时间序列算法

Time Series Algorithms

Mr. Black

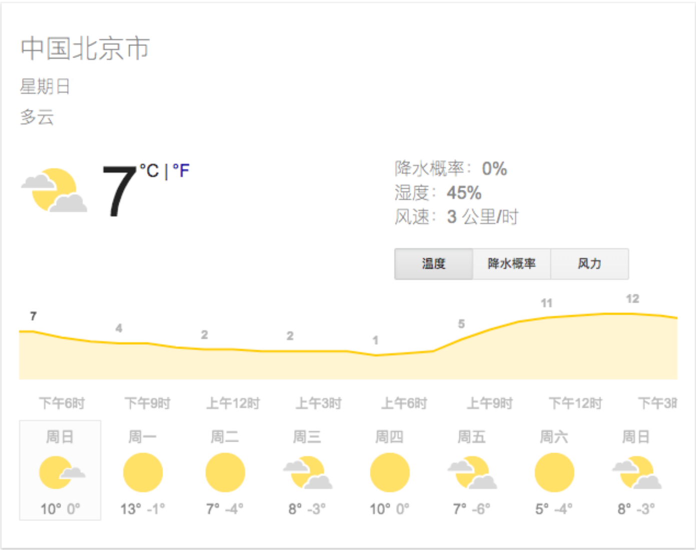
目录

- 时间序列
- ARIMA模型
- 季节性分析

时间序列

时间序列

时间序列是现实生活中经常会碰到的数据形式。例如北京市连续一年的日平均气温、某股票的股票价格、京东上某件商品的日销售件数等等。时间序列分析的的目的是挖掘时间序列中隐含的信息与模式，并借此对此序列数据进行评估以及对系列的后续走势进行预测。



统计量

假设存在一个时间序列：$\{Y_t | t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

均值定义为：$\mu_t = E\left(Y_t\right)$

方差定义为：$\sigma_t^2 = E\left(\left(Y_t - \mu_t\right)^2\right)$

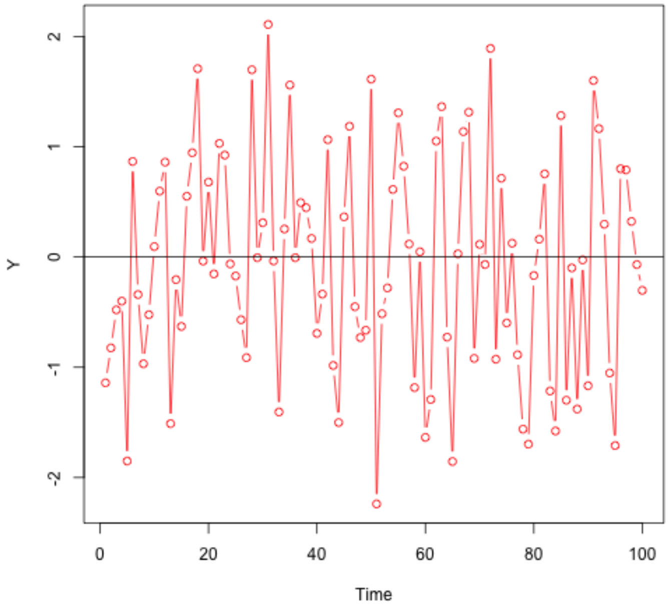
自协方差定义为：$\gamma_{t,s} = Cov\left(Y_t, Y_s\right) = E\left(\left(Y_t - \mu_t\right)\left(Y_s - \mu_s\right)\right)$

自相关系数定义为：$\rho_{t,s} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}}}$

如果忽略元素来自时间序列这一事实，各统计量的意义与普通的统计学中无异。

白噪声

考虑一个时间序列，其中每一个元素为独立同分布变量，且均值为0。这种时间序列叫做白噪声。之所以叫这个名字，是因为对这种序列的频域分析表明其中平等的包含了各个频率，和物理中的白光类似。



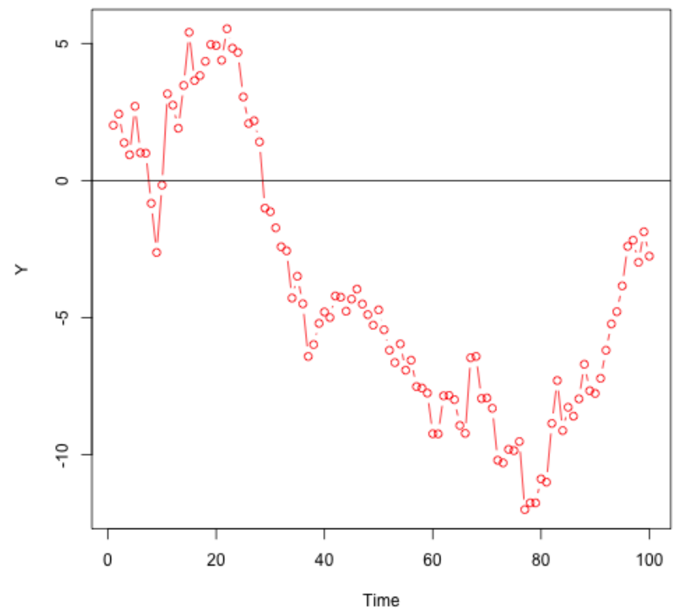
每个元素服从 $N(0,1)$，均值 $\mu_t = 0$，方差 $\sigma_t^2 = 1$。每个元素独立，对于任何 $t \neq s$， $\gamma_{t,s} = 0$， $\rho_{t,s} = 0$。

我们一般用e表示白噪声，将白噪声序列写作：

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_t, \ldots\}$$

随机游走

考虑一个时间序列，在 t时刻的值是白噪声前 t个值之和，设 $\{e_1, e_2, \ldots, e_t, \ldots\}$ 为标准正态的白噪声，则：



$$
\begin{aligned}
Y_1 &= e_1 \\
Y_2 &= e_1 + e_2 \\
&\vdots \\
Y_t &= e_1 + e_2 + \ldots + e_t \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

均值： $\mu_t = E\left(e_1 + \ldots, + e_t\right) = E\left(e_1\right) + \ldots + E\left(e_t\right) = 0$

方差： $\sigma_t^2 = Var\left(e_1 + \ldots + e_t\right) = Var\left(e_1\right) + \ldots + Var\left(e_t\right) = t\sigma^2$

从统计上可以看到，随机游走的“趋势性”实际是个假象，因为其均值函数一直是白噪声的均值，不存在偏离的期望。但方差与时间呈线性增长并且趋向于无穷大，这意味着只要时间够长，随机游走的序列值可以偏离均值任意远，但期望永远在均值处。物理与经济学中很多现象被看做是随机游走，例如分子布朗运动，股票的价格走势等。

平稳性

平稳性是时间序列分析中很重要的一个概念。一般的，我们认为一个时间序列是平稳的，如果它同时满足一下两个条件：

1. 均值函数是一个常数函数
2. 自协方差函数只与时滞有关，与时间点无关

一般的时间序列分析往往针对平稳序列，对于非平稳序列会通过某些变换将其变为平稳的。

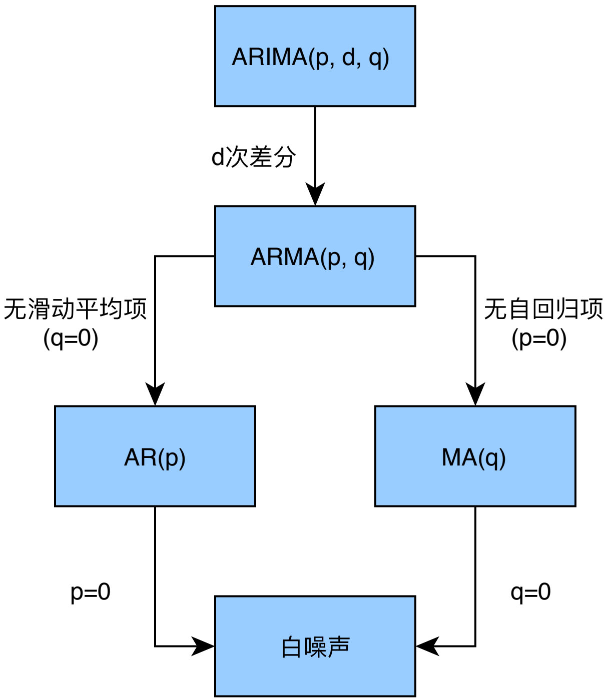
ARIMA模型

ARIMA模型

ARIMA模型（Autoregressive Integrated Moving Average model），差分整合移动平均自回归模型，又称整合移动平均自回归模型（移动也可称作滑动），时间序列预测分析方法之一。

ARIMA (p, d, q)中，AR是自回归，p为自回归项数；MA为滑动平均，q为滑动平均项数，d为使之成为平稳序列所做的差分次数（阶数）。

图中自顶向下越来越特化，而自底向上则越来越泛化。



AR模型

具有如下结构的模型为 p阶自回归模型，记为 $AR\left(p\right)$：

$$Y_t = e_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p}$$

$AR\left(p\right)$模型有三个限制条件：

1. $\phi_p \neq 0$，这个限制条件可以保证模型的最高阶数为 p；
2. $e_t \sim N\left(0, \sigma_t^2\right)$，这个限制条件要求随机干扰序列 e_t是均值为零的白噪声序列。
3. $E\left(Y_s e_t\right) = 0, \forall s < t$，这个条件限制当前的随机干扰与过去的数据序列值无关。

通常上述三个条件为AR模型的默认条件，因此常将 $AR\left(p\right)$模型简记为：

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + e_t$$

MA模型

具有如下结构的模型为 q阶滑动平均模型，记为 $MA\left(q\right)$：

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

$MA\left(q\right)$模型有两个限制条件：

1. $\theta_q \neq 0$，这个限制条件可以保证模型的最高阶数为 q；
2. $e_t \sim N\left(0, \sigma_t^2\right)$，这个限制条件要求随机干扰序列 e_t是均值为零白噪声序列。

通常上述两个条件为MA模型的默认条件，因此常将 $MA\left(q\right)$模型简记为：

$$Y_t = e_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{t-i}$$

ARMA模型

如果一个时间序列兼有AR和MA部分，并且是平稳的，则构成ARMA模型。一般$ARMA\left(p,q\right)$的表达式为：

$$Y_t = e_t + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j e_{t-j}$$

令：

$$\Phi\left(L\right) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$$

$$\Theta\left(L\right) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q$$

则上式可简写为：

$$\Phi\left(L\right) Y_t = \delta + \Theta\left(L\right) e_t$$

其中， L称之为滞后算子。

ARIMA模型

ARIMA和ARMA的区别就是，将公式中 Y_t替换为差分算子，即：

$$\Phi\left(L\right)\Delta^{d}Y_t=\delta+\Theta\left(L\right)e_t$$

差分算子为：

$$\begin{aligned}
\Delta Y_t &= Y_t-Y_{t-1}=Y_t-LY_t=\left(1-L\right)Y_t \\
\Delta^2 Y_t &= \Delta Y_t-\Delta Y_{t-1}=\left(1-L\right)Y_t-\left(1-L\right)Y_{t-1}=\left(1-L\right)^2Y_t \\
\Delta^d Y_t &= \left(1-L\right)^dY_t
\end{aligned}$$

参数优化：

1. 确定差分阶数 d，从而保证差分后的时间序列是平稳的。
2. 确定AR和MA模型的参数 p和 q，例如AIC等。

ARIMA模型

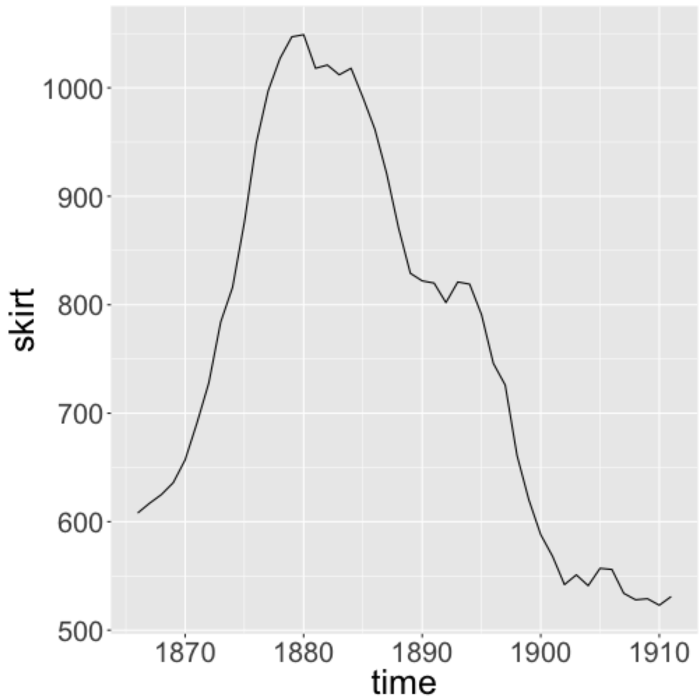
skirts.dat数据记录了1866年到1911年每年女人们裙子的直径：

```r
skirts <- read_csv(
    '../Data/skirts.dat',
    skip = 4)

skirts_ts <- ts(skirts,
    start = c(1866))

skirts_df <- data.frame(
    time = time(skirts_ts),
    skirt = unname(skirts)
)

ggplot(skirts_df,
       aes(time, skirt)) +
    geom_line()
```



ARIMA模型

```
auto.arima(y, d = NA, D = NA, max.p = 5, max.q = 5, max.P = 2,
  max.Q = 2, max.order = 5, max.d = 2, max.D = 1, start.p = 2,
  start.q = 2, start.P = 1, start.Q = 1, stationary = FALSE,
  seasonal = TRUE, ic = c("aicc", "aic", "bic"), stepwise = TRUE,
  trace = FALSE, approximation = (length(x)>150 | frequency(x)>12),
  truncate = NULL, xreg = NULL, test = c("kpss", "adf", "pp"),
  seasonal.test = c("ocsb", "ch"), allowdrift = TRUE,
  allowmean = TRUE, lambda = NULL, biasadj = FALSE,
  parallel = FALSE, num.cores = 2, x = y, ...)
```

- p, q, d, P, Q, D为ARIMA参数。
- ic为定阶方法。
- seasonal为是否使用季节性ARIMA模型。
- trace为是否显示模型选择过程。

ARIMA模型

```r
library(forecast)
skirts_arima <- auto.arima(skirts_ts, seasonal = F, trace = T)
```

```
##
##  ARIMA(2,2,2)                    : Inf
##  ARIMA(0,2,0)                    : 393.6216
##  ARIMA(1,2,0)                    : 391.6212
##  ARIMA(0,2,1)                    : 392.0664
##  ARIMA(2,2,0)                    : 393.9273
##  ARIMA(1,2,1)                    : 393.9276
##  ARIMA(2,2,1)                    : Inf
##
##  Best model: ARIMA(1,2,0)
```

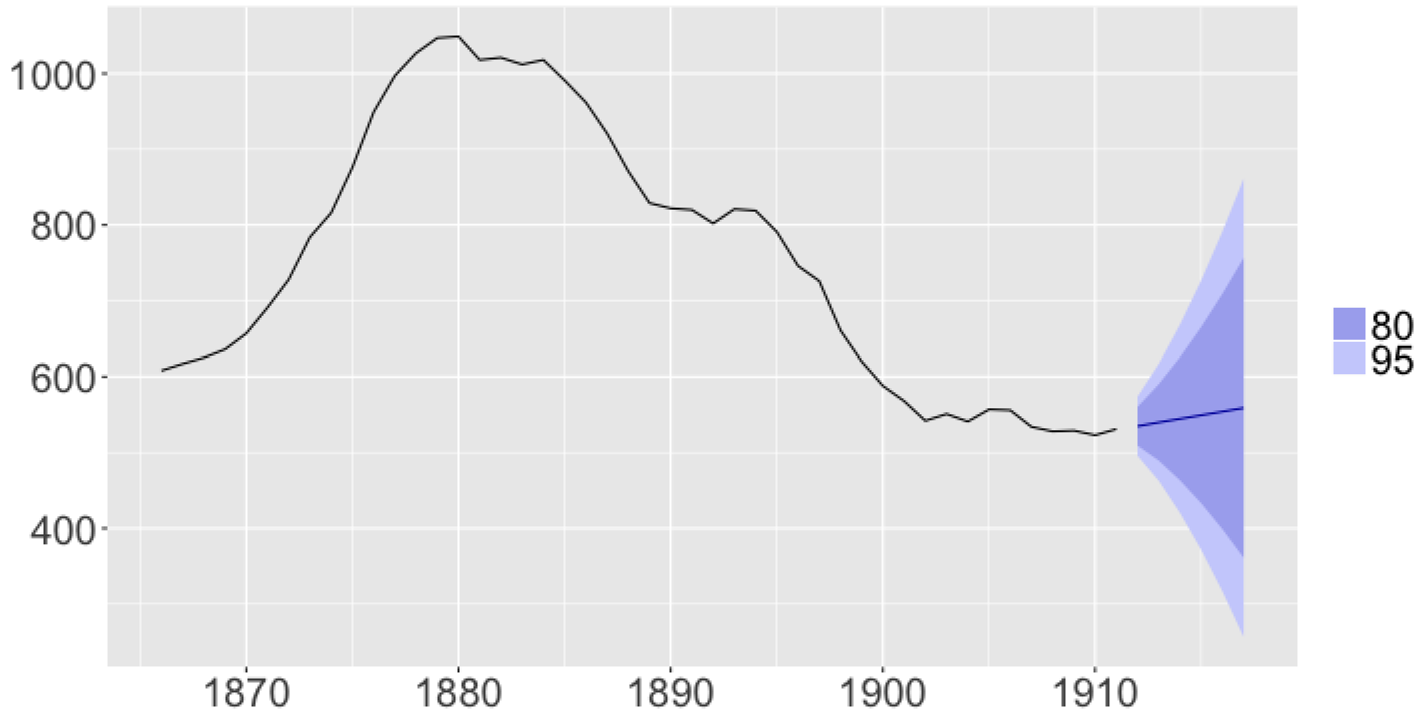
ARIMA模型

```
forecast(skirts_arima, h=6)
```

```
##      Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
## 1912       534.8045 509.2442 560.3648 495.7134 573.8956
## 1913       539.8663 489.4465 590.2861 462.7558 616.9767
## 1914       544.5513 463.3459 625.7567 420.3583 668.7442
## 1915       549.3492 433.1138 665.5846 371.5825 727.1159
## 1916       554.1133 398.8886 709.3379 316.7177 791.5089
## 1917       558.8875 361.1287 756.6463 256.4415 861.3335
```

ARIMA模型

```
skirts_arima %>% forecast(h=6) %>% autoplot(lim.size = 3) +
    theme(text = element_text(size=25)) +
    theme(title = element_blank())
```



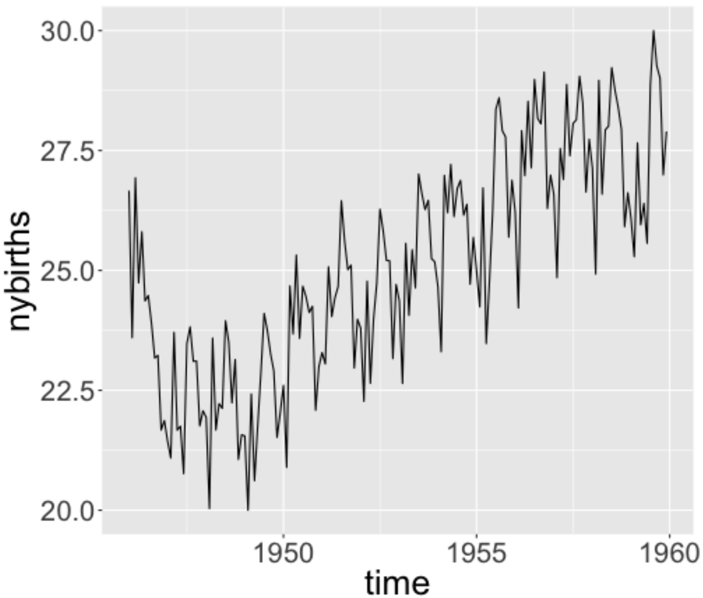
季节性分析

季节性分析

一个季节性时间序列包含一个趋势部分，一个季节性部分和一个不规则部分。分解时间序列就意味着要把时间序列分解称为这三个部分，也就是估计出这三个部分。

`nybirths.dat`数据记录了从1946年1月到1959年12月的纽约每月出生人口数量，纽约每月出生人口数量是在夏季有峰值、冬季有低谷的时间序列。

```
nybirths <- read_csv(
    '../Data/nybirths.dat',
    col_names = F)
nybirths_ts <- ts(nybirths,
    frequency = 12,
    start = c(1946, 1))
nybirths_df <- data.frame(
    time = time(nybirths_ts),
    nybirths=unname(nybirths))
ggplot(nybirths_df,
       aes(time, nybirths)) +
    geom_line()
```



季节性分析

利用滑动平均进行季节性分解:

```
decompose(x, type = c("additive", "multiplicative"), filter = NULL)
```

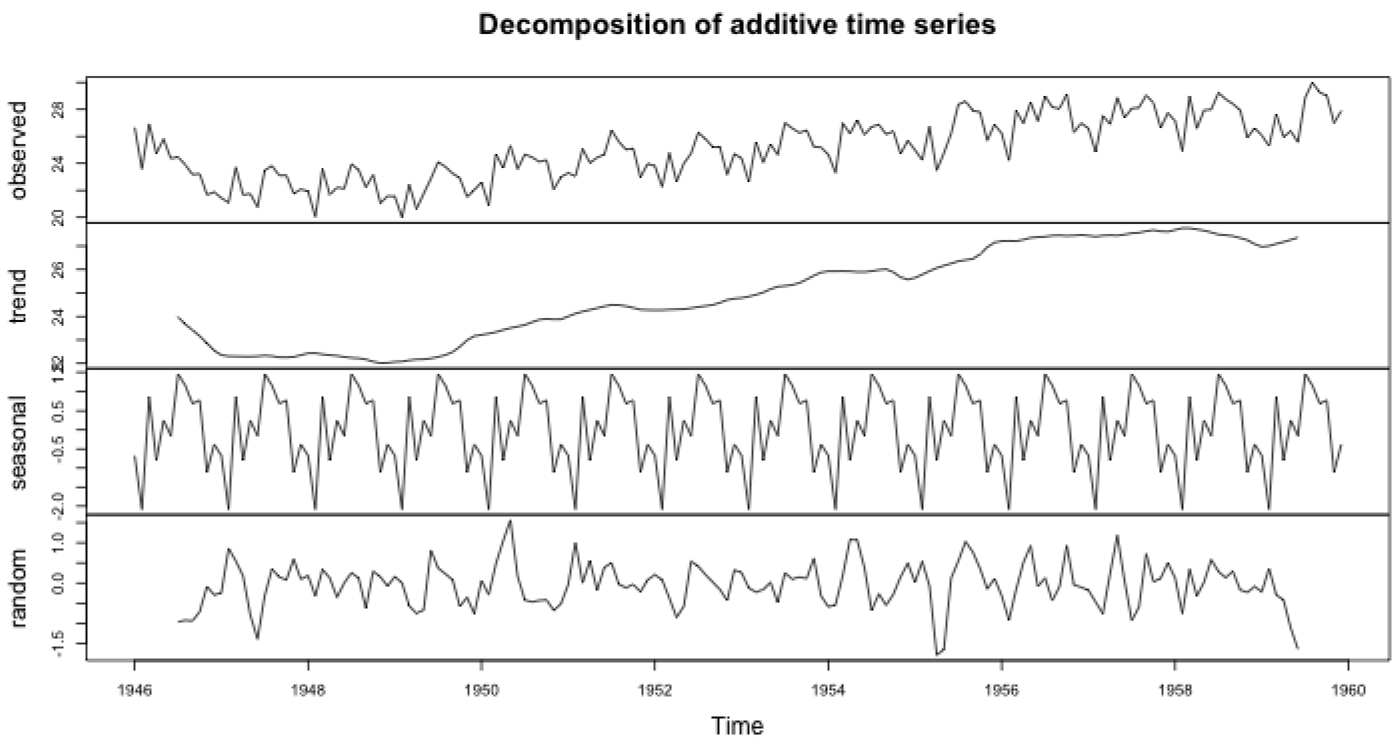
- x为时间序列
- type为时间序列类型，additive为相加，multiplicative为相乘。

利用Loess进行季节性分解:

```
stl(x, s.window, s.degree = 0, t.window = NULL, t.degree = 1,
    l.window = nextodd(period), l.degree = t.degree,
    s.jump = ceiling(s.window/10), t.jump = ceiling(t.window/10),
    l.jump = ceiling(l.window/10), robust = FALSE,
    inner = if(robust) 1 else 2, outer = if(robust) 15 else 0,
    na.action = na.fail)
```

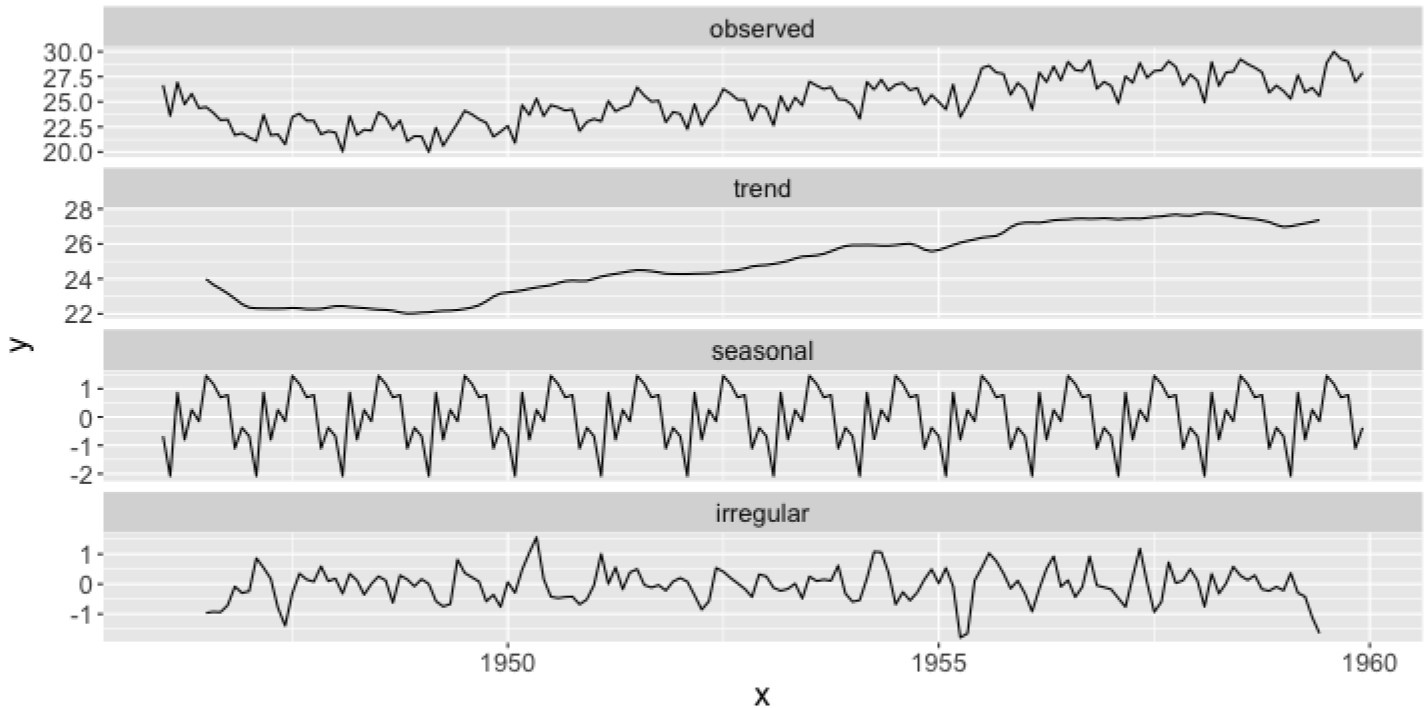
季节性分析

```
nybirths_components <- decompose(nybirths_ts)
plot(nybirths_components)
```



季节性分析

```r
library(ggseas)
ggsdc(nybirths_df, aes(time, nybirths), method='decompose') +
    geom_line()
```



其他时间序列分析工具

- 经验模态分解
  - 用于处理非平稳序列
  - R包：hht, Rlibeemd
- 深度学习
  - RNN，LSTM
  - R包：CNTK-R, Keras
- prophet
  - Fackbook出品，值的信赖
  - 更适用于工业界

Thanks