DM1. Robotique mobile.

Victoria Nguyen
28604687

$R_0 : \{O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z}\}$

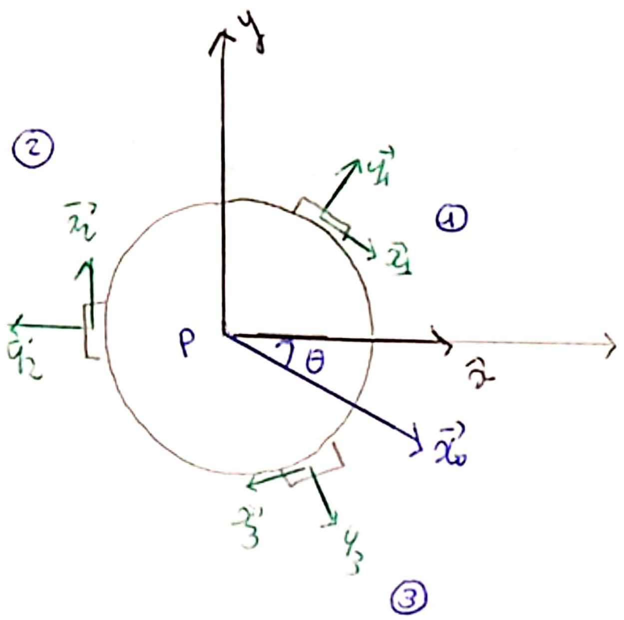
$R : \{P, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

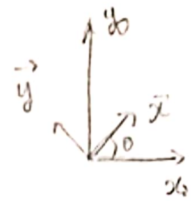
r : rayon roue

C_i : centre roue i

$PC_i = \ell$

$\theta = (\vec{x_0}, \vec{x})$





$\hookrightarrow R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Il n'y a aucune contrainte de non-holonomie sur le robot : en effet, il peut se déplacer dans toute direction du plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ et tourner librement selon $\vec{z}$.

2) Soit $\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ la vitesse du robot dans R_0, $v = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ la vitesse dans R.

On a $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$ et on cherche $\dot{\xi} = f(\varphi)$. Le robot possède 3 roues suédoises donc on peut écrire les contraintes cinématiques sur chaque roues :

Roue 1

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = (\widehat{\vec{PC_1}, \vec{y_1}}) = 0 \\ \alpha = (\widehat{\vec{x}, \vec{PC_1}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ donc on peut écrire d'après le cours que

$$u\sin(\alpha+\beta+\gamma) - v\cos(\alpha+\beta+\gamma) - l\dot{\theta}\cos(\beta+\gamma) - r\dot{\varphi}_1\cos(\gamma) = 0$$

soit $u\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - v\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - l\dot{\theta}\cos(0) - r\dot{\varphi}_1\cos(0) = 0$

soit $\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{v}{2} - l\dot{\theta} = r\dot{\varphi}_1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = [r]\,\dot{\varphi}_1 \qquad (1)}$$

Roue 2

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = (\widehat{\vec{PC_2}, \vec{y_2}}) = 0 \\ \alpha = (\vec{x}, \vec{PC_2}) = \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$u\sin(0) - v\cos(\pi) - l\dot{\theta}\cos(0) - r\dot{\varphi}_2\cos(0) = 0$$

soit $+v - l\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_2 = 0$

soit
$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = [r]\,\dot{\varphi}_2 \qquad (2)}$$

Roue 3

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = (\widehat{\vec{PC_3}, \vec{y_3}}) = 0 \\ \alpha = (\widehat{\vec{x}, \vec{PC_3}}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow u\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - v\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - l\dot{\theta}\cos(0) - r\dot{\varphi}_3$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{v}{2} - l\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_3$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = [r]\,\dot{\varphi}_3 \qquad (3)}$$

(1), (2) et (3) donnent

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l \\ 0 & -1 & -l \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 & -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}$$

qu'on peut écrire comme

$$J_A u = J_B \dot{\varphi} \quad , \text{avec } J_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\ell \\ 0 & 1 & -\ell \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\ell \end{bmatrix} \text{ et } J_B = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

Soit $J_A R(\theta) \dot{\xi} = J_B \dot{\varphi}$

soit $\dot{\xi} = R(\theta)^{-1} J_A^{-1} J_B \dot{\varphi}$

$\dot{\xi} = R(\theta)^{-1} J \dot{\varphi}$

avec $\boxed{J = J_A^{-1} J_B}$

3) La matrice J vaut donc

$$J = J_A^{-1} J_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -\frac{1}{3\ell} & -\frac{1}{3\ell} & -\frac{1}{3\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ -r/3 & 2r/3 & -r/3 \\ -r/3\ell & -r/3\ell & -r/3\ell \end{bmatrix}$$

4) Si $t = t_i$, $\theta = 0$, alors R_0 et R sont alignés.

donc $R(\theta = 0) = I_3$ donc $\dot{\xi} = J\dot{\varphi}$. Si $\dot{\varphi} = [4\ 2\ 1]^T$, alors

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ -r/3 & \frac{2r}{3} & -r/3 \\ -\frac{r}{3\ell} & -\frac{r}{3\ell} & -\frac{r}{3\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sqrt{3} \\ -r/3 \\ -\frac{7r}{3\ell} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \vec{x_0} \\ \leftarrow \vec{y_0} \\ \leftarrow \vec{z_0} \end{matrix}$$

donc le châssis est en rotation selon $-\vec{z_0}$ et avance dans la direction $r\sqrt{3}\,\vec{x_0} - \frac{r}{3}\vec{y_0}$

- si $\dot{\varphi} = [1 \quad 2 \quad 1]^t$, alors

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ -r/3 & +\frac{2r}{3} & -r/3 \\ -r/3l & -r/3l & -r/3l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2r}{3} \\ -\frac{4r}{3l} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{x_0} \\ \leftarrow \vec{y_0} \\ \leftarrow \vec{z_0} \end{array}$$

donc le chassis tourne selon $-\vec{z_0}$ et avance selon $+\vec{y}$

- si $\dot{\varphi} = [1 \quad 2 \quad 3]^T$, alors

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ -r/3 & 2r/3 & -r/3 \\ -r/3l & -\frac{r}{3l} & -r/3l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{3}r}{3} \\ 0 \\ \frac{2r}{l} \end{bmatrix}$$

donc le chassis tourne selon $+\vec{z_0}$ et avance selon $-\vec{x_0}$

5) $\theta = 0$

- pour une translation pure selon $\vec{x_0}$, il faut que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ donc on doit avoir

$$J\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{r\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ -r/3 & 2r/3 & -r/3 \\ -r/3l & -r/3l & -r/3l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ \frac{r}{3}\left[-\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3\right] \\ -\frac{r}{3l}\left[+\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne $\begin{cases} \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 = 0 & (1) \\ -\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) + (2) \\ 3\dot{\varphi}_2 = 0 \quad \text{donc } \dot{\varphi}_2 = 0 \\ \dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_3 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\dot{\varphi}_2 = 0 \text{ et } \dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_3}$

et $\dot{x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r \dot{\varphi}_1 \rightarrow$ même signe que $\dot{\varphi}_1$

• Pour une translation pure selon $\vec{y}$, on doit avoir.

$$\dot{\varepsilon} = J\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ \frac{r}{3}\left[-\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3\right] \\ -\frac{r}{3l}\left[\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc on doit avoir

$$\Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 = -2\dot{\varphi}_1 \end{array}} \right. \quad , \text{ et } \dot{y} = \frac{r}{3}\left[-\dot{\varphi}_1 - 4\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1\right] = -2r\dot{\varphi}_1$$

le robot avancera selon le signe de $\dot{\varphi}_1$

• Pour une rotation pure, alors

$$\dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)\frac{r\sqrt{3}}{3} \\ \frac{r}{3}\left[-\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3\right] \\ -\frac{r}{3l}\left[\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

ce qui se traduit par

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{ soit } \left\{ \boxed{\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3} \right. \text{, ce qui parait intuitif}$$

$$\text{et } \dot{\theta} = \frac{-r\dot{\varphi}_1}{l}$$

le robot tournera selon le signe de $\dot{\varphi}_1$

6) Sur Matlab :

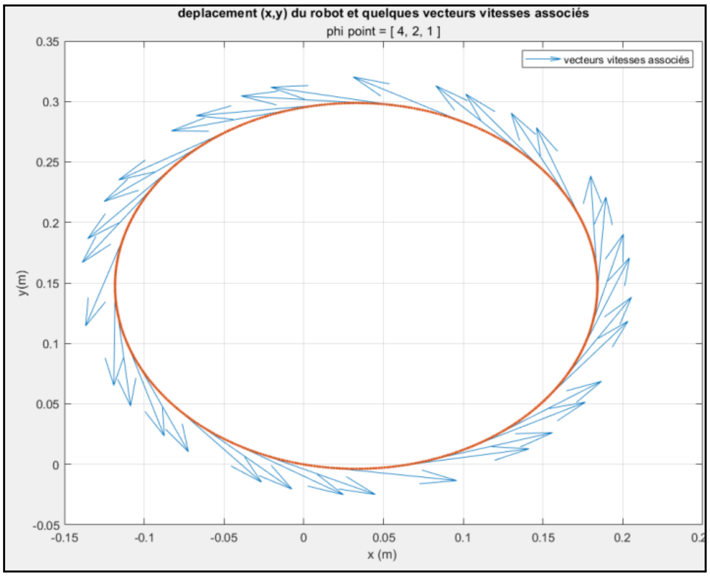
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = \dot{x}_k \Delta t + x_k \\ y_{k+1} = \dot{y}_k \Delta t + y_k \\ \theta_{k+1} = \dot{\theta}_k \Delta t + \theta_k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

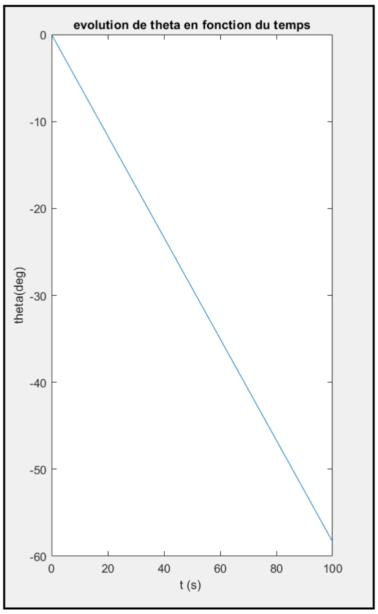
6) **Simulation sous Matlab** avec l = 20 cm et r = 5 cm

<u>Tests question 4)</u> : Mouvement du châssis

- $\dot{\varphi} = (4\ 2\ 1)^t$ (rd/s)

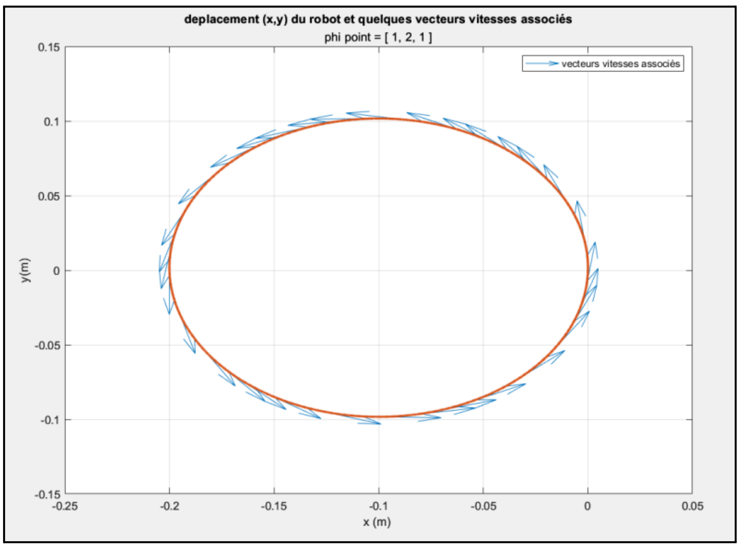
On constate ci-dessous figure a) le déplacement plan du robot pour les valeurs de ϕ *point* . Le robot fait cercle autour d'un centre de rotation ce qui est cohérent avec les formules analytiques trouvées. En particulier, à $(x, y) = (0, 0)$, on a bien un vecteur vitesse selon$(+\ x_0\ et\ -\ \vec{y}_0)$. θ varie de manière linéaire : comme ϕ_1 point est positif, alors la pente est négative (voir calculs).

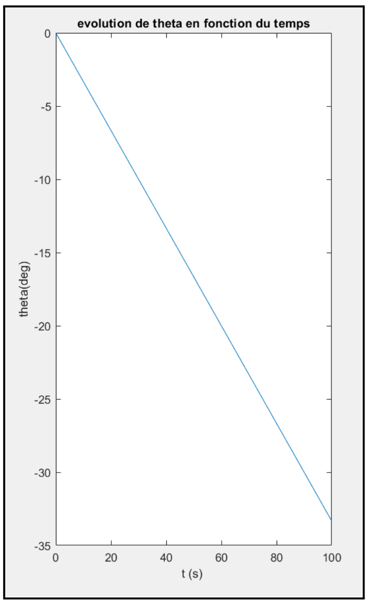




- $\dot{\varphi} = (1\ 2\ 1)^t$ (rd/s)

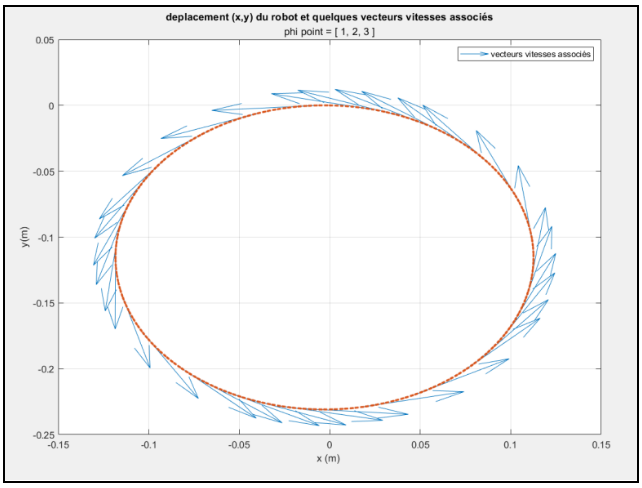
De même pour cet autre vecteur des vitesses. Le déplacement observé est cohérent avec les calculs. En particulier, à $(x, y) = (0, 0)$, on a bien un vecteur vitesse selon$(+\ \vec{y}_0)$.

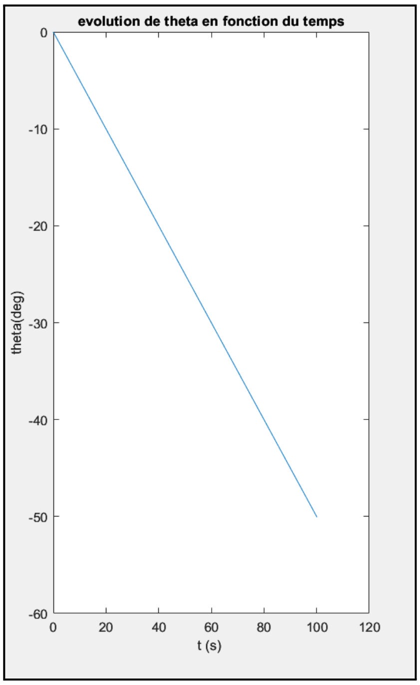




- $\dot{\varphi} = (1\ 2\ 3)^t$

Enfin, pour le 3e cas :

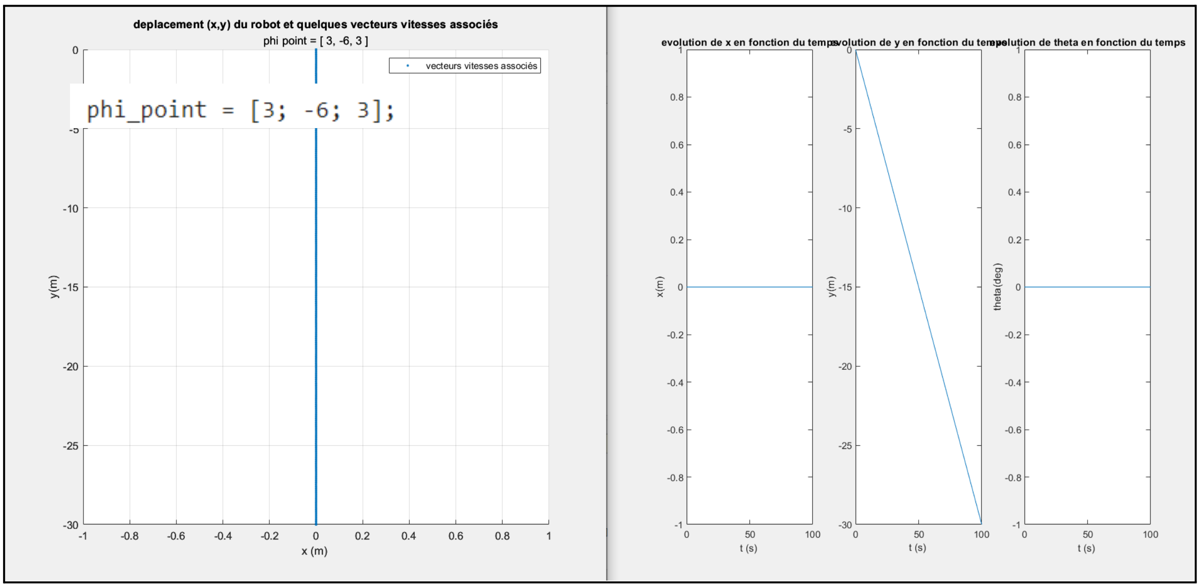




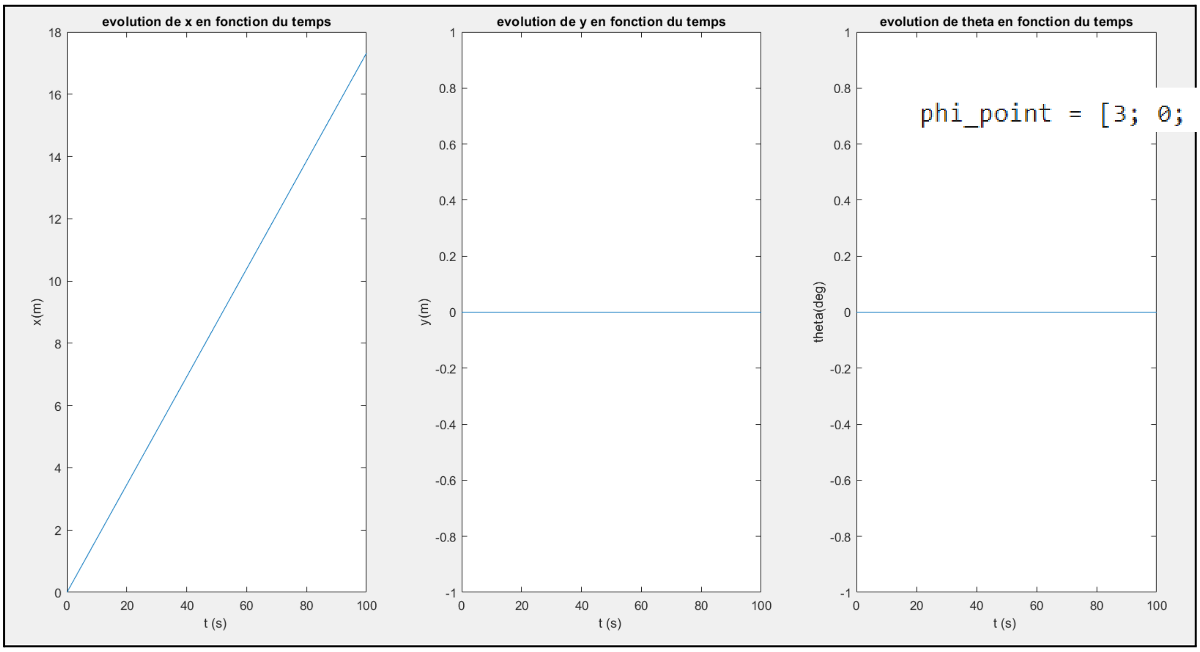
Tests question 5) : Etude des mouvements

Voir les figures correspondantes avec des valeurs respectant les conditions trouvées analytiquement. Dans chacun des cas, j'ai testé avec des valeurs de vitesse angulaire respectant les conditions. Il s'agit de cas qui vérifient l'équation (mais il faudrait faire varier les tests pour vérifier que la relation est vérifiée…)

- Cas d'une translation pure selon $+\vec{y}_0$

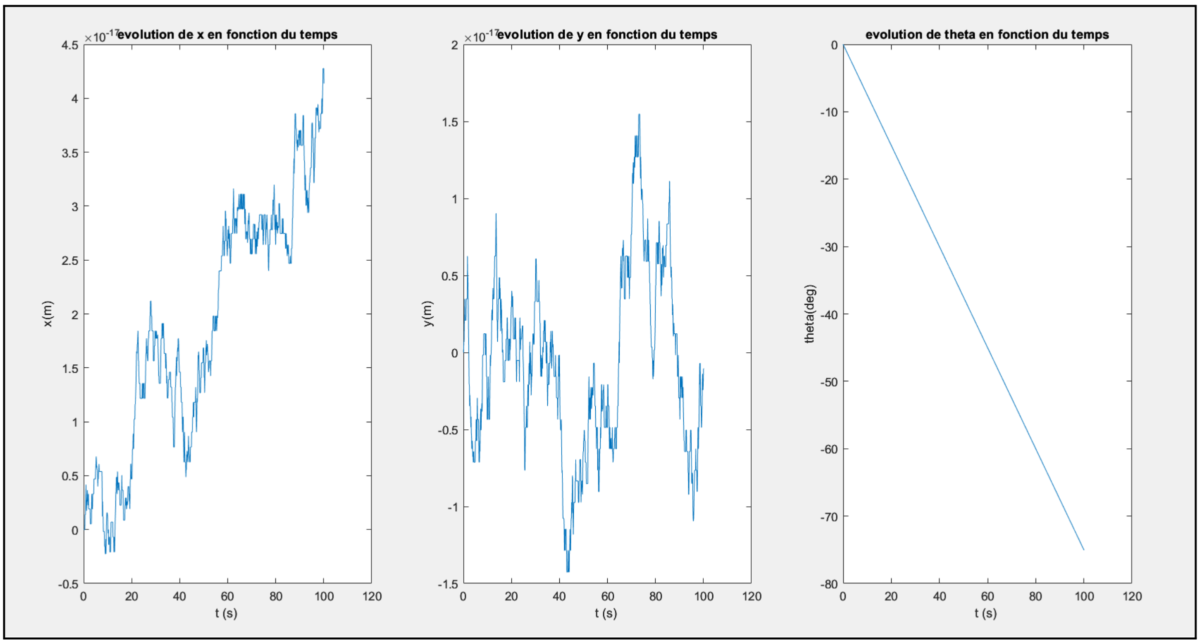


- Cas d'une translation pure selon $+\vec{x}_0$




```
phi_point = [3; 0; -3];
```

- Cas d'une rotation pure selon $+\vec{z}_0$



Dans ce cas ci, nous avons bien theta qui varie de manière linéaire. Les valeurs de x et x sont aussi nulles (la simulation donne des x et y en 10^{-7} due au calcul approché de la derivée. Il ne s'agit pas de la dérivée à l'instant t mais de la dérivée entre l'instant t et l'instant (t-1), donc cela induit un bruit de quantification)