

Problem 1:Poisson Equation

Ruipeng Li, School of Physics, 1400011365

June 9, 2017

Abstract

程序的具体说明请参见 README.md 文件，本报告主要是进行一些算法的分析以及结果的报告。首先我们给出问题的描述和分析，接着我们会分析具体的算法和表现、误差，最后我们会讨论下计算结果的物理意义。代码请参见 <https://github.com/Viciberty/CP>.

1 Analysis

我们要求的是 *Poisson* 方程的电势场。主流的做法有两大类，第一类是先对一个维度做傅里叶变换，然后求解 *ODE*，第二类是直接采用格点空间法，常见的成熟做法有有限元方法、有限差分法。在本题中，我们采用的是格点空间法，利用中心差分，然后再用迭代方法对方程组进行迭代求解。

- 先取网格，由边界条件，我们取柱坐标划分；
- 选取中心差分，用差分方程代替微分方程；
- 确认边界条件，采用电四极矩展开，并列出方程组；
- 利用超松弛迭代法对方程组进行求解；

我们的目标是尽量提高计算的精度与速度（迭代方法还有收敛速度）。

1.1 列出柱坐标下微分方程

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \\ &= -\frac{0.8}{1 + e^{(\sqrt{\rho^2+z^2}-10(1+1.0Y_2^0+0.5Y_3^0))/0.6}}\end{aligned}$$

where,

$$Y_2^0(\rho, z) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left(\frac{3z^2}{\rho^2 + z^2} - 1 \right)$$

$$Y_3^0(\rho, z) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \left(\frac{5z^3}{(\rho^2 + z^2)^{1.5}} - \frac{3z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right)$$

我们采用柱坐标划分，取 $\{r_k\}\{z_k\}(k = 0, 1, 2, \dots, N)$ 分别代表 ρ 和 z ，对此均匀划分了 N 段。

1.2 利用中心差分方法求出导数

记 $\phi_{i,j}$ 第一个下标代表 r , 第二个下标代表 z .

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right)_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j}}{(\Delta r)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j}}{(\Delta z)^2}$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta r r_i}$$

化为线性方程组

$$\left[\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2(\Delta r)r_i} \right] \phi_{i-1,j} + \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2(\Delta r)r_i} \right] \phi_{i+1,j} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \phi_{i,j-1} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \phi_{i,j+1}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{(\Delta r)^2} \right] \phi_{i,j} - \frac{0.8}{1 + e^{(\sqrt{r_i^2 + z_j^2} - 10(1 + 1.0Y_2^0 + 0.5Y_3^0))/0.6}}$$

我们将 $\phi_{i,j}$ 排为 $N_r \times N_z$ 维向量，转为一维数组储存， $(i, j) \rightarrow (i \times N_z + j)$ ，接下来我们要求解这个稠密线性方程组 $AX = b$, A 为 $(N_r * N_z)^2$ 维度。

$$A_{i \times N_z + j, (i-1) \times N_z + j} = \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2(\Delta r)r_i}$$

$$A_{i \times N_z + j, (i+1) \times N_z + j} = \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2(\Delta r)r_i}$$

$$A_{i \times N_z + j, i \times N_z + j - 1} = A_{i \times N_z + j, i \times N_z + j + 1} = \frac{1}{(\Delta z)^2}$$

$$A_{i \times N_z + j, i \times N_z + j} = -2 \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{(\Delta r)^2} \right]$$

$$b_{i \times N_z + j} = - \frac{0.8}{1 + e^{(\sqrt{r_i^2 + z_j^2} - 10(1 + 1.0Y_2^0 + 0.5Y_3^0))/0.6}}$$

A 的其余同行元素为 0

1.3 确认边界条件

1.3.1 $r = 0$ 处边界条件

方程改写为:

$$2\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -f$$

其中:

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_{0,j} = \frac{\phi_{0,j-1} + \phi_{0,j+1} - 2\phi_{0,j}}{(\Delta z)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right)_{0,j} = \frac{2\phi_{1,j} - 2\phi_{0,j}}{(\Delta r)^2}$$

联立方程知道:

$$\frac{1}{(\Delta z)^2}\phi_{0,j-1} + \frac{1}{(\Delta z)^2}\phi_{0,j+1} + \frac{4}{(\Delta r)^2}\phi_{1,j} = \left[\frac{4}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{(\Delta z)^2}\right]\phi_{0,j} - f$$

这样我们有

$$A_{0 \times N_z + j, 0 \times N_z + j - 1} = \frac{1}{(\Delta z)^2}$$

$$A_{0 \times N_z + j, 0 \times N_z + j + 1} = \frac{1}{(\Delta z)^2}$$

$$A_{0 \times N_z + j, 1 \times N_z + j} = \frac{4}{(\Delta r)^2}$$

$$A_{0 \times N_z + j, 0 \times N_z + j} = -\left[\frac{4}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{(\Delta z)^2}\right]$$

1.3.2 $z = z_{max}$ 或 $z = z_{min}$ 或 $r = r_{max}$ 处边界条件

对于远场行为, 我们可以有两种求法。第一种就是直接积分 $\int \frac{\rho(r)}{r} dV$ 利用蒙卡均匀取点近似得到 $E[\frac{\rho(r)}{r}]$ 或其他数值积分办法得到边界值, 第二种就是利用电动力学里的电多极矩展开, 展开到电四极矩。当然, 我们也可以取特殊情况, 即自然的边界条件, 认为边界上的电势已经趋于 0, 来看看大致的形状。

第一种方法: 计算二重积分

$$\int_D \frac{\rho(\vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} dV_{\xi} = \int_D \frac{\rho(\vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} \xi_r d\xi_{\varphi} d\xi_r d\xi_z$$

, 我们简单取 D 为矩形, 用计算机产生在 D 上均匀分布, 且相互独立的随机变量的序列观测值 $\{\xi_n\}$ 定义为 $\{g(\xi_j)\}; j = 1, 2, \dots$ 是独立同分布随机序列, 利用强大数律知道,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(\xi_j) = E[g(\xi_1)] = \frac{1}{m(D)} \int_D g(x) dV, a.s.$$

于是对于较大的 n ,

$$\frac{m(D)}{n} \sum_{j=1}^n g(\xi_i) \approx \int_D g(x) dx$$

在本题中,我们需要计算如下积分,另 D 取三维 $[0, r_int_Max] \times [0, 2\pi] \times [z_int_Min, z_int_Max]$

$$\frac{m(D)}{4\pi n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\vec{\xi}_i)}{|\vec{\xi}_i - \vec{r}|} \times (\xi_r)_i$$

where

$$m(D) = r_int_Max \times 2\pi \times (z_int_Max - z_int_Min)$$

$$|\vec{\xi}_i - \vec{r}| = \sqrt{\xi_r^2 + r^2 - 2r\xi_r \cos \xi_\varphi + (\xi_z - z)^2}$$

第二种方法: 计算电多极矩展开

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} \right] + \dots$$

,where

$$Q = \int_V \rho(\vec{x}') dV' = \sum_V f(\rho, z) \Delta V = \sum_V f(\rho, z) 2\pi \rho \Delta \rho \Delta z,$$

由对称性知系统只有沿 z 方向的电偶极矩

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{x}') \vec{x}' dV', p_z = \sum_V f(\rho, z) z \Delta V = \sum_V f(\rho, z) z \cdot 2\pi \rho \Delta \rho \Delta z$$

由对称性知, 系统有轴对称性, \mathbf{D} 仅有对角分量, 且 $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$, 只需计算 D_{zz}

$$D_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho(\vec{x}') dV', D_{zz} = \sum_V f(\rho, z) (3z^2 - (\rho^2 + z^2)) \Delta V = \sum_V f(\rho, z) (2z^2 - \rho^2) \cdot 2\pi \rho \Delta \rho \Delta z$$

这样, 我们知道:

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \sum_{ij} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mathbf{D} : \vec{e}_r \vec{e}_r}{2(\rho_0^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}} + \frac{p_z z_0}{(\rho_0^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{D_{zz}(z_0^2 - \frac{1}{2}\rho_0^2)}{2(\rho_0^2 + z_0^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

这样，我们通过计算电多极矩，带入如上的公式，就可以得到最后的 φ 。在编程时，我们需要做的就是积分得到电多极矩，在带入电势公式，求出边界上的电势值。但这里要注意电多极矩的展开条件 $l \ll r$ ，其中 l 为电荷尺度， r 为电荷到要计算的场点的距离，本题中即边界值的电势。

通过数值积分我们知道

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = 4551.8, \frac{p_z}{\epsilon_0} = 9528.8, \frac{D_{zz}}{\epsilon_0} = 5.8513 \times 10^5$$

以上的结论是通过上次作业用蒙卡完成的数值积分，也经过了 **matlab** 的数值模拟验证，基本是一致的。

特殊情况：

我们只要边界取得足够大，就可以做到让边界上的值趋于 0。在这样的自然边界条件下，我们可以求得电势的分布，形状应该也是大致类似的。我们可以比较与以上两种情况的差别，从而看出边界条件对整个电势求解的影响。

以上三种情况的精确程度取决于远场条件的满足情况，即我们取的边界的大小。在本题中，我们取了

$$r \in [0, 50] fm, z \in [-50, 50] fm$$

，这时电势已基本趋于 0，也不至于运算量过大。

1.4 迭代求解线性方程组

这里我们讨论经典的迭代办法，而不考虑共轭梯度法，在柱坐标下，**A** 并非一个对称正定的矩阵，故由共轭梯度法无法得到精确的解。

程序中分别实现了雅克比迭代法和超松弛迭代法，由于矩阵规模太大，验证谱半径的难度比较大，故在此略去了验证收敛性和收敛速度的论证。通过经验性的尝试测试了下松弛系数，取了一个收敛速度较为优化的值。

雅克比迭代法：

这是比较经典的一种迭代算法，迭代法收敛的充要条件是迭代矩阵 **B** 的谱半径 $\rho(\mathbf{B}) < 1$ 。 $\rho(\mathbf{B})$ 越小，收敛速度越快。

Algorithm 1 Jacobi 迭代法

- 1: **Do** $k=1, M$
 - 2: $x_i := (b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(0)}) / a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$
 - 3: **if** $(\|x - x^{(0)}\| < \epsilon)$ **and** $k \leq M$ **STOP**
 - 4: **if** $(k > M)$ **STOP Not converged at given M and ϵ'**
 - 5: $x_i^{(0)} := x_i \quad (i = 1, \dots, n)$
 - 6: **Enddo**
-

超松弛迭代法：

这是高斯-赛德尔法的推广，可以加快高斯-赛德尔的收敛速度。而其中的松弛系数 ω 是一个在 $[1, 2]$ 的一个常数，一般通过经验来确定。

Algorithm 2 逐次超松弛迭代法 (SOR)

1: **Do** $k=1, M$

$$2: \quad x_1 := (1 - \omega)x_1^{(0)} + \omega(b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(0)})/a_{11}$$

$$3: \quad x_i := (1 - \omega)x_i^{(0)} + \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(0)})/a_{ii} \quad (i = 2, \dots, n-1)$$

$$4: \quad x_n := (1 - \omega)x_n^{(0)} + \omega(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j)/a_{nn}$$

5: **if** $(\|x - x^{(0)}\| < \epsilon)$ **and** $k \leq M$ **STOP**

6: **if** $(k > M)$ **STOP** Not converged at given M and ϵ'

$$7: \quad x_i^{(0)} := x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

8: **Enddo**

2 Results

2.1 蒙卡计算的边界条件

首先，我们给出蒙卡计算的边界条件下计算出的柱坐标电势分布。可以看出，沿 r 轴方向， $z=0$ 处明显有一道沟！一道沟！一道沟！

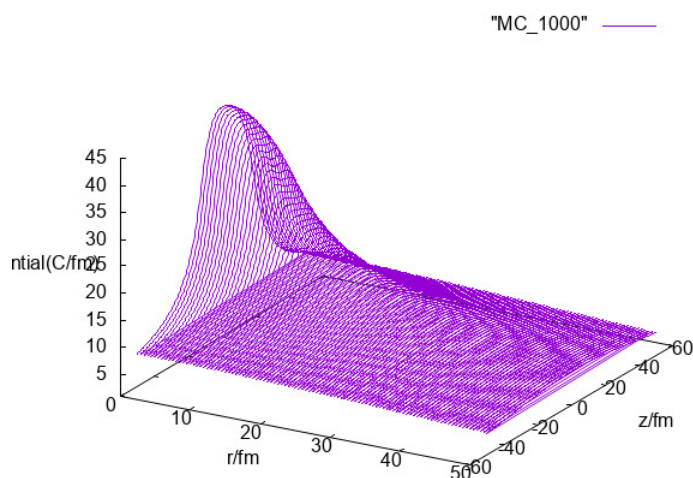


Figure 1: 蒙卡计算的边界条件下的电势分布

2.2 电多极矩展开下的边界条件

接着，我们给出电多极矩展开下的边界条件下的电荷分布。可以看出，沿 r 轴方向， $z=0$ 处明显有一道沟！一道沟！一道沟！

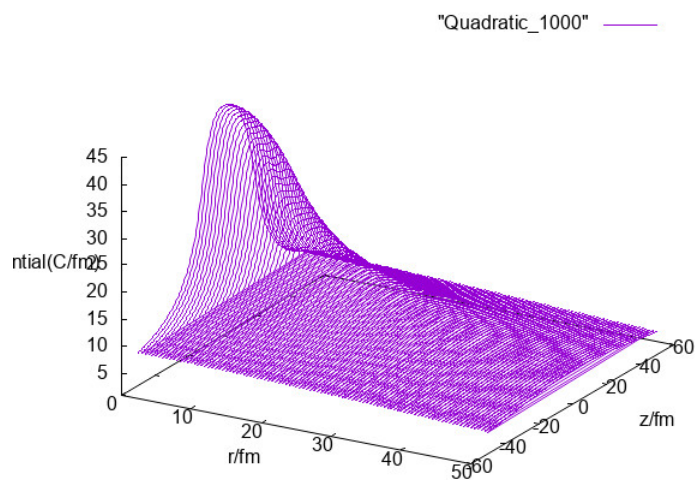


Figure 2: 电多极矩展开下的边界条件

2.3 自然边界条件

接着，我们给出自然边界计算出的电势分布。可以看出，沿 r 轴方向， $z=0$ 处明显有一道沟！一道沟！一道沟！

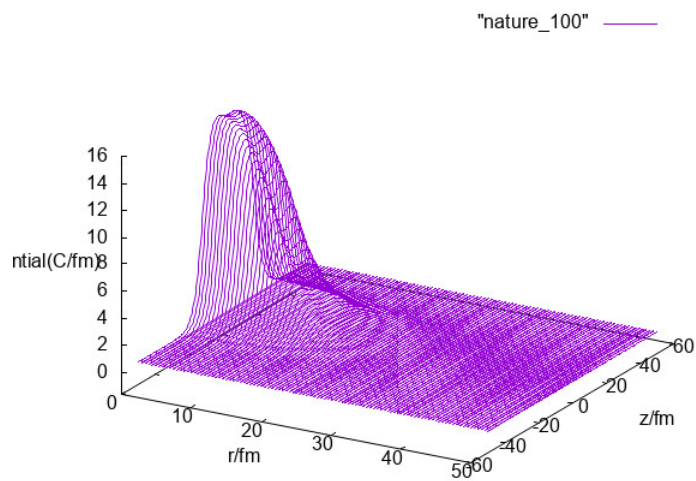


Figure 3: 自然边界下的电势分布

2.4 分析

我们对比分析了下三张图。可以看出在电多极矩展开算的边界条件下和蒙卡积分边界条件下，采用超松弛算法得到的最终电势几乎是一样的。而在边界取为 0 的时候，对电势的估计是有较大的误差的，边界的影响会相当大的影响峰值。同时也可以看出，大致形状也是基本类似的，符合我们的物理直觉。

同时采用超松弛的迭代算法，收敛速度还是可以的，在精度要求不高的前提下 (取无穷范数为 $1e-3$ 次方时)，可以在 3325 步左右得到一个收敛的电势场分布。收敛性较 **jacobi** 方法稍微好些。

物理意义：在这里我们求解了有源的静电学电势分布。这个源衰弱的特别快，我们取了一定的远场行为，求解了整个电场的分布情况。

3 Appendix: Code

```
//
//  main.cpp
//  PDE
//
//  Created by RP on 6/5/17.
//  Copyright © 2017 RP. All rights reserved.
//
using namespace std;
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
#define pi 3.1415926

#define N_r 100 // r_division
#define N_z 200 // z_division
#define r_Min 0 // r_min(fm)
#define r_Max 50 // r_max(fm)
#define z_Min -50 // z_min(fm)
#define z_Max 50 // z_max(fm)
#define epsilon 1e-20 // interval_epsilon

#define step 500 // steps
const double r_delta = r_Max*1.0/N_r;
const double z_delta = (z_Max-z_Min)*1.0/N_z;

const int r_point = N_r+1;
const int z_point = N_z+1;
double phi[r_point*z_point];
double phi_0[r_point*z_point];
```



```

double b_[r_point*z_point];
double A_[r_point*z_point][r_point*z_point];

int z_int_Min=0;
int z_int_Max=N_z;
int r_int_Min=0;
int r_int_Max=N_r;

/*****
 * Assistance Function
 *****/
double f(double r, double z)
{
    const double radius = sqrt(z*z+r*r);
    double cos = (radius==0)?0 : z / radius; // origin
    const double Y20 = 0.25*sqrt(5.0/pi)*(3*cos*cos-1);
    const double Y30 = 0.25*sqrt(7.0/pi)*(5*cos*cos*cos-3*cos);
    const double r0 = 10.0*(1+1.0*Y20+0.5*Y30);
    const double f_value = 0.8/(1+exp((radius-r0)/0.6));
    return f_value;
}

double r(int i)
{
    if (i<r_point) {return r_Min+i*r_delta;}
    return -9999999999;
}

double z(int j)
{
    if (j<z_point){return z_Min+j*z_delta;}
    return -9999999999;
}

void print(double (*f)(double,double), double r_start=r_Min,
    double z_start=0, double r_n=r_point)
// print the value when z=z_start
{
    int i = 0 ;
    for (i=0;i<r_n;i++)
        cout << f(r_start+i*r_delta , z_start)<<endl;
}

// Funtion

```

```

double MC(int i,int j);
double Quadratic(int i, int j);
double boundary(int i, int j, int method=1)
{
switch (method)
{
case 0:return MC(i,j);
case 1:return Quadratic(i,j);
case 2:return 0;
default: return -999999999;
}
}

double b(int x)
{
int j = x % z_point;
int i = x / z_point;
if ((j==0) || (j==z_point-1) || (i==r_point-1) ) return
boundary(i, j);
return -f(r(i),z(j));
}

double A(int x, int y)
{
int j = x % z_point;
int i = x / z_point;
// Inner Condition
if ( (i>0) && (i<r_point-1) && (j>0) && (j<z_point-1))
{
if (y==(i-1)*z_point+j) {return 1/(r_delta*r_delta)-1/(2*
r_delta*r(i));}
if (y==(i+1)*z_point+j) {return 1/(r_delta*r_delta)+1/(2*
r_delta*r(i));}
if (y==i*z_point+j-1) {return 1/(z_delta*z_delta);}
if (y==i*z_point+j+1) {return 1/(z_delta*z_delta);}
if (y==i*z_point+j) {return -2*(1/(z_delta*z_delta)+1/(
r_delta*r_delta));}
}
// r=0
if ((i==0) && (j>0) && (j<z_point-1))
{
if (y==j-1) return 1.0/(z_delta*z_delta);
if (y==j+1) return 1.0/(z_delta*z_delta);
if (y==z_point+j) return 4.0/(r_delta*r_delta);
}
}

```

```

        if (y==j) return -(4.0/(r_delta*r_delta)+2.0/(z_delta*
            z_delta));
    }
    // Boundary Condition
    if ((j==0) || (j==z_point-1) || (i==r_point-1) )
    {
        if (y==i*z_point+j) return 1;
    }
    return 0;
}

/*****
* Boundary Condition
*****/

void interval() // Assume an interval for integrate
{
    int i= 0 ;
    for (i=1;i<z_point/2;i++){
        if ((b(i)>0?b(i):-b(i))< epsilon) z_int_Min = i;
    }
    for (i=z_point/2;i<z_point-1;i++){
        if ((b(i)>0?b(i):-b(i))> epsilon) z_int_Max = i+1;
    }
    for (i=z_point/2;i<((z_point-1)*r_point;i+=z_point){
        if ((b(i)>0?b(i):-b(i))> epsilon) r_int_Max = i/z_point
            +1;
    }
    cout<< z_int_Min<<" "<<z_int_Max<<" "<<r_int_Max<<endl;
    cout<<z(z_int_Min)<<" "<<z(z_int_Max)<<" "<<r(r_int_Max)<<
        endl;
}

double random(double start , double end)
{
    return start+(end-start)*rand()/(RAND_MAX );
}

double MC(int i,int j)//r(i),z(j) boudndary condition with MC
{
    const int N=1000000;

```

```

double D = r(r_int_Max) * 2.0 * pi * (z(z_int_Max) - z(
    z_int_Min));
int count;
double sum=0;
double xi_r, xi_z, xi_phi, distance;
srand(unsigned(time(0)));
for (count=0; count<N; count++)
{
    xi_r = random(0, r(r_int_Max));
    xi_phi = random(0, 2*pi);
    xi_z = random(z(z_int_Min), z(z_int_Max));
//    cout<<xi_r<<" "<<xi_phi<<" "<<xi_z<<endl;
    distance = sqrt(xi_r*xi_r+r(i)*r(i)-2*r(i)*xi_r*cos(
        xi_phi)+(xi_z-z(j))*(xi_z-z(j)));
    sum+= f(xi_r, xi_z)*1.0/distance * xi_r;
}
return sum*1.0*D/N/4/pi;
}

double Quadratic(int i, int j) // Multiple moment expansion
{
    double varphi_0, varphi_1, varphi_2;
    varphi_0 = 4551.8/sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j));
    varphi_1 = 9528.8*z(j)/(sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j))*sqrt(r(i)*r(
        i)+z(j)*z(j))*sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j)));
    varphi_2 = 585130*(z(j)*z(j)-0.5*r(i)*r(i))/(2*(sqrt(r(i)*r(i)
        +z(j)*z(j))*sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j))*sqrt(r(i)*r(i)+z(j)
        *z(j)))*(sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j))*sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j)
        ))*sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j)))*(sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j))*
        sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j))*sqrt(r(i)*r(i)+z(j)*z(j))));
    return (varphi_0+varphi_1+varphi_2)/(4*pi);
}

/*****
* Linear Equation Solution
*****/
double norm(int n=-1) // n-norm
{
    int count;
    double sum=0;
    for (count=0; count<z_point*r_point; count++)
    {
        sum = ((phi_0[count]-phi[count])*(phi_0[count]-phi[count]
            )>sum)?(phi_0[count]-phi[count])*(phi_0[count]-phi[
                count]):sum;
    }
}

```

```

    }
    return sqrt(sum);
}

```

```

double Jaccobi(int M, double e=1e-3)
{
    int count=0;
    int i,j=0;
    double sum=0;
    while (count<M)
    {
        for (i=0;i<r_point*z_point;i++){
            sum=0;
            for (j=0;j<r_point*z_point;j++){
                if (i!=j) sum+=A_[i][j]*phi_0[j];
            }
            phi[i]=(b_[i]-sum)/A_[i][i];
        }
        if (norm(2)<e) {cout<<"success!"<<endl; break;}
        for (i=0;i<r_point*z_point;i++){
            phi_0[i] = phi[i];
        }
        count++;
    }
    return 0;
}

```

```

double SOR(int M, double omega=1.1, double e=1e-3)
{
    int count=0;
    int tmp,i,j=0;
    double sum=0,sum2=0;
    while (count<M)
    {
        for (i=0;i<r_point*z_point;i++){
            sum=sum2=0;
            if (i==0)
            {
                for (j=1;j<r_point*z_point;j++) sum+=A_[i][j]*
                    phi_0[j];
                phi[i]=(1-omega)*phi_0[i]+omega*(b_[i]-sum)/A_[i][i];
            }
            else if (i==r_point*z_point-1)
            {

```

```

        for (j=0;j<r_point*z_point-1;j++) sum+=A_[r_point
            *z_point-1][j]*phi[j];
        phi[i]= (1-omega)*phi_0[i]+omega*(b_[i]-sum)/A_[i
            ][i];
    }
    else // 其他
    {
        for (j=0;j<i;j++) sum+=A_[i][j]*phi[j];
        for (j=i+1;j<r_point*z_point;j++) sum2+=A_[i][j]*
            phi_0[j];
        phi[i]=(1-omega)*phi_0[i]+omega*(b_[i]-sum-sum2)/
            A_[i][i];

    }

}

if (norm(2)<e) {cout<<"success!"<<endl; break;}
for (i=0;i<r_point*z_point;i++)
{
    phi_0[i] = phi[i];
}
count++;
}
return 0;
}

/*****
* Main Procedure
*****/

int main(int argc, const char * argv[]) {
    int i,j = 0 ;

// Initialization
    for (i=0;i<r_point*z_point;i++){
        phi[i]=0;
        phi_0[i]=0;
        b_[i]=b(i);
        for (j=0;j<r_point*z_point;j++) A_[i][j]=A(i,j);
    }

/*
// test linear equation solution!

```

```

    for (i=0;i<r_point*z_point;i++){
        phi[i]=0;
        phi_0[i]=0;
        b[i]=0;
        for (j=0;j<r_point*z_point;j++) A[i][j]=0;
    }
    b_0=b_1=0;
    b_2=b_3=1;
    A_0[0]=A_1[1]=A_2[2]=A_3[3]=4;
    A_0[0][1]=A_0[0][2]=A_1[1][0]=A_1[1][3]=A_2[2][0]=A_2[2][3]=A_
        [3][1]=A_3[3][2]=-1;

*/

//    interval();
//    cout<<"r="<<r(0)<<" z="<<z(200)<<" "<<MC(1,200)<<endl;
//    for (i=0;i<r_point;i++)
//        cout<<b(i*z_point+1)<<endl;

// Execution and Output
//    Jaccobi(step);
//    SOR(step);

    for (i=0;i<r_point;i++)
    {
        for (j=0;j<z_point;j++) cout<<r(i)<<" "<<z(j)<<" "<<phi[i
            *z_point+j]<<endl;
    }

    //    cout << "Hello , World!\n";
    return 0;
}

```