వానిని రేఖీయ ద్వయము అంటాం.
6. (i) రెండు రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటే ఖండన బిందువు వద్ద ఏర్పడు ఎదురెదురు కోణాలను ‘శీర్షాభ్యముఖ కోణాలు’ అంటాం.
(ii) శీర్షాభ్యముఖ కోణాలు ఎల్లప్పుడూ సమానం.
7. (i) రెండు రేఖలను వేర్చేరు బిందువుల వద్ద ఖండించు రేఖను తిర్యగ్రేభ అంటాం.
(ii) వటములో చూపినట్లు రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేభ ఖండించినపుడు 8 కోణాలను ఏర్పరచును.



క్రమ నంఖ్య	కోణాల రకాలు	జతల సంఖ్య	కోణాలు
1.	అంతర కోణాలు	—	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
2.	బాహ్య కోణాలు	—	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
3.	శీర్షాభ్యముఖ కోణాలు	4 జతలు	$(\angle 1, \angle 3); (\angle 4, \angle 2); (\angle 5, \angle 7); (\angle 8, \angle 6)$
4.	సదృశ కోణాలు	4 జతలు	$(\angle 1, \angle 5); (\angle 2, \angle 6); (\angle 4, \angle 8); (\angle 3, \angle 7)$
5.	వికాంతర కోణాలు	2 జతలు	$(\angle 3, \angle 5); (\angle 4, \angle 6)$
6.	వీక బాహ్య కోణాలు	2 జతలు	$(\angle 1, \angle 7); (\angle 2, \angle 8)$
7.	తిర్యగ్రేభకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు	2 జతలు	$(\angle 3, \angle 6); (\angle 4, \angle 5)$

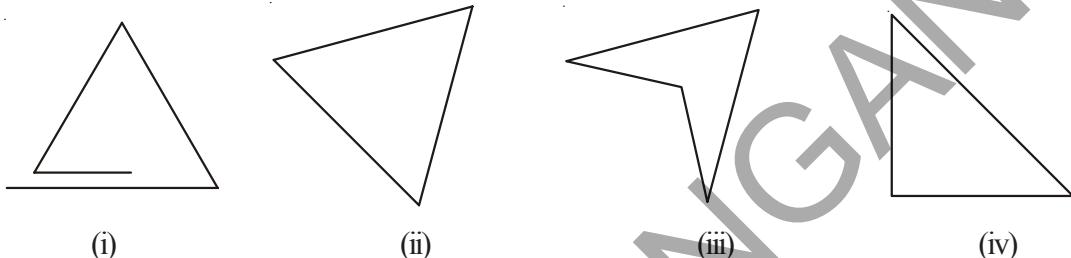
రెండు సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేభచే ఖండించగా ఏర్పడు

- (i) ప్రతి జతలోని సదృశకోణాలు సమానము
- (ii) ప్రతి జత వికాంతర కోణ జతలోని కోణాలు సమానము.
- (iii) ప్రతి జత వీక బాహ్య జతలోని కోణాలు సమానము.
- (iv) తిర్యగ్రేభకు ఒకేవైపున గల అంతర కోణాలు సంపూర్కాలు.

5.0 పరిచయం

మీరు త్రిభుజాలను గురించి క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొన్నారు. కింది పటాలను చూడండి.

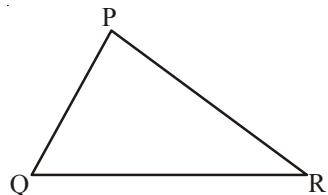
వీటిలో త్రిభుజాలేవో తెలుపండి.



వీటిలో కొన్ని పటాలు మాత్రమే త్రిభుజాలు కదా! ఇలా ఎందుకు కొన్ని పటాలు మాత్రమే త్రిభుజాలు అవుతున్నాయో నీ స్నేహితులతో చర్చించు? మూడు భుజాలు గల సంవృత పటాలనే త్రిభుజాలంటారని మనకు తెలుసు.

ప్రక్క పటములో త్రిభుజము PQR ను పరిశీలించు. దీనిలో

- (i) మూడు భుజాలు కలవు. అవి \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RP}
- (ii) మూడు కోణాలు కలవు. అవి $\angle RQP$, $\angle QPR$, $\angle PRQ$
- (iii) మూడు శీర్షాలు కలవు. అవి P , Q , R



ఈ త్రిభుజంలో శీర్షము P కి ఎదుటి భుజము QR . మరి శీర్షములు Q, R లకు ఎదుటి భుజాలు ఏవో నీవు చెప్పగలవా?

అదే త్రిభుజంలో $\angle QPR$ కోణానికి ఎదురుగా వున్న భుజము \overline{QR} .

అదే విధంగా $\angle RQP$ కోణానికి ఎదురుగావున్న భుజమేదో నీవు చెప్పగలవా?



ప్రయత్నించండి

ఉమ ఒక త్రిభుజం మూడు సరేళీయ బిందువులతో ఏర్పడుతుందని భావిస్తున్నది. నీవు ఉమతో ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

సూచన : మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బిందువులు ఒకే రేఖాపై వుంటే, వానిని సరేళీయ బిందువులు అంటాం.

గమనిక : $LM = \text{రేఖా ఖండము } LM \text{ పొడవు.}$

$\overline{LM} = \text{రేఖా ఖండము } LM$

$\overleftarrow{LM} = \text{కిరణము } LM$

$\overleftarrow{\overrightarrow{LM}} = \text{సరళరేఖ } LM$

5.1 త్రిభుజాలు - రకాలు

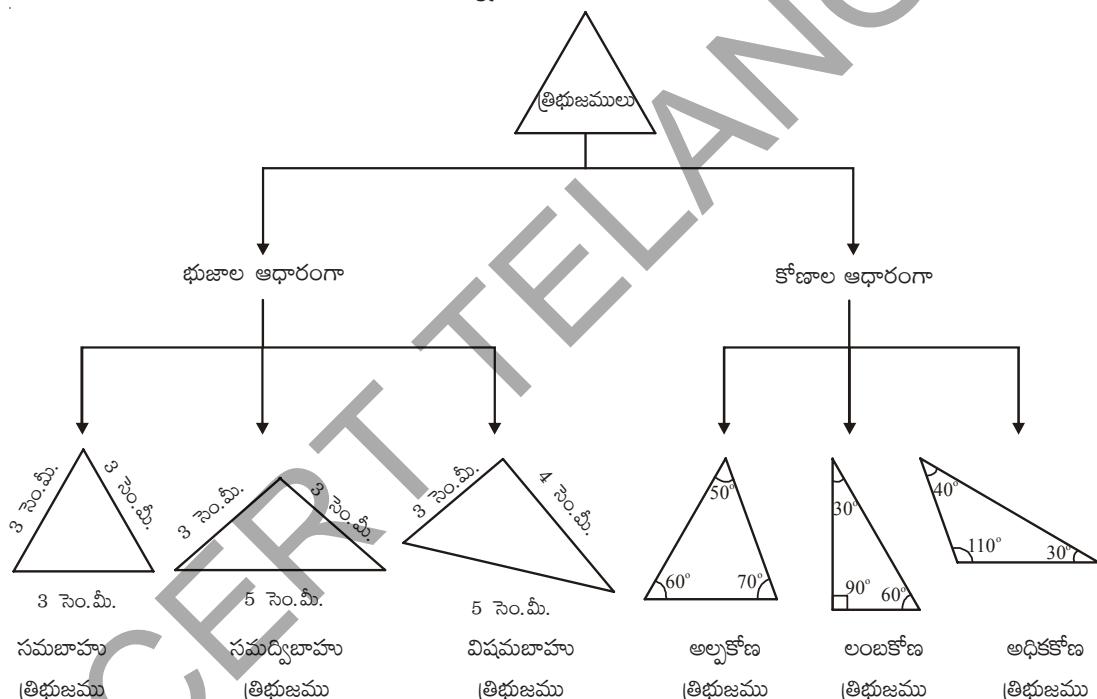
త్రిభుజాలను వాని భుజాల పొడవుల ఆధారంగా మరియు వాని కోణాల ఆధారంగా విభజించవచ్చు.

భుజాల పొడవుల ఆధారంగా త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

- మూడు భుజాల పొడవుల సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమబాహు త్రిభుజము అంటారు.
- ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవులు మాత్రమే సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజము అంటారు.
- మూడు భుజాల పొడవులు వేరు వేరుగా వున్న త్రిభుజాన్ని విషమ బాహు త్రిభుజము అంటారు.

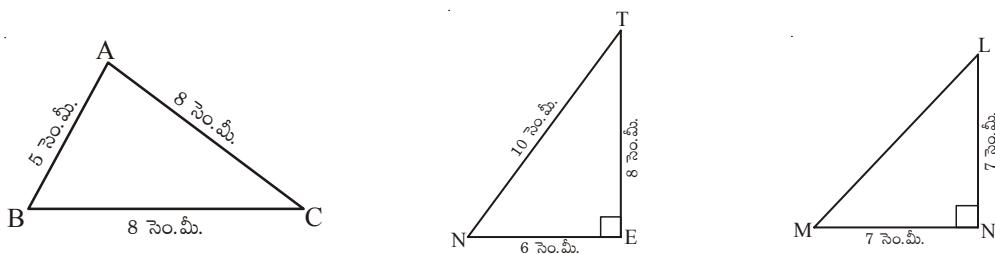
అదే విధంగా కోణాల ఆధారంగా కూడా త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.

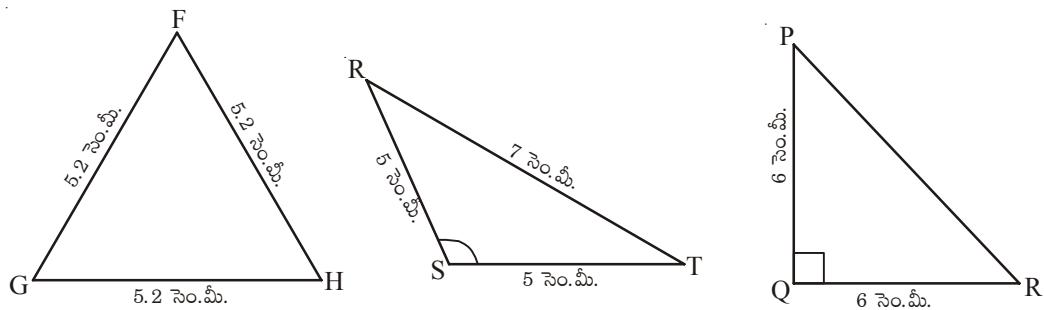
- మూడు కోణాలు అల్పకోణాలైన త్రిభుజాన్ని అల్పకోణ త్రిభుజమంటారు.
- ఒక కోణం అధిక కోణంగా గల త్రిభుజాన్ని అధికకోణ త్రిభుజ మంటారు.
- ఒక కోణం లంబకోణంగా గల త్రిభుజాన్ని లంబకోణ త్రిభుజము అంటారు.



ఇవి చేయండి

- కింది త్రిభుజాలను భుజాల ఆధారంగా మరియు కోణాల ఆధారంగా విభజించుము.





2. ΔABC యొక్క మూడు భుజాలను, మూడు కోణాలను పేర్కొనుము?
3. ΔPQR లో శీర్షము Q కు ఎదురుగా వున్న భుజం ఏది?
4. ΔLMN లో \overline{LM} భుజానికి ఎదురుగా గల కోణం ఏది?
5. ΔRST లో \overline{RT} భుజానికి ఎదురుగా గల శీర్షం ఏది?

	సమబాహు	సమద్విబాహు	విషమబాహు
అల్ప కోణము			
లంబ కోణము			
అధిక కోణము			



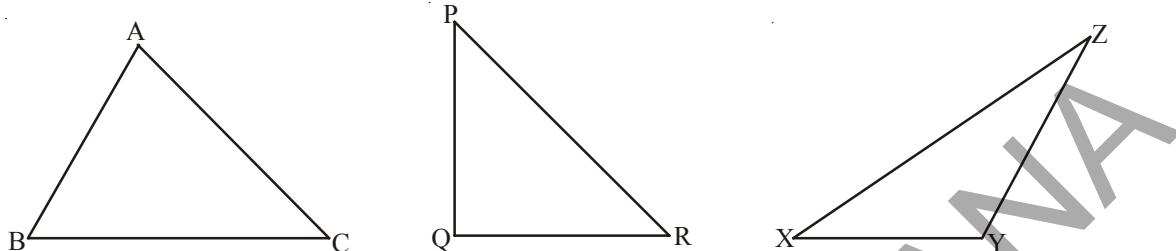
ప్రయత్నించండి :

1. పేరును పైన చర్చించిన వివిధ రకాల త్రిభుజాలుగా కత్తిరించండి. నీ త్రిభుజాలను నీ మిత్రుని త్రిభుజాలతో పోల్చుము
2. ఒక త్రిభుజములో ఒకటి కంటే ఎక్కువ లంబకోణాలు వుండవని రష్య అంటున్నది. రష్యతో నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?
3. రెండు కంటే ఎక్కువ అల్పకోణాలు కలిగిన త్రిభుజాలు వుండవ అని కమర్ అంటున్నాడు. కమర్తో నీవు ఏకీభవిస్తావా? ఎందుకు?

5.2 త్రిభుజ భుజాల మధ్య సంబంధము

5.2.1 త్రిభుజములో రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము

కింది పటములో చూపిన విధంగా ఏవైనా మూడు త్రిభుజాలు ΔABC , ΔPQR మరియు ΔXYZ లను గియండి.



స్నేలు సహాయముతో పై త్రిభుజాల భుజాల పొడవులను కనుగొని వాని విలువలను క్రింది పట్టికలో పొందు పరచండి.

త్రిభుజము	భుజం పొడవు	రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము	ఇది నిజమేనా?	అవును / కాదు
ΔABC	$AB =$	$AB+BC =$	$AB + BC > CA$	
	$BC =$	$BC+CA =$	$BC + CA > AB$	
	$CA =$	$CA+AB =$	$CA + AB > BC$	
ΔPQR	$PQ =$	$PQ+QR =$	$PQ + QR > RP$	
	$QR =$	$QR+RP =$	$QR + RP > PQ$	
	$RP =$	$RP+PQ =$	$RP + PQ > QR$	
ΔXYZ	$XY =$	$XY+YZ =$	$XY + YZ > ZX$	
	$YZ =$	$YZ+ZX =$	$YZ + ZX > XY$	
	ZX	$ZX+XY =$	$ZX + XY > YZ$	

పై పట్టిక నుంచి ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువని మనం గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణకు ΔABC లో, $AB + BC > CA$

$$BC + CA > AB$$

$$CA + AB > BC$$

5.2.2 త్రిభుజంలో రెండు భుజాల పొడవుల బేధం

పై ఉదాహరణలో వేరొన్న త్రిభుజాలనే తీసుకొనుము. వాని భుజాల పొడవులను క్రింది పట్టికలో పొందుపరచండి.

త్రిభుజము	భుజాల పొడవులు	రెండు భుజాల పొడవుల బేధము	ఇది నిజమేనా?	అవును/కాదు
ΔABC	$AB =$	$BC - CA =$	$BC - AC < AB$	
	$BC =$	$CA - AB =$	$CA - AB < BC$	
	$CA =$	$AB - BC =$	$AB - BC < CA$	
ΔPQR	$PQ =$	$QR - RP =$	$QR - RP < PQ$	
	$QR =$	$RP - PQ =$	$RP - PQ < QR$	
	$RP =$	$PQ - QR =$	$PQ - QR < RP$	
ΔXYZ	$XY =$	$YZ - ZX =$	$YZ - ZX < XY$	
	$YZ =$	$ZX - XY =$	$ZX - XY < YZ$	
	$ZX =$	$XY - YZ =$	$XY - YZ < ZX$	

పై పట్టిక నుంచి ఒక త్రిభుజంలో ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల బేధము మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువని నిర్ధారించగలము. అనగా

$$\begin{array}{ll} \text{ఉదాహరణకు } \Delta ABC \text{ లో } AB - BC < CA ; & BC - AB < CA \\ & BC - CA < AB ; \quad CA - BC < AB \\ & CA - AB < BC ; \quad AB - CA < BC \end{array}$$



ప్రయుషించండి :

ఒక త్రిభుజంలో రెండు భుజాల కొలతలు 6 సెం.మీ మరియు 9 సెం.మీ. అయిన మూడవ భుజం కొలతకు సరిపడు సాధ్యమయ్యే కొలతలన్నింటిని రాయుము.

ఉదాహరణ 1: భుజాల పొడవులు 6 సెం.మీ, 5 సెం.మీ, 8 సెం.మీ గా గల త్రిభుజం ఏర్పడుతుందా?

సాధన : త్రిభుజ భుజాల పొడవులు

$$AB = 6 \text{ సెం.మీ}$$

$$BC = 5 \text{ సెం.మీ}$$

$$CA = 8 \text{ సెం.మీ}$$

$$\text{ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం అనగా } AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$$

$$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$$

$$CA + AB = 8 + 6 = 14 > 5$$

ఇచ్చట ఏవైనా రెండు భుజాల మొత్తం మూడవ భుజం కంటే ఎక్కువగా వుంది కనుక పైన తెల్పిన కొలతలతో త్రిభుజం ఏర్పడుతుంది.

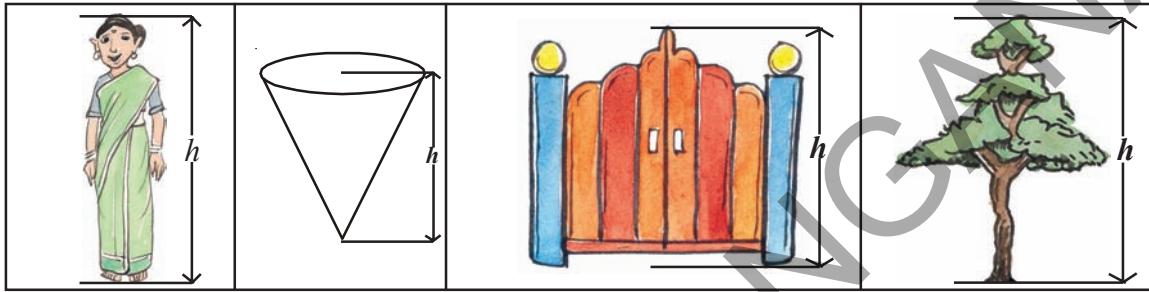


అభ్యాసం - 1

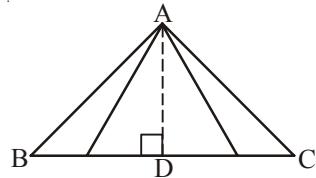
1. ఈ కింది కొలతలు భుజాలుగా తీసుకుంటే ఏవి త్రిభుజాలను ఏర్పరుస్తాయి? ఏవి ఏర్పరచవో సకారణగా తెలుపుము?
- 3 సె.మీ, 4 సె.మీ, 5 సె.మీ.
 - 6 సె.మీ, 6 సె.మీ, 6 సె.మీ.
 - 4 సె.మీ, 4 సె.మీ, 8 సె.మీ.
 - 3 సె.మీ, 5 సె.మీ, 7 సె.మీ.

త్రిభుజము - ఎత్తులు :

మన నిత్య జీవితంలో వివిధ సందర్భాలలో 'ఎత్తు' అనే పదాన్ని ఉపయోగిస్తూ ఉంటాము. అయితే క్రింది పటాల ఎత్తును ఎలా కనుగొంటావు.



పై పటాల ఎత్తును కనుగొనుటకు పటములలో చూపిన విధంగా పటము యొక్క పై భాగము నుంచి ఆధారము వరకూ గల దూరాన్ని కొలుస్తాము కదా! ఇదే విధానాన్ని త్రిభుజము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుటకు కూడా ఉపయోగిస్తాం.



ఇచ్చిన త్రిభుజము $\triangle ABC$ లో శీర్షము A నుంచి భూమి \overline{BC} కి గల దూరమునే ఎత్తు అంటాం. అయితే పటములో చూపిన విధంగా A నుంచి \overline{BC} కి అనేక దూరాలను రేఖాభండాలుగా మనము ఊహించవచ్చు. వీనిలో ఎత్తును ఏ రేఖా భండము తెలియజేస్తుంది?

ΔABC లో A నుంచి \overline{BC} కి గీయబడిన లంబమునే ఎత్తు అంటాం. కనుక \overline{AD} ఎత్తు అవుతుంది. ఈ విధమైన ఎత్తులను త్రిభుజంలోని ప్రతి శీర్షం నుంచి ఎదుటి భుజం మీదకు గీయవచ్చు.

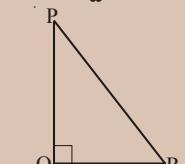


ప్రయత్నించండి.

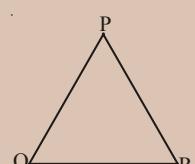
- (i) కింది త్రిభుజాలలో P నుంచి \overline{QR} కు అదే విధముగా మిగిలిన రెండు శీర్షాల నుంచి కూడా ఎత్తులను నిర్ణించుము. (అవసరమైన మూలమట్టాలు ఉపయోగించుము).



అధిక కోణ త్రిభుజము



లంబకోణ త్రిభుజము



అల్పకోణ త్రిభుజము

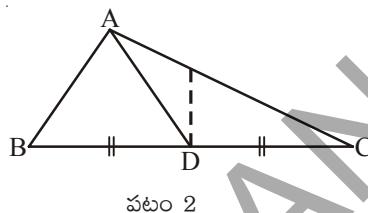
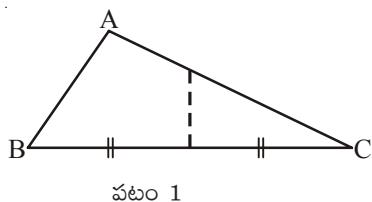
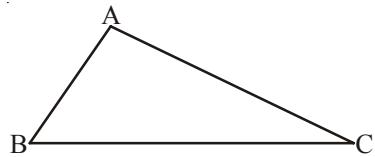
- (ii) ఒక త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు ఎల్లప్పుడూ దాని అంతరములోనే వుంటుందా?

- (iii) ఏ త్రిభుజములో రెండు ఎత్తులు దాని రెండు భుజాలుగా వుంటాయో ఊహించగలవా?

5.4 త్రిభుజము - మధ్యగత రేఖలు

ఒక పేపరు పై త్రిభుజము ΔABC ని గీచి కత్తిరించుము.

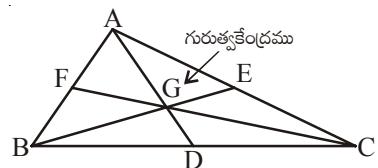
ఇప్పుడు త్రిభుజము యొక్క B, C శీర్షాలు ఒకదానికొకటి ఏకీభవించే విధంగా మదత పెట్టుము. ఈ మదత పటము 1 లో చూపినట్లు BC భుజాన్ని ఖండించును. ఖండన బిందువు BC మధ్య బిందువు అవుతుంది.



ఈ బిందువును D గా గుర్తించి AD ని కలుపుము. ఇదే విధంగా A, C తో ఏకీభవించునట్లు మరియు A, B తో ఏకీభవించునట్లు మదిచి AC, AB ల మధ్యబిందువులను కనుగొని వానిని వరుసగా E, F లుగా గుర్తించి BE, CF లను కలుపుము.

AD, BE, CF ల వరుసగా శీర్షాలు A, B, C ల సుంచి వాని ఎదుటి భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపు రేఖా ఖండాలు. వీనినే త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖలు అంటాము.

ఒక త్రిభుజంలో మూడు మధ్యగత రేఖలను నిర్మిస్తే అవి పటములో చూపిన విధంగా ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. ఈ మిళిత బిందువునే గురుత్వకేంద్రము (G) అంటారు.



ఈ విధంగా త్రిభుజంలో ఒక శీర్షం సుంచి దాని ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖా ఖండమునే మధ్యగత రేఖ అంటాము. ఈ మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువునే గురుత్వకేంద్రము (G) అంటాము.



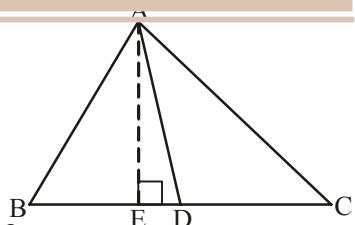
ప్రయోగించండి

లంబకోణ మరియు అధికకోణ త్రిభుజాల ఆకారంలో పేపర్లను కత్తిరించి పైన చెప్పిన విధంగా వాని గురుత్వకేంద్రములను కనుగొనండి.



అభ్యాసం - 2

- ప్రత్కుపటము ΔABC లో BC మధ్య బిందువు D అయిన
 - AD ని _____ అంటాము
 - AE ని _____ అంటాము
- ఏ రకమైన త్రిభుజంలో దాని రెండు భుజాలే రెండు ఎత్తులుగా వుంటాయి?
- ఒక త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖ ఎల్లపుడూ ఆ త్రిభుజం యొక్క అంతరములోనే వుంటుందా?



4. ఒక త్రిభుజములో ఎత్తు ఎల్లపుడూ ఆ త్రిభుజం యొక్క అంతరములోనే వుంటుందా?
5. (i) ΔXYZ లో శీర్షము Y కి ఎదురుగా గల భుజమేది?
- (ii) ΔPQR లో భుజం PQ కు ఎదురుగా గల కోణమేది?
- (iii) ΔABC లో AC భుజానికి కి ఎదురుగా గల శీర్షమేది?

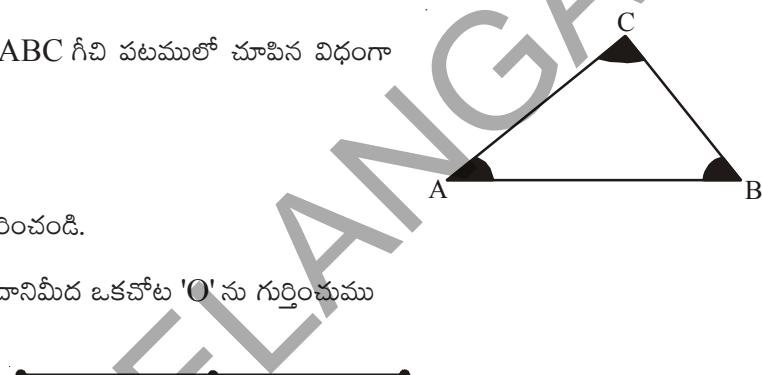
5.5 త్రిభుజ ధర్మాలు

5.5.1 త్రిభుజము - మూడు కోణాల మొత్తము

క్రింది నాలుగు కృత్యాల ద్వారా త్రిభుజం యొక్క ఈ ధర్మాన్ని గురించి నేర్చుకుందాం.

కృత్యము 1

1. ఒక తెల్ల కాగితముపై త్రిభుజము ABC గీచి పటములో చూపిన విధంగా దాని కోణాలకు రంగులు వేయండి.
2. రంగులు వేసిన కోణభాగాలను కత్తిరించండి.
3. వేరే కాగితముపై XY రేఖను గీచి దానిమీద ఒకబోట 'O' ను గుర్తించుము



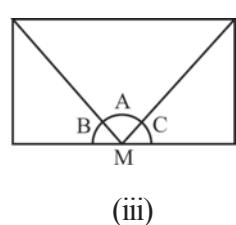
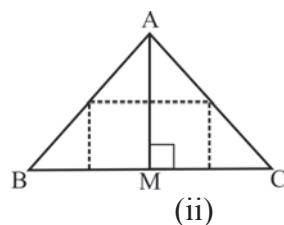
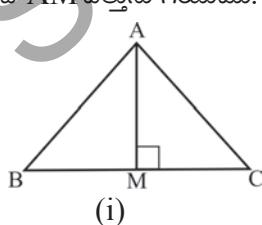
4. కత్తిరించిన మూడు కోణాల శీర్షాలు 'O' వద్ద కలిసే విధంగా క్రింది పటములో చూపిన విధముగా అతికించుము.



ఈలా అతికించినపుడు ఈ మూడు కలసి ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం మనం గమనించవచ్చు. కనుక త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° .

కృత్యము 2

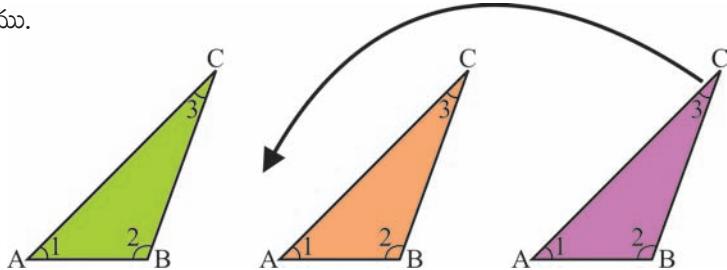
ఒక పేపరును తీసుకొని దీని నుంచి త్రిభుజము ABC ని కత్తిరించుము. ABC త్రిభుజాన్ని తగిన విధంగా మాట మూడిచి AM ఎత్తును గీయుము.



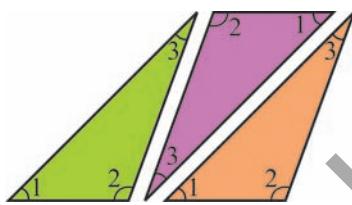
ఇప్పుడు మూడు శీర్షాలు A,B,C లు M వద్ద కలిసే విధంగా మడత పెట్టిన మూడు కోణాలు A, B,C లు కలసిన ఒక సరళ కోణంగా ఏర్పడటం గమనించవచ్చు. కనుక $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

కృత్యము 3

ఈక త్రిభుజం $\triangle ABC$ యొక్క మూడు సమానాలను తయారుచేయము. వాని కోణాలకు పటములో చూపిన విధంగా 1,2,3 లను గుర్తించుము.



ఈ మూడు సమానాలను ప్రక్క పటములో చూపిన విధంగా అమర్యము



బిందువు 'O' వద్ద గల $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ గురించి నీవేమి చెప్పగలవు?

ఈ మూడు కలసి ఒక సరళకోణంగా ఏర్పడం గమనించవచ్చు. కనుక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° .

కృత్యము 4

నీ నోట్టబుక్‌లో $\triangle ABC$, $\triangle PQR$, $\triangle XYZ$ లను గీయుము. ఈ త్రిభుజాల కోణాల కొలతలను కోణమాని సహాయంతో కనుగొనుము. ఫలితాలను క్రింది పట్టికలో పొందుపరుచుము.

త్రిభుజము	కోణాల కొలతలు	కోణాల మొత్తం
$\triangle ABC$	$\angle A = \dots, \angle B = \dots, \angle C = \dots,$	$\angle A + \angle B + \angle C =$
$\triangle PQR$	$\angle P = \dots, \angle Q = \dots, \angle R = \dots,$	$\angle P + \angle Q + \angle R =$
$\triangle XYZ$	$\angle X = \dots, \angle Y = \dots, \angle Z = \dots,$	$\angle X + \angle Y + \angle Z =$

కోణాలను కొలిచేటపుడు కొలతలలో ఏర్పడే చిన్న చిన్న దోషాలను పరిగణలోనికి తీసుకోకుంటే త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° గా పొందవచ్చు.

ఇప్పుడు “త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తము 180° యొక్క తార్కిక నిరూపణను పరిశీలిద్దాం.

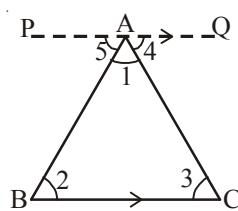
త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° అని నిరూపించుట :

సామాన్య వివరణ : త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180°

దత్తాంశము : $\triangle ABC$ ఒక త్రిభుజము

సారాంశము : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

నిర్మాణము : BC కి సమాంతరంగా A గుండా PQ రేఖను నిర్మించుము.



నిరూపణ (ఉపపత్తి) :

కోణాలను పటములో చూపిన విధంగా అంకెలతో గుర్తించుము.

$$\text{పటం నుండి} \quad \angle 2 = \angle 5 \quad (\text{వికాంతర కోణాలు})$$

$$\angle 3 = \angle 4 \quad (\text{వికాంతర కోణాలు})$$

$$\angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4 \quad (\text{పై రెండు సమీకరణాలను కూడటం ద్వారా})$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4 \quad (\angle 1 \text{ని రెండు వైపులా కూడటం ద్వారా})$$

$$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^\circ \quad (\text{సరళరేఖలై ఏదైనా బిందువు వద్ద కోణము})$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

అనగా త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° .

ఉదాహరణ 1 : ΔABC లో $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, అయిన $\angle C$ ను కనుగొనుము.

సాధన : ΔABC లో $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ($\text{త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం } 180^\circ$)

$$30^\circ + 45^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$75^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 75^\circ$$

$$\therefore \angle C = 105^\circ$$

ఉదాహరణ 2 : ΔABC లో $\angle A = 3\angle B$ మరియు $\angle C = 2\angle B$. అయిన త్రిభుజములోని మూడు కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ [$\text{త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం}$]

$$3\angle B + \angle B + 2\angle B = 180^\circ \quad [\angle A = 3\angle B, \angle C = 2\angle B]$$

$$6\angle B = 180^\circ$$

$$\angle B = 30^\circ$$

$$\text{మరియు} \quad \angle A = 3\angle B = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$$

$$\angle C = 2\angle B = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$

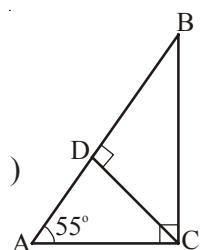
ఉదాహరణ 3 : ΔABC లో C వద్ద లంబకోణము కలదు. $CD \perp AB$ మరియు $\angle A = 55^\circ$ అయిన,

- (i) $\angle DCA$
- (ii) $\angle BCD$
- (iii) $\angle ABC$ లను కనుగొనుము.

సాధన : ΔACD లో

$$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180^\circ \quad (\text{త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం } 180^\circ)$$

$$\Rightarrow 55^\circ + 90^\circ + \angle DCA = 180^\circ$$



$$\begin{aligned}\Rightarrow 145^\circ + \angle DCA &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle DCA &= 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ \\ \therefore \angle DCA &= 35^\circ\end{aligned}$$

(ii) ΔABC లో

$$\begin{aligned}\angle BCA &= 90^\circ \\ \Rightarrow \angle DCA + \angle BCD &= 90^\circ \quad \{\text{పటము నుంచి } \angle ACB = \angle DCA + \angle BCD\} \\ 35^\circ + \angle BCD &= 90^\circ \quad (\text{(i) నుంచి } \angle DCA = 35^\circ) \\ \angle BCD &= 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ\end{aligned}$$

(iii) ΔABC లో

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB &= 180^\circ \quad [\text{త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం}] \\ \angle ABC + 90^\circ + 55^\circ &= 180^\circ \quad (\text{దత్తాంశము నుంచి}) \\ \angle ABC + 145^\circ &= 180^\circ \\ \angle ABC &= 180^\circ - 145^\circ\end{aligned}$$

అనగా $\angle ABC = 35^\circ$

ఉదాహరణ 4 : ఒక త్రిభుజంలో కోణాలు $2 : 3 : 4$ నిపుణిలో కలవు. అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : కోణాల నిపుణి $= 2 : 3 : 4$

$$\text{నిపుణిలోని పుదాల మొత్తము} = 2 + 3 + 4 = 9$$

$$\text{త్రిభుజంలో కోణాల మొత్తము} = 180^\circ$$

$$\text{కనుక మొదటి కోణము} = \frac{2}{9} \times 180^\circ = 40^\circ$$

$$\text{రెండవ కోణము} = \frac{3}{9} \times 180^\circ = 60^\circ$$

$$\text{మూడవ కోణము} = \frac{4}{9} \times 180^\circ = 80^\circ$$

$$\therefore \text{త్రిభుజములోని కోణాలు} = 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ.$$

ఉదాహరణ 5 : ప్రక్క పటంలో కోణము x ను కనుగొనుము

సాధన : $\angle ECD = \angle CBA = 73^\circ$

($AB \parallel CD$ కనుక ఈ రెండూ ఏకాంతర కోణాలు)

ΔECD లో

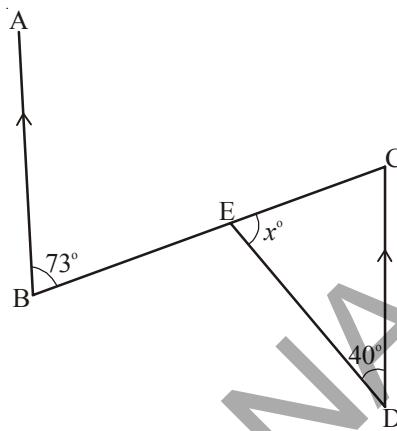
$$\angle DEC + \angle CDE + \angle ECD = 180^\circ$$

$$x^\circ + 40^\circ + 73^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ + 113^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ = 180^\circ - 113^\circ$$

$$x^\circ = 67^\circ$$



ఉదాహరణ 6 : ΔABC లో ఒక కోణము 40° మరియు మిగిలిన రెండు కోణాలు సమానము. అయిన మిగిలిన రెండు కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle C = 40^\circ$ మరియు $\angle A = \angle B = x^\circ$ అనుకొనుము.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (\text{త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తము})$$

$$x^\circ + x^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

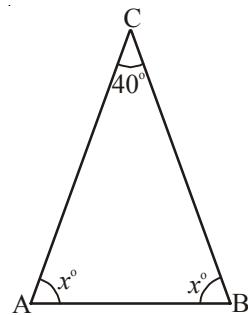
$$2x^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$2x^\circ = 180^\circ - 40^\circ$$

$$2x^\circ = 140^\circ$$

$$x^\circ = 70^\circ$$

కనుక రెండు సమాన కోణాలలో ప్రతి కోణము 70°



ఉదాహరణ 7 : ప్రక్క పటం ΔABC లో D,E లు వరుసగా AB,AC ల మీద బిందువులు మరియు $DE \parallel BC$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 40^\circ$, అయిన (i) x (ii) y (iii) z విలువలను కనుగొనుము.

సాధన : (i) $\angle EDA = \angle CBA$ ($DE \parallel BC$ కనుక ఈ రెండు సదృశ్య కోణాలు)

$$\therefore x^\circ = 30^\circ$$

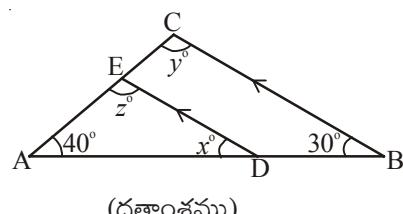
(ii) ΔABC లో

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$40^\circ + 30^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

$$70^\circ + y^\circ = 180^\circ \quad \text{విలువలను ప్రతిక్షేపించగా}$$

$$\therefore y^\circ = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$



(iii) ΔADE లో

$$\angle D + \angle A + \angle E = 180^\circ \quad (\text{త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం})$$

$$30^\circ + 40^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

$$70^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

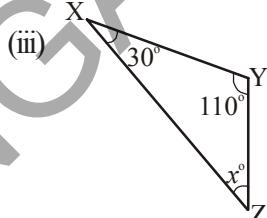
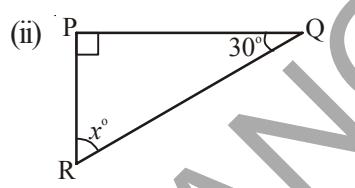
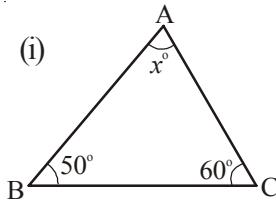
$$z^\circ = 180^\circ - 70^\circ$$

$$z^\circ = 110^\circ$$

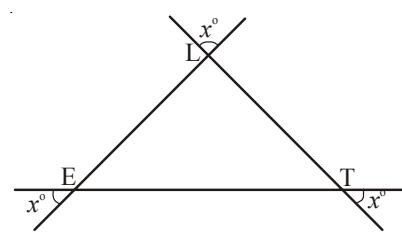
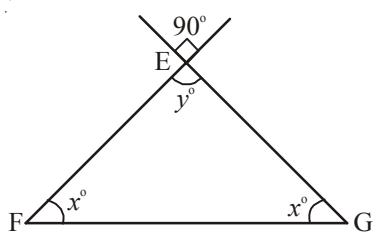
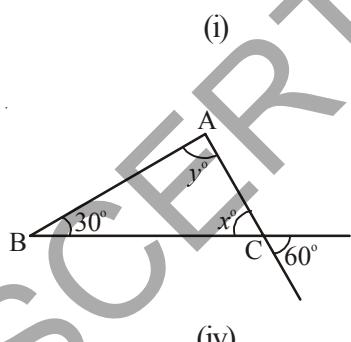
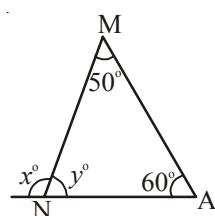
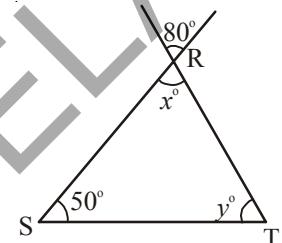
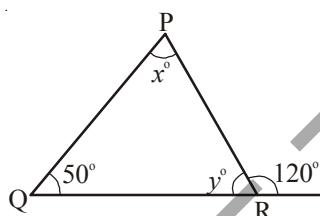


అభ్యర్థి - 3

1. కింది త్రిభుజాలలో x° విలువను కనుగొనము.



2. కింది పట్టాలలో x , y విలువను కనుగొనము.



3. త్రిభుజాల రెండు కోణాల కొలతలు కింది నీయబడినాయి. మూడవ కోణం కొలతను కనుగొనము.

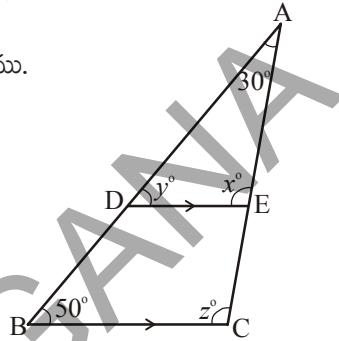
(i) $38^\circ, 102^\circ$

(ii) $116^\circ, 30^\circ$

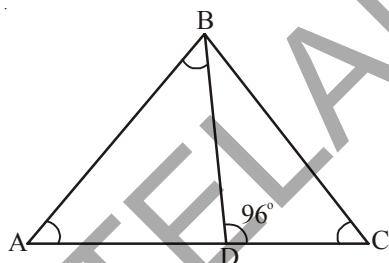
(iii) $40^\circ, 80^\circ$

4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక అల్పకోణము 30° అయిన రెండవ అల్పకోణం ఎంత?

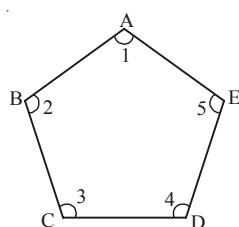
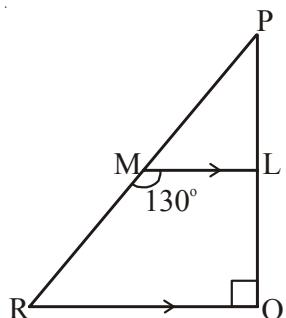
5. క్రింది వాక్యాలు సత్యమో, అసత్యమో రాయండి?
- ఒక త్రిభుజం రెండు లంబ కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.
 - ఒక త్రిభుజం రెండు అల్ప కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.
 - ఒక త్రిభుజం రెండు అధిక కోణాలను కలిగి వుండవచ్చు.
 - ఒక త్రిభుజంలోని ప్రతీ కోణము 60° కంటే తక్కువ వుండవచ్చు.
6. ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల నిప్పుత్తి $1 : 2 : 3$ అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము.
7. ప్రక్కపటంలో $DE \parallel BC$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ అయిన x, y, z విలువను కనుగొనుము.



8. పక్క పటంలో $\angle ABD = 3 \angle DAB$ మరియు $\angle CDB = 96^\circ$ అయిన $\angle ABD$ ని కనుగొనుము?



9. ΔPQR లో $\angle P = 2 \angle Q$ మరియు $2 \angle R = 3 \angle Q$, అయిన ΔPQR లోని కోణాలను కనుగొనుము
10. ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల నిప్పుత్తి $1 : 4 : 5$ అయిన ఆ కోణాలను కనుగొనుము
11. ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో రెండు అల్పకోణాలు $2 : 3$. నిప్పుత్తిలో కలవు. అయిన ఆ రెండు అల్పకోణాలను కనుగొనుము.
12. ప్రక్క పటం ΔPQR లో Q వద్ద లంబకోణం కలదు $ML \parallel RQ$ మరియు $\angle LMR = 130^\circ$. అయిన $\angle MPL$, $\angle LMP$ మరియు $\angle QRP$ లను కనుగొనుము.
13. క్రింది ABCDE పటంలో $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ విలువను కనుగొనుము? (సూచన: పటం అంతరంలో ఏదయినా ఒక బిందువు P ను గుర్తించి, అన్ని శీర్షాలకు కలపండి)



5.5.2 త్రిభుజము - బాహ్యకోణము

$\triangle ABC$ త్రిభుజాన్ని గేచి పటము (1) లో చూపిన విధంగా BC భుజాన్ని D వరకూ పొడిగించుము. ఈ సమయములో ఏర్పడిన $\angle ACD$ ని పరిశీలించుము.

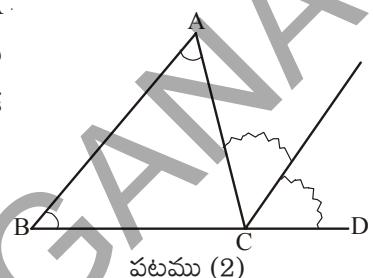
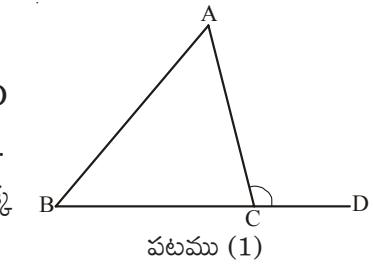
ఇది త్రిభుజం యొక్క బాహ్యములో కలదు కనుక C వద్ద త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణము అంటారు.

పటము (1) నుంచి $\angle ACD$ కి $\angle ACB$ అసన్న కోణమని గమనించవచ్చు. ఈ కోణములే కాకుండా ABC త్రిభుజములోని మిగిలిన రెండు కోణాలు అనగా $\angle A$ లేదా $\angle BAC$ మరియు $\angle B$ లేదా $\angle CBA$ లను $\angle ACD$. యొక్క అంతరాభిముఖ కోణాలు అంటాము. ఇప్పుడు A, B కోణాలను కత్తిరించి పటము (2) లో చూపిన విధంగా వానిని C వద్ద ఒక దాని ప్రక్కన ఒక దానిని ఉంచుము..

ఈ రెండు కోణాలు కలసి $\angle DCA$ కోణం తో ఏకీభవించాయా?

అనగా $\angle DCA = \angle A + \angle B$ అని నీవు చెప్పగలవా?

ఈ కృత్యము నుండి “ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము”ని మనము చెప్పగలము.



జవి చేయండి

త్రిభుజం ABC ని గేచి దానికి C వద్ద $\angle ACD$ బాహ్యకోణమును ఏర్పరుచుము. కోణమాని సహాయంతో $\angle ACD, \angle A, \angle B$ లను కొలవండి.



ఇప్పుడు $\angle A + \angle B$ ని కనుగొని $\angle ACD$ తో పోల్చుండి. $\angle ACD$ మరియు $\angle A + \angle B$ సమానమేనా?

ఒక త్రిభుజంలో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానమని తార్మికంగా కింది విధంగా నిరూపించవచ్చు.

సామాన్య వివరణ : ఒక త్రిభుజంలోని బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

దత్తాంశము : ΔABC లో $\angle ACD$ బాహ్యకోణం.

సారాంశము : $\angle ACD = \angle A + \angle B$

నిర్మాణము : C నుంచి \overline{BA} కు సమాంతరంగా CE ని నిర్మించుము.

నిరూపణ (ఉపప్రతి) :

$$\angle 1 = \angle x \quad (\text{BA} \parallel CE, \overline{AC} \text{ తిర్యగ్రేభు, కనుక ఇవి ఏకాంతర కోణాలు})$$

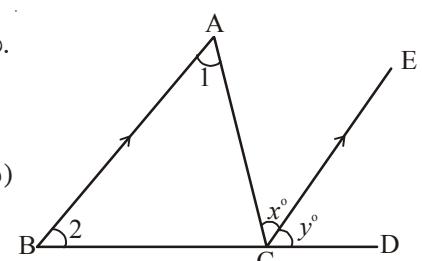
$$\angle 2 = \angle y \quad (\text{BA} \parallel CE, \overline{BD} \text{ తిర్యగ్రేభు కనుక ఇవి సర్పశ్య కోణాలు})$$

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y \quad (\text{పటం నుంచి } \angle x + \angle y = \angle ACD)$$

$$\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$$

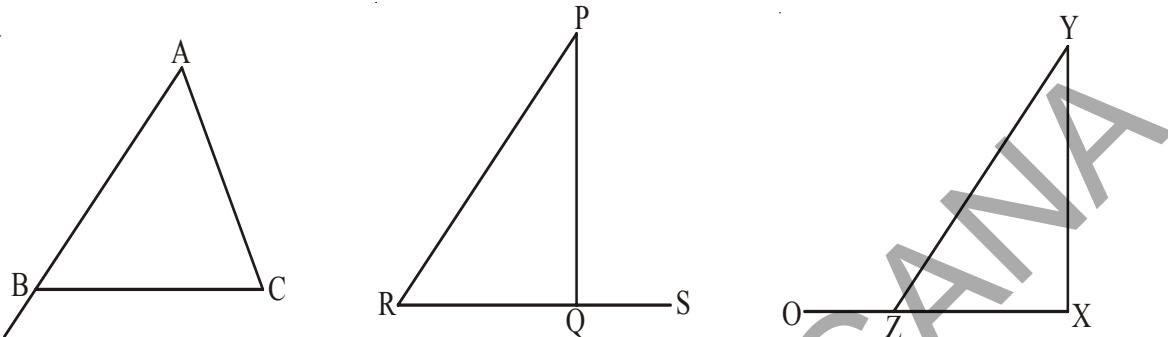
అనగా త్రిభుజంలో ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్యకోణం దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము.

దీనిని త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణ ధర్మం అంటాము.



ఇది చేయండి

క్రింది పటాల నకలు గీయుము. ప్రతీ సందర్భంలో బాహ్యకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానమవుతుందేవో సరిచూడుము.

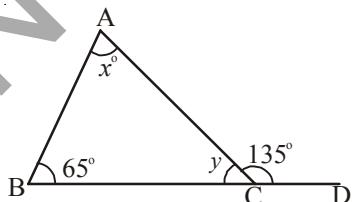


ఉధారణ 8 : ప్రక్క పటంలో x, y విలువలను కనుగొనుము.

సాధన : $\angle DCA = \angle CBA + \angle BAC$

(బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$$\begin{aligned} 135^\circ &= 65^\circ + x^\circ \\ 135^\circ - 65^\circ &= x^\circ \\ \therefore x^\circ &= 70^\circ \end{aligned}$$



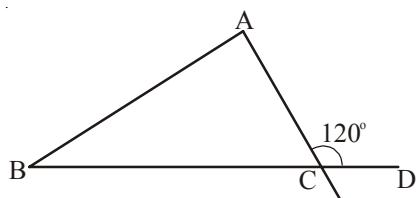
మరియు $\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ$ (త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం)

$$\begin{aligned} 65^\circ + 70^\circ + y^\circ &= 180^\circ \\ 135^\circ + y^\circ &= 180^\circ \\ y^\circ &= 180^\circ - 135^\circ \\ \therefore y^\circ &= 45^\circ \end{aligned}$$

ఉధారణ 9 : ఒక త్రిభుజంలో ఒక బాహ్యకోణము 120° దాని అంతరాభిముఖ కోణాలు $1 : 5$ నిష్పత్తిలో వున్న త్రిభుజంలోని కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన :

$\angle DCA$	=	120°
$\angle DCA$	=	$\angle A + \angle B$
$\angle A + \angle B$	=	120°
కానీ	$\angle B : \angle A$	= $1 : 5$



$$\angle B = \frac{1}{6} \times 120^\circ = 20^\circ$$

$$\angle A = \frac{5}{6} \times 120^\circ = 100^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (\text{త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల మొత్తం})$$

$$100^\circ + 20^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

ఉదాహరణ 10 : ప్రకృత పటంలో

$$(i) \angle SRP \quad (ii) \angle STP \quad (iii) \angle RTS$$

$$(iv) \angle PRQ \text{ లను కనుగొనుము.}$$

సాధన : (i) $\triangle PQR$ లో $\angle PRS$ బాహ్యకోణం

$\angle RQP$ మరియు $\angle QPR$ లు అంతరాభిముఖ కోణాలు

$$\angle PRS = \angle RQP + \angle QPR \quad (\text{బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం})$$

$$\angle PRS = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$$

(ii) $\triangle RST$ లో $\angle PTS$ బాహ్యకోణం మరియు $\angle SRT, \angle RST$ లు అంతరాభిముఖ కోణాలు

$$\therefore \angle PTS = \angle SRT + \angle TSR$$

$$\angle PTS = 85^\circ + 45^\circ \quad (\angle SRT = \angle PRS = 85^\circ)$$

$$\angle PTS = 130^\circ$$

(iii) $\triangle RST$ లో

$$\angle RTS + \angle TSR + \angle SRT = 180^\circ$$

$$\angle RTS + 45^\circ + 85^\circ = 180^\circ$$

$$\angle RTS + 130^\circ = 180^\circ$$

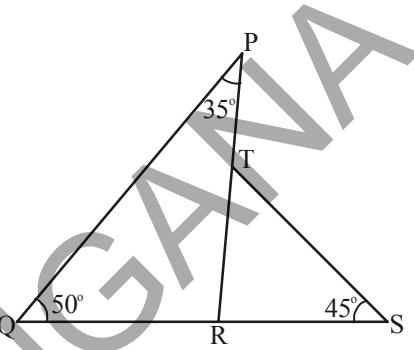
$$\therefore \angle RTS = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$(iv) \angle PRQ + \angle SRP = 180^\circ \quad (\text{రేఖీయాల్యాయము})$$

$$\angle PRQ + 85^\circ = 180^\circ$$

$$\angle PRQ = 180^\circ - 85^\circ$$

$$\angle PRQ = 95^\circ$$



ఉదాహరణ 11 : పటంలో చూపబడిన ΔABC యొక్క బాహ్యకోణాల మొత్తము 360° అని చూపుము.

సాధన : $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (రేఖీయద్వయము)

$$\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ \text{ (రేఖీయద్వయము)}$$

$$\angle 6 + \angle 1 = 180^\circ \text{ (రేఖీయద్వయము)}$$

పై వానిని ఇరువైపులా కూడగా

$$\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 1 = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

$$(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540^\circ$$

కానీ $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ అని మనకు తెలుసు (త్రిభుజంలోని మూడుకోణాల మొత్తం)

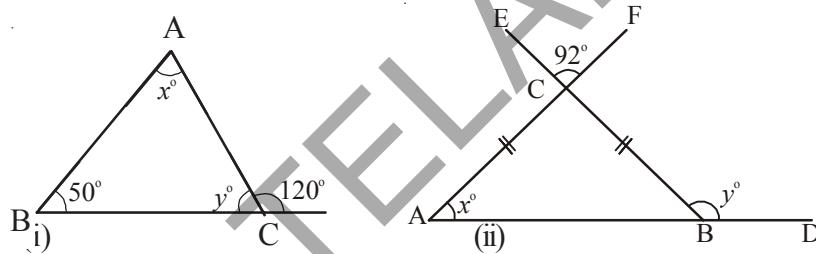
$$\text{కనుక } 180^\circ + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^\circ - 180^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$$

\therefore ఒక త్రిభుజంలోని బాహ్యకోణాల మొత్తము $= 360^\circ$.

ఉదాహరణ 12 : క్రింది పటాలలో x మరియు y విలువలను కనుగొనుము



సాధన : (i) $\angle BAC + \angle CBA = \angle ACD$ (బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం)

$$x^\circ + 50^\circ = 120^\circ$$

$$x^\circ = 120^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$

$$\angle ACB + \angle ACD = 180^\circ \text{ (రేఖీయద్వయం)}$$

$$y^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

$$y^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

(ii) $\angle ACB = \angle FCE$ $= 92^\circ$ (శీర్షాభిముఖ కోణాలు)

$$\angle BAC = \angle CBA \text{ (సమాన భూజాలకు ఎదురుగా గల కోణాలు సమానం)}$$

ΔABC లో

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ$$

$$x^\circ + x^\circ + 92^\circ = 180^\circ$$

$$2x = 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$$

$$\therefore x^\circ = \frac{88}{2} = 44^\circ$$

ಇಂತ್ಯಾ $\angle CBA + y^\circ = 180^\circ$ (ರೆಷ್ಟಿಯದ್ವಯಂ)

$$y^\circ = 180^\circ - x^\circ$$

$$\therefore y^\circ = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$$

ಉದಾಹರಣ 13 : ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪಟಂಲ್ ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತ ಕನುಗೊನುಮು?

ಸಾಧನ : ಪಟಂಲ್ ಮಾಡಿನ ವಿಧಂಗಾ ಕೋಣಾಲನು ಗುರ್ತಿಂಚುಮು

$$\triangle GHC \text{ ಲೋ } \angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ \dots\dots (1)$$

$$\triangle EHB \text{ ಲೋ } \angle 6 = \angle 5 + \angle 2 \dots\dots (2)$$

$$\triangle AGD \text{ ಲೋ } \angle 7 = \angle 1 + \angle 4 \dots\dots (3)$$

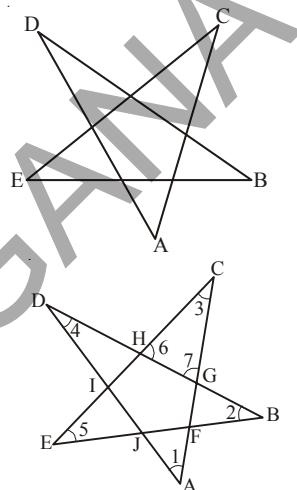
(ಬಾಹ್ಯಕೋಣಮು ಅಂತರಾಭಿಮುಖ ಕೋಣಾಲ ಮೊತ್ತಾನಿಕಿ ಸಮಾನಂ)

(2), (3) ಲನು (1) ಲೋ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಿಂಬಗ್ಗಾ

$$\Rightarrow \angle 3 + \angle 5 + \angle 2 + \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$$

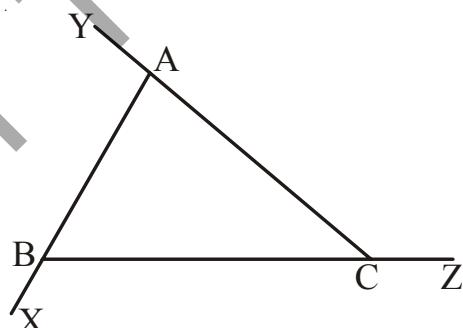
$$\Rightarrow \therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\text{ಅನಗಾ } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$$

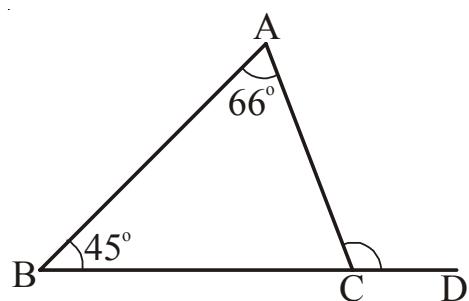


ಅಭ್ಯಾಸಂ - 4

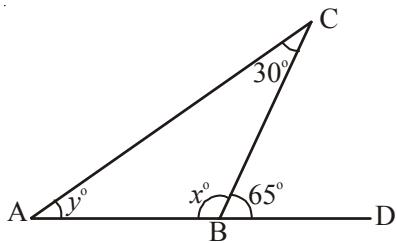
1. $\triangle ABC$ ಯೊక್ಕ ಅಂತರ, ಬಾಹ್ಯಕೋಣಾಲನು ಪೇರಿಸುಮು.



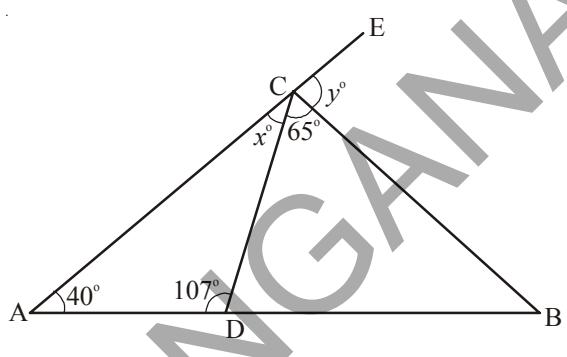
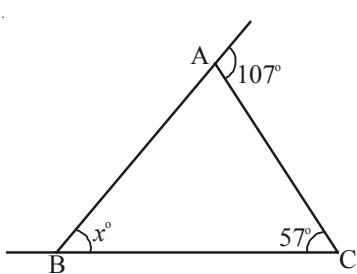
2. ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಪಟಂ $\triangle ABC$ ಲೋ $\angle ACD$ ವಿಲುವನು ಕನುಗೊನುಮು.



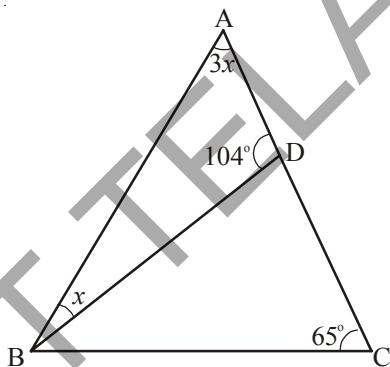
3. x, y కోణాల విలువలను కనుగొనుము.



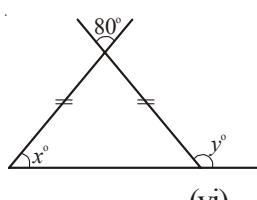
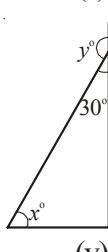
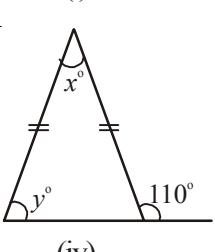
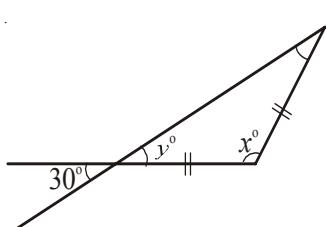
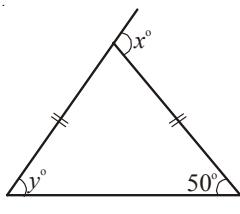
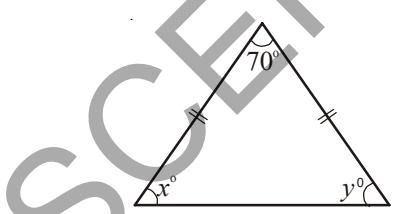
4. క్రింది పటాలలో x, y లను కనుగొనుము.



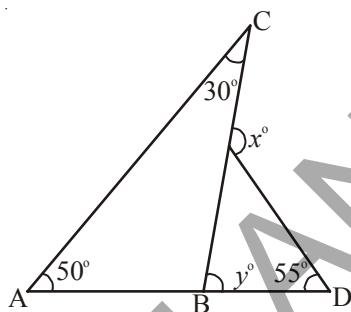
5. పటంలో $\angle BAD = 3\angle DBA$, అయిన $\angle CDB, \angle DBC$ మరియు $\angle ABC$ లను కనుగొనుము.



6. క్రింది పటాలలో x, y విలువను కనుగొనుము.



7. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 125° మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలు $2 : 3$. నిష్పత్తిలో వన్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనము.
8. ΔPQR లో బాహ్యకోణము $\angle PRS = 105^\circ$ మరియు $Q = 70^\circ$, అయిన $\angle P$. విలువను కనుగొనము. $\angle PRS > \angle P$ అవుతుందా?
9. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 130° మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలలో ఒక దాని విలువ 60° అయిన రెండవ కోణము విలువ ఎంత?
10. ఒక త్రిభుజములో బాహ్యకోణము 105° మరియు దీని అంతరాభిముఖ కోణాలు $2 : 5$, నిష్పత్తిలో వన్న త్రిభుజములోని కోణాలను కనుగొనము.
11. పటములో x మరియు y లను కనుగొనము.



మనం నేర్చుకున్నవి

- 1 (i) ఏవైనా మూడు రేఖల ఖండాలచే ఏర్పడిన సరళ సంవృత పటమునే త్రిభుజము అంటాము.
 - (ii) భుజాల పొడవుల ఆధారంగా త్రిభుజాలు మూడు రకాలు
 - మూడు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమబాహు త్రిభుజమంటారు.
 - కనీసం ఏవైనా రెండు భుజాలు సమానంగా గల త్రిభుజాన్ని సమద్విబాహు త్రిభుజము అంటారు.
 - మూడు భుజాలు వేరువేరు పొడవులు కలిగియున్న త్రిభుజాన్ని విషమబాహు త్రిభుజము అంటారు.
 - (iii) కోణాల ఆధారంగా త్రిభుజాలు మూడు రకాలు
 - అన్ని కోణాలు అల్పకోణాలైన త్రిభుజాన్ని అల్పకోణ త్రిభుజమంటారు.
 - ఒక కోణం అధికకోణంగా గల త్రిభుజాన్ని అధికకోణ త్రిభుజమంటారు.
 - ఒక కోణం లంబకోణమైన త్రిభుజాన్ని లంబకోణ త్రిభుజము అంటారు.
2. మూడు భుజాలు, మూడు కోణాలను కలిపి త్రిభుజం యొక్క 6 అంశాలు అంటాము.
3. త్రిభుజ భుజాల పొడవుల మధ్య సంబంధము :
- (i) ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తము మూడవ భుజం పొడవు కంటే ఎక్కువ

(ii) ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల బేధము మూడవ భుజం పొడవు కంటే తక్కువ

4. త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షం నుంచి ఎదుటి భుజం మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖా ఫండమును మధ్యగత రేఖ అంటారు. త్రిభుజములో ఇలాంటి మధ్యగత రేఖలు మూడు వుంటాయి.
5. త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షం నుంచి దాని ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన లంబమును ఎత్తు అంటాము. ఇలాంటి ఎత్తులు త్రిభుజములో మూడింటిని నిర్మించవచ్చు.
6. త్రిభుజములోని మూడు కోణాల మొత్తం 180° .
7. త్రిభుజంలో ఏదైనా ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడిన బాహ్య కోణము దాని అంతరాఖ్య ముఖ్య కోణాల మొత్తానికి సమానము.

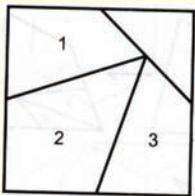
సూచన : $LM = LM$ రేఖాఫండం యొక్క పొడవు

$$\overline{LM} = \text{రేఖా ఫండం } LM$$

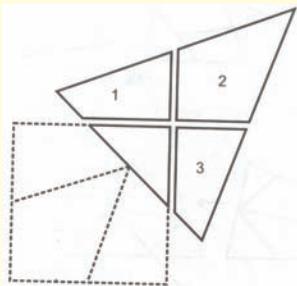
$$\overrightarrow{LM} = \text{కిరణం } LM$$

$$\overleftarrow{LM} = \text{సరళ రేఖ } LM$$

అట్ట ముక్కులతో తమాషా!



ఒక చతురష్టికార అట్ట ముక్కును తీసుకోండి. దాని భుజాల మధ్య బిందువును గుర్తించి, పటంలో చూపిన విధంగా రేఖలను గీయండి. వాటి వెరుపు చతురష్టాన్ని 4 భాగాలుగా విభజించి వాటితో ఒక త్రిభుజం ఏర్పడేటట్లు అమర్చండి.



నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు

6.0 ఉపోదాతము

నిష్పత్తి మరియు అనుపాతంలను రాశులను పోల్చడానికి ఉపయోగిస్తారని క్రింది తరగతిలో నేర్చుకున్నాము. ఈ తరగతిలో మొదట మనం నేర్చుకున్న వాటిని పునర్విష్టు చేసుకుని నిష్పత్తులకు ఒక రూపమైన శాతంలను గురించి నేర్చుకుందాం.

6.1 నిష్పత్తి

- మాధురి బరువు 50 కిలోలు మరియు ఆమె కుమార్తె బరువు 10 కిలోలు. మాధురి బరువు ఆమె కుమార్తె బరువుకు 5 రెట్లు అని చెప్పవచ్చు. మరో రకంగా కుమార్తె బరువు తల్లి బరువులో 5వ వంతు అని అనపచ్చు. ఈ విధంగా మాధురి బరువుకు, ఆమె కుమార్తె బరువుకు గల నిష్పత్తి 50:10 లేక 5:1.

విలోమంగా, కుమార్తె బరువు, తల్లి బరువుల నిష్పత్తి 1:5.

- ఒక తరగతిలో 60 మంది బాలురు, 40 మంది బాలికలు కలరు. బాలుర సంఖ్య బాలికల సంఖ్యకు $\frac{3}{2}$ రెట్లు.

మరోవిధంగా బాలికల సంఖ్య బాలుర సంఖ్యలో $2/3$ వ వంతు. ఈ విధంగా బాలురు మరియు బాలికల నిష్పత్తి 60 : 40 లేదా 3 : 2. విలోమంగా బాలికలు, బాలుర నిష్పత్తి 2 : 3.

- ఆనంద్ వద్ద 100 సెం.మీ. పొడవు గల తీగ మరియు రప్పి వద్ద 5 మీ. పొడవుగల తీగ కలదు. ఆనంద్, రప్పితో “నావద్ద గల తీగ పొడవు నీవద్ద గల తీగ పొడవు కంటే 20 రెట్లు పొడవైనది.” అని అన్నాడు. ఇది అనత్యము. ఎందుకంటే 100 సెం.మీ. కన్నా 5 మీ. అనేది చాలా పొడవైనదని నీకు తెలుసు. రప్పి తీగ పొడవును మీటర్లలో తెలుపగా, అదే ఆనంద్ తీగ పొడవును సెం.మీ.లలో తెలుపబడినది. కనుక రెండు పొడవులను ఒకే ప్రమాణాలలోనికి మార్చుకున్నాకనే పోల్చాలి.

1 మీ. = 100 సెం.మీ. అని నీకు తెలుసు. కనుక రప్పి తీగపొడవు = 5 మీ. = $5 \times 100 = 500$ సెం.మీ. ఈ విధంగా రప్పి, ఆనంద్లల తీగల పొడవుల నిష్పత్తి 500 : 100 లేక 5 : 1 మరోవిధంగా రప్పి తీగ పొడవు ఆనంద్ తీగపొడవుకు 5.రెట్లు.

పై అన్న ఉదాహరణల్లో రాశులను, నిష్పత్తుల రూపంలో పోల్చడం జరిగింది. కనుక ఒకే ప్రమాణంలో గల రాశుల క్రమానుగత పోలికే నిష్పత్తి. దీనిని ‘:’ గుర్తుతో సూచిస్తాం. రెండు రాశులు a,b నిష్పత్తి a : b మరియు దీన్ని ‘a కుట్ట b’ అని చదువుతాము. ‘a’, ‘b’ లను నిష్పత్తిలోని పదాలు అంటాం. ‘a’ ని మొదటి పదం లేదా పూర్వ పదం అని, ‘b’ ని రెండవ పదం లేదా పరపదం అని అంటాం.





ప్రయత్నించండి.

రాశులను నిష్పత్తి రూపంలో పోల్చుదానికి నిత్య జీవితంలోని కొన్ని సందర్భాలను ఆలోచించండి.



అభ్యసం - 1

- ₹ 100 మరియు ₹ 10 ల నిష్పత్తి ఎంత? సూక్ష్మ రూపంలో మీ సమాధానాన్ని తెలపండి.
- సుధ వద్ద ₹ 5 ఉన్నవి. రాథ వద్ద సుధ కన్నా 3 రెట్లు సామ్యు ఉన్నది. అయితే రాథ వద్ద ఉన్న సామ్యంత?
 - రాథ మరియు సుధల వద్ద సున్న సామ్యుల నిష్పత్తి ఎంత?
 - సుధ సామ్యకు, రాథ సామ్యకు గల నిష్పత్తి ఎంత?
- ఒక దీర్ఘచతురం పొడవు 40 సె.మీ., వెడల్పు 20 సె.మీ. పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
- ఒక సాధారణ నత్త వేగం గంటకు 50 మీ. మరియు చిరుతపులి వేగం గంటకు 120 కి.మీ. వాటి వేగాల నిష్పత్తి కనుగొనండి.
- రాజు మరియు రవిలకు 96 చాక్కెట్లను 5 : 7 నిష్పత్తిలో పంచండి.
- AB రేఖా ఖండం పొడవు 38 సె.మీ. దీనిపై గల X అనే బిందువు రేఖాఖండాన్ని 9 : 10 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. అయిన AX మరియు XB రేఖా ఖండాల పొడవులెంత?



- ₹ 1,60,000ను 3 : 5 నిష్పత్తిలో రెండు భాగములుగా విభజించబడింది. వీటిలో కనిష్ట భాగమెంత?
- ఆకు పచ్చరంగు పొందడానికి, ఒక పెయింటర్ పసుపు, నీలం రంగులను 3 : 2 నిష్పత్తిలో కలపాలి. పసుపు రంగును 12 లీటర్లు వాడితే నీలం రంగును ఎన్ని లీటర్లు వాడాలి?
- కనుగొనండి.
 - నీ తరగతిలోని బాలురు, బాలికల నిష్పత్తి.
 - నీ తరగతి గదిలోని తలుపులు, కిలీకీల నిష్పత్తి.
 - నీ వద్ద గల పార్ట్యూప్స్కాలు మరియు నోటు పుస్తకాల నిష్పత్తి.



ప్రాణ్య పని

- టేప్టో నీ తరగతి గది పొడవు, వెడల్పులను నీ మిత్రుని సహాయంతో కొలచి, పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
 - ₹ 10 ల నోటు పొడవు, వెడల్పులను కొలచి దగ్గరి సంఖ్యకు సవరించి, వాటి పొడవు, వెడల్పుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.
- ఇదే కృత్యాన్ని ₹ 20 మరియు ₹ 50 ల నోట్లతో ప్రయత్నించి నీ నోట్ పుస్తకంలో ప్రాయండి.

6.2 అనుపాతము

లీటేఫ్ తల్లి 2 చెంచాల టీ పొడిని 1 కప్పు టీ తయారీకి ఉపయోగిస్తుంది. ఒక రోజు ముగ్గరు బంధువులు వారి ఇంటికి వచ్చారు. 3 కప్పుల టీ తయారీకి ఎన్ని చెంచాల టీ పొడిని వాడాలి? అవును. మీరు అనుకొన్నది నిజమే. 6 చెంచాల టీపొడిని 3 కప్పుల టీ తయారీకి వాడాలి. లీటేఫ్ తల్లి సమస్యా సాధనకు అనుపాత ధర్యాన్ని ఉపయోగించింది. ఇంకొక ఉదాహరణను చూద్దాం.

రవి ఒక ఫోటో స్టోడియోలో ఫోటో తీయించుకొన్నాడు.

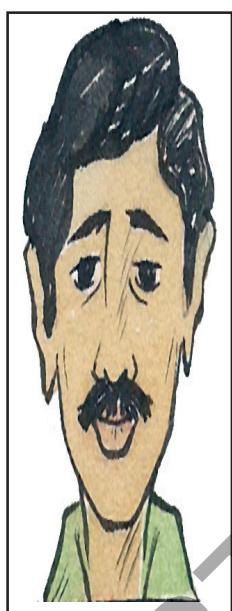
దాని కొలతలు 4 సెం.మీ. \times 6 సెం.మీ.

4 సెం.మీ.



6 సెం.మీ.

4 సెం.మీ.



ఆఫోటోని అతడు ల్యాబ్కు వెళ్లి పెద్దది చేయించు కోవాలనుకున్నాడు.

ల్యాబ్ అతను కొంతసమయం తర్వాత ఇలా చేసి ఇచ్చాడు.
“ఇప్పుడు చేసిన ఫోటోలో ఏదో దోషం ఉందని” అన్నాడు రవి.

మరి రవి అన్నది నిజమేనా?

దోషం ఏమిటో నువ్వు చెప్పగలవా?

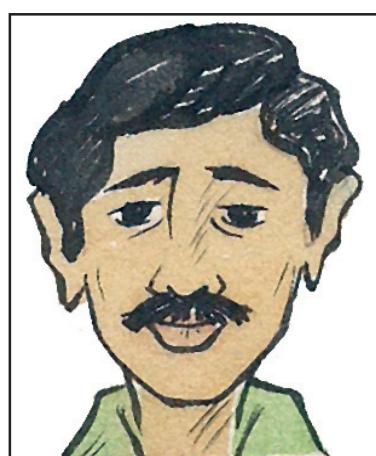
రవి ఈ ఫోటో పొడవు, వెడల్పులను కొలిచాడు. పొడవు, వెడల్పుల నిప్పుత్తి మొదటి ఫోటోకి, రెండవ ఫోటోకి ఒకే విధంగా ఉండాలని అతనికి తెలుసు.

మొదటి ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిప్పుత్తి = $4 : 6 = 2 : 3$

రెండవ ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిప్పుత్తి = $4 : 12 = 1 : 3$

మరి ఈ రెండు నిప్పుత్తలు సమానమా? మొదటి ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిప్పుత్తి, రెండవ ఫోటో పొడవు, వెడల్పుల నిప్పుత్తికి సమానంగా లేదని గ్రహించాడు. రెండవ ఫోటో మొదటి ఫోటోకు అనుపాతంలో లేదని అర్థమయింది. అప్పుడు ల్యాబ్ అతన్ని మరొక పెద్ద ఫోటోను చేయమన్నాడు. ఇప్పుడు చేసిన ఫోటో సరిగా ఉంది. మరలా పొడవు, వెడల్పులను కొలిచి నిప్పుత్తి కనుగొన్నాడు.

8 సెం.మీ.



పొడవు వెడల్పుల నిప్పుత్తి = $8 : 12 = 2 : 3$

ఇప్పుడు రవి మొదటి ఫోటో, మూడవ ఫోటో రెండూ బాగున్నాయని భావించాడు. ఎందుకంటే వాటి పొడవు, వెడల్పుల నిప్పుత్తి సమానం. అంటే అవి అనుపాతంలో ఉన్నాయి.

ఈ విధంగా రెండు నిప్పుత్తులు సమానంగా ఉంటే అవి అనుపాతంలో ఉన్నాయింటారు. అనుపాతానికి గుర్తు ‘::’ రెండు నిప్పుత్తులు $a : b$ మరియు $c : d$ లు సమానమైతే ఇలా ప్రాయివచ్చు., $a : b = c : d$ లేక $a : b :: c : d$.

దీన్ని $a : b$ ఈజ్ ఏజ్టు $c : d$ అని చదువుతాం.

a, b, c, d నాలుగు రాశులను ఒకటవ, రెండవ, మూడవ, నాలుగవ పదాలని అంటాం. ఒకటవ, నాల్గవ పదాలను అంత్యపదాలని లేక అంత్యాలని, రెండవ, మూడవ పదాలను మధ్యపదాలని లేక మధ్యమాలని అంటాం.

ఈ అనుపాతంలో $a : b = c : d$

$$\text{అంటే } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

కావున,

$$ad = bc$$

ఈ విధంగా అంత్యముల లబ్దం = మధ్యమాల లబ్దమునకు సమానం.

అంటే

$$\begin{array}{c} \text{మధ్యములు} \\ \hline a : b = c : d \\ \text{అంత్యములు} \end{array}$$



దీనిలో d ని అనుపాత చతుర్ధం లేదా చతుర్ధానుపాతం అని అంటాం. మరియు $d = \frac{b.c}{a}$

కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణ 1 : అనుపాతమును పూర్తిచేయటకు \square ను నింపుము.

$$(i) \quad 2 : 5 = 6 : \square$$

అంత్యముల లబ్దము, మధ్యముల లబ్దానికి సమానము.

$$\begin{array}{l} \text{అనగా} \quad 2 : 5 = 6 : \square \\ \text{కనుక} \quad 2 \times \square = 5 \times 6 \end{array}$$

$$\square = \frac{30}{2} = 15$$

$$(ii) \quad 16 : 20 = \square : 35$$

అంత్యాల లబ్దం, మధ్యమాల లబ్దానికి సమానం.

$$\begin{array}{l} \therefore 16 : 20 = \square : 35 \\ \text{కావున, } 20 \times \square = 16 \times 35 \end{array}$$

$$\square = \frac{560}{20} = 28 \quad \therefore 6 : 20 = \boxed{28} \times 35$$



అభ్యాసం - 2

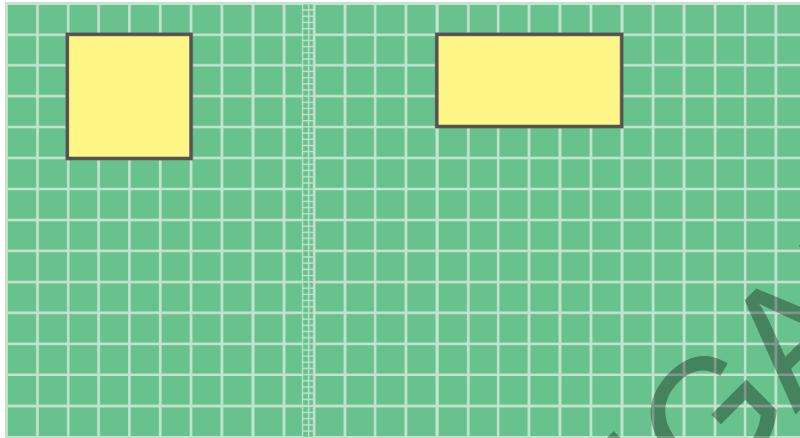
1. కింది పట్టికలోని భాగీలలో లోహించిన వదాలను సరిదైన సమాధానాలతో నింపండి.

క్ర.సంఖ్య	అనుపాతము	అంతాల లబ్ధము	మధ్యముల లబ్ధము
1.	$1 : 2 :: 4 : 8$		
2.	$5 : 6 :: 75 : 90$		
3.	$3 : 4 :: 24 : 32$		
4.	$2 : 5 :: \square : 15$	30	
5.	$3 : 6 :: 12 : \square$		72

2. సత్యమా? అసత్యమా? తెల్పండి.
- (i) $15 : 30 :: 30 : 40$
 - (ii) $22 : 11 :: 12 : 6$
 - (iii) $90 : 30 :: 36 : 12$
 - (iv) $32 : 64 :: 6 : 12$
 - (v) $25 : 1 :: 40 : 160$
3. మధు మార్కెటలో 5 కిలోల ఆలుగడ్డలు కొన్నాడు. 2 కిలోల ధర రే 36 లు అయితే మధు ఎంత సొమ్ము చెల్లించాలి?
4. భౌతికశాస్త్రం ప్రకారం భూమిపై ఒక వస్తువు బరువు చంద్రునిపై అదే వస్తువు బరువులు అనుపాతంలో ఉంటాయి. ఉండాపారణకి భూమిపై 90 కిలోల బరువు గల ఒక పురుషుని బరువు చంద్రునిపై 15 కిలోలైతే, భూమిపై 60 కిలోల బరువుగల ప్రై బరువు చంద్రునిపై ఎంత?
5. ఒక విపత్తు సహాయక బృందంలో ఇంజనీర్లు మరియు డాక్టర్లు $2 : 5$ నిపుణీలో ఉన్నారు.
- ఎ) 18 మంది ఇంజనీర్లన్న బృందంలో డాక్టర్ల సంఖ్య ఎంత?
 - బి) 65 మంది డాక్టర్లన్న బృందంలో ఇంజనీర్ల సంఖ్య ఎంత?
6. రెండు కోణాల నిపుణీ $3:1$ అయిన
- ఎ) చిన్న కోణం 180° ఐన పెద్ద కోణం ఎంత?
 - బి) పెద్ద కోణం 63° ఐన చిన్న కోణం ఎంత?

ఇవి చేయండి.

కింది పటంలో చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ పటాలను పెద్దవిచేసి అనుపాతంలో ఉండేలా మరొక చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రాలను గీయండి.



6.3 రేటు

కొన్ని సందర్భాల్లో నిప్పుత్తులను రేటుగా చెప్పాం. కింద కొన్ని ఉదాహరణలను ఇవ్వబడినవి.

- (i) మానాస్కగారు వాహనాన్ని గంటకు 60 కి.మీ. వేగంతో సదుపుత్తారు. (అనగా 60 కి.మీ./గం.) (గంటకు 60 కిలో మీటర్లు)
- (ii) నేను కిలో ఆపిల్ పండ్లు ₹ 120 వంతున కొన్నాను. (₹ 120 లకు ఒక కి.గ్రా.)
- (iii) నా హృదయ స్పందన రేటు నిమిషానికి 72 సార్లు (ఒక నిమిషానికి 72 స్పందనలు)
- (iv) డజను గుడ్ల వెల ₹ 60 లు. (₹ 60 లకు ఒక డజను గుడ్లు)
- (v) ఆంధ్రప్రదేశ్ సరాసరి జననరేటు 924. (జనన రేటు అనగా ఇచ్చిన సమయంలో ప్రతి వేఱ మందికి ఉండే జననాల సంఖ్య).

మొదటి ఉదాహరణలో వాహనం వెళ్ళే దూరాన్ని దానికి పట్టే కాలంతో పోల్చారు. రెండవ దాన్నో ఆపిల్ పండ్ల ధరను దాని బరువుతో పోల్చారు. మూడవ దాన్నో హృదయ స్పందనల సంఖ్యను కాలంతో పోల్చారు. నాల్గవ దాన్నో గుడ్ల ధరను గుడ్ల సంఖ్యతో పోల్చారు. ఐదవ దాన్నో సజీవ జననాల సంఖ్యను 1000 మంది జనులతో పోల్చారు.

గంటకు 60 కి.మీ. వేగాన్ని సాంకేతికంగా 60 కి.మీ./గం. అని అలాగే ₹ 120/కి.గ్రా., 72 స్పందనలు/ని., ₹ 60/డజన్, 918/1000 జననాలుగా రాస్తాము.

6.4 ఏకవస్తుమార్గం

మొదటగా ఒక రాశి విలువను కనుగొని తర్వాత కావలసిన రాశుల విలువను కనుగొనే పద్ధతినే ఏకవస్తు మార్గం అంటాం.

ఉదాహరణ 2 : ఒక దుకాణదారు ₹ 30 లకు 5 గ్లౌనులు అమ్ముతున్నాడు. అలాంటి 10 గ్లౌనుల విలువ ఎంత?

సాధన : 5 గ్లౌనుల ధర = ₹ 30

$$\text{కావున, } 1 \text{ గ్లాసు \ ధర } ₹ \frac{30}{5} = ₹ 6$$

$$\text{ఈ విధంగా, } 10 \text{ గ్లాసుల ధర} = 6 \times 10 = ₹ 60$$

ఉదాహరణ 3 : ఒక దజను అరబీపండ్ల వెల ₹ 20 లు అయిన 9 అరబీ పండ్ల వెల ఎంత?

సాధన : 1 దజను = 12 రూపాయిల్లు

$$12 \text{ అరబీపండ్ల వెల} = ₹ 20\text{లు}$$

$$\text{కావున ఒక అరబీ పండు వెల} = \frac{20}{12}$$

$$\text{అందువల్ల } 9 \text{ అరబీపండ్ల వెల} = \frac{20}{12} \times 9 = ₹ 15$$

జీవి చేయండి.

- 160 మంది పిల్లలు కూర్చోవడానికి 40 బెంచీలు అవసరం. ఇదే వంతున 240 మంది పిల్లలు కూర్చోవడానికి ఎన్ని బెంచీలు అవసరమాతాయి.
- ఒక పిట్ట 10 సెకన్డుకు 23 సార్లు తన రెక్కలను ఆడిస్తుంది. మరి 2 నిమిషాల్లో ఎన్ని సార్లు అది రెక్కలను ఆడిస్తుంది.
- మానవ గుండె సరాసరిన నిమిషానికి 72 సార్లు కొట్టుకుంటుంది. మరి 15 సెకన్డులో ఎన్ని సార్లు కొట్టుకుంటుంది? అలాగే 1 గంటలో, 1 రోజులో ఎన్ని సార్లు కొట్టుకుంటుంది?



6.5 అనులోమానుపాతం

నిత్యజీవితంలో ఎన్నో సందర్భాల్లో ఒక రాశిలో వచ్చే మార్పు మరొక రాశిలో మార్పుకు దారితీయటాన్ని గమనించి ఉంటాం.

ఉదాహరణకు

- కొనే వస్తువుల సంఖ్య పెరిగితే, దానికి చెల్లించవలసిన మొత్తం కూడా పెరుగుతుంది. అలాగే కొనే వస్తువుల సంఖ్య తగ్గితే చెల్లించవలసిన మొత్తం కూడా తగ్గుతుంది.
- బ్యాంకులో డిపాజిట్ చేసే సామ్య పెరిగిన కొలదీ దానిపై వచ్చే వడ్డి పెరుగుతుంది. అలాగే డిపాజిట్ సామ్య తగ్గిన కొలదీ దానిపై వచ్చే వడ్డి కూడా తగ్గుతుంది.
- వేగంలో మార్పులేనప్పుడు ప్రయాణించే దూరం పెరిగితే దానికి పట్టేకాలం పెరుగుతుంది. అలాగే దూరం తగ్గితే, పట్టేకాలం కూడా తగ్గుతుంది.

పై ఉదాహరణల ద్వారా ఒక రాశి పరిమాణం పెరిగే కొద్ది (తగ్గేకొద్ది) మరొక రాశి పరిమాణం కూడా పెరుగుతుందని (తగ్గుతుందని) తెలుస్తుంది. మరియు దాని విపర్యయం కూడా సత్యమే.

ఇలాంటి సందర్భాన్నే ఒక ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకుండాం.

ఒక కుళాయి గంటకు 300 లీటర్ల సామర్థ్యంతో ఒక ట్యూపకును నింపుతుంది. 2 గంటల్లో ఎన్ని లీటర్లని నింపగలదు? 600 లీటర్లను నింపగలదు. అలాగే 4 గంటల్లో, 8 గంటల్లో ఎన్ని లీటర్లు నింపగలదో ఎలా కనుగొంటావు?

కింది పట్టికను గమనించండి.

	× 2	× 4	× 8
ట్యూంక్సు నింపే సమయం(గంటల్లో)	1	2	4
నింపే నీటి సామర్థ్యం (లీటర్లలో)	300	600	1200
	× 2	× 4	× 8
	8	1200	2400

ప్రతి సందర్భంలోను కాల వ్యవధి పెరిగే కొద్ది, నింపే సామర్థ్యం పెరుగుతోంది. అనగా పట్టే కాలవ్యవధికి, నింపే సామర్థ్యానికి గల నిప్పుత్తులు సమానము. ఈ విధంగా పట్టేకాలము రెట్టింపైన నింపే సామర్థ్యం కూడా రెట్టింపవుతుంది. పట్టే కాలము 4 రెట్లయిన నింపే సామర్థ్యం కూడా 4 రెట్లవుతోంది. అలాగే పట్టేకాలము 8 రెట్లయిన, నింపేసామర్థ్యం కూడా 8 రెట్లయింది. పట్టేకాలమునకు గల నిప్పుత్తి 1 : 2 మరియు నింపే సామర్థ్యంనకు గల నిప్పుత్తి కూడా 1 : 2. ఈ విధంగా ట్యూంక్సునింపదానికి పట్టే కాలం మరియు నింపే నీటి సామర్థ్యంలు అనులోపునుపాతంలోనున్నవని చెప్పవచ్చు.

ఉండాహరణ 4 : ఒక దుకాణదారు 6 గుడ్డను ₹ 30 లకు అమ్మిన 10 గుడ్డ ధర ఎంత?

సాధన : 10 గుడ్డ ధర ₹ x అనుకొనుము.

గుడ్డనంబ్యాపెరిగితే వాటికి చెల్లించవలసిన ధర కూడా పెరుగుతుందని మనకు తెలుసు. అనగా గుడ్డ సంబ్యాకు గల నిప్పుత్తి, వాటి ధరకు గల నిప్పుత్తి సమానంగా ఉంటుంది. మరోవిధంగా, గుడ్డ సంబ్యాల నిప్పుత్తి మరియు వాటి ధరల నిప్పుత్తులు అనుపాతంలో ఉంటాయి. ఈ విధంగా

$$6 : 10 = 30 : x$$

అంత్యముల లబ్బం, మధ్యమముల లబ్బం సమానం కనుక,

$$6 \times x = 10 \times 30$$

$$6x = 30 \times 10$$

$$x = \frac{10 \times 30}{6} = 50$$

$$x = ₹ 50$$

$$\text{పది గుడ్డ ధర} = ₹ 50$$

ఈ సమస్యనే వికవస్తు మార్గం ద్వారా కూడా సాధించవచ్చు. అంటే ఒక గుడ్డ ధరను కనుగొని దాని వెలతో కావలసిన గుడ్డ సంబ్యాను గుణించడం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

$$6 \text{ గుడ్డ ధర} = ₹ 30$$

$$1 \text{ గుడ్డ ధర} = ₹ \frac{30}{6} = ₹ 5$$

$$10 \text{ గుడ్డ ధర} = 5 \times 10 = ₹ 50$$

ఉదాహరణ 5 : నలుగురు సభ్యులు గల కుటుంబానికి 20 కి.గ్రా.ల బియ్యం ఆవసరం. సభ్యుల సంఖ్య 10 కి పెరిగిన ఎన్ని కి.గ్రా.ల బియ్యం ఆవసరమాతుంది?

మొదటి పద్ధతి : గిరిజ ఇలా అంటోంది.

సభ్యుల సంఖ్య పెరిగితే, కావలసిన బియ్యం పరిమాణం కూడా పెరుగుతుంది. అలాగే సభ్యుల నిష్పత్తి, కావలసిన బియ్యం పరిమాణాల నిష్పత్తులు సమానం. ఇలా సభ్యుల సంఖ్య, బియ్యం పరిమాణానికి అనులోపానుపాతంలో ఉంటుంది.

10 మంది సభ్యులకు x కి.గ్రా.ల బియ్యం ఆవసరమనుకొనిన

$$x : 20 = 10 : 4$$

అంత్యముల లభిం మధ్యమముల లభిం సమానం కనుక,

$$4x = 20 \times 10$$

$$x = \frac{20 \times 10}{4} = 50$$

$$x = 50 \text{ కి.గ్రా.}$$

రెండవ పద్ధతి : సరళ వికవస్తుమార్గం ద్వారా సమస్యను ఇలా సాధించింది.

నలుగురు సభ్యులకు ఆవసరమైన బియ్యం పరిమాణం = 20 కి.గ్రా.

$$\text{ఒకరికి ఆవసరమయ్యే బియ్యం పరిమాణం} = \frac{20}{4} = 5 \text{ కి.గ్రా.}$$

$\therefore 10$ మంది సభ్యులకు ఆవసరమయ్యే బియ్యం పరిమాణం = $10 \times 5 = 50$ కి.గ్రా.

ఉదాహరణ 6 : ఒక జీవు 3 గంటల్లో 90 కి.మీ. ప్రయాణిస్తుంది. అదేవేగంతో ఎన్ని గంటల్లో ఆజీవు 150 కి.మీ. దూరాన్ని పూర్తి చేయగలదు?

సాధన : ప్రయాణించే దూరం పెరిగితే దానికి పట్టే కాలం పెరుగుతుందని మనకు తెలుసు. అలాగే వాటి నిష్పత్తులు కూడా సమానం. ఈ విధంగా ప్రయాణించే దూరం దానికి పట్టే కాలానికి అనులోపానుపాతంలో ఉంటుంది.

150 కి.మీ. దూరం పూర్తి చేయడానికి పట్టే కాలం x గం॥లు అనుకొనిన

$$\text{కావన}, x : 3 = 150 : 90$$

అంత్యముల లభిం, మధ్యమముల లభిం సమానం కనుక

$$90x = 150 \times 3$$

$$x = \frac{150 \times 3}{90} = 5$$

$$x = 5 \text{ గంటలు.}$$

అనగా 150 కి.మీ. దూరం పూర్తి చేయడానికి పట్టేకాలం = 5 గం॥లు.

ఉదాహరణ 7 : ఒకపటం యొక్క స్నేహి 1 : 30,000 అని ఇవ్వబడినది. పటంలో రెండు పట్టణాలమధ్య 4 సెం.మీ. ఉన్నది. ఆ రెండు పట్టణాల మధ్య గల నిజదూర మొత?

వాస్తవ దూరం x కి.మీ. అనుకొనుము. పటంలో దూరం, వాస్తవ దూరానికి అనులోపానుపాతంలో ఉంటుంది. కావున $1:30,000 = 4 : x$

అంత్యముల లబ్ధము, మధ్యముల లబ్ధమునకు సమానము కావున

$$x = 4 \times 30,000$$

$$= 1,20,000 \text{ సెం.మీ.}$$

$$= 1.2 \text{ కి.మీ.} \quad (\because 1 \text{ కి.మీ.} = 1,00,000 \text{ సెం.మీ.})$$

ఈ విధంగా పటంలో 4 సెం.మీ. దూరంగల రెండు పట్టణాల మధ్య గల నిజదూరం 1.2 కి.మీ.



ప్రయత్నించండి.

- బౌట్టు బౌట్టుగా కారుతున్న ఒక కుళాయి క్రింద ఒక లీటరు భారీ సీసాను ఉంచండి.
అందులో ప్రతి నీటిచుక్కను భద్ర పరిస్థితి, సీసా నిండటానికి ఎంత సమయం పడుతుందో చూడండి.
ఈ విధంగా ఒక సంవత్సరానికి ఎంత నీరు వృధ్యా ఆవుతుందో కనుగొనండి.
- ఒక గడియారాన్ని తీసుకొని దాని నిమిషాల ముల్లును 12 వద్ద ఉంచండి.
ఇచ్చిన కాల వ్యవధులలో నిమిషాల ముల్లు చేసే కోణము, కాలములను పట్టికలో చూపండి.

కాలము	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
నిమిషాలలో	15	30	45	60
తిరిగిన కోణము	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
(డిగ్రీలలో)	90



నిమిషాల ముల్లు తిరిగిన కోణము కాలమునకు అనులోపానుపాతంలో ఉన్నదా? అవును.

పై పట్టిక నుంచి ఇవి గమనించవచ్చు.

$$T_1 : T_2 = A_1 : A_2, \text{ కావున}$$

$$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1 : 2$$

$$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1 : 2$$

$$T_2 : T_3 = A_2 : A_3 \text{ మరియు } T_3 : T_4 = A_3 : A_4 \text{ ఆవుతుందేమో సరిచూడండి.}$$

ఆదే కృత్యాన్ని వివిధ కాల వ్యవధులకు ప్రయత్నించండి.



అభ్యాసం - 3

- ఒక బ్యాక్టీరియా పొడవును 50,000 రెట్లు పెద్దది చేయగా, 5 సెం.మీ. పొడవుంది అయిన బ్యాక్టీరియా అను పొడవెంత? ఒకవేళ 20,000 రెట్లు పెంచబడితే, బ్యాక్టీరియా పొడవు ఎంత ఉంటుంది?
 - క్రింది పట్టికలను పరిశీలించి x, y లు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయేమో పరిశీలించండి.
- (i)
- | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|---|
| x | 20 | 17 | 14 | 11 | 8 | 5 | 2 |
| y | 40 | 34 | 28 | 22 | 16 | 10 | 4 |
- (ii)
- | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|----|----|----|
| x | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 |
| y | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |
- (iii)
- | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|-----|-----|
| x | 5 | 8 | 12 | 15 | 18 | 20 | 25 |
| y | 15 | 24 | 36 | 60 | 72 | 100 | 125 |
3. సుష్మ వద్ద ఒక రోడ్స్ మ్యాప్ ఉన్నది. దాని స్క్రైలు 1సెం.మీ.కు 18 కి.మీ. గా ఇవ్వబడినది. ఆమె రోడ్స్‌పై 72 కి.మీ. వాహనం నడిపిన మ్యాప్‌పై ఎంత దూరం పూర్తి చేసినట్లో తెలపండి.
4. ఒక గళ్ళ కాగితముపై వివిధ కొలతలతో ఐదు చతురస్రాలను గీయండి. సమాచారాన్ని క్రింది పట్టికలో నింపండి.



	చతురస్రం 1	చతురస్రం 2	చతురస్రం 3	చతురస్రం 4	చతురస్రం 5
భుజం కొలత (L)					
చుట్టుకొలత (P)					
వైశాల్యం (A)					

భుజం కొలత క్రింది వాటికి అనులోమానుపాతంలో ఉండేమో కనుగొనండి.

ఎ) చతురస్ర చుట్టుకొలతకు

బి) చతురస్ర వైశాల్యంనకు

నిష్పత్తులు శాతముల రూపంలో కూడా ఉండవచ్చు. ఇష్పుడు మనం శాతముల గురించి, వాటిని నిత్యజీవితంలో ఎలా ఉపయోగిస్తామనే విషయాలను గురించి నేర్చుకుండాం.

6.6 శాతములు

- గణితంలో సామ్య 65% మార్కులను, రంజిట 59% మార్కులను తెచ్చుకున్నారు.
- ఒక వస్తు వ్యాపారి టోకు వ్యాపారంలో సిల్క్ చీరలపై 25% లాభమును, చిల్లర వ్యాపారం దుకాణంలో 10% లాభమును పొందును.

- బ్యాంకునుంచి అనిత ₹ 10,000 లను ఒక సంవత్సరానికి అప్పగా తీసుకుంది. దానిపై ఆమె 10% వడ్డీని సంవత్సరాంతమున చెల్లించాలి.
- పండుగల సందర్భంగా ఒక టీ.వి. దుకాణదారు 10% రాయితీని, మరొకరు 15% రాయితీని ఇస్తున్నారు. శాతము అనగా ‘ప్రతి వందకు’ లేక వందకు అని అర్థం. శాతంను ‘%’ గుర్తుతో సూచిస్తాము. ఈ విధంగా 1% అనగా 100కు 1 అని, 27% అనగా 100కు 27 అని మరియు 93% అనగా 100 కు 93 అని అర్థం.

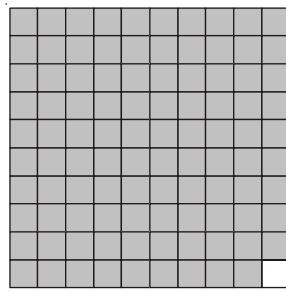
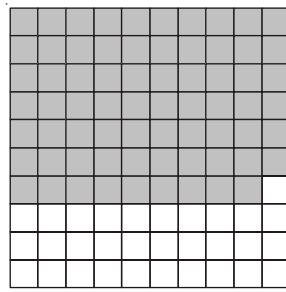
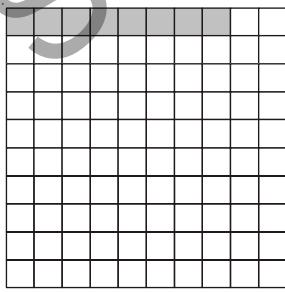
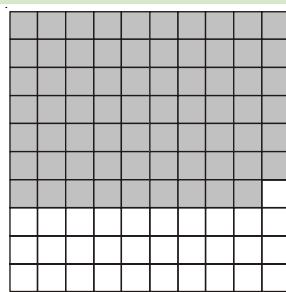
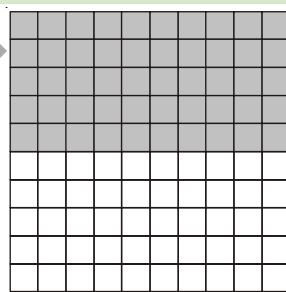
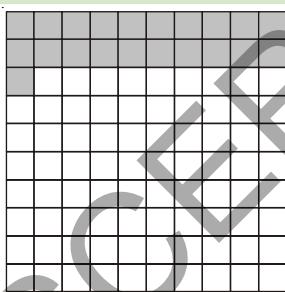
1% ను $\frac{1}{100}$ లేక 0.01 అని కూడా రాయవచ్చు.

27% ను $\frac{27}{100}$ లేక 0.27 అని కూడా రాయవచ్చు.

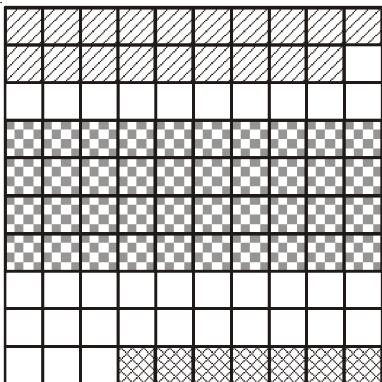
93% ను $\frac{93}{100}$ లేక 0.93 అని కూడా రాయవచ్చు.

ఇవి చేయండి.

- కింద ఇప్పుబడిన 100 చదరాలు గల గళ్ళ కాగితంపై ప్రతి చిత్రంలోను కొన్ని గళ్ళను రంగుతో నింపారు.
ప్రతి చిత్రం లోను గల రంగు గళ్ళ భాగాన్ని, తెల్లని గళ్ళ భాగాన్ని (1) శాతం గాను (2) భీన్వంగాను (3) దశాంశ భీన్వంగాను తెల్పండి.



2. కింది గ్రిడ్ పేపర్‌ను చూచి ప్రశ్నలకు జవాబిష్టండి.



- భాగం ఎంత శాతమును సూచిస్తుంది?
- భాగం ఎంత శాతమును సూచిస్తుంది?
- భాగం ఎంత శాతాన్ని సూచిస్తుంది?
- భాగం ఎంత శాతాన్ని సూచిస్తుంది?

3. కింద ఇష్టాబిడిన సమాచారంతో వివిధ తరగతుల పిల్లల సంఖ్యను మొత్తం పిల్లల సంఖ్యలో భిన్నంగా, శాతంగా రాయము.

తరగతి	పిల్లల సంఖ్య	భిన్నరూపంలో	శాతరూపంలో
VI	17		
VII	15		
VIII	20		
IX	30		
X	18		
మొత్తం	100		

పై అన్న ఉదాహరణలలో మొత్తం సంఖ్య 100. మొత్తం సంఖ్య 100 కానప్పుడు శాతాలను ఎలా కనుగొంటాం?

ఉదాహరణ 8 : ఒక తరగతిలో 35 మంది బాలికలు మరియు 15 మంది బాలురు కలరు. బాలికల శాతం, బాలుర శాతం కనుగొనుము.

సాధన : సుధీర్ కింది విధంగా సాధించాడు.

పద్ధతి - 1

విద్యార్థులు	సంఖ్య	భిన్నం	హోరాలను 100 కు మార్చగా	శాతంలో
బాలికలు	35	$\frac{35}{50}$	$\frac{35}{50} \times \frac{100}{100} = \frac{70}{100}$	70%
బాలురు	15	$\frac{15}{50}$	$\frac{15}{50} \times \frac{100}{100} = \frac{30}{100}$	30%
మొత్తం	50			

పద్ధతి - 2

పద్ధతి - 3

అన్వర్ బాలికల శాతం, బాలుర శాతం ఇలా కనుగొన్నాడు.

రీనా ఇలా సాధించింది

$$\text{మొత్తం విద్యార్థులు} = 35 + 15 = 50$$

50 మంది విద్యార్థుల్లో 35 మంది బాలికలు

$$\text{ఈ విధంగా, } 100 \text{ మంది విద్యార్థులకు గాను \frac{35}{50} \times 100 = 70 \text{ మంది బాలికలు.}$$

$$\frac{35}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{70}{100} = 70\%$$

మొత్తము 100 కానపుడు, శాతములను కనుగొనడానికి పైన మూడు పద్ధతులను తెలుసుకున్నాం.

ఒకటవ పద్ధతిలో భిన్నాన్ని $\frac{100}{100}$ చే గుణిస్తాము. దీని వల్ల భిన్నం యొక్క విలువ మారదు.

ఈ క్రమంలో 100 హరంగా ఉంటుంది. రీనా, హరంలో 100 రావడానికి $\frac{2}{2}$ చే గుణించింది. అన్వర్

ఏకాంక పద్ధతిని ఏకవస్తు మార్గాన్ని ఉపయోగించాడు. వీటిలో నీవు ఏ పద్ధతినైనా ఎన్నుకోవచ్చు. లేదా సాంత పద్ధతిన కనుకోవచ్చు.

మరి అన్వర్ వాడిన పద్ధతి ఆన్ని నిష్పత్తులకు పనిచేస్తుందా? రీనా ఉపయోగించిన పద్ధతి అన్ని నిష్పత్తులకు వుపయోగపడుతుందా?

రీనా వాడిన పద్ధతి ప్రకారం హరమును ఒక సహజ సంఖ్యచే గుణించగా 100 వస్తుందని అన్వర్ అన్నాడు. ఇక్కడ హరము 50 కనుక దీన్ని 2 చే గుణించగా 100 వచ్చింది. ఒకవేళ హరము 60 అయిన ఈ పద్ధతి ఉపయోగ పడదని అంగీకరిస్తావా?

ఉదాహరణ 9 : "A" అనే చొక్కలో $\frac{3}{5}$ వ వంతు నూలు, "B" అనే మరొక చొక్కలో $\frac{3}{4}$ వ వంతు నూలు వాడిన

ఎ) ప్రతి చొక్కలోని నూలు శాతమొంత?

బి) ఏ చొక్కలో నూలు శాతం ఎక్కువగా ఉన్నది?

సాధన :

$$"A" \text{ చొక్కలోని నూలు శాతం} = \frac{3}{5} \times 100 = 60\%$$



$$"B" \text{ చొక్కలోని నూలు శాతం} = \frac{3}{4} \times 100 = 75\%$$

B చొక్కలోని నూలు శాతం ఎక్కువ.

ఉదాహరణ 10 : గంగ ఒక ర్షీ వద్దకు 1 మీటరు గుడ్డతో వెళ్లి, ఒక రవికను కుట్టమని అడిగింది. ర్షీ 0.75 మీటర్ల గుడ్డను వాపి మిగిలిన దాన్ని తిరిగి గంగకు ఇచ్చేశాడు.



ఎ) రవికను కుట్టడానికి ఎంత శాతం గుడ్డను ఉపయోగించాడు?

బ) గంగకు తిరిగి ఇచ్చిన గుడ్డ శాతం ఎంత?

$$\text{సాధన : } \text{ద్రీ వాడిన గుడ్డ కొలత} = 0.75 \text{ మీటర్లు}$$

$$\text{ఉపయోగించిన గుడ్డశాతం} = 0.75 \times 100\%$$

$$= \frac{75}{100} \times 100\%$$

$$= 75\%$$

$$\text{ద్రీ తిరిగి ఇచ్చిన గుడ్డ కొలత} = 1 - 0.75 = 0.25 \text{ మీటర్లు}$$

$$\text{ఉపయోగించని గుడ్డ శాతం} = 0.25 \times 100\%$$

$$= \frac{25}{100} \times 100\%$$

$$= 25\%$$

ఉదాహరణ 11 : గత సంవత్సరం ఒక వస్తువు ధర ₹ 40. ఈ సంవత్సరం దాని ధర ₹ 50 లకు పెరిగినది. ధరలో పెరుగుదల శాతమెంత?

$$\text{సాధన : } \text{ధరలో పెరుగుదల శాతం} = \frac{\text{ధరలో మార్పు}}{\text{అసలు ధర}} \times 100\%$$

$$= \frac{50 - 40}{40} \times 100\%$$

$$= \frac{10}{40} \times 100\% = \frac{1000}{40}\% = 25\%$$

ఉదాహరణ 12 : శ్యామ్ అతని ఆదాయంలో 25% పొదుపుకు, ఖర్చులకు 60%, వైద్యానికి 10%, విరాళములకు 5% కేటాయించాడు. అతని నెలసరి ఆదాయం ₹ 10,000 అయిన ప్రతి అంశానికి కేటాయించిన మొత్తం ఎంత?

సాధన : ప్రతి 100 రూపాయలకు శ్యామ్ పొదుపుకు ₹ 25, ఖర్చులకు ₹ 60, వైద్యానికి ₹ 10లు, విరాళములకు ₹ 5లు, కేటాయిస్తే ₹ 10,000 లకు అతడు క్రింది విధంగా కేటాయిస్తాడు.

పొదుపునకు కేటాయించిన సామ్య = మొత్తంలో 25%

$$\text{₹ } 10,000 \text{లో } 25\% = \frac{25}{100} \times 10000 = 2500$$

$$\text{ఖర్చులకు} = \frac{60}{100} \times 10000 = \text{₹ } 6000$$

$$\text{వైద్యానికి} = \frac{10}{100} \times 10000 = \text{₹ } 1000$$

$$\text{విరాళములకు} = \frac{5}{100} \times 10000 = \text{₹ } 500$$



అభ్యాసం - 4

- X అనే ఒక పారశాలలో పదవ తరగతి పరీక్షలలో 48 మందికి గాను 36 మంది ఉత్తీర్ణులైనారు. Y అనే మరొక పారశాలలో 30 మందికి గాను 24 మంది ఉత్తీర్ణులయ్యారు. జిల్లా విద్యార్థాధికారి ఉత్తీర్ణత శాతాన్ని బట్టి అవార్డు ఇప్పులనుకున్నారు. ఏ పారశాలకు అవార్డు ఇస్తారు?
- గత సంవత్సరం 1000 వస్తువుల ధర ₹ 5000లు ఈ సంవత్సరం వాటి వస్తువుల ధర ₹ 4000లకు పడిపోయినది. ధరలో తగ్గుదల శాతమెంత?
- $64\% + 20\% + \dots = 100\%$
- తీజ్యోతి బుట్ట నిండా అరటిపండ్లు, కమలాలు, మామిడి పండ్లు ఉన్నాయి. అందులో 50% అరటిపండ్లు, 15% కమలాలు ఉన్న మామిడి పండ్ల శాతమెంత?
- ఒక పారశాలలో వర్షం పడిన రోజున 150 మంది విద్యార్థులకు గాను, 25 మంది పారశాలకు రాలేదు. అయిన రాని విద్యార్థుల శాతమెంత? అలాగే వచ్చిన విద్యార్థుల శాతమెంత?
- ఒక నియోజక వర్గంలోని 12000 మంది ఓటర్లలో 60% మంది ఓటువేశారు. అయిన ఓటు వేసిన వారి సంఖ్య ఎంత?
- ఓ స్థానిక క్రికెట్ టీమ్ 20 మ్యాచ్‌లను ఆడగా అందులో 25% మ్యాచ్‌లలో విజయం సాధించింది. అయిన ఆ టీమ్ కోల్పోయిన మ్యాచ్‌ల సంఖ్య ఎంత?
- ఒక కంసాలి ప్రతి గ్రాము బంగారానికి 0.25 గ్రాముల వెండిని, 0.05 గ్రాముల రాగిని కలుపుతాడు. ప్రతి గ్రాము బంగారంలో గల బంగారు, వెండి, రాగిల శాతాలను కనుగొనండి.
- ఒక సంఖ్యలో 40 శాతము 800 కి సమానమైన, ఆసంఖ్య ఎంత?



ప్రయత్నించండి

1. 2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం మన దేశజనాభా సుమారుగా 12×10^8 (120,00,00,000) ప్రతి సంవత్సరం మన జనాభా 3% వంతున పెరిగితే 2012 లో మన జనాభా ఎంత ఉంటుంది?
2. ఒక దోషలో 75% ను తినగలవా?
బి) ఒక వస్తువు వెల 90% పెరగగలదా?
సి) ఒక వస్తువు వెల 100% పెరగ గలదా?



ప్రాజెక్ట్ పని

ఒక రోజులో వివిధ పనులకు నీవు కేటాయించే సమయాన్ని కింది పట్టికలో నింపి, రోజులో అది ఎంత శాతమో కనుగొనండి.

పనులు	కేటాయించిన సమయం	ఒక రోజులో శాతంగా (గంటల్లో)
పండ్లు తోముట, స్నానం, పారశాలకు సిధ్ధమవుటకు		
పారశాలలో గడువుటకు		
ఇంటిపనికి, చదువుకొనుటకు		
ఆదుకొనుటకు, బీ.వి. చూచుటకు, తల్లిదండ్రులకు సహాయపడుటకు		
నిద్రించుటకు		

6.7 శాశాలలో వాడే కొన్ని సందర్భాలు

శాశాలను మనం లాభసప్తాలని వ్యక్తపరచటానికి రుసుము, వడ్డీలను తెలపడానికి ఉపయోగిస్తాము. శాశము ద్వారా వ్యక్తపరచడం పలన సులభంగా మనం పోల్చువచ్చు.

6.7.1 లాభము - నష్టము

- ఒక కుమ్మరి మట్టి కుండలను తయారుచేసి కాల్చి, రంగులు వేయును. అతను ముడి పదార్థములకై రూ 3 లను, కాల్చుటకు రూ 2 లను మరియు రంగులకై రూ 1 ఫిర్ముచేయును. అతను ప్రతి కుండను రూ 10 లకి అమ్మిన లాభమా? నష్టమా?
- ఒక ఆట-వస్తువుల తయారీదారు రూ 50 లకు ఒక బొమ్మను చేసి రూ 75 చొప్పున అమ్మినచో లాభమా? లేక నష్టమా?
- ఒక వ్యాపారి చొక్కలను ఒక్కాక్కడి రూ 500 చొప్పున కొనెను. సంవత్సరాంతమున రూ 540 చొప్పున అమ్మితే అతనికి లాభమా? లేక నష్టమా?



- అమర్ 10 గ్రాముల బంగారమును ₹ 15,000 కు గత సంవత్సరములో కొనెను. బంగారము రేటు ఈ సంవత్సరము ₹ 20,000కు పెరిగెను. ప్రస్తుత ధరకు బంగారం అమ్మిన అమర్కు లాభమా? నష్టమా?

పై అన్ని సందర్భాలకు వచ్చు లాభము లేదా నష్టమును కనుగొనగలరు. కానీ లాభనష్టాలను కొనడం, అమృదం మొదలగు లావాదేవీలలో శాతాలను ఉపయోగించి చెప్పటం అర్థవంతంగా ఉంటుంది.

ఉండాహారణ 13 : రామయ్య కొన్ని కలాలను ₹ 200 లకు కొని వాటిని ₹ 240 లకు అమ్మేను. సోమయ్య కొన్ని కలాలను ₹ 500 లకు కొని వాటిని ₹ 575 లకు అమ్మేను. ఎవరు ఎక్కువ లాభాన్ని ఆర్జించివట్లుగా చెప్పవచ్చు?

సాఫన : లాభమును కనుగొనుటకు అమ్మినవెల, కొన్నవెలలను పోల్చువలెను.

$$\text{లాభము} = \text{అమ్మినవెల} - \text{కొన్నవెల}$$

$$\text{రామయ్యకు వచ్చిన లాభము} = ₹ 240 - ₹ 200 = ₹ 40$$

$$\text{సోమయ్యకు వచ్చిన లాభము} = ₹ 575 - ₹ 500 = ₹ 75$$

పై ఫలితాలను బట్టి సోమయ్యకు ఎక్కువ లాభం వచ్చినదని అనటం సరిద్దైనదా?

$$\text{రామయ్య పెట్టుబడి} ₹ 200 \text{ లకు గాను వచ్చిన లాభం} ₹ 40$$

$$\text{సోమయ్య పెట్టుబడి} ₹ 500 \text{ లకు గాను వచ్చిన లాభం} ₹ 75$$

అందువలన నిష్పత్తుల రూపంలో లాభం మరియు పెట్టుబడులను తెల్పిన

$$\text{రామయ్య లాభం, కొన్నవెలల నిష్పత్తి} = \frac{40}{200} \text{ మరియు}$$

$$\text{సోమయ్య లాభం, కొన్నవెలల నిష్పత్తి} = \frac{75}{500}$$

నిష్పత్తులను పోల్చుటకు వాటిని శాతాలలోనికి మారుస్తాము.

$$\text{లాభశాతం} = \frac{\text{లాభం}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$$

$$\text{కావున రామయ్య లాభశాతం} = \frac{40}{200} \times 100 = 20\%$$

$$\text{సోమయ్య లాభశాతం} = \frac{75}{500} \times 100 \% = 15\%$$

రామయ్య లాభశాతం 20% అంటే ₹ 100 కు లాభము ₹ 20

సోమయ్య లాభశాతం 15% అంటే ₹ 100 కు లాభము ₹ 15

కాబట్టి రామయ్యకు ఎక్కువ లాభం వచ్చినట్లు చెప్పవచ్చు.

ఉండాహారణ 14 : ఒక వ్యాపారి ఒక టి.వి. ను ₹ 9000లకు కొని ₹ 10000 లకు అమ్మిన అతనికి వచ్చునది లాభమా? నష్టమా? ఎంత శాతం?

సాధన : గోపాల్ ఈ విధంగా సాధించాడు.

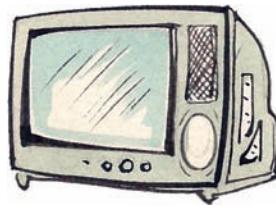
టి.వి. కొన్నపెల (కొ.వె.) = ₹ 9000

టి.వి. అమ్మిన వెల (అ.వె.) = ₹ 10,000

అ.వె. > కొన్న వెల. కావున లాభం వస్తుంది.

$$\text{లాభం} = 10,000 - 9,000 = ₹ 1000$$

అందువలన కొ.వె. ₹ 9,000 అయినపుడు వచ్చిన లాభం ₹ 1000.



$$\text{లాభం మరియ కొ.వె.ల నిష్పత్తి} = \frac{1000}{9000}$$

లాభశాతంను కనుగొనుటకు ఈ నిష్పత్తిని 100% చే గుణించాలి.

$$\text{అంటే } \frac{1000}{9000} \times 100\% = \frac{100}{9}\% = 11\frac{1}{9}\%$$

మధు ఈ సమస్యను అనుపాత ధర్మంతో ఇలా సాధించాడు.

కొ.వె. ₹ 9000 అయినపుడు లాభం ₹ 1000

జప్పుడు కొ.వె. ₹ 100 అయిన లాభం x అనుకొనిన, లాభం మరియు కొ.వె.లు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయని మనకు తెలుసు. కావున లాభాల నిష్పత్తి, కొ.వె. ల నిష్పత్తికి సమానం.

$$\text{కావున, } x : 1000 = 100 : 9000$$

$$\frac{x}{1000} = \frac{100}{9000}$$

$$9000 \times x = 1000 \times 100$$

$$x = \frac{1000 \times 100}{9000} = 11\frac{1}{9}\%$$

$$\text{కావున లాభశాతం} = 11\frac{1}{9}\%$$



ప్రయత్నించండి.

5 మామిడి పండ్ల కొన్నపెల 2 మామిడి పండ్ల అమ్మినపెలకు సమానమైన లాభ శాతమొంత?

ఉదాహరణ 15 : ఒకడు ఒక వస్తువును ₹ 650 లకు కొని అమృదం ద్వారా 6% లాభాన్ని పొందెను. అ.వె. కనుగొనండి.

సాధన : రవి సాధన ఇలా ఉంది.

$$\text{కొ.వె.} = ₹ 650$$

$$\text{లా.శా.} = 6\%$$

$$\text{అంటే కొ.వె. } ₹ 100 \text{ అయిన లాభం } ₹ 6 \text{ అప్పుడు అ.వె. } = 100 + 6 = ₹ 106$$

$$\text{కొని కొ.వె. } 650 \text{ మరియు అ.వె. } ₹ x \text{ అనుకొనిన}$$

$$(\text{కొ.వె. మరియు అ.వె.లు అనులోపానుపాతంలో ఉంటాయి)$$

$$\text{కొ.వె. ల నిష్పత్తి} = \text{అ.వె.ల నిష్పత్తి}$$

$$100 : 650 = ₹ 106 : x$$

$$\frac{100}{650} = \frac{106}{x}$$

$$\text{కావున, } 100x = 106 \times 650$$

$$\text{కావున, } x = \frac{106 \times 650}{100} = 689$$

$$\text{అంటే అ.వె.} = 689$$

అరుణ్ పై తెక్కను ఇలా సాధించాడు.

$$\text{కొ.వె.} = ₹ 650$$

$$\text{లాభశాతం} = 6\%$$

$$\text{కావున లాభం} = ₹ 650 \text{లో } 6\%.$$

$$= \frac{6}{100} \times 650 = 39$$

$$\text{అ.వె.} = \text{కొ.వె.} + \text{లాభం}, \quad \text{కావున}$$

$$\text{అ.వె.} = 650 + 39 = ₹ 689.$$

ఉదాహరణ 16 : రమేష్ ఒక D.V.D ఫ్లైయర్ ను ₹ 2800 కు అమృదం ద్వారా 12% లాభాన్ని పొందెను. అయిన కొ.వె. ఎంత?

సాధన : నాయక్ అనుపాత ధర్మం ద్వారా ఇలా సాధించాడు.

$$\text{లా.శా.} = 12\%$$

$$\text{అ.వె.} = ₹ 2800$$

$$\text{కనుక కొ.వె. ₹ 100 అనుకొంటే అ.వె. ₹} (100+12) = ₹ 112 \text{ అవుతుంది.}$$

$$\text{కానీ అ.వె. ₹ 2800 మరియు కొ.వె. } x \text{ అనుకుంటే}$$

కొ.వె., అ.వె.లు అనులోపాను పొతంలో ఉంటాయి.

$$x : 100 = 2800 : 112$$

$$\frac{x}{100} = \frac{2800}{112}$$

$$\text{కావున, } 112 \times x = 100 \times 2800$$

$$\text{కావున, } x = \frac{100 \times 2800}{112} = 2500$$

$$\text{కావున, కొ.వె.} = ₹ 2500$$

మీనా ఏకవస్తు మార్గం ద్వారా ఇలా సాధించింది.

$$\text{అ.వె.} = ₹ 2800$$

$$\text{లా.శా.} = 12\%$$

$$\text{అంటే కొ.వె. ₹ 100 అయిన లాభం ₹ 12}$$

$$\text{కావున, అ.వె.} = 100 + 12 = ₹ 112$$

అ.వె. ₹ 112 అయిన కొ.వె. ₹ 100 అవుతుంది.

$$\text{అందుచే, అ.వె. ₹ 1 అయిన కొ.వె.} = \frac{100}{112}$$

$$\text{కాబట్టి అ.వె. ₹ 2800 అయిన కొ.వె.} = \frac{100}{112} \times 2800 = ₹ 2500$$

$$\text{కొ.వె.} = ₹ 2500$$

ఉదాహరణ 17 : ఒక వ్యక్తి రెండు సైకిల్సును ఒకొక్కటి రూ 3000 లకు అమ్మేను. ఒక దానిపై 20% లాభం, రెండవ దానిపై 20% నష్టం వచ్చేను. మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంతశాతం?

సాధన : అ.వె. = రూ 3000

$$\text{మొదటి సైకిల్ పై లా.శా.} = 20\%$$

$$\text{రెండవ సైకిల్ పై నష్టశాతం} = 20\%$$



(ఎ) ఏక వస్తుమార్గం ద్వారా సాధన :

మొదటి సైకిల్ :

$$\text{కొ.వె. రూ 100 మరియు లాభం రూ 20 అనుకొనిన అ.వె.} = \text{రూ } 100 + 20 = \text{రూ } 120$$

$$\text{అంటే } 20\% \text{ లాభానికి అ.వె. రూ 120 \text{ అయిన కొ.వె.} = \text{రూ } 100$$

$$\text{అంటే అ.వె. రూ 1 \text{ అయిన కొ.వె.} = \text{రూ } \frac{100}{120}$$

$$\text{కనుక అ.వె. రూ 3000 \text{ అయినపుడు కొ.వె.} = \frac{100}{120} \times 3000 = \text{రూ } 2500$$

రెండవ సైకిల్ :

$$\text{కొ.వె. రూ 100 మరియు నష్టం రూ 20 అనుకొనిన అ.వె.} = \text{రూ } 100 - 20 = \text{రూ } 80$$

$$\text{కనుక } 20\% \text{ నష్టానికి అ.వె. రూ 80 \text{ అయిన కొ.వె.} = \text{రూ } 100$$

$$\text{ఈ విధంగా అ.వె. రూ 3000 \text{ అయినపుడు కొ.వె.} = \frac{100}{80} \times 3000 = \text{రూ } 3750$$

$$\text{జప్పుడు కొ.వె.ల మొత్తం} = \text{రూ } 2500 + \text{రూ } 3750 = \text{రూ } 6250$$

$$\text{అ.వె.ల మొత్తం} = 3000 + 3000 = \text{రూ } 6,000$$

$$\text{కానీ అ.వె. కావున నష్టం} = 6250 - 6000 = \text{రూ } 250$$

$$\text{నష్టశాతం} = \frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100 = \frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$$

బ) అనుపాత ధర్మం ద్వారా సాధన :

మొదటి సైకిల్ :

కొ.వె. మరియు అ.వె.లు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయి. కావున

కొ.వె. అ.వె.

100 120

x 3000

కొ.వె.ల నిప్పుత్తి = అ.వె.ల నిప్పుత్తి

$$100 : x = 120 : 3000$$

$$\frac{100}{x} = \frac{120}{3000}$$

$$100 \times 3000 = 120 x$$

$$\frac{100 \times 3000}{120} = x$$

$$₹ 2500 = x$$

రెండవ సైకిల్

కొ.వె.	అ.వె.
100	80
x	3000
$100 : x = 80 : 3000$	

$$\frac{100}{x} = \frac{80}{3000}$$

$$x = \frac{100 \times 3000}{80} = ₹ 3750$$

$$\text{రెండు సైకిళ్ళ కొ.వె.ల మొత్తం} = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250$$

$$\text{రెండు సైకిళ్ళ అ.వె.ల మొత్తం} = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000$$

అ.వె. విలువ కొ.వె. విలువ కన్నా తక్కువ కావున, నష్టం.

$$\text{నష్టశాతం} = \frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100 = \frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$$

మూడవ పద్ధతి :

$$\text{మొదటి సైకిల్ అ.వె.} = ₹ 3000$$

$$\text{లా.టా.} = 20\%$$

$$\text{కొ.వె.} = x \text{ అనుకొనుం.}$$

$$\text{కావున లాభం} = \frac{20}{100} \times x = \frac{20}{100} x$$



అ.వె. = కొ.వె. + లాభం.

$$\text{కనుక}, \quad x + \frac{20}{100}x = 3000$$

$$\frac{100x + 20x}{100} = 3000$$

$$\frac{120x}{100} = 3000$$

$$x = \frac{3000 \times 100}{120} = 2500$$

కనుక మొదటి సైకిల్ కొ.వె. = ₹ 2500

రెండవ సైకిల్ అ.వె. = ₹ 3000

నష్టశాతం = 20%.

కొ.వె. ₹ x అనుకొనిన

$$\text{నష్టం} = \frac{20}{100} \times x = \frac{20}{100}x$$

అ.వె. = కొ.వె. - నష్టం

$$\text{కావున}, \quad x - \frac{20}{100}x = 3000$$

$$\frac{80}{100}x = 3000$$

$$80x = 3000 \times 100$$

$$x = \frac{3000 \times 100}{80} = ₹ 3750$$

కనుక రెండవ సైకిల్ కొ.వె. = ₹ 3750

రెండు సైకిళ్ళ కొ.వె.ల మొత్తం = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

రెండు సైకిళ్ళ అ.వె.ల మొత్తం = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000

అ.వె. < కొ.వె. కనుక నష్టం

నష్టం = కొ.వె. - అ.వె.

$$= ₹ 6250 - ₹ 6000 = ₹ 250$$

$$\text{నష్ట శాతం} = \frac{\text{నష్టం}}{\text{కొన్న వెల}} \times 100 = \frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$$

ఉదాహరణ 18 : ఒక వస్తువు విలువ ప్రతి సంవత్సరం 20% చొప్పున తగ్గుచున్నది. ఈ లెక్కన ఒక వస్తువు విలువ రెండు సంవత్సరాల తర్వాత ₹ 19200 అయిన అసలు విలువ ఎంత?

సాధన : రెండవ సంవత్సరం చివర వస్తువు విలువ = ₹ 19200

విలువ 20% చొప్పున తగ్గునని ఈయబడినది.

ఆరంభ విలువ ₹ 100 అనుకొనుము. రెండవ సంవత్సర ప్రారంభమున వస్తువు విలువ 20% తగ్గి
 $100 - 20 = ₹ 80$ అవుతుంది.

$$\begin{aligned} 3 \text{ సంవత్సర ప్రారంభమున ఆ వస్తువు విలువ} &= 80 \text{ లో } 20\% \text{ తగ్గిన} \\ &= 80 - 16 \\ &= 64. \end{aligned}$$

ఈ రకంగా 20% చొప్పున తగ్గే వస్తువు విలువ ఆరంభం న 100 అనుకుంటే రెండు సంవత్సరాల చివరకు 64 అవుతుంది.

లెక్క ప్రకారం 2 సంాల తర్వాత వస్తువు విలువ = ₹ 19200
 ఆరంభ విలువ x అనుకొనుము.

ఆరంభ, అంతిమ విలువల నిప్పుత్తులు సమానం.

$$x : 100 = 19200 : 64$$

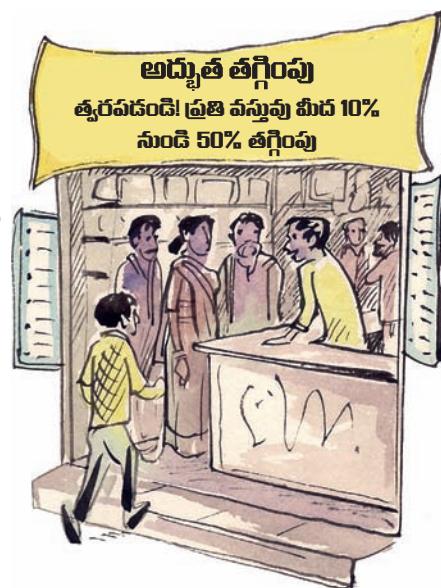
$$\begin{aligned} \frac{x}{100} &= \frac{19200}{64} \\ 64x &= 19200 \times 100 \\ x &= \frac{19200 \times 100}{64} \\ &= ₹ 30000 \end{aligned}$$

కావున వస్తువు ఆరంభ విలువ = ₹ 30,000

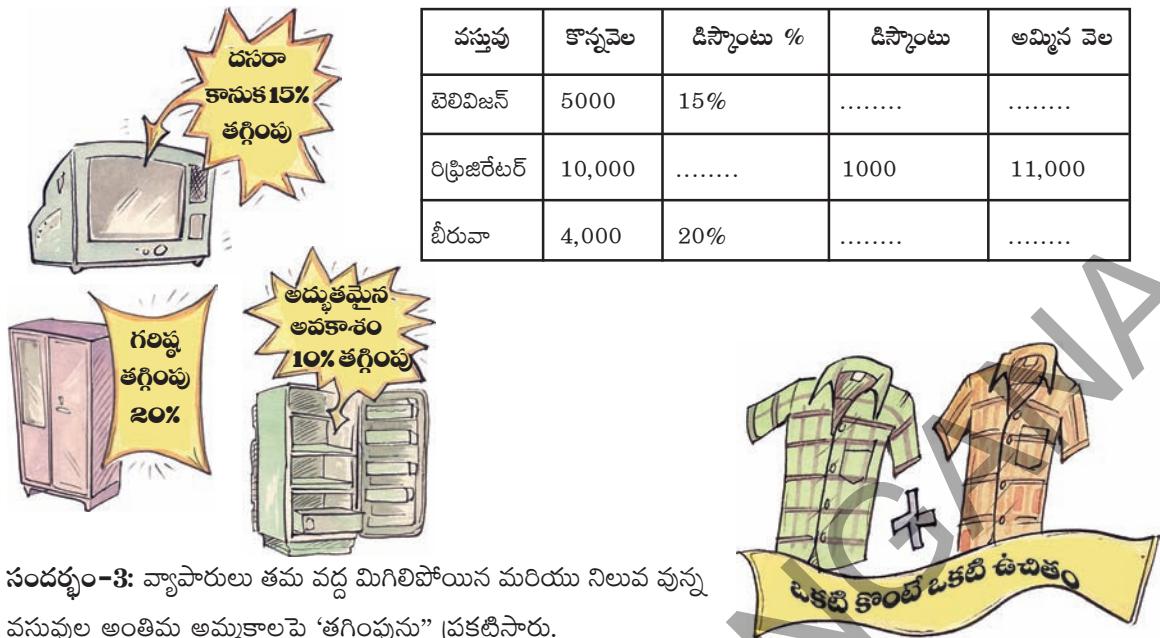
6.7.2 డిస్కౌంటు (తగ్గింపు)

సందర్భం-1: ఇచ్చిన పట్టికలో వెలలు మరియు డిస్కౌంటు ఇచ్చిన, ఖాళీలను పూరించండి.

వస్తువు	కొస్టమెటల	డిస్కౌంటు %	డిస్కౌంటు	అవీసు వెల
చీర	1000	10%	100
పొంటు	2000	20%	400
పర్పు	97.50	552.50
టీ-పర్పు	500	25%	375



సందర్భం-2: డిస్ట్రిక్టు ఆధారంగా ఇచ్చిన పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.



సందర్భం-3: వ్యాపారులు తమ వద్ద మిగిలిపోయిన మరియు నిలువ వున్న వస్తువుల అంతిమ అమ్మకాలపై ‘తగ్గింపును’ ప్రకటిస్తారు.

ఉధాహరణ 19 : ఒక దుకాణదారుడు తన వస్తువుల ప్రకటన ధరను కొ.వె. కన్నా 25% అధికంగా ప్రకటించెను. అతను ప్రతి వస్తువుపై 12% రుసుం నిచ్చిన అతనికి వచ్చు లాభశాతమెంత?

సాధన : కొ.వె. ₹ 100 అనుకొనుము.

$$\text{ఇప్పుడు ప్రకటన వెల } (\text{ప్ర.వె.}) = ₹ 100 + ₹ 25 = ₹ 125$$

$$\text{రుసుము శాతం} = \frac{\text{ప్ర.వె.}}{\text{ప్ర.వె.}} \times 12\% = \frac{125}{100} \times 12\% = 12\%$$

$$\begin{aligned} \text{రుసుము} &= \frac{12}{100} \times 125 \\ &= ₹ 15 \end{aligned}$$

$$\text{అ.వె.} = \text{ప్ర.వె.} - \text{రుసుం}$$

$$= 125 - 15 = ₹ 110$$

$$\text{కౌపున లాభం} = \text{అ.వె.} - \text{కొ.వె.}$$

$$= 110 - 100$$

$$= ₹ 10$$

$$\text{లాభశాతం} = \frac{10}{100} \times 100 = 10\%$$

కావున దుకాణదారుడు 10% లాభాన్ని పొందుతాడు.



అభ్యాసం - 5

- ఒక వ్యాపారి ఒక పెట్టెను ₹ 480 లకు కొని ₹ 540 లకు అమ్మేను. అతని లాభశాతం ఎంత?
- అజయ్ ఒక టి.వి. ను ₹ 15,000 లకు కొని ₹ 14100కు అమ్మితే నష్టశాతం ఎంత?
- రాము ఒక స్థలాన్ని ₹ 2,40,000 అమ్మటం ద్వారా 20% లాభాన్ని పొందెను. అయిన ఆ స్థలం కొన్ని వెల ఎంత?
- ఒక సెల్ఫోన్‌ను ₹ 750 లకు అమ్మటం ద్వారా ఒకవ్యాపారి 10% నష్టం పొందెను. 5% లాభం పొందుటకు ఆ సెల్ఫోన్‌ను అమ్మవలసిన ధర ఎంత?
- ఒక రైతు రెండు ఎడ్డను ఒక్కాక్కబి ₹ 24000 కు అమ్మేను. ఒక దానిపై 25% లాభాన్ని, రెండవదానిపై 20% నష్టాన్ని పొందితే మొత్తం మీద అతనికి లాభమా? నష్టమా? ఎంతశాతం?
- క్రావ్ ఒక గడియారాన్ని ₹ 480లకు కొని రిధికి $6\frac{1}{4}\%$ లాభానికి అమ్మేను. రిధి ఆ గడియారాన్ని 10% లాభంతో దివ్యకు అమ్మేను. దివ్యచెల్లించిన మొత్తం ఎంత?
- ఒక పుస్తకము ప్రకటన వెల ₹ 225 ప్రచురణ కర్త 10% రుసుమును ఇస్తే పుస్తకము అమ్మకపు వెల ఎంత?
- ఒక వడంగి తాను తయారుచేసిన వస్తువులపై 15% తగ్గింపును ఆమలుచేయును. ఒక కుర్రీ అమ్మిన వెల ₹ 680 అయిన దాని ప్రకటన వెల ఎంత?
- ఒక డీలరు తన వస్తువుల ప్రకటన వెలపై 10% తగ్గింపు నిచ్చి కూడా 10% లాభం పొందగలదు. ఒక వస్తువు కొ.వె. ₹ 900 అయిన దాని ప్రకటన వెలవింత?

6.7.3 సొధారణ వడ్డి

రమణయ్య వద్ద వ్యవసాయ పనుల నిమిత్తం ₹ 10,000 ఉన్నాయి. కానీ అతనికి ₹ 15000 మేరకు ఖర్చులకు అవసరమోతాయి. మిగిలిన ₹ 5000 కోసం వ్యవసాయ బుఱం కొరకు బ్యాంకుకు వెళ్ళి మేనేజర్‌ను కలిసాడు. వారి సంభాషణ ఇలా ఉంది.



- రమణయ్య : నమస్కే! సర్! నాకు వ్యవసాయ బుఱం కావాలి.
- బ్యాంకు మేనేజర్ : ఎంత సొమ్ము కావాలి?
- రమణయ్య : ₹ 5000
- బ్యాం.మే. : ఎంత కాలానికి తిరిగి చెల్లించగలవు?
- రమణయ్య : 1 సం॥
- బ్యాం.మే. : అసలుతోబాటు 6% వడ్డిని కూడా చెల్లించాలి.
- రమణయ్య : అలాగేనండి. చెల్లిస్తాను.
- బ్యాం.మే. : ఎంత చెల్లించాలో తెలుసా?

రమణయ్ : ఓ! తెలుసండి. ₹ 100 కు రూ.6 చొప్పున ₹ 1 కి ₹ $\frac{6}{100}$ అంటే అసలు ₹ 5000 తోపాటు

$$\frac{6}{100} \times 5000 = 300 \text{ చెల్లించాలి అంటే మొత్తం ₹ 5300 \text{ చెల్లించాలి.}$$

అప్పుతీసుకున్న లేదా అప్పగా ఇచ్చిన సామ్యును అసలు అంటాం. అసలును కొంత కాలము తర్వాత చెల్లించేటపుడు వాడుకున్న కాలానికి గాను అదనంగా కొంత సామ్యును అసలుతోపాటు చెల్లించాలి. అసలుకు అదనంగా చెల్లించే సామ్యును వడ్డి అంటారు.

చెల్లించవలసిన మొత్తం సామ్య అసలు, వడ్డీల మొత్తానికి సమానం.

మొత్తం = అసలు + వడ్డి.

$$A = P + I$$

సాధారణంగా 1సం|| వడ్డీని అసలుతో కొంత శాతంగా తెలుపుతారు.

ఉదాహరణకు 1సం||నకు 10 శాతం వడ్డీని 10% అని తెలుపుతారు.

అంటే ప్రతి ₹ 100కు ఒక సం||నకు గాను ₹ 10 వడ్డీగా చెల్లించాలి. కింది ఉదాహరణను పరిశీలించాం.

ఉదా 20 : సునీత ₹ 5000 లను 12% వడ్డీకి అప్పగా తీసుకొంది. 1 సం|| తర్వాత ఆమె చెల్లించవలసిన వడ్డీఎంత?

సాధన : అసలు = ₹ 5000

వడ్డీరేటు = 12% సం||నకు

$$\text{₹ } 100\text{కు రూ. } 12 \text{ చొప్పున } \text{₹ } 5000 \text{ కు గాను } \frac{12}{100} \times 5000 = \text{₹ } 600 \text{ చెల్లించాలి.}$$

$$\text{అంటే చెల్లించవలసిన మొత్తం} = \text{₹ } 5000 + \text{₹ } 600 = \text{₹ } 5600$$

సాధారణంగా అసలు (P), వడ్డీరేటు (R), చొప్పున 1సం||నకు అగు వడ్డి (I) అయిన చెల్లించవలసిన మొత్తం (A)

$$A = P + \frac{P \times R}{100}$$

పై ఉదాహరణలో 1సం||లో రామయ్య భాకీని చెల్లించలేనిచో, వడ్డీని 2సం||లకు లెక్కగడతారు. అంటే తరువాతి సం||నకు కూడా రూ.300 చెల్లించాలి. 2 సం||లకు గాను వడ్డి $2 \times 300 = \text{రూ. } 600$ చెల్లించాలి.

రూ.100కు, 1సం||నకు వడ్డి 18 చొప్పున 3సం||లకు అగువడ్డి = $18+18+18 = \text{రూ. } 54$.

'అసలు'ను చెల్లించుటకు పట్టేకాలము పెరిగిన కొలదీ వడ్డి కూడా పెరుగుతుంది. చెల్లించ వలసిన వడ్డి, వాడుకున్న కాలానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

సాధారణంగా అసలు (P), వడ్డీరేటు (R), కాలము (T)

$$\text{అయిన వడ్డి (I)} = P \times R \% \times T \text{ or } P \times \frac{R}{100} \times T = \frac{PRT}{100}$$

జవి చేయండి.

1. అసలు రూ.8250 కై 3 సంవత్సరాల కాలానికి 8% వడ్డిరేటు చోప్పున వడ్డి ఎంత?
2. రూ.3000 లను 9% వడ్డిరేటున ఇచ్చిన 21/2 సం||ల తర్వాత చెల్లించలసిన వడ్డిని కనుగొనము.



ఉదాహరణ 21 : 10% బారువడ్డ / సాధారణ వడ్డి చోప్పున ₹ 6880 ఎంతకాలానికి ₹ 7224 అవుటందో కనుగొనండి.

సాధన : మొత్తం = ₹ 7224

$$\text{అసలు}(P) = ₹ 6880$$

$$\text{సాధారణ వడ్డి} = \text{మొత్తం} - \text{అసలు} = ₹ 7224 - ₹ 6880 = ₹ 344$$

$$R\% = 10\%$$

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T$$

$$344 = 6880 \times \frac{10}{100} \times T$$

$$344 \times 100 = 6880 \times 10 \times T$$

$$\text{కావున, } T = \frac{344 \times 100}{6880 \times 10} = \frac{1}{2} = 6 \text{ నెలలు.}$$

ఉదాహరణ 22 : కొంత సొమ్యు 8% వడ్డిరేటున 2సం||ల 4 నెలలకు ₹ 3927ను వడ్డిగా ఇచ్చును.

అయిన అసలు కనుక్కోండి.

సాధన : $S.I = ₹ 3927,$

$$R\% = 8\%$$

$$T = 2 \text{ సం||, } 4 \text{ నెలలు} = \left(2 + \frac{4}{12} \right) \text{ సం ||లు} = \left(2 + \frac{1}{3} \right) \text{ సం||లు} = \frac{7}{3} \text{ సం||లు}$$

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T \text{ లో ప్రతిక్షేపించగా}$$

$$3927 = P \times \frac{8}{100} \times \frac{7}{3}$$

$$3927 \times 100 \times 3 = P \times 8 \times 7$$

$$\text{కావున, } \frac{3927 \times 100 \times 3}{8 \times 7} = P$$

$$\text{ఆందుచే, } P = ₹ 21037.50$$

$$\text{కావున, అసలు} = ₹ 21037.50$$

ఉదాహరణ 23 : సంవత్సరానికి ఏ రేటు వంతున రూ 6360లు 2 1/2 సంవత్సరాలలో రూ 1378 వడ్డి నిమ్మను.

జవాబు : అసలు (P) = రూ 6360

$$\text{కాలం (T)} = 2 \frac{1}{2} \text{ సంవత్సరాలు}$$

$$\text{సాధారణ వడ్డి (S.I)} = \text{రూ 1378}$$

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T \quad \text{లో ప్రతిక్షేపించగా$$

$$1378 = 6360 \times \frac{R}{100} \times \frac{5}{2}$$

$$1378 \times 100 \times 2 = 6360 \times 5 \times R$$

$$\text{కావున } R = \frac{1378 \times 100 \times 2}{6360 \times 5} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}\%$$

ఉదాహరణ 24 : ఏడాదికి ఏ రేటు వంతున 16 సంవత్సరాలలో అసలు మూడింతలగును?

సాధన : అసలు రూ x అనుకొనుము.

$$16 \text{ సంవత్సరాల తర్వాత మొత్తం} = 3x$$

$$\text{మొత్తం} - \text{అసలు} = \text{వడ్డి}$$

$$\text{కావున, } 3x - x = 2x$$

$$P = x, \quad T = 16, \quad I = 2x$$

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T$$

$$2x = x \times \frac{R}{100} \times 16$$

$$2x \times 100 = x \times 16 \times R$$

$$\text{కావున, } R = \frac{2x \times 100}{x \times 16} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}\%$$



అభ్యాసం - 6

- రూ 12,600 లు 9% వడ్డి వంతున మొత్తం రూ 15624 అగుటకు ఎంత కాలము పట్టును?
- 8 సంాల 4 నెలల సమయంలో ఏరేటు వంతున అసలు రెట్టింపగును?
- ఒక బ్యాంక్ వారు స్వార్ల్ పిల్లలకు ఒక పొదుపు స్నీమ్యును ప్రకటించారు. పిల్లలకు కిడ్డి బ్యాంక్లను ఇచ్చి, వారి పొదుపు సొమ్యును అందులో వుంచుకునేలా చేసి, సంవత్సరానికి ఒకసారి ఆసొమ్యును సేకరిస్తారు. అందులో సొమ్యు రూ 10,000 లు పైన ఉంటే 6% వంతున, అంతకు తక్కువైన 5% వడ్డిరేటు వంతున చెల్లిస్తారు. రూ 9000లు. సేకరణపై ఆస్వార్ల్ ఎంత వడ్డి పొందగలదు.
- కొంత సొమ్యుపై 8% వడ్డి రేటు వంతున 2 సంవత్సరాలకు సాధారణ వడ్డితో రూ 12122 లు అయిన 9% వడ్డి రేటు వంతున 2 సంవత్సరాల 8 నెలలకు ఎంత మొత్తముగును?
- కొంత వడ్డిరేటుపై రూ 6500లు, 4 సంాలకు రూ 8840 లు అగును. అదే వడ్డిరేటు వంతున రూ 1600లు ఎంత కాలములో రూ 1816 లు మొత్తముగును.

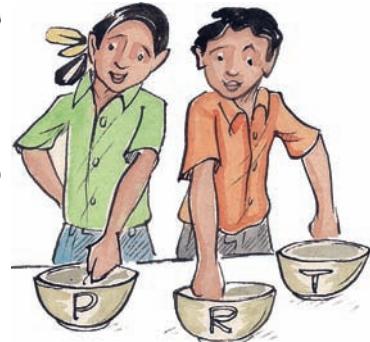
వడ్డి పొందుదాం!

పిల్లలూ! సరళవడ్డి (సొమ్యవడ్డి) పై ఒక ఆటను ఆడుదామా!

ఈ ఆటను 5 మంది ఆడవచ్చు.

- మూడు P, R మరియు T అని గుర్తించిన గిన్సేలను తీసుకొనుము. ప్రతి గిన్సేలోను 5 కాగితము ముక్కలను, ప్రతిముక్కపై ఒక సంఖ్యను ప్రాసి వేయవలెను.
(గమనిక : P గిన్సేలోని సంఖ్యలు 100 గుణిజాలు కాని, 1000 గుణిజాలు కాని రాయండి).
- ప్రతి గిన్సేనుంచి ఒక కాగితము ముక్క వంతున మూడు గిన్సేల నుండి మూడు కాగితము ముక్కలను వరుసగా తీసుకొనుము.
- P గిన్సే నుంచి తీసిన సంఖ్య అసలుగాను, R గిన్సేనుంచి తీసిన సంఖ్య వడ్డి రేటుగాను, T గిన్సే నుంచి తీసిన సంఖ్య కాలముగాను గుర్తించుము.
- ఇప్పుడు వడ్డిని కనుగొని, I, P, T మరియు R విలువలను తెలుపుము.
- నీవు సరియైన సమాధానము చెప్పిన నీ అకోంటులో ఆ విలువను గుర్తించి, తప్పు చెప్పిన (O) గా గుర్తించుము.

గమనిక : 2 లేక 3సార్లు ఇదే ఆటను ఆడి కింది పట్టికలో విలువలను గుర్తించుము.



వడ్డి మొత్తం				
పేరు	మొదటి సారి	రెండవ సారి	మూడవ సారి	మొత్తం



మనం నేర్చుకున్నవి

- నిత్యజీవితంలో చాలా సందర్భాలను నిప్పుత్తులలో పోలుస్తాం. ఉదాహరణకు నాజీతం నెలకు ₹ 10,000 మరియు నా మిత్రుని జీతం నెలకు ₹ 20,000 అనుకొండాం. అంటే నా జీతం నా మిత్రుని జీతంలో సగమని లేదా నా మిత్రుని జీతం నా జీతానికి రెట్టింపని అంటాం. నాజీతం మరియు మిత్రుని జీతాల నిప్పుత్తి 1 : 2 గా మిత్రుని మరియు నా జీతాల నిప్పుత్తి 2 : 1 గా చెప్పాం.
- రెండు నిప్పుత్తులు సమానమైన వాటిలోని పదాలు అనుపాతంలో ఉన్నాయంటాము.
- ఒక రాశిలోని పెరుగుదల (తగ్గుదల) మరొక రాశిలో పెరుగుదల(తగ్గుదల)కు కారణమైతే ఆరెండు రాశులు అనులోమ చరత్యాన్ని కలిగి యున్నాయంటాము.
- శాతం అంటే నూటికి అని అర్ధం. నిప్పుత్తుల పోలికలో శాతాలను వాడటం అర్ధవంతంగా వుంటుంది. శాతమునకు గుర్తు %.

$$\text{ఉదా } 13\% = \frac{13}{100} = 0.13$$

- నిత్యజీవితంలో లాభనష్టాలు, రుసుములు, వడ్డీలను గణించడంలో శాతాలను ఉపయోగిస్తారు.
- నిత్య జీవితములో వివిధ సందర్భములలో శాతములను పయోగిస్తారు. ఈ పాత్యాంశములో లాభము, నష్టం, రుసుము మరియు సామాన్య వడ్డీని గూర్చి నేర్చుకొన్నారు.

అద్భుత నిప్పుత్తులతో తమాషా!

1, 2, 3 9 అంకెలను అన్నింటిని ఒకొక్కసారి మాత్రమే ఉపయోగించి రెండు సంఖ్యలుగా రూపొందించి వాటి నిప్పుత్తి కనుగొంటే 1:2 అగును.

$$\text{ఉదాహరణ : } \frac{7329}{14658} = \frac{1}{2} = 1 : 2. \text{ ఇది ఒక అద్భుత నిప్పుత్తి.}$$

అదే విధంగా ఈ అంకెలను మరొక విధంగా అమర్చి సంఖ్యల నిప్పుత్తి కనుగొంటే 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8, 1:9 వస్తాయి. వాటిని కనుగొని ఆనందించండి.

7.0 పరిచయం

ఈ దినపత్రికలో క్రీడా వార్తల విభాగాన్ని రవి చదువుతున్నాడు. ఆ విభాగంలోని ఒక పేజీలో రెండు పట్టికలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

2011 ప్రపంచకప్‌లో ఐదుగురు ఉత్తమ బ్యాట్స్‌మెన్

బ్యాట్స్‌మెన్ పేరు	చేసిన పరుగులు
టి.ఎం. డిల్ష్ న్ (శ్రీలంక)	500
సచిన్ టెండూల్చ్ (ఇండియా)	482
కె. సంగక్కర (శ్రీలంక)	465
జొనాథన్ ట్రాట్ (ఇంగ్లాండ్)	422
తరంగ యు. (శ్రీలంక)	395

పట్టిక - 1

2011 ప్రపంచకప్‌లో ఐదుగురు ఉత్తమ బోలర్లు

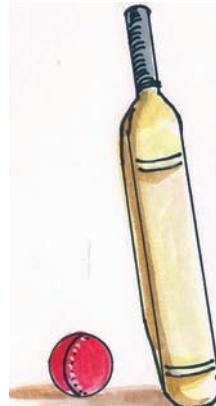
బోలర్ పేరు	తీసిన వికెట్లు
అట్రీడ్ (పాకిస్తాన్)	21
జఫీర్ ఖాన్ (ఇండియా)	21
టి.జి. సౌతీ (స్వాజిలాండ్)	18
రాబీన్ పీటర్ సన్ (సాత్ ఆఫ్రీకా)	15
ఎం. మురళీధరన్ (శ్రీలంక)	15

పట్టిక - 2

పై రెండు పట్టికలు ఏం తెలియజేస్తున్నాయి?

2011 ప్రపంచకప్‌లో ఎక్కువ పరుగులు చేసిన బ్యాట్స్‌మెన్ పేర్లను, వారు చేసిన పరుగులను మొదటి పట్టిక తెలియజేస్తుంది. నిర్ణయాలు తీసుకునేందుకు, ఉదాహరణకు అత్యుత్తమ బ్యాట్స్‌మెన్ అవార్డును ఎవరికివ్వాలనే విషయంలో నిర్ణయానికి వచ్చేందుకు ప్రపంచకప్ నిర్వాహకులకు ఈ సమాచారం దోహదపడుతుంది.

2011 ప్రపంచకప్‌లో ఎక్కువ వికెట్లు తీసిన బోలర్ల పేర్లను, వారు తీసుకున్న వికెట్లు సంఖ్యను రెండో పట్టిక తెలుపుతుంది. పట్టికలోని సమాచారం అంతిమ ఘలితాలను రాబట్టి తగు నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఉపకరిస్తుంది. ఉదాహరణకు అత్యుత్తమ బోలర్ అవార్డును ఎవరికివ్వాలనే విషయంలో నిర్ణయానికి వచ్చేందుకు ప్రపంచకప్ నిర్వాహకులకు ఈ సమాచారం దోహదపడుతుంది.



“సంఖ్యలు, పదాల రూపంలో ఉంటూ అంతిమ ఘలితాలను రాబట్టి తగు నిర్ణయాలను తీసుకోవడానికి సేకరించబడిన సమాచారాన్ని దత్తాంశం (data) అంటారు”. సమాచారంలోని సంఖ్య వివరాలను ‘రాశులు’ అంటారు. పై ఉదాహరణలో బ్యాట్స్‌మెన్ పేర్లు వాళ్ళు చేసిన పరుగులు, బోలర్ల పేర్లు – తీసుకున్న వికెట్లు మొదలైన వివరాలనే దత్తాంశం అంటారు. పట్టికలు, గ్రాఫులు మనకు దత్తాంశాన్ని తెలియజేస్తాయి. సంజ్ఞ రూపంలో సమాదు చేయబడ్డ దత్తాంశాన్ని పరిశీలనాంశాలు అంటారు.



ప్రయత్నించండి.

మీ పారశాల నోటిస్ బోర్డును ఒకసారి పరిశీలించండి. అందులో ఏమైనా సమాచార పట్టికలు ఉన్నాయా? ఈ సమాచారాన్ని ఎవరు ఉపయోగిస్తారో తెలుసుకోండి.

7.1 దత్తాంశ అమరిక

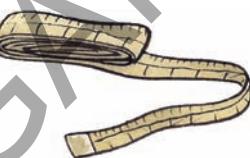
‘జవహర్ బాల ఆరోగ్యరక్ష’ పథకంలో ఒక పొరశాలలో 7వ తరగతి చదివే ఏడుగురు పిల్లల వివరాలను నమోదు చేశారు.

ఆ పిల్లల ఎత్తులను కృష్ణ తన నోట్ పుస్తకంలో కింది విధంగా నమోదు చేశాడు :

అమల -125 సెం.మీ, లేఖ్య -133 సెం.మీ, తబస్సుమ్ -121 సెం.మీ, సుధ -140 సెం.మీ, వనజ -117 సెం.మీ, లెనిన్ -129 సెం.మీ, రాజేష్ -132 సెం.మీ.

ఈదే సమాచారాన్ని కుమార్ అనే మరో విద్యార్థి పట్టికా రూపంలో నమోదు చేసి ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చుదు.

విద్యార్థి పేరు	ఎత్తు (సెం.మీలలో)
వనజ	117
తబస్సుమ్	121
అమల	125
లెనిన్	129
రాజేష్	132
లేఖ్య	133
సుధ	140



కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇష్టండి.

- విద్యార్థులందరిలో ఎక్కువ పొడవైన వారు ఎవరు?
- విద్యార్థులందరిలోకి మిక్కిలి పొట్టిగా ఉన్నదెవరు?
- విద్యార్థులందరినీ ఎత్తుల ప్రకారం నిలబడితే అమలకూ, రాజేష్కూ మధ్య ఉండేది ఎవరు?

- పై ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇచ్చేందుకు మీరు కృష్ణ రాసిన సమాచారాన్ని ఉపయోగిస్తారా లేదా కుమార్ రాసిన సమాచారాన్నా? మీరు బహుశా కుమార్ రూపాందించిన సమాచారాన్నే ఉపయోగించి ఉంటారు. కుమార్ రూపాందించిన సమాచారం క్రమపద్ధతిలో ఉండి, చదవడానికి అవగాహన చేసుకోవడానికి సులువుగా ఉండడమే దీనికి కారణం.

ఇవి చేయండి.

ఒక లఘు పరీక్షలో తెలుగు, హిందీ, ఇంగ్లీషు, గణితం, సామాన్యశాస్త్రం, సాంఘిక శాస్త్రం విషయాల్లో అమర్ వరుసగా 15, 12, 18, 16, 19, 17 మార్కులు సాధించాడు. పీటర్ వరుసగా ఆ విషయాల్లో 18, 16, 15, 14, 19, 12 మార్కులు సాధించాడు. ఈ సమాచారాన్ని అర్థవంతంగా క్రమపద్ధతిలో అమర్చుండి. సమాచారాన్ని క్రమపద్ధతిలో వ్యాఖ్యానించండి.



తరగతి గది ప్రాజెక్టు

మీ తరగతిలోని పిల్లల బరువులను, బరువు తూచే యంత్రం (weighing machine) సహాయంతో తూచండి. ఈ సమాచారాన్ని ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చుండి. కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం ఇష్టండి.

- మీ తరగతిలో అందరికంటే తక్కువ బరువు గల వారు ఎవరు?
- 25 కి.గ్రా కంటే ఎక్కువ బరువు ఉండే విద్యార్థులెందరు?
- 20 కి.గ్రా నుండి 30 కి.గ్రా. మధ్య బరువు ఉండే విద్యార్థులెందరు?

7.2 ప్రాతినిధ్య విలువలు

ఒక వసతిగృహంలో,

- ఒక రోజులో వినియోగించే సరాసరి బియ్యం వినియోగం 150 గ్రా.
- విద్యార్థుల సరాసరి వయస్సు 13 సంవత్సరాలు.
- విద్యార్థుల సరాసరి ఎత్తు 135 సెం.మీ.

పిల్లలూ! వై సమాచారాన్ని ఒకసారి పరిశీలించండి. ప్రతి విద్యార్థి ఒక్క రోజు ఖచ్చితంగా 150 గ్రా. బియ్యాన్ని వినియోగిస్తున్నాడా? తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి వయస్సు 13 సం. అని చెప్పగలమా? తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి 135 సెం.మీ ఎత్తు ఉంటాడని చెప్పగలమా?



పై ప్రశ్నలన్నింటికి సమాధానం ‘కాదు’ అనే వస్తుంది. కొందరు పిల్లలు 150 గ్రా. బియ్యం కంటే ఎక్కువ తీసుకుంటే మరి కొందరు పిల్లలు 150 గ్రా. కంటే తక్కువ తీసుకుంటారు. కొందరు ఖచ్చితంగా 150గ్రా. బియ్యాన్నే తీసుకుంటారు కూడా. పిల్లల బరువు, ఎత్తుల విషయంలోనూ అంతే!

ఈ సందర్భంలో వసతిగృహంలోని ఒక్కక్క విద్యార్థి వినియోగించిన బియ్యాన్ని 150 గ్రా. తెలియజేస్తుంది. ఒక్కక్క విద్యార్థి వినియోగించిన బియ్యానికి ఇది ‘ప్రాతినిధ్య విలువ’ (Representative value) అదే విధంగా వసతిగృహంలోని ఒక్క విద్యార్థి వయస్సును 13సం. సూచిస్తుంది. ఇది ఒక్క విద్యార్థి వయస్సుకు ‘ప్రాతినిధ్య విలువ’ ఎత్తు విషయంలోనూ ఇదే వర్తిస్తుంది. పై ఉదాహరణలన్నే ఆయా దత్తాంశాలకు ఒక ప్రాతినిధ్య విలువను సూచిస్తాయి. దాన్నే ‘సగటు’ అంటారు. ఈ అధ్యాయంలో ‘సగటు’ తో పాటు ‘మధ్యగతం’, ‘బాహుళకం’ అనే మరో రెండు ప్రాతినిధ్య విలువల గురించి కూడా నేర్చుకుండాం.

7.3.1 సగటు లేదా అంక మధ్యమము

ఒక పారశాలలోని ఫిజికల్ ఎడ్యూకేషన్ టీచర్ ప్రతిరోజు సాధన చేయవలసిందిగా తన విద్యార్థులకు చెప్పారు. ఒక వారంలో రాజేందర్ అనే విద్యార్థి చేసిన సాధన కాలం వివరాలు (నిమిషాల్లో) కింది విధంగా ఉన్నాయి.

రోజు	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	వుక్ర	శని	ఆది
సాధన చేసిన కాలం (నిమిషాల్లో)	20	35	40	30	25	45	15

సాధన కోసం రాజేందర్ రోజుకు వినియోగించిన కాలాన్ని మనం గణించవచ్చా? పరిశీలిద్దాం.

మొత్తం వారంలో సాధనకోసం రాజేంద్ర వినియోగించిన సమయ మొంత?

$$\text{మొత్తం సమయం} = 20 + 35 + 40 + 30 + 25 + 45 + 15 = 210 \text{ నిమిషాలు}$$

రోజుకు సాధన కోసం వినియోగించిన కాలాన్ని లెక్కించేందుకు ఈ మొత్తం సమయాన్ని రోజుల సంఖ్యతో భాగించాలి.

$$\text{అంటే } \frac{20+35+40+30+20+45+15}{7} = \frac{210}{7} = 30 \text{ నిమిషాలు}$$

ఇది రోజుకు సాధన కోసం వినియోగించిన సమయం లేదా ఒక్కరోజుకు ప్రాణీస్ సెషన్ కాలం.

ఉదాహరణ 1 : ఒక కూరగాయల వ్యాపారి ఒక వారంలో సంపాదించిన సొమ్ము (రూపాయల్లో) 200, 150, 180, 300, 160, 170, 170. రోజుకు అతని సరాసరి సంపాదనను కనుక్కోండి.

సాధన : వారంలో మొత్తం సంపాదన(రూపాయల్లో) = $200+150+180+300+160+170+170$
= ₹1330

వారంలోని మొత్తం రోజులు = 7

$$\text{సరాసరి సంపాదన} = \frac{1330}{7} = ₹190$$

‘సరాసరి’ నే ‘సగటు’ లేదా ‘అంక మధ్యమం’ అంటారు.

$$\text{సరాసరి లేదా అంక మధ్యమం (A.M)} = \frac{\text{రాశుల మొత్తం విలువ}}{\text{రాశుల సంఖ్య}}$$



ప్రయుక్తించండి.

1. ఒక టీమ్లోని క్రీడాకారుల వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో) 16, 16, 16, 14, 17, 18. అయితే
 - (i) అతి తక్కువ, అతి ఎక్కువ వయస్సు ఉన్న క్రీడాకారుల వయస్సులు ఎంతెంత?
 - (ii) క్రీడాకారుల సగటు వయస్సు ఎంత?
2. మీరు ఒక వారంలో సరాసరిన రోజుకు ఎన్ని గ్లాసుల నీళ్ళు తాగుతారు? ఈ సరాసరిని మీరు ఎలా కనుకొన్నారు?

7.3.2 మధ్యమం ఎక్కడ ఉంటుంది?

తెలుగు, హిందీ, ఇంగ్లీషు పాఠ్యాంశాలలో (సబ్జెక్టులలో) అనిల్, అమర్, అంటోనీ, ఇందర్ పొందిన మార్కుల వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

	తెలుగు	హిందీ	ఇంగ్లీషు
అనిల్	15	8	10
అమర్	10	10	12
అంటోనీ	11	6	11
ఇందర్	12	12	13

ప్రతి సజ్జెక్ట్లోను విద్యార్థులు పొందిన సరాసరి మార్గులను గణించాం.

తెలుగు	హిందీ	ఇంగ్లీషు
$A.M = \frac{15+10+11+12}{4}$	$A.M = \frac{8+10+6+12}{4}$	$A.M =$
$= \frac{48}{4}$	$= \frac{36}{4}$	$= \dots \dots \dots$
$= 12$	$= \dots \dots \dots$	$= \dots \dots \dots$
అత్యధిక మార్గులు = 15	అత్యధిక మార్గులు =	అత్యధిక మార్గులు =
అత్యల్ప మార్గులు = 10	అత్యల్ప మార్గులు =	అత్యల్ప మార్గులు =
మధ్యమం = 12	మధ్యమం =	మధ్యమం =

పై ప్రతి సందర్భంలోనూ ‘అంక మధ్యమం’ విలువ అత్యధిక, అతితక్కువ విలువల మధ్యే ఉండా?

ఉండి కదూ!

అంక మధ్యమం ఎల్లప్పుడూ అత్యధిక, అత్యల్ప పరిశీలనా విలువల మధ్యే ఉంటుంది.

7.3.3 అంక మధ్యమము యొక్క ధర్మము

ఉదాహరణ 3 : ఒక కుటుంబంలోని కృష్ణ, రాధిక, నీహరిక, నిఖిల్ అనే కుటుంబసభ్యుల వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో) 44, 39, 17, 12. అయితే (i) వారి వయస్సుల అంక మధ్యమాన్ని కనుక్కోండి (ii) ఐదేళ్ళ క్రితం వారి వయస్సులెంత? ఐదేళ్ళ క్రితం సగటు వయస్సెంత? (iii) సగటులోని మార్గుకూ, వయస్సుల సంఖ్యకూ మధ్య ఏదైనా సంబంధాన్ని మీరు గమనించారా?

సాధన : కుటుంబ సభ్యుల వయస్సులు (సంవత్సరాల్లో) = 44, 39, 17, 12

$$\text{కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య} = 4$$

$$\text{కాబట్టి వారి వయస్సుల అంక మధ్యమం} = \frac{44+39+17+12}{4} = \frac{112}{4} = 28 \text{ సంవత్సరాలు}$$

$$\text{ఐదేళ్ళ క్రితం కుటుంబ సభ్యుల వయస్సులు(సంవత్సరాల్లో)} = 44 - 5, 39 - 5, 17 - 5, 12 - 5 \\ = 39, 34, 12, 7$$

$$\text{కాబట్టి ఐదేళ్ళ క్రితం వారి వయస్సుల అంక మధ్యమం} = \frac{39+34+12+7}{4} = \frac{92}{4} = 23 \text{ సంవత్సరాలు}$$

ప్రస్తుత అంక మధ్యమానికి, ఐదేళ్ళ క్రితం వారి వయస్సుల అంక మధ్యమానికి తేడా ఎంత?

దీన్ని బట్టి ఏం తెలుస్తోంది?

ప్రతి కుటుంబసభ్యుని వయస్సును ఐదేళ్ళ తగ్గిస్తే అంక మధ్యమమూ ఐదేళ్ళ తగ్గింది.

ఇప్పటి నుండి మూడేళ్ళ తర్వాత ఆ కుటుంబంలోని సభ్యుల వయస్సుల అంక మధ్యమం కనుక్కోండి.

వదేళ్ళ తర్వాత ఆ కుటుంబంలోని సభ్యుల వయస్సుల అంక మధ్యమం ఎంత ఉండవచ్చు?

ఒక దత్తాంశంలోని అన్ని విలువలకూ ఒకే సంఖ్యను కలిపినా లేదా తీసేసినా అంక మధ్యమం కూడా అదే సంఖ్య విలువలో పెరుగుతుంది లేదా తగ్గుతుంది.



ప్రయత్నించండి.

- ఒక దత్తాంశంలోని పది రాశులలో గరిష్ట విలువ 25గానూ, కనిష్ట విలువ 15 గానూ ఉంది. ఈ పరిశీలనల సగటు ఎంత అయ్యే అవకాశము ఉంది? ఎందుకు?

(i) 12 (ii) 15 (iii) 21 (iv) 27
- పరిశీలనల విలువలు $28, 45, 33, 21, 48, 30, 34, 36, 40$ గా నమోదుయ్యాయి. కింది విలువల్లో ఏది ఈ విలువల సగటు అవుతుందో గణించకుండానే తెలపండి.

(i) 20 (ii) 35 (iii) 48 (iv) 50



అభ్యాసం - 1

- హైదరాబాదులో 2011 ఫిబ్రవరి 26 నుండి మార్చి 4 వరకు వారంలో గల ప్రతిరోజుగా గరిష్ట ఉష్ణోగ్రతలు $26^{\circ}\text{C}, 27^{\circ}\text{C}, 30^{\circ}\text{C}, 30^{\circ}\text{C}, 32^{\circ}\text{C}, 33^{\circ}\text{C}, 32^{\circ}\text{C}$ గా నమోదుయ్యాయి.

(i) ఆ వారంలో అత్యధిక ఉష్ణోగ్రత ఎంత?
 (ii) ఆ వారంలోని రోజువారి గరిష్ట ఉష్ణోగ్రతల సరాసరి ఎంత?
- ఒక పొరశాలలో మధ్యాహ్న భోజన పథకంలో వరుసగా 5 రోజుల పాటు వినియోగించిన బియ్యం 15.750 కి.గ్రా; 14.850 కి.గ్రా; 16.500 కి.గ్రా; 14.700 కి.గ్రా; 17.700 కి.గ్రా, ఆ 5 రోజుల్లో సరాసరి బియ్యం వినియోగాన్ని కనుక్కోండి.
 
- ఒక గ్రామంలో వేరుశనగ, జొన్నలు, తృణధాన్యాలను పండిస్తారు. వరుసగా నాలుగు సంవత్సరాల్లో ఆయా పంటలపై ఎకరానికి లాభం విలువలు (రూపాయల్లో) కింది విధంగా ఉన్నాయి.

పంట సంవత్సరం	2005	2006	2007	2008
వేరు శనగ	7000	8000	7500	7500
జొన్నలు	6000	1000	8000	1000
తృణధాన్యాలు	9000	5000	3000	4000

- (i) పై నాలుగు సంవత్సరాల్లో ప్రతి పంటపై సరాసరి లాభాన్ని గణించండి.
 (ii) ఆ తరువాతి సంవత్సరంలో ఏ పంట పండిస్తే బాగుంటుందో మీ ఘరీపితం ఆధారంగా తెలపండి.

4. టి.ఎస్ ఆర్ టి సి బస్సులో ఆదిలాబాద్ నుండి నిర్వుల్ వరకు ఒక రోజులో 4 బ్రైప్షుల్లో ప్రయాణించిన ప్రయాణికుల సంఖ్య 39, 30, 45, 54. ఆ బస్సు ఆక్యుపేన్సీ రేషియో (ఒక బ్రైప్షుల్లో ప్రయాణించిన సగటు ప్రయాణికుల సంఖ్య) ఆ రోజులో ఎంత?
5. ఇంగ్లీషులో 4 లఘు పరీక్షల్లో అంజు, నీలేష్, లేఖ్ పొందిన మార్కుల వివరాలు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.



విద్యార్థి పేరు	లఘు పరీక్ష I	లఘు పరీక్ష II	లఘు పరీక్ష III	యూనిట్ పరీక్ష IV
అంజు	ఆనుషష్టి	19	18	19
నీలేష్	0	15	17	19
లేఖ్	15	19	19	19

- (i) లేఖ్ పొందిన సరాసరి మార్కులను కనుగొనండి.
- (ii) అంజు పొందిన సరాసరి మార్కులను కనుగొనండి. ఆమె పొందిన మొత్తం మార్కులను 3 తో భాగిస్తారా లేక 4 తో భాగిస్తారా? ఎందుకు?
- (iii) నీలేష్ అన్ని పరీక్షలకూ హోటల్లోనాడు. అతడి సరాసరి మార్కులైని? అతడు పొందిన మొత్తం మార్కులను 3 తో భాగిస్తారా లేక 4 తోనా? ఎందుకు?
- (iv) ఇంగ్లీషులో బాగా ప్రతిభ కనబరిచిన విద్యార్థి ఎవరు?
6. ముగ్గురు స్నేహితులు ఒక హోటలకు వెళ్లి వారికిష్టమైన అల్పాహారం తీసుకున్నారు. వాళ్ళ రూ 16, రూ 17, రూ 21 చెల్లించారు. (i) వాళ్ళ సరాసరి ఖర్చును కనుకోండి. (ii) వాళ్ళ ఖర్చుపెట్టిన మొత్తానికి 3 రెట్లు మొత్తాన్ని ఖర్చుపెడితే సరాసరి ఖర్చు ఎంత అవుతుంది? (iii) హోటల మేనేజర్ వారికి 50% డిస్కౌంటు ఇస్తే, వారి సరాసరి ఖర్చు ఎంత అవుతుంది? (iv) ఖర్చులో మార్కుకూ సరాసరి ఖర్చులో మార్కుకూ మధ్య ఏమైనా సంబంధాన్ని గమనించారా?
7. మొదటి 10 సహజ సంఖ్యల సగటును కనుకోండి.
8. మొదటి 5 ప్రధాన సంఖ్యల సగటును కనుకోండి.
9. నాలుగు పూర్ణసంఖ్యలలో మొదటి రెండు కనిష్ఠ పూర్ణసంఖ్యల సగటు 102. మొదటి మాడు కనిష్ఠ పూర్ణసంఖ్యల సగటు 103, మొత్తం నాలుగు పూర్ణసంఖ్యల సగటు 104. ఈ పూర్ణసంఖ్యలన్నింటిలోనూ గరిష్ట పూర్ణసంఖ్యను కనుకోండి.
10. సగటును కనుగొనేందుకు సరైన సమాచారం ఇస్తూ రెండు ప్రశ్నలను రాయండి.



ప్రాజెక్టు

మీ వీధిలోని ఇళ్ళలో ఉండే కుటుంబ సభ్యుల సంఖ్య తెలుసుకోండి. మీ వీధిలో కుటుంబ సగటు పరిమాణం ఎంత? గణించండి.

7.4 బాహుళకం

ప్రాతినిధి విలువల్లో రెండవ దైన 'బాహుళకం' గురించి తెలుసుకుండాం. క్రింది ఉదాహరణను చదువుదాం.

ఉదాహరణ 4 : ఏ వంటనూనెను ఎక్కువ సంఖ్యలో నిల్వ ఉంచుకోవాలో ఒక వ్యాపారి తెలుసుకోవాలనుకున్నాడు. అందుకోసం ఒకవారంలో వంట నూనెల అమృకాలను కింది విధంగా రికార్డు రూపంలో పొందుపరిచాడు.

రోజు	అమృన వంటనూనె ప్యాకెట్లు.
సోమ	GGGSSSSP
మంగళ	GGGSSSSSPP
బుధ	GGSSSSSP
గురు	GGGSSSP
శుక్ర	GGGSSPP
శని	GSSSSSSSS
ఆది	GGGSSSP



G = వేరుశనగ నూనె ప్యాకెట్, S = సన్ఫ్షువర్ నూనె ప్యాకెట్, మరియు P = పామోలిన్ నూనె ప్యాకెట్

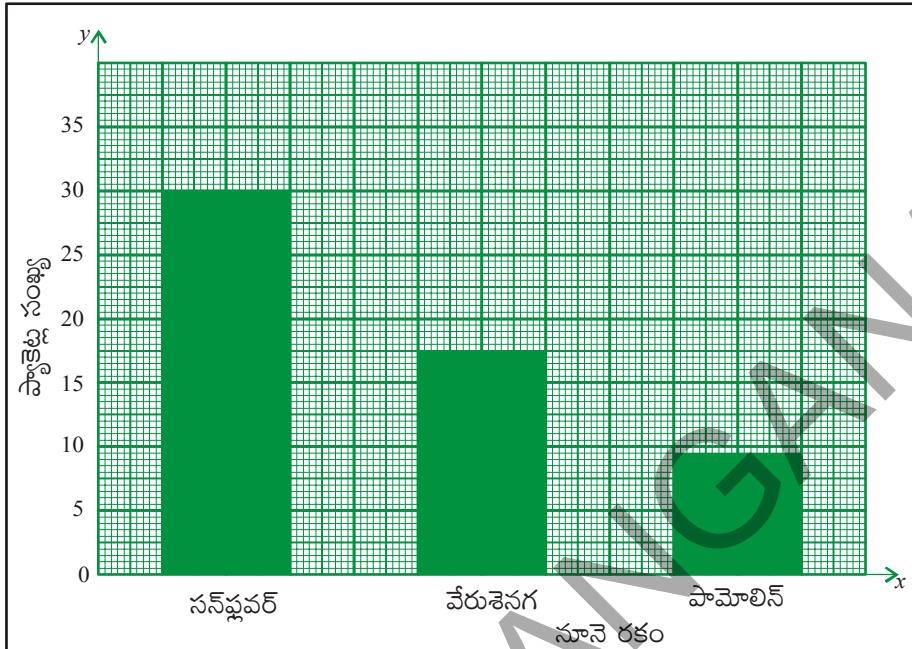
ఇలాంటి సందర్భంలో వంటనూనె ప్యాకెట్ల సగటు సంఖ్యను గణించడం వల్ల ఒక నిర్ణయానికి వచ్చేందుకు ఆ వ్యాపారికి ఉపయోగపడుతుందా?

సాధన : తాను ఆర్డర్ చేయాల్సిన వంటనూనె ప్యాకెట్ల సగటు సంఖ్యను వ్యాపారి మొదట గణిస్తాడు.

$$\text{వంటనూనె ప్యాకెట్ల సగటు సంఖ్య} = \frac{18+30+9}{3} = \frac{57}{3} = 19.$$

ప్రతిరకానికి 19 వంట నూనె ప్యాకెట్లను నిల్వ చేయాల్సి ఉంటుందా? వ్యాపారి వంటనూనెల అమృకాలను మరోసారి పరిశీలిస్తాడు. సన్ఫ్షువర్ వంట నూనెకు ఎక్కువ డిమాండ్ ఉన్నట్లు, పామోలిన్ వంట నూనెకు అతి తక్కువ డిమాండ్ ఉన్నట్లు గమనిస్తాడు. ఒక్కొరకం ప్యాకెట్లు 19 చౌపున ఆర్డర్ ఇస్తే సన్ఫ్షువర్ వంటనూనె ప్యాకెట్లు సరిపోవు; పామోలిన్ వంట నూనె ప్యాకెట్లు మిగిలిపోతాయి. కాబట్టి సన్ఫ్షువర్ నూనె ప్యాకెట్లు ఎక్కువగా, పామోలిన్ నూనె ప్యాకెట్లు తక్కువగా కొనుగోలు చేసేందుకు ఆ వ్యాపారి నిర్ణయిస్తాడు. ఈ నిర్ణయానికి మూలం సన్ఫ్షువర్ నూనె ప్యాకెట్ల అమృకాలు ఆ వారంలో 30 కావడమే. ఈ ప్రాతినిధి విలువే ఆ వారంలో అధికంగా అమృనవి సన్ఫ్షువర్ వంటనూనె ప్యాకెట్లగా పేర్కొంది. ఇదే బాహుళకం (mode). ఇచ్చిన పరిశీలనా విలువల్లో తరచుగా పునరావృతమయ్యే విలువను బాహుళకం (mode) అంటారు.

కమ్ము చిత్రంలో అతి పొడవైన కమ్ము సూచించే విలువను, ఆ దత్తాంశానికి బాహుళకం (mode)గా పేర్కొంటాం. ఉదాహరణకు కింది గ్రాఫ్ చూడండి.



ఉదాహరణ 5: 2, 3, 5, 3, 4, 7, 3, 2, 1, 7, 3 అనే పరిశీలనాంశాల బాహుళకాన్ని కనుక్కొండి.

సాధన : ఈ సంఖ్యలను ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చితే 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 7, 7 వస్తుంది.

మిగతా వాటికంటే 3 ఎక్కువ సార్లు వచ్చింది.

కాబట్టి బాహుళకం = 3

ఉదాహరణ 6: 3, 5, 9, 6, 5, 9, 2, 9, 3, 5 అనే సంఖ్యల బాహుళకాన్ని కనుక్కొండి.

సాధన : ఒకే విలువగల సంఖ్యలు ఒకే దగ్గర ఉండేట్లు క్రమపద్ధతిలో అమర్చితే

2, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 9, 9, 9 వస్తుంది.

ఇందులో 5, 9 అనే సంఖ్యలు ఎక్కువ సార్లు వచ్చాయి.

కాబట్టి ఈ దత్తాంశానికి రెండు బాహుళకాలు 5, 9 లు ఉన్నాయి.

ఇలాంటి దత్తాంశాన్ని ‘ద్విబాహుళక దత్తాంశం’ (Bimodal data) అంటారు.

గమనిక : ఒక దత్తాంశములో ప్రతి రాళి విలువ సమాన సంఖ్యలో పునరావృత్తమైతే ఆ దత్తాంశమునకు బాహుళకం ఉండదు.



ప్రయుత్తించండి.

1. కింద ఇచ్చిన దత్తాంశాలకు బాహుళకం విలువలను కనుక్కొండి.
 - (i) 5, 6, 3, 5, 4, 9, 5, 6, 4, 9, 5
 - (ii) 25, 14, 18, 15, 17, 16, 19, 13, 12, 24
 - (iii) 10, 15, 20, 15, 20, 10, 15, 20, 10

ఉదాహరణ 7 : 10 మార్కులకు నిర్వహించిన ఒక పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

పొందిన మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0	2
1	1
2	2
3	1
4	-
5	4
6	10
7	15
8	9
9	5
10	1

సాధన : దత్తాంశ ప్రకారం ‘7 మార్కులు’ అను రాశిని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు పొందారు. అనగా 7 అను సంఖ్య ఎక్కువ సార్లు పునరావృత్తం అయింది.

దత్తాంశపు బాహుళకము = 7

గమనిక : పదిహేను సార్లు పునరావృత్తమైన 7 అనే సంఖ్య బాహుళకం కానీ పునరావృతాల సంఖ్య 15ను బాహుళకంగా భావించకూడదు.

ఉదాహరణ 8 : క్రింద పేర్కొన్న ఏ సందర్భాల్లో బాహుళకం సరైన ప్రాతినిధ్య విలువ అవుతుంది?

- (a) చొక్కాలను అమ్మే వ్యాపారి ఏ సైజు చొక్కాలను ఎక్కువగా ఆర్డర్ చేయాలో నిర్ణయించేందుకు
- (b) ఇరవై మంది వ్యక్తులు హోజరయ్యే విందుకై బియ్యం కొనుగోలు చేయుటకు
- (c) మీ ఇంట్లోని తలుపుల ఎత్తు కనుగొనేందుకు

మొదటి సందర్భాన్ని పరిశీలిద్దాం. వ్యాపారి నాలుగు సైజుల చొక్కాలు అమ్ముతాడనుకుంటే ఫిబ్రవరి నెలలో అతని అమ్మకాలు కింది విధంగా ఉండవచ్చు).

సైజు	సంఖ్య
M	15
L	18
XL	40
XXL	22
మొత్తం	92

$$\text{ఒక్క సైజులో ఆ వ్యాపారి అమ్మే సగటు చొక్కాల సంఖ్య} = \frac{12+18+40+22}{4} = 23 \text{ చొక్కాలు}$$

ఇలాంటి సందర్భంలో ప్రతి సైజులోనూ 23 చొక్కాలను ఆర్డర్ చేయడం సరైనదేనా? ఆ వ్యాపారి తన దగ్గరును సమాచారాన్ని మరోసారి పరిశీలిస్తాడు. అత్యంత అధికంగా అమ్మకాలు జరిగే సైజు XL అని గుర్తిస్తాడు. అన్ని పైజుల చొక్కాలూ 23 చొప్పున తెప్పించినట్లయితే XL సైజు చొక్కాలు తక్కువపడతాయి. కాబట్టి ఈ సైజు చొక్కాలను అధికంగానూ, మిగిలిన సైజు చొక్కాలను తక్కువ సంఖ్యలోనూ తెప్పించడం అర్థపంతంగా ఉంటుంది.

ఈ నిర్దయానికి వచ్చేందుకు ఆ వ్యాపారి ‘బాహుళకం’ లేదా ‘తరచుగా పునరావృతమయ్యే విలువ’ అనే భావపను పరిగణించి తీసుకుంటాడు.

రెండో సందర్భాన్ని పరిశీలిధ్యాం.

ఒక్కాక్కరు తినేది గరిష్టంగా ఊహించి 20 రెట్లు బియ్యం కొనుగోలు చేస్తే ఎక్కువ వ్యధా అవుతుంది. అట్లే ఒక్కాక్కరు తినేది కనిష్టంగా ఊహించి 20 రెట్లు బియ్యం కొనుగోలు చేస్తే సరిపోకపోవచ్చు. అయితే ఒక్కాక్కరు తినేది మధ్యస్థంగా (సరాసరిగా) ఊహించినట్లయితే సరియైన పరిమాణంలో బియ్యం కొనుగోలు చేయ్యవచ్చును. కానీ ఈ దత్తాంశమునకు బాహుళకము ఎంత మాత్రము ఉపయోగపడదు.

- ఇప్పుడు మూడో సందర్భాన్ని పరిశీలిధ్యాం

ఒక ఇంట్లో 134 సె.మీ., 132 సె.మీ., 100 సె.మీ., 125 సె.మీ., 144 సె.మీ. మరియు 125 సె.మీ. ఎత్తు ఉండే ఆరుగురు కుటుంబమ్ములు ఉన్నారు. ఈ దత్తాంశంలో బాహుళకం 125 సె.మీ. కాబట్టి ఇంట్లోని తలుపుల ఎత్తు 125 సె.మీగా ఉండవచ్చా? ఆరుగురిలో ఐదుగురి ఎత్తు 136 సె.మీ కంటే తక్కువ కాబట్టి తలుపుల ఎత్తు 140 సె.మీ గా నిరఱించవచ్చా? ఇక్కడ సగటునో, బాహుళకన్నో ఉపయోగిస్తామా? అందరి కంటే పొడవైన వ్యక్తి సౌకర్యపంతంగా వెళ్గాలిగేలా తలుపుల ఎత్తు నిర్ణయిస్తామా? ఈ సందర్భములో సగటు కానీ, బహుళకం కానీ పరిగణించి తీసుకోము.



ప్రయత్నించండి.

1. సగటు సరైన ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉండే ఒక సందర్భాన్ని పేర్కొనండి.
2. బాహుళకం సరైన ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉండే ఒక సందర్భాన్ని పేర్కొనండి.

అభ్యాసం - 2

1. ఒక జ్యందంలోని ఏడుగురు విద్యార్థులు లాంగీజింపులో 98 సె.మీ., 125 సె.మీ., 140 సె.మీ., 155 సె.మీ., 174 సె.మీ., 140 సె.మీ., 155 సె.మీ. దూరం దూకారు. ఈ దత్తాంశానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కొండి.
2. ఒక జట్లు క్రీడాకారుల వయస్సులు 25, 26, 25, 27, 28, 30, 31, 27, 33, 27, 29. (i) ఈ దత్తాంశ అంకగణిత సగటును, బాహుళకాన్ని కనుక్కొండి. (ii) బాహుళకం మారేందుకు వీలుగా ఈ టీములో చేర్చగలిగే క్రీడాకారుల కనీస సంఖ్యను కనుక్కొండి. వారి వయస్సులు ఎంతెంత ఉండాలి?
3. కింది దత్తాంశ బాహుళకాన్ని కనుక్కొండి 12, 24, 36, 46, 25, 38, 72, 36, 25, 38, 12, 24, 46, 25, 12, 24, 46, 25, 72, 12, 24, 36, 25, 38, 36.

4. కింద పేర్కొన్న సందర్భాలకు సగటు, బాహుళకాల్లో దేనిని ప్రాతినిధ్య విలువగా వినియోగించవచ్చే పేర్కొనండి.



- (i) వివిధ సైజల్లో ఉండే టూష్ట్ పేస్ట్లను అమ్మే వ్యాపారి ఏ సైజు టూష్ట్ పేస్ట్లను ఆధికంగా కొనుగోలు చేయాలో నిర్ణయించుకునేందుకు
- (ii) పరీక్షా హాలులోకి సరిపోయేన్ని అదనపు పేపర్లు తెచ్చుకోవడంలో ఇన్విజిలేటర్కు ఉపయోగపడేందుకు
- (iii) ఒక పెళ్ళిలో తయారుచేయవలసిన లడ్డుల సంఖ్యను నిర్ణయించేందుకు
- (iv) ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులకు అభిమాన క్రికెటర్ ఎవరో నిర్ధారించేందుకు

7.5 మధ్యగతం

దత్తాంశ ప్రాతినిధ్య విలువగా అంక మధ్యమం, బాహుళకం ఉండే సందర్భాలను మనం పరిశీలించాం. ఇప్పుడు మరో సందర్భాన్ని చూద్దాం. ఒక ఉత్పాదక సంస్థలో మేనేజరు, కార్బూకుల వేతన వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

మేనేజరు	-	రూ. 40,000
మొదటి కార్బూకుడు	-	రూ. 3300
రెండవకార్బూకుడు	-	రూ. 5000
మూడవ కార్బూకుడు	-	రూ. 4000
నాలుగో కార్బూకుడు	-	రూ. 4200
ఐదో కార్బూకుడు	-	రూ. 3500
అరో కార్బూకుడు	-	రూ. 4500
ఎటో కార్బూకుడు	-	రూ. 4200
ఎనిమిదో కార్బూకుడు	-	రూ. 4300
తౌమ్మిదో కార్బూకుడు	-	రూ. 3500
పదో కార్బూకుడు	-	రూ. 3500



ఈ దత్తాంశానికి అంక మధ్యమం లేదా బాహుళకం ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉండగలుగుతాయా? పరిశీలించాం!

ఆ సంస్థలో వేతనాల అంక మధ్యమాన్ని గణించాం.

$$\text{వేతనాల సగటు} = \frac{\text{వేతనాల మొత్తం}}{\text{ఉద్యోగుల సంఖ్య}}$$

$$3300 + 5000 + 4000 + 4200 + 3500 + 4500 + 4200 + 4300 + 3500 + 3500 + 40000$$

ఈ వేతనాల సగటు మేనేజరు, కార్బూకుల వేతనాలకు ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉంటుందా? లేదు! ఇది మేనేజరు వేతనం కంటే చాలా తక్కువ కాగా కార్బూకుల వేతనాల కంటే చాలా ఎక్కువ.

ఇప్పుడు బాహుళకాన్ని పరిశీలించాం. ఈ దత్తాంశంలో ఎక్కువసార్లు పునరావృతమైన విలువ 3500. అయితే ఇది మూడుసార్లే పునరావృతమైనందు వల్ల ఇది ఈ దత్తాంశానికి సరైన ప్రాతినిధ్య విలువ కాదు.



కాబట్టి మరో ప్రాతినిధ్య విలువను గణించే పద్ధతి చూచాం.

ఈ వేతనాలన్ని ఆరోహణ పద్ధతిలో అమర్చగా

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

ఈ దత్తాంశ మధ్య విలువ 4200. ఈ విలువ మొత్తం ఉద్యోగులను రూ.4200 కంటే ఎక్కువ సంపాదించే బదుగురు, అంతకంటే తక్కువ సంపాదించే బదుగురుగా - రెండు నమూహాలోలుగా విభజిస్తుంది.

ఈ విలువనే మధ్యగతం (**Median**) అంటారు. ఈ సంస్థలోని ఉద్యోగుల వేతనాలకు ఇది ప్రాతినిధ్య విలువగా ఉంటుంది.

పై ఉదాహరణలో మొత్తం పరిశీలనల సంఖ్య 11 ఒక బేసినంఖ్య. అందువల్ల మధ్యగతం మిగతా దత్తాంశాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

ఒకవేళ పరిశీలనల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయితే?

పై ఉత్పాదక సంస్థ ఉదాహరణనే మళ్ళీ తీసుకుందాం. రూ. 4000 సంపాదించే మరో వ్యక్తి ఈ ఉత్పాదక సంస్థలో చేరితే ఎలా ఉంటుంది?

ఇప్పుడు 12 మంది సంపాదనలను ఆరోహణ పద్ధతిలో అమర్చుదాం.

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

ఈ దత్తాంశం మధ్యలో 4000, 4200 అనే రెండు విలువలు ఉన్నాయి. ఇలాంటి సందర్భాల్లో ఈ రెండు విలువల సరాసరిని కనుక్కోవడం ద్వారా మధ్యగతాన్ని గణిస్తాం. అందువల్ల మధ్యగత వేతనం = $\frac{4000 + 4200}{2} = 4100$.

ఉదాహరణ 9 : ఏదుగురు ఉద్యోగుల నెలనరి ఆదాయాలు 8000, 9000, 8200, 7900, 8500, 8600, 60000.

మధ్యగత ఆదాయాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : ఆదాయాలను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చితే : 7900, 8000, 8200, 8500, 8600, 9000, 60000

మొత్తం పరిశీలనల సంఖ్య = 7

మధ్యలో ఉండే సంఖ్య ఆనగా దత్తాంశంలో 4వ పదం = 8500

కాబట్టి మధ్యగత ఆదాయం = ₹ 8500

ఉదాహరణ 10 : 49, 48, 15, 20, 28, 17, 14, 110 ల మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన : పరిశీలనల ఆరోహణ క్రమం = 14, 15, 17, 20, 28, 48, 49, 110

మొత్తం పరిశీలనల సంఖ్య = 8

మధ్యలో ఉండే విలువలు అంటే దత్తాంశంలోని 4,5 పదాలు = 20,28

మధ్యగతం = 4,5 పదాల సగటు

$$\text{మధ్యగతం} = \frac{20+28}{2} = 24$$

కాబట్టి దత్తాంశ మధ్యగతం 24

అభ్యాసం - 3

1. సత్యమా? అసత్యమా? తెల్పండి.
 - (i) గరిష్ట, కనిష్ఠ రాశుల మధ్య భేదాన్ని ‘అంకగణిత మధ్యమం’ అంటారు.
 - (ii) కమీస్ చిత్రంలో అతి పెద్ద కమీస్ బాహుళకాన్ని కలిగి ఉండవచ్చు.
 - (iii) మధ్యగతాన్ని గణించేటప్పుడు దత్తాంశంలోని ప్రతి పరిశేలనా విలువను పరిగణన లోకి తీసుకుంటాం.
 - (iv) దత్త సంఖ్యలకు మధ్యగతమెప్పుడూ ఆ సంఖ్యల్లో ఏదో ఒకటి అవుతుంది.
2. ఒక గ్రామంలోని ఏడు కుటుంబాల నెలసరి ఆదాయం (రూపాయల్లో) 1200, 1500, 1400, 1000, 1000, 1600, 10000. (i) ఆ కుటుంబాల మధ్యగత ఆదాయాన్ని కనుక్కొండి. (ii) ₹ 1500 నెలసరి ఆదాయం ఉండే మరో కుటుంబాన్ని ఈ దత్తాంశంలో కలిపితే మధ్యగత ఆదాయం ఎంత ఉంటుంది?
3. ఒక దత్తాంశ పరిశేలనలు 16, 72, 0, 55, 65, 55, 10, 41. చైతన్య అనే విద్యార్థి ‘సున్న’ను పరిగణనలోకి తీసుకోకుండా బాహుళకాన్ని, మధ్యగతాన్ని కనుక్కొన్నాడు. అతను చేసినది స్వరూపం దేనా?
4. మూడు ధనపూర్క సంఖ్యల వేర్చేరు సముదాయాలను ఎన్ని తీసుకుంటే అంక మధ్యమం 6, మధ్యగతం 7 వచ్చి బాహుళకం లేకుండా ఉంటుంది?
5. 3, 4, 5, 5, 8 అనే ఒక పూర్క సంఖ్యల సముదాయానికి నాలుగు పూర్కసంఖ్యలను కలిపితే అంక మధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకం 1 చొప్పున పెరుగుతాయి. కొత్తగా చేర్చిన సముదాయంలో గరిష్ట పూర్క సంఖ్య ఎంత?

ఆడండి

- 1, 2, 3, 4, 5, 6 అంకెలు గుర్తించిన పాచిక (dice) ను తీసుకోండి. ముగ్గురు విద్యార్థుల్లో ఒక్కాక్కరిని పాచిక వేసి అంక గుర్తించమనండి. ఈ ప్రక్రియను 10 రోండ్ల వరకు కొనసాగించండి. ప్రతి విద్యార్థి 10 అంకెలు పొందుతాడు. ప్రతి విద్యార్థి పొందిన 10 అంకెలకు అంక మధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకాలను కనుక్కొండి.



7.6 సమాచార ప్రదర్శన

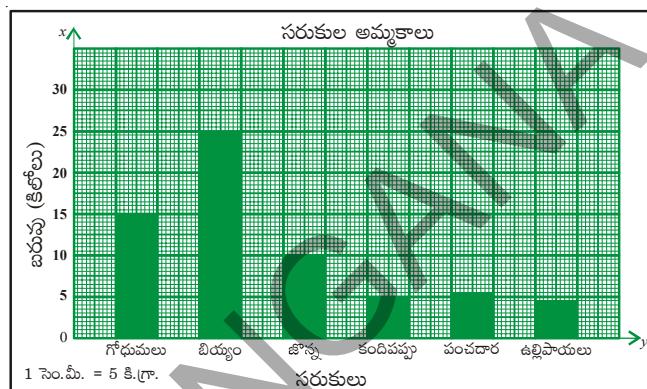
సమాచారాన్ని కమీస్ చిత్రంలోనూ, పటచిత్రం (pictograph) లోను సూచించడాన్ని ఆరో తరగతిలో నేర్చుకున్నాం. వస్తువుల చిత్రాలను ఉపయోగిస్తూ సమాచారాన్ని సూచించేవి పిక్టోగ్రాఫ్స్. అయితే పిక్టోగ్రాఫ్స్ ను ఉపయోగించడం వల్ల సమయం అధికంగా వినియోగించబడుతుంది. ఇది కష్టతరం కూడా. కమీస్ చిత్రాల్లో సమాచారాన్ని చూపడం సులభంగా ఉంటుంది.

7.6.1 కమ్మీ చిత్రం (బార్ గ్రాఫ్)

ఈ విభాగంలో కమ్మీ చిత్రాల గురించి మరికొంచెం ఎక్కువగా నేర్చుకొండాం. మధ్య దూరం సమానంగానూ, సమాన వెదల్పుతోనూ ఉన్న కమ్మీలతో కూడి ఉండేదే కమ్మీ చిత్రం. ప్రతి అంశం యొక్క పొనఃపున్యం ఎంత ఉందో దాని కమ్మీ పొదవు తెలుపుతుంది. స్నేహితులు బట్టి కమ్మీల పొదవులు మారుతాయి.

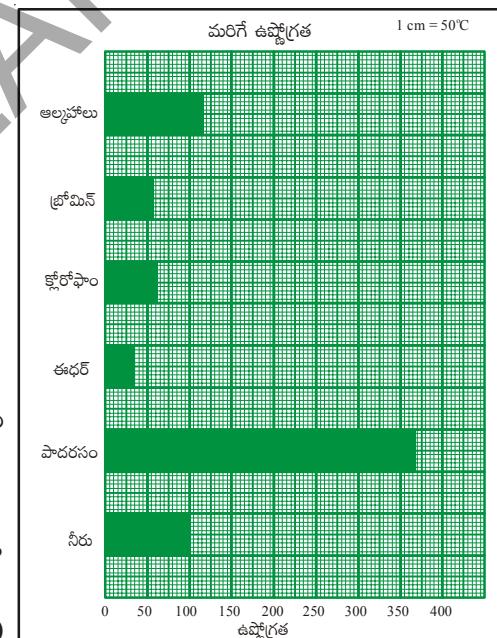
ఉదాహరణ 11 : ఒక దుకాణంలోని వివిధ వస్తువుల ఒకరోజు అమ్మకాలను ఈ కమ్మీ చిత్రం తెలియజేస్తుంది.

- x - అక్షం, y - అక్షం పై ఏ అంశాలను తీసుకొన్నాం?
- y- అక్షానికి ఎంపిక చేసిన స్నేహితులు ఏది?
- వీటిలో ఏ వస్తువు ఎక్కువగా అమ్మడయింది?
- ఎంత?
- ఉపాయాల అమ్మకం కందిపప్పు అమ్మకం కన్నా ఎక్కువగా ఉందా?
- జూన్లు, కందిపప్పుల అమ్మకాల నిప్పుత్తి ఎంత?



ఉదాహరణ 12 : మరో కమ్మీ చిత్రాన్ని పరిశీలించండి.

- ఈ గ్రాఫ్ ఏ వివరాలను తెలియజేస్తుంది?
- x- అక్షం, y- అక్షాలపై వేటిని తీసుకున్నారు?
- ఎక్కువ మరిగే ఉపోగ్రత ఉండే ద్రవ పదార్థం వీటిలో ఏది?
- ఇచ్చిన ద్రవ పదార్థాల్లో తక్కువ మరిగే ఉపోగ్రత ఉండే ద్రవం ఏది?
- పాదరసం, ఈధర్లల మరిగే ఉపోగ్రతల మధ్య నిప్పుత్తి ఎంత?

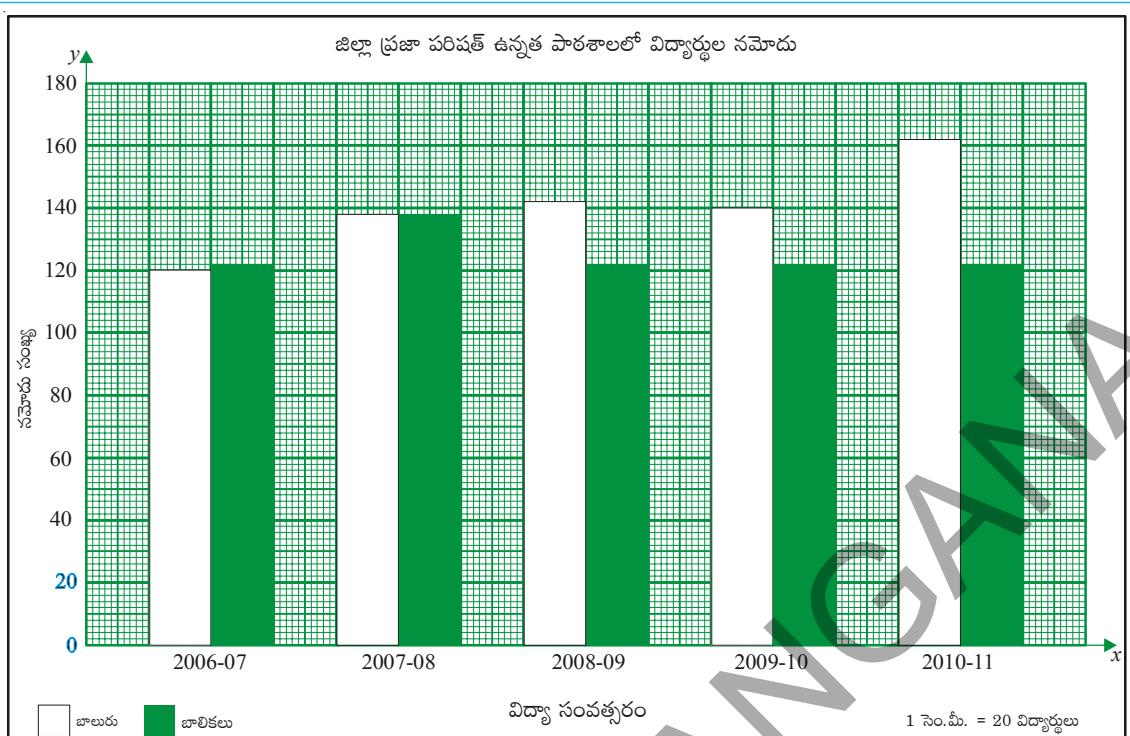


7.6.2 రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాలు (డబుల్ బార్ గ్రాఫ్)

ఇప్పుడు మరో రకం కమ్మీ చిత్రాల గురించి తెలుసుకుండాం.

ఉదాహరణ 13 : క్రింది కమ్మీ చిత్రాన్ని పరిశీలించండి. జిల్లా ప్రజా పరిషత్తు ఉన్నత పారశాలలో బాలురు, బాలికల నమోదు సంఖ్యను ఈ చిత్రం సూచిస్తుంది.

ప్రతి సంవత్సరంలోనూ రెండు కమ్మీలుండడాన్ని మీరు గమనించారా? మొదటి కమ్మీ ఏం తెలుపుతుంది? రెండో కమ్మీ ఏం తెలుపుతుంది? ఇలాంటి కమ్మీ చిత్రాన్ని రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం (Double bar graph) అంటాం. ఈ చిత్రం రెండు పరిశీలనల్లో వక్క పక్కనే సూచిస్తుంది.



- ఏ సంవత్సరంలో బాలుర సంఖ్య కంటే బాలికల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉంది?
- ఏ సంవత్సరంలో బాలురు, బాలికల సంఖ్య సమానంగా ఉంది?
- ఏ సంవత్సరంలో బాలికల సంఖ్య కనిష్ఠ స్థాయిలో ఉంది?
- 2007-08 సంవత్సరంలో మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

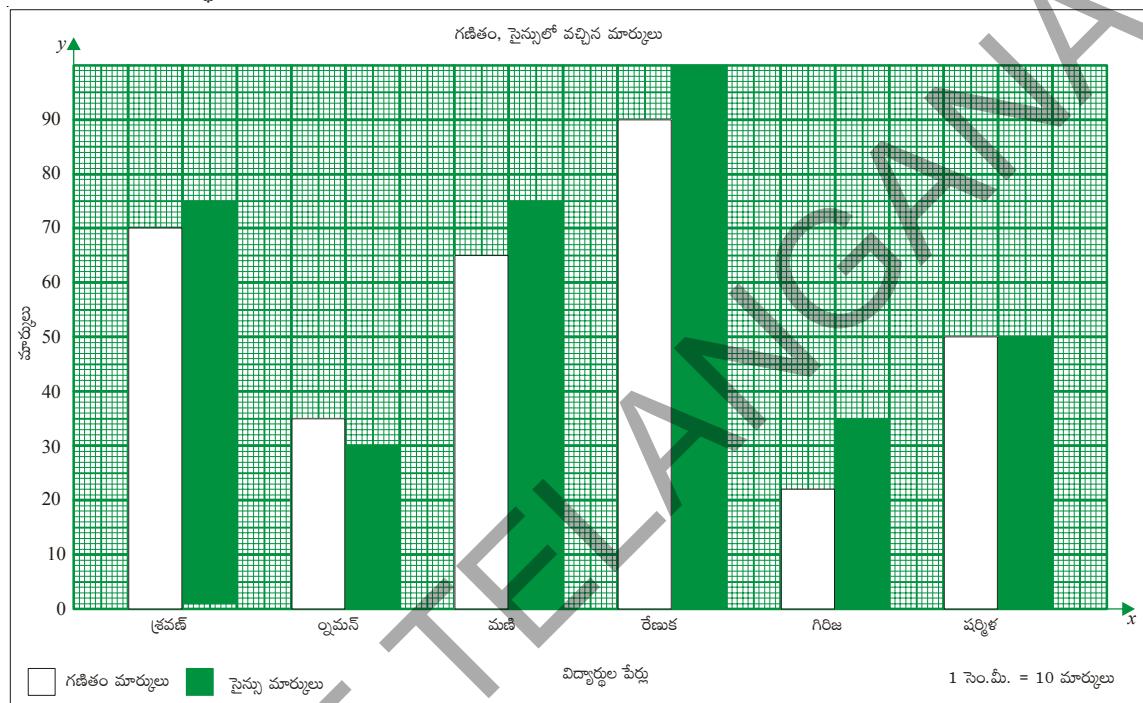
ఉధారణ 14 : ఎడ్జె తరగతిలో ఐదుగురు విద్యార్థుల మార్గుల వివరాలు క్రింది పట్టికలో ఉన్నాయి. ఈ సమాచారాన్ని రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం (double bar graph.) రూపంలో తెలపండి.

విద్యార్థి పేరు	గణితం	సామాన్యశాస్త్రం
శరవణ	70	75
రామన్	35	30
మజీ	65	75
రేణుక	90	100
గిరిజ	22	35
ఘర్మిల	50	50

సాధన : రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రం గీయడంలో సోపానాలు

- గ్రాఫ్ పేపర్ పై x - అక్షం (అడ్డగీత), y - అక్షం (నిలవ గీత) గీయండి. ఖండన బిందువును ‘O’ గా గుర్తించండి.
- x - అక్షం పై విద్యార్థుల పేర్లు తీసుకోండి.

- γ - అక్షం పై గణితం, సామాన్యశాస్త్రం లలో మార్గులు తీసుకోండి.
- రెండు పాల్యంశాలలోనూ గరిష్ట మార్గులు గ్రాఫ్ పేపర్ పై గుర్తించబడేలా సరైన స్నేలును γ - అక్షం పై తీసుకోండి.
 γ - అక్షం పై 100, అనే విలువ గరిష్టంగా ఉంటుంది. కాబట్టి 1 సెం.మీ = 10 మార్గులు అనే సూచిక భిన్నం సరైనది.
- మార్గులను 10 తో భాగించి కమీయ పొదవు నిర్ధారించండి. (సూచిక భిన్నం 1 సెం.మీ = 10 మార్గులు)
- ప్రతి విద్యార్థి గణితం మార్గులను, సామాన్యశాస్త్రం మార్గులను పక్క పక్కనే పేర్కునండి.

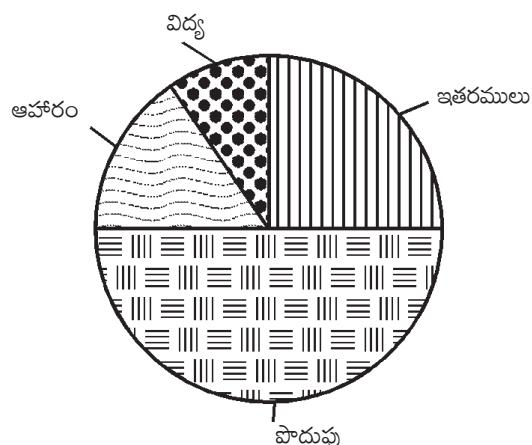


7.6.3 వృత్తరేఖా చిత్రాలు (పై చిత్రం)

సమాచారాన్ని సూచించే మరో పద్ధతి ‘వృత్తరేఖా చిత్రం’ (పై చిత్రం) ద్వారా సూచించడం

ఈ కుటుంబ సెలవారి బడ్జెట్ వివరాలు ఎడమ వైపు ఉన్న పట్టికలో ఉన్నాయి. కుడి వైపు ఈ సమాచారం పై చిత్రంలో ఉంది. మొత్తం ఆదాయంలో బడ్జెట్ ఏ అంశంలో ఎక్కువగా ఉంటే వృత్త రేఖా చిత్రంలో ఆ అంశం ఎక్కువ భాగం ఉంటుంది.

బడ్జెట్ పద్ధు	భర్మ (₹)
ఆహారం	1500
విద్య	750
జీతర భర్మలు	2250
పొదుపు	4500
మొత్తం	9000



పైన ఇచ్చిన పై చిత్రాన్ని పరిశీలించి, కింది ప్రశ్నలకు జవాబిష్యండి.

- పై చిత్రం ఏ ఆకారంలో ఉంటుంది?
- ఆహారం, విద్యా, పొదుపు, ఇతర ఖర్చులను పై చిత్రంలో ఏ ఆకారంలో సూచించడం జరిగింది?
- సత్యమో అనత్యమో తెలుపండి.
 - ఆదాయంలో అధికభాగం పొదుపు చేశారు.
 - విద్యపై అతి తక్కువ మొత్తాన్ని ఖర్చు చేశారు.

7.6.4 వృత్త రేఖా చిత్రాన్ని గీయడం

ఈ ‘వృత్తరేఖా చిత్రం’ నందు సమాచారం ఎలా సూచిస్తామో ఇప్పుడు నేర్చుకుండాం.

మొత్తం ఆదాయంలో ఖర్చులకు సంబంధించిన ఒక్క అంశం ఎంత భాగమో, వృత్తంలో అంతభాగం (సెక్టరు) ఆ అంశమును సూచిస్తుంది.

వృత్త కేంద్రం వద్ద మొత్తం కోణం 360° . అని మనకు తెలుసు. ఇది మొత్తం ఆదాయం $\text{₹} 9000$. ను సూచిస్తుంది.

ఖర్చులోని ప్రతి అంశం మొత్తం ఆదాయంలో ఒక భాగం. అందువల్ల ప్రతి అంశంలోని ఖర్చుకూ మొత్తం ఆదాయానికి మధ్య నిప్పుత్తిపై సెక్టరు కోణం లేదా సెక్టరు వైశాల్యం ఆధారపడి ఉంటుంది.

$$\text{అందువల్ల ప్రతి సెక్టరు కోణం} = \frac{\text{ఖర్చు}}{\text{మొత్తం ఆదాయం}} \times 360^{\circ}$$

సెక్టరు కోణాన్ని కనుక్కొనేందుకు కింది పట్టిక రూపొందించాలి

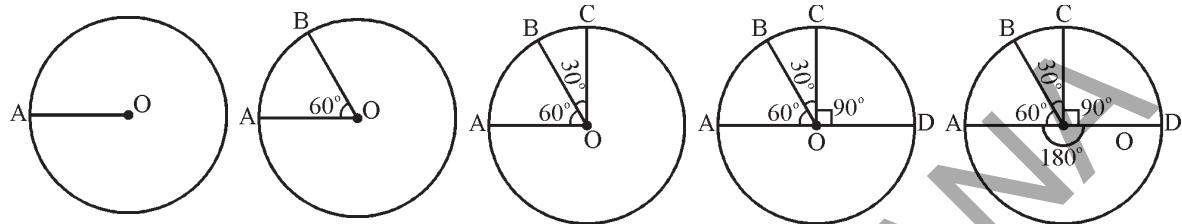
బడ్జెట్ పద్ధతి	ఖర్చు (రూపాయల్లో)	ఖర్చుకూ మొత్తం ఆదాయానికి మధ్య నిప్పుత్తి	సెక్టరు కోణం (లేదా) సెక్టరు వైశాల్యం
ఆహారం	1500	$\frac{1500}{9000} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^{\circ} = 60^{\circ}$
విద్య	750	$\frac{750}{9000} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} \times 360^{\circ} = 30^{\circ}$
ఇతర ఖర్చులు	2250	$\frac{2250}{9000} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360^{\circ} = 90^{\circ}$
పొదుపు	4500	$\frac{4500}{9000} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 360^{\circ} = 180^{\circ}$

నిర్మాణ సోపానాలు :

- ఏదేని ఒక వ్యాసార్థంతో వృత్తాన్ని గీచి, దాని కేంద్రాన్ని ‘O’ గా గుర్తించండి.
- వృత్త పరిధి పై ఏదైనా ఒక బిందువును ‘A’ గా గుర్తించండి. OAను కలపండి.
- ఆహారం సెక్టరు కోణం 60° ఉండేట్టు $\angle AOB = 60^{\circ}$ ని నిర్మించండి.

4. విద్య సెక్టరు కోణం 30° ఉండేట్లు $\angle BOC = 30^\circ$. ని నిర్మించండి.
5. ఇతర ఖర్చుల సెక్టరు కోణం 90° ఉండేట్లు $\angle COD = 90^\circ$. ని నిర్మించండి.
6. $\angle DOA = 180^\circ$ అనే సెక్టరు కోణం ‘పాదుపు’ను సూచిస్తుంది.

గమనిక : అన్ని సెక్టర్ల ల లోని కోణాల మొత్తం 360° అవుతుందేమో సరిచూడండి.



అభ్యాసం 4

1. కింది సమాచారానికి కమ్మీ చిత్రాన్ని గీయండి.

వివిధ సంవత్సరాల్లో భారతదేశ జనాభా –

సంవత్సరం	1941	1951	1961	1971	1981	1991	2001
జనాభా (మిలియన్లో) (సుమారుగా)	320	360	440	550	680	850	1000

ఆధారం : 1991, 2001 సంవత్సరాల భారతదేశ జనాభా సమాచారం

2. కింది సమాచారానికి పై చిత్రాన్ని గీయండి.

ఖర్చు వివరాలు	ఆహారం	ఆరోగ్యం	దుస్తులు	విద్య	పాదుపు
ఖర్చు మొత్తం (రూపాయల్లో)	3750	1875	1875	1200	7500

3. కింది సమాచారంతో రెండు వరుసల కమ్మీ చిత్రాన్ని (double bar graph) గీయండి.

1999 లో వివిధ రాష్ట్రాల జనన, మరణాల రేటు (సుమారుగా)

రాష్ట్రం	జననాల రేటు (ప్రతి 1000కి)	మరణాల రేటు (ప్రతి 1000 కి)
ఆంధ్రప్రదేశ్	22	8
కర్నాటక	22	8
తమిళనాడు	19	8
కేరళ	18	6
మహారాష్ట్ర	21	8
బరిస్సాన్	24	11

ఆధారం : ఎన్ ఆర్ ఎస్ 1999 గణాంకాలు

4. కింది సమాచారాన్ని ఉపయోగించి ‘పై-చిత్రం’ గీయండి.

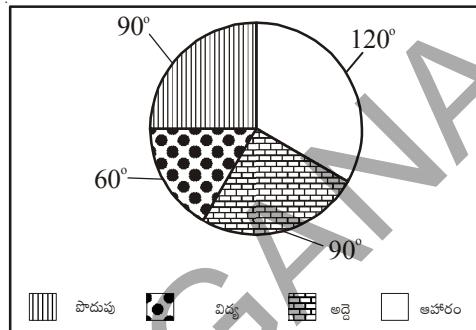
పిల్లల రోజువారీ కార్యకలాపాల కాలం

కార్యకలాపాలు	నిద్ర	పారశాల	అటలు	ఇతరులు
కాలం	8 గంటలు	6 గంటలు	2 గంటలు	8 గంటలు

5. ఒక కుటుంబం ఒక నెలలో చేసిన ఖర్చు వివరాలను ప్రక్కన ఉండే ‘పై-చిత్రం’ సూచిస్తుంది. (పై-చిత్రం చుట్టూ ఉండే సంఖ్యలు ఒక్క సెక్షను కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలను తెలుపుతాయి)

కింది ప్రశ్నలకు జవాబిష్యండి.

- ఆ కుటుంబం దేనిపై ఖర్చు తక్కువ పెడుతుంది?
- ఆ కుటుంబం దేనిపై ఎక్కువ ఖర్చు చేస్తోంది?
- కుటుంబ ఆదాయం ₹ 9000 అయితే, అదైకు పెట్టిన ఖర్చు ఎంత?
- ఆపోరానికి పెట్టిన ఖర్చు ₹ 3000, అయితే పిల్లల విద్యకు పెట్టిన ఖర్చు ఎంత?



ప్రాజెక్టు పని

- మీ వార్డు / కాలనీ / గ్రామంలో వివిధ రకాలకు చెందిన ఇళ్ళు ఎన్ని ఉన్నాయనే సమాచారం సేకరించండి. ఆ సమాచారానికి బాహుళకాన్ని కనుక్కొండి.
- మీ కుటుంబం ఒక నెలలో చేసే ఖర్చు వివరాలను సేకరించండి. ‘పై-చిత్రం’లో సూచించండి.
- మ్యాగజైన్సు, దినపత్రికలలో కమ్ము చిత్రాలు, పై చిత్రాల రూపంలో ఉన్న సమాచారాన్ని సేకరించండి. మీ పారశాల గోడపత్రికలో ప్రదర్శించండి.
- ఒక వారంలో మీ తరగతి రోజువారి హజరును సేకరించండి. వారం రోజుల సగటు హజరును కనుక్కొండి.



మనం నేర్చుకున్నవి

- ఒక దత్తాంశ సమితికి ప్రాతినిధ్య విలువలు అంక మధ్యమం, బాహుళకం, మధ్యగతం.
- ఒక దత్తాంశ సమితిలోని రాశుల మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యతో భాగస్తే వచ్చే ఫలితం అంకగణిత మధ్యమానికి సమానం. ఇది దత్తాంశ గరిష్ట కనిష్ఠ విలువల మధ్య ఉంటుంది.
- ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమయ్యే దత్తాంశ రాశిని ‘బాహుళకం’ అంటారు. ఒక దత్తాంశ సమితిలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ బాహుళకాలు ఉండవచ్చు, కొన్నిసార్లు బాహుళకం లేకపోవచ్చు.
- రాశులను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చితే
 1. రాశుల సంఖ్య బేసి సంఖ్య అయితే మధ్యగతం, ఆ రాశుల వరుస మధ్యలో ఉండే రాశి అవుతుంది.
 2. రాశుల సంఖ్య సరి సంఖ్య అయితే మధ్యలో ఉండే రెండు రాశుల సరాసరి మధ్యగతం అవుతుంది.
- వృత్తాన్ని సెక్ష్టర్లుగా విభజించి సమాచారాన్ని సూచించే చిత్రమే ‘పై’ చిత్రం.
- ‘పై’ చిత్రంలో ప్రతి సెక్ష్టరు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం (లేదా సెక్ష్టరు వైశాల్యం) అది సూచించే రాశికి అనుపాతంలో ఉంటుంది.

డా. సి.ఆర్. రావు (భారతదేశం)

1920 AD

ప్రముఖ సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు. ఈయన రచించిన “ధియరీ ఆఫ్ ఎస్టిమేషన్” అనే గ్రంథము (1945) ప్రాముఖ్యత పొందింది. ఈయన క్రామర్-రావు ఇనిక్వాలిటీ మరియు ఫిఫర్-రావు సిద్ధాంతాలను రూపొందించారు.



8.1 పరిచయం

మనం కొన్ని ఒక రూపాయి నాటీలను తీసుకొని ఒక నాటెముపై మరో నాటెమును పేర్చితే అవి ఒక దొంతరగా ఏర్పడతాయి. ఒక దానితో ఒకటి సరిగ్గా ఏకీభవిస్తాయి. దీనికి కారణం మీకు తెలుసా? అన్ని నాటెములు ఒకే ఆకార, పరిమాణాలను కలిగిఉన్నాయి. ఇలాగే ఒక నోట్సుకుంటో పేజీలన్నీ ఒకే ఆకారము, ఒకే పరిమాణము కలిగిఉంటాయి.

మీ చుట్టూఉన్న పరిసరాలలో వస్తువులను గమనించండి. వాటిలో ఒకే ఆకారం, ఒకే పరిమాణం కలిగిన వస్తువులను పరిశీలించి కనీసం 5 ఉదాహరణలను చెప్పండి.

ఒకే పరిమాణము, ఆకారము కలిగిన వస్తువులను “సర్వసమానములు” అంటారు. వస్తువుల సర్వసమానత్వమును ప్రయోగాత్మకముగా పరిశీలించాలంటే ఆ వస్తువుల అంచులతో ఏర్పడే పట్టాలను ఒకదానిపై మరొకటి ఉంచితే ఆ రెండు పట్టాలు ఖచ్చితముగా ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించాలి.

కృత్యము

అన్ని పది రూపాయల నోట్లు సర్వసమానాలేనా? ఎలా చెప్పగలవు



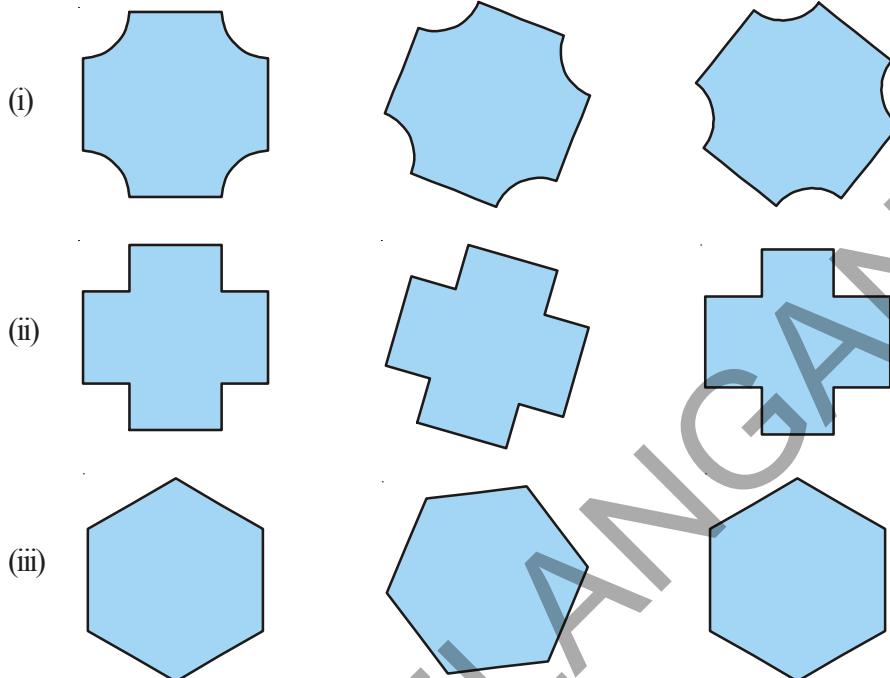
రెండు 5 రూపాయల నోట్లు, పరిశీలించండి సర్వసమానంగా ఉన్నాయా? మీ పరిశీలనలను రాయండి.



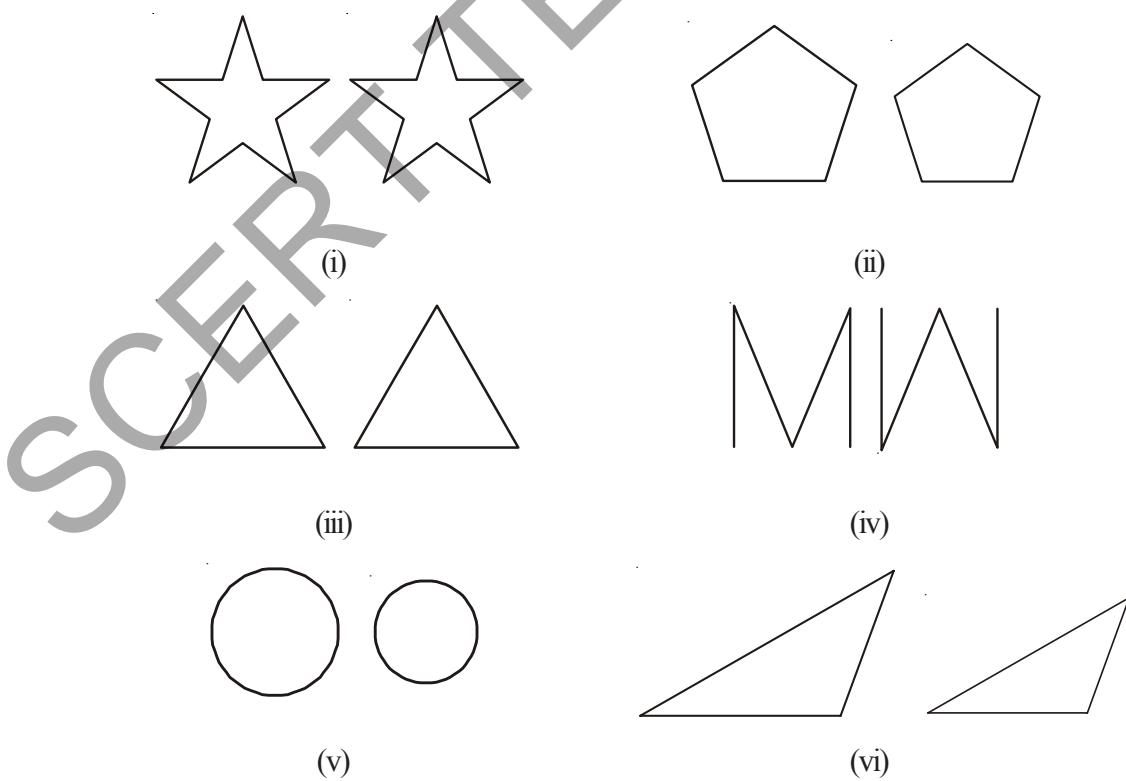
నిత్యము మనచుట్టూ ఉన్న పరిసరాలలో సర్వసమాన వస్తువులెన్నింటినో చూస్తూ ఉంటాం. ఇప్పడు సర్వసమానంగా ఉన్న మరి కొన్ని ఆకారములను గురించి ఆలోచించండి.

ఇవి చేయండి

1. ఇక్కడ కొన్ని ఆకారాలు ఉన్నాయి. ఒక వరుసలో ఉన్న పటములన్నీ సర్పసమానాలేనా?
వాటి నకలును తీసి సరిచాడండి.



2. ఈ కింది ఆకారాల జతలలో ఏది సర్పసమానములు?



8.1 రేఖా భండముల సర్వసమానత్వము

కింద ఇచ్చిన రేఖాభండముల జతలను పరిశీలించండి.



రేఖాభండము \overline{AB} ని పారదర్శక కాగితమును పయోగించి సకలు చేయాలి. రేఖాభండము \overline{CD} పై ఉంచాలి. మనము రెండు రేఖాభండములు ఏకీభవించినట్లు గమనించవచ్చు. బిందువు A, C తోనూ ; బిందువు B, D తోనూ ఏకీభవిస్తుంది. కాబట్టి రెండు రేఖాభండములు $\overline{AB}, \overline{CD}$ లు సర్వసమానములు అని చెప్పవచ్చు. దానిని మనము $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ గా రాయవచ్చు. (సర్వసమానమును \cong గుర్తుతో సూచిస్తారు)

అదే విధంగా పటము 2 తో కూడా చేయండి. మీరు ఏమి గమనించారు? ఆ రెండు రేఖా భండములు సర్వసమానములేనా?

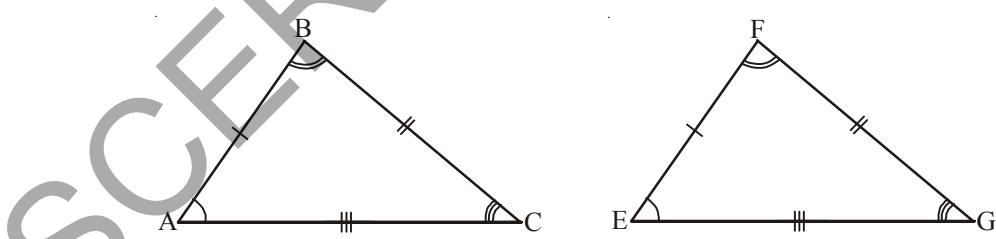
పటము 1 లో రెండు రేఖాభండములు ఏకీభవించాయి. దీనికి గల కారణము $\overline{AB}, \overline{CD}$ లు ఒకే పొడవును కల్గియున్నాయి కానీ పటము 2 లో రెండు రేఖాభండములు విభిన్న పొడవులను కలిగి ఉన్నాయి.

రేఖాభండము 'పొడవు' అనే ఒకే కొలతను కల్గియంటుంది. అందుచే రెండు రేఖాభండములు ఒకే పొడవును కల్గి యున్నచో ఆ రేఖాభండములు సర్వసమానములు. మరో విధంగా చెప్పాలి అంటే

సర్వసమాన రేఖాభండముల పొడవులు సమానము.

8.2 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వము

రెండు రేఖాభండముల పొడవులు సమానమైనప్పుడు, అవి సర్వసమానములని సేర్చుకున్నారు కదా! ఈ భావనను త్రిభుజములకు వర్తింపచేధాం. రెండు త్రిభుజాలను ఒక దానిపై మరొకటిని ఉంచితే రెండు త్రిభుజాలు ఏకీభవిస్తే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.



$\Delta ABC, \Delta EFG$ లు వ్యాఖ్యాగా ఏకీభవిస్తే, ఆరెండు త్రిభుజాలు ఒకే ఆకారము, పరిమాణము కల్గి ఉంటాయి. వీటిని సర్వసమాన త్రిభుజాలు అంటారు. వీటిని $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ గా ప్రాయివచ్చు.

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అయితే సదృశ భుజాలు, సదృశ కోణాలు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు. ΔABC ను ΔEFG పై ఉంచితే A, E ; B , F ; C, G శీర్షాలు ఏకీభవిస్తాయి. $\overline{AB}, \overline{EF}; \overline{BC}, \overline{FG}; \overline{AC}, \overline{EG}$; భుజాలు ఏకీభవిస్తాయి. $\angle A, \angle E; \angle B, \angle F; \angle C, \angle G$ లు ఏకీభవిస్తాయి.

అనగా రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అయితే వాటి యొక్క సదృశ భాగాలు సమానము.

సదృశ కోణములు, సదృశ భుజాలు సమానము.

ΔABC మరియు ΔEFG లలో

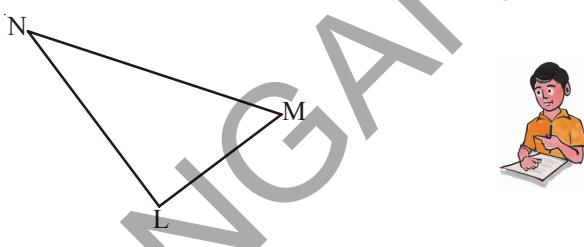
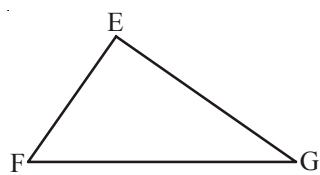
$$\angle A = \angle E \quad \angle B = \angle F \quad \angle C = \angle G \quad (\text{సదృశ కోణాలు})$$

$$\overline{AB} = \overline{EF} \quad \overline{BC} = \overline{FG} \quad \overline{AC} = \overline{EG} \quad (\text{సదృశ భుజాలు})$$

సర్వసమాన త్రిభుజాలను సూచించే అక్షర క్రమము సదృశ భాగాల మధ్య సంబంధమును తెలియజేస్తుంది.

జవి చేయండి

1. $\Delta EFG \cong \Delta LMN$

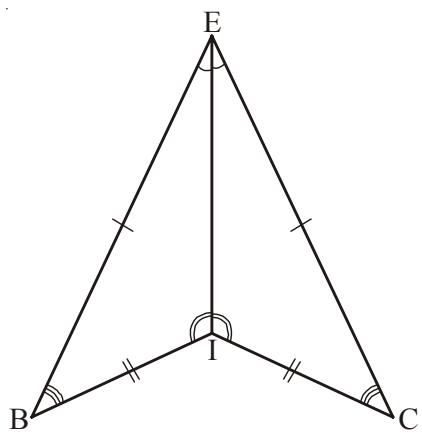
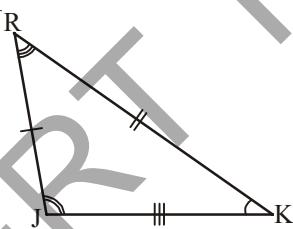


రెండు త్రిభుజాల యొక్క సదృశ భుజాలు, సదృశ కోణాలు, సదృశ శీర్షాలను రాయండి?

2. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అయితే ΔDEF లోని కింది భాగాలు ΔABC లో వేటితో సమానమవుతాయి?

- (i) DE
- (ii) $\angle E$
- (iii) DF
- (iv) EF
- (v) $\angle F$

3. సర్వసమానమైన త్రిభుజాల పేర్లను రాయండి. వాటిని సర్వ సమానత్వపు గుర్తు ‘ \cong ’ తో సూచించండి.



4. ఈ కింది ఇవ్వబడిన సర్వసమాన త్రిభుజాల యొక్క సదృశకోణాలను, సదృశ భుజాలను కనుగొని రాయండి?

1. $\Delta TUV \cong \Delta XYZ$

2. $\Delta CDG \cong \Delta RSW$

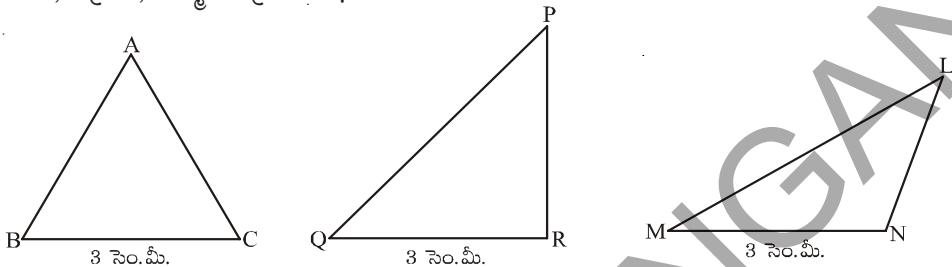
8.3 త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు నియమాలు

రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలో కాదో నిర్ధారించడానికి ఆ రెండింటిలోని సమానత్వాలను పరిశీలించడం అవసరం మన దగ్గర ఉండే స్నేలు, వృత్తలేఖిని వంటి పరికరాలతో త్రిభుజాల సర్వసమానత్వాన్ని పరిశీలించగలమా? ప్రయత్నించాం.

8.3.1 భుజము - భుజము - భుజము సర్వసమానత (భు.భు.భు. నియమం)

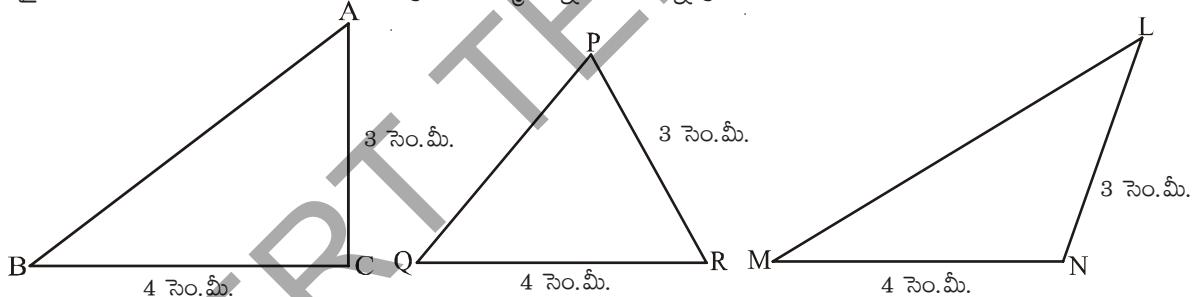
ఒక భుజము కొలత 3 సెం.మీ. గల త్రిభుజమును మీరందరూ ఒకేలా గీయగలరా?

కమల్, నామత, సుష్మ ఈ క్రింది విధముగా గీచారు.

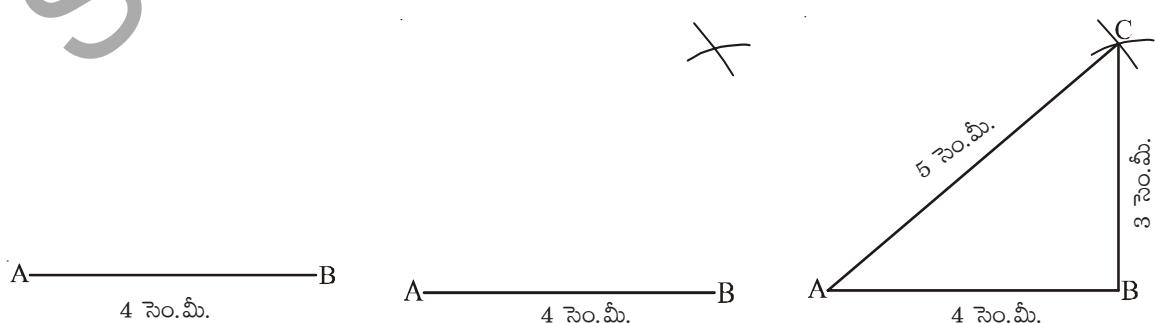


గమనించండి ముగ్గురు గీచిన త్రిభుజాలు విభిన్నంగా ఉన్నాయి కదా! కమల్ 3 సెం.మీ. కొలతగల సమభాషు త్రిభుజమును గీస్తే, నామత లంబకోణ త్రిభుజాన్ని, సుష్మ అధిక కోణ త్రిభుజాన్ని గీశారు.

ఉడాహరణకు త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాల కొలతలు 3సెం.మీ. మరియు 4సెం.మీ. వాటితో గేసే త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఉంటాయా? మరలా కమల్, నామత, సుష్మ భిన్నముగా ఉన్న త్రిభుజాలను గీశారు. పరిశీలించండి.



మనకు త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల కొలతలు తెలిస్తే గీయగలమా? ఇది ఎలావుంటుంది? కమల్, నామత, సుష్మ ముగ్గురూ గేసిన త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఉంటాయా? త్రిభుజము యొక్క భుజాల కొలతలు వరుసగా 4సెం.మీ., 3 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. అనుకుంటే ఆ త్రిభుజాన్ని ఎవరు గేసినా ఒకే విధంగా ఉంటుంది.



ABC త్రిభుజమునకు సర్వసమానము అయిన మరోత్రిభుజమును గీయాలి అంటే మనకు ABC త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజాల కొలతలు ఆవసరము. దీనిని మనము త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు భుజము. భుజము. భుజము. నియమము అంటారు.

భుజము - భుజము - భుజము సర్వసమానత్వ నియమము : “రెండు త్రిభుజాలలో మొదటి త్రిభుజములోని మూడు భుజాలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాలకు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము”

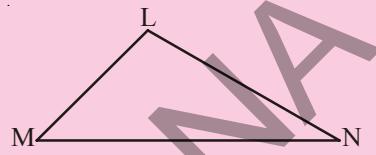


ప్రయుచ్చించండి.

$\triangle LMN$ యొక్క భుజాల కొలతలను కొలవండి. ఒక కాగితముపై

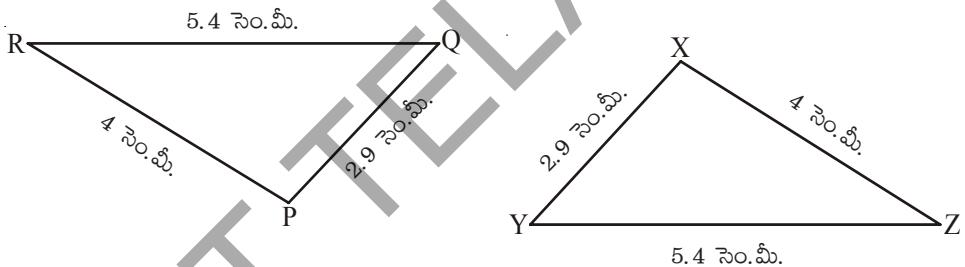
ఆ కొలతలతో త్రిభుజమును నిర్మించండి. ఈ త్రిభుజమును

$\triangle LMN$ పై ఉంచండి. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమేనా? ఈ సందర్భములో త్రిభుజాల సర్వసమానత్వమునకు ఏ నియమాన్ని ఉపయోగించాము?



రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాల యొక్క సదృశ భుజాల కొలతలు సమానం అయినపుడు సదృశ కోణాల కొలతలు కూడా సమానము అవుతాయా? పరిశీలించండి.

ఉధారణ 1 : $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ న్యామేనా? రెండు త్రిభుజాల యొక్క సదృశ కోణాలను గుర్తించండి.



సాధన :

ఇచ్చిన $\triangle PQR, \triangle XYZ$ త్రిభుజాల నుండి

$$PQ = XY = 2.9 \text{ సెం.మీ.}$$

$$QR = YZ = 5.4 \text{ సెం.మీ.}$$

$$RP = ZX = 4 \text{ సెం.మీ.}$$

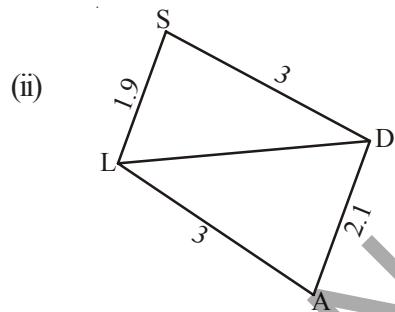
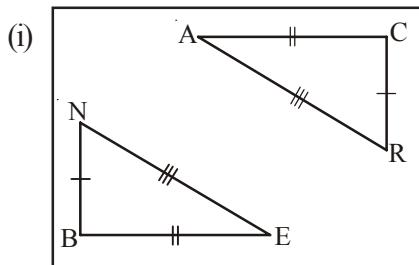
అందుచే భుజము-భుజము-భుజము సర్వసమానత ఆధారముగా $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$

P యొక్క సదృశ శీర్షము X, Q యొక్క సదృశ శీర్షము Y, R యొక్క సదృశ శీర్షము Z.

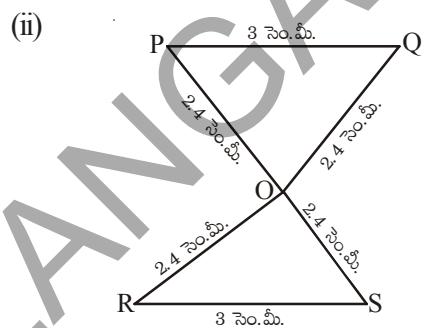
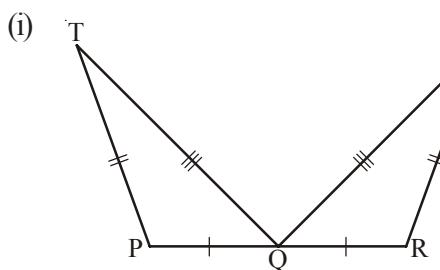


అభ్యాసం - 1

1. ఈ కింది ఇవ్వబడిన త్రిభుజాలు భుజము-భుజము-భుజము సర్వసమానత ఆధారముగా సర్వసమానమేనా? కారణములు చెప్పండి.

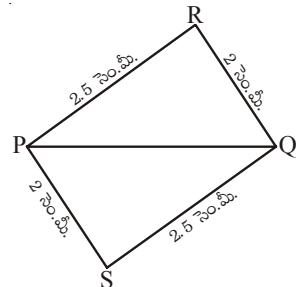


2. ఈ కింది ఇవ్వబడిన సర్వసమాన త్రిభుజాలలో సదృశ కోణాలను తెలుపండి.

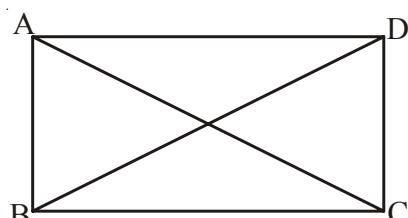


3. క్రింది వానిలో ఏది సరైనది? ఎందుకు?

- (i) $\Delta PQR \cong \Delta PQS$
- (ii) $\Delta PQR \cong \Delta QPS$
- (iii) $\Delta PQR \cong \Delta SQP$
- (iv) $\Delta PQR \cong \Delta SPQ$



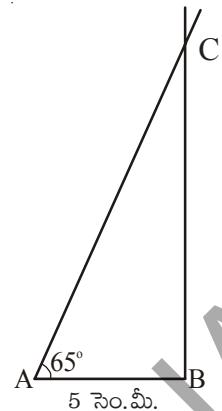
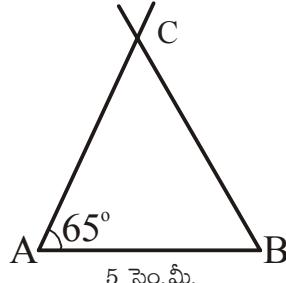
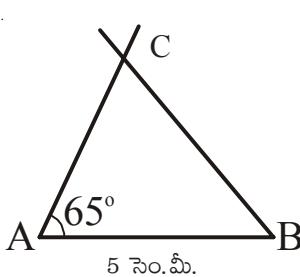
4. ఈ కింది ఇవ్వబడిన పటములో $AB = DC$ మరియు $AC = DB$ అయితే $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ అవుతుందా?



8.3.2 భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత (భు.కో.భు. నియమం)

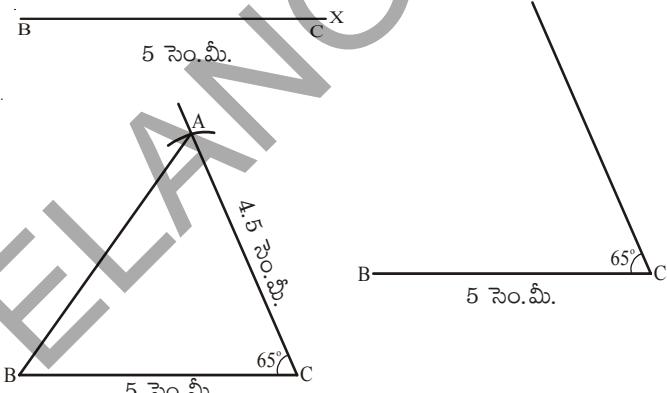
త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజము కొలత ఇస్తే ఒకే రకమైన త్రిభుజాలు సాధ్యం కాదు అని నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు త్రిభుజము యొక్క ఒక కోణము కొలత, భుజము కొలతలన్నే గీయగల త్రిభుజాలు ఏకైకమో కాదో తెలుసుకొందాం.

- 5 సెం.మీ., 65° కోణము కొలతలనిస్తే గీసిన త్రిభుజాలను ఈ కింది విధముగా గీశారు.



ఇప్పుడు ఇవి వేరువేరుగా ఉన్నాయి కదా! త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాల కొలతలు, వాటి ఉమ్మడి కోణాన్ని ఇస్తే గియగల త్రిభుజాలు ఏకైకమో కాదో చూడ్దాం. వారు 5 సెం.మీ., 4.5 సెం.మీ. కొలతలుగా రెండు భుజములు, వాటి మధ్యకోణము 65° గా తీసుకొని త్రిభుజమును నిర్మించారు. కమల్ ఎలా నిర్మించాడో చూడ్దాం.

కమల్ 5 సెం.మీ. కొలత గల రేఖాఖండమును స్నేలు సహాయతో నిర్మించి BC గా పేరు పెట్టాడు. కోణమానిని ఉపయోగించి C వద్ద 65° కోణమును నిర్మించాడు. C ను కేంద్రముగా చేసుకొని 4.5 సెం.మీ. కొలత వ్యాసార్థముగా వృత్తలేఖిని సహాయంతో ఒక చాపమును గీశాడు. ఖండిత బిందువుకు A గా పేరు పెట్టాడు. A, B లను కలిపి $\triangle ABC$ త్రిభుజమును నిర్మించాడు.



$AB = 5$ సెం.మీ. $BC = 4.5$ సెం.మీ. గా తీసుకొని B బిందువు వద్ద 65° కోణముతో త్రిభుజమును నిర్మించగలమా? ఈ త్రిభుజము కమల్ గీచిన త్రిభుజముతో సర్వసమానత్వమును కలిగి ఉంటుందా? ఇలాంటి సందర్భములో ఏర్పడిన త్రిభుజములు సర్వసమానములుగా గుర్తించవచ్చు.

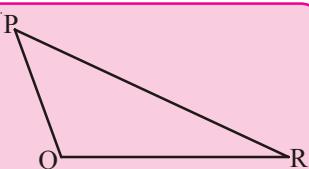
$\triangle ABC$ త్రిభుజమునకు సర్వసమానమైన త్రిభుజాన్ని గీయాలంటే రెండు భుజాల కొలతలు, వాటి మధ్య కోణము తెలిసియుండాలి దీనిని భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమము అందురు.

భుజము-కోణం-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం : (భు.కో.భు. నియమం) “రెండు త్రిభుజాలలో మొదటి త్రిభుజములోని రెండు భుజాలు, వాటి మధ్యకోణము రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాలు, వాటి మధ్యకోణమునకు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.”

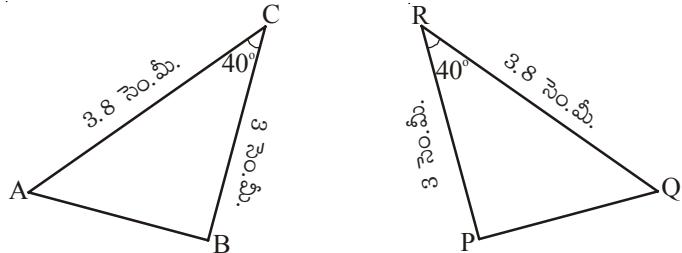


ప్రయత్నించండి.

$\triangle PQR$ లో భుజాలు PQ , QR మరియు $\angle Q$ ను కొలవండి. ఒక కాగితముపై ఈ కొలతలతో త్రిభుజమును గీయండి. ఈ త్రిభుజమును $\triangle PQR$ పై ఉంచండి. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమేనా? ఏ నియమము ఆధారముగా రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు?



ఉదాహరణ 2 : ఈ కింద ఇవ్వబడిన త్రిభుజముల యొక్క కొలతలను వరిశీలించండి. ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములేనా? వాటియొక్క సదృశ శీర్షాలు, సదృశ కోణాలు తెలపండి.



సాధన : $\Delta ABC, \Delta PQR$ త్రిభుజములలో

$$AC = QR, BC = PR \text{ మరియు ఉమ్మడి కోణము } \angle C = \angle R$$

అందుచే $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (భ.కో.భ. సర్వసమానతా నియమం)

రెండు త్రిభుజాలలోని సదృశ శీర్షాలు $A \leftrightarrow Q, B \leftrightarrow P, C \leftrightarrow R$

$$\text{సదృశ కోణాలు } \angle A = \angle Q, \quad \angle B = \angle P \quad \text{మరియు } \angle C = \angle R$$

ఉదాహరణ 3 : ΔPQR త్రిభుజములో $PQ = PR$ మరియు $\angle P$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ PS.

ΔPQS మరియు ΔPRS లు సర్వసమానములేనా? అయితే కారణములు తెలపండి.

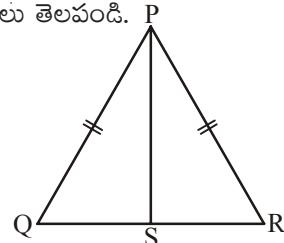
సాధన : ΔPQS మరియు ΔPRS లలో

$$PQ = PR \text{ (రత్సంశము) (భుజం)}$$

$$PS = PS \text{ (ఉమ్మడి భుజము) (భుజం)}$$

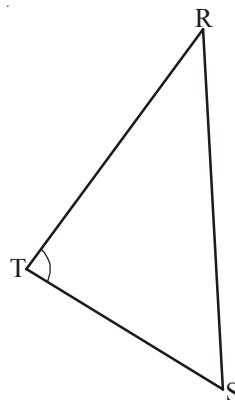
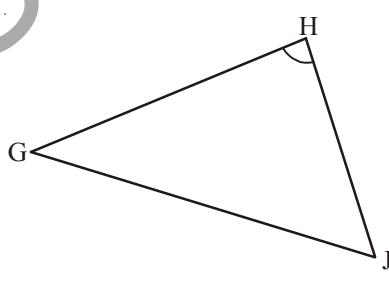
$$\angle QPS = \angle RPS \text{ (PS, } \angle P \text{ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ) (కోణము)}$$

అందుచే $\Delta PQS \cong \Delta PRS$ (భ.కో.భ. సర్వసమానత్వ నియమం)

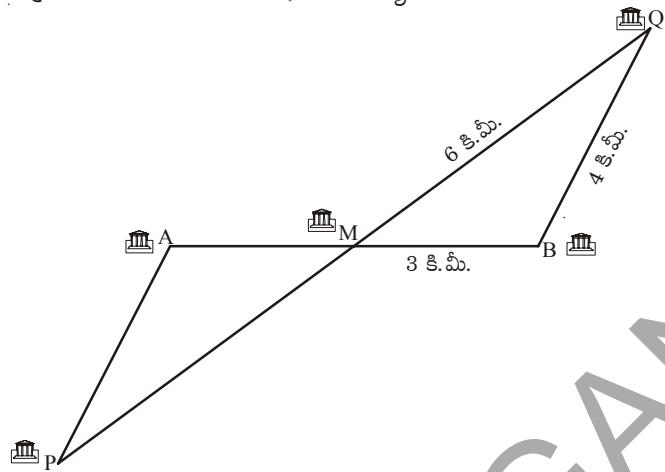


అభ్యాసం - 2

- ఈ కింద ఇవ్వబడిన త్రిభుజము భ.కో.భ. నియమము ఆధారముగా సర్వసమానము అని చూపుటకు కావలసిన అదనపు సమాచారమును తెలపండి.

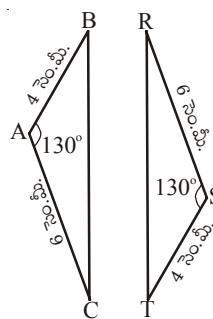


2. A, B అను గ్రామాలను కలిపే రేఖా ఖండానికి మరియు P, Q అను గ్రామాలను కలిపే రేఖా ఖండానికి మధ్య బిందువు వద్ద M అనే గ్రామం ఉంది. అయిన A, P ల మధ్య దూరం ఎంత?

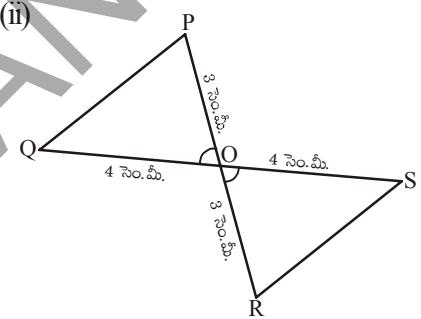


3. ఇక్కడ కొన్ని త్రిభుజాల జతలు ఇవ్వబడ్డాయి. అవి సర్వసమానములేనా? సర్వసమానములు అయితే సదృశ భాగాల పేర్లు రాయండి.

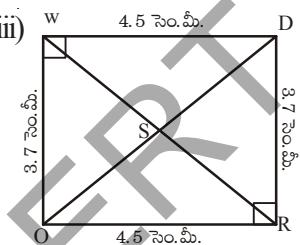
(i)



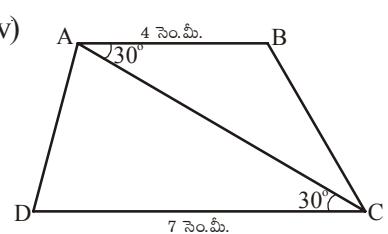
(ii)



(iii)

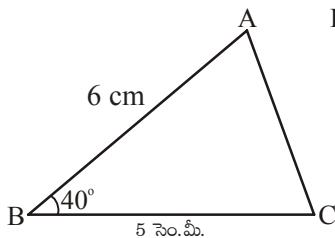


(iv)

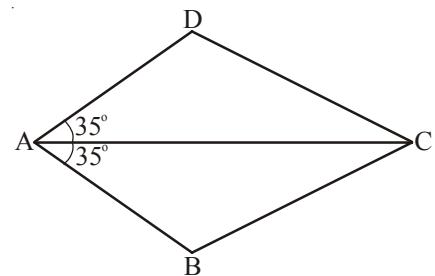
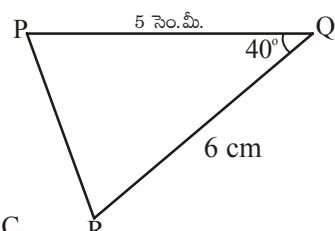


4. భు.కో.భు. నియమము ద్వారా ఇచ్చిన త్రిభుజాలు సర్వసమానము అని చూపుటకు ఏ భుజాలను సదృశ భుజాలుగా తీసుకోవాలి.

(i)



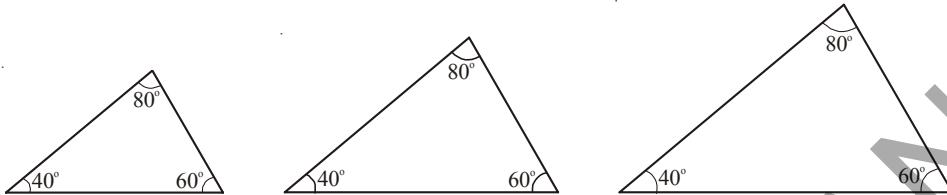
(ii)



8.3.3 కోణము-భుజము-కోణము సర్వసమానత (కో.భు.కో. నియమం)

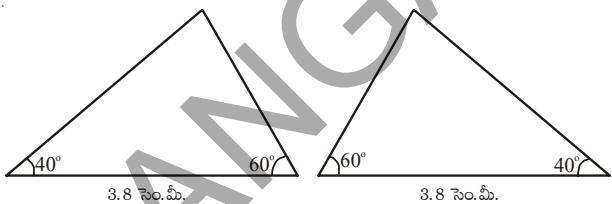
విద్యార్థులు! మీరు త్రిభుజములోని ఒక కోణము కొలతనిస్తే త్రిభుజమును నిర్మించగలరా? రెండు కోణముల కొలతలు తెలిసిన సందర్భములోనైనా త్రిభుజము నిర్మించగలరా? త్రిభుజము యొక్క మూడు కోణముల కొలతలు తెలిస్తే సర్వసమాన త్రిభుజములను నిర్మించగలరా?

కమల్, సప్తమ మరియు సుషులు 40° , 60° మరియు 80° కొలతలుగా గల త్రిభుజాలను ఇలా గేసారు.



ఇచ్చట త్రిభుజముల యొక్క కోణముల కొలతలు సమానము కాని భుజముల కొలతలు సమానము కాదు. అందుచే త్రిభుజములు సర్వసమానములు కావు.

అందుచే సర్వసమాన త్రిభుజములు నిర్మించడానికి త్రిభుజ భుజాల కొలతలు అవసరము. మనకు త్రిభుజము యొక్క రెండు కోణముల కొలతలు, ఒక భుజము కొలత తెలిస్తే సర్వసమాన త్రిభుజాలను నిర్మించగలమా?



కమల్ మరియు సప్తమ శుజము కొలత 3.8 సం.మీ. గా గల త్రిభుజములను గేశారు. కమల్ మరియు సప్తమ త్రిభుజములను నిర్మించినపుడు భుజమును 60° , 40° లకు ఉమ్మడి భుజముగా తీసుకొని నిర్మించారు.

అందుచేత మనము రెండు కోణముల కొలతలు, ఒక భుజము కొలత తెలిసినపుడు సర్వసమాన త్రిభుజాలను నిర్మించగలం అంటే రెండు కోణముల కొలతలు, ఆ కోణముల యొక్క ఉమ్మడి భుజము కొలత అవసరము.

దీనిని మనము కోణము భుజము కోణము సర్వసమానత్వ నియమము అంటాం

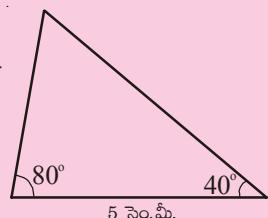
కోణము-భుజము-కోణము సర్వసమానత్వ నియమం : (కో.భు.కో. నియమం) రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు కోణములు వాటి ఉమ్మడి భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ కోణములు, మరియు సదృశ భుజమునకు సమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.

దీనిని కోణము - భుజము - కోణము సర్వసమానత్వ నియమం అంటారు.



ప్రయుషించండి.

ఉపాధ్యాయుడు 60° , 40° మరియు 5 సం.మీ. కొలతలుగా గల త్రిభుజాన్ని నిర్మించమని విద్యార్థులను కోరాడు. త్రిభుజంలో మూడు కోణాల మొత్తం 180° కావున మూడవ కోణం 80° గా సుపు లెక్కించింది. తరగతిలో కమల్, సుషు, సప్తమ త్రిభుజాలను విభిన్నంగా దిగువ కొలతలతో గేచారు.



కమల్ : 60° , 40° మరియు 5 సం.మీ. (ఉపాధ్యాయుడు ఇచ్చిన కొలతలు)

సుపు : 80° , 40° మరియు 5 సం.మీ.

సప్తమ : 60° , 80° మరియు 5 సం.మీ.

ఈ మూడు త్రిభుజాలను కత్తిరించి ఒక దానిపై మరొకటి పెట్టి సరిపోల్చారు. ఇవి సర్వసమానాలగునా? మార్గా ప్రయుషించండి.

ఉదా 4 : త్రిభుజములు $\triangle CAB$ మరియు $\triangle RPQ$ ఇవ్వబడ్డాయి. ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా? పరిశీలించండి.

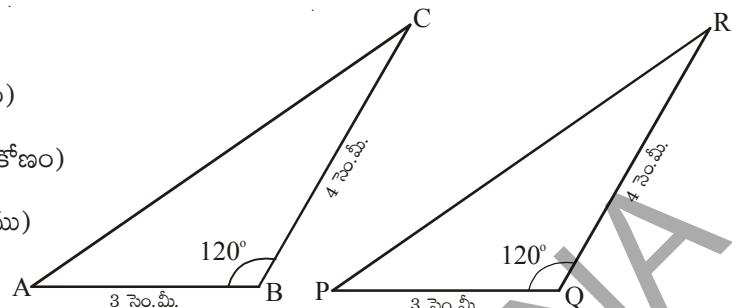
సర్వసమానములు అయితే మిగిలిన త్రిభుజ భాగాల యొక్క కొలతలను గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలగుతారు?

సాధన : $\triangle CAB, \triangle RPQ$ లలో

$$BC = QR = 4 \text{ సెం.మీ.} \quad (\text{భుజం})$$

$$\angle B = \angle Q = 120^\circ \quad (\text{ఉమ్మడి కోణం})$$

$$AB = PQ = 3 \text{ సెం.మీ.} \quad (\text{భుజము})$$



$$\triangle CAB \cong \triangle RPQ \quad (\text{భ.కో.భ. సర్వసమానత నియమం ప్రకారం})$$

అందుచే రెండు త్రిభుజాలలో

$$AC = PR$$

$$\angle C = \angle R \quad \angle A = \angle P \text{ అని కూడా చెప్పవచ్చు.}$$

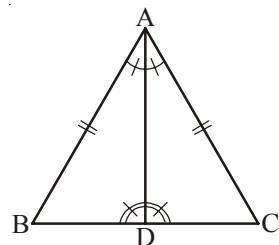
ఉదాహరణ 5 : ప్రక్క పటములో ఇవ్వబడిన రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా. సమాన భాగాలు సూచించబడినవి.

సాధన : $\triangle ABD, \triangle ACD$ త్రిభుజాలలో

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\text{దత్తాంశము}) \text{ కోణము}$$

$$\angle ADB = \angle ADC \quad (\text{దత్తాంశము}) \text{ కోణము}$$

$$AD = AD \quad (\text{ఉమ్మడి భుజము}) \text{ భుజము}$$

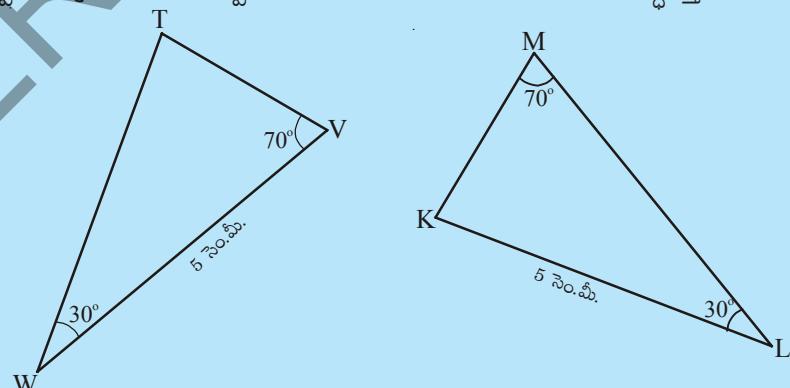


$$\triangle ABD \cong \triangle ACD \quad (\text{కో.భ.కో. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం})$$



ప్రయత్నించండి.

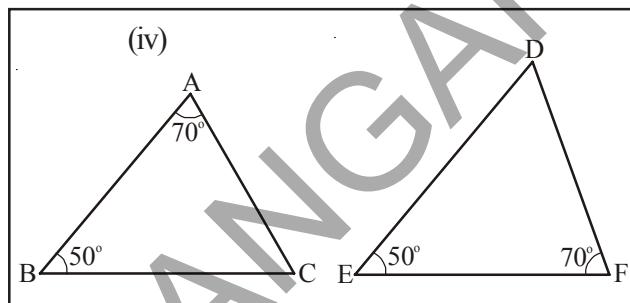
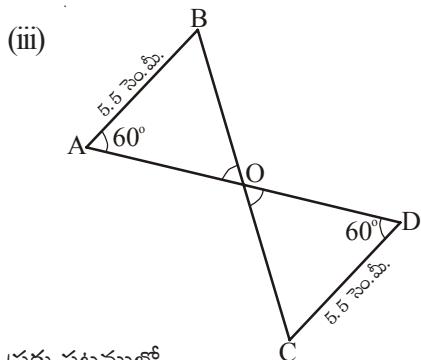
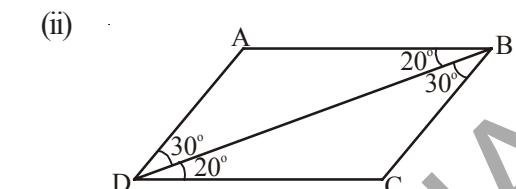
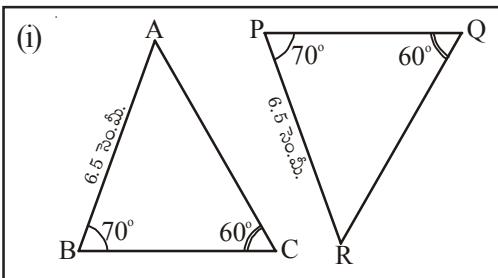
ఇచ్చట ఇవ్వబడిన త్రిభుజములు సర్వసమానములేనా? మీ సమాధానమును సమర్థిస్తూ కారణములు తెలుపండి.





అభ్యాసం - 3

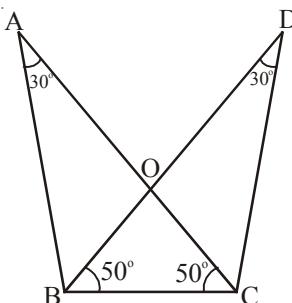
1. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన త్రిభుజాల జతలలో ఏ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు? సర్వసమానత్వమునకు కారణమైన నియమమును తెలుపుము.



2. ప్రక్క పటములో

- (i) $\triangle ABC$ మరియు $\triangle DCB$ సర్వసమానములేనా?
- (ii) $\triangle AOB$, $\triangle DOC$ త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా?

సదృశ్య భుజాలను గుర్తించండి. సర్వసమానత్వమును తెలుపుటకు కావలసిన నియమము పేరు తెలుపుము.



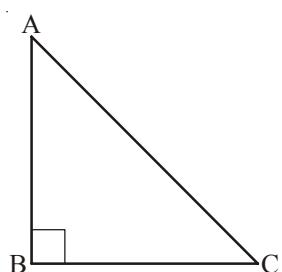
8.3.4 లంబకోణము - కర్ణము - భుజము సర్వసమానత

(లం.క.భు నియమం)

లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒక కోణము లంబకోణము. అందుచే లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు అని చెప్పాడానికి మనకు కావలసిన అంశాలను పరిశీలిద్దాం.

ఒక ఉండావరణము పరిశీలిద్దాం. $\triangle ABC$ త్రిభుజములో $\angle B = 90^\circ$ మనము త్రిభుజమును ఏ సందర్భములో గీయగలము?

- (i) కేవలము BC కొలత తెలిసినపుడు
- (ii) కేవలము $\angle C$ తెలిసినపుడు
- (iii) $\angle A$ మరియు $\angle C$ కొలత తెలిసినపుడు
- (iv) AB మరియు BC కొలతలు తెలిసినపుడు
- (v) $\angle C$ మరియు BC కొలతలు తెలిసినపుడు.



- (vi) BC మరియు కర్ణము AC కొలతలు తెలిసినపుడు.
- (vii) AB మరియు కర్ణము AC కొలతలు తెలిసినపుడు మనము త్రిభుజాలను గీయడానికి ప్రయత్నిస్తే (iv) (v)
- (vi) మరియు (vii) సందర్భాలలో గీసే త్రిభుజాలు ఏకైకంగా ఉంటాయి.
- (vi) మరియు (vi) సందర్భాలు లంబకోణము - కర్ణము - భుజము సర్వసమానత్వ నియమమును ఇస్తాయి.

లంబకోణము - కర్ణము - భుజము సర్వసమానత్వ నియమము (లం.క.భ. నియమము)

“రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానము కావడానికి ఒక త్రిభుజములోని కర్ణము భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని కర్ణము, సదృశ భుజము నకు సమానము కావాలి.

ఉధారణ 6 : కింద రెండు త్రిభుజముల యొక్క భాగాల కొలతల ఇవ్వబడినవి. ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానములేనా? లం.క.భ. నియమము ఆధారముగా సర్వసమానమేనా? సర్వసమానములు అయితే వాటిని గుర్తులతో సూచించుము.

ΔABC

(i) $\angle B = 90^\circ$, $AC = 8$ సెం.మీ,

$AB = 3$ సెం.మీ

(ii) $\angle A = 90^\circ$, $AC = 5$ సెం.మీ,

$BC = 9$ సెం.మీ

ΔPQR

$\angle P = 90^\circ$, $PR = 3$ సెం.మీ,

$QR = 8$ సెం.మీ

$\angle Q = 90^\circ$, $PR = 8$ సెం.మీ,

$PQ = 5$ సెం.మీ

సాధన :

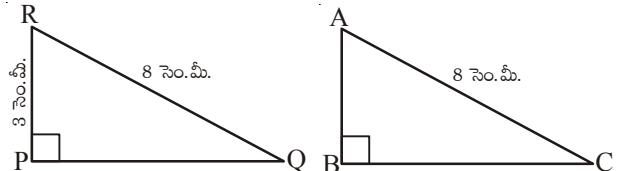
(i) ఇకక్కడ $\angle B = \angle P = 90^\circ$

కర్ణము $AC =$ కర్ణము RQ (8 సెం.మీ)

భుజము $AB =$ భుజము RP (3 సెం.మీ)

అందుచే $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

(లం.క.భ., నియమం)



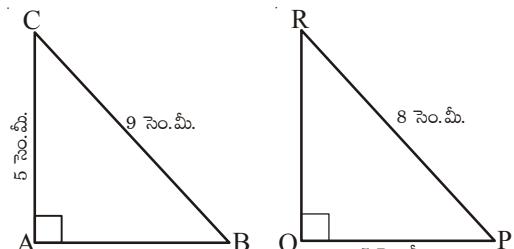
పటం 1

(ii) ఇచ్చట $\angle A = \angle Q = 90^\circ$

భుజము $AC =$ భుజము PQ (5 సెం.మీ).

కర్ణము $BC \neq$ కర్ణము PR

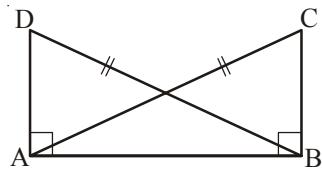
అందుచే రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము కావు.



పటం 2

ఉదాహరణ 7 : ప్రక్కపటమలో $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ మరియు $AC = BD$.

ΔABC మరియు ΔDAB త్రిభుజాలలో సర్వసమాన భాగాలపేర్లను రాయము.



ఈ క్రింది వాటిలో ఏవి సరియైనవి?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

సాధన :

సర్వసమాన భాగాలు

$\angle ABC = \angle BAD (= 90^\circ)$

$\overline{AC} = \overline{BD}$ (దత్తాంశం)

$\overline{AB} = \overline{BA}$ (ఉమ్మడి భాజం)

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (లంక.భ. సర్వసమానత్వ నియమం ప్రకారం).

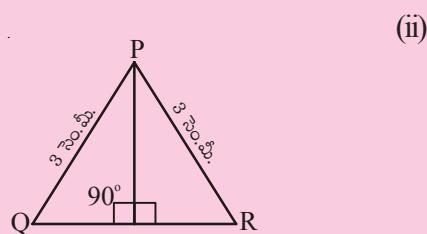
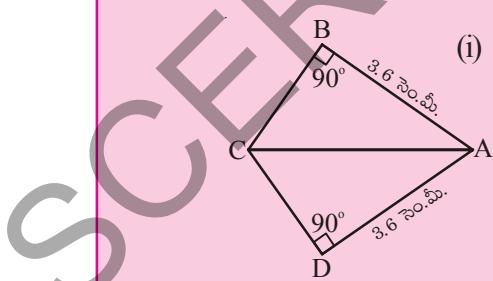
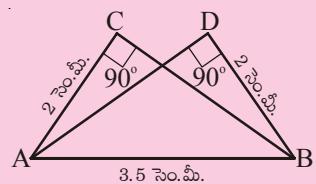
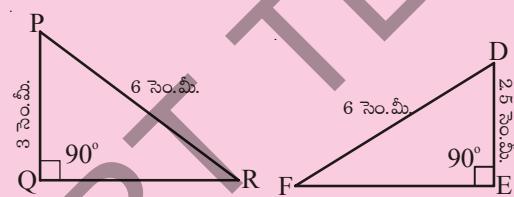
అందుచే వాక్యము (i) సత్యం

వాక్యము (ii) సరియైనది కాదు. $\Delta ABC, \Delta BAD$ లలో శీర్షాలు సదృశాలు కావు.



ప్రయత్నించండి.

1. కింద కొన్ని త్రిభుజాలు వాటికొలతలు ఇవ్వబడ్డాయి. లంక.భ. నియమము ఆధారముగా అవి సర్వసమానమేనా? ఏమి సమాధానమును సరియైన సంజ్ఞలలో రాయండి.



(iii)

(iv)

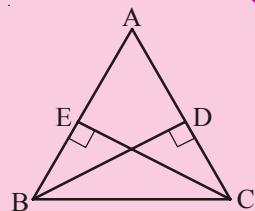
2. $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (లంక.భ. నియమము ఆధారముగా) అయితే $\angle B = \angle P = 90^\circ$ మరియు $AB = RP$ అన్న సమాచారము సరిపోతుందా? అదనముగా ఏ సమాచారము కావాలి?

3. ప్రక్కపటము ΔABC లో BD, CE లు ఉన్నతులు. $BD = CE$.

(i) ΔCBD మరియు ΔBCE సమానముగా ఉన్న భాగాలు ఏవి?

(ii) $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ సత్యమేనా? ఎందుచేత?

(iii) $\angle DBC = \angle EBC$ సత్యమేనా? ఎందుచేత కారణము తెలుపండి.



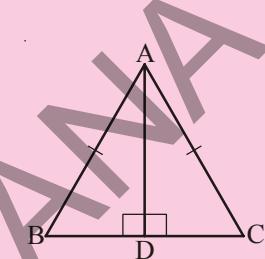
4. ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము. $AB = AC$ మరియు AD, BC పై గీచిన ఉన్నతి..

(i) ΔADB మరియు ΔADC లో సమాన భాగాలు పేర్లను రాయము.

(ii) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ సత్యమేనా? కారణములు తెలుపండి.

(iii) $\angle B = \angle C$ సత్యమేనా? కారణములు తెలుపండి.

(iv) $BD = CD$ సత్యమేనా? కారణములు తెలుపండి.



అభ్యాసం - 4

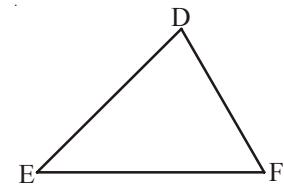
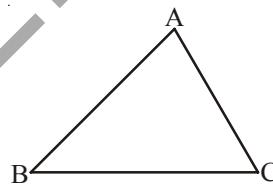
1. ఏ సర్వసమానత్వ నియమము ఆధారముగా త్రిభుజాలు సర్వసమానములో తెలుపండి.

(i) $\overline{AC} = \overline{DF}$

$\overline{AB} = \overline{DE}$

$\overline{BC} = \overline{EF}$

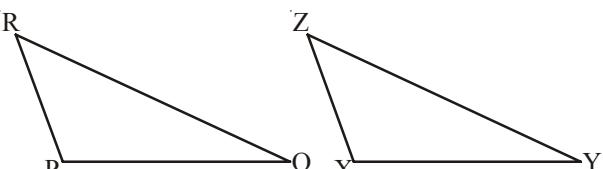
అందుచే $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(ii) $\overline{ZX} = \overline{RP}$

$\overline{ZY} = \overline{RQ}$

$\angle PRQ = \angle XZY$

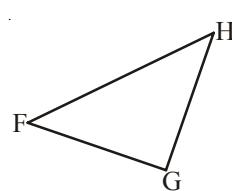
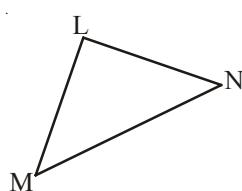


అందుచే $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

(iii) $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

$\overline{ML} = \overline{FG}$



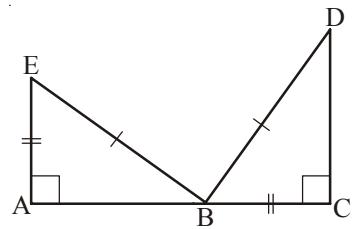
అందుచే $\Delta LMN \cong \Delta GFG$

(iv) $\overline{EB} = \overline{DB}$

$\overline{AE} = \overline{BC}$

$\angle A = \angle C = 90^\circ$

അംദുചേ $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. $\Delta ART \cong \Delta PEN$ അനി ചൂപ്പാനികി

(i) ഭു.ഭു.ഭു. സർവ്വസമാനത്വം നിയമമു പ്രകാരമു സർവ്വസമാനമു കാവലെൻ അംഗ്രേഖി

(a) AR = (b) RT = (c) AT =

(ii) $\angle T = \angle N$ അനി ഇസ്തേ ഭു.കോ.ഭു. നിയമമു നു വരീംപചേയാലംഗ്രേ

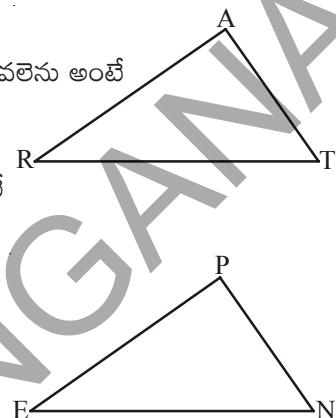
(a) RT = (ii) PN =

(iii) AT = PN അനി ഇസ്തേ കോ.ഭു.കോ.നിയമം വരീംപചേയാലംഗ്രേ

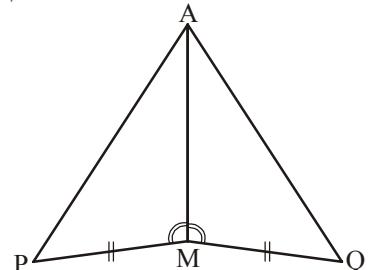
(a) ? (b) ?

3. $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ ഗാ ചൂപ്പാലി അംഗ്രേ

ఈ ട്രീംഡി ഇവ്വബുദ്ധിന സാധനലോ സോപാനമുല കാരണമുലു ഇവ്വലേർദ്ദു. വാട്ടിനി തേലവംഗി.



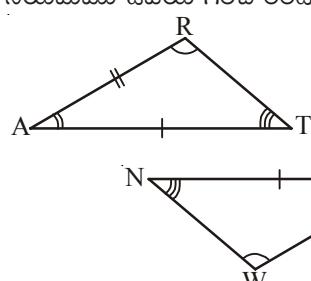
സോപാനം	കാരണം
(i) $\overline{PM} = \overline{QM}$	(i)
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii)
(iii) $\overline{AM} = \overline{AM}$	(iii)
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv)



4. $\Delta ABC, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ$ മരിയു $\angle C = 110^\circ$

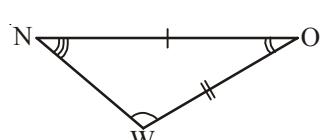
$\Delta PQR, \angle P = 30^\circ, \angle Q = 40^\circ$ മരിയു $\angle R = 110^\circ$

പ്രൈ കൊലതല അഥവാ ഒക്ക് വിദ്യുറി കോണമു, കോണമു, കോണമു, നിയമമു ഉപയോഗിംചി രേംഡു ശ്രീഭൂജാലു സർവ്വസമാനമു $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ അനി ചേപ്പോടു. സത്യമേനാ? കാരണമു ചേപ്പുംഗി.

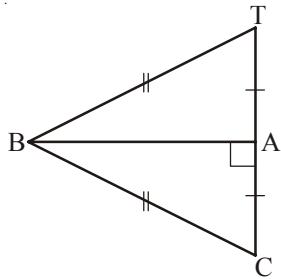


5. പ്രകൃതപലമുലോ രേംഡു സർവ്വസമാന ശ്രീഭൂജാലു ഇവ്വബുദ്ധിയായി.

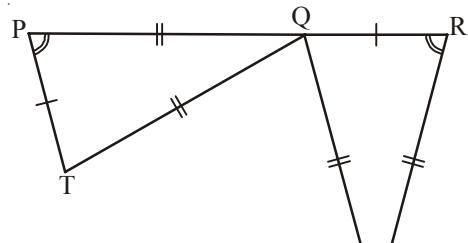
സമാന ഭാഗാല പേരു രായുംഗി. $\Delta RAT \cong ?$



6. సర్వసమానత్వమును పూరింపుము.



$$\Delta ABC \cong ?$$



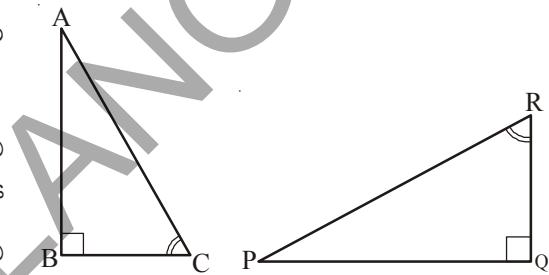
$$\Delta QRS \cong ?$$

7. కింది సందర్భాలకు తగినట్లు, సమాన వైశాల్యాలు గల రెండు త్రిభుజాలను ఒక గళ్ళ కాగితములో గీయండి.

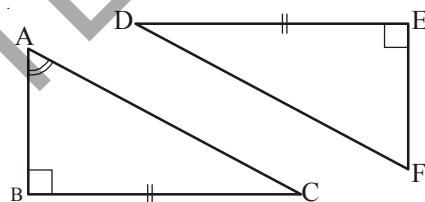
- (i) త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.
- (ii) త్రిభుజాలు సర్వసమానములుకావు.

త్రిభుజముల యొక్క చుట్టుకొలతలును గూర్చి నీవేమి చెప్పగలవు?

8. ΔABC మరియు ΔPQR లు సర్వసమానములు. ఏ నియమము ఆధారముగా ఇవి సర్వసమానములో చెప్పండి. పటములలో సూచించబడిన మిగిలిన ఏ భుజాలు, ఏ కోణములు సమానములో చెప్పండి.



9. $\Delta ABC \cong \Delta FED$ సత్యమేనా? ఎందుచేత?



మనం నేర్చుకున్నవి

1. సర్వసమాన పటములు ఒకే ఆకారము, ఒకే పరిమాణము కలిగి యుంటాయి.
2. రెండు పటాలను ఒక దానిపై మరొకబిని పెట్టినపుడు పూర్తిగా ఏకీభవిస్తే ఆ పటాలు సర్వసమాన పటాలు అంటాము.
3. \overline{AB} , \overline{CD} లు ఒకే పొడవును కల్గియున్నచో అవి సర్వసమానములు. దీనిని $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ గా ప్రాస్తాము. సాధారణంగా $AB = CD$ గా కూడా ప్రాస్తాము.
4. రెండుత్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని భాగాలు పరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సర్వసమానము అయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

5. రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము కావటానికి కావలసిన ఆవశ్యక-పర్యాప్త నియమాలు

(i) భుజము-భుజము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం :

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాల కొలతలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాల కొలతలకు సమానము అయితే ఆరెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం.

(ii) భుజము-కోణము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం.

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ భుజాలు వాటి మధ్య కోణమునకు సమానము అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.

(iii) కోణము-భుజము-కోణము సర్వసమానత్వ నియమము.

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణాలు, వాటి ఉమ్మడి భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములోని సదృశ కోణాలు, వాటి ఉమ్మడి భుజమునకు సమానము అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.

(iv) లంబకోణము-కర్ణము-భుజము సర్వసమానత్వ నియమం

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజములోని కర్ణము, ఒక భుజము వరుసగా రెండవ త్రిభుజములో కర్ణము, సదృశ భుజానికి సమానము అయితే ఆ త్రిభుజాలు సర్వసమానములు.



త్రిభుజాల నిర్మాణాలు

9.0 పరిచయం

ఈ అధ్యాయంలో మనం త్రిభుజాల నిర్మాణాల గురించి నేర్చుకుందాం. త్రిభుజములో సర్వ సమానత్వాన్ని నిర్ధారించడానికి ఏమీ కొలతలు కావాలో అవే కొలతలతో మనము త్రిభుజము నిర్మించవచ్చు, కింది సందర్భాలను పరిశీలించండి.

- (i) త్రిభుజం యొక్క 3 భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు
- (ii) త్రిభుజం యొక్క 2 భుజాల కొలతలు, వాని మధ్య కోణం ఇచ్చినపుడు
- (iii) త్రిభుజం యొక్క 2 భుజాల కొలతలు మరియు వాని మధ్యాత్మని కోణం ఇచ్చినపుడు.
- (iv) రెండు కోణాలు మరియు వాని మధ్యభుజం కొలతలు ఇచ్చినపుడు
- (v) ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మరియు ఒక భుజం ఇచ్చినపుడు

అనగా ఒక త్రిభుజము నిర్మించడానికి మూడు స్వతంత్ర కొలతలు సరిపోతాయి.

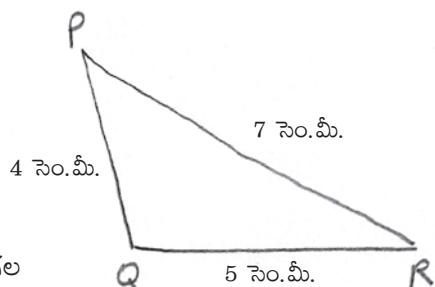
పైన పేర్కొన్న సందర్భాలలో త్రిభుజాలను ఎలా నిర్మించాలో ఇప్పుడు నేర్చుకుందాం.

9.1 ఒక త్రిభుజము మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించటం

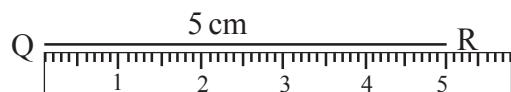
ఒక జ్యామితీయ పటం నిర్మాణం గేసేటపుడు మొదట చిత్తవటాన్ని గీసి, దానిలో మనకు ఇచ్చిన కొలతలను గుర్తించాలి.

ఉదాహరణ 1 : $PQ = 4$ సెం.మీ., $QR = 5$ సెం.మీ., $RP = 7$ సెం.మీ. కొలతలు గల త్రిభుజము PQR ను నిర్మించము.

సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తవటము గీసి,
కొలతలు గుర్తించాలి.

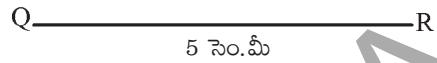
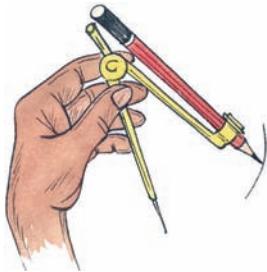


సోపానము 2 : స్నేహి సహాయంతో 5 సెం.మీ పాడవ గల
రేఖాఖండము QR ను గీయాలి.



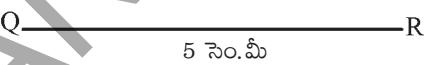
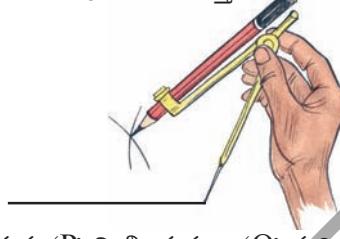
సోపానము 3 : బిందువు Q కేంద్రముగా, 4 సె.మీ

వ్యాసార్ధంతో ఒక చాపరేఖను గీయాలి.

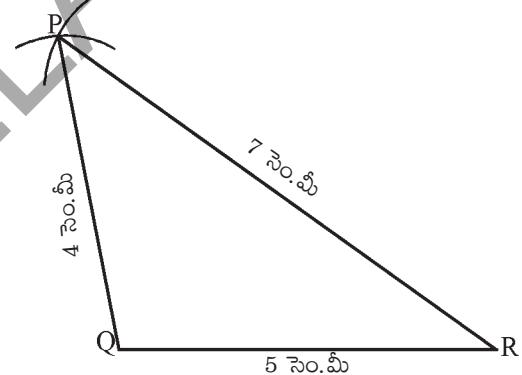


సోపానము 4 : P బిందువు R నుంచి 7 సె.మీ దూరములో

వుండి. కావున బిందువు R కేంద్రముగా 7 సె.మీ, వ్యాసార్ధంతో మొదటి చాపరేఖను ఖండించునట్లు మరొక చాపరేఖను గీచి వాటి ఖండన బిందువును P గా గుర్తించుచు.



సోపానము 5 : బిందువు 'P' ని బిందువులు 'Q' మరియు 'R' లకు కలపండి. ఏర్పడిన త్రిభుజము PQR మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



ప్రయత్నించండి.

- పై ఉండాహారణలో పేర్కాన్న కొలతలతో, PQ భుజము ఆధారముగా వుండేటట్లు ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. నిర్మించిన త్రిభుజము, పై ఉండాహారణలో ఏర్పడిన త్రిభుజము సర్వసమాన త్రిభుజాలు అవుతాయా?
- మీ నోట్ పుస్తకములో $PE = 4.5$ సె.మీ, $ET = 5.4$ సె.మీ మరియు $TP = 6.5$ సె.మీ కొలతలతో త్రిభుజము PET ని నిర్మించుచు.

ఒక కాగితముపై $AB = 5.4$ సె.మీ, $BC = 4.5$ సె.మీ మరియు $CA = 6.5$ సె.మీ కొలతలతో త్రిభుజము ABC ని నిర్మించుచు. కాగితంపై నిర్మించిన త్రిభుజము ABC ని కత్తిరించి నోట్ పుస్తకములో నిర్మించిన త్రిభుజము PET పై అమర్చుచు. రెండు త్రిభుజములు సర్వ సమాన త్రిభుజములవుతాయా? నీ సమాధానాన్ని గణిత భాషలో నీ నోట్ పుస్తకములో రాయుచు.



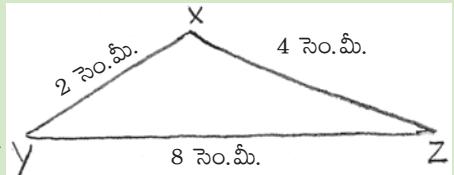
అభ్యసం - 1

- $AB = 5.5$ సెం.మీ., $BC = 6.5$ సెం.మీ మరియు $CA = 7.5$ సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము ABC ని నిర్మించుము.
- $NI = 5.6$ సెం.మీ., $IB = 6$ సెం.మీ మరియు $BN = 6$ సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము NIB ను నిర్మించుము. ఏదైన త్రిభుజము ఏ రకమైన త్రిభుజము?
- 6.5 సెం.మీ. భుజము కొలత గల సమబాహు త్రిభుజము APE ని నిర్మించుము.
- $XY = 6$ సెం.మీ., $YZ = 8$ సెం.మీ మరియు $ZX = 10$ సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము XYZ ని నిర్మించి, కోణమానిని సహాయించో శీర్షము Y వద్ద కోణాన్ని కొలవండి. XYZ ఏరకమైన త్రిభుజము?
- $\overline{AB} = 4$ సెం.మీ., $\overline{BC} = 7$ సెం.మీ మరియు $\overline{CA} = 4$ సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము ABC ని నిర్మించండి. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము?
- $PE = 4$ సెం.మీ., $EN = 5$ సెం.మీ మరియు $NP = 3$ సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము PEN ను నిర్మించుము. నిర్మాణములో చాపరేభల బదులు వృత్తములు గీసిన ఎన్ని ఖండన బిందువులు వస్తాయి? యిచ్చిన కొలతలతో ఎన్ని త్రిభుజాలను నిర్మించడం సాధ్యపడుతుంది. ప్రతీ త్రిభుజ నిర్మాణంలో యది సత్యమా?

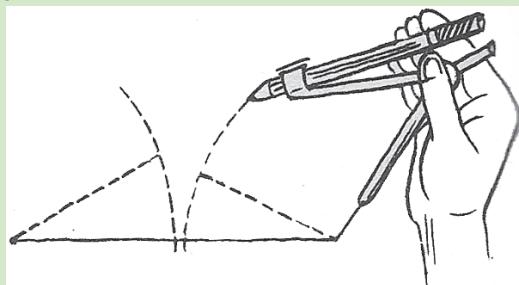


ప్రయత్నించండి.

$XY = 2$ సెం.మీ., $YZ = 8$ సెం.మీ మరియు $XZ = 4$ సెం.మీ. కొలతలతో త్రిభుజము XYZ ను నిర్మించమని సుశాంత్ర ఒక ప్రశ్నను తయారు చేసాడు. దానికి ఒక చిత్తు పటాన్ని కూడా గీయడం జరిగింది.



ఈ ప్రశ్నను చదివిన శీజ, ఈ కొలతలతో త్రిభుజాన్ని నిర్మించడం సాధ్యం కాదు అని చెప్పింది. కానీ సుశాంత్ర ఆ త్రిభుజాన్ని నిర్మించడానికి ఇలా ప్రయత్నించాడు.



సుశాంత్ర త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలడా? లేదా? ఒక వేళ నిర్మించలేదు అనుకుంటే ఎందుకు నిర్మించలేదు. యా విషయాలను మీ మిత్రులతో చర్చించండి.

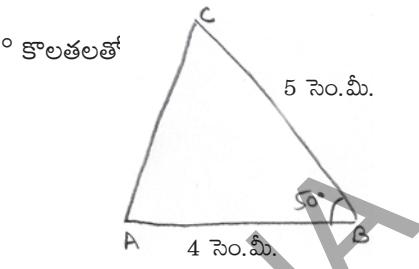
త్రిభుజాల ఏ ధర్మం శీజ చెప్పిన విషయాన్ని సత్యమని బలపరుస్తుంది.

9.2 త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య కోణం కొలతలు యిచ్చినపుడు త్రిభుజాన్ని నిర్మించటం.

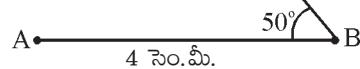
ఉధారణ 2 : $AB = 4$ సెం.మీ., $BC = 5$ సెం.మీ మరియు $\angle B = 50^\circ$ కొలతలతో నిర్మించండి.

సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్రువులను గేసి కొలతలు గుర్తించాలి.

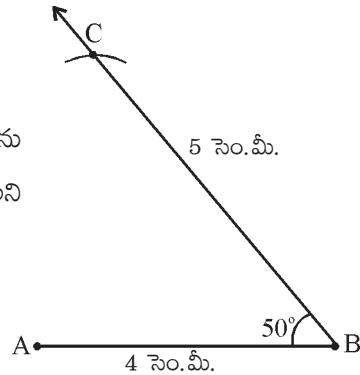
సోపానము 2 : 4 సెం.మీ. కొలతతో రేఖాఖండము AB ని గేయము.



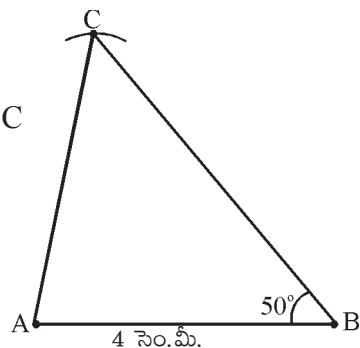
సోపానము 3 : బిందువు B వద్ద, BA తో 50° కోణము చేయునట్లు కిరణము \overrightarrow{BX} ను గేయము. (ఈ కోణమును కొలుచుటకు జ్యామితీయ పెట్టలోని కోణమానిని ఉపయోగించాలి)



సోపానము 4 : బిందువు 'B' కేంద్రముగా, 5 cm వ్యాసార్థముతో కిరణము \overrightarrow{BX} ను ఖండించునట్లు ఒక చాపరేఖను గేయము. ఖండన బిందువుకు C అని పేరు పెట్టాము.



సోపానము 5 : బిందువులు C, A లను స్నేలు సహాయంతో కలుపుము. ΔABC మనకు కావలసిన త్రిభుజము.





అభ్యాసం - 2

- CA = 8 సెం.మీ., $\angle A = 60^\circ$ మరియు AR = 8 సెం.మీ. కొలతలతో ΔCAR ను నిర్మించుము. భుజము CR పొడవును, కోణములు $\angle R$ మరియు $\angle C$ లను కొలిచి, ΔCAR ఏరకమైన త్రిభుజమో చెప్పండి.
- AB = 5 సెం.మీ., $\angle B = 45^\circ$ మరియు BC = 6 సెం.మీ. కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించుము.
- $\angle R=100^\circ$, QR = RP = 5.4 సెం.మీ. కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మించుము.
- TE = 3 సెం.మీ., $\angle E = 90^\circ$ మరియు NE = 4 సెం.మీ. కొలతలతో ΔTEN ను నిర్మించుము.



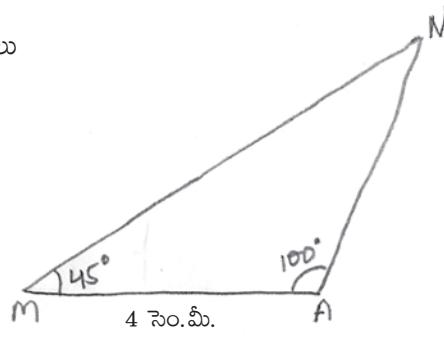
ప్రయత్నించండి.

మీకు నచ్చిన రెండు భుజాల కొలతలు మరియు ఒక అధిక కోణము కొలత తీసుకొని ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి. ఈ నిర్మాణంలో పైన చెప్పినట్లు రెండు త్రిభుజాలు ఏర్పడతాయా?

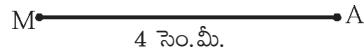
9.3 రెండు కోణములు మరియు వాటి మధ్య భుజం కొలతలు యుచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదాహరణ 4 : MA = 4 సెం.మీ. $\angle M = 45^\circ$ మరియు $\angle A = 100^\circ$ కొలతలతో ΔMAN ను నిర్మించుము.

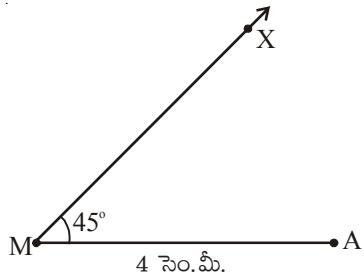
సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తపటము గేసి కొలతలు గుర్తించాలి.



సోపానము 2 : స్నేహి సహాయంతో 4 సెం.మీ. పొడవు కల రేఖాఖండము MA ని గీయాలి.

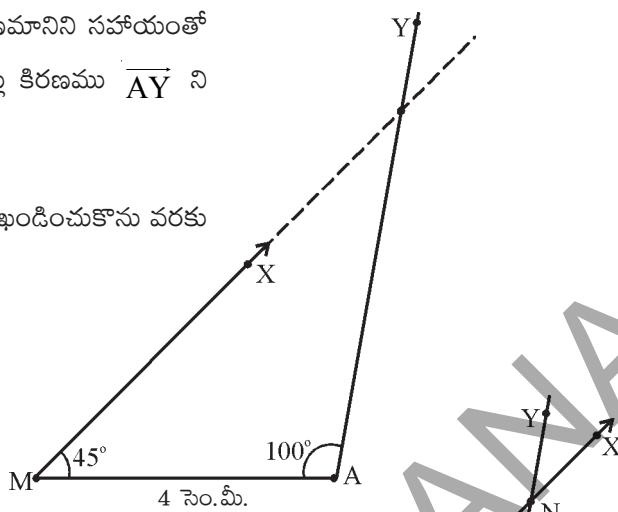


సోపానము 3 : కోణమానిని సహాయంతో బిందువు M వద్ద MA తో 45° కోణము చేయునట్లు కిరణము MX ను గీయాలి.

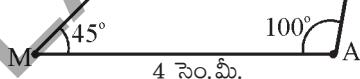


సోపానము 4 : అదే విథంగా బిందువు A వద్ద కోణమానిని సహాయంతో $MA = 100^\circ$ కోణము చేయునట్లు కిరణము \overrightarrow{AY} ని గియాలి.

కిరణము \overrightarrow{MX} మరియు \overrightarrow{AY} లను ఖండించుకొను వరకు పొడిగించాలి.



సోపానము 5 : రెండు కిరణముల ఖండన బిందువు N అగును. ΔMAN మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



ప్రయత్నించండి.

i) కోణములు 105° మరియు 95° మరియు మీకు నచ్చిన భుజము కొలతతో త్రిభుజమును నిర్మించడానికి ప్రయత్నించుము. ఇటువంటి త్రిభుజము నిర్మించడం సాధ్యపడుతుందా? మీ స్నేహితులతో చర్చించి సరియైన వివరణ ఇవ్వండి.



అభ్యాసం - 3

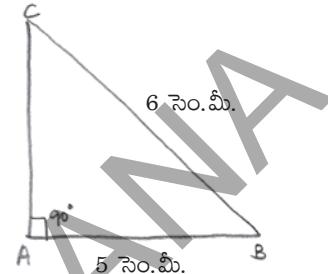
- $NE = 6.4 \text{ సెం.మీ.}$, $\angle N = 50^\circ$ మరియు $\angle E = 100^\circ$ కొలతలతో ΔNET ని నిర్మించుము.
- $QR = 6 \text{ సెం.మీ.}$, $\angle Q = \angle R = 60^\circ$ కొలతలతో ΔPQR ను నిర్మించుము. మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులు కొలుచుము. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము?
- $RN = 5 \text{ సెం.మీ.}$, $\angle R = \angle N = 45^\circ$ కొలతలతో ΔRUN ని నిర్మించుము. మూడవ కోణమును మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల పొడవులను కొలుచుము. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము?

9.4 ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మరియు ఒక భుజము కొలతలు యిచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

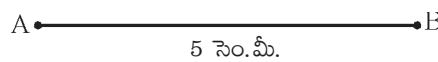
ఉదాహరణ 5 : శీర్షము A వద్ద లంబకోణాన్ని కలిగి $BC = 6$ సెం.మీ మరియు $AB = 5$ సెం.మీ కొలతలు గల లంబకోణ త్రిభుజము ΔABC ని నిర్మించుట.

సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్రువటమును గీసి కొలతలు గుర్తించాలి.

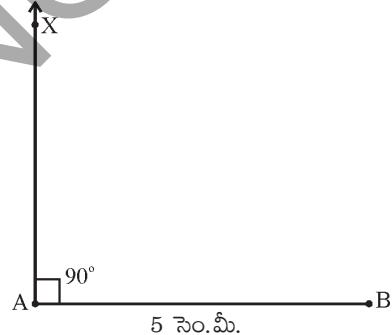
గమనిక : ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణానికి ఎదురుగా వున్న భుజాన్ని కర్ణము అంటాం.



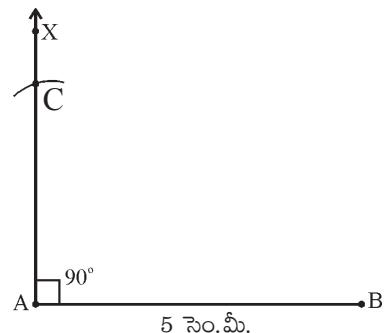
సోపానము 2 : స్క్యూలు సహాయంతో 5 సెం.మీ. పొడవుగల రేఖా ఖండము \overline{AB} ని గీయాలి.



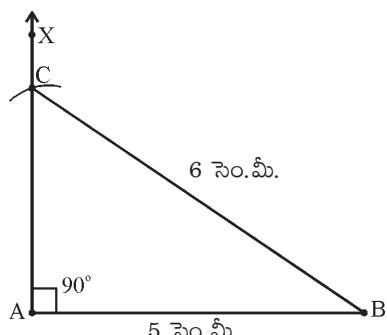
సోపానము 3 : బిందువు A వద్ద కోణమానిని సహాయంతో \overline{AB} తో 90° కోణము చేయునట్లు \overrightarrow{AX} ను గీయాలి.



సోపానము 4 : బిందువు B కేంద్రముగా 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో కిరణము \overrightarrow{AX} ను ఖండించునట్లు చాపరేఖను గీయాలి. ఖండన బిందువు C ఆగును.



సోపానము 5 : బిందువులు B, C లను స్క్యూలు సహాయంతో కలపాలి.
ఏర్పడిన ΔABC మనకు కావలసిన త్రిభుజము.





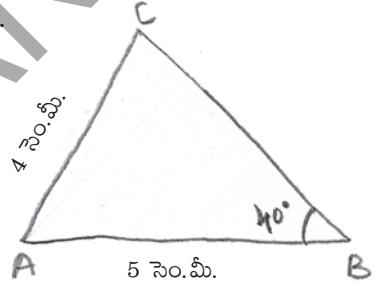
అభ్యాసం - 4

- $\angle B = 90^\circ$, $AB = 8$ సెం.మీ. మరియు $AC = 10$ సెం.మీ. కొలతలుగల లంబకోణ త్రిభుజము ΔABC ని నిర్మించుము.
- కర్మము 5 సెం.మీ., ఒక భుజము 4 సెం.మీ. కొలతలు కలిగి R వద్ద లంబకోణాన్ని కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజము ΔPQR నిర్మించుము.
- $\angle Y = 90^\circ$ మరియు మిగిలిన రెండు భుజాల కొలతలు (కర్మము కాక) ప్రతీది 5 సెం.మీ. వుండేటట్లు ఒక లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

9.5 త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్యలేని కోణం కొలతలు యిచ్చినపుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదాహరణ 3 : $AB = 5$ సెం.మీ., $AC = 4$ సెం.మీ., $\angle B = 40^\circ$ కొలతలతో ΔABC ని నిర్మించుము.

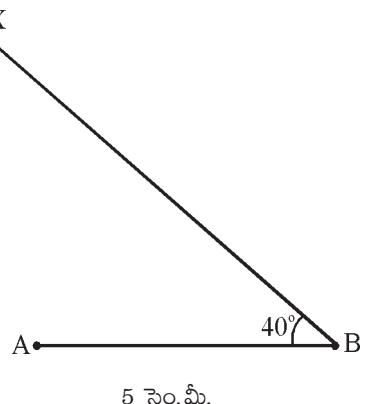
సోపానము 1 : ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క చిత్తు పటము గేసి కొలతలు గుర్తించాలి.



సోపానము 2 : 5 సెం.మీ. పొడవు గల రేఖా ఖండము AB ని గీయాలి. $A \bullet \overrightarrow{B}$ 5 సెం.మీ.

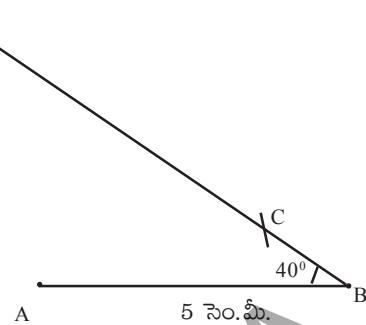
సోపానము 3 : బిందువు B వద్ద కోణమానిని సహాయమున భాగాతో 40°

కోణము చేయునట్లు కిరణము \overrightarrow{BX} ను గీయాలి.



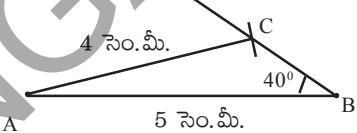
సోపానము 4 : బిందువు A కేంద్రముగా 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో

కిరణము \overrightarrow{BX} ను ఖండించునట్లు చాపరేఖను గీయాలి.



సోపానము 5 : ఖండన బిందువుకు C అని పేరు పెట్టాలి. బిందువులు, C,

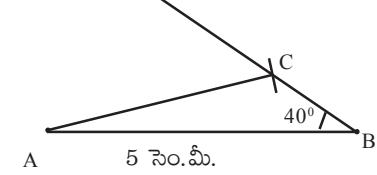
A లను కలుపుము. ΔABC మనకు కావలసిన త్రిభుజము.



కిరణము \overrightarrow{BX} ను వేరొక బిందువు వద్ద ఖండించడం సాధ్యపడుతుందా?

కోణము $\angle B$ అల్పకోణము కావున ‘A’ కేంద్రముగా 4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో

గీసిన చాపరేఖ, కిరణము \overrightarrow{BX} ను రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించడాన్ని మనము గమనించవచ్చు.

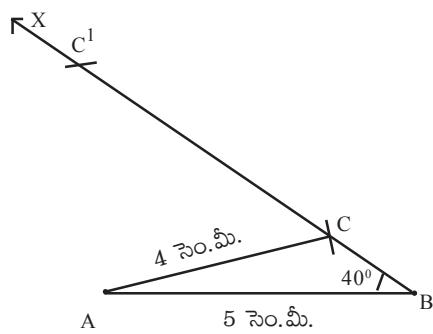
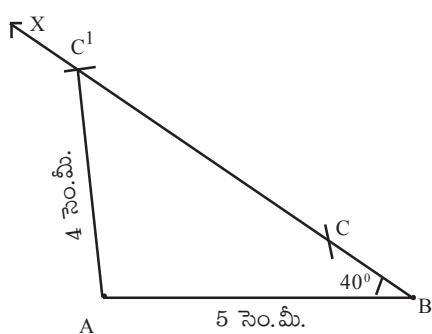


ఖండన బిందువులకు C, C' అని పేరు పెట్టాలి.

బిందువులు, C, A ను కలిపినపుడు ఒక త్రిభుజము, బిందువులు C^1, A

లను కలిపినపుడు మరో త్రిభుజము ఏర్పడతాయి. యా విధంగా రెండు

త్రిభుజాలు ఏర్పడడాన్ని మనం గమనించవచ్చు.





ప్రయత్నించండి

నీకు నచ్చిన కొలతలతో రెండు భుజాలు మరియు వాని మధ్య లేని అధిక కోణంతో ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించగలరా? ఈ సందర్భములో కూడా రెండు త్రిభుజాలను నిర్మించగలమా?



అభ్యాసం - 5

- $AB = 4.5$ సెం.మీ., $AC = 4.5$ సెం.మీ. మరియు కోణము $\angle B = 50^\circ$ కొలతలతో ΔABC ను నిర్మించము. రెండు త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలిగారా.
- $XY = 4.5$ సెం.మీ. $XZ = 3.5$ సెం.మీ. మరియు $\angle Y = 70^\circ$. కొలతలతో ΔXYZ ను నిర్మించము. రెండు త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలిగారా.
- భుజములు AN, AR ల కొలతలు వరుసగా 5 సెం.మీ. మరియు 6 సెం.మీ. కోణము $\angle N = 100^\circ$ కొలతలతో ANR ను నిర్మించము. రెండు త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలిగారా.
- $QR = 5.5$ సెం.మీ. $QP = 5.5$ సెం.మీ. మరియు కోణము $\angle Q = 60^\circ$ కొలతలతో ΔQPR ను నిర్మించము. భుజము RP పొడవును కొలుచము. ఇది ఏ రకమైన త్రిభుజము.
- క్రింది పట్టికలో యిచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజములను నిర్మించము.

త్రిభుజము	కొలతలు
ΔABC	$BC = 6.5$ సెం.మీ. $CA = 6.3$ సెం.మీ., $AB = 4.8$ సెం.మీ.
ΔPQR	$PQ = 8$ సెం.మీ., $QR = 7.5$ సెం.మీ., $\angle PQR = 85^\circ$
ΔXYZ	$XY = 6.2$ సెం.మీ., $\angle Y = 130^\circ$, $\angle Z = 70^\circ$
ΔABC	$AB = 4.8$ సెం.మీ., $AC = 4.8$ సెం.మీ. $\angle B = 35^\circ$
ΔMNP	$\angle N = 90^\circ$, $MP = 11.4$ సెం.మీ., $MN = 7.3$ సెం.మీ.
ΔRKS	$RK = KS = SR = 6.6$ సెం.మీ.
ΔPTR	$\angle P = 65^\circ$, $PT = PR = 5.7$ సెం.మీ.



మనం సేర్పకున్నావి

ఒక త్రిభుజమును నిర్మించడానికి 3 స్వీతంత్ర కొలతలు కావాలి.

- మూడు భుజాల కొలతలు
- రెండు భుజాల కొలతలు మరియు వాటి మధ్యకోణం కొలత యిచ్చినపుడు
- రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్య భుజం కొలతలు యిచ్చినపుడు
- ఒక లంబ కోణ త్రిభుజంలో కర్ణం మరియు ఒక భుజం కొలత యిచ్చినపుడు
- రెండు భుజాల కొలతలు మరియు వాటి మధ్యలో లేని కోణం కొలత యిచ్చినపుడు త్రిభుజములను నిర్మించవచ్చును.

బీజీయ సమాసాలు

10

10.0 పరిచయం

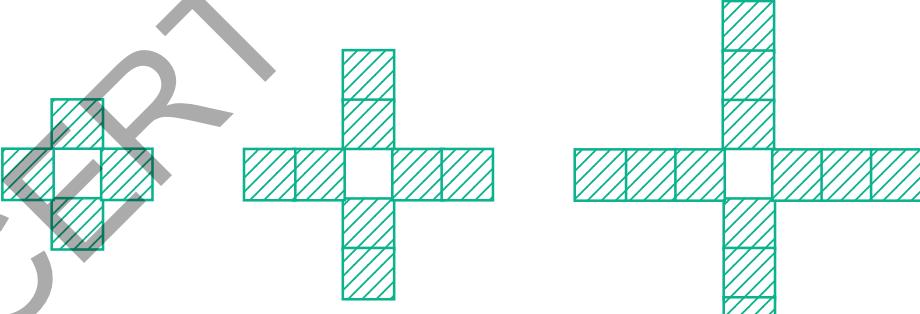
చరరాశి విలువ మారుతూ ఉంటుందని, స్థిరరాశి విలువ మారదని మీరు 6 వ తరగతిలో తెలుసుకున్నారు. అదేవిధంగా x, y, z, a, b, p, m లాంటి అక్షరాలనుపయోగించి చరరాశులను ఎలా సూచిస్తారో తెలుసుకున్నారు. ఇంకా $2x - 3$ లాంటి సరళమైన బీజీయ సమాసాలను గురించి నేర్చుకున్నారు. ఈ బీజీయ సమాసాలు సూత్రాల తయారీలోనూ మరియు సమస్య సాధనాలోనూ ఏ విధంగా ఉపయోగపడతాయో తెలుసుకున్నారు.

ఈ అధ్యాయంలో మీరు బీజీయ సమాసాల గురించి వాటి కూడిక మరియు తీసివేతల గురించి మరింత వివరంగా నేర్చుకొంటారు. ముందుగా మనం “సజాతి పదాలు”, “విజాతి పదాలు” మరియు “గుణకాల”ను గురించి తెలుసుకొందాం.

ముందుగా 6 తరగతి బీజగణితంలో మనం నేర్చుకున్న విషయాలను ఒకసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.



అభ్యసం - 1

- కింది అమరికలలో ఉపయోగించే అగ్నిపుల్లల సంఖ్యను సూచించే సూత్రాన్ని రాయండి.
 - HHHH.....
 - VVVV.....
- ఈ కింది అమరికలు రంగుల టైల్స్ మరియు తెలుపు రంగు టైల్స్ ఉపయోగించి తయారు చేయబడ్డాయి.
 

పటం 1

పటం 2

పటం 3

- పై అమరికలో తరువాత వచ్చే రెండు చిత్రాలను గీయండి.
- కింది పట్టికలోని భాళీ గడులను పూరించి ఆ అమరికను బీజీయసమాసాల రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

పటం సంఖ్య	1	2	3	4	5
రంగుల టైల్స్ సంఖ్య	4				

(iii) కింది పట్టికలోని ఖాళీగడులను పూరించి ఆ అమరికను బీజీయ సమాస రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

పటం సంఖ్య	1	2	3	4	5
మొత్తం టైల్లల సంఖ్య	5				

3. చరరాశి, స్థిరాంకం మరియు అంకగణిత పరిక్రియలను ఉపయోగించి ఈ కింది వాక్య రూపాలను బీజీయ రూపంలో రాయండి.

- (i) p కంటే 6 ఎక్కువ
- (ii) ' x ' విలువను 4 తగ్గించిన
- (iii) y నుంచి 8 తీసివేయబడింది.
- (iv) q అనునది '-5' చే గుణించబడినది.
- (v) y అనునది 4 చే భాగించబడినది.
- (vi) ' p ', ' q ' ల లబ్బంలో 4 వ భాగము.
- (vii) ' z ' యొక్క 3 రెట్లకు 5 కలపబడింది.
- (viii) x ను 5 చే గుణించి '10'కి కలపబడింది.
- (ix) ' y ' రెట్లింపునకు నుండి 5ను తీసివేయబడింది.
- (x) y ను 10 చే గుణించి 13 తో సంకలనము చేయబడింది.

4. కింది బీజీయ రూపాలను వాక్యరూపంలో రాయండి.

- (i) $x + 3$
- (ii) $y - 7$
- (iii) $10l$
- (iv) $\frac{x}{5}$
- (v) $3m + 11$
- (vi) $2y - 5$

5. కింద కొన్ని సందర్భాలు ఇవ్వబడ్డాయి. ఈ సందర్భాలలోని సంఖ్య స్థిరరాశి అవుతుందా? చరరాశి అవుతుందా? తెలుపండి.

ఉపాహారణ : “మన వయస్సు నిరంతరం మారుతూ ఉంటుంది” ఇందులో వయస్సు ఒక చరరాశిని సూచిస్తుంది.

- (i) జనవరి నెలలోని దినాల సంఖ్య
- (ii) ఒక రోజులో ఉష్ణోగ్రత
- (iii) మీ తరగతి గది పొడవు.
- (iv) పెరుగుతున్న మొక్క ఎత్తు

10.1 బీజీయ పదము, సంభ్యాపదం

$2x + 9$ అనే బీజీయ రూపాన్ని పరిశీలించాం. ఇక్కడ 'x' అనునది 2 చే గుణించబడిన తరువాత 9 కలుపబడింది. '2x' మరియు '9' లను $2x + 9$ లో పదాలు అని అంటాం. $2x$ ను బీజీయ పదం అని, 9 ని సంభ్యా పదం అని అంటాం. $3x^2 - 11y$ అను బీజీయ రూపాన్ని పరిశీలించండి.

$3x^2$ అనునది $3, x, x$ ల లబ్బం. $11y$ అనునది $11, y$ ల లబ్బము. $11y$ ని $3x^2$ నుండి తీసివేసిన $3x^2 - 11y$ బీజీయరూపం లభిస్తుంది. $3x^2 - 11y$ లో $3x^2$ ఒక పదం మరియు $11y$ మరొక పదం.

x ను x తో గుణించినపుడు లబ్బాన్ని x^2 అని, x ను మూడుమార్గు గుణించగా లబ్బాన్ని $xxx \times x = x^3$ అని రాశాము. ఇదే విధంగా 4×4 ను 4^2 గా, $6 \times 6 \times 6$ ను 6^3 గా సూచిస్తాం. $4^2, 6^3$ లందు, 4, 6 లను భూములని, 2, 3లను ఘూతాంకాలు అని అంటాం.

జవి చేయండి

కింది బీజీయ రూపాలలో గల అన్నిపదాలను గుర్తించి రాయండి.

- | | | |
|---------------------|----------------------|------------------|
| (i) $5x^2 + 3y + 7$ | (ii) $5x^2y + 3$ | (iii) $3x^2y$ |
| (iv) $5x - 7$ | (v) $5x + 8 - 2(-y)$ | (vi) $7x^2 - 2x$ |



10.1.1 సజ్ఞాతిపదాలు మరియు విజ్ఞాతిపదాలు

క్రింది ఉదాహరణలను గమనించాం.

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| (i) $5x$ మరియు $8x$ | (ii) $7a^2$ మరియు $14a^2$ |
| (iii) $3xy$ మరియు $4xy$ | (iv) $3xy^2$ మరియు $4x^2y$ |



మొదటి ఉదాహరణలలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశి x ను కలిగివున్నవి మరియు చరరాశి ఘూతాంకం 1.

రెండవ ఉదాహరణలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశి a ను కలిగివున్నవి. రెండు చరరాశుల ఘూతాంకం సమానం అంటే 2 గా వుంది.

మూడవ ఉదాహరణలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశులు x, y లను కలిగి వున్నవి. రెండు పదాలలో చరరాశి x ఘూతాంకం 1 మరియు, చరరాశి y ఘూతాంకం 1.

నాలుగవ ఉదాహరణలో రెండు పదాలు ఒకే చరరాశులు x, y లను కలిగినన్నాయి. కానీ వాటి ఘూతాంకాలు సమానంగా లేవు. మొదటి పదంలో x ఘూతాంకం 1 మరియు రెండవ పదంలో x ఘూతాంకం 2. అదే విధంగా మొదటి, రెండు పదాలలో y ఘూతాంకాలు వరుసగా 2, 1.

ఈ ఉదాహరణలలో మొదటి మూడు ఉదాహరణలలోని జతలు సజ్ఞాతి పదాలు కానీ నాలుగవ ఉదాహరణలోని జత విజ్ఞాతి పదాలు.

ఒకే చరరాశులను కలిగి వాటి ఘూతాంకాలు సమానంగా ఉన్న పదాలను 'సజ్ఞాతి పదాలు' అంటారు.

ఇవి చేయండి

- సజాతి పదాలన్నీంటిని ఒక సమూహంగా రాయండి.
 $12x, 12, 25x, -25, 25y, 1, x, 12y, y, 25xy, 5x^2y, 7xy^2, 2xy, 3xy^2, 4x^2y$
- సత్యమా? అసత్యమా? కారణాలు తెలుపండి.
 - $7x^2$ మరియు $2x$ లు నిజాతి పదాలు
 - pq^2 మరియు $-4pq^2$ లు సజాతి పదాలు
 - $xy, -12x^2y$ మరియు $5xy^2$ లు నిజాతి పదాలు



10.2 గుణకము

$$9 xy \text{ లో}$$

$$'9' అనునది 'xy' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే \quad 9(xy) = 9xy$$

$$'x' అనునది '9y' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే \quad x(9y) = 9xy$$

$$'y' అనునది '9x' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే \quad y(9x) = 9xy$$

$$'9x' అనునది 'y' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే \quad 9x(y) = 9xy$$

$$9y అనునది 'x' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే \quad 9y(x) = 9xy$$

$$xy అనునది '9' యొక్క గుణకం ఎందుకంటే \quad xy(9) = 9xy$$

9 అనునది ఒక సంఖ్య కావున 9 ని సంఖ్యగుణకం అని అంటారు. x, y మరియు xy లు చరరాశులు కావున వాటిని బీజీయ గుణకాలు అని అంటారు.

అదే విధంగా ' $-5x$ ', లో ' -5 ' సంఖ్యగుణకం, ' x ' బీజీయ గుణకం



ప్రయుచ్చించండి.

- ' x ' లో సంఖ్యగుణకము ఎంత?
- ' $-y$ ' లో సంఖ్యగుణకము ఎంత?
- ' $-3z$ ' లో బీజీయగుణకం ఎంత?
- సంఖ్యగుణకం ఒక స్థిరాంకమేనా?
- బీజీయ గుణకం ఎల్లప్పుడూ చరరాశిమేనా?

10.3 సమాపనములు

'+' (ప్లస్) లేక '-' (మైనస్) గుర్తులచే కలపబడిన ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పదాల కలయికనే సమాపనము అని అంటారు.

ఉదాహరణ : $6x + 3y, 3x^2 + 2x + y, 10y^3 + 7y + 3, 9a + 5, 5a + 7b, 9xy, 5+7-2x, 9+3-2$

గమనిక : గుణకారం (\times), భాగపోరం (\div) లు పదాలను వేరుచేసి చూపలేవు. ఉదాహరణకు $2x \times 3y$ మరియు $\frac{2x}{3y}$ లు ఒకొక్క పదాల్చు.

ఇవి చేయండి

1. కింది సమాసాలలో ఎన్ని పదాలున్నాయి?

- (i) $x + y$
- (ii) $11x - 3y - 5$
- (iii) $6x^2 + 5x - 4$
- (iv) $x^2z + 3$
- (v) $5x^2y$
- (vi) $x + 3 + y$
- (vii) $x - \frac{11}{3}$
- (viii) $\frac{3x}{7y}$
- (ix) $2z - y$
- (x) $3x + 5$



10.3.1 సంఖ్యా సమాసాలు మరియు బీజీయ సమాసాలు

కింది ఉదాహరణలను పరిగణించండి.

- (i) $1 + 2 - 9$
- (ii) $-3 - 5$
- (iii) $x - \frac{11}{3}$
- (iv) $4y$
- (v) $9 + (6 - 5)$
- (vi) $3x + 5$
- (vii) $(17 - 5) + 4$
- (viii) $2x - y$

(i), (ii), (v) మరియు (vii) ఉదాహరణలలో ఏవయనా బీజీయ పదాలను గమనించారా?

ఒక సమాసంలోని ప్రతిపదం స్థిరాంకం అయితే ఆ సమాసాన్ని సంఖ్యాసమాసము అని అంటారు. ఒక సమాసంలో ఒక పదమైనా బీజీయపదం అయితే ఆ సమాసాన్ని బీజీయ సమాసము అని అంటారు.



ప్రయత్నించండి.

మూడు పదాలను కలిగివున్న ఏవయనా మూడు బీజీయ సమాసాలు వ్రాయండి.



ఆర్యభట్ట (భారతదేశం)

475 - 550 AD

ఖగోళ శాస్త్రానికి సంబంధించిన ‘ఆర్యభటీయం’ (499 AD) అనే ఉద్దగ్రంథాన్ని రచించాడు.

బీజీయ సమాసాలను ఉపయోగించిన మొట్టమొదటి భారతీయ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు. ఆయన విశేష కృషికి గుర్తింపుగా తొలి భారత ఉపగ్రహానికి ‘ఆర్యభట్ట’గా నామకరణం చేయబడింది.

10.3.2 బీజీయ సమాసాల రకాలు

బీజీయ సమాసాలను 'బహుళ పదులు' అని కూడా అంటారు. ఆ బీజీయ సమాసంలోని పదాల సంఖ్యను బట్టి వాటిని వేరువేరు పేర్లతో పిలుస్తాం.

పదాల సంఖ్య	బీజీయ సమాసం పేరు	ఉదాహరణలు
ఒక పదం	ఏక పది (ఏకపద బీజీయ సమాసం)	(a) x (b) $7xyz$ (c) $3x^2y$ (d) qz^2
రెండు విజాతి పదాలు	ద్విపది	(a) $a + 4x$ (b) $x^2 + 2y$ (c) $3x^2 - y^2$
మూడు విజాతి పదాలు	త్రిపది	(a) $ax^2 + 4x + 2$ (b) $7x^2 + 9y^2 + 10z^3$
ఒకటి కంటే ఎక్కువ విజాతి పదాలు	బహుళపది	(a) $4x^2 + 2xy + cx + d$ (b) $9p^2 - 11q + 19r + t$

ఇవి చేయండి.

- వివిధ రకాల బీజీయ సమాసాలకు రెండేసి ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.
- కింద ఇవ్వబడిన సమాసాలలో ఏవి ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది, బహుళపదులు అవుతాయో గుర్తించండి.

(i) $5x^2 + y + 6$	(ii) $3xy$
(iii) $5x^2y + 6x$	(iv) $a + 4x - xy + xyz$



10.4 బీజీయ సమాసం యొక్క పరిమాణం

బీజీయ సమాసం యొక్క పరిమాణం గురించి తెలుసుకోవడానికి ముందు ఏకపది యొక్క పరిమాణం అంటే ఏమిటో చర్చించాం.

10.4.1 ఏకపది పరిమాణం

$9x^2y^2$ బీజీయ పదాన్ని పరిగణించండి.

- పై పదంలోని 'x' యొక్క ఘూతాంకం ఎంత?
- $9x^2y^2$ లో 'y' యొక్క ఘూతాంకం ఎంత?
- ఈ రెండింటి ఘూతాంకాల మొత్తం ఎంత?

ఒక పదంలోని చరరూపుల ఘూతాంకాల మొత్తాన్ని ఆ పదం యొక్క పరిమాణం లేదా ఏకపది పరిమాణం అని అంటారు.

కింది పట్టికను గమనించండి.

క్రమ సంఖ్య	వికపది	ఫూతాంకాలు			వికపది పరిమాణము
		x	y	z	
1	x	1	-	-	1
2	$7x^2$	2	-	-	2
3	$-3xyz$	1	1	1	$1 + 1 + 1 = 3$
4	$8y^2z^2$	-	2	2	$2 + 2 = 4$

10.4.2 స్థిరరాశుల పరిమాణం

5 ఒక స్థిరాంకం. దీని పరిమాణం గురించి ఇప్పుడు చర్చిదాం.

$x^0 = 1$, కాబట్టి 5 ను $5x^0$ గా వ్యాయామచ్చు.

$5 = 5x^0$ చరరాశి యొక్క ఫూతాంకం '0' కావున 5 యొక్క పరిమాణం '0'.

ప్రతి స్థిరసంఖ్యయొక్క పరిమాణం సున్నా.



10.4.3 బీజీయ సమాసము యొక్క పరిమాణం

కింది పట్టికను గమనించండి.

క్రమ సంఖ్య	బీజీయ సమాసం	ప్రతి పదం యొక్క పరిమాణం				గరిష్ట పరిమాణం
		మొదటి పదం	రెండవ పదం	మూడవ పదం	నాలుగవ పదం	
1.	$7xy^2$	3	-	-	-	3
2	$3y - x^2y^2$	1	4	-	-	4
3	$4x^2 + 3xyz + y$	2	3	1	-	3
4	$pq - 6p^2q^2 - p^2q + 9$	2	4	3	0	4

రెండవ ఉదాహరణలో ఒకపదం యొక్క గరిష్ట పరిమాణం 4. కాబట్టి ఆ బీజీయ సమాసం పరిమాణం 4. అదేవిధంగా నాలుగవ ఉదాహరణలో $-6p^2q^2$ పదం పరిమాణం 4. ఇది గరిష్టం కాబట్టి $pq - 6p^2q^2 - p^2q + 9$ యొక్క పరిమాణం 4.

ఒక బీజీయ సమాసంలోని అన్నిపదాల పరిమాణాలలో గరిష్టముయిన దానిని ఆ బీజీయ సమాస పరిమాణం అంటారు.



అభ్యాసం - 2

- కింది వానిలో ప్రతి దానిలో గల సజాతి పదాలను గుర్తించి సమూహాలుగా రాయండి.

(i) $a^2, b^2, -2a^2, c^2, 4a$	(ii) $3a, 4xy, -yz, 2zy$
(iii) $-2xy^2, x^2y, 5y^2x, x^2z$	(iv) $7p, 8pq, -5pq, -2p, 3p$
- కింది సమాసాలు సంఖ్యాసమాసాలో, బీజీయ సమాసాలో గుర్తించి రాయండి.

(i) $x + 1$	(ii) $3m^2$	(iii) $-30 + 16$
(iv) $4p^2 - 5q^2$	(v) 96	(vi) $x^2 - 5yz$
(vii) $215x^2yz$	(viii) $95 \div 5 \times 2$	(ix) $2 + m + n$
(x) $310 + 15 + 62$	(xi) $11a^26b^2 - 5$	
- ఈ కింద ఇవ్వబడిన బహుళ పదులలో ఏవి ఏకపది, ద్విపది, త్రిపది అగునో గుర్తించి రాయండి.

(i) y^2	(ii) $4y - 7z$	(iii) $1 + x + x^2$
(iv) $7mn$	(v) $a^2 + b^2$	(vi) $100xyz$
(vii) $ax + 9$	(viii) $p^2 - 3pq + r$	(ix) $3y^2 - x^2y^2 + 4x$
(x) $7x^2 - 2xy + 9y^2 - 11$		
- కింది ప్రతి ఏకపది యొక్క పరిమాణం ఎంత?

(i) $7y$	(ii) $-xy^2$	(iii) xy^2z^2
(iv) $-11y^2z^2$	(v) $3mn$	(vi) $-5pq^2$
- కింది బీజీయ సమాసాల పరిమాణం కనుగొనండి.

(i) $3x - 15$	(ii) $xy + yz$	(iii) $2y^2z + 9yz - 7z - 11x^2y^2$
(iv) $2y^2z + 10yz$	(v) $pq + p^2q - p^2q^2$	(vi) $ax^2 + bx + c$
- ఒకే పరిమాణం గల ఏవైనా రెండు బీజీయ సమాసాలను రాయండి.

10.5 సజాతి పదాల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం

కింది సమస్యలను పరిశీలించండి.

- సిద్ధ వద్ద కొన్ని పెన్సిల్లలు ఉన్నాయి. వినట్టు వద్ద సిద్ధ వద్ద ఉన్న పెన్సిల్ల కంటే నాలుగురెట్లు ఎక్కువ పెన్సిల్లు ఉన్నాయి. ఇద్దరి వద్ద ఉన్న మొత్తం పెన్సిల్ల సంఖ్య ఎంత?
 
- టోని మరియు బాషాలు దుకాణానికి వెళ్ళారు. టోని 7 పుస్తకాలు కొన్నాడు మరియు బాషా 2 పుస్తకాలు కొన్నాడు. పుస్తకాలన్నీ ఒకే ధరని అయితే టోని బాషాకంటే ఎంత ఎక్కువ డబ్బు చెల్లించాలి?
 

ఇలాంటి సమస్యలకు సమాధానం కావాలి అంటే మనం సజాతి పదాలు కూడటం మరియు తీసివేయడం ఎలా? అనుసది తెలుసుకోవాలి.

ఇప్పుడు మనం సమస్య 1, 2 లకు సమాధానాలు తెలుసుకుండాం.

1. సిద్ధా వద్ద ఎన్ని పెన్నిళ్ళు ఉన్నాయో సమస్యలో ఇవ్వలేదు. కాబట్టి పెన్నిల్లల సంఖ్య 'x' అనుకుండాం.
వినయ్ వద్ద ఉన్న పెన్నిళ్ళు సిద్ధా వద్దగల పెన్నిళ్ళ సంఖ్యకు నాలుగురెట్లున్నాయి. కావున $4 \times x = 4x$
ఇద్దరి వద్ద ఉన్న మొత్తం పెన్నిళ్ళ సంఖ్య కావాలంటే x మరియు $4x$ ను కూడాలి.

$$\begin{aligned} \text{కావున మొత్తం పెన్నిళ్ళ సంఖ్య} &= x + 4x \\ &= (1 + 4)x \\ &= 5x \quad (\text{విభాగ న్యాయం నుంచి}) \end{aligned}$$
2. పున్తకం వెల సమస్యలో ఇవ్వబడలేదు. కాబట్టి 'y' అనుకుండాం.
కాబట్టి టోని ఖర్చు $7 \times y = ₹7y$
భాషా ఖర్చు $2 \times y = ₹2y$

$$\begin{aligned} \text{కాబట్టి టోని భాషాకంటే ఎక్కువగా చెల్లించాలిన డబ్బు} &= 7y - 2y \\ &= (7-2)y \\ &= ₹5y. \quad (\text{విభాగ న్యాయం ప్రకారం}) \end{aligned}$$

టై పరిశీలనల నుంచి $x + 4x = 5x, 7y - 2y = 5y$.

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సజాతి పదాల మొత్తం ఒక సజాతి పదం మరియు ఆ ఫలిత సజాతి పదం యొక్క సంఖ్యగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్య గుణకాల మొత్తానికి సమానం.

రెండు సజాతి పదాల బేధం ఒక సజాతి పదం. ఆ ఫలిత సజాతి పదం యొక్క సంఖ్యగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్య గుణకాల బేధానికి సమానం.

ఇవి చేయండి.

1. సజాతి పదాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి.

(i) $5x, 7x$	(ii) $7x^2y, -6x^2y$	(iii) $2m, 11m$
(iv) $18ab, 5ab, 12ab$	(v) $3x^2, -7x^2, 8x^2$	
(vi) $4m^2, 3m^2, -6m^2, m^2$	(vii) $18pq, -15pq, 3pq$	
2. రెండవ పదం నుంచి మొదటి పదాన్ని తీసివేయండి.

(i) $2xy, 7xy$	(ii) $5a^2, 10a^2$	(iii) $12y, 3y$
(iv) $6x^2y, 4x^2y$	(v) $6xy, -12xy$	



10.5.1 విజాతి పదాల కూడిక మరియు తీసివేత

$3x$ మరియు $4y$ లు విజాతి పదాలు. వాటి మొత్తాన్ని $3x + 4y$ గా ప్రాయపడు.

' x ', ' y ' లు వేరు వేరు చరరాశులు. కాబట్టి విభాగ న్యాయాన్ని ఉపయోగించి వాటిని కూడలేదు.

10.6 బీజీయ సమాస సూక్ష్మకరణ

$$9x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xy - y^2 - 3x^2 + 6xy$$

అను బీజీయ సమాసాన్ని తీసుకొండి. ఈ సమాసంలో $-9x^2, -3x^2; 5y^2, y^2$ మరియు $-4xy, +6xy$ లు సజాతి పదాలు. ఈ సజాతి పదాలను సంకలనం చేయడం ద్వారా బీజీయ సమాసాన్ని సూక్ష్మరూపంలో పొందవచ్చు.

పై బీజీయ సమాసాన్ని ఎలా సూక్ష్మకరిస్తారో మనం చూదాం.

క్ర.సం.	సోపానాలు	విధానము
1.	ఇచ్చిన బీజీయ సమాసం వ్రాయండి	$9x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xy - y^2 - 3x^2 + 6xy$
2.	సజాతి పదాలను ఒకదగ్గరికి చేర్చండి.	$(9x^2 - 3x^2) + (2xy - 4xy + 6xy) + (5y^2 - y^2)$
3.	సజాతి పదాలను కూడండి.	$(9 - 3)x^2 + (2 - 4 + 6)xy + (5 - 1)y^2$ $= 6x^2 + 4xy + 4y^2$

గమనిక : ఒక సమాసంలో ఏ రెండు పదాలు సజాతి పదాలు కాకుంటే అది సూక్ష్మ రూపంలో ఉంది అనిఅంటాం.

మరొక ఉదాహరణ $5x^2y + 2x^2y + 4 + 5xy^2 - 4x^2y - xy^2 - 9$ ను పరిశీలించాం.

సోపానము 1 : $5x^2y + 2x^2y + 4 + 5xy^2 - 4x^2y - xy^2 - 9$

సోపానము 2 : $(5x^2y + 2x^2y - 4x^2y) + (5xy^2 - xy^2) + (4 - 9)$ (సజాతి పదాలను ఒకే దగ్గరకు చేర్చటం)

సోపానము 3 : $3x^2y + 4xy^2 - 5$

ఇవి చేయండి

1. సూక్ష్మకరించండి.

- | | | | | |
|-------|-----------------------------------|------|---|---|
| (i) | $3m + 12m - 5m$ | (ii) | $25yz - 8yz - 6yz$ |  |
| (iii) | $10m^2 - 9m + 7m - 3m^2 - 5m - 8$ | (iv) | $9x^2 - 6 + 4x + 11 - 6x^2 - 2x + 3x^2 - 2$ | |
| (v) | $3a^2 - 4a^2b + 7a^2 - b^2 - ab$ | (vi) | $5x^2 + 10 + 6x + 4 + 5x + 3x^2 + 8$ | |

10.7 బీజీయ సమాసం ప్రామాణిక రూపం

$3x + 5x^2 - 9$ ని తీసుకోండి. ఇందులోని మొదటి, రెండు మరియు మూడవ పదాల పరిమాణాలు వరుసగా 1, 2 మరియు 0. పదాల పరిమాణాలు అవరోహణ క్రమం (తగ్గీ క్రమం)లో లేవు అని మనం గమనించవచ్చు.

పదాల పరిమాణాలు తగ్గీ క్రమంలో ప్రాస్తే పై బీజీయ సమాసం $5x^2 + 3x - 9$ గా మారుతుంది. ఈ రూపంలో ఉండే బీజీయ సమాసాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో ఉందని అంటాము. $3c + 6a - 2b$ ని గమనించండి. సమాసంలోని అన్ని పదాల పరిమాణాలు సమానం. కాబట్టి ఈ సమాసము ప్రామాణిక రూపంలోనే ఉంది. దీనిని మరింత అందంగా a, b, c లవరుసలో రాయటకు $6a - 2b + 3c$ గా రాస్తాం.

ఒక బీజీయ సమాసంలోని పదాల పరిమాణాలు అవరోహణ (తగ్గీ) క్రమంలో ఉంటే ఆ బీజీయ సమాసం ప్రామాణిక రూపంలో ఉండి అంటారు.

$$\text{ప్రామాణిక రూపంలో ఉండే బీజీయ సమాసానికి ఉదాహరణ (i) } 7x^2 + 2x + 11 \quad (\text{ii}) \quad 5y^2 - 6y - 9$$

ఇవి చేయండి

1. కింది సమాసాలను ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి.

$$(\text{i}) \quad 3x + 18 + 4x^2$$

$$(\text{ii}) \quad 8 - 3x^2 + 4x$$

$$(\text{iii}) \quad -2m + 6 - 3m^2$$

$$(\text{iv}) \quad y^3 + 1 + y + 3y^2$$

2. కింది సమాసాలలో ప్రామాణిక రూపంలో ఉన్నవాటిని గుర్తించండి.

$$(\text{i}) \quad 9x^2 + 6x + 8$$

$$(\text{ii}) \quad 9x^2 + 15 + 7x$$

$$(\text{iii}) \quad 9x^2 + 7$$

$$(\text{iv}) \quad 9x^3 + 15x + 3$$

$$(\text{v}) \quad 15x^2 + x^3 + 3x$$

$$(\text{vi}) \quad x^2y + xy + 3$$

$$(\text{vii}) \quad x^3 + x^2y^2 + 6xy$$

3. ప్రామాణిక రూపంలోని ఏవయినా 5 బీజీయ సమాసాలు రాయండి.

10.8 ఒక సమాసం యొక్క విలువ కనుగొనటం

ఉదాహరణ 1 : $x = -1$ అయినపుడు $3x^2$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన : సోపానం 1 : $3x^2$ (ఇచ్చిన సమాసాన్ని రాయండి)

సోపానం 2 : $3(-1)^2$ (చరరాశి విలువను ప్రతిక్షేపించండి)

సోపానం 3 : $3(1) = 3$

ఉదాహరణ 2 : $x = 0$ మరియు $y = -1$ అయితే $x^2 - y + 2$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన : సోపానం 1 : $x^2 - y + 2$ (ఇచ్చిన సమాసాన్ని రాయండి)

సోపానం 2 : $0^2 - (-1) + 2$ (చరరాశి విలువలు ప్రతిక్షేపించండి)

సోపానం 3 : $1 + 2 = 3$

ఉదాహరణ 3 : త్రిభుజ వైశాల్యము $A = \frac{1}{2}bh$ మరియు $b = 12$ సె.మీ., $h = 7$ సె.మీ. అయితే త్రిభుజ

వైశాల్యం ఎంత?

సాధన : సోపానం 1 : $A = \frac{1}{2}bh$

సోపానం 2 : $A = \frac{1}{2} \times 12 \times 7$

సోపానం 3 : $A = 42$ చ.సె.మీ.





ప్రయత్నించండి

- $x = -3$ అయితే ' $-9x$ ' యొక్క విలువ కనుగొనండి.
- $x = -3$ అయినప్పుడు సమాసం విలువ -9 అయ్యేట్లు ఒక బీజీయ సమాసాన్ని ప్రాయండి.

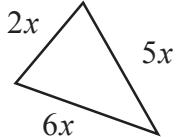


అభ్యాసం - 3

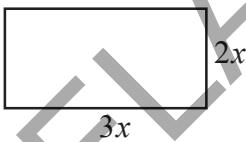
- PR రేఖాఖండము యొక్క పొడవును 'a' పదాలలో కనుక్కోండి.

$$P \xleftarrow{3a} Q \xrightarrow{2a} R$$

- (i) కింది త్రిభుజం యొక్క చుట్టూకొలతను కనుగొనండి.



- (ii) కింది దీర్ఘచతురం యొక్క చుట్టూకొలతను కనుగొనండి.



- మొదటి పదం నుండి రెండవ పదాన్ని తీసివేయండి.

(i) $8x, 5x$ (ii) $5p, 11p$ (iii) $13m^2, 2m^2$

- $x = 1$ అయినప్పుడు కింది ఏకపదుల విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $-x$ (ii) $4x$ (iii) $-2x^2$

- $4x + x - 2x^2 + x - 1$ సమాసాన్ని సూక్ష్మికరించి $x = -1$ అయినప్పుడు దానివిలువ లెక్కించండి.

- $5x^2 - 4 - 3x^2 + 6x + 8 + 5x - 13$ ను సూక్ష్మికరించండి. $x = -2$ అయినప్పుడు ఆ సమాసం విలువ కనుక్కోండి.

- $x = 1 ; y = 2$ అయినప్పుడు కింది సమాసాల విలువలను కనుక్కోండి.

(i) $4x - 3y + 5$ (ii) $x^2 + y^2$ (iii) $xy + 3y - 9$

- దీర్ఘచతురం వైశాల్యము $A = l \times b$. $l = 9$ సె.మీ., $b = 6$ సె.మీ. అయినప్పుడు దీర్ఘచతురం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

- బారువడ్డి $I = \frac{PTR}{100}$, $P = ₹ 900$, $T = 2$ సంవలు; మరియు $R = 5\%$, అయిన బారువడ్డిని కనుక్కోండి.

10. వేగం, దూరం మరియు కాలంల మధ్య సంబంధము $s = \frac{d}{t}$ గా ఇవ్వబడింది. దూరము $d = 135$ మీటర్లు మరియు $t = 10$ సెకండ్లు అయిన వేగము s ను కనుకోండి.

10.9 బీజీయ సమాసాల సంకలనం, వ్యవకలనం

కింది సమస్యలను పరిశీలించండి.

1. సమీర వద్ద కొన్ని మామిడి పళ్ళు గలవు. పద్మ వద్ద సమీరకంటే 9 ఎక్కువ ఉన్నాయి. మేరి తన వద్ద సమీర, పద్మల వద్ద ఉన్న మొత్తం మామిడి పళ్ళకంటే 4 ఎక్కువగా ఉన్నాయి అని చెప్పింది. అయితే మేరి వద్ద ఉన్న మామిడి పళ్ళు ఎన్ని?



సమీర వద్ద ఎన్ని మామిడి పళ్ళు ఉన్నాయో మనకు తెలియదు. కాబట్టి ఆమె వద్ద x మామిడి పళ్ళున్నాయి అనుకుందాం.

పద్మ వద్ద సమీరకంటే 9 ఎక్కువ మామిడి పళ్ళున్నాయి.

$$\text{కాబట్టి, పద్మ వద్ద ఉన్నవి} = x + 9 \text{ మామిడిపళ్ళు}$$

మేరి వద్ద ఉన్న పండ్ల సంఖ్య సమీర, పద్మల వద్ద ఉన్న మొత్తం మామిడి పండ్ల సంఖ్య కంటే 4 ఎక్కువ.

$$\text{కాబట్టి మేరి వద్ద ఉన్న మామిడిపళ్ళు} = x + (x + 9) + 4$$

$$= 2x + 13 \text{ మామిడిపళ్ళు}$$

2. ఒక గణిత పరీక్షలో ఇహ్నాన్ కంటే రాజుకు 11 మార్పులు ఎక్కువగా వచ్చినవి. రాపుల్కు రాజు మరియు ఇహ్నాన్లకు కలిపి వచ్చిన మొత్తం మార్పులు కంటే 4 మార్పులు తక్కువగా వచ్చినవి. అయితే రాపుల్కు వచ్చిన మార్పులు ఎన్ని?

మనకు ఇహ్నాన్కు వచ్చిన మార్పులు తెలియవు. కాబట్టి ఇహ్నాన్కు వచ్చినవి x మార్పులు అనుకొందాం.

రాజుకు ఇహ్నాన్కంటే 11 మార్పులు ఎక్కువగా వచ్చాయి. కాబట్టి రాజుకు వచ్చినవి $= x + 11$ మార్పులు

రాపుల్కు మిగిలిన ఇఛ్చరి మార్పుల మొత్తం కంటే 4 తక్కువగా వచ్చాయి. కావున రాపుల్కు వచ్చిన మార్పులు

$$= x + (x + 11) - 4 \text{ మార్పులు}$$

$$= 2x + 7 \text{ మార్పులు}$$

పై రెండు సందర్భాలలో మనం బీజీయ సమాసాలను సంకలనం, వ్యవకలనం చేయాల్చి వచ్చింది. నిత్యజీవితంలో మనం చాలా సందర్భాలలో ఇలాంటి సమస్యలు సాధించడానికి బీజీయసమాసాలను కూడటం, తీసివేయడం చేయాలి. ఇప్పుడు మనం బీజీయ సమాసాలను కూడటం తీసివేయడం నేర్చుకుందాం.

10.9.1 బీజీయ సమాసాల సంకలనం

సజాతి పదాలను కూడటం ద్వారా సమాసాలను సంకలనం చేస్తాం. దీనిని రెండు పద్ధతులలో చేయవచ్చు.

(i) నిలవు వరుస పద్ధతి లేదా దొంతి పద్ధతి

(ii) అడ్డవరుస పద్ధతి లేదా పంక్తి పద్ధతి

(i) దొంతి లేదా నిలవు వరుస పద్ధతి

ఉదాహరణ 4 : $3x^2 + 5x - 4$ మరియు $6 + 6x^2$ లను కూడండి.

సాధన :

క్రమసంఖ్య	సోపానములు	విధానము
1	బీజీయ సమాసాలు ప్రామాణిక రూపంలో లేనిచో వాటిని ప్రామాణిక రూపంలో రాయండి	(i) $3x^2 + 5x - 4 = 3x^2 + 5x - 4$ (ii) $6 + 6x^2 = 6x^2 + 6$
2	సజాతి పదాలు ఒకదాని కింద ఒకటి వచ్చునట్లు బీజీయ సమాసాలన్నీ నిలవు వరుసలలో ఒకదానికింద ఒకటి రాయండి.	$3x^2 + 5x - 4$ $6x^2 + 6$
3.	ఒకే నిలవు వరుసలోఉన్న సజాతి పదాలను కూడి ఘనితాన్ని దాని కింద అదే నిలవు వరుసలో రాయుము	$3x^2 + 5x - 4$ $6x^2 + 6$ <hr/> $9x^2 + 5x + 2$

ఉదాహరణ 5 : $5x^2 + 9x + 6, 4x + 3x^2 - 8$ మరియు $5 - 6x$ లను కూడండి.

సోపానం 1 : $5x^2 + 9x + 6 = 5x^2 + 9x + 6$

$4x + 3x^2 - 8 = 3x^2 + 4x - 8$

$5 - 6x = -6x + 5$

సోపానం 2 : $5x^2 + 9x + 6$
 $3x^2 + 4x - 8$
 $-6x + 5$



సోపానం 3 : $5x^2 + 9x + 6$
 $3x^2 + 4x - 8$
 $-6x + 5$

 $8x^2 + 7x + 3$

(ii) అడ్డవరుస లేదా పంక్తి పద్ధతి

ఉదాహరణ 6 : $3x^2 + 5x - 4$ మరియు $6 + 6x^2$ లను కూడండి.

క్ర. న.	సోపానాలు	విధానము
1	ఇచ్చిన బీజీయ సమాసాలను సంకలనం గుర్తు + ను ఉపయోగించి కలిపి రాయండి.	$3x^2 + 5x - 4 + 6 + 6x^2$
2	సజాతి పదాలను సమూహాలుగా చేర్చి సమాసాన్ని తిరగ రాయండి.	$(3x^2 + 6x^2) + (5x) + (-4 + 6)$
3	గుణకాలను సూక్ష్మికరించండి.	$(3+6)x^2 + 5x + 2$
4	ఫలిత సమాసాన్ని ప్రమాణ రూపంలో రాయండి.	$9x^2 + 5x + 2$

ఇవి చేయండి.

1. కింది బీజీయ సమాసాలను సంకలనం చేయండి.

- (i) $x - 2y, 3x + 4y$
- (ii) $4m^2 - 7n^2 + 5mn, 3n^2 + 5m^2 - 2mn$
- (iii) $3a - 4b, 5c - 7a + 2b$



బీజీయ సమాసాల వ్యవకలనం

10.9.2 (అ) సమాసము యొక్క సంకలన విలోపము

మనం ఒక ధనసంఖ్య 9 ను తీసుకొంటే $9 + (-9) = 0$ అయ్యేటట్లు '-9' వ్యవస్థితం ఆవుతుంది..

మనం '9' సంకలన విలోపమం '-9' అని మరియు '-9' సంకలన విలోపము '9' అని వ్యవహరిస్తాం.

కాబట్టి ప్రతి ధనసంఖ్యకూ ఒక బయణసంఖ్య రెండు సంఖ్యల మొత్తం సున్నా అయ్యేవిధంగా వ్యవస్థితమవుతుంది.
ఈ రెండు సంఖ్యలను ఒకదానికొకటి పరస్పరము సంకలన విలోపములుగా పిలుస్తాము.

బీజీయ సమాసాల విషయంలో ఇది సత్యమవుతుందా? ప్రతి బీజీయ సమాసానికి సంకలన విలోపము ఉంటుందా?
ఉంటే ' $3x$ ' యొక్క సంకలన విలోపము ఏది?

' $3x$ ' కు $3x + (-3x) = 0$ అయ్యేటట్లు '- $3x$ ' వ్యవస్థితం ఆవుతుంది.

కాబట్టి ' $3x$ ' యొక్క సంకలన విలోపము ' $-3x$ ' మరియు ' $-3x$ ' యొక్క సంకలన విలోపము ' $3x$ '

కనుక ప్రతి బీజీయ సమాసానికి మరొక బీజీయ సమాసము రెండు సమాసాల మొత్తం సున్నా అగునట్లుగా వ్యవస్థితము ఆవుతుంది. మరియు ఈ రెండు బీజీయ సమాసాలను ఒకదానికొకటి సంకలన విలోపాలు అని అంటారు.

ఉదాహరణ 6 : $(6x^2 - 4x + 5)$ యొక్క సంకలన విలోపాన్ని కనుగొనండి.

$$\text{సాధన : } 6x^2 - 4x + 5 \text{ యొక్క సంకలన విలోపము} = -(6x^2 - 4x + 5) = -6x^2 + 4x - 5$$

10.9.2 (ఆ) వ్యవకలనము

A, B లు రెండు బీజీయ సమాసాలు అనుకుందాం. $A - B = A + (-B)$

అంటే A నుంచి B ను తీసివేయడానికి A కు B యొక్క సంకలన విలోపాన్ని కూడాలి.

ఇప్పుడు మనం బీజీయ సమాసాలను నిలువు వరుస మరియు అడ్డవరుస పద్ధతులలో తీసివేయటం ఎలాగో నేర్చుకుందాం.

(i) నిలువు వరుస పద్ధతి

ఉదాహరణ 7 : $3c + ba - 2b$ నుంచి $3a + 4b - 2c$ ను తీసివేయండి.

సాధన :

క్ర. న.	సోపానాలు	విధానము
1	రెండు బీజీయ సమాసాలను అవసరం అయితే ప్రామాణిక రూపంలో ప్రాయాలి.	$3c + 6a - 2b = 6a - 2b + 3c$ $3a + 4b - 2c = 3a + 4b - 2c$
2	రెండు బీజీయ సమాసాలను సజాతి పదాలు ఒకదానికింద ఒకటి ఉండునట్లు ప్రాయాలి. తీసివేయాల్సిన సమాసాన్ని రెండవ అడ్డవరుసలో ప్రాయాలి.	$6a - 2b + 3c$ $3a + 4b - 2c$
3	రెండవ అడ్డవరుసలోని బీజీయ సమాసం యొక్క సంకలన విలోపం ప్రాయిటకు దాని ప్రతి పదం గుర్తు మార్చాలి.	$6a - 2b + 3c$ $3a + 4b - 2c$
4	నిలువు వరుసలోని సజాతి పదాలు కూడి ఫలితాన్ని దిగువన ప్రాయాలి.	$6a - 2b + 3c$ $3a + 4b - 2c$ $3a - 6b + 5c$

ఉదాహరణ 8 : $4m^2 + 7m - 3$ నుంచి $4 + 3m^2$ తీసివేయండి.

$$\text{సోపానం 1 : } 4m^2 + 7m - 3 = 4m^2 + 7m - 3$$

$$4 + 3m^2 = 3m^2 + 4$$

$$\begin{aligned} \text{సోపానం 2 : } & 4m^2 + 7m - 3 \\ & 3m^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{సోపానం 3 :} \\
 4m^2 + 7m - 3 \\
 3m^2 + 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{సోపానం 4 :} \\
 4m^2 + 7m - 3 \\
 3m^2 + 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$m^2 + 7m - 7$$

(ii) అడ్డవరుస పద్ధతి :

ఉదాహరణ 9 : $3c + 6a - 2b$ ను $3a + 4b - 2c$ నుంచి తీసివేయండి.

సాధన :

క్ర. స.	సోపానాలు	విధానము
1	తీసివేయాల్సిన బీజీయ సమాసాన్ని బ్రాకెట్లో ఉంచి దాని ముందు మైన్స్ గుర్తు రాస్తూ ఇచ్చిన అన్నిసమాసాలను ఒకే అడ్డవరుసలో ప్రాయాలి.	$3c + 6a - 2b - (3a + 4b - 2c)$
2	మొదటి సమాసానికి రెండవ సమాసం యొక్క సంకలన విలోమమును కూడాలి.	$3c + 6a - 2b - 3a - 4b + 2c$
3	సజ్ఞాతి పదాలను సమూహాలుగా రాసి సూక్ష్మికరించాలి.	$(3c + 2c) + (6a - 3a) + (-2b - 4b)$ $= 5c + 3a - 6b$
4	ఫలితాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో ప్రాయాలి.	$3a - 6b + 5c$

ఉదాహరణ 10 : $6m^3 + 4m^2 + 7m - 3$ నుంచి $3m^3 + 4$ తీసివేయము.

సాధన :

$$\text{సోపానం 1 : } 6m^3 + 4m^2 + 7m - 3 - (3m^3 + 4)$$

$$\text{సోపానం 2 : } 6m^3 + 4m^2 + 7m - 3 - 3m^3 - 4$$

$$\text{సోపానం 3 : } (6m^3 - 3m^3) + 4m^2 + 7m - 3 - 4$$

$$= 3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$$

$$\text{సోపానం 4 : } 3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$$





అభ్యాసము - 4

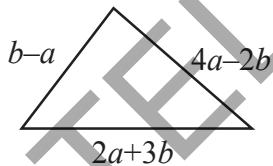
1. ఈ కింది బీజీయ సమాసాలను అడ్డవరున పద్ధతిలోనూ మరియు నిలవు వరున పద్ధతిలోనూ సంకలనం చేయండి. రెండు పద్ధతులలో ఒకే సమాధానము వచ్చినదా?

 - $x^2 - 2xy + 3y^2$; $5y^2 + 3xy - 6x^2$
 - $4a^2 + 5b^2 + 6ab$; $3ab$; $6a^2 - 2b^2$; $4b^2 - 5ab$
 - $2x + 9y - 7z$; $3y + z + 3x$; $2x - 4y - z$
 - $2x^2 - 6x + 3$; $-3x^2 - x - 4$; $1 + 2x - 3x^2$

2. $2x^2 + 5x - 1 + 8x + x^2 + 7 - 6x + 3 - 3x^2$ ను సూక్షీకరించండి.

$$\begin{array}{r} 6x + y \\ \hline 3x - 2y \end{array}$$

4. $2a + 3b, b-a, 4a-2b$ భుజాలు గల త్రిభుజం చుట్టూకొలతను కనుగొనండి.



5. మొదటి బీజీయ సమాసం నుంచి రెండవ బీజీయ సమాసాన్ని తీసివేయండి.

- (i) $2a+b, a-b$
(ii) $x+2y+z, -x-y-3z$
(iii) $3a^2-8ab-2b^2, 3a^2-4ab+6b^2$
(iv) $4pq-6p^2-2q^2, 9p^2$
(v) $7-2x-3x^2, 2x^2-5x-3$
(vi) $5x^2-3xy-7y^2, 3x^2-xy-2y^2$
(vii) $6m^3+4m^2+7m-3, 3m^3+4$

6. $6x^2 - 8xy - y^2$ మరియు $2xy - 2y^2 - x^2$ ల మొత్తం నుంచి $x^2 - 5xy + 2y^2$ మరియు $y^2 - 2xy - 3x^2$ ల మొత్తాన్ని తీసివేయండి.

7. $1 + 2x - 3x^2$ కు ఎంత కలిపినచో $x^2 - x - 1$ వస్తుంది?

8. $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ నుంచి ఎంత తీసివేసిన $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ వస్తుంది?

9. మూడు సమాసాల మొత్తం $8 + 13a + 7a^2$ వానిలో రెండు సమాసాలు $2a^2 + 3a + 2$ మరియు $3a^2 - 4a + 1$ అయితే మూడవ సమాసాన్ని కనుగొనండి.
10. A = $4x^2 + y^2 - 6xy$;
 B = $3y^2 + 12x^2 + 8xy$;
 C = $6x^2 + 8y^2 + 6xy$ అయితే
 (i) A + B + C (ii) (A - B) - C (iii) 2A + B (iv) A - 3B విలువలను కనుకోరడి.



మనం నేర్చుకున్నవి

- బీజీయ పదాలను లేదా సంఖ్యాపదాలను '+' (ప్లస్), '-' (మైనస్) గుర్తులచే కలుపబడిన సమాసాన్ని బీజీయ సమాసము అంటారు.
- ఒక సమాసములో ప్రతి పదము స్థిరపదము అయితే ఆ సమాసాన్ని సంఖ్యా సమాసమని అంటారు. ఒక సమాసంలోని పదాలలో కనీసం ఒకటయినా బీజీయ పదం ఉంటే దానిని బీజీయ సమాసము అని అంటారు.
- ఒకే పదం కలిగిన సమాసాన్ని ఏకపది అంటారు. రెండు విజాతి పదాలు కలిగివున్న సమాసాన్ని ద్విపది అంటారు. మూడు విజాతి పదాలు కలిగివున్న సమాసాన్ని త్రిపది అంటారు. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విజాతి పదాలు కలిగిన సమాసాన్ని బహుళపది అని అంటారు. ద్విపది, త్రిపదులు కూడా బహుళపదులే అయినా వాటిని ప్రత్యేకమయిన పేర్లతో పిలుస్తారు.
- ఒక ఏకపదిలోని చరరాశుల ఫూతాంకాల మొత్తాన్ని ఆ ఏకపది పరిమాణం అని అంటారు.
- స్థిరాంకం యొక్క పరిమాణం సున్న
- ఒక సమాసంలోని అన్ని పదాల పరిమాణాలలో మిక్కిలి పెద్దదానిని ఆ సమాసము యొక్క పరిమాణం అని అంటాం.
- ఒక సమాసంలోని ఏ రెండు పదాలు కూడా సజాతి పదాలు కానిచో ఆ సమాసం సూక్ష్మ రూపంలో ఉంది అని అంటాం.
- ఒక సమాసంలో పదాల పరిమాణాలు అవరోహణ క్రమంలో ఉంటే ఆ సమాసం ప్రామాణిక రూపంలో ఉంది అని అంటాం.
- రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సజాతి పదాల మొత్తం ఒక సజాతిపదం మరియు ఆ ఘలిత సజాతిపదం యొక్క సంఖ్యాగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్యా గుణకాల మొత్తానికి సమానం.
- రెండు సజాతి పదాల బేధం ఒక సజాతి పదం మరియు ఆ ఘలిత సజాతిపదం యొక్క సంఖ్యాగుణకం దత్త సజాతి పదాల సంఖ్యా గుణకాల బేధానికి సమానం.

ఫూతాలు మరియు ఫూతాంకాలు

11.0 పరిచయం

2011 జనాభాలెక్కల ప్రకారం భారతదేశ జనాభా దాదాపు 120,00,00,000 గావుంది.

సూర్యుడు, మరియు భూమి మధ్యదూరం దాదాపుగా 15,00,00,000 కి.మీ.

శూన్యంలో కాంతి వేగం సెకనుకు, 30,00,00,000 మీ. దూరం ప్రయాణిస్తుంది.

2011 జనాభా లెక్కల సేకరణ ప్రకారం ఆంధ్రప్రదేశ్ జనాభా దాదాపుగా 8,50,00,000 గా వుంది.

ఇవి అన్నీ చాలా పెద్ద సంబ్యులు. వీటిని ప్రాయడం, చదవడం, అర్థం చేసుకోవడం సులభమేనా? ఖచ్చితంగా సులభం కాదు అని చెప్పవచ్చు. కాబట్టి పెద్దసంబ్యులను సరళమయిన రీతిలో వ్యక్తపరచడానికి మనకు ఒక పద్ధతి అవసరం. ఆ విధంగా వ్యక్తపరచడానికి ఫూతాలు మనకు దోహదపడతాయి. ఈ అధ్యాయంలో మీరు ఫూతాలు మరియు ఫూతాంక న్యాయాల గురించి వివరంగా తెలుసుకుంటారు.

11.1 ఫూత రూపం

ఈ కింది పునరావృత సంకలనాలను పరిశీలించాం.

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$$

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

మనం ఈ పునరావృత సంకలనాల సూక్ష్మకరణను గుణకారాన్ని ఉపయోగించి వరుసగా 5×4 , 6×5 మరియు 8×7 రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చు.

ఇదే విధంగా ఒకసంఖ్య యొక్క పునరావృత గుణకారాన్ని కూడా సరళమయిన రీతిలో వ్యక్తపరచవచ్చా?

ఈ క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి.

2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం బీపోర్ రాష్ట్ర జనాభా సుమారుగా 10,00,00,000.

ఇక్కడ 10 అనే సంఖ్య 8 సార్లు గుణించబడింది. $10 \times 10 \times 10$

కాబట్టి బీపోర్ రాష్ట్ర జనాభాను 10^8 చే సూక్ష్మరూపంలో సూచించవచ్చు. ఇందులో 10ని భూమి లేక ఆధారము అని 8 ని ఫూతాంకమని అంటాం. 10^8 ని ఫూతరూపం అని అంటాం. 10^8 ని “10 యొక్క 8వ ఫూతం” అని చదువుతాం.

శూన్యంలో కాంతివేగం 30,00,00,000 మీ/సె. దీన్ని ఫూతరూపంలో 3×10^8 మీ/సె.గా వ్యక్తపరస్తాం. 10^8 లో 10 ని ఆధారం లేక భూమి అని 8 ని ఫూతాంకం అని అంటాం. “10 యొక్క 8వ ఫూతం” అని చదువుతాం.

సూర్యుడు మరియు భూమి మధ్య దూరము సుమారుగా $15,00,00,000$ కి.మీ. ఉంటుంది. దీనిని ఘూతరూపంలో $15 \times 100,00,000 = 15 \times 10^7$ కి.మీ.గా ప్రాస్తాము. 10^7 లో 10 ని భూమి అని 7 ను ఘూతాంకమని ఆంటాం.

2011 జనాభా లెక్కల ప్రకారం ఆంధ్రప్రదేశ్ జనాభా దాదాపుగా $8,50,00,000$. దీనిని ఘూతరూపంలో 85×10^6 గా వ్యక్తపరుస్తాము. 10^6 లో 10 భూమి మరియు 6 ఘూతాంకం. దీనిని “10 యొక్క 6 వ ఘూతం” గా చదువుతాం.

ఘూతాంకాలను ఉపయోగించి మనం ఒకసంఖ్య యొక్క విస్తృత రూపాన్ని కూడా ప్రాయపచ్చ.

ఉదాహరణకు $36,584$ యొక్క విస్తృత రూపం.

$$\begin{aligned} 36584 &= (3 \times 10000) + (6 \times 1000) + (5 \times 100) + (8 \times 10) + (4 \times 1) \\ &= (3 \times 10^4) + (6 \times 10^3) + (5 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (4 \times 1) \end{aligned}$$

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటిని ఘూతరూపంలో ప్రాయండి. (విలువలు సవరింపబడినవి)



- (i) భూమి యొక్క సంపూర్ణ ఉపరితల వైశాల్యం $51,00,00,00,000$ చ.కి.మీ.
- (ii) రాజస్థాన్ రాష్ట్ర జనాభా దాదాపుగా $7,00,00,000$.
- (iii) భూమి యొక్క వయస్సు దాదాపుగా 4550 మిలియన్ సంవత్సరాలు
- (iv) 1000 కి.మీ. లను మీటర్లలో.

2. (i) 48951 (ii) 89325 లను ఘూతాంకాల నుపయోగించి విస్తృత రూపంలో ప్రాయండి.

11.1.1 వేరువేరు భూములు గల ఘూతాలు

జంతవరకు మనం 10 భూమిగా కలిగిన సంఖ్యలను గురించి చర్చించాం. కానీ భూమిగా ఏ సంఖ్య అయినా ఉండవచ్చు.

ఉదాహరణకు $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

జక్కడ భూమి = 3, ఘూతాంకం = 4

$125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

జక్కడ భూమి = 5, మరియు ఘూతాంకం 3.

ఉదాహరణ 1: 3^4 మరియు 4^3 లలో ఎదిపెద్దది?

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$81 > 64$$

కావున $3^4 > 4^3$



ಇವಿ ಚೆಯಂಡಿ.

1. 3^2 అనేది 2^3 కు సమానమా? మీ జవాబును సమర్థించండి.
 2. క్రింది సంఖ్యలను ఫూతరూపంలో రాయండి. వాటి (a) భూమి (b) ఫూతాంకం మరియు (c) ఎలా చదువుతారో సూచించండి.



వర్షము మరియు ఘనము

ఏ భూమినైనా ఘూతాంకం 2 లేదా 3 ఉన్నప్పుడు వాటిని ప్రత్యేకమయిన పేర్లతో పిలుస్తాం.

$10 \times 10 = 10^2$ ను '10 యొక్క 2 వ ఫూతము' లేక '10 యొక్క వర్గము'. అలాగే $4 \times 4 = 4^2$ మరియు "4 యొక్క రెండవ ఫూతము" లేక "4 యొక్క వర్గము" అని చదువుతాం.

$10 \times 10 \times 10 = 10^3$. దీనిని “10 యొక్క 3వ ఘాతం” లేక “10 యొక్క ఘనము” అని చదువుతాం.

$6 \times 6 \times 6 = 6^3$ దీనిని “6 యొక్క 3వ ఘూతం” అని లేక “6 యొక్క ఘునము” అని చదువుతాం.

సాధారణంగా ఏదులునా ఒక ధన సంఖ్య a ను భూమిగా తీసుకొని ఇలా రాశాం.

$a \times a = a^2$ (దీనిని “ a యొక్క రెండవ ఘూతం” లేక “ a యొక్క వర్గము” అని చదువుతాం).

$a \times a \times a = a^3$ (దీనిని 'a యొక్క మూడవ ఫూతం' లేక 'a యొక్క ఘనము' అని చదువుతాం).

$a \times a \times a \times a = a^4$ (దీనిని 'a యొక్క నాలుగవ ఘూతం' అని చదువుతాము).

= a^5 (దీనిని అని చదువుతాం).

= a^6 (దీని) అని చదువుతాం.

ఇక్కడ 'a' భూమి 'm' మూతాంకం

ఇవి చేయండి.



11.2 ఒక సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విభజించి ఘూతరూపంలో రాయడం

ఇచ్చిన సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతిని ఉపయోగించి ఘూతరూపంలో రాయవచ్చు.

(i) 432 (ii) 450

సాధన (i) $432 = 2 \times 216$

$$= 2 \times 2 \times 108$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 54$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$$

$$= 2^4 \times 3^3$$

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

కాబట్టి $432 = 2^4 \times 3^3$

(ii) $450 = 2 \times 225$

$$= 2 \times 3 \times 75$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 25$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$= 2 \times 3^2 \times 5^2$$

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

కాబట్టి $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

ఇవి చేయండి.

(i) 2500

(ii) 1296

(iii) 8000

(iv) 6300



లను ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి నుపయోగించి ఘూతరూపంలో రాయండి.



అభ్యాసం - 1

1. కింది వాటికి ఆధారము, ఘూతాంకములను సూచిస్తూ వాటిని విస్తృత రూపంలో రాయండి.

(i) 3^4

(ii) $(7x)^2$

(iii) $(5ab)^3$

(iv) $(4y)^5$

2. కింద వ్యక్తపరచిన రూపాలకు ఘూతరూపాలను రాయండి.

(i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(ii) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

(iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

3. కింది వాటిని ప్రధాన కారణాంకాల లభ్యంగా రాసి వాటిని ఘూతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.
- (i) 288 (ii) 1250 (iii) 2250 (iv) 3600 (v) 2400
4. కింద ఇవ్వబడిన జతలలో పెద్దదానిని గుర్తించండి.
- (i) $2^3 \times 3^2$ (ii) $5^3 \times 3^5$ (iii) $2^8 \times 8^2$
5. $a = 3, b = 2$ అయిన క్రింది విలువలను కనుక్కొండి.
- (i) $a^b + b^a$ (ii) $a^a + b^b$ (iii) $(a+b)^b$ (iv) $(a-b)^a$

11.3 ఘూతాంక న్యాయాలు

ఘూతరూపంలో ఉన్న పదాల గుణకారం సులభంగా చేయడానికి, వాటి లభ్యాలను కనుగొనడానికి మనం కొన్ని సూట్రాలను ఉపయోగిస్తాము. వాటి గురించి ఇక్కడ చర్చిదాం.

11.3.1 ఒకే ఆధారముగా గల పదాల గుణకారం

ఉదాహరణ 2 : $2^4 \times 2^3$

$$\begin{aligned} \text{పాఠన} : 2^4 \times 2^3 &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \\ &\quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{4 \text{ మార్గు}} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{3 \text{ మార్గు}} \\ &= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7 \text{ మార్గు}} \\ &= 2^7 \text{ మరియు ఇది } 2^{4+3} \text{ కు సమానం} \end{aligned}$$

(ఎందుకంటే $4 + 3 = 7$)



ఉదాహరణ 3: $5^2 \times 5^3$

$$\begin{aligned} \text{పాఠన} : 5^2 \times 5^3 &= (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) \\ &\quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{2 \text{ మార్గు}} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{3 \text{ మార్గు}} \\ &= \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{5 \text{ మార్గు}} \\ &= 5^5 \text{ మరియు ఇది } 5^{2+3} \text{ కు సమానం} \end{aligned}$$

($2 + 3 = 5$ కాబట్టి)

$$\text{కాబట్టి } 5^2 \times 5^3 = 5^{2+3}$$

ఇవి చేయండి.

$2^4, 2^3$ మరియు 2^7 విలువలను కనుగొని

$2^4 \times 2^3 = 2^7$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.

$5^2, 5^3$ మరియు 5^5 విలువలు కనుకొని $5^2 \times 5^3 = 5^5$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.



ఉదాహరణ 4 : $a^4 \times a^5$

సాధన :
$$\begin{aligned} a^4 \times a^5 &= (a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a) \\ &= (a \times a \times a) \\ &= a^9 \text{ మరియు ఇది } a^{4+5} \text{ కి సమానము.} \quad (4 + 5 = 9 \text{ కావున}) \\ \text{కావున } a^4 \times a^5 &= a^{4+5} \end{aligned}$$

పై పరిశీలనలనుంచి మనం

$$a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \dots \times a^m \text{ సార్లు}) \times (a \times a \times a \times \dots \times a^n \text{ సార్లు}) = a^{m+n} \text{ అని చెప్పగలాం.}$$

' a ' ఏట్లనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలయితే

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

జావి చేయండి.

1. ఈ కింది వాటిని $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ను ఉపయోగించి సూక్ష్మికరించండి.

- (i) $3^{11} \times 3^9$ (ii) $p^5 \times p^8$
2. కింద నివ్వబడిన ? గుర్తు స్థానంలో ఉండదగిన సంఖ్యను కనుకోండి. (k ఏదేని ఒక శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్య).
- (i) $k^3 \times k^4 = k^?$ (ii) $k^{15} \times k^? = k^{31}$



11.3.2 ఘూతం యొక్క ఘూతం

ఉదాహరణ 5 : $(3^2)^3$ ను పరిశీలించాం.

సాధన : ఇక్కడ భూమి 3^2 మరియు ఘూతాంకం 3

$$\begin{aligned} (3^2)^3 &= 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \\ &= 3^{2+2+2} \quad (\text{సమాన భూములు గల పదాల లభం}) \\ &= 3^6 \text{ మరియు ఇది } 3^{2 \times 3} \text{ కి సమానం} \quad (2 \times 3 = 6 \text{ కాబట్టి}) \end{aligned}$$

$$\text{కావున } (3^2)^3 = 3^{2 \times 3}$$

జావి చేయండి.

3^6 విలువ 3^2 యొక్క ఘునం విలువలను కనుగొని $(3^2)^3 = 3^6$ అవుతుందేమో సరిచూడండి.



ఉదాహరణ 6 : $(4^5)^3$ ను పరిశీలించాం.

$$\text{సాధన} : (4^5)^3 = 4^5 \times 4^5 \times 4^5$$

$$= 4^{5+5+5}$$

(సమాన భూములు గల పదాల లబ్ధం)

$$= 4^{15} \text{ మరియు ఇది } 4^{5 \times 3} \text{ కు సమానం}$$

$$\text{కావున } (4^5)^3 = 4^{5 \times 3}$$

ఉదాహరణ 7 : $(a^m)^4$ ను పరిశీలించాం.

$$\text{సాధన} : (a^m)^4 = a^m \times a^m \times a^m \times a^m$$

$$= a^{m+m+m+m}$$

(సమాన భూములు గల పదాల లబ్ధం)

$$= a^{4m} \text{ మరియు ఇది } a^{m \times 4} \text{ కు సమానం}$$

$$(4 \times m = 4m)$$

$$\text{కావున } (a^m)^4 = a^{m \times 4}$$

$$\text{పై ఉదాహరణల నుంచి } (a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \dots \dots n \text{ సార్లు} = a^{m+m+m+\dots+n} \text{ సార్లు} = a^{mn}$$

'a' ఏదేని ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలు

$$\text{అయితే } (a^m)^n = a^{mn}$$

11.3.3 లబ్ధం యొక్క ఘూతం

ఉదాహరణ 8 : $3^5 \times 4^5$ ను పరిశీలించాం.

సాధన : ఇక్కడ 3^5 మరియు 4^5 లు ఒకే ఘూతాంకం కను కలిగి ఉన్నాయి. కానీ వాటి భూములు వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

$$\begin{aligned} 3^5 \times 4^5 &= (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) \\ &= (3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4) \\ &= (3 \times 4)^5 \end{aligned}$$

$$\text{కావున } 3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5$$

ఉదాహరణ 9 : $4^4 \times 5^4$ ను పరిశీలించాం.

సాధన : ఇక్కడ 4^4 మరియు 5^4 లు ఒకే ఘూతాంకం 4 ను కలిగి ఉన్నాయి.

కానీ వాటి భూములు వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

$$\begin{aligned} 4^4 \times 5^4 &= (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) \\ &= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5) \\ &= (4 \times 5) \times (4 \times 5) \times (4 \times 5) \times (4 \times 5) \\ &= (4 \times 5)^4 \end{aligned}$$

$$\text{కావున } 4^4 \times 5^4 = (4 \times 5)^4$$



SCERT
TELANGANA

ఉదాహరణ 10 : $p^7 \times q^7$ ను పరిశీలించాం.

సాధన : ఇక్కడ p^7 మరియు q^7 లు ఫూతాంకం 7ను కలిగి ఉన్నాయి. మరియు వాటి భూములు వేరుగా ఉన్నాయి.

$$\begin{aligned} p^7 \times q^7 &= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p) \times (q \times q \times q \times q \times q \times q \times q) \\ &= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times q \times q \times q \times q \times q \times q \times q) \\ &= (p \times q) \times (p \times q) \\ &= (p \times q)^7 \end{aligned}$$

$$\text{కావున } p^7 \times q^7 = (p \times q)^7$$

పై ఉదాహరణల నుంచి $a^m \times b^m = (a \times b)^m = (ab)^m$ గా రాయవచ్చు.

' a' , ' b ' లు ఏవైనా దెండు శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు ' m ' ఏదైనా ధన పూర్ణసంఖ్య అయితే

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

ఇవి చేయండి.

1. కింది వాటిని $a^m \times b^m = (a \times b)^m$ సూత్రాన్ని ప్రయోగించి సూక్ష్మికరించండి.

- (i) $(2 \times 3)^4$ (ii) $x^p \times y^p$ (iii) $a^8 \times b^8$ (iv) $(5 \times 4)^{11}$



11.3.4 ఫూతరూప సంఖ్యల భాగహారము

ఫూతరూపాల భాగహారమును చర్చించుటకు ముందు మనం బుఱిఫూతరూపాల గురించి చర్చించాం.

11.3.4 (అ) బుఱి ఫూతాంకాలు

కింది వాటిని పరిశీలించండి.

$$2^5 = 32$$

$$3^5 = 243$$

$$2^4 = 16$$

$$3^4 = 81$$

$$2^3 = 8$$

$$3^3 = 27$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$2^1 = 2$$

$$3^1 = 3$$

$$2^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

$$2^{-1} = \dots$$

$$3^{-1} = \dots$$

(సూచన : 1లో సగము)

(సూచన : 1 లో 3 వ వంతు)

$$2^{-2} = \dots$$

$$3^{-2} = \dots$$

32 లో ఎన్నవ భాగం 16 అవుతుంది?

2^5 మరియు 2^4 ల మధ్య బేధం ఎంత?

ఘూతాంకం విలువ 1 తగ్గిన ప్రతిసారి దానివిలువ $\frac{1}{2}$ రెట్లు తగ్గటం మీరు గమనించే ఉంటారు.

పై పరిశీలనల నుంచి మనం

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ మరియు } 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ మరియు } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{ఈంకా } 2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

$$\text{అదేవిధంగా } 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ మరియు } 3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$



' a ' ఏదైనా శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య మరియు ' n ' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయితే

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ఇవి చేయండి.

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ను ఉపయోగించి కిందివానిని రాయండి.

- (i) x^{-7} (ii) a^{-5} (iii) 7^{-5} (iv) 9^{-6}



11.3.4 (అ) శూన్యఘూతాంకం

ముందు చర్చించిన విధానంలో

$2^0 = 1, 3^0 = 1$ అని మనం గమనించాము.

ఇదేవిధంగా $4^0 = 1, 5^0 = 1, \dots$ అని మనం చెప్పవచ్చు.

కాబట్టి a ఏదైనా ఒక శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య అయితే $a^0 = 1$.

11.3.4 (ಇ) ಒಕೆ ಭೂಮಿ ಕಲಿಗಿನ ಫೂತ ರೂಪಾಲ ಭಾಗವೋರಮು

ಉದಾಹರಣೆ 11 : $\frac{3^8}{3^3}$

ಸಾಧನ : $\frac{3^8}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = 3 \times 3 \times 3 \times 3$
 $= 3^5$ ಇದಿ 3^{8-3} ಕು ಸಮಾನಂ $(8 - 3 = 5$ ಕಾವುನ)

ಕಾಬಟ್ಟಿ $\frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3}$

ಉದಾಹರಣೆ 12 : $\frac{5^5}{5^8}$

ಸಾಧನ : $\frac{5^5}{5^8} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{5 \times 5 \times 5 \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{5^3}$
 $\frac{1}{5^3}$ ಮರಿಯು ಇದಿ $\frac{1}{5^{8-5}}$ ಕು ಸಮಾನಂ. $(8 - 5 = 3$ ಕಾಬಟ್ಟಿ)

ಕಾಬಟ್ಟಿ $\frac{5^5}{5^8} = \frac{1}{5^{8-5}}$

ಉದಾಹರಣೆ 13 : $\frac{7^7}{7^3}$

ಸಾಧನ : $\frac{7^7}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 7 \times 7 \times 7 \times 7$
 $= 7^4$ ಮರಿಯು ಇದಿ 7^{7-3} ಕು ಸಮಾನಂ $(7 - 3 = 4)$

ಕಾಬಟ್ಟಿ $\frac{7^7}{7^3} = 7^{7-3}$

ಉದಾಹರಣೆ 14 : $\frac{a^2}{a^7}$

ಸಾಧನ : $\frac{a^2}{a^7} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a \times a \times a \times a \times a}$
 $= \frac{1}{a^5}$ ಮರಿಯು ಇದಿ $\frac{1}{a^{7-2}}$ ಕು ಸಮಾನಂ $(7 - 2 = 5$ ಕಾಬಟ್ಟಿ)

ಅಂದುವಲ್ಲ $\frac{a^2}{a^7} = \frac{1}{a^{7-2}}$

పై అన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలించిన తరువాత

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n \text{ అయితే}) \quad \text{మరియు} \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (m < n \text{ అయితే})$$

'a' విద్యోతించి పూర్ణసంఖ్య మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణ సంఖ్యలైన

$$m > n \text{ అయిన } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{మరియు} \quad m < n \text{ అయిన } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

$m = n$ అయినప్పుడు ఏం జరుగుతుంది? సమాధాన మిహ్వండి.

ఉదాహరణ 15 : $\frac{4^3}{4^3}$ ను కనుగొందాం.

$$\text{సాధన : } \frac{4^3}{4^3} = \frac{4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{1} = 1 \dots \dots \dots \text{(I)}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{అని మనకు తెలుసు.}$$

$$\text{కావున } \frac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 = 1$$



$$\text{పై విధంగా } \frac{7^4}{7^4} \text{ ను కనుగొనండి.}$$

$$\text{సాధన : } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{నుండి}$$

$$\frac{7^4}{7^4} = ? \quad \text{పై వాటి నుంచి మీరు ఏమి గమనించారు?}$$

$$\text{ఆదే విధంగా } \frac{a^4}{a^4} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = 1$$

$$\text{కానీ } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{నుండి}$$

$$\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0 = 1 \quad \text{ఇక్కడ ఏదేని శూన్యేతర సంఖ్య } a \text{ లాంటా } a^0 = 1 \text{ మరియు}$$

$$m, n \text{ లను పరిశీలించగా } m=n. \quad \text{ఆ విధంగా } m = n \text{ అయినప్పుడు } \frac{a^m}{a^n} = 1 \text{ అవుతుంది.}$$

ఇవి చేయండి.

1. కింది వానిని సూక్ష్మికరించి a^{m-n} లేదా $\frac{1}{a^{n-m}}$ రూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{13^8}{13^5}$ (ii) $\frac{3^4}{3^{14}}$

2. (ఖాళీ గడి) ని సరైన సంఖ్యతో నింపండి.

ఉదాహరణ : $\frac{8^8}{8^3} = 8^{\boxed{8-3}} = 8^{\boxed{5}}$

(i) $\frac{12^{12}}{12^7} = 12^{\boxed{}} = 12^{\boxed{}}$ (ii) $\frac{a^{18}}{a^{\boxed{}}} = a^{\boxed{}} = a^{\boxed{10}}$



11.3.4 (ఈ) ఒకే ఘూతాంకం గల సంఖ్యలను భాగించడం

ఉదాహరణ 16 : $\left(\frac{7}{4}\right)^5$

$$\begin{aligned} \text{సాధన : } \left(\frac{7}{4}\right)^5 &= \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \\ &= \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} \\ &= \frac{7^5}{4^5} \end{aligned} \quad (\text{ఘూతరూపం నిర్వచనం నుంచి})$$

కాబట్టి $\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7^5}{4^5}$

ఉదాహరణ 17 : $\left(\frac{p}{q}\right)^6$

$$\begin{aligned} \text{సాధన : } \left(\frac{p}{q}\right)^6 &= \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{p}{q}\right) \\ &= \frac{p \times p \times p \times p \times p \times p}{q \times q \times q \times q \times q \times q} \end{aligned}$$

$$= \frac{p^6}{q^6} \quad (\text{నిర్వచనం నుంచి})$$

$$\text{కాబట్టి} \left(\frac{p}{q} \right)^6 = \frac{p^6}{q^6}$$

పై పరిశీలనల నుంచి మనం ఈ విధంగా చెప్పగలం.

$$\left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a \times a \times a \times a \times \dots \times a^m}{b \times b \times b \times b \times \dots \times b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

a, b లు ఏపైనా రెండు శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు 'm' ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన $\left(\frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

ఇవి చేయండి.

1. భూర్జగడులను పూరించండి.



$$(i) \quad \left(\frac{5}{7} \right)^3 = \frac{5^3}{\boxed{\quad}}$$

$$(ii) \quad \left(\frac{3}{2} \right)^5 = \frac{3^5}{\boxed{\quad}}$$

$$(iii) \quad \left(\frac{8}{3} \right)^4 = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}$$

$$(iv) \quad \left(\frac{x}{y} \right)^{11} = \frac{\boxed{\quad}}{y^{11}}$$

11.3.5 బుఱ సంఖ్యలు భూమిగాగల ఘూతరూపాలు

ఉదాహరణ 18 : $(1)^4, (1)^5, (1)^7, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5$ విలువలను తెక్కించండి.

$$\text{సాధన : } (1)^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

$$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$$

$$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$$

పై ఉదాహరణల నుండి మనం క్రింది విషయాలు గమనించవచ్చు.

- (i) 1 యొక్క ఏ ఘూతంకైనా దానివిలువ 1
- (ii) (-1) యొక్క బేసి ఘూతం విలువ (-1) మరియు సరిఘూతం విలువ (+1)

కాబట్టి $(-a)^m = -a^m$ (m , బేసి సంఖ్య అయితే)

$(-a)^m = a^m$ (m , సరి సంఖ్య అయితే)

జప్పుడు మరి కొన్ని ఉదాహరణలను గమనిధాం.

$$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$$

$$(-a)^4 = (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) = a^4$$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)^3} = \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} = \frac{1}{-a^3} \text{ లేక } \frac{-1}{a^3}$$

ఉదాహరణ 19 : $\frac{-27}{125}$ ను ఘూతరూపంలో వ్యక్తపరచండి.

సాధన : $-27 = (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^3$

$$125 = 5 \times 5 \times 5 = (5)^3$$

కావన $\frac{-27}{125} = \frac{(-3)^3}{(5)^3}; \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ నుంచి

$$\frac{-27}{125} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$$

ఇవి చేయండి.

1. విస్తరణ రూపంలో రాయండి.

- (i) $(a)^{-5}$
- (ii) $(-a)^4$
- (iii) $(-7)^{-5}$
- (iv) $(-a)^m$

2. ఘూతరూపంలో రాయండి.

- (i) $(-3) \times (-3) \times (-3)$
- (ii) $(-b) \times (-b) \times (-b) \times (-b)$

$$(iii) \frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)} \dots\dots 'm' \text{ సార్లు.}$$





అభ్యాసం - 2

1. ఫూతాంక న్యాయాలనుపయోగించి కిందివానిని సూక్ష్మకరించండి.

(i) $2^{10} \times 2^4$

(ii) $(3^2) \times (3^2)^4$

(iii) $\frac{5^7}{5^2}$

(iv) $9^2 \times 9^{18} \times 9^{10}$

(v) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^8$

(vi) $(-3)^3 \times (-3)^{10} \times (-3)^7$

(vii) $(3^2)^2$

(viii) $2^4 \times 3^4$

(ix) $2^{4a} \times 2^{5a}$

(x) $(10^2)^3$

(xi) $\left[\left(\frac{-5}{6}\right)^2\right]^5$

(xii) $2^{3a+7} \times 2^{7a+3}$

(xiii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

(xiv) $(-3)^3 \times (-5)^3$

(xv) $\frac{(-4)^6}{(-4)^3}$

(xvi) $\frac{9^7}{9^{15}}$

(xvii) $\frac{(-6)^5}{(-6)^9}$

(xviii) $(-7)^7 \times (-7)^8$

(xix) $(-6^4)^4$

(xx) $a^x \times a^y \times a^z$

2. 3^{-4} ను ఏ సంఖ్యచే గుణించగా లబ్దం 729 అవుతుంది?

3. $5^6 \times 5^{2x} = 5^{10}$ అయితే x విలువ కనుగొనుము.

4. $2^0 + 3^0$ విలువ లెక్కించుము.

5. $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^a \times \left(\frac{x^b}{x^a}\right)^a \times \left(\frac{x^a}{x^a}\right)^b$ సూక్ష్మకరించండి.

6. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలిపి కారణాలు తెలపండి.

(i) $100 \times 10^{11} = 10^{13}$

(ii) $3^2 \times 4^3 = 12^5$

(iii) $5^0 = (100000)^0$

(iv) $4^3 = 8^2$

(v) $2^3 > 3^2$

(vi) $(-2)^4 > (-3)^4$

(vii) $(-2)^5 > (-3)^5$



ప్రాజెక్ట్ పని

మించిన ప్రాంతంలోని ఏవేని 10 కుటుంబాల యొక్క వార్షిక ఆదాయం వివరాలను సేకరించి, వేలు మరియు లక్షల స్థానానికి సపరించి ఒక్కొక్క కుటుంబం యొక్క వార్షిక ఆదాయాన్ని ఘూత రూపంలో చూపండి.

11.3.6 మిక్కిలి పెద్దసంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం

భూమి యొక్క ద్రవ్యరా�ి దాదాపుగా 5976×10^{21} కి.గ్రా. పొలపుంత ఒక అంచునుంచి మరొక అంచు వరకు గల దూరం = 946×10^{15} కి.మీ. ఈ రకం సంఖ్యలను అర్థంచేసుకోవటం సులభం కాదు. కావున వీటిని ప్రామాణిక రూపంలో రాస్తే అవగాహన సులభం అవుతుంది.

$$\text{భూమి యొక్క ద్రవ్యరాశి} = 5.976 \times 10^{24} \text{ ప్రామాణిక రూపం}$$

$$\text{అదే విధంగా, } 946 \times 10^{15} \text{ ప్రామాణిక రూపం } 9.46 \times 10^{17}$$

కాబట్టి ఒక సంఖ్యను 1.0 మరియు 10.0 మధ్యగల దశాంశ భిస్సుంగారాసి దానికి కావలసిన 10 యొక్క ఘూతాలతో లభించేయటాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచటం అంటాం.



అభ్యాసం - 3

కింది వాక్యాలలో గల సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

- (i) భూమి మరియు చంద్రుడి మధ్యరూపం 384,000,000 కి.మీ.
- (ii) విశ్వం యొక్క వయస్సు 12,000,000,000 సంవత్సరాలుగా అంచనా వేశారు.
- (iii) పొలపుంత గెలాక్కి యొక్క మధ్యబీందువునుంచి సూర్యునికి గల దూరం $300,000,000,000,000,000,000$ కి.మీ.గా అంచనా వేయబడింది.
- (iv) భూమి 1,353,000,000 ఫున కి.మీ.ల ఘనవరిమాణంగల నీటిని కలిగిఉంది.



మనం నేర్చుకున్నవి

- మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలను ఘూతరూపంలో రాసినప్పుడు వాటిని చదవటం, ప్రాయటం మరియు అర్థం చేసుకోవటం సులభమవుతుంది.
- $10,000 = 10^4$ ని 10 యొక్క నాలుగవ ఘూతం అని చదివి 10ని భూమి అని, 4ను ఘూతాంకం అని అంటాం.

$243 = 3^5$ ని 3 యొక్క కవ ఘూతం అని చదివి, 3ను భూమి అని, 5ను ఘూతాంకం అని అంటాం.

• ఘూతాంక న్యాయాలు : 'a', 'b' ఏవైనా రెండు ఘూతోతర పూర్ణసంఖ్యలు మరియు 'm', 'n' లు పూర్ణసంఖ్యలు.

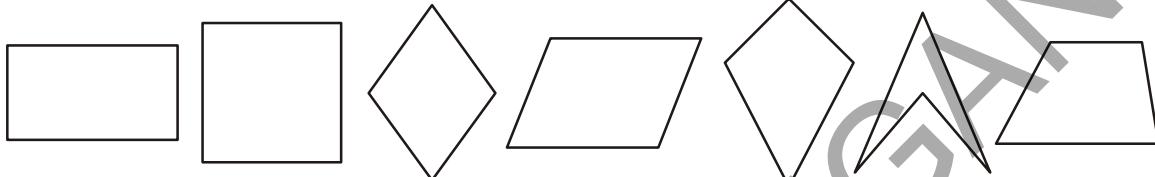
$$(i) \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (ii) \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (iii) \quad a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$(iv) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (v) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n \text{ అయిన}$$

$$(vi) \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad n > m \quad (vii) \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (viii) \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

చతుర్భుజాల గురించి మీరు ఆరోతరగతిలో నేర్చుకున్నారు. చతుర్భుజాల రకాలు, వాటి ధర్మాలను గురించి ఇప్పుడు నేర్చుకుంటారు.

12.0 చతుర్భుజాలు



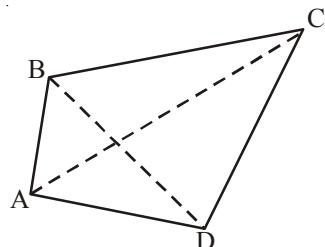
ఈ పటాలన్నింటిలోనూ మీరు గమనించిన ఉమ్మడి ధర్మాలు?

(సూచన : భుజాల సంఖ్య, కోణాల సంఖ్య, శీర్షాల సంఖ్య, సంవృత పటమా? వివృత పటమా?)

అందువల్ల నాలుగు భుజాలు, నాలుగు కోణాలు, నాలుగు శీర్షాలు ఉండే సంవృత పటాన్ని చతుర్భుజం అంటారు.

ABCD చతుర్భుజంలో

- (i) నాలుగు భుజాలుంటాయి. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ మరియు \overline{DA}
 - (ii) నాలుగు శీర్షాలు A, B, C మరియు D.
 - (iii) నాలుగు కోణాలు $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ మరియు $\angle DAB$ ఉంటాయి.
 - (iv) చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు శీర్షాలను కలిపే రేఖాఖండాలను చతుర్భుజ కర్ణాలు అంటారు. చతుర్భుజం ABCD కి AC మరియు BD లను కర్ణాలు అంటారు.
 - (v) ఉమ్మడి శీర్షం ఉండే రెండు భుజాలను ‘పక్క పక్క భుజాలు’ లేదా ఆసన్న భుజాలు అంటారు..
- ABCD చతుర్భుజంలో AB, BC లు పక్క పక్క భుజాలు. ‘వాటి ఉమ్మడి శీర్షం’ B.
- (vi) ఉమ్మడి భుజం ఉండే రెండు కోణాలను పక్క పక్క కోణాలు లేదా ఆసన్న కోణాలు అంటారు.
- అందువల్ల $\angle ABC, \angle BCD$ లు పక్కపక్క కోణాలు, BC ఉమ్మడి భుజం.



ఇవి చేయండి

- (i) ABCD చతుర్భుజంలో మిగిలిన ఆసన్న భుజాల జతలను, వాటి ఉమ్మడి శీర్షాలను కనుక్కోండి.



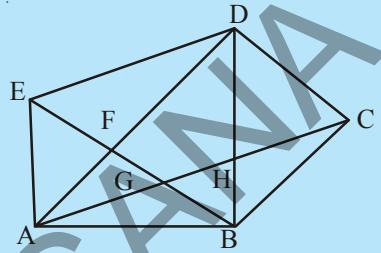
- (ii) చతుర్భుజం ABCD లో మిగిలిన ఆసన్నకోణాల జతలు, వాటి ఉమ్మడి భుజాలను కనుక్కోండి.

- (vii) చతుర్భుజంలో ఉమ్మడి శీర్షం లేని రెండు భుజాలను ఎదురెదురు భుజాలు లేదా అభిముఖ భుజాలు అంటారు.
ABCD చతుర్భుజంలో AB, CD మరియు AD, BC లు ఎదురెదురు భుజాల జతలు.
- (viii) చతుర్భుజంలో ఉమ్మడి భుజంలేని రెండు కోణాలను ఎదురెదురుకోణాలు లేదా అభిముఖ కోణాలు అంటారు.
ABCD చతుర్భుజంలో $\angle DAB$, $\angle BCD$ మరియు $\angle CDA$, $\angle ABC$ ఎదురెదురు కోణాల జతలు.



ప్రయత్నించండి.

వక్కనున్న చిత్రంలో ఎన్ని చతుర్భుజాలు ఉన్నాయి? వాటిని పేర్కొనండి.



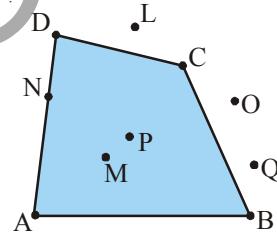
12.1 చతుర్భుజంలో అంతర, బాహ్యభిందువులు

చతుర్భుజం ABCD లో అంతరంగా ఉన్న బిందువుల ఏవి?

చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఉన్న బిందువు లేవి?

చతుర్భుజంపై ఉన్న బిందువు లేవి?

చతుర్భుజం లోపల అంతరంగా P, M బిందువులన్నాయి. బాహ్యంగా L, O మరియు Q అనే బిందువులన్నాయి. చతుర్భుజంపై N, A, B, C మరియు D అనే బిందువులన్నాయి.



చతుర్భుజ అంతరంలో మీకు వీలైనన్ని బిందువులను గుర్తించండి.

చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా మీకు వీలైనన్ని బిందువులను గుర్తించండి.

చతుర్భుజ అంతరంలో ఎన్ని బిందువులుంటాయని మీరు భావిస్తున్నారు?

12.2 కుంభాకార, పుట్టాకార చతుర్భుజాలు

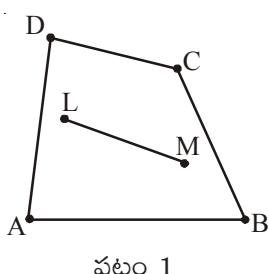
చతుర్భుజం అంతరంలో L మరియు M బిందువులను గుర్తించండి. L, M లను కలుపు రేఖా ఖండము పూర్తిగా చతుర్భుజం అంతరం లోనే ఉంది. చతుర్భుజం అంతరంలోని ఏవేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం పూర్తిగా చతుర్భుజ అంతరంలోనే ఉంటే ఆ చతుర్భుజిని కుంభాకార బహుభుజి అంటారు.

ఒక రేఖా ఖండం చివరి బిందువులు అంతరంగా ఉంటూ రేఖా ఖండంలో కొంత భాగము

చతుర్భుజ బాహ్యంలో ఉండునట్లు ఏవేని రెండు బిందువులను నీవు గుర్తించగలవా?

ఇది సాధ్యం కాదని మీరు తెలుసుకుంటారు.

ఇప్పుడు మరో చతుర్భుజం PQRS ని చూడాం.



పటం 1

చతుర్భుజం PQRS కి అంతర్గతంగా U, V అనే ఏకైనా రెండు బిందువులను గుర్తించండి.

ఈ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండం చతుర్భుజానికి బాహ్యంగా ఉందా?

చతుర్భుజం PQRS లో ఇలాంటి మరిన్ని రేఖాఖండాలను మీరు ఏర్పరచగలరా?

చతుర్భుజం PQRS లో రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాలు చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండేలా ఏర్పరచగలరా? ఇది కూడా సాధ్యమేనని మీరు కనుక్కొంటారు.

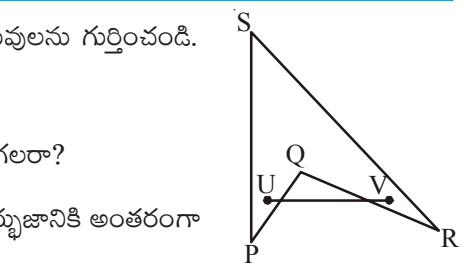
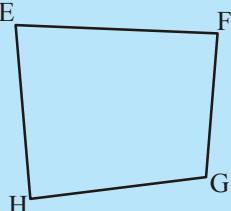
చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్ని చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉంటాయి. కాబట్టి చతుర్భుజం ABCD ని కుంభాకార చతుర్భుజం అంటారు.

చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్నీ చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండే అవకాశం లేదు కాబట్టి చతుర్భుజం PQRS ను పుటాకార చతుర్భుజం అంటారు.



ప్రయత్నించండి.

1.



(i) చతుర్భుజం EFGH

కుంభాకార చతుర్భుజమా?

(ii) చతుర్భుజం TUVW

పుటాకార చతుర్భుజమా?

(iii) చతుర్భుజం EFGH. కి రెండు కర్ణాలు గీయండి. అవి రెండూ పరస్పరం ఖండించుకుంటాయా?

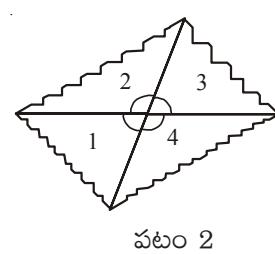
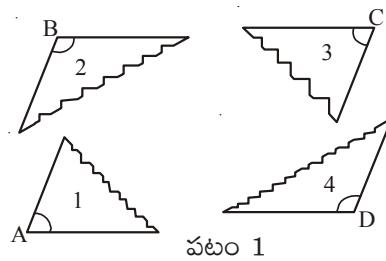
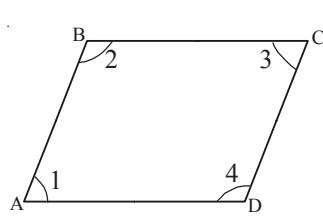
(iv) చతుర్భుజం TUVW కు రెండు కర్ణాలు గీయండి. అవి రెండూ పరస్పరం ఖండించుకుంటాయా?

కుంభాకార చతుర్భుజ కర్ణాలు రెండూ పరస్పరం చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఖండించుకుంటాయిని మీరు కనుక్కొంటారు.

12.3 చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం

కృత్యం 1

ఒక కార్డబోర్డ్ ముక్కను తీసుకోండి. దానిపై ABCD చతుర్భుజాన్ని గీయండి. పటం -1 లో చూపినట్లు దాన్ని 4 ముక్కలు చేయండి. $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ లు ఒకే బిందువు. వద్ద కలనేలా చిత్రం (2) లో చూపినట్లు అనురూపండి.



$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ మరియు $\angle 4$ ల మొత్తం 360° కు సమానం అవుతుందా? (ఒక బిందువు వద్ద కోణాల మొత్తం) చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం 360° .

(గమనిక : $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ మొదలైన కోణాల కొలతలను $m\angle 1, m\angle 2, m\angle 3$ మొదలైన విధంగా చూపాలి.)

ఈ ఫలితాన్ని వేరేవిధాలుగా కూడా రాబట్టవచ్చు.

1. చతుర్భుజం ABCD లో అంతరంగా ఉండే బిందువు P అనుకోండి. శీర్శాలు A, B, C మరియు D లకు Pని కలపండి. చిత్రంలోని ΔPAD ని పరిగణనలోకి తీసుకోండి.

$$m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ - x \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{ఇదేవిధంగా } \Delta PDC \text{ లో, } m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ - y \quad \dots \quad (2)$$

$$\Delta PCB \text{ లో } m\angle 6 + m\angle 7 = 180^\circ - z \text{ మరియు} \quad \dots \quad (3)$$

$$\Delta PBA \text{ లో } m\angle 8 + m\angle 1 = 180^\circ - w. \quad \dots \quad (4)$$

(త్రిభుజ కోణాల మొత్తం సూత్రం)

(1), (2), (3) మరియు (4) లను కలుపగా

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 8$$

$$= 180^\circ - x + 180^\circ - y + 180^\circ - z + 180^\circ - w$$

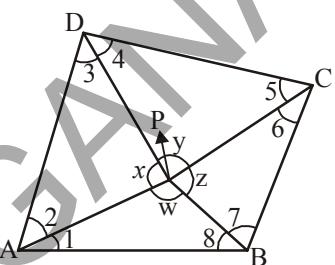
$$= 720^\circ - (x + y + z + w)$$

$(x + y + z + w = 360^\circ ; \text{ ఒక బిందువు వద్ద కోణాల మొత్తం)$

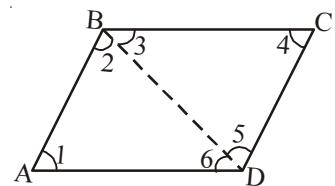
$$= 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$$

కాబట్టి చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం 360° .

2. ABCD చతుర్భుజాన్ని తీసుకోండి. దీన్ని ఒక కళ్ళం గీయడం ద్వారా రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించండి. 1, 2, 3, 4, 5, 6 అనే కోణాలు ఏర్పడతాయి.



(త్రిభుజ కోణాల మొత్తం సూత్రం సహాయం సహాయంతో $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ల మొత్తం 360° ఎలా అవుతుందో మీరు నులువుగా కనుక్కొంచాలి.

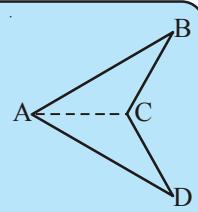


త్రిభుజ కోణాల మొత్తం సూత్రం సహాయం సహాయంతో $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ల మొత్తం 360° ఎలా అవుతుందో మీరు నులువుగా కనుక్కొంచాలి.



ప్రయుత్సించండి.

చతుర్భుజం కుంభాకారం కాకపోతే ఏం జరుగుతుంది? చతుర్భుజం ABCD ని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి అంతరకోణాల మొత్తం కనుక్కొండి. పుటాకార చతుర్భుజ అంతరకోణాల మొత్తం ఎంత?



ఉదాహరణ 1 : చతుర్భుజంలోని 3 కోణాలు 55° , 65° మరియు 105° నాలుగో కోణాన్ని కనుక్కొండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం = 360° .

$$\text{ఇచ్చిన } 3 \text{ కోణాల మొత్తం} = 55^\circ + 65^\circ + 105^\circ = 225^\circ$$

$$\text{కాబట్టి నాలుగో కోణం} = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$$

ఉదాహరణ 2 : చతుర్భుజంలో రెండు కోణాలు 80° , 120° . మిగతా రెండు కోణాలు సమానం అయితే ఆ రెండు కోణాలను కనుక్కొండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని నాలుగు కోణాల మొత్తం = 360° .

$$\text{ఇచ్చిన రెండు కోణాల మొత్తం} = 80^\circ + 120^\circ = 200^\circ$$

$$\text{కాబట్టి మిగతా రెండు కోణాల మొత్తం} = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$$

ఈ రెండు కోణాలు సమానం

$$\text{కాబట్టి ఒక్క కోణం} = 160^\circ \div 2 = 80^\circ$$

ఉదాహరణ 3 : చతుర్భుజంలోని కోణాలు x° , $(x - 10)^\circ$, $(x + 30)^\circ$ మరియు $2x^\circ$ అయిన ఆ కోణాలను కనుక్కొండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని కోణాల మొత్తం

$$\text{కాబట్టి}, x + (x - 10) + (x + 30) + 2x = 360^\circ$$

$$5x + 20 = 360^\circ$$

$$x = 68^\circ$$

కాబట్టి ఆ నాలుగు కోణాలు = 68° ; $(68 - 10)^\circ$; $(68 + 30)^\circ$; $(2 \times 68)^\circ$

$$= 68^\circ, 58^\circ, 98^\circ \text{ మరియు } 136^\circ.$$

ఉదాహరణ 4 : చతుర్భుజ కోణాలు $3 : 4 : 5 : 6$ నివృత్తిలో ఉంటే ఆ కోణాలను కనుక్కొండి.

సాధన : చతుర్భుజంలోని 4 కోణాల మొత్తం = 360°

$$\text{కోణాల నివృత్తి} = 3 : 4 : 5 : 6$$

కాబట్టి ఆ కోణాలు = $3x$, $4x$, $5x$ మరియు $6x$.

$$3x + 4x + 5x + 6x = 360^\circ$$

$$18x = 360^\circ$$

$$x = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

కాబట్టి ఆ కోణాలు = $3 \times 20^\circ$; $4 \times 20^\circ$; $5 \times 20^\circ$; $6 \times 20^\circ$

$$= 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ \text{ మరియు } 120^\circ$$

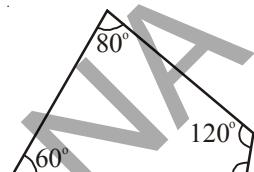
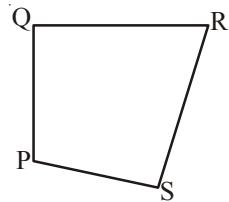


అభ్యాసం - 1

1. చతుర్భుజం PQRS లో

- (i) భుజాలు, కోణాలు, శీర్షాలు, కర్ణాలను పేర్కొనండి.
- (ii) అనన్న భుజాలు, అనన్న కోణాలు, అభిముఖ భుజాలు, అభిముఖ కోణాల జతలను పేర్కొనండి.

2. చతుర్భుజంలోని 3 కోణాలు 60° , 80° , 120° అయితే నాలుగో కోణాన్ని కనుకోండి.



3. చతుర్భుజంలోని కోణాలు $2 : 3 : 4 : 6$ నిప్పుత్తిలో ఉన్నాయి. ఒకోకోణం కొలత కనుకోండి.

4. చతుర్భుజంలోని 4 కోణాలు సమానం అయితే ఒకోదాన్ని కనుకోండి. మీ నోటు పుస్తకంలో ఈ చతుర్భుజాన్ని గీయండి.

5. ఒక చతుర్భుజంలో కోణాలు x° , $(x + 10)^\circ$, $(x + 20)^\circ$, $(x + 30)^\circ$ అయితే ఆ కోణాలను కనుకోండి.

6. చతుర్భుజ కోణాలు $1 : 2 : 3 : 6$ నిప్పుత్తిలో ఉండవు. ఎందువల్ల? కారణాలు తెలపండి.

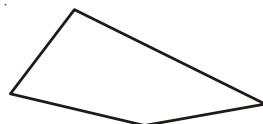
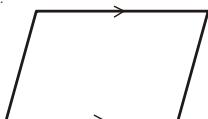
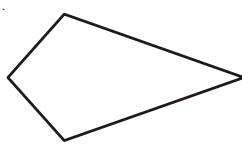
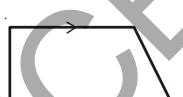
(సూచన : ఈ చతుర్భుజ పటాన్ని గీయడానికి ప్రయత్నించండి)

12.4 చతుర్భుజాల రకాలు

భుజాలు, కోణాల స్వభావం ఆధారంగా చతుర్భుజాలకు విభిన్నమైన పేర్లన్నాయి.

12.4.1 ప్రైపీజియం (సమాంతర చతుర్భుజం)

ఒక జత సమాంతర భుజాలు ఉండే చతుర్భుజాన్ని ‘ప్రైపీజియం’ అంచారు.



ఇవి ప్రైపీజియాలు

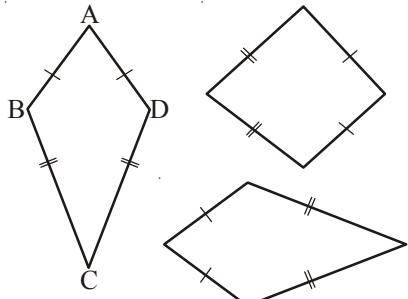
ఇవి ప్రైపీజియాలు కావు

గమనిక : బాణం గుర్తులు సమాంతర రేఖలను సూచిస్తాయి.

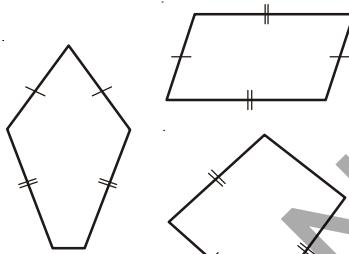
రెండో సమితిలోని పటాలు ప్రైపీజియాలు కావు ఎందువల్ల?

12.4.2 గాలిపటం (KITE)

చతుర్భుజాలలో కొన్ని, గాలిపటాల ఆకారంలో ఉంటాయి. కింది పటాల్లో సమాన పొడవులను ఒకే విధమైన గుర్తులతో సూచించబడినవి. ఉదాహరణకు $AB = AD$ మరియు $BC = CD$.



ఇవి గాలిపటాలు



ఇవి గాలిపటాలు కావు

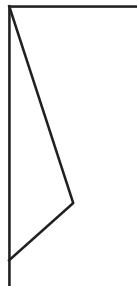
రెండో సమితిలోని రూపాలు గాలిపటాలు ఎందువల్ల కావు?

పరిశీలించండి.

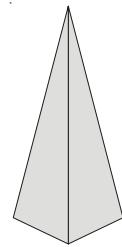
- (i) గాలిపటానికి 4 భుజాలున్నాయి. (చతుర్భుజం)
- (ii) సమాన కొలతలుండే ఆసన్న భుజాల జతలు రెండు ఉంటాయి.

కృత్యం 2 :

మందం కలిగిన ఒక కాగితాన్ని తీసుకోండి. మధ్యలోకి మడవండి. చిత్రం (1) లో చూపించినట్లు వేరేరు కొలతలు గల రెండు రేఖాఖండాలను గీయండి. ఆ రేఖా ఖండాల వెంబడి కత్తిరించి చిత్రం (2) లో చూపించిన కాగితం ముక్కలను తెరవండి. ఇప్పుడు గాలిపటం ఆకారం సిద్ధం. గాలిపటానికి సౌష్ఠవ రేఖలుంటాయా?



పటం 1



పటం 2

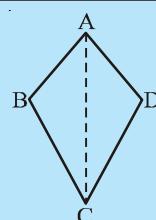
గాలిపటం కర్ణాలను మడవండి. ఆ కర్ణాలు ఖండించుకున్నచోట లంబకోణము ఉంటుందా? లేదా? తెలుసుకునేందుకు మూలమట్టాలను ఉపయోగించండి.

గాలిపటం కర్ణాలు రెండూ సమాన పొడవులో ఉంటాయా? కాగితాన్ని మడవడం లేదా కొలవడం ద్వారా కర్ణాలు పరస్పరం ఖండించుకుంటాయో లేదో పరిశీలించండి.



ప్రయత్నించండి.

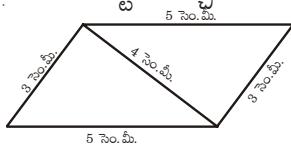
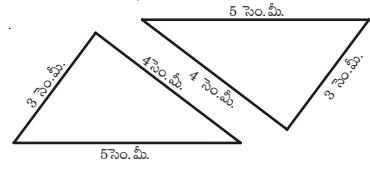
గాలిపటం $ABCD$ లో $\Delta ABC, \Delta ADC$ లు సర్వసమానాలని నిరూపించండి.



12.4.3 సమాంతర చతుర్భుజం

కృత్యం 3 :

3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. భుజాలుగా ఉండే రెండు సర్వ సమాన త్రిభుజ రూపాలను తీసుకోండి. వాటిని కింది పటంలో చూపినట్టు అవుర్కుండి.

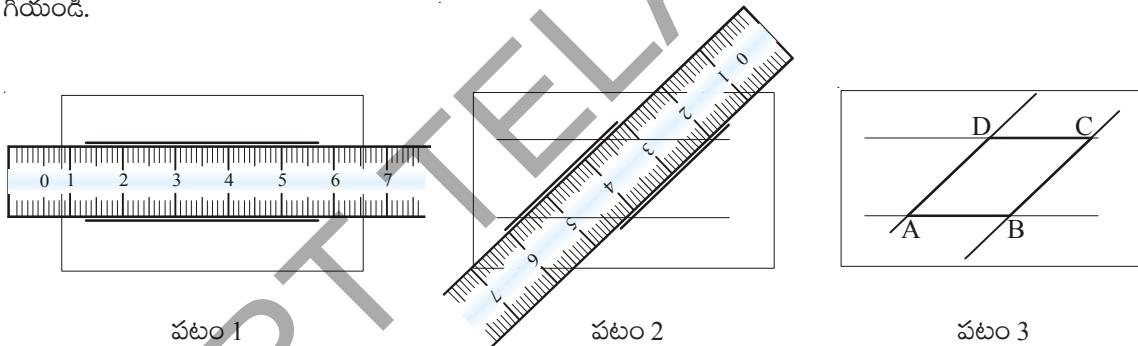


సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది. ఇక్కడ సమాంతర భుజాలేవి? సమాంతర భుజాలు సమానంగా ఉంటాయా? ఇవే త్రిభుజాలతో మరో రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలను రూపొందించవచ్చు. వాటిని కనుగొనండి.

రెండు జతల ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజమే సమాంతర చతుర్భుజం.

కృత్యం 4 :

ఒక కొలబద్దను తీసుకోండి. దాన్ని కాగితంపై ఉంచి దాని అంచుల వెంబడి చిత్రం (1)లో చూపినట్టు రెండు రేఖలను గీయండి. కొలబద్దను ఆ రేఖలపై చిత్రం (2)లో చూపినట్టు ఉంచండి. దాని అంచుల వెంబడి మరో రెండు రేఖలను గీయండి.



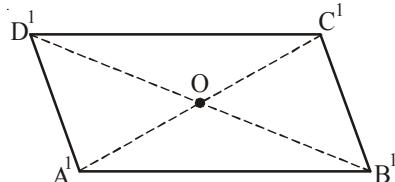
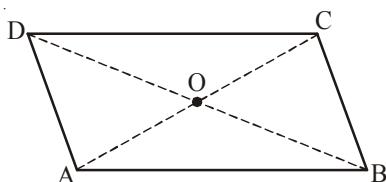
చిత్రం (3)లో ఎదురెదురుగా ఉన్న భుజాలు సమాంతరాలు. ఇది సమాంతర చతుర్భుజం.

12.4.3 (అ) సమాంతర చతుర్భుజ ధర్మాలు

సమాంతర చతుర్భుజ భుజాలు

కృత్యం 5 :

$ABCD; A^1B^1C^1D^1$ అనే రెండు ఏకరీతి సమాంతర చతుర్భుజ రూపాలను కత్తిరింపబడినవి తీసుకోండి. వీలైట్ వేర్సేరు రంగులు కలిగినవి తీసుకోండి.



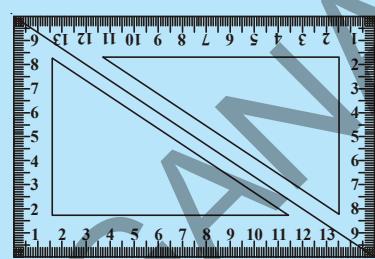
పేరు తప్ప \overline{AB} , $\overline{A'B'}$ రెండూ ఒకేవిధంగా ఉంటాయి. అదే విధంగా మిగతా భుజాలు కూడా ఉంటాయి. \overline{DC} పై $\overline{A'B'}$ ను ఉంచండి. ఇవి రెండూ ఏకీభవిస్తూ $\overline{A'B'}$, \overline{DC} ల పొడవులు సమానమా? అదే విధంగా \overline{AD} , $\overline{B'C'}$ భుజాలను పరిశీలించండి. మీరేం కనుక్కురారు?

ఈ రెండు సందర్భాల్లోనూ భుజాలు సమానమని మీరు తెలుసుకుంటారు. అందువల్ల సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాన పొడవుతో ఉంటాయి. సమాంతర చతుర్భుజ భుజాలను కొలచినా మీకు ఇవే ఫలితాలొస్తాయి.



ప్రయత్నించండి.

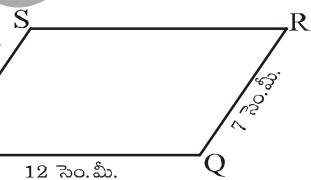
$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ కొలతలు ఉండే ఏకరీతి మూలమట్టులను రెండు జతలు తీసుకోండి. పక్క చిత్రంలో చూపినట్టు సమాంతర చతుర్భుజం ఏర్పడేలా పక్కపక్కన అమర్చండి. ఈ ధర్మాన్ని సరిచూసేందుకు ఇది సహాయకారిగా ఉందా?



ఉదాహరణ 5 : సమాంతర చతుర్భుజం $PQRS$ పరిధి కనుక్కోండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమాన పొడవుతో ఉంటాయి.

దత్తాంశం ప్రకారం $PQ = SR = 12$ సెం.మీ మరియు $QR = PS = 7$ సెం.మీ

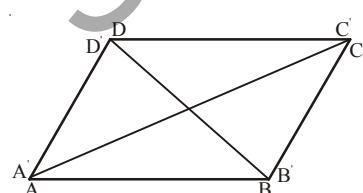


$$\begin{aligned} \text{కాబట్టి పరిధి} &= PQ + QR + RS + SP \\ &= 12 \text{ సెం.మీ} + 7 \text{ సెం.మీ} + 12 \text{ సెం.మీ} + 7 \text{ సెం.మీ} = 38 \text{ సెం.మీ} \end{aligned}$$

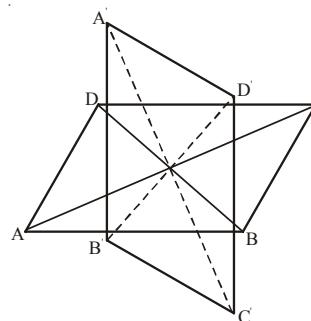
సమాంతర చతుర్భుజ కోణాలు

క్రీత్యం 6 :

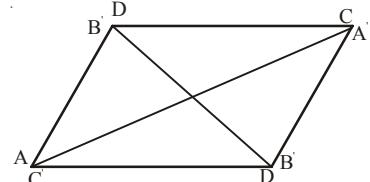
సమాంతర చతుర్భుజం $ABCD$ ని ట్రేసింగ్ పీటర్ పై కాపీ చేయండి. $A'B'C'D'$ గా గుర్తించండి. చిత్రం - (1)లో చూపినట్లు $A'B'C'D'$ ని $ABCD$ పై ఉంచండి. కర్ణాలు కలిసేచోట ఈ రెండించీని గుండుసూదితో కలపండి. పారదర్శక పీటును చిత్రం - (2)లో చూపినట్లు 90° భ్రమణం చేయంచండి. అదే దిశలో సమాంతర చతుర్భుజాన్ని 90° భ్రమణం చేయంచండి. చిత్రం - (3)లో చూపినట్లు రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏకీభవిస్తాయి. C బిందువుపై A' బిందువు, A పై C' బిందువు ఉంటాయని మీరు గమనిస్తారు. అదేవిధంగా D పై B' మరియు B పై D' చిత్రం (3)లో చూపినట్లు ఉంటాయి.



పటం 1



పటం 2



పటం 3

A, C కోణాల కొలతల గురించి ఇది ఏమన్నా తెలుపుతుందా? B, D కోణాల కొలతలను పరిశీలించి, మీ పరిశీలనలను పేర్కొనండి.

సమాంతర చతుర్భుజ ఎదురెదురు కోణాలు సమాన కొలతలతో ఉంటాయని మీరు తెలుసుకుంటారు.



ప్రయత్నించండి.

$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ కొలతల మూలమట్టాల జతలను తీసుకొనండి. గతంలో చేసినట్టే సమాంతర చతుర్భుజాలను రూపొందించండి. పైన పేర్కొన్న ధర్మాన్ని నిరూపించేందుకు ఈ చిత్రం మీకేమైనా సహాయపడుతుందా?

తార్కిక వాదనలతో ఈ ఆలోచనను బలపరచవచ్చు.

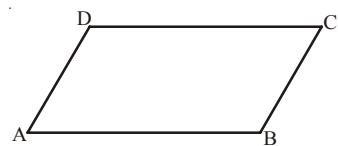
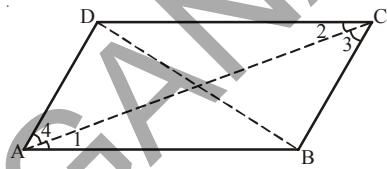
సమాంతర చతుర్భుజం ABCD కర్ణాలు AC, BD అయితే $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 3 = \angle 4$ (వీకాంతర కోణాల ధర్మం)

$\Delta ABC, \Delta CDA$ లు $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ సరూపాలు

కాబట్టి $\angle B = \angle D$

ఇదేవిధంగా, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, కాబట్టి $\angle A = \angle C$.

అందువల్ల సమాంతర చతుర్భుజ ఎదురెదురు కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.



సమాంతర చతుర్భుజ అసన్న కోణాలను పరిశీలించాం. సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో $DC \parallel AB, DA$ తిర్యగ్రేభి. కాబట్టి $\angle A, \angle D$ అసన్న కోణాలు, పరస్పరం సంపూర్ణకాలు.

$\angle A, \angle B$ లు కూడా పరస్పర సంపూర్ణకాలే. ఎందువల్ల?

$AD \parallel BC; BA$ తిర్యగ్రేభి. అందువల్ల $\angle A, \angle B$ అసన్న కోణాలు.

ఇది చేయండి.



పైన ఇచ్చిన ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో మరో రెండు జతల సంపూర్ణక కోణాలను గుర్తించండి.

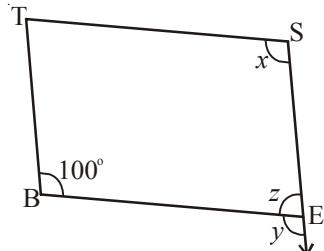
ఉండాపూరణ 6 : BEST ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. x, y, z విలువలు కనుక్కోండి.

సాధన : $\angle S, \angle B$ కి అభిముఖ కోణం.

కాబట్టి $x = 100^\circ$ (అభిముఖ కోణాల నియమం)

$y = 100^\circ$ (సాధ్యశ్య కోణాలు)

$z = 80^\circ$ ($\angle y, \angle z$ రేఖీయ ద్వయం కాబట్టి)



సమాంతర చతుర్భుజంలో అసన్న కోణాలు సంపూర్ణకాలు. పై ఉండాపూరణ నుండి కూడా ఈ పరిశీలన చేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 7 : సమాంతర చతుర్భుజం RINGలో $m \angle R = 70^\circ$, అయితే మిగతా కోణాలను కనుక్కొండి.

సాధన : దత్తాంశ ప్రకారం $\angle R = 70^\circ$

$\angle N = 70^\circ$ అవుతుంది.

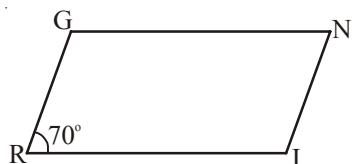
(సమాంతర చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాలు)

$\angle R, \angle I$ లు సంపూర్ణక కోణాలు కాబట్టి

$$\angle I = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$\angle G, \angle I$, లు సమాంతర చతుర్భుజ అభిముఖ కోణాలు కాబట్టి $\angle G = 110^\circ$ కాబట్టి

$$\angle R = \angle N = 70^\circ \text{ మరియు } \angle I = \angle G = 110^\circ$$



ప్రయత్నించండి.

పై ఉదాహరణలో $\angle I, \angle G$ లను మరేదైనా ఇతర పద్ధతిలో కనుక్కొంపచూ?

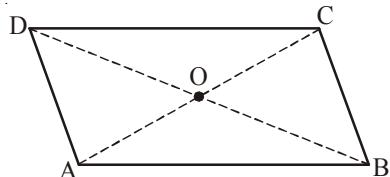
సూచన : చతుర్భుజ కోణాల మొత్తానికి సూత్రం.

12.4.3. (ఆ) సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు

కృత్యం : 7

ABCD సమాంతర చతుర్భుజ నమూనా (కట్ - అవుట్) ను తీసుకోండి.

కర్ణాలు, AC, BDలు 'O' వద్ద ఖండిస్తాయనుకోండి.



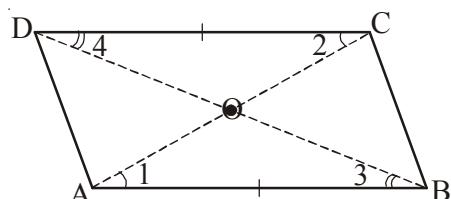
మదతపెట్టి A పై C ని ఉంచడం ద్వారా AC మధ్యబిందువు కనుక్కొండి. ఈ మధ్య బిందువు 'O' ఉందా?

కర్ణం AC ని కర్ణం DB 'O' బిందువు వద్ద సమానించన చేస్తుందా? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

DB మీద మధ్య బిందువు ఎక్కడ ఉండునో తెలుసుకోవడానికి ఈ కృత్యాన్ని మళ్ళీ చేయండి.

సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం సమానించన చేసుకొంటాయి.

కో.భ.కో. సరూపతననుసరించి ఈ ధర్మాన్ని నిరూపించడం



కష్టమేమీ కాదు.

$$\Delta AOB \cong \Delta COD$$

(కో.భ.కో. నియమాన్ని ఇక్కడ ఎలా ఉపయోగిస్తాం?)

దీని నుండి $AO = CO ; BO = DO$ అవుతాయి.

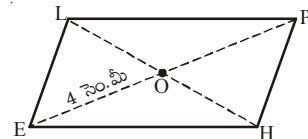
ఉదాహరణ 8 : HELP ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. $OE = 4$ సెం.మీ. కర్ణాల సమద్విఖండన బిందువు O.

PE కంటే $HL = 5$ సెం.మీ. ఎక్కువ. OH ని కనుకోండి.

సాధన : $OE = 4$ సెం.మీ. అయితే $OP = 4$ సెం.మీ. (ఎందుకు?)

PE కంటే $HL = 5$ సెం.మీ. ఎక్కువ.

కాబట్టి $HL = 8 + 5 = 13$ సెం.మీ.



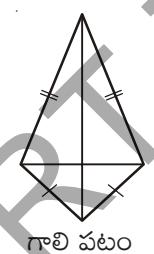
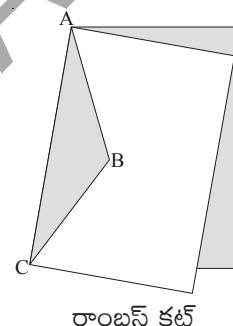
$$\text{అందువల్ల } OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5 \text{ సెం.మీ.}$$

12.4.4 రాంబస్ (సమచతుర్భుజం) (RHOMBUS)

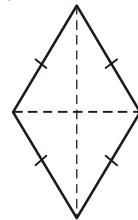
మీరు గతంలో చేసిన గాలిపటం తయారీని జ్ఞానికి తెచ్చుకోండి. ABC వెంబడి కత్తిరించి, తెరిస్తే గాలిపటం తయారోతుంది. AB, BC రేఖల పొడవులు వేర్చేరుగా ఉంటాయి. $AB = BC$ ని గేస్తే మీరు పొందే పటమే రాంబస్ లేదా సమచతుర్భుజం.

సమచతుర్భుజంలోని భుజాలన్నీ సమానంగా ఉంటాయి. గాలిపటం ఇలా ఉండదు.

సమచతుర్భుజంలోని ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉంటాయి. కాబట్టి ఇది సమాంతర చతుర్భుజం కూడా అవుతుంది. కాబట్టి సమచతుర్భుజానికి సమాంతర చతుర్భుజం, గాలిపటాల ధర్మాలన్నీ వర్తిస్తాయి. ఆ ధర్మాలను జాబితా రూపంలో తయారు చేయండి. ఈ అధ్యాయం చివర ఉండే జాబితాతో సరిచూసుకోండి.



గాలి పటం



రాంబస్

సమచతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కృత్యం 8 :

సమచతుర్భుజ నమూనాను తీసుకోండి. మడత పెట్టడం ద్వారా ఖండన బిందువు కర్ణాల మధ్య బిందువు అవుతుందేమో సరిచూడండి. మూలమట్టాల చివరల ద్వారా అచి లంబకోణం వద్ద ఖండిస్తాయేమో సరిచూడండి.

తార్కిక సోపానాలతో ఈ ధర్మాన్ని సరిచూడండి.

ABCD ఒక సమచతుర్భుజం. ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కూడా కావడం వల్ల కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

కాబట్టి $OA = OC ; OB = OD$.

$\angle AOD = \angle COD = 90^\circ$ అని నిరూపించాలి.

భు.భు.భు. సరూప ధర్మాన్ని అనుసరించి

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

$$\text{కాబట్టి } \angle AOD = \angle COD$$

$$\angle AOD \text{ మరియు } \angle COD \text{ రేఖీయ జత కావడం వల్ల } \angle AOD = \angle COD = 90^\circ$$

సమచతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విభండన చేసుకొంటాయి.

12.4.5 దీర్ఘ చతురస్రం (RECTANGLE)

సమాన కోణాలతో ఉండే సమాంతర చతుర్భుజమే దీర్ఘచతురస్రం.

ఈ నిర్వచనానికి పూర్తి అర్థం ఏంటి? మీ స్నేహితులతో చర్చించండి.

దీర్ఘ చతురస్రం సమాన కోణాలతో ఉంచే ప్రతికోణం విలువ ఎంత?

$$\text{ప్రతికోణం విలువ } x^\circ \text{ అయితే } 4x^\circ = 360^\circ \text{ (ఎందువల్ల?)}$$

$$\text{కాబట్టి } x^\circ = 90^\circ$$

అందువల్ల దీర్ఘచతురస్రంలోని ప్రతికోణం లంబకోణం.

కాబట్టి ప్రతి కోణం లంబకోణం ఉండే సమాంతర చతుర్భుజమే దీర్ఘ చతురస్రం.

దీర్ఘ చతురస్రం కూడా సమాంతర చతుర్భుజమే కాబట్టి దీర్ఘ చతురస్రంలో ఎదురెదురు భుజాలు సమానంగా ఉంటాయి; కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విభండన చేసుకొంటాయి.

సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు వేర్పేరు పొడవుల్లో ఉండవచ్చ (సరిచూడండి); కానీ దీర్ఘచతురస్రంలోని కర్ణాలు సమాన పొడవుల్లో ఉండడం గమనార్థం.

నిరూపణ సులభ -

$$ABCD \text{ దీర్ఘచతురస్రమైతే } \Delta ABC \cong \Delta BAD$$

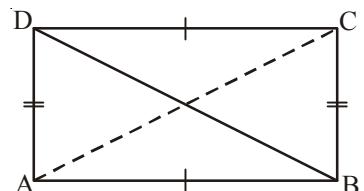
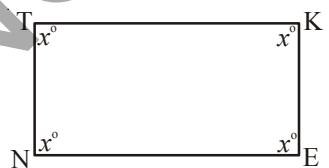
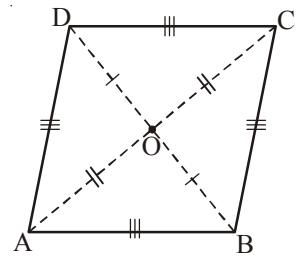
$$\text{ఎందుకంటే } AB = AB$$

$$BC = AD \quad (\text{ఎందువల్ల?})$$

$$m \angle A = m \angle B = 90^\circ \quad (\text{ఎందువల్ల?})$$

కాబట్టి భు.కో.భు. సరూపధర్మాన్ని అనుసరించి $\Delta ABC \cong \Delta BAD$; $AC = BD$

కాబట్టి దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి.



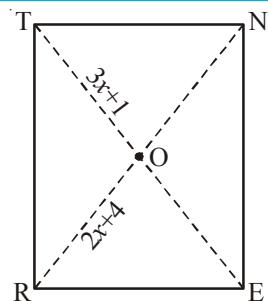
ఉదాహరణ 9 : RENT ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. దీని కర్ణాలు 'O' వద్ద సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. $OR = 2x + 4$, $OT = 3x + 1$ అయితే x ను కనుక్కోండి.

సాధన :

కర్ణం TE లో సగం OT. కర్ణం RN లో సగం OR
 కర్ణాలు రెండూ సమానం (ఎందువల్ల?)
 కాబట్టి వాటి సగాలు కూడా సమానం

$$\text{కాబట్టి} \quad 3x + 1 = 2x + 4$$

$$\text{లేదా} \quad x = 3$$



12.4.6 చతురస్రం

ఆసన్న భూజాలు సమానంగా ఉండే దీర్ఘచతురస్రాన్ని 'చతురస్రం' అంటారు.

అంటే దీర్ఘ చతురస్ర నియమాలన్ని పాటిస్తూ 'అన్ని భూజాలు సమానం' అనే నియమాన్ని చతురస్రం అదనంగా పాటిస్తుంది.
 దీర్ఘచతురస్రంలాగా చతురస్రంలోనూ కర్ణాలు సమానంగా ఉంటాయి.

దీర్ఘచతురస్రంలో కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉండాల్సిన అవసరంలేదు. (సరిచూడండి) కానీ చతురస్రం విషయంలో ఇది సరికాదు.

నిరూపించాం -

BELT ఒక చతురస్రం. కాబట్టి $BE = EL = LT = TB$

ΔBOE మరియు ΔLOE లను పరిశీలిస్తే,

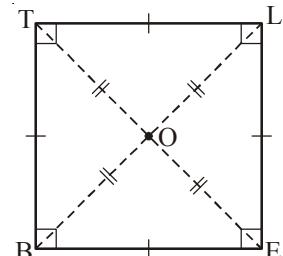
$OB = OL$ (ఎందుకు?)

OE ఉపుడి భూజం

కాబట్టి, భు.భు.భు. సర్పాప నియమం ప్రకారం $\Delta BOE \cong \Delta LOE$

కాబట్టి $\angle BOE = \angle LOE$

కానీ $\angle BOE + \angle LOE = 180^\circ$ (ఎందువల్ల?)



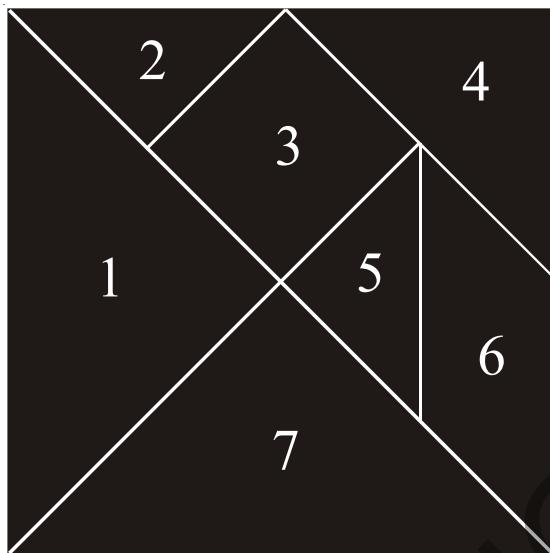
$$\angle BOE = \angle LOE = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

కాబట్టి చతురస్ర కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.

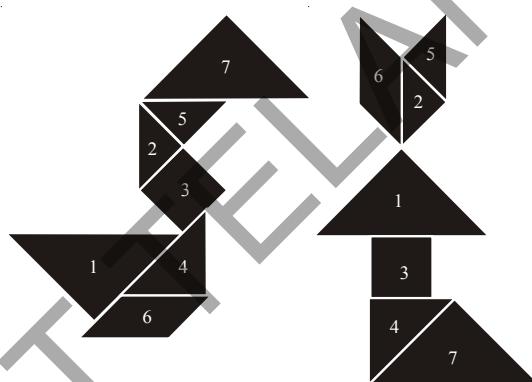
చతురస్రంలో కర్ణాలు

- (i) సమద్వి ఖండన చేసుకొంటాయి. (దీర్ఘచతురస్ర ధర్మం)
- (ii) సమానంగా ఉంటాయి. (దీర్ఘచతురస్ర ధర్మం)
- (iii) పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.

12.5 టాన్‌గ్రామ్‌తో చిత్రాలను రూపొందించడం



టాన్‌గ్రామ్ ముక్కలను అన్నింటినీ ఉపయోగించి త్రిపీజియం, సమాంతర చతుర్భుజం, దీర్ఘచతురస్రం, చతురష్టాలను నిర్ణించండి.



ఈ ముక్కలన్నీ ఉపయోగించి మీరు వీలైనన్ని ఆకారాలను నిర్ణించండి. ప్రైన రెండు ఉదాహరణలిచ్చాం.

ఉదాహరణ 10 : త్రిపీజియం ABCD లో CD కి AB సమాంతరంగా

ఉంటుంది. $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$.

అయితే $\angle C$ మరియు $\angle D$ లను కనుక్కొండి.

సాధన : CD కి AB సమాంతరం కాబట్టి

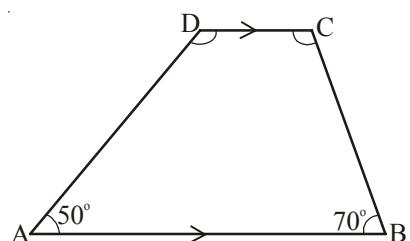
$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

(తిర్యగ్రీభవ ఒకేషైపుణ్ణన్న అంతరకోణాలు)

$$\text{కాబట్టి } \angle D = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\text{అదేవిధంగా } \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\text{కాబట్టి } \angle C = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$



ఉదాహరణ 11 : సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న కోణాలు $3 : 2$ నిపుత్తిలో ఉంటే ఆ కోణాలను కనుకోండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఆసన్న కోణాలు సంపూర్ణారకాలు

$$\text{వాటి మొత్తం} = 180^\circ$$

$$\text{ఆసన్నకోణాల నిపుత్తి} = 3:2$$

$$\text{కాబట్టి కోణాలు} = 180 \times \frac{3}{5} = 108^\circ \text{ మరియు}$$

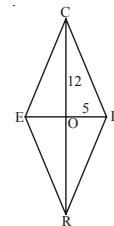
$$= 180 \times \frac{2}{5} = 72^\circ$$

ఉదాహరణ 12 : RICE ఒక సమ చతుర్భుజం. కర్ణాల ఖండన బిందువు 'O' OE, OR లను కనుకోండి. మీ పరిశీలనలను నిరూపించండి.

సాధన : సమ చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

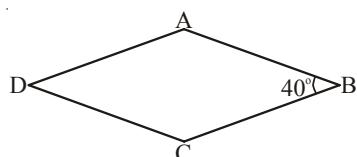
$$OE = OI, OR = OC$$

$$\text{కాబట్టి } OE = 5, OR = 12$$

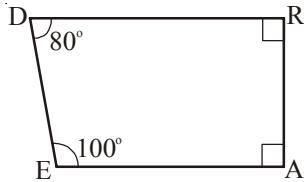


అభ్యసం - 2

1. సత్యమో, అసత్యమో తెలపండి.
 - (i) దీర్ఘచతురస్రాలన్నీ చతురస్రాలు ()
 - (ii) సమచతుర్భుజాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు ()
 - (iii) చతురస్రాలన్నీ సమచతుర్భుజాలు, మరియు దీర్ఘచతురస్రాలు ()
 - (iv) చతురస్రాలన్నీ సమాంతర చతుర్భుజాలు కావు. ()
 - (v) గాలిపటాలన్నీ సమచతుర్భుజాలే ()
 - (vi) సమచతుర్భుజాలన్నీ గాలిపటాలే ()
 - (vii) సమాంతర చతుర్భుజాలన్నీ ప్రెపీజియాలే ()
 - (viii) చతురస్రాలన్నీ ప్రెపీజియాలే ()
2. చతురస్రం ఎలా?
 - (i) చతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి. (ii) సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి.
 - (iii) సమచతుర్భుజం అవుతుందో తెలపండి. (iv) దీర్ఘచతురస్రం అవుతుందో తెలపండి.
3. సమచతుర్భుజం ABCD లో $\angle ABC = 40^\circ$
మిగతా కోణాలను కనుకోండి.



4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఆసన్న కోణాలు x° , $(2x + 30)^\circ$
సమాంతర చతుర్భుజంలోని అన్నికోణాలను కనుక్కొండి.
5. DEAR ఒక త్రిపీజియం ఎందువల్ల అవుతుందో వివరించండి. ఏరెండు భుజాలు
సమాంతరంగా ఉన్నాయి?
6. BASE ఒక దీర్ఘచతురప్రం. దాని కర్ణాలు O వద్ద సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి.
 $OB = 5x+1$, $OE = 2x+4$ అయితే x ను కనుక్కొండి.



7. $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ అయితే ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుందా? కారణం తెలుపండి.
8. సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న భుజాలు $5:3$ నిప్పుత్తిలో ఉన్నాయి. దాని పరిధి 48 సెం.మీ. అయితే దాని భుజాల కొలతలను కనుక్కొండి.
9. చతుర్భుజ కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే ఆ చతుర్భుజం సమ చతుర్భుజం అవుతుందా? మీ సమాధానాన్ని బలపర్చేందుకు చిత్రపటాన్ని గీయండి.
10. ABCD త్రిపీజియంలో $AB \parallel DC$. $\angle A = \angle B = 30^\circ$ అయితే మిగతా రెండు కోణాలను కనుక్కొండి.
11. భారీలు పూరించండి.
- (i) రెండు ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం _____.
 - (ii) ఒక కోణం 90° , రెండు ఆసన్న భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం _____.
 - (iii) త్రిపీజియం ABCD లో $AB \parallel DC$. $\angle D = x^\circ$ అయితే $\angle A =$ _____.
 - (iv) సమాంతర చతుర్భుజంలోని ప్రతి కర్ణం దాన్ని _____ త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
 - (v) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు AC, BD లు O వద్ద ఖండించుకుని $AO = 5$ సెం.మీ అయితే $AC =$ _____ సెం.మీ
 - (vi) సమ చతుర్భుజం ABCD లో కర్ణాలు 'O' వద్ద ఖండించుకుంటే $\angle AOB =$ _____ డిగ్రీలు
 - (vii) ABCD సమాంతర చతుర్భుజమైతే $\angle A - \angle C =$ _____ డిగ్రీలు
 - (viii) దీర్ఘచతురప్రం ABCD లో కర్ణం $AC = 10$ సెం.మీ అయితే రెండవ కర్ణం $BD =$ _____ సెం.మీ
 - (ix) ABCD చతురప్రంలో కర్ణం AC గీయబడింది. $\angle BAC =$ _____ డిగ్రీలు



మనం నేర్చుకుస్తుని

1. నాలుగు రేఖాఖండాలతో సంవృతప్పైన చిత్రాన్ని ‘చతుర్భుజం’ అంటారు.
2. ప్రతి చతుర్భుజం తలాన్ని అంతర, బాహ్య, హద్ద తలాలుగా విభజిస్తుంది.
3. ప్రతి చతుర్భుజంలో ఒక జత కర్ణాలుంటాయి.
4. చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్ని చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉంటాయి. అనగా చతుర్భుజంలో అంతరంగా కర్ణాలు ఉంటే ఆ చతుర్భుజాన్ని కుంభాకార చతుర్భుజం అంటారు.
5. చతుర్భుజంలో అంతరంగా ఉన్న బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాలన్ని చతుర్భుజానికి అంతరంగా ఉండే అవకాశం లేని అనగా కర్ణాలలో ఏదైనా చతుర్భుజానికి అంతరంగా లేకపోతే దాన్ని పుటాకార చతుర్భుజం అంటారు.
6. చతుర్భుజ అంతరకోణాల మొత్తం 360° .
7. చతుర్భుజాల ధర్మాలు

చతుర్భుజం	ధర్మాలు
సమాంతర చతుర్భుజం : ఎదురెదురు భుజాల జతలు రెండూ సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజం	(1) ఎదురెదురు భుజాలు సమానం (2) ఎదురెదురు కోణాలు సమానం (3) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఫ్లండన చేసుకుంటాయి.
సమ చతుర్భుజం : అన్ని భుజాలు సమానంగా ఉండే సమాంతర చతుర్భుజం	(1) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు (2) కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి.
దీర్ఘచతురప్రం : అన్ని లంబకోణాలుండే సమాంతర చతుర్భుజం	(1) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క అన్ని ధర్మాలు (2) ప్రతి కోణమూ లంబకోణం (3) కర్ణాలు సమానం
చతురప్రం : భుజాలు సమానంగా ఉండే దీర్ఘచతురప్రం	(1) సమాంతర చతుర్భుజ, సమ చతుర్భుజ, దీర్ఘచతురప్రం యొక్క అన్ని ధర్మాలు (2) భుజాలన్ని సమానం
గాలిపటం : వరుస భుజాలు సమానంగా ఉండే జత భుజాలు కలిగిన చతుర్భుజం	(1) కర్ణాలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయి. (2) కర్ణాలు సమాన కొలతల్లో ఉండవు. (3) కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఫ్లండన చేసుకుంటాయి.
త్రైషీజియం : ఒక జత భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే చతుర్భుజం	(1) ఎదురెదురు భుజాలు సమాంతరంగా ఉండే ఒక జతను కలిగి ఉంటుంది.

13.0 పరిషయం

ఇరా తన పొలం (పటం -1) వైశాల్యం కనుగొనాలని అనుకోంది. కానీ ఇది క్రమకారంలో లేదని గుర్తించింది. కావున ఇరా తన పొలంను (పటం-2) లో చూపిన విధంగా త్రిభుజం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, రాంబస్ మొదలైన క్రమాకార రూపాలుగా విభజించింది. ఈ క్రమాకార ఆకారాలన్నింటి వైశాల్యంను కనుగొన గలిగితే తన పొలం మొత్తం వైశాల్యంను కనుకోవచ్చునని భావించింది.



పటం -1

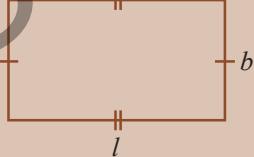
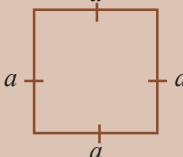


పటం -2

దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రంల యొక్క చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను ఎలా కనుగొంటామో మనం కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నాం. ఈ అధ్యాయంలో త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం, సమ చతుర్భుజం (రాంబస్) వైశాల్యాలను ఎలా కనుగొంటామో తెలుసుకుండాం. ముందుగా చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రాల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాల గురించి కింది తరగతులలో మనమేమి నేర్చుకున్నామో గుర్తుకు తెచ్చుకుండాం.

అభ్యాసం 1

- కింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించండి.

పటం	ఆకారం	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
 	దీర్ఘచతురస్రం	$l \times b = lb$	_____
	చతురస్రం	_____	$4a$

2. కొన్ని చతురప్రాల కొలతల వివరాలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడినాయి. అయితే ఇవి అనంపూర్తిగా ఉన్నాయి.
వీటిని గణించి పూర్తి చేయండి?

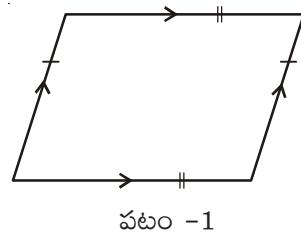
చతురప్ర భుజం	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
15 సెం.మీ.	225 చ.సెం.మీ.	
		88 సెం.మీ.

3. కొన్ని దీర్ఘచతురప్రాలకు సంబంధించిన కొలత వివరాలు కింది పట్టికలో అనంపూర్తిగా ఇవ్వబడినాయి. అనంపూర్తిగా ఉన్న వివరాలను గుర్తించండి?

పొడవు	వెడల్పు	వైశాల్యం	చుట్టుకొలత
20 సెం.మీ.	14 సెం.మీ.		
	12 సెం.మీ.		60 సెం.మీ.
15 సెం.మీ.		150 సెం.మీ. ²	

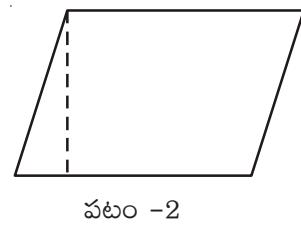
13.1 సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం

పక్క పటం-1 అకారాన్ని చూడండి. ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.
దీని వైశాల్యంను ఎలా కనుగొంటామో నేర్చుకుందాం.



కృత్యం 1

- కాగితంపై ఒక సమాంతర చతుర్భుజం (పటం-2) ను గీయండి.
- ఈ సమాంతర చతుర్భుజంను కాగితం నుండి కత్తిరించి వేరు చేయండి.
- పటం 2లో చూపిన విధంగా చుక్కల గీత వెంట కత్తిరించి త్రిభుజంను, సమాంతర చతుర్భుజం నుంచి వేరు చేయండి.
- కత్తిరించిన త్రిభుజం పటం-3 లో చూపిన విధంగా సమాంతర చతుర్భుజంనకు మరొక వైపు అమర్చండి. అయితే ఈ రెండు కాగితం ముక్కలను కలపడం వలన దీర్ఘ చతురప్రం ఏర్పడింది.



పటం (2) లోని సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం, పటం (3)లోని దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యంనకు సమానమే అని చెప్పచూ? సమానమే అని మీరు కనుక్కొవచ్చు.

పటం -3

కింది కృత్యం నుంచి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం, దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యం సమానమని గుర్తించగలం.

దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యం, పొడవు \times వెడల్పునకు సమానమని మనకు తెలుసు. దీర్ఘచతురప్రం యొక్క పొడవు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమికి మరియు దీర్ఘచతురప్రం యొక్క వెడల్పు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తుకు సమానమని కూడా మనకు తెలుసు.

$$\text{కాబట్టి సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం} = \text{దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యం}$$

$$= \text{పొడవు} \times \text{వెడల్పు}$$

$$= \text{భూమి} \times \text{ఎత్తు}$$

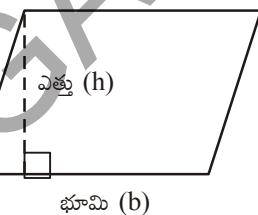
$$(\text{పొడవు} = \text{భూమి}, \text{వెడల్పు} = \text{ఎత్తు})$$



కావున సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం దాని భూమి (**b**) మరియు

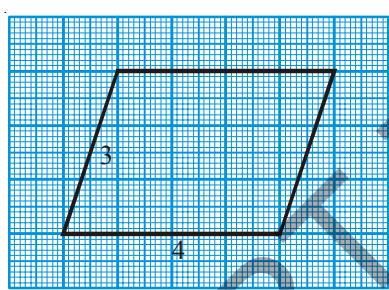
అనురూప ఎత్తు అనగా (**h**) ల లబ్దానికి సమానం అనగా $A = bh$.

ఉధారణ 1 : (i), (ii) పటాలలో ఇవ్వబడిన సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను కనుగొనుము.



(i)

సాధన :



సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి (**b**) = 4 యూనిట్లు.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు (**h**) = 3 యూనిట్లు.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం (A) = bh

కాబట్టి, $A = 4 \times 3 = 12$ చ. యూనిట్లు.

అందుచే సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 12 చ.యూనిట్లు.

(ii)

సాధన :

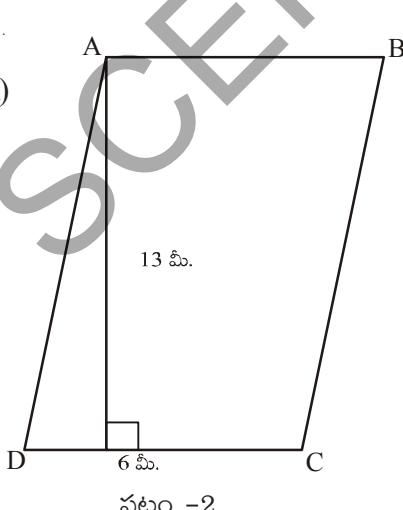
సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి (**b**) = 6 మీ.

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు (**h**) = 13 మీ.

వైశాల్యం (A) = bh

కాబట్టి $A = 6 \times 13 = 78$ చ.మీ.

ABCD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = 78 చ.మీ.



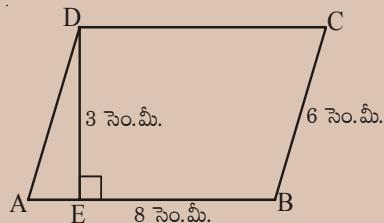


ప్రయత్నించండి.

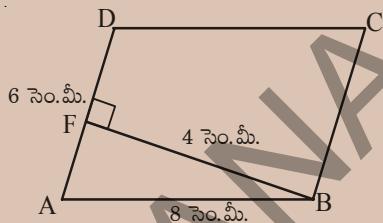
ABCD సమాంతర చతుర్భుజం పటం - 1 యొక్క భూజాలు 8 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి పొడవు ఎంత? ఎత్తు ఎంత? దాని వైశాల్యం ఎంత?

పటం - 2 లోని సమాంతర చతుర్భుజంలో భూమి ఏది? ఎత్తు ఏది? దిని వైశాల్యం ఎంత?

పటం - 1 మరియు పటం - 2 లో వైశాల్యాలు సమానమేనా?

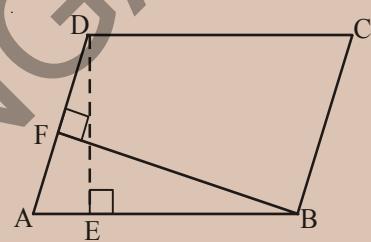


పటం - 1



పటం - 2

సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఏ భూజాన్ని దాని భూమిగా ఎంచుకోవచ్చు లేదా తీసుకోవచ్చు. పటం-1లో \overline{AB} మీదకు గీయబడిన లంబం \overline{DE} కనుక ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో భూమి \overline{AB} , ఎత్తుగా \overline{DE} అవుతుంది. అదే విధంగా పటం -2లో \overline{AD} పైకి గీయబడిన లంబం \overline{BF} కనుక ఈ సమాంతర చతుర్భుజంలో \overline{AD} భూమి. ఎత్తు \overline{BF} అవుతుంది.



ఇవి చేయండి.

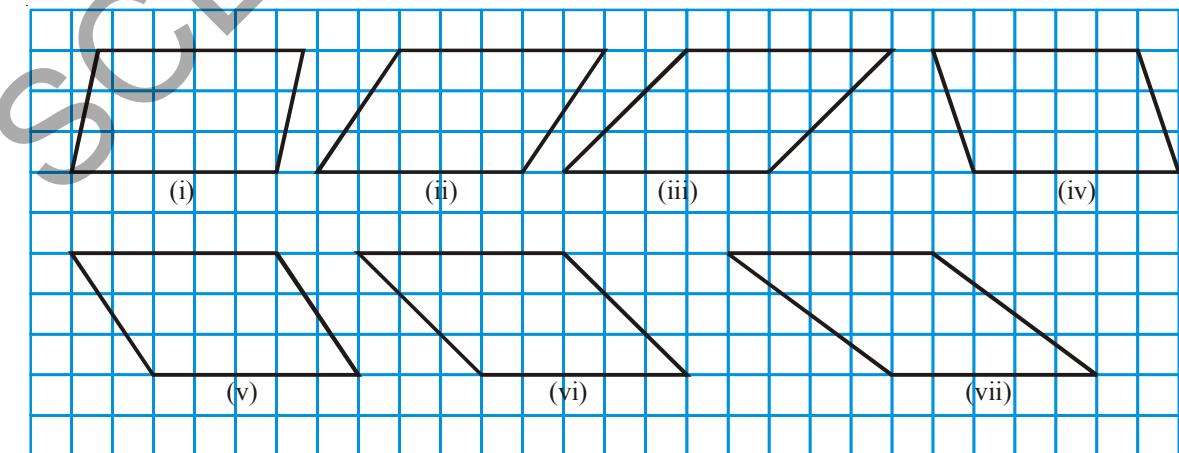
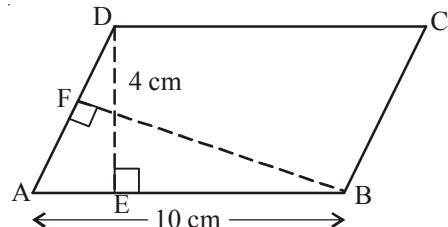
- సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో $\overline{AB} = 10$ సెం.మీ.



$\overline{DE} = 4$ సెం.మీ. అయిన కింది వాటిని కనుక్కోండి.

- ABCD వైశాల్యం
- $\overline{AD} = 6$ సెం.మీ. అయిన \overline{BF} యొక్క పొడవు

- కింది పటాలను జాగ్రత్తగా పరిశీలించండి.



- (i) ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజంలోని గళ్లు (చతురస్రాల)ను లెక్కించుట ద్వారా దాని వైశాల్యమును కనుగొనండి?
ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజంలో అసంపూర్ణ చతురస్రాలను లెక్కించునపుడు రెండు అసంపూర్ణ చతురస్రాలు కలిసి ఒక చతురస్రం అయ్యేలా తీసుకోండి.

వీటి ఆధారంగా కింది పట్టికను పూరించండి?

సమాంతర చతుర్భుజం	భూమి	ఎత్తు	వైశాల్యం	లెక్కించిన చతురస్రాల ఆధారంగా వైశాల్యం		
				పూర్తి చతురస్రాల సంఖ్య	అసంపూర్ణ చతురస్రాల సంఖ్య	మొత్తం
(i)	5 యూనిట్లు	3 యూనిట్లు	$5 \times 3 = 15$ చదరపు యూనిట్లు	12	6	15
(ii)						
(iii)						
(iv)						
(v)						
(vi)						
(vii)						

- (ii) సమాన భూమి, సమాన ఎత్తు గల సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయా?



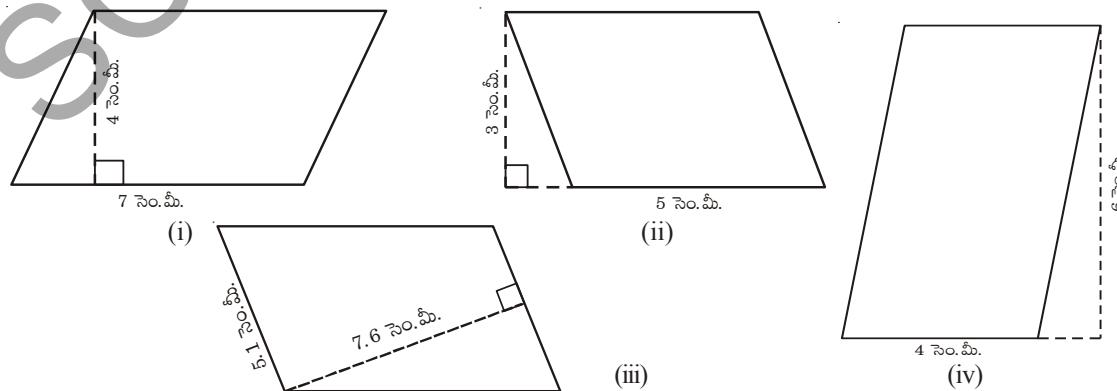
ప్రయత్నించండి.

- (i) దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం, సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యాలను కనుగొనుటకు ఉపయోగించే సూత్రాలు ఒకే విధంగా ఎందుకు ఉన్నాయి?
- (ii) ప్రతీ దీర్ఘచతురస్రం ఒక సమాంతర చతుర్భుజమైంది. కానీ ప్రతీ సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘచతురస్రము కాకపోవచ్చ వివరించండి.

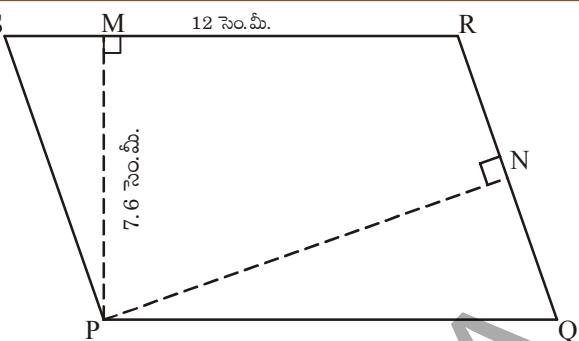


అభ్యాసం - 2

1. ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?

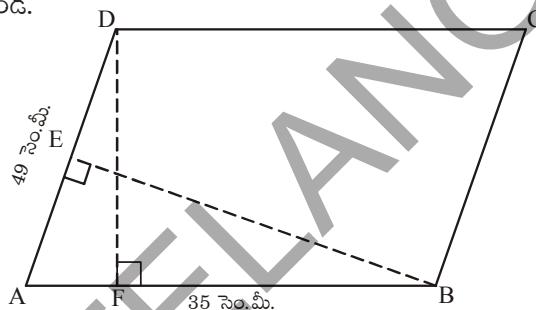


2. PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. P నుండి \overline{SR} పైకి గీయబడిన లంబం \overline{PM} . మరియు P నుండి \overline{QR} పైకి గీయబడిన లంబం \overline{PN} . $\overline{SR} = 12$ సెం.మీ. $PM = 7.6$ సెం.మీ. అయిన



- (i) PQRS సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యమెంత?
- (ii) $\overline{QR} = 8$ సెం.మీ. అయిన \overline{PN} విలువను కనుగొనండి?

3. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{DF}, \overline{BE}$ లు వరుసగా $\overline{AB}, \overline{AD}$ ల పైకి గీయబడిన లంబాలు. $\overline{AB} = 35$ సెం.మీ. $\overline{AD} = 49$ సెం.మీ. మరియు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 1470 సెం.మీ.² అయిన BE, DF లను కనుగొనండి.

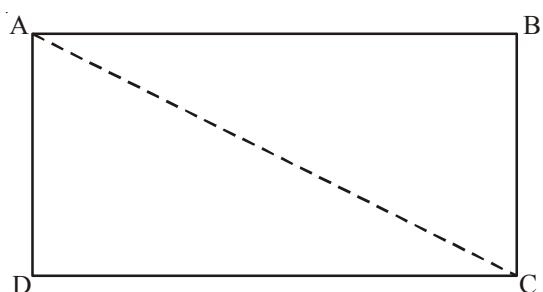


4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు, దాని భూమిలో $1/3$ వ వంతు ఉంది. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 192 సెం.మీ.² అయిన దాని భూమిని, ఎత్తును కనుగొనండి?
5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు $5:2$ నిపుత్తిలో ఉన్నాయి. సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం 360 చ.మీ. అయిన దాని భూమి మరియు ఎత్తులను కనుగొనండి?
6. ఒక చతురస్రం, మరియు ఒక సమాంతర చతుర్భుజంల యొక్క వైశాల్యం సమానం. చతురస్రం యొక్క భూజము 40 మీ. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు 20 మీ. అయిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క భూమిని కనుగొనండి.

13.2 త్రిభుజ వైశాల్యం

13.2.1 దీర్ఘవతురస్రంలో భాగాలుగా త్రిభుజాలు

ఒక దీర్ఘవతురస్రాన్ని ఒక కాగితంపై గీయండి. దీనిని పటంలో చూపిన విధంగా దాని కర్ణము వెంట కత్తిరించగా ఏర్పడిన రెండు త్రిభుజాలను తీసుకోండి.



వీటిని ఒక త్రిభుజంపై మరొక త్రిభుజం ఏకీభవించుటకుగా ఉంచండి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా? రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని చెప్పవచ్చా?

ఈ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం. అందుచే దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యం రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తంనకు సమానం.

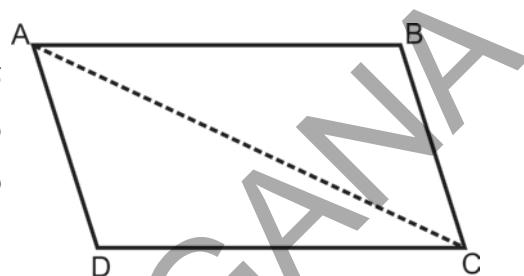
$$\text{కాబట్టి, త్రిభుజం వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times (\text{దీర్ఘచతురప్ర వైశాల్యం})$$

$$= \frac{1}{2} \times (l \times b) = \frac{1}{2} lb$$

13.2.2 సమాంతర చతుర్భుజాలలో భాగాలుగా త్రిభుజాలు

వటంలో చూపిన విధంగా కాగితంపై ఒక సమాంతర చతుర్భుజంను గీయింది. దీనిని రెండు త్రిభుజాలగా కర్ణము వెంట కత్తిరించుము. ఏర్పడిన రెండు త్రిభుజాలను ఒక దానిపై మరొకటి ఉంచండి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా?

సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం దాని భూమి, ఎత్తుల లబ్దానికి సమానం అని మనకు తెలుసు కాబట్టి,



$$\begin{aligned}\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} &= \frac{1}{2} \times (\text{సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{భూమి} \times \text{ఎత్తు}) \\ &= \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} bh\end{aligned}$$

అందుచే ఒక త్రిభుజవైశాల్యం దాని భూమి (b), ఎత్తు (h)ల లబ్దంలో సగానికి సమానం.

$$\text{అనగా త్రిభుజ వైశాల్యం } A = \frac{1}{2} bh$$

ఉధారణ 2 : కింది వటంలోని త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి.

సాధన :

$$\text{త్రిభుజ భూమి } (b) = 13 \text{ సె.మీ.}$$

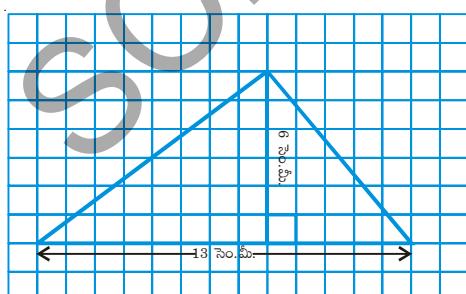
$$\text{త్రిభుజ ఎత్తు } (h) = 6 \text{ సె.మీ.}$$

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం } (A) = \frac{1}{2} (\text{భూమి} \times \text{ఎత్తు}) \text{ లేదా} = \frac{1}{2} bh$$

$$\text{కాబట్టి, } A = \frac{1}{2} \times 13 \times 6$$

$$= 13 \times 3 = 39 \text{ చ.సె.మీ.}$$

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = 39 \text{ చ.సె.మీ.}$$



ఉదాహరణ 3 : త్రిభుజం ABC యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి

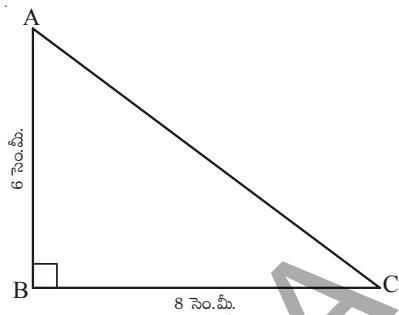
త్రిభుజం యొక్క భూమి (b) = 8 సెం.మీ.

త్రిభుజం యొక్క ఎత్తు (h) = 6 సెం.మీ.

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం } (A) = \frac{1}{2} bh$$

$$\text{కాబట్టి, త్రిభుజ వైశాల్యం } A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24 \text{ సెం.మీ.}^2$$

$$\text{అందుచే } ABC \text{ త్రిభుజ వైశాల్యం} = 24 \text{ సెం.మీ.}^2$$



లంబకోణ త్రిభుజంలోని రెండు భూజాలలో దేవికైనా ఎత్తుగా తీసుకోవచ్చని గమనించగలరు.



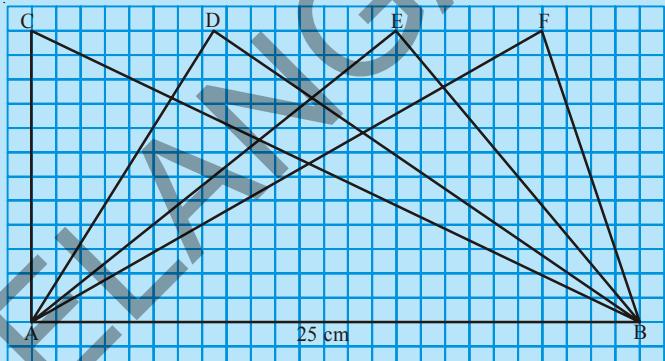
ప్రయత్నించండి.

వక్క పటంలో అన్ని త్రిభుజాలు ఒకే భూమి $AB = 25$ సెం.మీ.

పై గియబడినవి. ఒకే భూమి AB పై గియబడిన అన్ని త్రిభుజాల ఎత్తులు సమానమేనా?

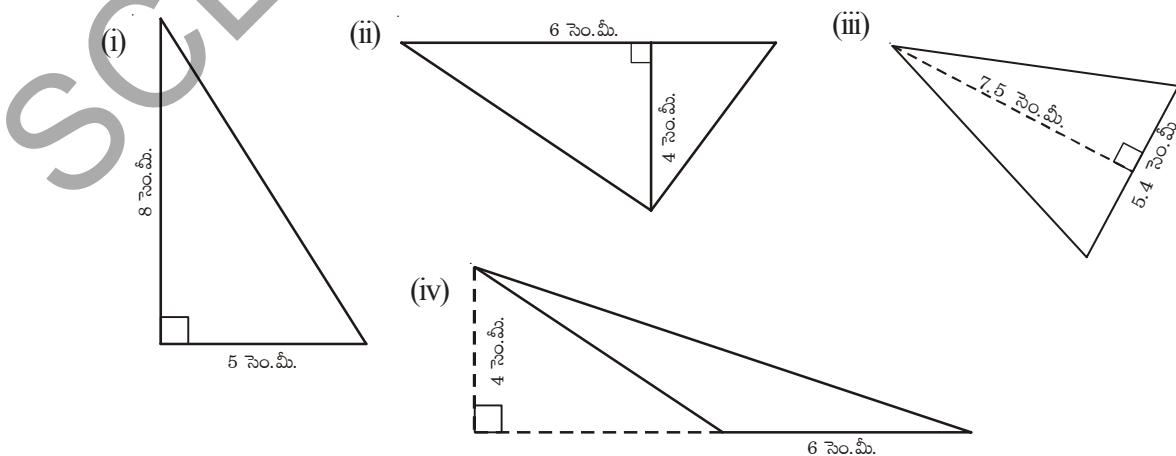
అన్ని త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానమేనా? నీ సమాధానానికి తగిన కారణాలు తెలుపండి.

ఈ త్రిభుజాలు సర్వసమానం కూడా అవుతాయా?



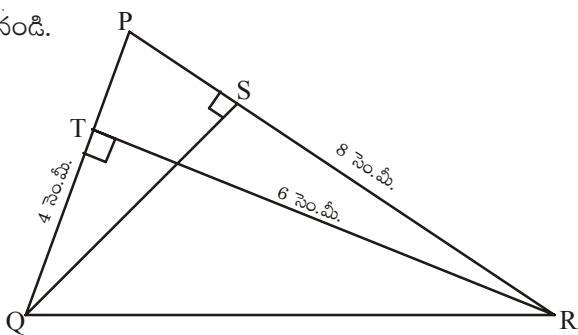
అభ్యాసం - 3

1. కింది త్రిభుజాల వైశాల్యాలను కనుగొనండి.

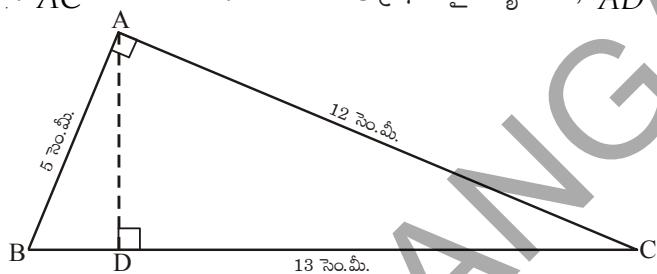


2. ΔPQR లో $\overline{PQ} = 4$ సెం.మీ., $\overline{PR} = 8$ సెం.మీ., $\overline{RT} = 6$ సెం.మీ. అయిన (i) ΔPQR వైశాల్యంను (ii)

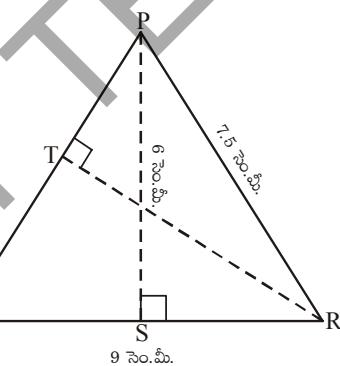
\overline{QS} పొడవును కనుగొనండి.



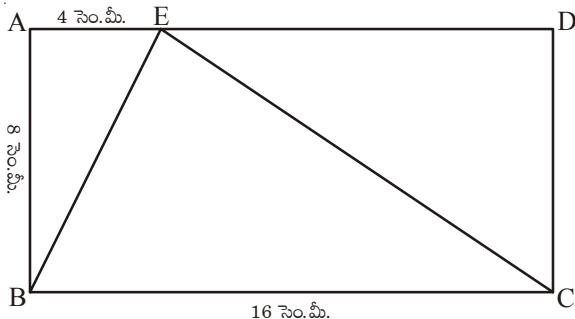
3. ΔABC లో A వద్ద లంబకోణం కలదు. \overline{AD} , \overline{BC} పైకి గీయబడిన లంబం. $AB = 5$ సెం.మీ., $\overline{BC} = 13$ సెం.మీ. $\overline{AC} = 12$ సెం.మీ. అయిన ABC త్రిభుజ వైశాల్యమును, \overline{AD} పొడవును కనుగొనండి?



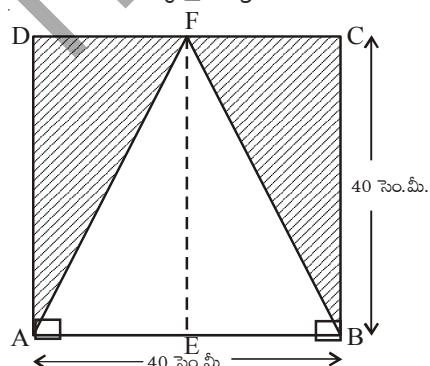
4. PQR ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం. $\overline{PQ} = \overline{PR} = 7.5$ సెం.మీ. మరియు $\overline{QR} = 9$ సెం.మీ. P నుంచి \overline{QR} పైకి గీయబడిన ఎత్తు $\overline{PS} = 6$ సెం.మీ. అయిన ΔPQR వైశాల్యంను మరియు \overline{RT} పొడవును కనుగొనండి?



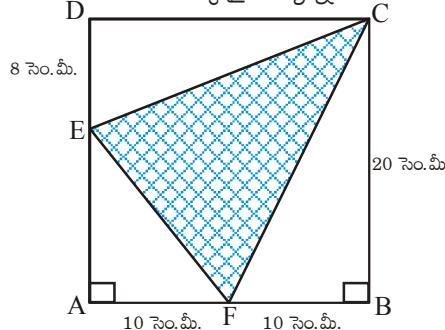
5. ABCD దీర్ఘచతురస్రంలో $\overline{AB} = 8$ సెం.మీ., $\overline{BC} = 16$ సెం.మీ., $\overline{AE} = 4$ సెం.మీ. అయిన ΔBCE వైశాల్యంను కనుగొనండి? ΔBAE , ΔCDE త్రిభుజాల వైశాల్యాల మొత్తం, ΔBEC వైశాల్యం సమానమేనా? ఎందుకు?



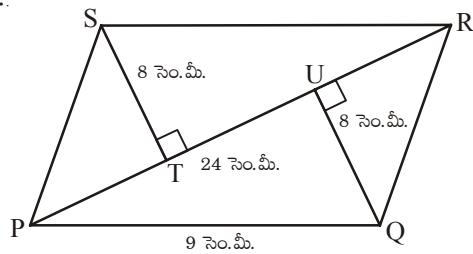
6. రాము PQR త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5$ సెం.మీ.² అని చెప్పాడు.
- గోపి, అదే త్రిభుజ వైశాల్యం $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$ సెం.మీ.² అని చెప్పాడు. ఎవరు సరిగా చెప్పారు? ఎందుకు?
-
7. ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం 220 సెం.మీ.² దాని ఎత్తు 11 సెం.మీ. అయిన దాని భూమిని కనుగొనండి?
8. ఒక త్రిభుజం ఎత్తు దాని భూమికి రెండు రెట్లు ఉంది. త్రిభుజ వైశాల్యం 400 సెం.మీ.² అయిన త్రిభుజ భూమిని, ఎత్తును కనుగొనండి?
9. ఒక త్రిభుజ వైశాల్యం, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యంనకు సమానం. దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, వెడల్పులు వరుసగా 20 సెం.మీ., 15 సెం.మీ. త్రిభుజం యొక్క భూమి 30 సెం.మీ. అయిన త్రిభుజం యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి?
10. పటం ABCD లో పేడ్ చేయబడిన భాగం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి? ($\overline{DF} = \overline{CF}$)



11. ABCD పటంలో పేడ్ చేసిన భాగం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి?



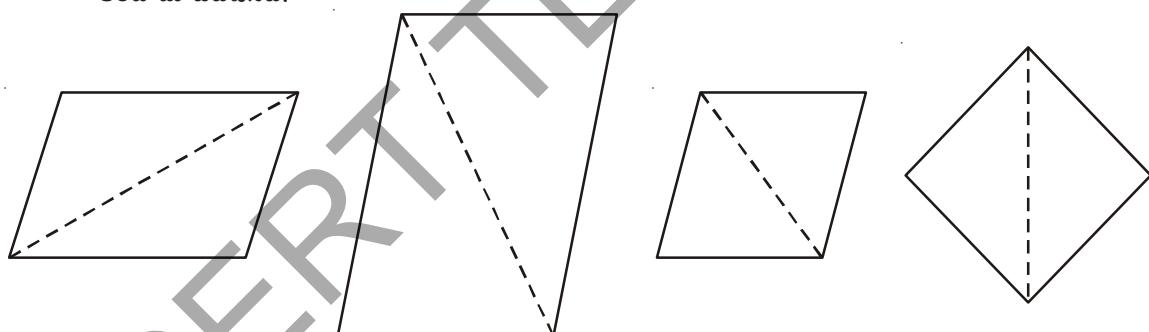
12. PQRS సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{PR} = 24$ సెం.మీ. మరియు $\overline{QU} = \overline{ST} = 8$ సెం.మీ. అయిన దాని వైశాల్యం కనుగొనడి?



13. ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి, ఎత్తులు $3:2$ నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం 108 సెం.మీ.² అయిన దాని భూమి, ఎత్తులను కనుగొనడి?

13.3 సమచతుర్భుజం (రాంబస్) యొక్క వైశాల్యం

సంతోష్, అఖిల మంచి మిత్రులు. కాగితంతో వివిధ ఆకారాలను కత్తిరించి వాటితో ఆడుతున్నారు. ఒకరోజు సంతోష్ వివిధ త్రిభుజాల ఆకారాలను అఖిలకు ఇచ్చాడు. అఖిల వాటితో వేరువేరు ఆకారాలు కర్ణిన సమాంతర చతుర్భుజాలను ఏర్పరచింది. ఈ సమాంతర చతుర్భుజాలు కింద చూపబడినవి.



“వీటిలో అన్ని భూజాలు సమానంగా ఉన్న సమాంతర చతుర్భుజాలు ఏవి?” అని సంతోష్ అఖిలను అడిగాడు.

దానికి అఖిల “చివరి రెండు” సమాన భూజాలు కర్ణి ఉన్నాయి అని తెలిపింది.

వెంటనే సంతోష్ “ఈ విధంగా అన్ని భూజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమచతుర్భుజం (రాంబస్) అంటాం”. అని తెల్పాడు.

మనమిప్పుడు సమచతుర్భుజం వైశాల్యాన్ని ఎలా గణించవచ్చే నేర్చుకుండా!

త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనడానికి సమాంతర చతుర్భుజంను రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా ఎలా విభజించామో, అదే పద్ధతిని సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనుటలో కూడా ఉపయోగిద్దాం.

ABCD ఒక సమచతుర్భుజం (రాంబన్)

$$\text{ABCD సమచతుర్భుజ వైశాల్యం} = (\Delta ACD \text{ వైశాల్యం}) + (\Delta ACB \text{ వైశాల్యం})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{OD} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{OB} \right)$$

(సమచతుర్భుజములో కర్ణాలు పరస్పరం లంబ సమద్విఖండన చేసుకుంటాయి

$$= \frac{1}{2} \overline{AC} \times (\overline{OD} + \overline{OB})$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \quad (AC = d_1 \text{ మరియు } BD = d_2)$$

సమచతుర్భుజ, వైశాల్యం దాని కర్ణాల లభ్యంలో సగానికి సమానం.

$$\text{అనగా } A = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

ఉధారణ 4 : ABCD సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం కనుగొనండి?

సాధన : మొదటి కర్ణం పొడవు (d_1) = 7.5 సెం.మీ.

రెండవ కర్ణం పొడవు (d_2) = 5.6 సెం.మీ.

$$\text{సమచతుర్భుజ వైశాల్యం } (A) = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$\text{సమచతుర్భుజ వైశాల్యం } A = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6 = 21 \text{ సెం.మీ.}^2$$

అందుచే, సమచతుర్భుజం ABCD వైశాల్యం = 21 సెం.మీ. 2

ఉధారణ 5 : ఒక సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 60 సెం.మీ. 2 దాని ఒక కర్ణం 8 సెం.మీ. అయిన రెండవ కర్ణంను కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి కర్ణం పొడవు (d_1) = 8 సెం.మీ.

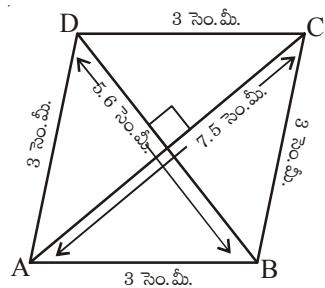
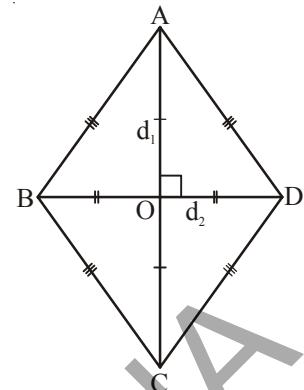
రెండవ కర్ణం పొడవు = d_2

$$\text{సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$\text{కాబట్టి } 60 = \frac{1}{2} \times 8 \times d_2$$

$$d_2 = 15 \text{ సెం.మీ.}$$

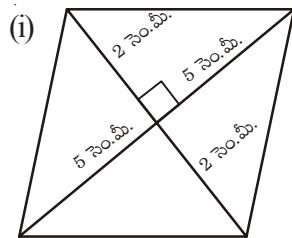
అందుచేత, రెండవ కర్ణం యొక్క పొడవు = $d_2 = 15$ సెం.మీ.



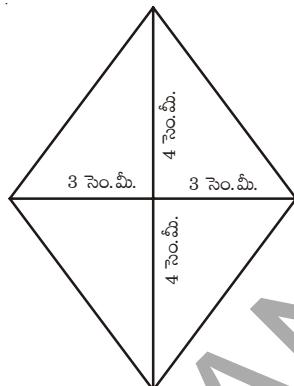


అభ్యాసం - 4

1. కింది సమచతుర్భుజాల వైశాల్యం కనుగొనండి?



(i)



(ii)

2. ఖాళీ గళ్ళను పూరించండి?

మొదటి కర్ణం (d_1)	రెండవ కర్ణం (d_2)	సమచతుర్భుజ వైశాల్యం
12 సెం.మీ.	16 సెం.మీ.	
27 మి.మీ.		2025 మి.మీ. ²
24 మీ.	57.6 మీ.	

3. ఒక సమచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యం 216 చ.సెం.మీ. ఒక కర్ణం 24 సెం.మీ. అయిన ఆ సమచతుర్భుజం యొక్క రెండవ కర్ణం ఎంత?
4. ఒక భవనం నేలపై సమచతుర్భుజాకారంలో ఉన్న 3000 లైట్ పరుచబడి ఉన్నాయి. ఒక్కొక్క లైట్ యొక్క కర్ణాలు 45 సెం.మీ., 30 సెం.మీ. ఒక చదరపు మీటరు వైశాల్యం గల నేలను పాలిష్ చేయుటకు ₹ 2.50 ఖర్చు అయిన మొత్తం నేలను (లైట్) పాలిష్ చేయుటకు ఎంత ఖర్చుగును.

13.4 వృత్తం చుట్టుకొలత

నజియా సైకిల్ టైరుతో ఆడుకుంటుంది. ఆమె టైరును కర్తృతో తిప్పుతూ దాని వెంట పరిగెత్తుతుంది. టైరు ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినపుడు అది ప్రయాణించిన దూరం ఎంత?

సైకిల్ టైరు ఒక పూర్తి చుట్టు తిరిగినపుడు అది ప్రయాణించిన దూరం, ఆ టైరు చుట్టూ ఉన్న పొడవుకు సమానం. సైకిల్ టైరు యొక్క ఈ చుట్టూ ఉన్న పొడవునే దాని చుట్టుకొలత అంటారు.



సైకిల్ టైరు ప్రయాణించిన మొత్తం దూరానికి అది తిరిగిన చుట్టు సంఖ్యకు మధ్యగల సంబంధం ఏమిటో చెప్పగలరా?

మొత్తం ప్రయాణించిన దూరం = టైరు తిరిగిన చుట్టు సంఖ్య \times టైరు చుట్టుకొలత.

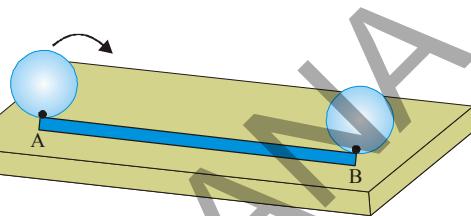
కృత్యం : 2

జయ ఒక వృత్తాకార ముక్కను కార్డబోర్డునుండి కత్తిరించి తీసుకొంది. దీనిని అందంగా తయారుచేయటం కొరకు దీనిమట్ట ఒక లేసును పటంలో చూపిన విధంగా అతికించాలనుకున్నది. అయితే ఆమెకు కావలసిన లేసు యొక్క పొడవు వృత్తాకార కార్డబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలతకు సమానమేనా? వృత్తాకార కార్డబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలత సేళు సహాయంతో కొలవగలదా?



జయ ఏమి చేసిందో పరిశీలిద్దాం?

జయ టేబుల్స్‌పై ఒక రేఖను గీసి ఆ గీతపై బిందువు A ను గుర్తించింది. వృత్తాకార కార్డబోర్డుపై అంచువెంట ఒకచోట ఒక చుక్కను గుర్తించింది. ఈ చుక్కను రేఖపై గుర్తించిన A బిందువుతో ఏకీభవించునట్లు కార్డబోర్డును టేబుల్స్‌పై ఉంచింది. పటంలో చూపిన విధంగా దొర్రించటం ప్రారంభించింది. కార్డబోర్డు అంచువెంట గుర్తించిన చుక్క తిరిగి టేబుల్స్‌పై గీచిన రేఖతో ఏకీభవించే వరకూ దానిని దొర్రించింది. కార్డబోర్డుపైన ఉన్న చుక్క మళ్ళీ రేఖను ఏకీభవించిన బిందువును B గా గుర్తించింది. AB రేఖ పొడవు వృత్తాకార కార్డబోర్డు యొక్క చుట్టుకొలతకు సమానమవుతుంది కనుక AB రేఖ పొడవకు సమానమైన లేనీ పొడవు వృత్తాకార కార్డబోర్డుకు అవసరమౌతుంది.



ప్రయత్నించండి.

సీసామూత, గాజు లేదా ఏదైనా ఒక వృత్తాకార వస్తువును తీసుకోంది. వాటి యొక్క చుట్టుకొలతను తీగ సహాయంతో కనుగొనంది.

అయితే ప్రతీ వృత్తాకార వస్తువు యొక్క చుట్టుకొలతను ఈ విధంగా కనుగొనటం సులభం కాదు. కనుక వేరే ఒక పద్ధతిన తెలుసుకోవలసి ఉంది. దీనికారకై వృత్తం యొక్క వ్యాసంనకు దాని చుట్టుకొలతకు మధ్యసంబంధమేమైనా ఉందేమో పరిశీలిద్దాం.

ఒక వ్యక్తి వేరువేరు వ్యాసార్థాలున్న 6 వృత్తాకార కార్డబోర్డులను తయారు చేసి తీగ సహాయమతో వీని చుట్టుకొలతలను కనుగొన్నాడు. ఇంకా వ్యాసమునకు, చుట్టుకొలతకు మధ్యగల నిష్పత్తిని కూడా కనుగొన్నాడు.

ఈ విలువలన్నించిని కింది పట్టికలో నమోదు చేశాడు.

వృత్తము	వ్యాసార్థము	వ్యాసము	చుట్టుకొలత	చుట్టుకొలతకు, వ్యాసమునకు మధ్యగల నిష్పత్తి
1.	3.5 సెం.మీ.	7.0 సెం.మీ.	22.0 సెం.మీ.	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 సెం.మీ.	14.0 సెం.మీ.	44.0 సెం.మీ.	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 సెం.మీ.	21.0 సెం.మీ.	66.0 సెం.మీ.	
4.	21.0 సెం.మీ.	42.0 సెం.మీ.	132.0 సెం.మీ.	
5.	5.0 సెం.మీ.	10.0 సెం.మీ.	32.0 సెం.మీ.	
6.	15.0 సెం.మీ.	30.0 సెం.మీ.	94.0 సెం.మీ.	

పట్టికలోని ఫలితాల ఆధారంగా మీరేమి గ్రహించారు? ప్రతీ వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత, దాని వ్యాసంనకు మధ్యగల నిష్పత్తి సుమారుగా సమానమేనా? ఎల్లప్పుడు వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత, దాని వ్యాసంనకు దాదాపు మూడు రెట్లు ఉంటుందని చెప్పవచ్చా?

వృత్తం చుట్టుకొలత దాని వ్యాసంనకు మధ్యగల నిష్పత్తి విలువ సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14గా ఉంటుంది.

దీనిని π (పై) చేత సూచిస్తాం. ఇది ఒక శీర విలువ.

$$\text{కాబట్టి వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను 'c' చేత వ్యాసంను 'd' చేత సూచిస్తే } \frac{c}{d} = \pi \text{ అవుతుంది.}$$

$$\begin{aligned}\text{కావున} \quad \frac{c}{d} &= \pi \\ c &= \pi d\end{aligned}$$

అయితే, వృత్తం యొక్క వ్యాసం, వ్యాసార్థానికి రెండింతలు అపుతుంది. అనగా $d = 2r$ ($r = \text{వ్యాసార్థం}$)

$$c = \pi \times 2r \quad \text{లేదా} \quad c = 2\pi r$$

$$\text{అయితే, వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత } c = 2\pi r$$

ఉధారణ 6 : 10 సెం.మీ. వ్యాసం కలిగిన వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనిన)

$$\begin{aligned}\text{సాధన :} \quad \text{వృత్తం యొక్క వ్యాసం (d)} &= 10 \text{ సెం.మీ.} \\ \text{వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత (c)} &= \pi d \\ &= 3.14 \times 10 \\ c &= 31.4 \text{ సెం.మీ.} \\ \text{అందుచేత వృత్తం చుట్టుకొలత} &= 31.4 \text{ సెం.మీ.}\end{aligned}$$

ఉధారణ 7 : 14 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనండి? ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనిన)

$$\begin{aligned}\text{వృత్త వ్యాసార్థం (r)} &= 14 \text{ సెం.మీ.} \\ \text{వృత్తం చుట్టుకొలత (c)} &= 2\pi r \\ c &= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \\ c &= 88 \text{ సెం.మీ.}\end{aligned}$$

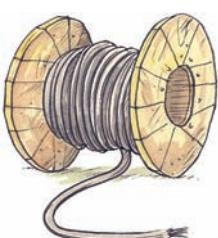
అందుచే, వృత్తం చుట్టుకొలత = 88 సెం.మీ.

అభ్యాసం - 5

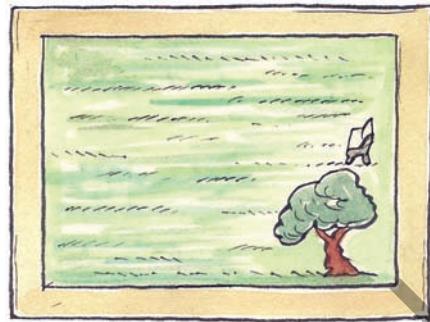
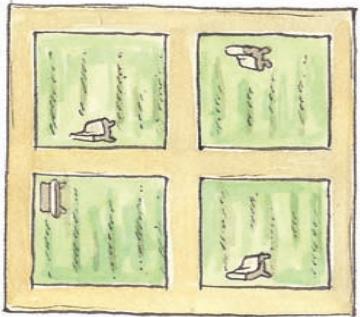
1. కింది వ్యాసార్థాలుగా గల వృత్తాల చుట్టుకొలతలను కనుగొనండి.
- (i) 35 సెం.మీ. (ii) 4.2 సెం.మీ. (iii) 15.4 సెం.మీ.
2. కింది వ్యాసాలుగా గల వృత్తాల చుట్టుకొలతలను కనుగొనండి?
- (i) 17.5 సెం.మీ. (ii) 5.6 సెం.మీ. (iii) 4.9 సెం.మీ.

గమనిక : పై రెండు సందర్భాలలో $\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకొనుము.

3. (i) $\pi = 3.14$ గా తీసుకొని కింది వ్యాసార్థాలు కల్గిన వృత్తాల చుట్టుకొలతలు కనుగొనండి?
- (a) 8 సెం.మీ. (b) 15 సెం.మీ. (c) 20 సెం.మీ.
- (ii) చుట్టుకొలత 44 సెం.మీ.గా గలిగిన వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి?
4. ఒక వృత్తం చుట్టుకొలత 264 సెం.మీ. దాని వ్యాసార్థంను కనుగొనండి. $\pi = \frac{22}{7}$.
5. ఒక వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలత 33 సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసంను కనుగొనండి.
6. 35 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల ఒక శక్తం ఎన్ని చుట్టు తిరిగిన అది 660 సెం.మీ. దూరం ప్రయాణించగలదు?
- $(\pi = \frac{22}{7} \text{ గా తీసుకొనిన})$
7. రెండు వృత్తాల వ్యాసాల నిప్పుత్తి 3 : 4 అయిన వాని చుట్టుకొలతల నిప్పుత్తిని కనుగొనండి?
8. ఒక రోడ్‌రోలరు 2200 మీ. దూరంను చదును చేయటకు 200 చుట్టు తిరుగును. అయిన రోలరు యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి?
9. ఒక నిమిషాల ముల్లు పొడవు 15 సెం.మీ. దాని చివరి కొన 1 గంటలో ప్రయాణించే దూరమును కనుగొనండి? ($\pi = 3.14$ గా తీసుకొనిన).
10. ఒక తీగతో 25 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తాకారాన్ని మలిచి అదే తీగతో ఒక చతురప్రాకారాన్ని తయారు చేసిన ఆ చతురప్ర భుజం పొడవు ఎంత?

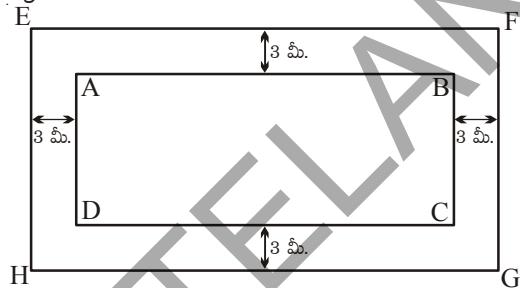


13.5 దీర్ఘచతురస్రాకార బాటలు



సాధారణంగా మనం తోటలు, పార్యులు, ఆట స్థలాలలో నడక కోసం బాటలను ఏర్పరచడం గమనించి ఉంటాం. అయితే మనం ఉపయోగం కోసం నిర్మించుకొనే ఈ బాటల కోసం అయ్యే ఖర్చు లెక్కించడానికి వాటి వైశాల్యాలు ఎలా లెక్కిస్తారో తెలుసుకుండాం.

ఉధారణ 8 : 60 మీ. పొడవు 40 మీ. వెడల్పు గల ఒక ప్లాటు చుట్టూ 3 మీ. వెడల్పు గల బాట నిర్మించారు. అయిన ఆ బాట వైశాల్యంను కనుగొనడి?



సాధన : పై పటంలో ABCD దీర్ఘచతురస్రాకార ప్లాటును సూచిస్తుంది. దీని చుట్టూ 3 మీ. బాటను నిర్మించడమైంది. ఈ బాట వైశాల్యాన్ని కనుగొనవలెనన్న EFGH బయటి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాల నుండి ABCD లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని తీసివేయాలి.

$$\text{లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD యొక్క పొడవు} = 60 \text{ మీ.}$$

$$\text{లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD యొక్క వెడల్పు} = 40 \text{ మీ.}$$

$$\begin{aligned} \text{లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం ABCD వైశాల్యం} &= (60 \times 40) \text{ మీ.}^2 \\ &= 2400 \text{ మీ.} \end{aligned}$$

$$\text{బాట వెడల్పు} = 3 \text{ మీ.}$$

$$\begin{aligned} \text{వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH పొడవు} &= 60 \text{ మీ.} + (3+3) \text{ మీ.} \\ &= 66 \text{ మీ.} \end{aligned}$$

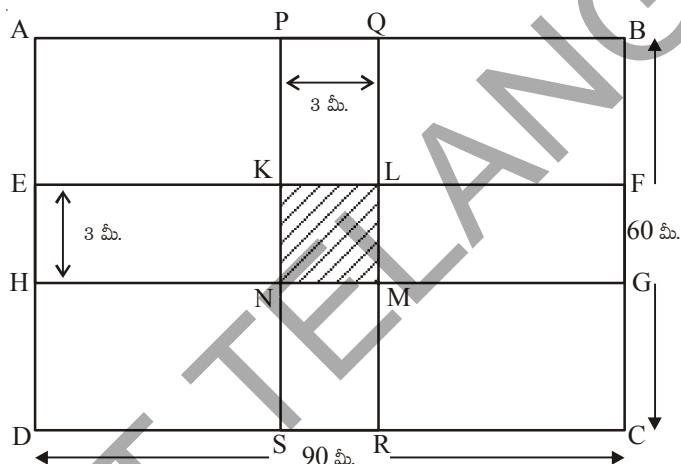
$$\begin{aligned} \text{వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వెడల్పు} &= 40 \text{ మీ.} + (3+3) \text{ మీ.} \\ &= 46 \text{ మీ.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వైశాల్యం} &= 66 \times 46 \text{ మీ}^2 = 3036 \text{ మీ}^2 \\ \therefore \text{బాటు వైశాల్యం} &= (\text{వెలుపలి దీర్ఘచతురస్రం EFGH వైశాల్యం}) \\ &\quad - (\text{బోపలి దీర్ఘచతురస్రం ABCD వైశాల్యం}) \\ &= (3036 - 2400) \text{ మీ}^2 = 636 \text{ మీ}^2\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 9 : ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార మైదానం యొక్క పొడవు, వెడల్పు వరుసగా 90 మీ., 60 మీ. ఈ మైదానంలో పటంలో చూపిన విధంగా PQRS, EFGH అనే రెండు రోడ్లను ఒకొక్కటి 3 మీ. వెడల్పు ఉండేటట్లు నిర్మించినారు. ఈ రోడ్లు దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క భూజాలకు సమాంతరంగా ఉండి, మైదానం మధ్య భాగంలో అవి ఒక దానికొకటి కలుసుకున్నాయి. అయితే

- (i) రోడ్లు వైశాల్యం
- (ii) మీటరుకు ₹ 110 చొప్పున రోడ్లు నిర్మాణానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.

సాధన :



(i) సమస్యలో ఇచ్చిన అంశాలు

$$PQ = 3 \text{ మీ.} \quad \text{మరియు} \quad PS = 60 \text{ మీ.} \quad EH = 3 \text{ మీ.} \quad \text{మరియు} \quad EF = 90 \text{ మీ.}$$

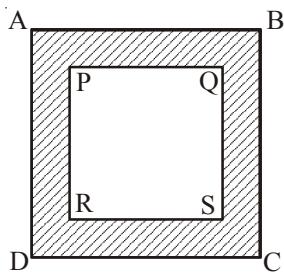
$$KL = 3 \text{ మీ.} \quad \text{మరియు} \quad KN = 3 \text{ మీ.} \quad \text{అనగా KLMN ఒక చతురస్రం.}$$

రోడ్లు వైశాల్యం PQRS మరియు EFGH దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తానికి సమానం. అయితే ఈ పటంను గమనించినట్లయితే KLMN చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రెండు సార్లు తీసుకోబడుతున్నట్లుగా తెలుస్తుంది. అందువల్ల KLMN చతురస్ర వైశాల్యాన్ని రోడ్లు వైశాల్యం (PQRS, EFGH) ల నుండి ఒకసారి తీసివేయాలి.

$$\begin{aligned}\therefore \text{రోడ్లు వైశాల్యం} &= \text{దీర్ఘ చతురస్రం PQRS వైశాల్యం} + \text{దీర్ఘ చతురస్రం EFGH వైశాల్యం} \\ &\quad - \text{చతురస్రం KLMN వైశాల్యం} \\ &= (PS \times PQ) + (EF \times EH) - (KL \times KN) \\ &= (60 \times 3) + (90 \times 3) - (3 \times 3) \text{ మీ}^2 \\ &= (180 + 270 - 9) \text{ మీ}^2 \\ &= 441 \text{ మీ}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad 1 \text{ మీ}^2 \text{ నిర్మణానికి అయ్యే ఖర్చు &= ₹ 110 \\
 441 \text{ మీ}^2 \text{ నిర్మణానికి అయ్యే ఖర్చు &= 110 \times 441 \\
 \text{రోడ్డు నిర్మణానికి అయ్యే ఖర్చు &= ₹ 48,510
 \end{aligned}$$

ఉధారణ 10 : 100 మీ. భుజంగల ఒక చతురష్టి మైదానం చుట్టూ బయట 5 మీ. వెడల్పుగల బాట గలదు. అయిన బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి? 10 చ.మీ. బాటను సిమెంటుతో నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 250 అయిన మొత్తం బాటను నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.



సాధన : పటం PQRS చతురష్టి మైదానం. ప్రెడ్చేసిన భాగం 5 మీ. వెడల్పు గల బాట.

$$\begin{aligned}
 \text{PQRS చతురష్టి భుజం} &= 100 \text{ మీ.} \\
 \text{PQRS చతురష్టి వైశాల్యం} &= 100^2 = 10000 \text{ చ.మీ.} \\
 \text{AB భుజం యొక్క పొడవు} &= 100 + (5+5) = 110 \text{ మీ.} \\
 \text{ABCD చతురష్టి వైశాల్యం} &= 110^2 = 12100 \text{ చ.మీ.} \\
 \text{బాట వైశాల్యం} &= \text{ABCD వైశాల్యము} - \text{PQRS వైశాల్యము} \\
 &= 12100 - 10000 = 2100 \text{ చ.మీ.} \\
 10 \text{ చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు} &= ₹ 250 \\
 1 \text{ చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు} &= \frac{250}{10} \\
 2100 \text{ చ.మీ. బాట నిర్మించుటకు అయ్యే ఖర్చు} &= \frac{250}{10} \times 2100 \\
 &= ₹ 52,500 \\
 \text{బాట నిర్మణానికి అయ్యే ఖర్చు} &= ₹ 52,500
 \end{aligned}$$

అభ్యాసం - 6

- 45 మీ. భుజముగల ఒక చతురష్టికార మైదానం చుట్టూ 2.5 మీ. వెడల్పు గల బాట కలదు. బాట వైశాల్యంను కనుగొనండి?
- ఒక పారశాల భవనంలో 18 మీ. పొడవు, 12.5 మీ. వెడల్పు గల హోలు కలదు. హోలునేలపై గోడలనుంచి 50 సెం.మీ. వెడల్పున స్థలం వదిలి హోలు మధ్యలో ఒక కార్పోర్ పరచబడింది. కార్పోర్ వైశాల్యంను, కార్పోర్ కు గోడల అంచుకు మధ్యగల ఖాళీ ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?

3. ఒక చతురస్రాకార గడ్డి మైదానం యొక్క భుజం 80 మీ. దీనిలో నడవదానికి వీలుగా మైదానం యొక్క భుజాలకు సమాంతరంగా రెండు రోడ్లు ఒకదానికాకటి మైదానం యొక్క మధ్యభాగంలో పరస్పరం ఖండించుకొనే విధంగా నిర్మించబడినవి. రోడ్లు వెడల్పు 4 మీ. అయిన ఆ రోడ్లు వైశాల్యంను కనుగొనండి?
4. 8×5 మీ. కొలతలు గల ఒక గదిచుట్టూ 2 మీ. వెడల్పుగల వరండా కలదు. వరండా ఆక్రమించిన ప్రదేశం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొనండి?
5. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పారుళ్ళ యొక్క పొడవు, వెడల్పులు పరుసగా 700 మీ. మరియు 300 మీ. దీని భుజాలకు సమాంతరంగా 10 మీ. వెడల్పుగల రెండు రోడ్లు పారుళ్ళ మధ్యభాగంలో పరస్పరం ఖండించుకొనే విధంగా నిర్మించబడినవి. రోడ్లు వైశాల్యంను కనుగొనండి? అలాగే రోడ్లు కాకుండా మిగిలిన పారుళ్ళ వైశాల్యంను కనుగొనండి?



మనం నేర్చుకున్నవి

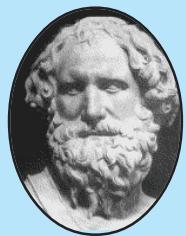
- సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం (A) దాని భూమి (b) ఎత్తుల (h) లబ్దానికి సమానం. అనగా $A = bh$. (సమాంతర చతుర్భుజంలో ఏ భుజాన్నినా భూమిగా తీసుకోవచ్చు).
 - త్రిభుజ వైశాల్యం (A) దాని భూమి (b) ఎత్తు (h) ల లబ్దంలో సగానికి సమానము.
- $$\text{అనగా } A = \frac{1}{2} bh.$$
- రాంబన్ వైశాల్యం (A) దాని కర్ణాల లబ్దంలో సగానికి సమానం అనగా $A = \frac{1}{2} d_1 d_2$.
 - వృత్త పరిధి (C) = $2 \pi r$ ఇచ్చట r వ్యాసార్థము మరియు $\pi = \frac{22}{7}$ లేదా 3.14.

ఆర్థిమెడిస్ (గ్రీసు)

287 - 212 BC

ప్రప్రథమంగా ఇతడు π విలువను గణించాడు.

వృత్తం చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలకు గణిత సూత్రాలను కనుగొన్నాడు.



14.0 పరిచయం

మీకు వె తరగతిలో వివిధ త్రిమితీయ ఆకారాలను పరిచయం చేయడం జరిగింది. ఆ ఆకారాల ముఖ్యాలను, అంచులను, శీర్శాలను గుర్తించడం కూడా నేర్చుకున్నారు. మీరు క్రింది తరగతిలో నేర్చుకొన్న విషయాలను ఒక్కసారి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.



అభ్యాసం - 1

- కింద కొన్ని వస్తువుల చిత్రాలు ఈయబడినాయి. వాటిని ఆకారాల ప్రకారం వర్గీకరించి కింది ఈ పట్టికలో వాటి పేర్లు నింపండి.



గోళము	స్ఫూర్ము	పిరమిడ్	దీర్ఘఫునము	శంకువు	సమఫునము

2. కింద ఈయబడిన త్రిమితీయ ఆకారాలకు, మీ దైనందిన జీవితంలో మీరు చూసే వస్తువుల నుండి కనీసం రెండు ఉదాహరణల నిప్పండి.

- (i) శంకువు -----
- (ii) సమ ఘనము -----
- (iii) దీర్ఘ ఘనము -----
- (iv) గోళము -----
- (v) సూఫము -----

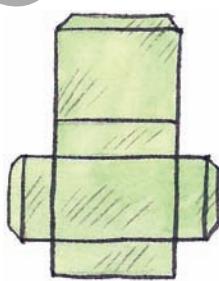
3. క్రింద ఈయబడిన ఆకారాల, ముఖాలు, అంచులు మరియు శీర్షాలను గుర్తించి వాటి సంబూధును క్రింది పట్టికలో నింపండి.

ముఖాలు			
అంచులు			
శీర్షాలు			

14.1 త్రిమితీయ ఆకారాల ‘వల’ రూపాలు

జప్పుడు మనం త్రిమితీయ ఆకారాలను విష్ణుగా కాగితం వంటి ద్విమితీయ తలాల (సమతలాల)పై ఎలా వుంటాయో చూద్దాం. దీనిని మనం వివిధ 3-D చిత్రాల ‘వల’ రూపాల ద్వారా గమనించవచ్చును.

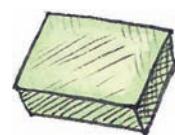
ఒక దళసరి కాగితంపో చేయబడ్డ అట్టపెట్టెను (టూతీపేస్ట్ పెట్టె లేదా ఘూ పెట్టె) తీసుకొని, దాని అంచుల వద్ద కత్తిరించి సమతలం వెర్పడేటట్లు చేయండి. ఇలా ఏర్పడిన దానినే ఆ పెట్టె వల అంటారు. పటము - 1 లో చూపినట్లు వల అనేది ద్విమితీయ తలంలో నున్న ఆకారము యొక్క అంచుల రూపము వంటిది. దానిని మడిచినపుడు పటము - 2 లో వున్నట్లు వస్తుంది. చివరకు పటము -3 లో చూపినట్లు పెట్టె ఆకారము ఏర్పడుతుంది.



పటం 1

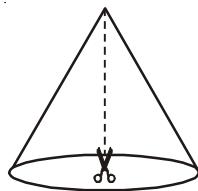


పటం 2



పటం 3

ఇక్కడ ఒక పెట్టి యొక్క వల రూపం ఈయబడినది. దీనిని కాగితంపై గీసి కత్తిరించి ఒక దళసరి కాగితముపై అంటేంచండి. అంచుల వెంబడి మడిచి జిగురుతో అంటేంచి ఒక పెట్టెను తయారు చేయండి. ఇలా ఏర్పడిన పెట్టె ఆకారము ఏమిటి?



వటం 1



వటం 2

ఈదే విధంగా శంకువు ఆకృతిలో వున్న బన్క్రీఎం కాగితవు కప్పును

(లేదా ఆ ఆకారం లోని మరేద్దొకప్పు) తీసుకొని పటము - 1 లో చూపినట్లు దాని ఏటవాలు ఎత్తు వెంబడి జాగ్రత్తగా కత్తిరించండి. ఇలా చేయగా మీకు శంకువు యొక్క వల, పటము - 2 లో చూపినట్లు ఏర్పడుతుంది.



ప్రయత్నించండి

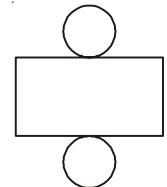
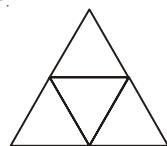
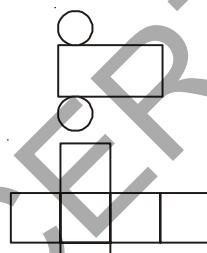
వివిధ ఆకృతులు (స్ఫూరము, ఘనము, దీర్ఘఘనము, శంకువు మొదలైనవి) గల వస్తువులు తీసుకొని వాటిని జాగ్రత్తగా కత్తిరించి వాటి వలలను తయారుచేయండి. ఇలా చేయడానికి మీ ఉపాధ్యాయులు లేదా స్నేహితుల సహాయం తీసుకోండి.

పై కృత్యం ద్వారా మీరు వివిధ ఆకృతులు గల వస్తువులకు వివిధ రకాలైన వలలు ఏర్పడతాయని తెలుసుకుంటారు. అంతేకాక ఒకే ఆకారానికి మనం కత్తిరించే విధానాన్ని బట్టి ఒకటి కంటే ఎక్కువ వలలు ఏర్పడతాయని తెలుసుకుంటారు.

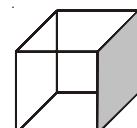
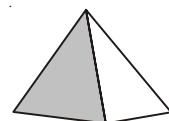
అభ్యాసము - 2

1. కింద కొన్ని వలలు యివ్వబడ్డాయి. వాటిని నకలు చేసుకొని దళసరి కాగితం పై అంటేంచండి. వాటిని జాగ్రత్తగా మడిచి జిగురుతో అంటేంచడం ద్వారా త్రిమితీయ ఆకారాలను తయారుచేయండి. ఏ వలకు ఏ త్రిమితీయ ఆకారం ఏర్పడిందో వాటిని జతపరచండి.

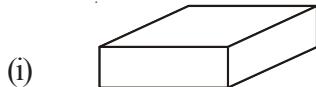
వల రూపము



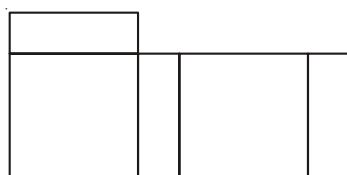
త్రిమితీయ ఆకారం



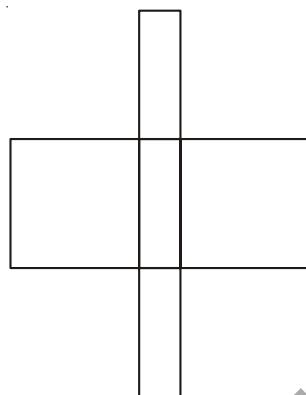
2. ఇక్కడ ప్రతి ఆకారానికి 3 వల రూపాలు ఈయబడినాయి. సరియైన వల రూపాన్ని దాని త్రిమితీయ ఆకారంతో జతపరచండి.



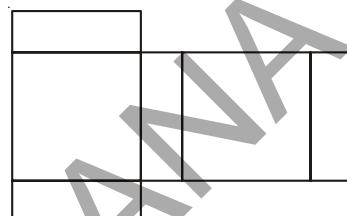
(i)



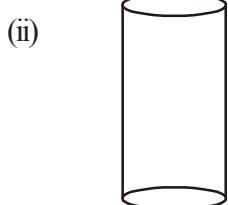
(a)



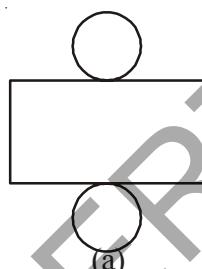
(b)



(c)



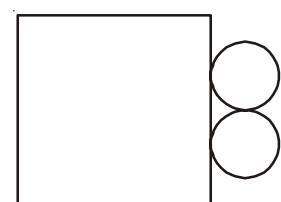
(ii)



(a)

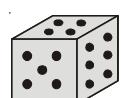


(b)

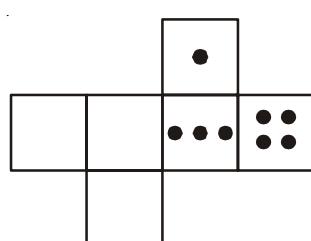
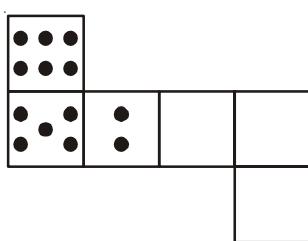


(c)

3. సమఫునాకార పాచిక అనేది ప్రతి తలం పై బిందువులను కలిగిన ఒక సమ ఘనము. ఒక సమఫునాకార పాచిక ఎదురెదురు తలాలపై బిందువుల మొత్తము ఏదు ఉంటుంది.



ఇక్కడ సమఫునాకార పాచికలను తయారుచేయడానికి రెండు వలలు ఈయబడ్డాయి. భూళీ గడులలో సరియైన సంఖ్యలో బిందువులను గుర్తించండి.



ఇలా ఆడండి.

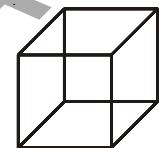
మీరు, మీ మిత్రుడు వీపు భాగాలు ఆనేటట్లు కూర్చోండి. మీలో ఒకరు ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని తయారుచేయడానికి కావలసిన వల రూపాన్ని చదపండి. రెండవవారు దానిని నకలు చేసి, గీసి ఇచ్చిన త్రిమితీయ ఆకారాన్ని తయారుచేయాలి.

14.2 ఘనాకారాలను సమతలం పై గీయడం

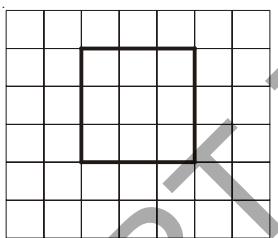
మనం పటాలను గీసే కాగితం ఒక సమతలం. ఒక ఘనాకారాన్ని దీనిపై గీసినపుడు విరూపము చెందినది. ఇది కేవలము దృశ్యభ్రాంతి మాత్రమే. ఇక్కడ మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని ఒక సమతలం పై గీయడానికి రెండు పద్ధతులను ఉపయోగిస్తాము.

14.2.1 ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు

ఇక్కడ ఒక సమ ఘనం పటం ఇవ్వబడింది. దీనిని ముందు నుండి చూస్తే ఎలా కన్నిస్తుందో ఈ పటం చూడగానే అర్థమవుతుంది. నిజానికి మనం ఘనము యొక్క అన్ని తలాలను పటంలో చూడలేము. ఒక ఘనంలో అన్ని అంచుల పొడవులు సమానంగా వున్నట్లు, యి పటంలో అన్ని అంచుల పొడవులూ సమానం కాదు, అయినా దీనిని చూడగానే మనము ఒక ఘనం అని గుర్తుపడతాము. ఇటువంటి పటాలనే ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు అంటారు.

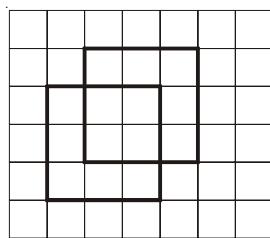


ఇటువంటి చిత్రాలను ఎలా గీయాలి? వీటిని గీసే పద్ధతిని నేర్చుకునేందుకు ప్రయత్నించాము. మొదట గళ్ళ కాగితాలపై వీటిని సాధన చేస్తే తరువాత తెల్లకాగితాలపై కూడా సులభంగా గీయవచ్చును. ఇప్పుడు మనం $3 \times 3 \times 3$ కొలతలు గల (అనగా ప్రతీ అంచు 3 యూనిట్లు) ఒక ఘనానికి ఏటవాలు రేఖా చిత్రం నిర్మించాము.



సోపానం 1

ముందుగా ఒక ఘనాన్ని గీయండి

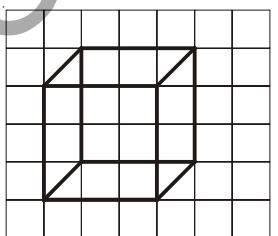


సోపానం 2

అదే కొలతలతో గీచిన ముఖానికి

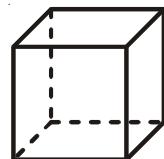
వెనుక ముఖం గీయండి.

ఇది కొంచెం ప్రక్కకు గీయండి.



సోపానం 3

సంబంధిత మూలాలను కలపండి



సోపానం 4

ఈ పటాన్ని తిరిగి గీయండి.

కనిపించని అంచులను చుక్కల రేఖలతో గీయండి.

ఇదే మనకు కావలసిన చిత్రము

ఏటవాలు చిత్రంలో యింది అంశాలను గమనించారా?

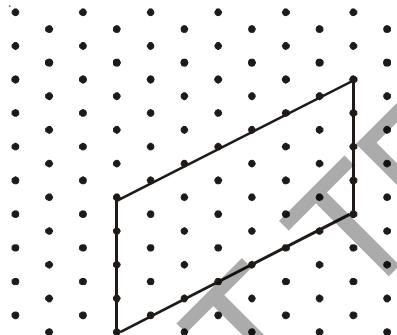
- (i) ముందు మరియు దానికి వెనుకగా వుండే తలాలు ఒకే పరిమాణాన్ని కలిగి వుంటాయి.
- (ii) ఒక ఘనంలో అంశులు ఏ విధంగా ఒకే కొలతను కలిగి వుంటాయో, అదే విధంగా యింది చిత్రంలో కూడా కొలతలు తీసుకొని గేయకపోయినా అంశులన్నీ సమానంగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తాయి.

ఇప్పుడు మీరు ఒక దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు చిత్రాన్ని గేయటానికి ప్రయత్నించండి. (ఇలా నిర్మించేటపుడు ఒక దీర్ఘఘనం ముఖాలన్నీ దీర్ఘఘతురప్రాలని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి)

ఘనాలను ఇచ్చిన కొలతలలో వుండేటట్లు కూడా మనం చిత్రాలను గేయవచ్చును. ఇలా గేయడానికి మనకు తల్య బిందుమాపని కావాలి. ఇప్పుడు మనం పొడవు 7 సెం.మీ, వెడల్పు 3 సెం.మీ, ఎత్తు 4 సెం.మీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘఘనాన్ని ఈ కాగితం పై గేయడానికి ప్రయత్నించుండాం.

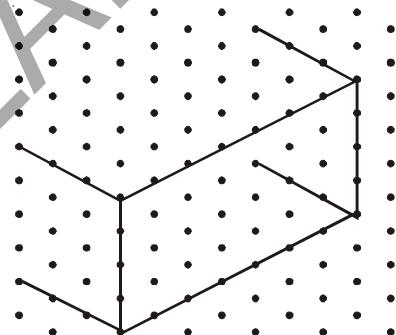
14.2.2 తుల్యరేఖా చిత్రాలు

ఇచ్చిన కొలతలతో ఘనాకారాలను గేయడానికి మనం తుల్య బిందు కాగితాలను వాడతాము. ఈ కాగితమంతా చిన్న చిన్న సమబాహు త్రిభుజ ఆకారాలు వుండేటట్లు బిందువులు లేదా గీతలు గేయబడి వుంటాయి. యిటువంటి కాగితం పైన మనం $7 \times 3 \times 4$ కొలతలు గల (అనగా పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు, వరుసగా 7 యూనిట్లు, 3 యూనిట్లు, 4 యూనిట్లు) దీర్ఘ ఘనాన్ని గేఢాము.



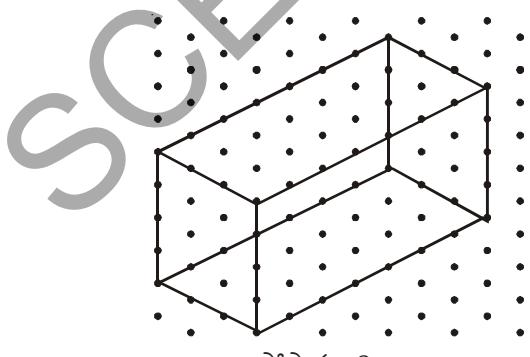
సోపానం 1

పటంలో చూపినట్లు ఎదురుగా ఉండే ముఖాన్ని సూచించే ఒక దీర్ఘఘతురప్రాన్ని గేయండి.



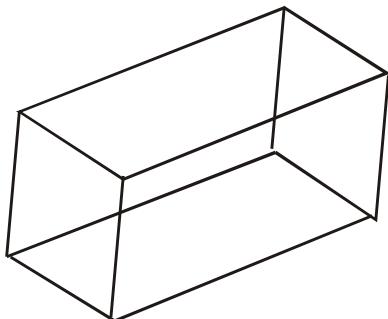
సోపానం 2

దీర్ఘఘతురప్రము 4 శీర్షముల నుండి 4 సమాంతర రేఖా ఖండములను 3 యూనిట్లు కొలతతో గేయండి.



సోపానం 3

సంబంధిత శీర్షాలను రేఖా ఖండములచే కలపండి.

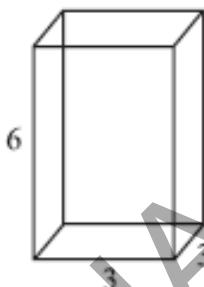


సోపానం 4

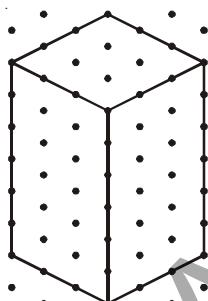
ఇదే మనకు కావలసిన దీర్ఘ ఘనము యొక్క తుల్యరేఖా చిత్రము

మీరు తుల్యరేఖా చిత్రాలలో యచ్చిన కొలతలతో ఖచ్చితంగా సమానంగా వుండే కొలతలు గల ఘనాకార పట్టాలను గమనించవచ్చును. కానీ ఏటవాలు చిత్రంలో యా విధంగా వుండదు.

ఉదాహరణ 1 : ఒక దీర్ఘఘనానికి ఏటవాలు చిత్రం యిక్కడ ఈయబడినది. దానికి ఒక తుల్యరేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.



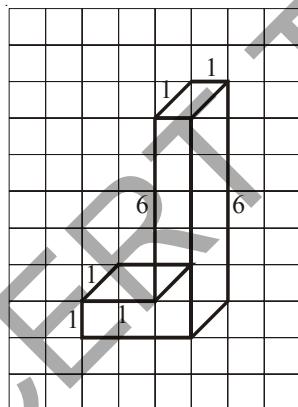
సాధన : ఇక్కడ పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా 3 యూనిట్లు, 3 యూనిట్లు మరియు 6 యూనిట్లు.



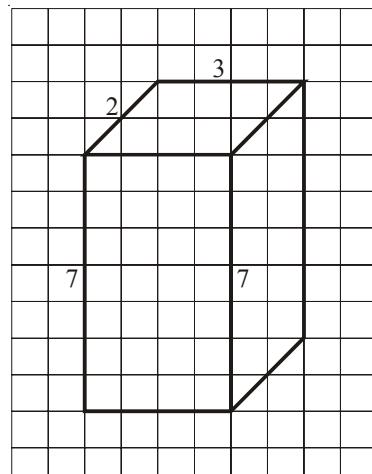
అభ్యాసము - 3

1. కింద యచ్చిన ఆకారాలకు తుల్య బిందు కాగితాన్ని పుప్పుచేయించి తుల్యరేఖా చిత్రాలను గీయండి.

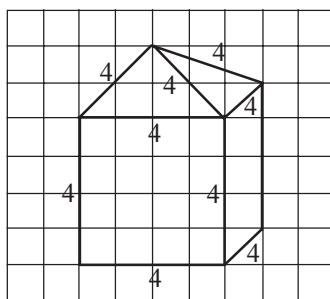
(i)



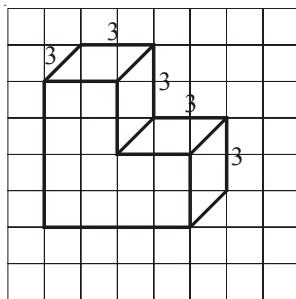
(ii)



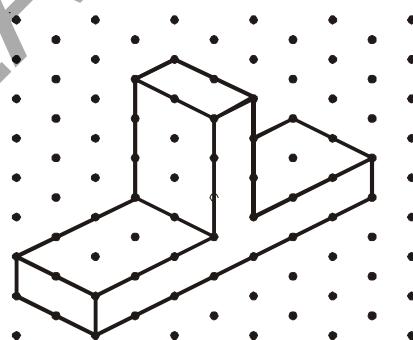
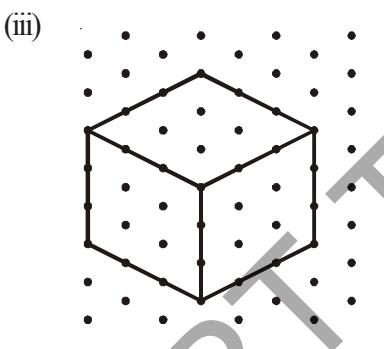
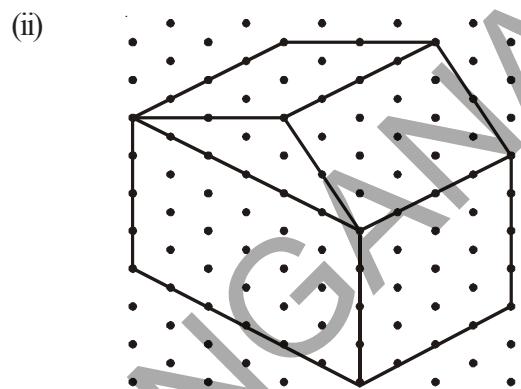
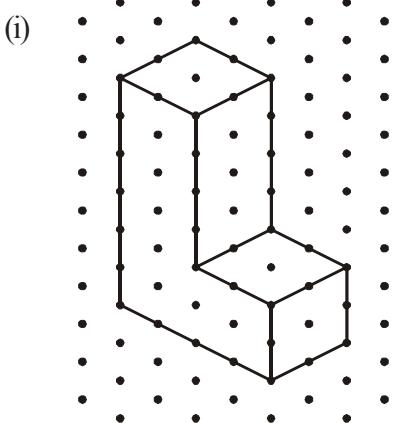
(iii)



(iv)



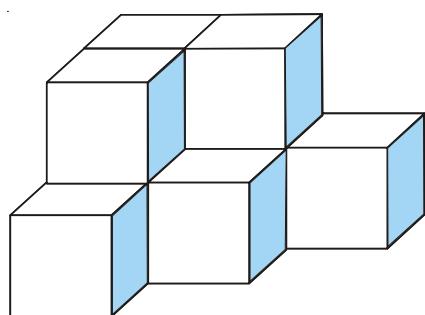
2. ఒక దీర్ఘఫునము కొలతలు 5 సెంమీ, 3 సెంమీ మరియు 2 సెంమీ దీనికి మూడు విభిన్న తుల్యరేఖా చిత్రాలను గీయండి.
3. 2 సెంమీ అంచుగా గల మూడు ఫునములు వరుసగా ఒకదాని ప్రక్కన ఒకటి వుంచబడ్డాయి. అప్పుడు ఏర్పడిన దీర్ఘఫునానికి ఏటవాలు రేఖా చిత్రము లేదా తుల్యరేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.
4. క్రింద డివ్యబడిన తుల్యరేఖాచిత్రాలకు ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలను గీయండి.



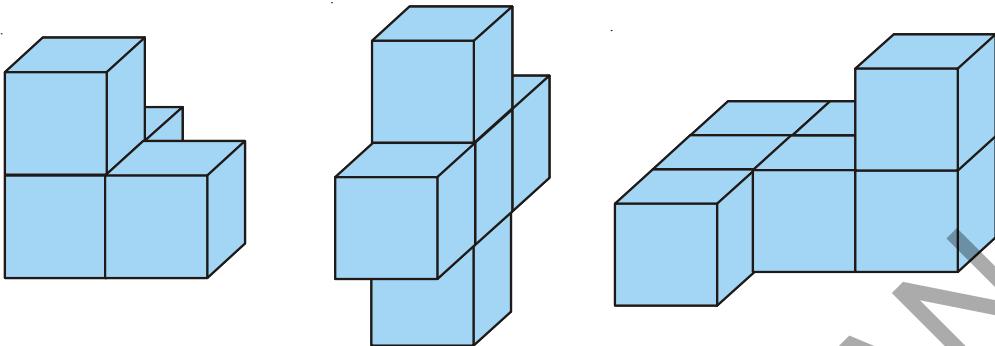
5. క్రింద డివ్యిన ఆకారాలకు ఏటవాలు రేఖా చిత్రము మరియు తుల్యరేఖా చిత్రాలను గీయండి.
- (a) 5 సెంమీ, 3 సెంమీ, 2 సెంమీ కొలతలు గల ఒక దీర్ఘఫునము. (ఇలా మీకు ఒకటే చిత్రం ఏర్పడుతుందా? అల్సోచించండి)
- (b) అంచు 4 సెంమీ కొలత గల ఫునం.

14.3 ఫునవస్తువులకు ఊహా చిత్రాలను ఏర్పరచుకోవడం

కొన్ని సందర్భాలలో, ఆకారాల కూర్చులను గమనిస్తే, కొన్ని ఆకారాలు దాగి వుండి మనకు కనబడకపోవచ్చు.



అటువంటి ఆకారాలను నిశితంగా పరిశీలించి వాటిని అర్థం చేసుకోవడానికి యక్కడ కొన్ని కృత్యాలు యివ్వబడ్డాయి. కొన్ని ఘనాలను తీసుకొని క్రింద పటాలలో చూపినట్లు అమర్చండి.

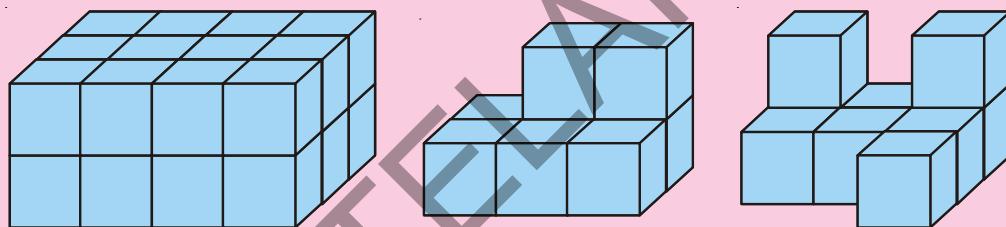


యిప్పుడు మీ మిత్రులను ఆ ఆకారాలను ముందు వైపు నుండి మాత్రమే చూసి, మీరు ఎన్ని ఘనాలతో దానిని నిర్మించాలో ఊహించి చెప్పమనండి.



ప్రయత్నించండి

క్రింద ఏర్పరచిన అమరికలలో ఎన్ని ఘనాలు వున్నాయో అంచనా వేసి చెప్పండి.



ఇటువంటి ఊహి చిత్రాలు ఏర్పరచుకోవడం మనకు చాలా ఉపయోగకరం.

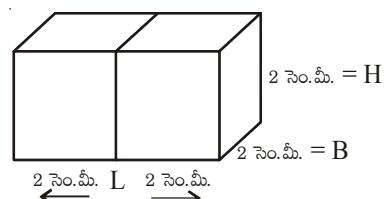
ఉడాహరణకు మీరు కొన్ని ఘనాలను ప్రకృత్రక్కనే వుంచి ఒక దీర్ఘఘనాన్ని తయారు చేసారనుకుందాం. ఆ దీర్ఘ ఘనానికి పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు ఎంత వుంటాయో మీరు అంచనా వేయగలుగుతారు.

ఉడాహరణ 2 : 2 సెం.మీ \times 2 సెం.మీ \times 2 సెం.మీ కొలతలు గల రెండు ఘనాలు ప్రకృత్రక్కనే వుంచగా ఏర్పడిన దీర్ఘ ఘనము కొలతలు ఎంత వుంటాయి?

సాధన : రెండు ఘనాలు ప్రకృత్రపక్కను వుంచినపుడు కేవలం పొడవు మాత్రమే పెరగడాన్ని మీరు గమనిస్తారు.

$$\text{పొడవు } 2 + 2 = 4 \text{ సెం.మీ}$$

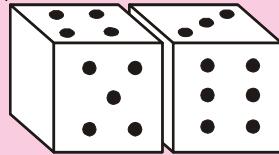
$$\text{వెడల్పు } = 2 \text{ సెం.మీ \quad మరియు \quad ఎత్తు } = 2 \text{ సెం.మీ}$$





ప్రయత్నించండి

1. పటులో చూపినట్లు రెండు సమఫునాకార పాచికలు ప్రకృత్పక్కన అమర్ఖబద్దాయి. ఈయబడిన ముఖాలకు వ్యతిరేక ముఖాల మీద వున్న అంకెల మొత్తమెంతో మీరు చెప్పాగలరా?



(ఈక సమఫునాకార పాచికలో వ్యతిరేక ముఖాలపై నున్న అంకెల మొత్తము 7 అని గుర్తుకు తెచ్చుకోండి)

2. 2 సెం.మీ. అంచుగల మూడు సమ ఫునాకార పాచికలను ఒక దాని ప్రక్కన ఒకటి అమర్ఖగా ఒక దీర్ఘ ఫునము ఏర్పడినది. దీనికి ఒక ఏటవాలు చిత్రాన్ని గేయడానికి ప్రయత్నించండి మరియు దాని పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులను కనుగొనండి.

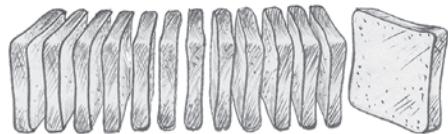
14.3.1 ఒక ఫునకు యొక్క వివిధ భాగాలను చూచుట

యిప్పుడు మనం ఒక త్రిమితీయ ఆకారాన్ని ఎన్ని రకాలుగా చూడవచ్చునో నేర్చుకుందాము.

14.3.1e) యిచ్చిన వస్తువును అడ్డంగా పలుచని ముక్కలుగా కోసి చూడడం ఒక పద్ధతి

పలుచని ముక్కలుగా కత్తిరించే ఆట

ఈక రొట్టె ఇవ్వబడినది. అది దీర్ఘ ఘనాకారంలో వుంది. దీని అభిముఖ ముఖాలు చతురప్రాలు. దీనిని చాకుతో పలుచని ముక్కలుగా కోయండి.



అడ్డంగా కోసినప్పుడు పటంలో చూపినట్లు మనకు అనేక ముక్కలు ఏర్పడతాయి. ప్రతీ ముక్కకు ఆధారంలంబక చతురస్రమే యి తలాలనే మనం మొత్తం రొట్టి యొక్క “అడ్డుకోత” అంటాము. యి సందర్భంలో రొట్టి యొక్క అడ్డుకోత యించుమించగా ఒక చతురస్రము.

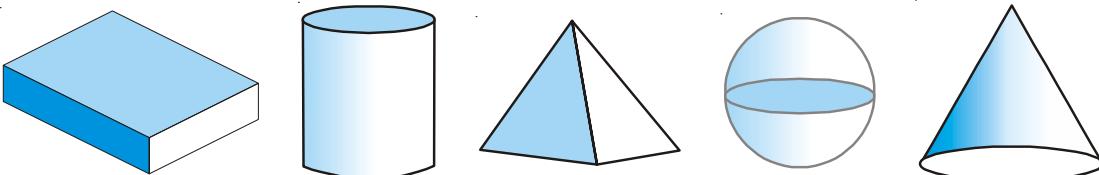
మీరు చేసే ఈ కోత నిలవు వుంటే ఏర్పడే నిలవకోత వేరుగా ఏర్పడే ప్రమాదముంది. దాని గురించి ఆలోచించండి. ఇలా ఏర్పడిన నిలవు కోత అంచు ఒక పక్కం అనే విషయాన్ని మీరు గమనించారా?

వంటింటి ఆట

మీరు వంటింట్లో వంట వండేటపుడు కొన్ని కూరగాయలను తరిగినపుడు ఏర్పడే అడ్డుకోతలను గమనించారా? వివిధ కూరగాయల ముక్కలను పరిశీలించి ఏర్పడే అడ్డుకోతలను, వాటి ఆకారాలను పరిశీలించండి.

ಇವಿ ಚೆಯಂಡಿ.

1. కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు బంక మట్టితో (లేదా పాస్టిసైన్స్‌తో) నమూనాలు తయారుచేయండి. వాటిని నిలువుగా మరియు అడ్డంగా కత్తిరించండి. ఇలా ఏర్పడిన కోతలకు చిత్తు పటాలను గీసి, తెలిసిన వాటికి పేర్లు ప్రాయండి.



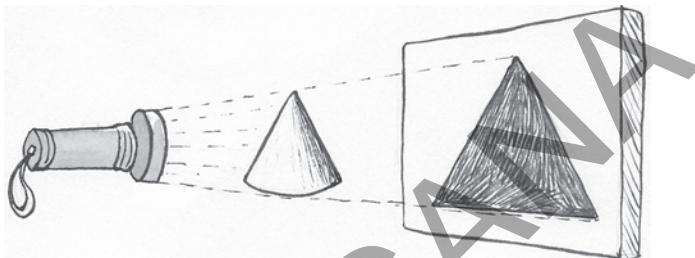
2. కింద ఇచ్చిన ఘనాలకు నిలవుకోత మరియు అడ్డుకోత చేయగా ఏమి ఏర్పడతాయి?
- (a) ఒక ఇటుక (b) ఒక గుండ్రని ఆపిల్ (c) ఒక సమఘనాకారపు పాచిక (d) ఒక స్ఫూపాకార గొట్టము
 - (e) శంఖు ఆకృతిలో నున్న బస్క్రిమ్ గొట్టము.

14.3.1 (బి) నీడలతో ఆడటం మరొక పద్ధతి

నీడలతో ఆట

త్రిమితీయ ఆకారాలకు చెందిన వస్తువులను ద్విమితీయ ఆకారాలగా చూడటానికి వాటి నీడలు చాలా ఉపయోగపడతాయి. మీరు ఎప్పుడైనా నీడతో ఆట చూసారా?

కాంతి పుంజ మార్గంలో ఘనాకారాలను రకరకాలుగా కదువుతూ నీడలు కదులుతున్నట్లు భ్రాంతి కలిగించే ఒక రకమైన వినోద సాధనము ఈ నీడ చిత్రాలతో ఆట. దీనిలో గణిత భావనల పరోక్ష వినియోగం ఉంటుంది.



పటము 1

ఈ కృత్యము చేయడానికి మీకు ఒక కాంతి జనకము మరియు కొన్ని ఘనాకార వస్తువులు కావాలి. మీకు ఓవర్ హెడ్ ప్రొజెక్టర్ పుంటే, ఘన వస్తువులను దీపము క్రింద పుంచి యి పరిశోధనలు చేయము.

టార్చిలైటు కాంతికి ఎదురుగా ఒక శంకువును పుంచిన, తెరపై ఏ రకమైన నీడ ఏర్పడుతుంది? (పటము 1)

ఘనాకార వస్తువు త్రిమితీయమైనది, మరి నీడ సంగతి ఏమిటి?

శంకువుకు బదులుగా, ఒక సమఘనాన్ని పుంచితే ఏ విధమైన నీడ ఏర్పడుతుంది?

కాంతి జనక స్థానాన్ని ఘనాకార వస్తువు స్థానాన్ని మార్చుతూ ప్రయోగాలు చేయండి. ఏర్పడిన నీడలలోని వస్తువుల ఆకారాలు, పరిమాణాలపై ఈ స్థాన మార్పుల ప్రభావాన్ని అధ్యయనం చేయండి.

మీరు ఇప్పటికే ఈ వినోదాత్మక ప్రయోగాన్ని ప్రయత్నించి వుంటారు.

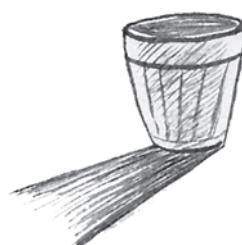
పటంలో చూపినట్లు, ఒక గ్లాసు మధ్యాహ్నం ఎండ సూర్యకిరణాల మార్గంలో పెట్టండి : నీడ ఎలా ఏర్పడుతుంది?

మధ్యాహ్నము, సాయంత్రము ఏర్పడే నీడలు ఒకేలా వుంటాయా?

(a) మధ్యాహ్నము?



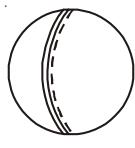
(b) సాయంత్రము?



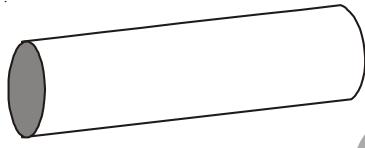
సూర్యుడు వన్న స్థానము, మనము చూసే కాలాలను దృష్టిలో వుంచుకొని నీడలను అధ్యయనం చేయండి.



- కింద యిచ్చిన ఘనాకార వస్తువుల పై ఒక విద్యుత్ బల్బు వెలుగుతూ వుంది. అప్పుడు ఏర్పడిన నీడల ఆకారాల పేర్లను తెలపండి. ఆ నీడ చిత్రాల చిత్రు పట్టాలను గీయడానికి ప్రయత్నించండి. (మొదట వీటిని ప్రయోగం చేయడానికి ప్రయత్నించి తరువాత క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ప్రాయండి).



ఒక బంధి

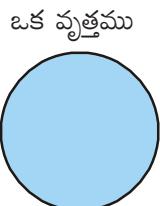


ఒక స్కూపాకార గొట్టం



ఒక పుస్తకం

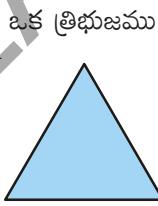
- కింద కొన్ని త్రిమితీయ వస్తువులను ఓపర్ హెడ్ ప్రోజెక్టర్ దీపం క్రింద పెట్టగా ఏర్పడిన నీడలు యివ్వబడ్డాయి. ప్రతీ నీడ ఏర్పడటానికి కారణమయ్యే త్రిమితీయ వస్తువులను గుర్తుపట్టండి (వీటికి అనేక సమాధానాలు వుండవచ్చును)



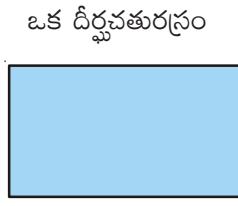
(i)



(ii)



(iii)



(iv)



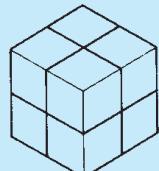
మనం నేర్చుకున్నది

త్రిమితీయ వస్తువులకు ద్విమితీయ తలాలపై అనగా కాగితం పై వాటి వల రూపాలను గీయడం ద్వారా ఊహా చిత్రాలను ఏర్పరచుకోవచ్చును.

ఏటవాలు రేఖా చిత్రాలు మరియు తుల్యరేఖా చిత్రాలను పయోగించి త్రిమితీయ ఆకారాలకు ఒక సమతలం పై ఊహా చిత్రాలను ఏర్పరచవచ్చును.

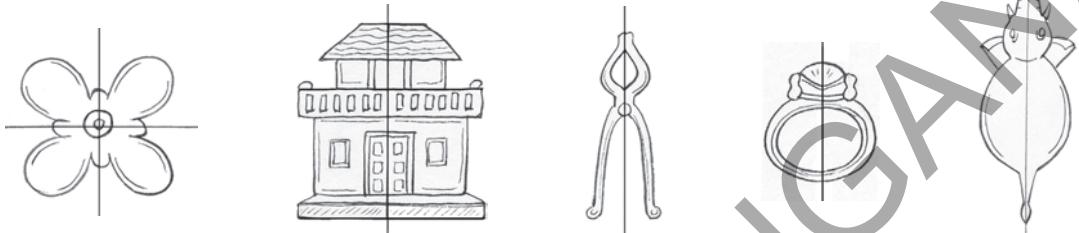
ఘనంతో తమాషా!

ఏడు యూనిట్ల సమఘనాలకు ఒక యూనిట్ సమఘనాన్ని జోడిస్తే అన్ని కలిసి రెండు యూనిట్ అంచుల గల పెద్ద ఘనం ఏర్పడుతుంది. మూడు యూనిట్ల అంచులు గల పెద్ద ఘనాన్ని తయారు చేయడానికి ఎన్ని యూనిట్ల సమఘనాలు అవసరమవుతాయి?



15.0 పరిచయం

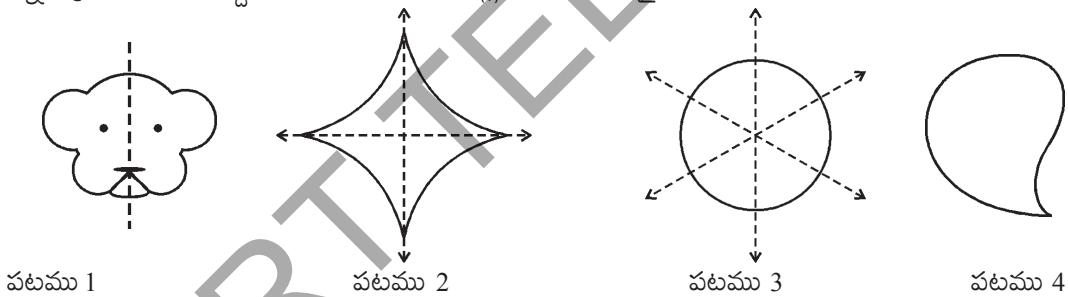
మీ పరిసరాలను గమనించండి. ఎన్నో వస్తువులలో సౌష్టవతను గమనించ గలరు. అటువంటి కొన్ని వస్తువులు ఈ క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. పరిశీలించండి.



పై చిత్రాలలో ప్రతి దానిని ఒక రేఖతో రెండు సర్వసమాన భాగాలుగా ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవించు భాగాలుగా విభజించ గలము. కావున ఇవన్నియు సౌష్టవ చిత్రాలు.

15.1 సౌష్టవ రేఖల లేక సౌష్టవాక్షరము

మరికొన్ని చిత్రాలను పరిశీలించాము. కింది పటాలను ఉల్లిపార కాగితం పై గీయండి.



పటము-1 ని చుక్కల రేఖల వెంబడి మడిచి చూడండి. ఏమి గమనించారు?

పటంలోని రెండు విభాగములు ఒకదానితో ఒకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయి. 2,3,4 పటములలో కూడా ఇది సత్యమా? ఇంకనూ పటము-2 ను రెండు రేఖల వెంబడి మడువచ్చని, పటము 3 ను అనేక రేఖల వెంబడి మడువ వచ్చని గమనించగలరు. కానీ పటము-4 ను రెండు విభాగములు ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవించు విధంగా మడువ లేపని చూడండి.

పటములు 1,2,3 లు చుక్కల రేఖల వెంబడి మడువగా రెండు విభాగములు ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవిస్తున్నాయి. కావున అవి సౌష్టవ రేఖను కలిగి యున్నవి.

ఒక పటమును రెండు సర్వసమాన విభాగములుగా విభజించునట్లు పటము మధ్య గా గీయదగు రేఖను ఆ పటము యొక్క ‘సౌష్టవ రేఖ’ లేక ‘సౌష్టవాక్షరము’ అంటాము. సౌష్టవాక్షరమును చుక్కల రేఖచే సూచిస్తాము.

కొన్ని పటములకు సౌష్టవాక్షరము లేకపోవచ్చు. అట్లే కొన్ని పటములు ఒకటి లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సౌష్టవాక్షరములను కలిగియుండ వచ్చును.



ప్రయత్నించండి

1. సౌష్టవత కలిగిన కొన్ని సహజ వస్తువులను పేర్కొనండి.
2. సౌష్టవత కలిగిన ఐదు మానవ నిర్మిత వస్తువులను పేర్కొనండి.

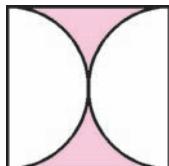


అభ్యాసం - 1

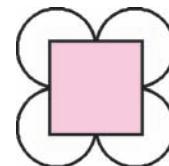
1. కింది పటములలో సాధ్యమగు వానికి సౌష్టవాక్షరములను గీయండి.



(i)



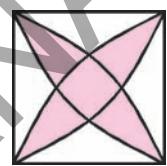
(ii)



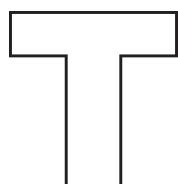
(iii)



(iv)



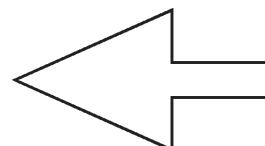
(v)



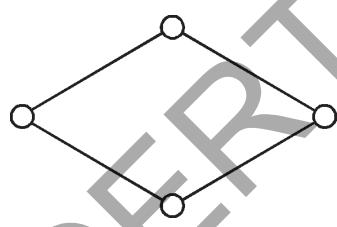
(vi)



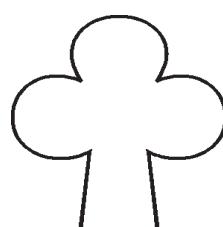
(vii)



(viii)



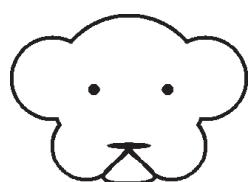
(ix)



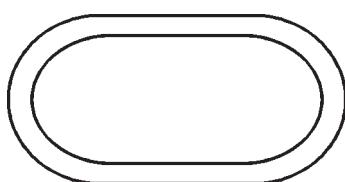
(x)



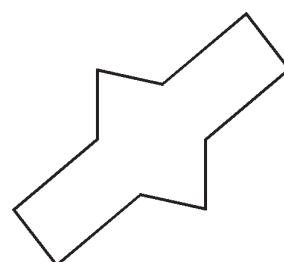
(xi)



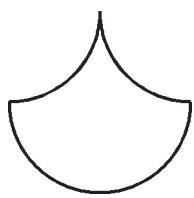
(xii)



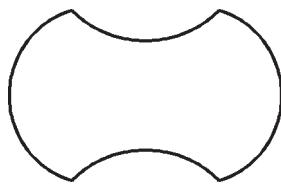
(xiii)



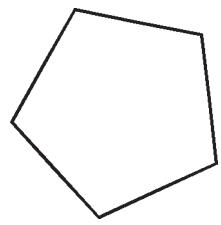
(xiv)



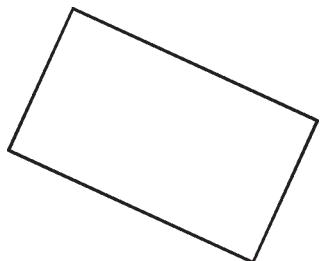
(xv)



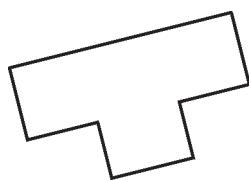
(xvi)



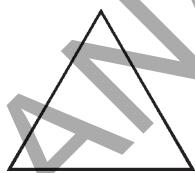
(xvii)



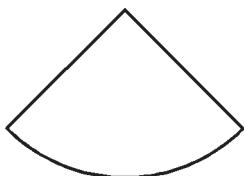
(xviii)



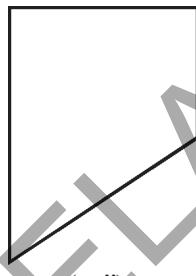
(xix)



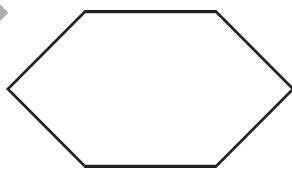
(xx)



(xxi)



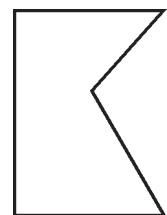
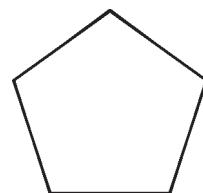
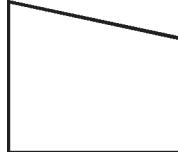
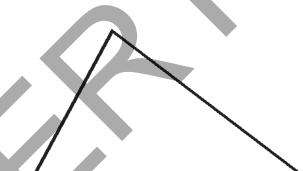
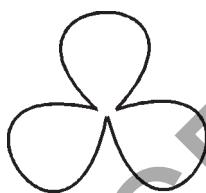
(xxii)



(xxiii)

15.1.1 క్రమ బహుభుజాల సౌష్టవాక్షరములు

కింది సంవృత పటములను పరిశీలించండి.



అన్ని వైపులా రేఖా ఫండములచే పూరింపబడిన సంవృత పటమును ‘బహుభుజి’ అంటాము.

పై పటములలో ఏవి బహుభుజాలు?

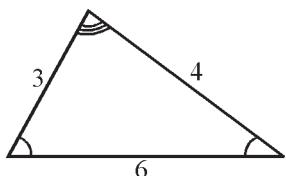


ప్రయత్నించండి

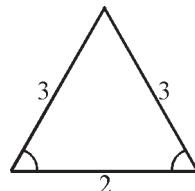
మూడు కన్నా తక్కువ రేఖా ఫండములతో బహుభుజిని ఏర్పరచగలమా?

ఒక బహుభుజి యొక్క కనీస భుజాల సంఖ్య ఎంత?

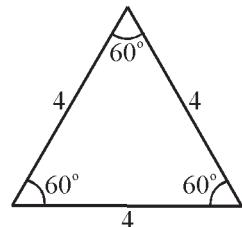
కింద ఇవ్వబడిన వివిధ త్రిభుజములను పరిశీలించండి.



పటం 1



పటం 2

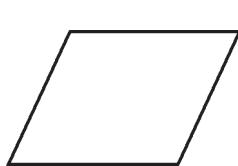


పటం3

పటము 3 నందు త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములు సమానము. మరియు మూడు కోణములు సమానములు కనుక దీనిని క్రమ బహుభుజి అంటాము.

అన్ని భుజములు, కోణములు సమానంగా గల బహుభుజిని ‘క్రమ బహుభుజి’ అంటాము.

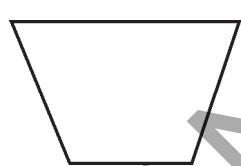
క్రింది పటములలో ఏవి క్రమ బహుభుజాలు



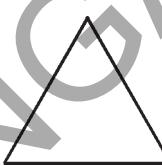
సమాంతర చతుర్భుజం



చతుర్పం



సమలంబ చతుర్భుజం

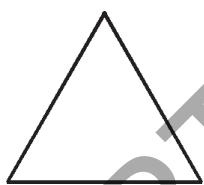


సమబాహు
త్రిభుజం

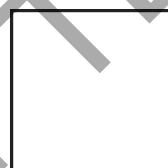


దీర్ఘ చతుర్సం

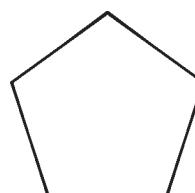
కింది క్రమ బహుభుజాలకు వీలయినన్ని సౌష్టవాక్షరములను గీయండి.



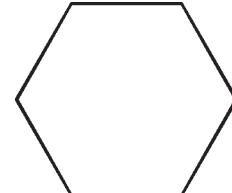
సమబాహు త్రిభుజం



చతుర్పం



క్రమ పంచభుజి



క్రమషహ్వజి

పరిశీలనాంశములను కింది పట్టికలో పొందుపరచండి.

క్రమ బహుభుజి	భుజముల సంఖ్య	సౌష్టవాక్షరముల సంఖ్య
త్రిభుజం	3	3
చతుర్పం		
పంచభుజి		
షాహ్వజి		

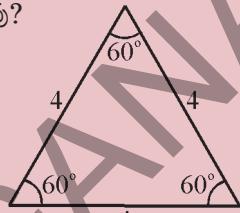
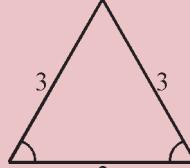
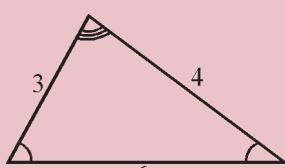
పై కృత్యమును ఒట్టి ఒక క్రమబహుభుజి యొక్క సౌష్టవాక్షముల సంఖ్య దాని భజముల సంఖ్యకు సమానమని తెలియుచున్నది కదా!

పై పటములను ఉల్లిపార కాగితం పై గీచి, కత్తిరించి, మడతలు పెట్టడము ద్వారా కూడా పై విషయమును బుజువు చేసుకొనవచ్చును. ప్రయత్నించండి.

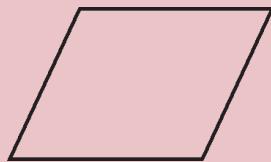


ప్రయత్నించండి

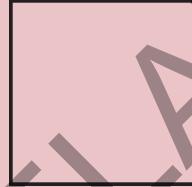
1. వివిధ రకముల త్రిభజములు కింద ఇవ్వబడ్డాయి. అన్ని త్రిభజముల యొక్క సౌష్టవాక్షముల సంఖ్యలు సమానమా? ఏ త్రిభజమునకు ఎక్కువ సౌష్టవాక్షములు కలవు?



2. వివిధ రకముల చతుర్భుజములు కింద ఇవ్వబడ్డాయి. అన్ని చతుర్భుజముల యొక్క సౌష్టవాక్షముల సంఖ్యలు సమానమా? ఏ చతుర్భుజమునకు ఎక్కువ సౌష్టవాక్షములు కలవు?



సమబహు చతుర్భుజం



చతురస్రం



దీర్ఘ చతురస్రం

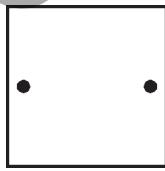
సూచన: పై పటములను ఉల్లిపార కాగితం పై గీచి, కత్తిరించి, మడత పెట్టడం ద్వారా సౌష్టవాక్షముల సంఖ్యను కనుగొనండి.

3. పై రెండు సంచర్భముల నుండి క్రమబహుజులు గరిష్ట సంఖ్యలో సౌష్టవాక్షములు కలిగి ఉంటాయని చెప్పగలమా?

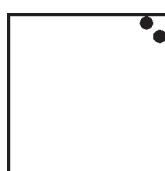
అభ్యాసం - 2



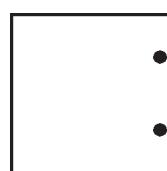
1. కింద ఇవ్వబడిన పటములలో బిందువులు కూడా గుర్తించబడ్డాయి. బిందువులు కూడా సరిసమానంగా పంచబడే విధంగా సౌష్టవాక్షములను గీయండి.



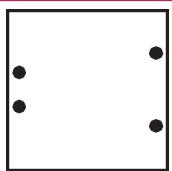
(i)



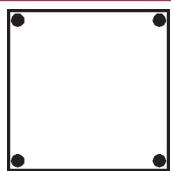
(ii)



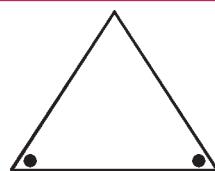
(iii)



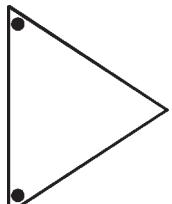
(iv)



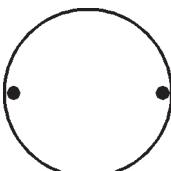
(v)



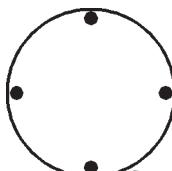
(vi)



(vii)

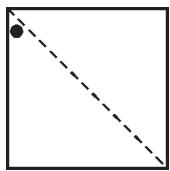


(viii)

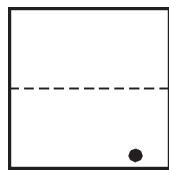


(ix)

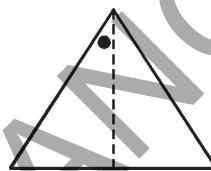
2. కింది పటములకు సౌష్టవాక్షరములు ఇవ్వబడ్డాయి, కానీ ఒక విభాగంలో మాత్రమే బిందువులు ఇవ్వబడ్డాయి. రెండవ విభాగంలోనే బిందువులను గుర్తించండి.



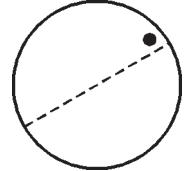
(i)



(ii)

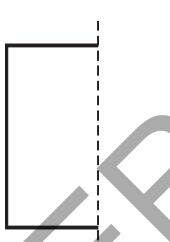


(iii)

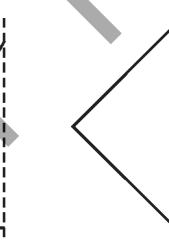


(iv)

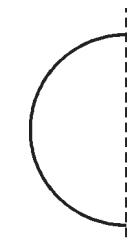
3. కింద ఇవ్వబడిన అనంపూర్ణ పటములలో చుక్కల రేఖలు సౌష్టవాక్షరములను సూచిస్తున్నాయి. చుక్కల రేఖల వెంబడి అడ్డమును ఉంచడం ద్వారా ప్రతిబింబములతో పూర్తి పటములను గమనించండి. అన్ని పటములను పూర్తి పటములగా పూరించండి.



(i)



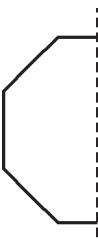
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

4. క్రింది ప్రవచనములు సత్యములో, కాదో గుర్తించండి.

- (i) ప్రతి సంవృత పటము సౌష్టవాక్షరమును కలిగి ఉంటుంది. ()
- (ii) కనీసం ఒక సౌష్టవాక్షరము గల పటమును సౌష్టవ పటం అంటారు. ()
- (iii) 10 భుజములు గల క్రమ బహుభుజి యొక్క సౌష్టవాక్షరముల సంఖ్య 12 ()
5. ఒక చతురస్రమును నిర్మించి దాని యొక్క అన్ని సౌష్టవాక్షరములను గీయండి. ప్రతి రెండు అసన్న సౌష్టవాక్షరముల మధ్య కోణం కొలవండి. ఏమి గమనించారు? అన్ని క్రమ బహుభుజాలకు ఈ నియమం వర్తిస్తుందా?

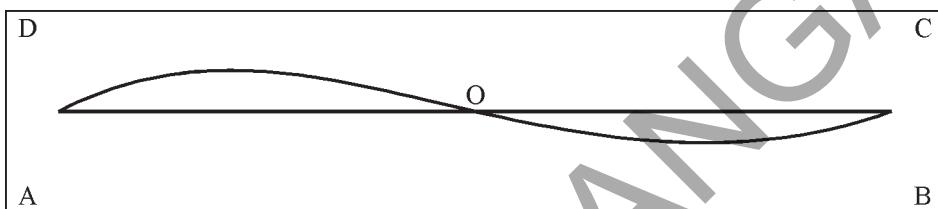
15.2 భ్రమణ సౌష్టవము

కృత్యము 1 : కింది పటమును ఒక ఉల్లిపార కాగితము పై నకలు గీయండి.

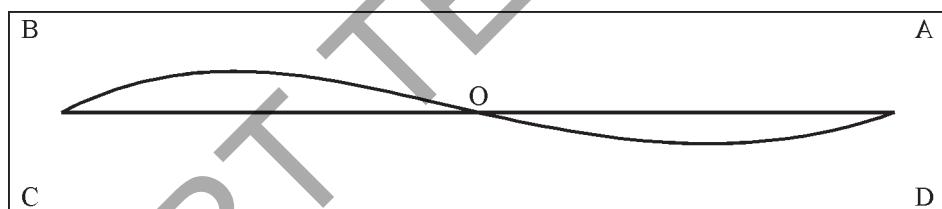


మడత పెట్టుట ద్వారా రెండు విభాగములు ఏకీభవించునట్లుగా ప్రయత్నించండి వీలగుచున్నదా? ఈ పటము సౌష్టవ పటమా? కాదు కదా!

ఒక పటమును వివిధ దిశలలో త్రిప్పినపుడు ఏర్పడు ఆకారములను పోల్చుదాము పటము-1 లో వలె పటము మధ్యభేందువు ‘O’ ను గుర్తించండి.



‘O’ కేంద్రముగా పటమును 180° భ్రమణం చేసి చూడండి.



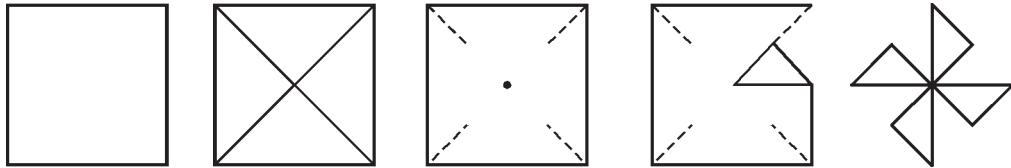
పటము 2

పటము 2 లో ఏమి గమనించారు? పటము 1 మరియు పటము 2 ల మధ్య భేదమేమయినా కలదా? పటము యొక్క స్థానములో ఎటువంటి మార్పు కనుపించదు. కనుక ఈ పటమునకు ‘భ్రమణ సౌష్టవము’ కలదు అంటాము.

కృత్యము 2 : గాలిమరను తయారుచేధాం

- చతురస్రాకారపు కాగితమును తీసుకొనండి
- రెండు కర్రముల వెంబడి మడవండి.
- కాగితం యొక్క ప్రతి శీర్షము నుండి, కర్రము వెంబడి నాల్గవ వంతు దూరము వరకు కత్తిరించండి?
- కత్తిరించిన మూలలో ఒకటి మార్పి మరొక దానిని పటంలో చూపినట్లు మధ్యకు మడవండి.
- అన్ని మడిచిన చివరలను, అవసరమైతే అతికించండి కాగితం మధ్యభేందువు గుండా, ఒక పిన్న సహాయంతో ఒక కర్రపుల్ల చివర గ్రుచ్చండి.

- ఇప్పుడు దీనిని వివే గాలికి అభిముఖంగా ఉంచి చూడండి. అది ఎంత వేగంగా తిరుగుతుందో గమనించండి.



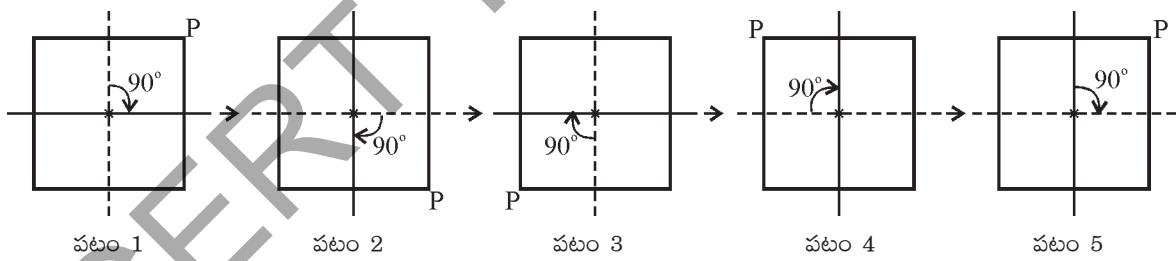
ఇప్పుడు ఈ గాలిమరను బల్లపై ఉంచి, 90° భ్రమణం చేయించండి. గాలిమర ఆకారంలో ఎటువంటి మార్పు అయినా కన్నించిందా? గమనిస్తే ప్రతి 90° భ్రమణానికి గాలిమర ఆకారం పూర్తిగా మొదటి ఆకారంతో పోలి ఉంటుంది. కనుక ఈ గాలిమర భ్రమణ సౌష్టవమును కలిగి ఉంది.

ఒక పటములోని మధ్యచిందువు గుండా పటాన్ని కొంత కోణము భ్రమణం చేయగా ఏర్పడు పటం మొదటి పటానికి సర్వసమానమయితే, ఆ పటం భ్రమణ సౌష్టవత కలిగియున్నది అంటాము.

15.2.1 భ్రమణ సౌష్టవ కోణము

చతురస్రమునకు రేఫీయ సౌష్టవత గలదని, దానికి 4 సౌష్టవాక్షములు గలవని మనకు తెలుసుకదా. ఇప్పుడు చతురస్రమునకు భ్రమణ సౌష్టవము కలదో లేదో పరిశేలిద్దాము. పటము-1 లో వలె చతురస్రము యొక్క ఒక శీర్ఘమును P అని గుర్తించి, చతురస్రం యొక్క రెండు సౌష్టవాక్షములను గుర్తించండి.

పటము-1 చతురస్రము యొక్క తొలిస్థితిని తెలియజేస్తున్నదని అనుకొనుము. చతురస్రమును దాని కేంద్రము గుండా $1/4$ వ వంతు భ్రమణం అనగా 90° భ్రమణం చేయండి. ఇప్పుడు, పటం 2 లోని స్థితి ఏర్పడుతుంది. బిందువు P యొక్క స్థితిని గమనించండి. రెండవసారి 90° భ్రమణం చేయగా పటం 3 లోని స్థితి ఏర్పడుతుంది. అట్టే మరి రెండుసార్లు 90° భ్రమణములు చేయగా పటం 5 లోని స్థితి ఏర్పడుతుంది. ఇది పూర్తిగా తొలిస్థితియే.



పరిశేలించినట్లయితే ప్రతి 90° భ్రమణం తరువాత చతురస్రము యొక్క స్థితి పటం 1 లోని తొలిస్థితి వలె కనిపిస్తున్నది.

అనగా చతురస్రము భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగియున్నది.

పై కృత్యము నందు చతురస్రమును 90° , 180° , 270° , 360° భ్రమణములు చేయగా ఏర్పడిన స్థితులు పటము 2, పటము 3, పటము 4 మరియు పటములలో వలె ప్రతి ఒక్కటి పటము 1 లోని తొలిస్థితిని పోలి యున్నది. వీనిలోని కనిష్ట కోణము 90° లను చతురస్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము అంటారు.

వీధైనా ఒక పటమును ఏ కనీస కోణంతో భ్రమణము చేసినపుడు అది పూర్తిగా తొలిస్థితిని పోలి ఉంటుందో ఆ కోణమును ఆ పటము యొక్క ‘భ్రమణ సౌష్టవ కోణము’ అంటారు.

జది చేయండి.

1. వతురప్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణమెంత?
2. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణమెంత?
3. వృత్తము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణమెంత?



15.2.2 భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము

పై కృత్యము ద్వారా వతురప్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 90° అని తెలుసుకొన్నాము. అట్లే వతురప్రమును దాని భ్రమణ సౌష్టవ కోణంలో నాలుగు సార్లు భ్రమణం చేసినప్పుడు అది యథాస్థితికి వచ్చినదని కూడా తెలియుచున్నది. కనుక వతురప్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము 4 అంటాము.

ఒక సమభావు త్రిభుజము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 120° అనగా సమభావు త్రిభుజమును ఒక్కాక్కాసారికి 120° చొప్పున 3 సార్లు భ్రమణం చేయగా అది దాని తొలిస్థితికి వస్తుంది అని తెలియుచున్నది. కనుక సమభావు త్రిభుజం యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము 3.

పై ఉండావారణల నుంచి, ‘ఒక పటమును, దాని భ్రమణ సౌష్టవ కోణము గుండా ఎన్నిసార్లు భ్రమణం చేస్తే అది తన తొలిస్థితికి వస్తుందో’ ఆ సంబుధును పటం యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం’ అంటారు అని నిర్వచింప వచ్చును.

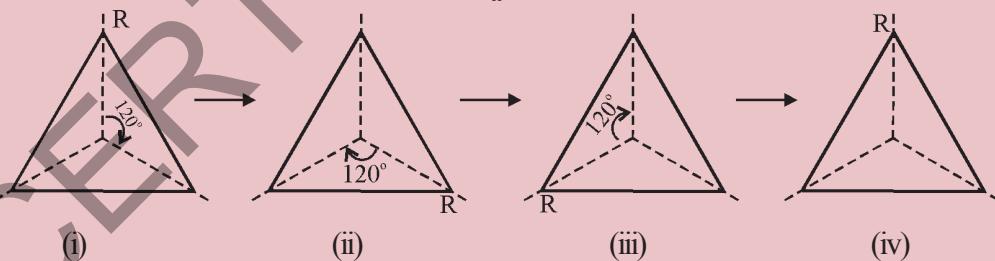
పై ఉండావారణల నుండి సంగ్రహ పరచగా

- వతురప్ర కర్ణాల ఖండన బిందువు భ్రమణ కేంద్రము
- వతురప్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 90°
- వతురప్రము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము 4.



ప్రయత్నించండి

1. (i) సమభావు త్రిభుజం యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము కనుగొనండి.



(ii) ప్రతిపటములో సౌష్టవాక్షరములు ఎన్ని?

(iii) ప్రతి రెండు ఆసన్లు (ప్రక్క ప్రక్క) సౌష్టవాక్షరముల మధ్య కోణ మెంత?

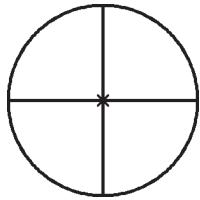
2. మీ పరిసరములను పరిశీలించి భ్రమణ సౌష్టవము గల ఏవైనా ఐదు వస్తువులను పేర్కానండి.

గమనిక : ప్రతి పటము 360° భ్రమణ చేసినప్పుడు అది దాని తొలి స్థితిలతో సర్పసమానత్వమును కలిగి ఉంటుంది. కావున అది పరిమాణము 1 గా గల భ్రమణ సౌష్టవము కలిగి ఉంటుంది అని చెప్పాడు. ఏమైనా పటము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం 1 కన్నా ఎక్కువ ఉన్నప్పుడు (భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 360° కన్నా తక్కువ ఉన్నప్పుడు) మాత్రమే అ పటము భ్రమణ సౌష్టవత కలిగియున్నది అంటాము.

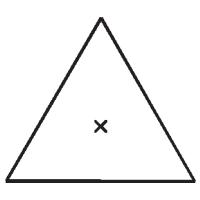


అభ్యాసం - 3

1. కింది పటములలో వేని యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణములు 1 కన్నా ఎక్కువ?



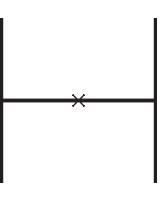
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

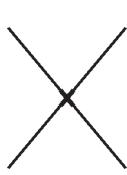


(v)

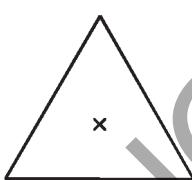
2. కింది పటముల యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణములు రాయండి.



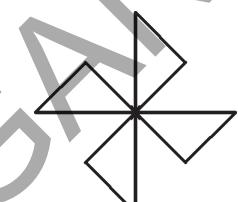
(i)



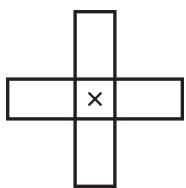
(ii)



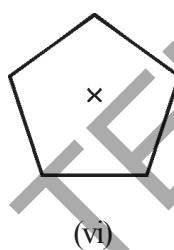
(iii)



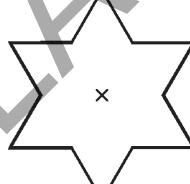
(iv)



(v)



(vi)



(vii)



(viii)

3. కింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన పటాలను నిర్మించి, పరిశీలనల ద్వారా పట్టికను ఘూరించండి.

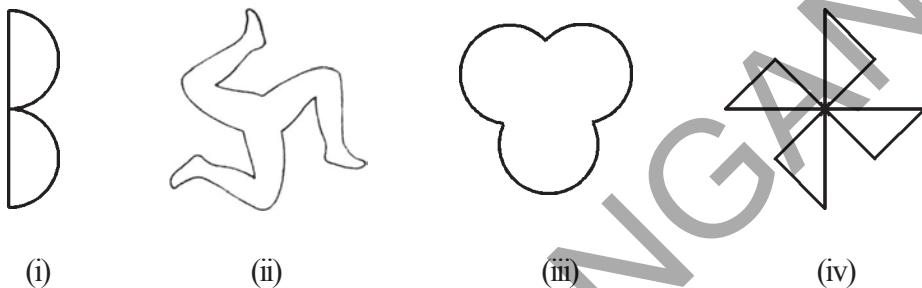
పటము	భ్రమణ కేంద్రము (క్రముల ఖండన బిందువు/ సౌష్టవాక్షరముల ఖండన బిందువు)	భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము	భ్రమణ సౌష్టవ కోణము
చతురస్రం			
దీర్ఘ చతురస్రము			
సమచతుర్భుజము			
సమబాహు త్రిభుజం			
క్రమ షడ్వృజి			
వృత్తము			
అర్ధవృత్తము			

15.3 రేఖీయ సౌష్టవము, భ్రమణ సౌష్టవము

ఇప్పటి వరకు సాగిన చర్చను బట్టి కొన్ని పటములు రేఖీయ సౌష్టవమును మాత్రము, కొన్ని పటములు భ్రమణ సౌష్టవమును మాత్రము, కొన్ని పటములు రెండు సౌష్టవములను కలిగియుంటాయని అర్థం చేసుకొని ఉంటారు.

వృత్తము సంపూర్ణ సౌష్టవము గల రేఖా పటము. ఎంత కోణము భ్రమణమునకు అయినా వృత్తము భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగి యుంటుంది. అనగా వృత్తమునకు సౌష్టవాక్షరముల సంబ్యు అనంతము, భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణము అనంతము.

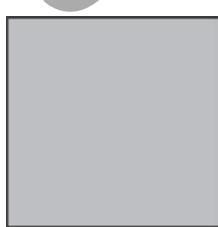
ఉదాహరణ 1 : క్రింది ఆకారములలో ఏది రేఖీయ సౌష్టవతను కలిగియున్నవి? ఏది భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగియున్నవి.



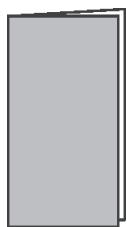
పటము	రేఖీయ సౌష్టవము	భ్రమణ సౌష్టవము
1.	కలదు	లేదు
2.	లేదు	కలదు
3.	కలదు	కలదు
4.	లేదు	కలదు

కృత్యము 3

- చతురస్రాకారపు కాగితమును తీసుకొనండి.
- దానిని మధ్యగా నిలుపుగా, తరువాత అడ్డముగా మడవండి.
- మడచిన అంచులు కలుసుకొనునట్లు ఐ మూలగా (కర్కం వెంబడి) మరొకసారి మడవండి.
- పటంలో చూపిన విధంగా మడచిన అంచుల వెంట కత్తిరించండి.
- కాగితం మడతలు విప్పి చూడండి.
- మరికొన్ని డిజైనులను తయారుచేయండి.



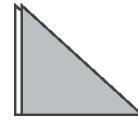
పటం 1



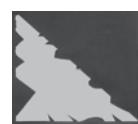
పటం 2



పటం 3



పటం 4



పటం 5



- (i) ఈ కాగితము (డిజైను కత్తిరించిన కాగితము) రేఖీయ సౌష్టవతను కలిగి ఉన్నదా? ఉంటే ఎన్ని సౌష్టవాక్షరములు?
- (ii) ఈ కాగితము భ్రమణ సౌష్టవతను కలిగి ఉన్నదా?



అభ్యాసం - 4

1. ఆంగ్లమునందు కొన్ని పెద్ద అక్షరములు అందమైన సౌష్టవమును కలిగి ఉంటాయి. ఏయే అక్షరములు ఒక్క సౌష్టవాక్షరమును కలిగి ఉంటాయో వ్రాయండి. ఏయే అక్షరములు 2 పరిమాణం గల భ్రమణ సౌష్టవమును కలిగి ఉన్నాయి?

పరిశీలించి క్రింది పట్టికను పూరించండి.

అక్షరము	రేఖీయ సౌష్టవము	సౌష్టవ అక్షరముల సంఖ్య	భ్రమణ సౌష్టవము	భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం
Z	లేదు	0	కలదు	2
S				
H				
O				
E	కలదు	1	లేదు	
N				
C				



ప్రాణక్కు పని :

వార్తాపత్రికలు, వారపత్రికలు, ప్రకటనల కరపత్రముల నుండి సౌష్టవ పటములను సేకరించి వాటి సౌష్టవాక్షరములను గీయండి. వర్గీకరించండి.



మనం నేర్చుకున్నవి

- ఒక పటమును రెండు సర్వసమాన విభాగములుగా విభజించునట్టగా పటము మధ్య గీయదగు రేఖను ఆ పటము యొక్క ‘సౌష్టవరేఖ’ లేక ‘సౌష్టవాక్షరము’ అంటాము.
- కొన్ని పటములకు ఒకటి, లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సౌష్టవాక్షరములు ఉంటాయి.
- ఒక పటంలోని మధ్యబిందువు గుండా పటాన్ని కొంత కోణములో భ్రమణము చేయించగా ఏర్పడు పటము మొదటి పటానికి సర్వసమానమయితే ఆ పటము భ్రమణ సౌష్టవము కలిగియున్నది అంటాము.
- ఒక పటమును ఏ కనీస కోణముతో భ్రమణం చేసినప్పట అది హృత్రిగా తొలిస్తీతిని పోలి ఉంటుందో ఆ కోణమును పటం యొక్క ‘భ్రమణ సౌష్టవ కోణం’ అంటాము.
- ప్రతి పటము 360° భ్రమణము చేసినప్పట, అది దాని తొలి స్థానముతో సర్వసమానత్వమును కలిగి ఉంటుంది. కావున అది 1 పరిమాణంగా గల భ్రమణ సౌష్టవము కలిగి ఉంటుంది అని చెప్పారాడు. ఏదయినా పటము యొక్క భ్రమణ సౌష్టవ పరిమాణం 1 కన్నా ఎక్కువ ఉన్నప్పుడు (భ్రమణ సౌష్టవ కోణము 360° కన్నా తక్కువ ఉన్నప్పుడు) మాత్రమే ఆ పటము భ్రమణ సౌష్టవత కలిగియున్నది అంటాము.
- కొన్ని ఆకారములు రేఖీయ సౌష్టవతను మాత్రము, కొన్ని ఆకారములు భ్రమణ సౌష్టవతను మాత్రము, కొన్ని ఆకారములు రెండింటిని కలిగి యుంటాయి.



జవాబులు

01 - పూర్త సంఖ్యలు

అభ్యాసం - 1

(1) పెద్ద సంఖ్య = 2 ; చిన్న సంఖ్య = -3

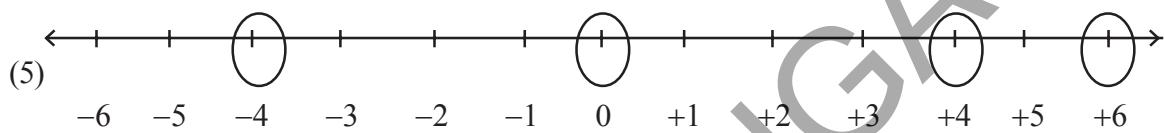
(2) (i) $-9, -8, -7, -6$; గరిష్ట సంఖ్య = -6 ; కనిష్ట సంఖ్య = -9

(ii) $-1, 0, +1, +2$; గరిష్ట సంఖ్య = +2 ; కనిష్ట సంఖ్య = -1

(iii) $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ గరిష్ట సంఖ్య = +4 ; కనిష్ట సంఖ్య = -7

(3) (i) $-8, -5, 1, 2$ (ii) $-5, -4, -3, 2$ (iii) $-15, -10, -7$

(4) (i) $-2, -3, -5$ (ii) $-1, -2, -8$ (iii) $8, 5, -2$



(5) $-8, -7, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$

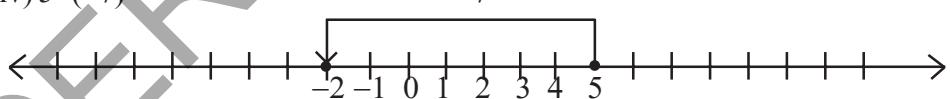
(7)i)	క్ర.సం.	వట్టణం	ఉష్ణీగ్రత్త
	1	బెంగుళూరు	20°C
	2	డాటీ	15°C
	3	నైనితాల్	-3°C
	4	మనాలి	-7°C
	5	కసౌలి	-9°C

(ii) బెంగుళూరు (20°C) (iii) కసౌలి (-9°C)

(iv) నైనితాల్ (-3°C) మనాలి (-7°C) కసౌలి (-9°C) (v) డాటీ (15°C) బెంగుళూరు (20°C)

అభ్యాసం - 2

(1) (iv) $5+(-7)$



i, ii, iii లను పై విధంగా గుర్తించాలి.

(2) (i) 11 (ii) 5 (iii) 14 (iv) 8 (v) 2 (vi) 4 (vii) -2 (viii) 0

(ix) 8 (x) 20 (xi) 80 (xii) 2 (xiii) -16 (xiv) -8

అభ్యాసం - 3

(1) (i) 5 (ii) 15 (iii) -4 (iv) 1 (v) 13 (vi) -1

(2) (i) 31 (ii) 21 (iii) 24 (iv) -13 (v) -8

(vi) 130 (vii) 75 (viii) 50 (ix) -5

(3) క్ర.సం.	బుఱుపూర్ణసంఖ్య	+	ఫూర్ణాంకం	=	-6
1	(-6)	+	0	=	-6
2	(-7)	+	1	=	-6
3	(-8)	+	2	=	-6
4	(-9)	+	3	=	-6 మొదలగునవి

అభ్యసం - 4

(1) (i)	+600	(ii)	-1	(iii)	-600	(iv)	+200	(v)	-45
(2) (i)	-3	(ii)	-225	(iii)	630	(iv)	316	(v)	0
(vi)	1320	(vii)	162	(viii)	-360	(ix)	-24	(x)	36
(3)	-10°	(4) (i)	10	(ii)	18	(iii)	5	(5) (i)	₹.5000 లాభం (ii) 3200
(6) (i)	-9	(ii)	-7	(iii)	+7	(iv)	-11		

అభ్యసం - 5

(1) (i)	సత్యం ($72 = 126 - 54 = 72$)	(ii)	సత్యం ($210 = 84 + 126 = 210$)	(2) (i)	-a	(ii)	-5
(3) (i)	480	(ii)	-53,000	(iii)	-15000	(iv)	-4182
(v)	-62500	(vi)	336	(vii)	493	(viii)	1140

అభ్యసం - 6

(1) (i)	-1	(ii)	-49	(iii)	నిర్మచింప లేము	(iv)	0
---------	----	------	-----	-------	----------------	------	---

అభ్యసం - 7

(1) (i)	24	(ii)	20	(2) (i)	లాభం ₹33,000	(ii)	3000
(3)	రాత్రి 9 గం॥ ; అర్ధరాత్రి 12 గంట సమయంలో ఉష్ణోగ్రత = -14°C						
(4) (i)	8 ప్రత్యులు	(ii)	13 ప్రత్యులు	(5)	1 గంట		

02- భీన్మాలు, దశాంశాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

అభ్యసం - 1

(1) (i)	$2\frac{3}{4}$	(ii)	$1\frac{1}{9}$	(iii)	$\frac{3}{7}$	(iv)	$3\frac{1}{6}$	(v)	$\frac{11}{24}$	(vi)	$6\frac{1}{6}$
(2) (i)	$\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}$	(ii)	$\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$								
(3)	అడ్డవరుసలలో మొత్తం = $\frac{21}{13}$, నిలవు వరుసలలో మొత్తం = $\frac{21}{13}$, కర్కల వరుసలలో మొత్తం = $\frac{21}{13}$ అన్ని వరుసలలలోని మొత్తాలు సమానం.										

(4) $17\frac{11}{15}$ సెం.మీ (5) $1\frac{7}{8}$ (6) $\frac{7}{12}$

(7) చుట్టుకొలత $\Delta ABE = 10\frac{1}{5}$ సెం.మీ; BCDE చుట్టుకొలత $= 7\frac{11}{15}$ సెం.మీ;

ΔABE చుట్టుకొలత పెద్దది;

$$\text{బోడం} = 2\frac{7}{15}$$

అభ్యర్థం - 2

- | | | | | | | | |
|-----|--------------------|---------|---------------------|----------------------|---------------------|--------------------|---------|
| (1) | (i) $5\frac{0}{6}$ | లేక 5 | (ii) $1\frac{1}{3}$ | (iii) $1\frac{5}{7}$ | (iv) $1\frac{1}{9}$ | (v) $6\frac{0}{5}$ | లేక 6 |
| (2) | (i) 6 | | (ii) 6 | (iii) 9 | (iv) 15 | | |
| (3) | (i) 4 | | (ii) 6 | | | | |

అభ్యర్థం - 3

- | | | | | | | | |
|-----|---|----------------------------------|-----------------------|-----|------------------------|---------------------------|----------------|
| (1) | (i) $\frac{35}{66}$ | (ii) $1\frac{1}{5}$ | (iii) $7\frac{7}{15}$ | (2) | (i) $3\frac{7}{15}$ | (ii) $\frac{2}{21}$ | (iii) 3 |
| (3) | (i) $\frac{3}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ | (ii) రెండు సమానమే | | (4) | $17\frac{1}{2}$ గుంటలు | (5) $85\frac{1}{3}$ కి.మీ | (6) 1350 మీ. |
| (7) | (i) $\frac{10}{7}$ | (ii) $\frac{3}{5}, 35$ లేక $3,7$ | | | | | |

అభ్యర్థం - 4

- | | | | | | | | | | |
|-----|--------------------|---------------------|----------------------|---------------------|-----|----------|-----------------------|----------------------|--------------------|
| (1) | (i) $\frac{8}{5}$ | (ii) $\frac{7}{8}$ | (iii) $\frac{7}{13}$ | (iv) $\frac{4}{3}$ | (2) | (i) 24 | (ii) $3\frac{3}{7}$ | (iii) $1\frac{2}{7}$ | (iv) $\frac{7}{5}$ |
| (3) | (i) $\frac{2}{15}$ | (ii) $\frac{7}{40}$ | | (iii) $\frac{5}{9}$ | | (5) | $2\frac{1}{2}$ రోజులు | | |

అభ్యర్థం - 5

- | | | | | | | | | |
|-----|------------------------------|--|---|---------------------|---|--|----------------------|-----------------|
| (1) | (i) 0.7 | (ii) 8.5 | (iii) 1.51 | (iv) 6 | (2) | (i) ₹. $0-09$ | (ii) ₹. $77-07$ | (iii) ₹. $2-35$ |
| (3) | (i) 0.1 మీ, 0.0001 కి.మీ | (ii) 4.5 సెం.మీ, 0.045 మీ 0.000045 కి.మీ | | | | | | |
| (4) | (i) 0.19 కి.గ్రా | | (ii) 0.247 కి.గ్రా | | (iii) 44.08 కి.గ్రా | | | |
| (5) | (i) $50 + 5 + \frac{5}{10}$ | | (ii) $5 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100}$ | | (iii) $300 + 3 + \frac{3}{100}$ | | | |
| | | | | | (iv) $30 + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}$ | (v) $1000 + 200 + 30 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$ | | |
| (6) | (i) 3 | (ii) 30 | (iii) $\frac{3}{100}$ | (iv) $\frac{3}{10}$ | (v) $\frac{3}{100}$ | (7) రూ. 100 మీ. | (8) 5.625 కి.గ్రా. | |

అభ్యాసం - 6

- | | | | | | |
|-----|-------------------------------|-------------------------|--|-----------------------------|--|
| (1) | (i) 1.8
(vi) 1050.05 | (ii) 18.9
(vii) 1.72 | (iii) 13.55
(2) 24.8 సె.మీ ² | (iv) 78.8
(xiii) 5 | (v) 0.35 |
| (3) | (i) 213
(vi) 15610 | (ii) 368
(vii) 362 | (iii) 537
(viii) 4307 | (iv) 1680.7
(ix) 5 | (v) 13110
(x) 0.8 |
| | (xi) 90
(iii) 42.16 | (xii) 30
(iv) 14.62 | (4) 625 కి.మీ
(v) 0.025 | (5) (i) 0.45
(vi) 1.12 | (ii) 4.75
(vii) 0.0214 |
| | (viii) 10.5525
(iv) 0.1271 | (ix) 1.0101
(v) 2 | (x) 77.011
(vi) 590 | (6) (i) 0.023
(vii) 0.02 | (ii) 0.09
(viii) 4.43
(7) 5
(8) 0.128 సె.మీ |

అభ్యాసం - 7

- (2) (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{-75}{180}$ (iii) $\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{10}{3}$
- (3)
- (4) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) సత్యం

03 - సామాన్య సమీకరణాలు

అభ్యాసం - 1

- | | | | | |
|-----|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|---|
| (1) | (i) L.H.S = $2x$
R.H.S = 10 | (ii) L.H.S = $2x - 3$
R.H.S = 9 | (iii) L.H.S = $4z + 1$
R.H.S = 18 | (iv) L.H.S = $5p + 3$
R.H.S = $2p + 9$ |
| | (v) L.H.S = 14
R.H.S = $27 - y$ | (vi) L.H.S = $2a - 3$
R.H.S = 5 | (vii) L.H.S = 7 m
R.H.S = 14 | (viii) L.H.S = 8
R.H.S = $q + 5$ |
| (2) | (i) $y = 5$ | (ii) $a = 8$ | (iii) $m = 3$ | (iv) $n = 7$ |

అభ్యాసం - 2

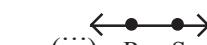
- | | | | | | | |
|-----|-----------------------------|--------------------------------|----------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------|
| (1) | (i) $x = 4$ | (ii) $y = 7$ | (iii) $x = 5$ | (iv) $z = 9$ | (v) $x = 3$ | (vi) $y = -20$ |
| (2) | (i) $y = 5$
(vi) $x = 3$ | (ii) $a = 4$
(vii) $x = -5$ | (iii) $q = 4$
(viii) $x = -1$ | (iv) $t = 4$
(ix) $y = 4$ | (v) $x = 13$
(x) $x = -2$ | |

అభ్యాసం - 3

- (1) 4 సె.మీ (2) 5 సె.మీ (3) 21 (4) 30 (5) 8 (6) 46, 49 (7) 7, 8, 9
 (8) $l = 34$ మీ, $b = 2$ మీ (9) $l = 23$ మీ, $b = 19$ మీ (10) 5 సంవత్సరాలు (11) 19, 44 (12) 40; 25, 15
 (13) 2 (14) 40 (15) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (16) 30

04 - రేఖలు - కోణాలు

అభ్యాసం - 1

- (1) (i) రేఖా ఖండం AB (ii) కిరణం CD (iii) రేఖ XY (iv) బిందువు 'P'
- (2) (i)  (ii) • X (iii)  (iv) C — D
- (3) \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{BD} , \overline{CD}
- (5) (i) అల్పకోణం (ii) అధిక కోణం (iii) లంబ కోణం (iv) అల్పకోణం (v) అధిక కోణం
- (6) $\angle FOA$, $\angle EOF$, $\angle DOE$, $\angle COD$, $\angle BOC$, $\angle DOF$, $\angle EOF$, $\angle BOD$ - అల్పకోణాలు
 $\angle AOE$, $\angle BOE$, $\angle COF$ - లంబ కోణం ; $\angle DOA$, $\angle COA$, $\angle BOF$ - అధిక కోణాలు
 $\angle BOA$ - సరళ కోణం (7) (i) మరియు (iv) ఖండన రేఖలు మరియు (iii) ఖండన రేఖలు కావు.
- (8) (i) (ii) మరియు (iv) ఖండన రేఖలు మరియు (iii) ఖండన రేఖలు కావు.

అభ్యాసం - 2

- (1) Ⅲ (2) (i) 65° (ii) 50° (iii) 1° (iv) 35° (3) $45^\circ, 45^\circ$
(4) అవును. ఎందుకనగా కోణాలు మొత్తం 90°

అభ్యాసం - 3

- (1) (i), (ii) (2) (i) 75° (ii) 85° (iii) 30° (iv) 160°
(3) రెండు అల్పకోణాల మొత్తం ఎల్లప్పుడు 180° కన్నా తక్కువ (4) $90^\circ, 90^\circ$

అభ్యాసం - 4

- (1) (i) a, b (ii) c, d (2) (i) $\angle AOD, \angle DOB$ (ii) $\angle DOB, \angle BOC$
(iii) $\angle BOC, \angle COA$ (iv) $\angle COA, \angle AOD$

(3) అవును



- (4) అవును
- . ఎందుకనగా $\angle BOA + \angle COB = 90^\circ$

అభ్యసం - 5

- (1) i, ii (2) లేదు, ఎందుకనగా రెండింటికి ఉమ్మడి భుజం లేదు

అభ్యసం - 6

- (1) (i) $\angle AOD, \angle BOC$ (ii) $\angle AOC, \angle BOD$
 (2) $y = 160^\circ$ (నిలవు శీర్షాభ్యముఖ కోణాలు) $x + 160^\circ = 180^\circ$ $\therefore x = 20^\circ$
 $\angle x = \angle z$ అద్ద శీర్షాభ్యముఖ కోణాలు $\therefore z = 20^\circ$

అభ్యసం - 7

- (1) (i) తిర్యగ్రేభి (ii) సమాంతరం (iii) సమాంతరం (iv) ఒకటి
 (2) (i) 100° (ii) 45° (iii) 90° (iv) 100°
 (3) $\angle x = 180 - (75+45) = 60^\circ$; $\angle y = 75^\circ$; $z = 45^\circ$
 (4) $b + 50^\circ = 180^\circ$ $\therefore b = 130^\circ$
 $b + c = 180^\circ \Rightarrow 130^\circ + c = 180^\circ \Rightarrow c = 50^\circ$
 $d + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow d = 130^\circ$
 (5) $\therefore l \parallel m$ అగును
 (6) $\angle a = 50^\circ$ (వొకాంతర కోణాలు)
 $\angle b = 50^\circ$ (వొకాంతర కోణాలు)
 $\angle c = \angle d = \angle e = 50^\circ$
 (అన్నియు వొకాంతర కోణాలు)

05 - త్రిభుజము - ధర్మాలు**అభ్యసం - 1**

- (1) (i) సంభవము (ii) సంభవము (iii) సంభవము కాదు (iv) సంభవము

అభ్యసం - 2

- (1) (i) మర్ధుగతం (ii) ఉన్నతి (ఎత్తు) (2) లంబకోణ త్రిభుజము (3) అవును
 (4) కాదు, కొన్ని సందర్భాలలో త్రిభుజం బాహ్య ప్రదేశంలో ఉంటాయి. (5) (i) XZ (ii) $\angle R$ (iii) B

అభ్యాసం - 3

- (1) (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (2) (i) $x = 70^\circ$; $y = 60^\circ$ (ii) $x = 80^\circ$; $y = 50^\circ$
 (iii) $x = 110^\circ$; $y = 70^\circ$ (iv) $x = 60^\circ$; $y = 90^\circ$ (v) $x = 45^\circ$; $y = 90^\circ$ (iv) $x = 60^\circ$
- (3) (i) 40° (ii) 34° (iii) 60° (4) 60° (5) (i) అనత్యం (ii) సత్యం (iii) అనత్యం (iv) అనత్యం
- (6) (i) 30° ; 60° ; 90° (7) $x = 100^\circ$; $y = 50^\circ$; $z = 100^\circ$ (8) 72°
- (9) $\angle P = 80^\circ$; $\angle Q = 40^\circ$; $\angle R = 60^\circ$ (10) 18° ; 72° ; 90° (11) $36^\circ, 54^\circ$
- (12) $\angle LPM = 40^\circ$; $\angle LMP = 50^\circ$; $\angle QRP = 50^\circ$ (13) 540°

అభ్యాసం - 4

- (1) అంతర కోణాలు : $\angle CBA, \angle ACB, \angle BAC$; బాహ్యకోణాలు : $\angle CBX, \angle ACZ, \angle BAY$
- (2) $\angle ACD = 111^\circ$ (3) $x = 115^\circ$; $y = 35^\circ$ (4) (i) $x = 50^\circ$ (ii) $x = 33^\circ$; $y = 82^\circ$
- (5) $\angle CDB = 76^\circ$; $\angle CBD = 39^\circ$; $\angle CBA = 58^\circ$
- (6) (i) $x = 55^\circ, y = 55^\circ$ (ii) $x = 100^\circ, y = 50^\circ$ (iii) $x = 120^\circ, y = 30^\circ$ (iv) $x = 40^\circ, y = 70^\circ$
 (v) $x = 60^\circ$; $y = 150^\circ$; (vi) $x = 50^\circ$; $y = 130^\circ$ (7) 50° ; 75° ; 55°
- (8) $\angle P = 35^\circ$; అవును (9) 70° (10) 30° ; 75° ; 75° (11) $x = 135^\circ$; $y = 80^\circ$

06 - నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు

అభ్యాసం - 1

- (1) $100 : 10$, $10 : 1$ (2) ₹15 (i) $15 : 5$ లేక $3 : 1$ (రాధ : సుధ)
 (ii) $5 : 15$ or $1 : 3$ (సుధ:రాధ) (3) $40 : 20$ లేక $2 : 1$ (4) $1 : 2400$
- (5) రాజు యొక్క వాటా = 40 ; రవి యొక్క వాటా = 56
- (6) $\overline{AX} = 18$ సె.మీ; $\overline{XB} = 20$ సె.మీ. (7) ₹ $60,000$ (8) 8 శీలర్లు
- (9) (i) నీ తరగతిలోని బాలురు, బాలికలను లెక్కించి నిష్పత్తి రూపంలో తెలుపాలి. ఒకవేళ బాలురు లేక బాలికల సంఖ్య సున్న అయితే నిష్పత్తి దానిని రూపంలో తెలుగులవా? ఇలాంటి నిష్పత్తులను పోల్చులేదు.
- (ii) నీ తరగతి గది తలుపులు, కిట్టికలు లెక్కించి దీనిని నిష్పత్తి రూపంలో తెలుపాలి.
- (iii) నీ దగ్గరి పార్కుపుస్తకాలు, నోటుపుస్తకాలను లెక్కించి దీనిని నిష్పత్తి లో తెలుపాలి.

అభ్యాసం - 2

- (1) (i) 8, 8 (ii) 450, 450 (iii) 96, 96 (iv) 6, 30 (v) 24, 72
 (2) (i) అనత్యం (ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) సత్యం (v) అనత్యం
- (3) ₹.90 (4) 10 కి.గ్రా (5) a) 45 b) 26 (6) i) 540° ii) 21°

అభ్యాసం - 3

- (1) 0.0001 సెం.మీ ; 2 సెం.మీ (2) (i) అవును (ii) లేదు (iii) లేదు (3) 4 సెం.మీ
- (4)
- వేరువేరు చతురపొలాలను గీయండి. వాటి భుజాల పొడవులను కొలచి పట్టికను ఘరించండి.
 - చతురప్ర చుట్టుకొలత దాని భుజానికి నాలుగు రెట్లు దీని ఆధారంగా పట్టికను ఘరించండి.
 - ప్రతి చతురప్రం యొక్క భుజాన్ని వర్గం చేసి దీని ఆధారంగా పట్టికను ఘరించాలి.
- (i) అవును. చతురస్రంలో భుజం పొడవు దాని చుట్టుకొలతకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.
- (ii) అవును. చతురప్రంలో భుజం పొడవు దాని వైశాల్యానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

అభ్యాసం - 4

- (1) పారశాలY (2) 20% తగ్గింపు (3) మామిడిపండ్లు = 35% (4) 16%
- (5) పారశాలకు రానివారు = $16\frac{2}{3}\%$ లేక 16.66% పారశాలకు వచ్చినవారు = $83\frac{1}{3}\%$ లేక 83.33%
- (6) 7200 (7) 15 (8) బంగారం 70%; వెండి 25%; రాగి 5% (9) 2000

అభ్యాసం - 5

- (1) $12\frac{1}{2}\%$ లేక 12.5% (2) 6% (3) ₹. 2,00,000 (4) ₹. 875
- (5) నష్టం = 1200 (2.44%) (6) 561 (7) 202.5 (8) 800 (9) 1100
- (1) 2 సంవత్సరాల 8 నెలలు లేక $\frac{8}{3}$ సంవత్సరాలు లేక $2\frac{2}{3}$ సంవత్సరాలు (2) 12%
- (3) ₹. 450 (4) ₹. 12958 (5) $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాలు

07 - దత్తాంశ నిర్వహణ

అభ్యాసం - 1

- (1) (i) 33°C (ii) 30°C (2) 15.9 కి.గ్రా
- (3) (i) వేరుశనగ ₹ 7500; జూన్ రూ 4000; తృణధాన్యాలు ₹ 5250 (ii) వేరుశనగ (4) 42
- (5) (i) 23 (ii) 21, 3తే (iii) 16.5, 4తే (iv) లేఖ్య (6) (i) ₹18 (ii) ₹54 (iii) ₹9 (iv) అనుపాతం
- (7) 5.5 (8) 5.6 (9) 107

అభ్యాసం - 2

- (1) 155 సెం.మీ, 140 సెం.మీ. (2) (i) అంకగణిత సగటు = 28, బాహుళం = 27
(ii) 25 సం॥ వయస్సు కల్గిన ఆటగాళ్లు ఇద్దరు చౌప్పున
- (3) 25 (4) (i) బాహుళం (ii) అంకగణిత సగటు (iii) అంకగణిత సగటు (iv) బాహుళం

అభ్యర్థం - 3

- (1) (i) అసత్యం (ii) సత్యం (iii) అసత్యం (iv) అసత్యం (2) (i) ₹ 1400 (ii) ₹ 1450
 (3) బాహుళకం సరిగా ఉన్నది. కాని మధ్యగతం తప్ప (4) 1,7,10 లేదా 2,7,9 లేదా 3,7,8 (5) 11

అభ్యర్థం - 4

- (5) (i) విద్య విషయం (ii) ఆహారం (iii) ₹ 2250 (iv) ₹ 1500

08 - త్రిభుజాల సర్వసమానత్వం

అభ్యర్థం - 1

- (1) (i) సత్యం (ii) అసత్యం, $LS \neq AD$, $SD = LA$
 (2) (i) $\angle P = \angle R$ (ii) $\angle ROS = \angle QOP$
 $\angle TQP = \angle RQS$ $\angle R = \angle Q$ or $\angle R = \angle P$
 $\angle T = \angle S$ $\angle S = \angle P$ or $\angle S = \angle Q$
 (3) (ii) సరైనది (4) అవును (భు.భు.భు. సర్వసమానత్వ ధర్మం)

అభ్యర్థం - 2

- (1) సమాచారం ఇప్పటిన అవసరం ఉంది; $GH = TR$ మరియు $HJ = TS$
 (2) $AP = 4$ కి.మీ ($\therefore AP = BQ$ c.p.c.t.)
 (3) (i) $\Delta ABC \cong \Delta STR$ (ii) $\Delta POQ \cong \Delta ROS$
 $AB = ST$ అందుచేత $BC = TR$ $PO = RO$ అందుచేత $PQ = RS$
 $\angle A = \angle S$ $\angle B = \angle T$ $OQ = OS$ $\angle P = \angle R$
 $AC = SR$ $\angle C = \angle R$ $\angle POQ = \angle ROS$ $\angle Q = \angle S$
 (iii) $\Delta DRO \cong \Delta OWD$ $DR = OW$ అందుచేత $DO = OD$
 $RO = WD$ $\angle ODR = \angle DOW$
 $\angle R = \angle W$ $\angle ROD = \angle WOD$
 పటం $\square WORD$ లో
 $\angle R = 90^\circ$
 $WD = OR$ మరియు $WO = DR$
 $\therefore \square WORD$ ఒక దీర్ఘచతురండ్రం
 $\therefore \Delta WSD \cong \Delta OSR$
 $\therefore \Delta WSO \cong \Delta DSR$
 మరియు $\Delta ORW \cong \Delta DWL$.

(iv) ΔABC మరియు ΔCDA సర్వసమానాలు కావు.

- (4) (i) ΔABC మరియు ΔRQP తో తెలుసుకోవాల్సింది $AB = RQ$.
(ii) ΔABC మరియు ΔADC తో తెలుసుకోవాల్సింది $AB = AD$.

అభ్యాసం - 3

- (1) (i) కో.కో.భు. ధర్మం $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (ii) కో.భు.కో.లేక భు.భు.ధర్మం $\Delta ABD \cong \Delta CDB$
(iii) కో.భు.కో.ధర్మం $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (iv) సర్వసమానములు కావు
- (2) (i) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (కో.కో.భు.)
(ii) నుండి $AB = CD$ (సర్వసమాన త్రిభుజాల సర్వశబ్దాగాలు)
 $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DCB$ (కో.కో.భు.)

అభ్యాసం - 4

- (1) (i) భు.భు.భు (ii) భు.కో.భు (iii) కో.భు.కో (iv) లం.క.భు.
(2) (i) a) $AR = PE$ b) $RT = EN$ c) $AT = PN$ (ii) a) $RT = EN$ b) $PN = AT$
(iii) a) $\angle A = \angle P$ b) $\angle T = \angle N$
- (3) (i) భుజం (ii) కోణం (iii) ఉమ్మడి భుజం (iv) భు.కో.భు.
- (4) సదృశకోణాలు సమానమైనంత మాత్రం సర్వసమానమని చెప్పలేము. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ కాని త్రిభుజాలు సరూపాలని చెప్పవచ్చు.
- (5) $\Delta RAT \cong \Delta WON$ (6) $\Delta ABC \cong \Delta ABT$ మరియు $\Delta QRS \cong \Delta TPQ$
- (7) (i) ఒకే కొలతతో కూడిన 2 త్రిభుజాలు నిర్మించాలి.
(ii) వేర్వేరు కొలతలతో కూడిన 2 త్రిభుజాలు నిర్మించాలి.
- (8) $BC = QR$ (కో.భు.కో) or $AB = PQ$ (కో.కో.భు.) లేక $AC = PR$ (కో.కో.భు.)
- (9) $\angle B = \angle E$; $\angle A = \angle F$ కో.కో.భు. ఆధారంగా $\Delta ABC \cong \Delta FED$ సర్వసమానం; $BC = ED$

10 - బీజీయ సమాసాలు

అభ్యాసం - 1

- (1) (i) $3n$ (ii) $2n$
- (2) (i) • పటం-4 లో ప్రతి వైపు 4 రంగుల టైల్స్ ఉంటాయి.
• పటం - 5లో ప్రతి వైపు 5 రంగుల టైల్స్ ఉంటాయి.

(ii) అమరిక ఆధారంగా బీజీయ సమాసం = $4n$; $4, 8, 12, 16, 20 \dots$ సమాసం = $4n$

(iii) అమరిక ఆధారంగా బీజీయ సమాసం = $4n + 1$; $9, 13, 17, 21 \dots$ సమాసం = $4n + 1$

(3) (i) $p + 6$ (ii) $x - 4$ (iii) $y - 8$ (iv) $-5q$ (v) $y \div 4$ లేక $\frac{y}{4}$

(vi) pq లేక $\frac{pq}{4}$ (vii) $5z + 5$ (viii) $10 + 5x$ (ix) $2y - 5$ (x) $13 + 10y$

(4) (i) x కన్నా 3 ఎక్కువ లేక x కు మూడు కలుపగా (ii) y కన్నా 7 తక్కువ లేక y నుండి 7 నుతీసివేయగా

(iii) 10 చే l ను గుణించగా (iv) 5 చే x ను భాగించగా

(v) 3 తో m ను గుణించి 11ను కూడగా

(vi) 2తో y ను గుణించి 5ను తీసివేయగా లేక y యొక్క రెట్టింపు విలువ నుండి 5ను తీసివేయగా

(5) (i) సిరూళి (ii) చరరాళి (iii) శిరూళి (iv) చరరాళి

అభ్యాసం - 2

(1) (i) $(a^2, -2a^2)$ (ii) $(-yz, 2zy)$ (iii) $(-2xy^2, 5y^2x)$ (iv) $(7p, -2p, 3p)$ and $(8pq, -5pq)$

(2) బీజీయ సమాసాలు : లెక్క నెంబర్లు : i, ii, iv, vi, vii, ix, xi

సంఖ్య సమాసాలు : లెక్క నెంబర్లు iii, v, viii, x

(3) ఏకవది i, iv, vi ; ద్వివది : ii, v, vii ; త్రివది : iii, viii, ix ఒహూళవది: x

(4) (i) 1 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 4 (v) 2 (vi) 3 (5) (i) 1 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 3

(v) 4 (vi) 2 (6) $xy + yz$ $2x^2 + 3x + 5$

అభ్యాసం - 3

(1) $3a + 2a = 5a$ (2) (i) $13x$ (ii) $10x$ (3) (i) $3x$ (ii) $-6p$ (iii) $11m^2$

(4) (i) -1 (ii) 4 (iii) -2 (5) -9 (6) $2x^2 + 11x - 9; -23$ (7) (i) 3 (ii) 5 (iii) -1

(8) $54 \text{ సెం.మీ.} \times \text{సెం.మీ.} = 54 \text{ సెం.మీ.}^2$ (9) ₹. 90

(10) $s = \frac{d}{t} = \frac{135 \text{ మీ.}}{10 \text{ సె.}} = \frac{27}{2} \text{ మీ./సెకను. లేక } 13\frac{1}{2} \text{ మీ./సెకను. లేక } 13.5 \text{ మీ./సెకను}$

అభ్యాసం - 4

(1) (i) $-5x^2 + xy + 8y^2$ (ii) $10a^2 + 7b^2 + 4ab$ (iii) $7x + 8y - 7z$ (iv) $-4x^2 - 5x$

(2) $7x + 9$ (3) $18x - 2y$ (4) $5a + 2b$ (5) (i) $a+2b$ (ii) $2x+3y+4z$ (iii) $-4ab - 8b^2$

(iv) $4pq - 15p^2 - 2q^2$ (v) $-5x^2 + 3x + 10$ (vi) $2x^2 - 2xy - 5y^2$ (vii) $3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$

- (6) $7x^2 + xy - 6y^2$ (7) $4x^2 - 3x - 2$ (8) $4x^2 - 3y^2 - xy$ (9) $2a^2 + 14a + 5$
 (10) (i) $22x^2 + 12y^2 + 8xy$ (ii) $-14x^2 - 10y^2 - 20xy$ or $-(14x^2 + 10y^2 + 20xy)$
 (iii) $20x^2 + 5y^2 - 4xy$ (iv) $-8y^2 - 32x^2 - 30xy$

11 - ఘూతాంకాలు

అభ్యాసం - 1

- (i) ఆధారము = 3, ఘూతాంకము = 4; $3 \times 3 \times 3 \times 3$ (ii) ఆధారము = $7x$, ఘూతాంకము = 2;
 $7 \times x \times 7 \times x$ (iii) ఆధారము = $5ab$, ఘూతాంకము = 3; $5 \times 5 \times 5 \times a \times a \times a \times b \times b \times b$
(iv) ఆధారము = $4y$, ఘూతాంకము = 5; $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times y \times y \times y \times y \times y$
- (i) 7^5 (ii) $3^3 \times 5^4$ (iii) $2^3 \times 3^4 \times 5^3$
- (i) $2^5 \times 3^2$ (ii) 2×5^4 (iii) $2 \times 3^2 \times 5^3$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ (v) $2^5 \times 3 \times 5^2$
- (i) 3^2 (ii) 3^5 (iii) 2^8 5. (1) 17 (ii) 31 (iii) 25 (iv) 1

అభ్యాసం - 2

- (i) 2^{14} (ii) 3^{10} (iii) 5^5 (iv) 9^{30} (v) $\left(\frac{3}{5}\right)^{15}$ (vi) 3^{20}
(vii) 3^4 (viii) 6^4 (ix) 2^{9a} (x) 10^6 (xi) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{10} = \frac{(-5)^{10}}{6^{10}} = \frac{5^{10}}{6^{10}}$
(xii) 2^{10a+10} (xiii) $\frac{2^5}{3^5}$ (xiv) 15^3 (xv) -4^3 (xvi) $\frac{1}{9^8}$ (xvii) $\frac{1}{6^4}$
(xviii) -7^{15} (xix) 6^{16} (xx) a^{x+y+z} (2) 3¹⁰ (3) 2 (4) 2 (5) 1
- (i) సత్యం ($2+11=13$) (ii) అసత్యం (iii) సత్యం (iv) సత్యం (v) అసత్యం (vi) అసత్యం (vii) సత్యం

అభ్యాసం - 3

- (i) 3.84×10^8 మీ. (ii) 1.2×10^{10} (iii) 3×10^{20} మీ. (iv) 1.353×10^9 కి. మీ.³

12 - చతుర్భుజాలు

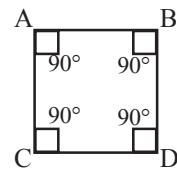
అభ్యాసం - 1

- (i) భుజాలు : \overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} , \overline{SP} కోణాలు : $\angle SPQ$, $\angle PQR$, $\angle QRS$, $\angle RSP$
శీర్షాలు : P, Q, R, S కర్ణాలు : \overline{PR} , \overline{QS}
(ii) అనన్న భుజాల జతలు \overline{PQ} , \overline{QR} ; \overline{QR} , \overline{RS} ; \overline{RS} , \overline{SP} మరియు \overline{PQ} , \overline{SP}
అనన్న కోణాల జతలు : $\angle SPQ$, $\angle RSP$; $\angle RSP$, $\angle QRS$; $\angle QRS$, $\angle PQR$
మరియు $\angle PQR$, $\angle SPQ$

అభిముఖ భుజాల జతలు : \overline{PS} , \overline{QR} మరియు \overline{QP} , \overline{RS}

అభిముఖ కోణాల జతలు : $\angle SPQ$, $\angle QRS$ మరియు $\angle RSP$, $\angle PQR$

- (2) 100° (3) $48^\circ, 72^\circ, 96^\circ, 144^\circ$ (4) $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$
 (5) $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$
 (6) చతుర్భుజంలోని ఏ ఒక్క కోణం 180° గా ఉండదు.



అభ్యాసం - 2

- (1) (i) అనత్యం (ii) సత్యం (iii) సత్యం (iv) అనత్యం (v) అనత్యం (vi) సత్యం (vii) సత్యం (viii) సత్యం
 (2) (i) ఇది 4 భుజాలను కల్గి ఉంటుంది (ii) చతురస్రంలోని అభిముఖ భుజాలు సమాంతరం
 (iii) చతురస్రంలో కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన మధ్యాయ.
 (iv) చతురస్రంలో అభిముఖ భుజాలు సమాన పొడవు ఉంటాయి.
 (3) $\angle DAB = 140^\circ$, $\angle BCD = 140^\circ$, $\angle CDA = 40^\circ$ (4) $50^\circ, 130^\circ, 50^\circ, 130^\circ$
 (5) ఇది 4 భుజాలు మరియు ఒక జత సమాంతర భుజాలు కల్గి ఉన్నాయి. అవి $\overline{EA}, \overline{DR}$ (6) 1
 (7) అభిముఖ కోణాలు సమానం కావు (8) 15 సెం.మీ, 9 సెం.మీ, 15 సెం.మీ, 9 సెం.మీ
 (9) కాదు; రాంబస్లో ఎప్పుడూ కూడా భుజాల పొడవులు సమానం (10) $\angle C=150^\circ, \angle D=150^\circ$
 (11) (i) సమచతుర్భుజం (ii) చతురస్రం (iii) $180^\circ - x^\circ$
 (iv) రెండు సర్వసమాన (v) 10 (vi) 90°
 (vii) 0 (viii) 10 (ix) 45

13 - వైశాల్యం - చుట్టూకొలత

అభ్యాసం - 1

- (1) $2(l+b); a^2$ (2) 60 సెం.మీ; 22 సెం.మీ; 484 సెం.మీ²
 (3) 280 సెం.మీ²; 68 సెం.మీ; 18 సెం.మీ; 216 సెం.మీ²; 10 సెం.మీ; 50 సెం.మీ

అభ్యాసం - 2

- (1) (i) 28 సెం.మీ (ii) 15 సెం.మీ² (iii) 38.76-సం.మీ^2
 (iv) 24 సం.మీ^2 (2) (i) 91.2 సం.మీ^2 (ii) 11.4 సం.మీ
 (3) 42 సెం.మీ ; 30 సెం.మీ (4) 8 సెం.మీ ; 24 సెం.మీ (5) 30 మీ, 12 మీ (6) 80 మీ

అభ్యసం - 3

- (1) (i) 20 సెం.మీ² (ii) 12 సెం.మీ² (iii) 20.25 సెం.మీ² (iv) 12 సెం.మీ (2) (i) 12 సెం.మీ² (ii) 3 సెం.మీ
(3) 30 సెం.మీ²; 4.62 సెం.మీ (4) 27 సెం.మీ²; 7.2 సెం.మీ
(5) 64 సెం.మీ²; అవును; Δ BEC, Δ BAE మరియు Δ CDE లు సమాంతర రేఖల మధ్య గీయబడిన రెండు
త్రిభుజాలు.
రేఖలు BC మరియు AD, BC = AE+ED
(6) రాము; Δ PQR లో PR భూమి. ఎందుకనగా QS \perp PR.
- (7) 40 సెం.మీ (8) 20 సెం.మీ 40 సెం.మీ; (9) 20 సెం.మీ (10) 800 సెం.మీ² (11) 160 సెం.మీ²
(12) 192 సెం.మీ² (13) 18 సెం.మీ ; 12 సెం.మీ

అభ్యసం - 4

- (1) (i) 20 సెం.మీ² (ii) 24 సెం.మీ² (2) 96 సెం.మీ²; 150 మీ.మీ. : 691.2 మీ²
(3) 18 సెం.మీ (4) ₹ 5062.50

అభ్యసం - 5

- (1) (i) 220 సెం.మీ (ii) 26.4 సెం.మీ (iii) 96.8 సెం.మీ (2) (i) 55 మీ (ii) 17.6 మీ (iii) 15.4 మీ
(3) (i) (a) 50.24 సెం.మీ (b) 94.2 సెం.మీ (c) 125.6 సెం.మీ (ii) 7 సెం.మీ (4) 42 సెం.మీ
(5) 10.5 సెం.మీ (6) 3 మార్లు (7) 3:2 (8) 1.75 సెం.మీ (9) 94.20 సెం.మీ (10) 39.25 సెం.మీ

అభ్యసం - 6

- (1) 475 మీ² (2) 195.5 మీ²; 29.5 మీ² (3) 304 మీ² (4) 68 మీ² (5) 9900 మీ²; 200100 మీ²

14 - త్రిమితీయ మరియు ద్విమితీయ ఆకారాల అవగాహన

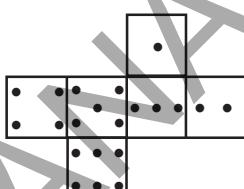
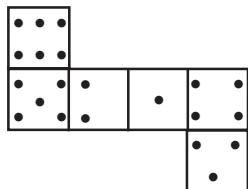
అభ్యసం - 1

- (1) గోళం: వుట్ బాల్, క్రికెట్ బంతి, లడ్డు,
స్కూపం: డ్రమ్ము, బిస్కట్పాకెట్, దుంగ (క్రర), క్యాండిల్
పిరమిడ్: పిరమిడ్; దీర్ఘ ఘనం: అగ్గిపెట్టె, ఇటుక, బిస్కట్ ప్యాక్
శంఖం: ఐస్క్రీం, చిచ్చబుడ్డి, ఘనం: డైన్, అట్టిపెట్టె
(2) (i) శంఖం: ఐస్క్రీం, గౌర పై భాగం (ii) ఘనం: డైన్, అట్టిపెట్టె
(iii) దీర్ఘఘనం: డెస్టరు, ఇటుక (iv) గోళం: బంతి, గోళాలు; (v) స్కూపం: పెన్సిలు, పైపు

(3)	ఫునం	దీర్ఘఫునం	పిరమిడ్
తలాలు	6	6	5
అంచులు	12	12	8
శీర్శాలు	8	8	5

అభ్యాసం - 2

- (1) కృత్యంను చేయండి (2) i) C ii) a (3)



అభ్యాసం - 4

- (1) బంతి : వృత్తం

స్కూపాకార గొట్టం : దీర్ఘచతురప్రం

పుస్కం : దీర్ఘచతురప్రం

- (2) (i) గోళాకార / వృత్తాకార వస్తువులు

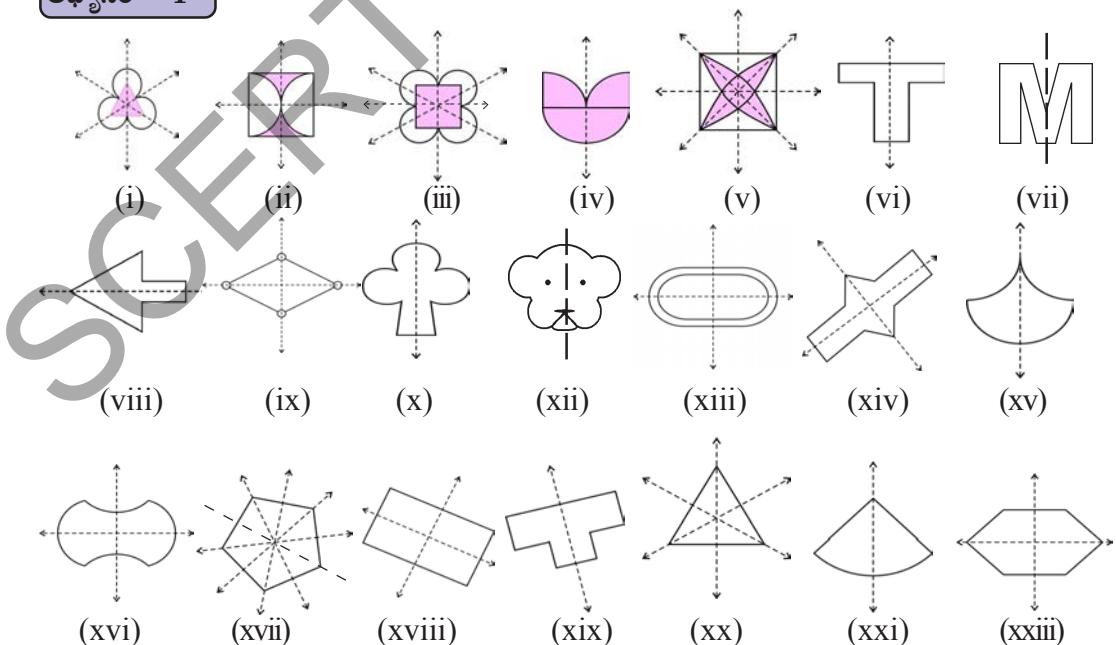
- (ii) ఫునాకార / చతురప్రాకార కాగితం

- (iii) త్రిభుజాకారాలు లేక క్రమ పట్టకం

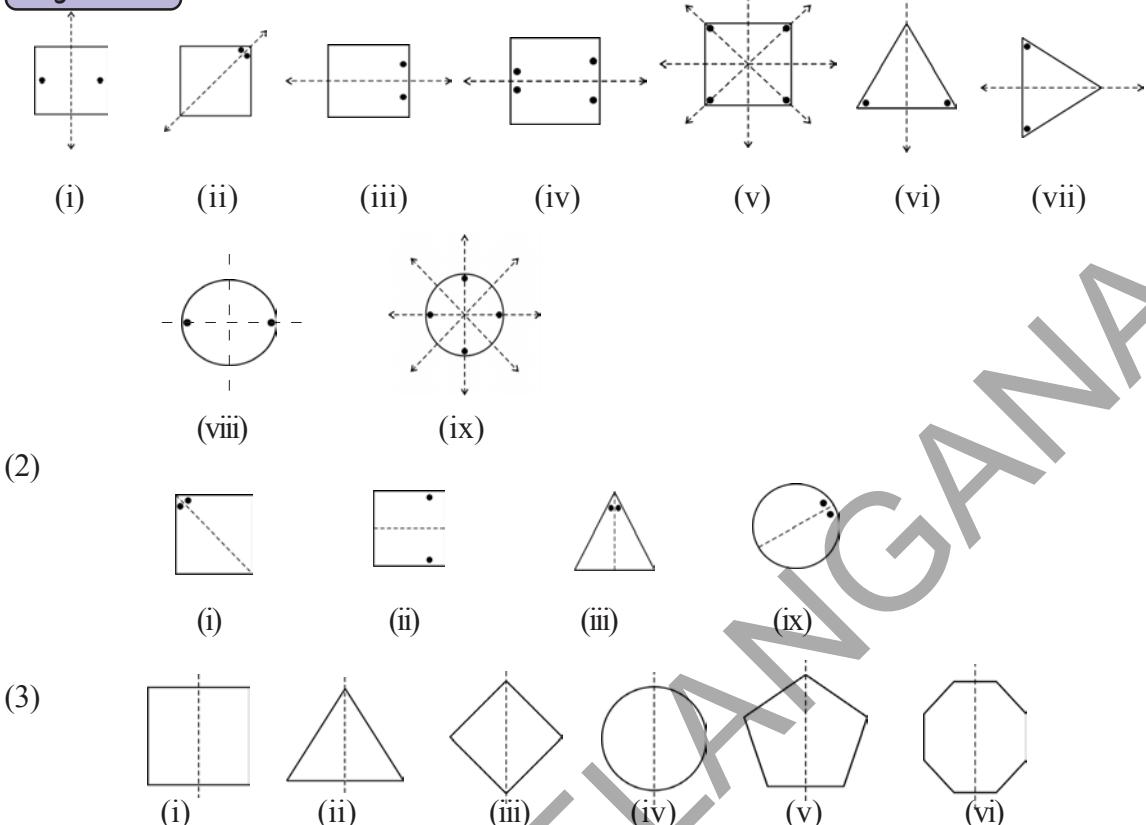
- (iv) స్కూపం / దీర్ఘచతురప్రాకార కాగితం

15. సౌష్టవం

అభ్యాసం - 1



అభ్యాసం - 2



(4) (i) అసత్యం

(5) ఆనన్న సౌష్టవ అక్షాల మధ్య కోణం $= 360/2n = 360/2 \times 4 = 360/8 = 45^{\circ}$

ఇది అన్ని క్రమ బహుభుజాలకు సత్యం అవుతుంది.

అభ్యాసం - 3

- పటాలు i, ii, iv మరియు పటం v ట్రిమణ సౌష్టవ వరిమాణాలు 1 కన్నా ఎక్కువ.
- (i) 2 (ii) 4 (iii) 3 (iv) 4 (v) 4 (vi) 5 (vii) 6 (viii) 3
- చతురస్రం అవును 90° 4
దీర్ఘచతురస్రం అవును 180° 2
సమచతుర్ఫుజం అవును 180° 2
సమచాపుత్రిభుజం అవును 120° 3
క్రమపడ్ఫుజి అవును 60° 6
వృత్తం అవును అనంతం అనంతం
అర్ధవృత్తం కాదు - -

అభ్యాసం - 4

1.	S	లేదు	0	కలదు	2
	H	కలదు	2	కలదు	2
	O	కలదు	2	కలదు	2
	N	లేదు	0	కలదు	2
	C	కలదు	1	లేదు	0

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

ప్రియమైన ఉపాధ్యాయునీ, ఉపాధ్యాయులకు,

విద్యాభివందనాలు మరియు నూతనంగా అభివృద్ధి పరచిన నూతన గణిత పార్ట్యుష్టకాలలోకి స్వీగతం .

- ప్రాథమికోన్నత స్థాయి విద్యకోసం SCF - 2011 మార్కి సూత్రాలు, గణిత ఆధార పత్రం, నిర్ఖంధ ఉచిత విద్యపూక్క చట్టం - 2009 ఆధారంగా సిలబెస్సును తయారుచేసుకొని ప్రస్తుత పార్ట్యుష్టకాలను రూపొందించారు.
- గణితంలోని వివిధ శాఖలైన అంకగడితం, బీజగడితం, రేఖాగడితం, క్షైతమితి మరియు సాంఖ్యక శాస్త్రాలకు సంబంధించిన విషయాలను 15 అధ్యాయాల్లో పొందుపరచారు.
- ఈ అధ్యాయాలు గణితంలో నిర్ధారించిన విషయ నైపుణ్యాలు, సమస్యా పరిష్కారం, హాతుకీకరణ, నిరూపణలు, వివిధ విషయాల మధ్య సంబంధాలను ఏర్పరచడం, ప్రాతినిధ్యం వంటి విద్యా ప్రమాణాలను పిల్లలు సాధించడానికి దోహదపడుతాయి.
- అమరికల పరిశీలన (observation of patterns), ఆగమనం ద్వారా సాధారణీకరించడం, అనుగమన ఆలోచనలు, తార్కిక ఆలోచనలు, వివిధ పద్ధతులలో సమస్యలను పరిష్కరించడం, ప్రశ్నించడం, పరస్పర చర్చలు, వంటి నైపుణ్యాలను విద్యార్థులలో అభివృద్ధిపరచే దిశగా అధ్యాయాలు రూపొందించారు.
- ప్రాథమిక స్థాయిలో పిల్లలు అభ్యసించిన సాముద్రాలను ఆధారంగా చేసుకొని ఉదాహరణలు, కృత్యాలు, సన్నిఖేశాలను ఈ పుస్తకంలో పొందుపరచారు. దీని వల్ల పిల్లలు ఉత్సాహంగా కృత్యాల్లో పాల్గొని గణిత అధ్యయనంలో ఆనందాన్ని పొందుతారు.
- ఈ పుస్తకంలో పొందుపరచిన విద్యా ప్రమాణాలను పిల్లలందరూ సాధించడానికి అధ్యాయాలలో సూచించిన విధంగా చర్చల్లో, కృత్యాలలో విద్యార్థులు నిరంతరం పాల్గొనేలా ఉపాధ్యాయులు కృషి చేయాలి.
- ప్రతీ అధ్యాయంలోని ప్రశ్నల గురించి పిల్లలందరూ ఆలోచించడానికి, సమాధానాలు కనుకోడానికి తగు ప్రోత్సాహం ఇవ్వాలి. ఇటువంటి ప్రశ్నలు విద్యార్థుల్లో తార్కిక, ఆగమన, నిగమన విధానాలలో ఆలోచించే విధంగా దోహదపడుతాయి.
- గణిత విషయాలను నేర్చుకోవడంలో అర్థంచేసుకోవడం, వాటిని సాధారణీకరించడం ప్రథానమైనవి. విద్యార్థులు మొదట నేర్చుకొనే విషయం ఆవశ్యకతను గుర్తించడం, తర్వాత అవగాహన చేసుకోవడం ద్వారా సమస్యలను తమకు తాముగా పరిష్కరించి అందులోని సత్యాలను సాధారణీకరించుకొంటారు. ప్రతీ అధ్యాయంలో పిల్లలు భావనలు ఏర్పరచుకొనేలా, వాటిని అర్థం చేసుకుని తదుపరి అభ్యసనంలో వినియోగించేలా ప్రతి అధ్యాయంలో దృష్టి పెట్టాలి.
- సందర్భానుసారంగా వివరణలు, పొందుపరిచిన చిత్రాలు సరైన అవగాహన కల్పించి అపోహలను తొలగించడానికి దోహదపడుతాయి.

- భావనలపై అవగాహన కల్పించిన తర్వాత వాటికి సంబంధించిన “ఇవి చేయండి”, “ప్రయత్నించండి” లాంటి అభ్యాసాలను విస్తరించిన ఇచ్చారు. “ఇవి చేయండి” అనేది రెండు మూడు భావనలు నేర్చించిన తర్వాత వెనువెంటనే అభ్యాసం కోసం ఉద్దేశించినది. వీటిని పిల్లలతో తమకు తాముగా గాని, జట్లలో గాని చేయించాలి. “ప్రయత్నించండి” అనే అభ్యాసాలు పిల్లల్లో సత్యాలకు సంబంధించిన సాధరణీకరణలు చేసుకోవడానికి, సరిచూసుకోవడానికి దోహదం చేస్తాయి. ఈ క్రమంలో అవసరం మేరకు సహాయ సహకారాలను ఉపాధ్యాయులు పిల్లలకు అందించాలి. ఇలా చేయడం వల్ల పిల్లలు ఏ మేరకు నేర్చుకొన్నారో తెలుసుకోవచ్చు.
- అధ్యాయాల్లో చివరగా పొందపరచిన “మనం నేర్చుకొన్నవి” అనే శీర్షిక కింద ఉన్న అంశాలు విద్యా ప్రమాణాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని రూపొందించారు. కాబట్టి వీటిని పిల్లలందరూ సంపూర్ణంగా సాధించాలి. ఇలా నేర్చుకొన్న నైపుణ్యాలన్నింటిని పిల్లలందరూ ప్రదర్శించగలరని నిర్ధారించుకొన్న తర్వాతనే తదుపరి అధ్యాయం ప్రారంభించాలి.
- అధ్యాయాల్లో ఇచ్చిన అభ్యాసాలతోబాటు ఉపాధ్యాయుడు కూడా మరికాన్ని సమస్యలను సాంతంగా తయారుచేసుకోవాలి. అలాగే పిల్లలు కూడా నిత్య జీవితంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను గటితాన్ని ఉపయోగించి సాధించేట్లు, సాంతంగా సమస్యలు తయారు చేసేట్లు ప్రోత్సహించాలి.
- పై అంశాల్ని విజయవంతంగా అమలు చేయడానికి ఉపాధ్యాయులు తప్పని సరిగా గటిత పుస్తకాన్ని సమూలంగా, సమగ్రంగా, విమర్శనాత్మకంగా అధ్యాయునం చేయాలి. ఇందుకోసం పుస్తకంలోని అభ్యాసాలలోని అన్ని సమస్యలను తాను చేసిచూడాలి. ఆ తర్వాతనే బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలను నిర్వహించాలి.
- ఉపాధ్యాయుల మార్గదర్శనం కోసం బోధనాభ్యసన వ్యాపోలను, ఆశించిన అభ్యసన ఘలితాలను, తరగతి వారీగా, విషయం వారీగా, సిలబన్ వారీగా కరదీపిక రూపంలో తయారుచేసి పారశాలలకు అందిష్టడం జరిగింది. ఈ కరదీపిక సహాయంతో ఉపాధ్యాయులు ఉత్తమ బోధనాభ్యసన ప్రక్రియలను నిర్వహించి తద్వారా విద్యార్థులందరూ ఆశించిన అభ్యసన ఘలితాలు సాధించేలా కృషి చేయాలి.

7వ తరగతి సిలబ్స్

సంఖ్య వ్యవస్థ (50 గంటలు)

- (i) పూర్ణ సంఖ్యలు
- (ii) భిన్నాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

- మన సంఖ్యలను తెలుసుకోవడం. అమరికలు, క్రమాల ద్వారా పూర్ణ సంఖ్యల గుణకార, భాగాహిరాలు సంపుత్త, సహచర, స్థిత్యంతర ధర్మాలు, విభాగస్యాయం – సంకలన, గుణకార తత్త్వమాంశాలు, విలోపము. (పైనేనీ అమరికలు, క్రమాలు మరియు పూర్ణాంకాల ఉదాహరణల ద్వారా). సంఖ్య ధర్మాలను సాధారణ రూపంలో ప్రకృతపరచటం. ప్రత్యుధాహారణలు (ఉదా : వ్యవకలనం వినిమయం కాదు)
- పూర్ణ సంఖ్యల చతుర్విధ ప్రక్రియలపై పద సమస్యలు

భిన్నాలు మరియు అకరణీయ సంఖ్యలు

- భిన్నాల పోలిక
- భిన్నాల గుణకారం
- Of (రాశిలో) ప్రక్రియలో భిన్నం.
- ఒక భిన్నం యొక్క వ్యక్తిష్టము మరియు దాని ఉపయోగం
- భిన్నాల భాగాహిరం
- మిక్రమ భిన్నాలపై పదసమస్యలు (నిత్య జీవిత ఉదాహరణలు)
- అకరణీయ సంఖ్యల పరిచయం (సంఖ్యాభేషపై సూచించడం)
- భిన్నానికి, అకరణీయ సంఖ్యకు గల తేడా
- అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో సూచించడం
- అకరణీయ సంఖ్యలపై పద సమస్యలు (చతుర్విధ ప్రక్రియలపై)
- దశాంశ భిన్నాల గుణకార, భాగాహిరాలు
- ప్రమాణాల మార్పిడి (మతి, ద్రవ్యరాశి)
- పదసమస్యలు (అన్ని ప్రక్రియలు)

బీజ గణితం (20 గంటలు)

ఫలితాలు
ఘూతాంకాలు
పరిచయం
బీజీయ సమాసాలు
సామాన్య
సమీకరణాలు

ఘూతాలు - ఘూతాంకాలు పరిచయం

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ నిర్వహనం ($a \in Z$ అయిన) ఘూతాంక న్యాయాలు. అమరికలు, క్రమాలను పరిశీలించుట ద్వారా సాధారణీకరించడం ఘూతాంక న్యాయాలు. $m, n \in Z$ అయినప్పుడు (i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m/a^n = a^{m-n}$ ($m-n \in N$) (iv) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ (v) సున్న ఘూతాంకం గల సంఖ్యలు; దశాంశ సంఖ్యలు ఘూత రూపంలో; పెద్ద సంఖ్యల శాస్త్రాలు రూపం.

బీజీయ సమాసాలు

- పరిచయం, సామాన్య బీజీయ సమాసాల తయారీ (ఒకటి లేదా రెండు చరరాశులలో)
- స్థిరపదము, గుణకము, ఘూతాంకాలను గుర్తించటం
- సజాతి, విజాతి పదాలు పదాల పరిమాణము (ఉదా : x^2y మొందిని. ఘూతము ; చరరాశుల సంఖ్య ≤ 2)
- బీజీయ సమాసాల సంకలనం మరియు వ్యవకలనం (గుణకాలు కేవలం పూర్ణాంశులో)

సామాన్య సమీకరణాలు

- సామాన్య రేఖీయ సమీకరణాలు వికచరరాశితో (సందర్భ సహాత సమస్యలు). కేవలం +, - ప్రక్రియలు మరియు గుణకాలు పూర్ణాంశులు.

<p>అంక గడితం</p> <p>నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు</p>	<p>నిష్పత్తి - అనుపాతం</p> <ul style="list-style-type: none"> • నిష్పత్తి - అనుపాతం (పునర్విష్టమర్గం) • ఏకవస్తుమార్గం, అనులోమానుపాతం (సొధారణీకరించడం) • శాతాలు - పరిచయం • శాతాలను 100 హరంగా గల భిన్నాలుగా అవగాహన చేసుకొనడం • దశాంశాలను, భిన్నాలను శాతాలుగా మార్చడం. శాతాలను దశాంశాలు మరియు భిన్నాలుగా మార్చడం • లాభనష్టాలలో శాతాల అనుపయోగం • బారువడ్డి (కాలము పూర్తిగా సంఘాలో మాత్రమే) లోశాతాల అనుపయోగం
<p>రేఖాగడితం</p> <p>(60 - గంటలు)</p>	<p>రేఖలు - కోణాలు</p> <ul style="list-style-type: none"> • కోణాల జతలు. (రేఖీయ, సంపూర్ణక, పూరక, ఆసన్న, శీర్షాభిముఖ కోణాల జతలు) • సమాంతర రేఖలు తిర్యగ్రేఖ ఖండించగా ధర్మాలు (ఏకాంతర, సంగత, అంతర, బాహ్య కోణాల జతలు)
<p>త్రిభుజాలు</p>	<p>త్రిభుజాలు</p> <ul style="list-style-type: none"> • త్రిభుజ నిర్వచనం • భుజాల, కోణాల ఆధారంగా త్రిభుజ రకాలు • త్రిభుజ ధర్మాలు • త్రిభుజంలో రెండు భుజాల మొత్తం మరియు బేధం. అంతర కోణాల మొత్తం (నిరూపణ భావనతో). కాగితపు మదతలతో సరిచూడటం. • సమాంతర రేఖల ధర్మాలతో నిరూపించడం (సరిచూచుట, నిరూపణల బేధం) • త్రిభుజాల బాహ్యకోణ ధర్మం
<p>త్రిభుజ సర్వసమానత్వము</p>	<ul style="list-style-type: none"> • అంచులు ఏకిభవించుట ద్వారా సర్వసమానత్వము (తపాలా బిళ్ళలు, బీడులు ఒకదానిపై ఒకటి బోల్లించడం ద్వారా) • సర్వసమానత్వ భావనను త్రిభుజం, వృత్తం వంటి జ్యైమితీయ ఆకారాలకు విస్తరించడం • సర్వసమానత్వ నియమాలు (సరిచూచుట ద్వారా) • కో.భు.కో., భు.భు.భు., భు.కో.భు., లం.క.భు సర్వసమాన ధర్మాలు పటాలతో
<p>త్రిభుజాల నిర్మాణం (అన్ని రకాలు)</p>	<p>త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినపుడు</p> <ul style="list-style-type: none"> • త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య కోణము ఇచ్చినపుడు • రెండు కోణములు మరియు వాటి మధ్య భుజం కొలతలు ఇచ్చినపుడు • ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణము, ఒక భుజం ఇచ్చినపుడు • ఆ రెండు భుజాలు, వాటి మధ్య లేని కోణం ఇచ్చినపుడు
<p>చతుర్భుజాల చతుర్భుజం</p>	<ul style="list-style-type: none"> • చతుర్భుజాల చతుర్భుజం - నిర్వచనం • చతుర్భుజం - భుజాలు, కోణాలు, కర్ణాలు • చతుర్భుజ అంతరం, బాహ్యం • కుంభాకార, పుట్టాకార ఒప్పాభుజాలు, వాటి భేదం (పటాల సహాయంతో) • అంతరకోణాల ధర్మం (సరిచూడటం ద్వారా), సమస్యలు • చతుర్భుజాల రకాలు • సమాంతర చతుర్భుజం, సమలంబ చతుర్భుజం, రాంబ్స్, దీర్ఘచతురప్రం, చతురప్రం మరియు గాలిపట ఆకారాల ధర్మాలు

	<p>సౌష్టవం</p> <ul style="list-style-type: none"> పరావర్తన సౌష్టవాన్ని జ్ఞాప్తికి తెచ్చుకోవటం భ్రమణ సౌష్టవం భావన, ద్విమితీయ పటాల భ్రమణ సౌష్టవాన్ని పరిశీలించడం (90°, 180°, 120°) సాధారణ పటాలపై 90°, 180° భ్రమణ ప్రక్రియలు పరావర్తన, భ్రమణ సౌష్టవాలు కలిగిన పటాలకు ఉండాచూరణలు. పరావర్తన, భ్రమణ సౌష్టవాలలో కేవలం ఒక సౌష్టవము కల్గిన పటాలు
	<p>త్రిమితీయ ఆకృతులను ద్విమితీయ పటాలుగా చూపటం</p> <ul style="list-style-type: none"> త్రిమితీయ ఆకృతులకు ద్విమితీయ పటాలు గేరుడం, దాగిపున్న ముఖాలను సూచించడం సమఫునం, దీర్ఘఫునం, స్వాపం మరియు శంఖుపులలో శీర్శాలు, అంచులు, ముఖాలు వల చిత్రాలను గుర్తించడం, వాతీ వాటి సంబ్యాలను లెక్కించడం పటాలను, ఆకృతులతో జతపరచడం, పేర్లు గుర్తించడం
శైలీత్రగణితం (15 గంటలు)	<ul style="list-style-type: none"> చతురస్రం, దీర్ఘ చతురస్రాల వైశాల్యం మరియు చుట్టూకొలతల పునర్ద్విష్టు, వృత్త పరిధి భావన వైశాల్యం : వైశాల్యాలను ప్రాథమిక ప్రమాణాలలో కొలిచే భావన త్రిభుజం, సమాంతర చతుర్భుజం మరియు సమ చతుర్భుజ వైశాల్యాలు దీర్ఘ చతురస్రాకార బాటల వైశాల్యాలు
దత్తాంశ నిర్వహణ (15 గంటలు)	<p>దత్తాంశం సేకరణ మరియు నిర్వహణ</p> <ul style="list-style-type: none"> అవగీర్ణిత దత్తాంశానికి అంక మధ్యమం, మధ్యగతం మరియు భాహుళకం మరియు అవి సూచించే విషయాల అవగాహన కమీస్టరేషా చిత్రాలు జంట దిమ్మె చిత్రాల నిర్మాణం రేఖాచిత్రాలు తగు సమాచారంతో

విద్యా ప్రమాణాలు

అధ్యాయాలు

విషయ వివరణ

సంభ్యా వ్యవస్థ
 • పూర్ణ సంఖ్యలు

- సమస్యా సాధన**
- పూర్ణసంఖ్యలపై చతుర్భుద్ధ ప్రక్రియలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించును.
 - పూర్ణసంఖ్యలపై పద సమస్యలను సాధించును.

- కారణాలు చెప్పడం**
- నున్నతో భాగావోరం ఎందుకు అర్థరహితమౌ వివరించును.
- నిరూపణలు చేయడం**
- పూర్ణసంఖ్యలను, సహజ సంఖ్యలతో పోల్చును, తేడాలు చెప్పును.
 - సంఖ్యాధర్మాలైన సంవృత్త, సహచర, స్థిత్యంతర మొదలైన వాటికి ఉదాహరణలు, ప్రత్యుధావరణలు ఇచ్చును.

- వ్యక్తపరచడం**
- పూర్ణసంఖ్యల ధర్మాలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచును.
 - బుణ గుర్తును వివిధ సందర్భాలలో వినియోగించును.

- సంధాన చేయడం**
- నిత్య జీవిత సందర్భాలలో పూర్ణ సంఖ్యల వినియోగాన్ని కనుగొంటారు.
 - N, W మరియు Z ల మధ్య సంబంధాన్ని అవగాహన చేసుకొనును.

- ప్రాతినిధ్య పరచడం**
- పూర్ణసంఖ్యలను సంఖ్యా రేఖలపై సూచించును.

భిన్నాలు మరియు
ఆకరణీయ
సంఖ్యలు

- సమస్యా సాధన**
- భిన్నాలపై చతుర్భుద్ధ ప్రక్రియలకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించును.
 - ఆకరణీయ సంఖ్యలపై చతుర్భుద్ధ (ప్రాథమిక) ప్రక్రియలకు సంబంధించిన పద సమస్యలను సాధించును.
 - దశాంశ సంఖ్యలకు సంబంధించి అన్ని ప్రక్రియల పై గల సమస్యలను సాధించును.
 - ప్రమాణాల పరస్పర మార్పిడి చేస్తారు.

- కారణాలు చెప్పడం**
- ఆకరణీయ సంఖ్యల, భిన్నాల తేడాలు చెప్పును.
- నిరూపణలు చేయడం**
- ఆకరణీయ సంఖ్యలలో సాంద్రత ధర్మాన్ని సమర్థించును.

- వ్యక్తపరచడం**
- ఆకరణీయ సంఖ్యల అవశ్యకతను వ్యక్తపరచును.
 - ఆకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలను సాధారణ రూపంలో వ్యక్తపరచును.

- సంధాన చేయడం**
- భిన్నాలు, ఆకరణీయ సంఖ్యలు, దశాంశ సంఖ్యల మధ్యగల సహాయంభంధ వినియోగాన్ని కనుగొనును.

- ప్రాతినిధ్య పరచడం**
- ఆకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖ పై సూచించును
 - ఆకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో సూచించును.

ఘూతాలు -
ఘూతాంకాలు

- సమస్యా సాధన**
- పెద్ద సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంక విభజన చేసి ఘూత రూపంలో ప్రాయిను.

- కారణాలు చెప్పడం**
- సంఖ్య అమరికలు, క్రమాలు, పరిశీలనల ద్వారా ఘూతాంక న్యాయాలను
- నిరూపణలు చేయడం**
- సాధారణీకరించును.

- వ్యక్తపరచడం**
- $a^x; x \in Z$ ను అవగాహన చేసుకొనును.
 - పెద్ద సంఖ్యల వినియోగంలో ఘూతాంక రూపాలను వాడును.

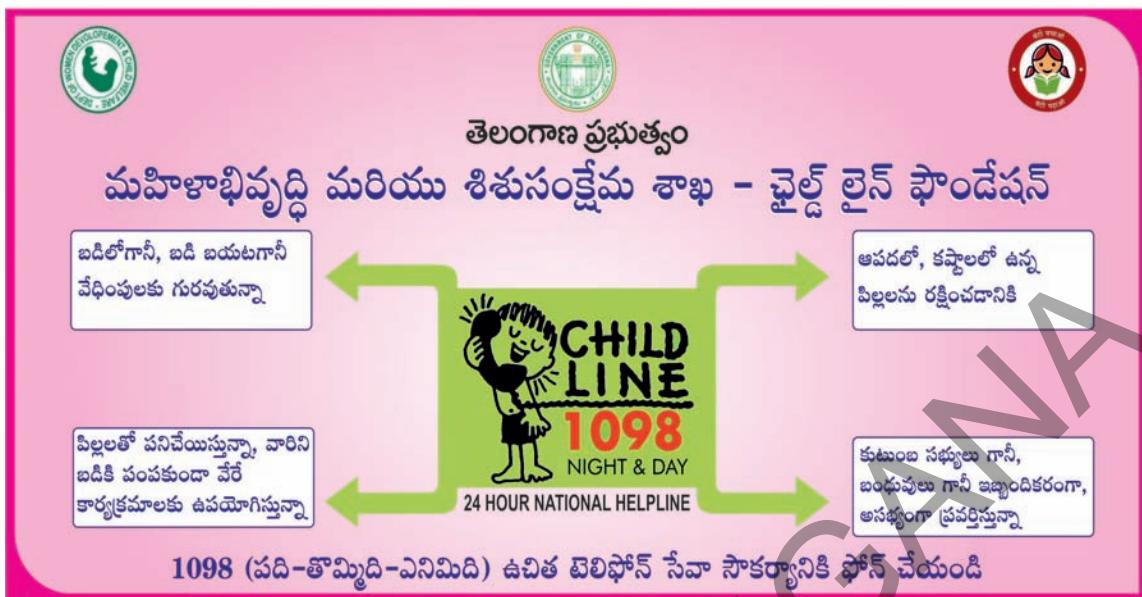
<td data-bbox="236 240 1390 1852" data-kind="parent" style="vertical-align: top; width: 15%;"></td> <td data-bbox="236 240 1390 1852" data-kind="parent"> <p>సంఘాన చేయడం</p> <ul style="list-style-type: none"> పెద్ద సంఖ్యలను ఫూతరూపంలో వ్రాయుట నందు ప్రథాన కారణాంకాల విభజనను వినియోగించును. <p>ప్రాతినిధ్య పరచడం</p> <ul style="list-style-type: none"> పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచును. </td>		<p>సంఘాన చేయడం</p> <ul style="list-style-type: none"> పెద్ద సంఖ్యలను ఫూతరూపంలో వ్రాయుట నందు ప్రథాన కారణాంకాల విభజనను వినియోగించును. <p>ప్రాతినిధ్య పరచడం</p> <ul style="list-style-type: none"> పెద్ద సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో వ్యక్తపరచును.
	<p>బీజీయ సమాసాలు</p> <p>సమస్య సాధన</p> <ul style="list-style-type: none"> బీజీయ సమాసాల పరిమాణమును కనుగొనును. పూర్వాంకాలు గుణకాలుగా గల బీజీయ సమాసాల సంకలన, వ్యవకలనాలను చేయును. ఏకచరరాశి సామాన్య సమీకరణాలకు సంబంధించిన పదసమస్యలను (కేవలం +, -) సాధించును. 	
	<p>కారణాలు చెప్పడం</p> <p>నిరూపణలు చేయడం</p> <ul style="list-style-type: none"> ఏకచరరాశి లేదా రెండు చరరాశుల బీజీయ సమాసాలను క్రమాలను అనుసరించి తయారు చేయును. 	
	<p>వ్యక్తపరచడం</p> <ul style="list-style-type: none"> ఏకచరరాశి మరియు రెండు చరరాశులు గల ఏక, ద్వి, మరియు త్రి పరిమాణ బీజీయ సమాసాల సాధారణ రూపాలను వ్రాయును. నిత్యజీవిత సమస్యలను సామాన్య సమీకరణాల రూపంలోనికి (ఏకచరరాశి గల) మార్పును. 	
	<p>సంఘాన చేయడం</p> <ul style="list-style-type: none"> బీజీయ సమాసాల సంకలన, వ్యవకలనాలలో సంవృత్తి, సహచర మరియు స్థిత్యంతర ధర్మాలను వినియోగించును. నిత్యజీవిత సమస్యల సాధనలో సామాన్య సమీకరణాల సాధనను వినియోగించును. 	
	<p>ప్రాతినిధ్య పరచడం</p> <ul style="list-style-type: none"> బీజీయ సమాసాలను ప్రామాణిక రూపంలో సూచించును. 	
<p>నిష్పత్తి - ఉపయోగాలు</p> <p>సమస్య సాధన</p> <ul style="list-style-type: none"> ఏకవస్తుమార్గం గల పదసమస్యలను సాధించును. శాతాల భావనలు గల పద సమస్యలను సాధించును. కాల పరిధి పూర్తి సంాలలో తెల్పుబడిన బారు వడ్డీ పదసమస్యలను సాధించును 		
<p>కారణాలు చెప్పడం</p> <p>నిరూపణలు చేయడం</p> <ul style="list-style-type: none"> శాతాల రూపంలోనికి మారే దశాంశాలను మరియు దశాంశాల రూపంలోనికి మారే శాతాలను పోల్చును. నిష్పత్తి, అనుపాతాల సామాన్య ధర్మాలను సూట్రికరించును. 		
	<p>వ్యక్తపరచడం</p> <ul style="list-style-type: none"> భిన్నాలను శాతరూపంలో మరియు దశాంశ రూపంలో వ్యక్తపరచును. వాని వినియోగాన్ని వివరించును. 	
	<p>సంఘాన చేయడం</p> <ul style="list-style-type: none"> లాభ-నష్టాల భావనలను నిజ జీవిత సమస్యల సాధనలో వినియోగించును. శాతాల సమస్యల సాధనలు అవగాహన చేసుకొని నిజజీవితంలో వినియోగించును. 	
	<p>ప్రాతినిధ్య పరచడం</p> <ul style="list-style-type: none"> భిన్నాలు, దశాంశాలను శాతాలలోనికి, శాతాలను భిన్న మరియు దశాంశ రూపాలలోనికి పరస్పరం మార్పు చేయును. 	

<p>సమస్య సాధన</p>	<ul style="list-style-type: none"> ఇచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజ నిర్మాణము సాధ్యమవునో కాదో కనుగొందురు. బాహ్యకోణము మరియు ఇతర కోణములలోని ఇవ్వని కోణములను కనుగొంటారు. త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ ధర్మములను పయోగించి ఇచ్చిన త్రిభుజములలోని సర్వసమాన త్రిభుజాలను గుర్తిస్తారు. ఇచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజాన్ని నిర్మిస్తారు. కోణధర్మాలను పయోగించి ఇచ్చిన సమస్యలను సాధిస్తారు. ఇచ్చిన పటమును త్రమణం చేసి కోణ సౌష్టవతను పరిశీలిస్తారు. త్రిమితీయ ఆకృతుల (ఘనం, దీర్ఘఘనం, శంఖవు, స్ఫూర్పం) యొక్క అంచులు, ముఖాలు, శీర్శాలు వలల ఆకృతులను లెక్కిస్తాడు. మరియు గుర్తిస్తారు.
<p>కారణాలు చెప్పడం</p>	<ul style="list-style-type: none"> ఇచ్చిన కోణములలో కోణీయ జతలలోని భేదాలను వివరిస్తారు.
<p>నిరూపణలు చేయడం</p>	<ul style="list-style-type: none"> సమాంతర రేఖల ధర్మాలను పయోగించి ఇచ్చిన రేఖల సమాంతర రేఖలు అని సరిచూస్తారు. పేపర్ ఫోల్డింగ్ పద్ధతి ను పయోగించి, సమాంతర రేఖల ధర్మాలను పయోగించి త్రిభుజములోని కోణాల మొత్తం ధర్మాన్ని నిరూపణలనిస్తాడు మరియు సరిచూస్తారు. బాహ్యకోణము అంతరాభిముఖ కోణముల మధ్య సంబంధమును కనుగొంటారు. కుంభాకార, పుట్టాకార చతుర్భుజాలను వర్గీకరిస్తారు. చతుర్భుజ కోణాల మొత్తమునకు సంబంధించిన ధర్మాన్ని పరిశీలించి వివరిస్తారు. పటములు, వస్తువులను పయోగించి రేఖీయ పరావర్తన సౌష్టవములను పరిశీలిస్తారు. <p>త్రిమితీయాకృతులు యొక్క అంచులు, శీర్శాలు, ముఖాలకు ఊహా చిత్రాలు గీస్తారు.</p>
<p>వ్యక్తపరచడం</p>	<ul style="list-style-type: none"> కోణీయ జతలకు ఉండాహారణలిస్తారు. భూజాలు, కోణాలు ఆధారముగా త్రిభుజములలోని రకములను వివరిస్తారు. త్రిభుజ బాహ్య కోణధర్మమును వివరిస్తారు. ద్విమితీయ ఆకృతుల సర్వసమానత్వమును ప్రశంసిస్తారు. త్రిభుజము, చతుర్భుజముల మధ్య అంతర్ సంబంధమును వివరిస్తారు. చతుర్భుజ ధర్మాల ఆధారముగా వాటి రకాలను వివరిస్తారు. పరావర్తన సౌష్టవమునకు ఉండాహారణలిస్తారు.
<p>సంధాన చేయడం</p>	<ul style="list-style-type: none"> తన పరిసరాలలోని సమాంతరతను పరిశీలిస్తారు. త్రిభుజ భావనలును పయోగిస్తారు. చతుర్భుజాన్ని నిర్వచించడానికి ప్రయత్నిస్తారు. చతుర్భుజాలను ధర్మాలు మరియు అంతర్గత సంబంధాల ఆధారముగా వర్గీకరిస్తారు.
<p>ప్రాతినిధ్య పరచడం</p>	<ul style="list-style-type: none"> కోణమును సూచించే విధానమును నేర్చుకుంటారు. సర్వసమాన త్రిభుజాలను గుర్తులతో సూచిస్తారు. త్రిమితీయ ఆకృతులను, ద్విమితీయ ఆకృతులుగా గీయగలరు.

క్లైటగణితం	సమస్య సాధన <ul style="list-style-type: none"> • చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యము, పరిధిలపై సమస్యలను సాధిస్తారు.
	కారణాలు చెప్పడం <ul style="list-style-type: none"> • చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజముల మధ్య నిరూపణలు చేయడం సంబంధములను గుర్తించి త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుకొంటారు. • త్రిభుజ వైశాల్యము సుపయోగించి సమచతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొని అవగాహన చేసుకొంటారు.
	వ్యక్తపరచడం <ul style="list-style-type: none"> • ప్రామాణిక కొలత సహాయముతో భావనను వివరిస్తారు.
	సంధాన చేయడం <ul style="list-style-type: none"> • వైశాల్యము, పరిధి భావనలను నిత్య జీవిత సమస్య సాధనలకు ఉపయోగిస్తారు. • దీర్ఘచతురస్రం, బాట వైశాల్యము భావనకు అన్వయిస్తారు. • దీర్ఘచతురస్రాకార బాట వైశాల్యములను కనుగొంటారు.
	ప్రాతినిధ్య పరచడం <ul style="list-style-type: none"> • _____
దత్తాంశ నిర్వహణ	సమస్య సాధన <ul style="list-style-type: none"> • అవగీకృత దత్తాంశమును, వగీకృత దత్తాంశముగా ప్రాస్తారు. • అవగీకృత దత్తాంశమునకు, అంకమధ్యం, మధ్యగతం, బాహుళకం కనుగొంటారు.
	కారణాలు చెప్పడం <ul style="list-style-type: none"> • అవగీకృత దత్తాంశము యొక్క సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకమును అవగాహన నిరూపణలు చేయడం చేసుకొంటారు.
	వ్యక్తపరచడం <ul style="list-style-type: none"> • అవగీకృత దత్తాంశము యొక్క సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకములను వివరిస్తారు.
	సంధాన చేయడం <ul style="list-style-type: none"> • నిత్యజీవితములో సగటు, మధ్యగతము, బాహుళకముల ఉపయోగములను అవగాహన చేసుకొందురు. • నిత్యజీవితంలో దిమ్మచిత్రాలు, వృత్తచిత్రాలు, వృత్తచిత్రాల ఉపయోగమును అవగాహన చేసుకొందురు. (బడ్జెట్, జనాభా, పంటల ఉత్పత్తి)
	ప్రాతినిధ్య పరచడం <ul style="list-style-type: none"> • అవగీకృత దత్తాంశమునకు సగటు, మధ్యగతం, బాహుళకంను సూచిస్తారు. • ఇచ్చిన దత్తాంశమును దిమ్మచిత్రాలు, వృత్తచిత్రాల ద్వారా సూచిస్తారు.

రూప

SCERT TELANGANA



@ Telangana State Police