ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ + ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Τεχνητή Νοημοσύνη Ι

Βασιλική Χριστοφιλοπούλου
1115202000216

Ιανουάριος 2025

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Project 4

Table of Contents

1 Πρόβλημα 1

1.1 Ερώτημα α

Ο πίνακας αληθείας για την πρόταση $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ είναι:

A	**B**	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Table 1: Truth table for $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Η πρόταση είναι εγκύρη αφού για όλες τις δυνατές ερμηνείες, το αποτέλεσμα πάντα αληθεύει.

Με χρήση της ανάλυσης θα αποδείξουμε ότι η άρνηση της πρότασης μας είναι μη ικανοποιήσιμη , οπότε η πρόταση μας θα είναι και έγκυρη. Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\neg((A \to B) \to (\neg B \to \neg A)) \overset{(P \to Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow} \\
&\neg\left(\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)\right) \Longrightarrow \\
&\neg\neg(A \to B) \wedge \neg(\neg B \to \neg A) \Longrightarrow \\
&(A \to B) \wedge \neg(\neg B \to \neg A) \overset{(P \to Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow} \\
&(\neg A \vee B) \wedge (\neg(B \vee \neg A)) \Longrightarrow \\
&(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \wedge A)
\end{aligned}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της ανάλυσης γράφουμε τις φράσεις τη μία κάτω από την άλλη:

$$\neg A \vee B$$

$$\neg B$$

$$A$$

- Από $\neg A \vee B$ και A, προκύπτει B.
- Από B και $\neg B$, έχουμε άτοπο.

Άρα έχουμε αντίφαση. Επομένως, η άρνηση της πρότασης είναι μη ικανοποιήσιμη. Αυτό αποδεικνύει ότι η αρχική πρόταση είναι έγκυρη.

1.2 Ερώτημα β

Ο πίνακας αληθείας για την πρόταση $A \to B \models (C \to A) \to (C \to B)$ είναι:

A	**B**	**C**	$A \to B$	$C \to A$	$C \to B$	$(C \to A) \to (C \to B)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T

Table 2: Truth table for $A \to B \models (C \to A) \to (C \to B)$

Άρα, η πρόταση $(C \to A) \to (C \to B)$ έπεται λογικά απο την $A \to B$

Η μέθοδος ανάλυσης περιλαμβάνει τη μετατροπή των προτάσεων σε κανονική μορφή (CNF) και την απόδειξη μέσω κανόνων ανάλυσης. Συνεπώς έχουμε:

Αριστερό μέρος

$$\begin{aligned}
&A \to B \Longrightarrow \\
&\neg A \vee B
\end{aligned}$$

Δεξί μέρος

$$(C \to A) \to (C \to B) \Longrightarrow$$
$$(\neg C \lor A) \to (\neg C \lor B) \Longrightarrow$$
$$\neg(\neg C \lor A) \lor (\neg C \lor B) \Longrightarrow$$
$$(C \land \neg A) \lor (\neg C \lor B)$$

Για να αποδείξουμε ότι $A \to B \models (C \to A) \to (C \to B)$ αρκεί να δείξουμε $A \to B \land \neg((C \to A) \to (C \to B))$ ότι είναι μη ικανοποιήσιμη.

Με βάση την παραπάνω ανάλυση έχουμε ότι $\neg((C \to A) \to (C \to B))$ είναι ισούναμο με $(\neg C \lor A) \land (C \land \neg B)$

Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της ανάλυσης γράφουμε τις φράσεις τη μία κάτω από την άλλη:

$$\neg A \lor B$$
$$\neg C \lor A$$
$$C$$
$$\neg B$$

- Από C και $\neg C \lor A$, προκύπτει A.
- Από $\neg A \lor B$ και A, προκύπτει B.
- Από B και $\neg B$, έχουμε άτοπο.

Η άρνηση οδηγεί σε άτοπο, επομένως η πρόταση $A \to B \models (C \to A) \to (C \to B)$ ισχύει.

1.3 Ερώτημα γ

Απο θεωρία ξέρουμε ότι μια πρόταση φ ονομάζεται ικανοποιήσιμη αν υπάρχει μια ερμηνία I τέτοια ώστε I(φ) = true.

Ο πίνακας αληθείας για την πρόταση $\neg((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ είναι:

A	**B**	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$	$A \to B$	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	$\neg((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$
T	T	F	F	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	F

Table 3: Truth table for $\neg((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$

Συνεπώς η πρόταση δεν είναι ικανοποιήσιμη καθώς δεν υπάρχει ερμηνεία όπου παίρνει την τιμή true.

Για την απόδειξη με ανάλυση θα μετατρέψουμε την πρόταση σε CNF μορφή. Έχουμε:

$$\neg((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \overset{(P \to Q) \equiv \neg P \lor Q}{\Longrightarrow}$$
$$\neg((\neg(\neg B) \lor \neg A) \to (\neg A \lor B)) \Longrightarrow$$
$$\neg((B \lor \neg A) \to (\neg A \lor B)) \Longrightarrow$$
$$\neg(\neg(B \lor \neg A) \lor (\neg A \lor B)) \Longrightarrow$$
$$\neg((\neg B \land A) \lor (\neg A \lor B)) \Longrightarrow$$
$$(B \lor \neg A) \land (A \land \neg B) \Longrightarrow$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της ανάλυσης γράφουμε τις φράσεις τη μία κάτω από την άλλη:

$$B \lor \neg A$$
$$A$$
$$\neg B$$

- Από $B \lor \neg A$ και A, προκύπτει B.
- Από B και $\neg B$, έχουμε άτοπο.

2 Πρόβλημα 2

Για τις ακόλουθες προτάσεις υπάρχουν οι εξής κωδικοποιήσεις:

1. Όποιος φοιτητής είναι γνώστης της γλώσσας Python μπορεί να περάσει το μάθημα της Τεχνητής Νοημοσύνης.
   $\forall x((Student(x) \land KnowsPython(x)) \rightarrow SuccessAI1(x))$

2. Κάθε φοιτητής που παίρνει Τεχνητή Νοημοσύνη, παραδίδει τουλάχιστον μία εργασία.
   $\forall x\,((Student(x) \land \text{TakesAI}(x) \rightarrow \exists y\,(\text{Assignment}(y, AI1) \land \text{Submits}(x, y)))$

3. Υπάρχουν φοιτητές που παίρνουν Τεχνητή Νοημοσύνη και δεν έχουν παραδώσει καμία εργασία.
   $\exists x\,((Student(x) \land \text{TakesAI}(x) \land \neg\exists y\,(\text{Assignment}(y, AI1) \land \text{Submits}(x, y)))$

4. Αν ένας φοιτητής κάνει όλες τις εργασίες ενός μαθήματος, θα το περάσει.
   $\forall x \forall c(Student(x) \land Cource(c) \land \forall y(Assignments(y, c) \rightarrow Submits(x, y)) \rightarrow Passes(x, c))$

5. Υπάρχει ένας καθηγητής που τον συμπαθούν όλοι οι φοιτητές.
   $\exists x(Professor(x) \land \forall y(Student(y) \rightarrow Likes(y, x)))$

6. Κάθε φοιτητής που έχει ένα φίλο που έχει κάνει όλες τις εργασίες της Τεχνητής Νοημοσύνης, έχει και ένα φίλο που δεν έχει κάνει καμία εργασία.
   $\forall x(Student(x) \land \exists y(Friends(x, y) \land \forall a(Assignments(a, AI1) \rightarrow Submits(y, a))) \rightarrow \exists z(Friends(x, z) \land \forall w(Assignments(w, AI1) \rightarrow \neg Submits(z, w))))$

7. Οι Έλληνες πολιτικοί δεν συμπαθούν τους άλλους Έλληνες πολιτικούς που ανήκουν σε διαφορετικά κόμματα.
   $\forall x \forall y((GreekPolitician(x) \land GreekPolitician(y) \land x \neq y \land \text{Party}(x) \neq \text{Party}(y)) \rightarrow \neg Likes(x, y))$

8. Κάποιοι άνθρωποι λένε έξυπνα αστεία μόνο όταν είναι μεθυσμένοι.
   $\exists x(Human(x) \land SaysCleverjokes(x) \rightarrow Drunk(x))$

9. Ο Γιάννης αντιπαθεί οποιονδήποτε αντιπαθεί τον εαυτό του.
   $\forall x(Dislikes(x, x) \rightarrow Dislikes(Giannis, x))$

10. Οι πολιτικοί μπορούν να κοροϊδεύουν κάποιους ψηφοφόρους όλες τις φορές και όλους τους ψηφοφόρους μερικές φορές, αλλά δεν μπορούν να κοροϊδεύουν όλους τους ψηφοφόρους όλες τις φορές.
    $\exists x\,(\text{Politician}(x) \land \exists y\,(\text{Voter}(y) \land \forall t\,\text{Fool}(x, y, t))) \land \forall z\,(\text{Voter}(z) \rightarrow \exists t\,\text{Fool}(x, z, t)) \land \neg\exists x\,\forall y\,\forall t\,\text{Fool}(x, y, t)$

11. Δεν υπάρχει κουρέας που ξυρίζει ακριβώς αυτούς τους ανθρώπους που ξυρίζουν αυτούς που ξυρίζονται μόνοι τους.
    $\neg\exists b(Barber(b) \land \forall x(Shaves(x, x) \rightarrow Shaves(b, x)))$

12. Δύο άνδρες λέγονται μπατζανάκηδες αν οι γυναίκες τους είναι αδελφές.
    $\forall x \forall y(Man(x) \land Man(y) \land x \neq y \land w1 = Wife(x) \land w2 = Wife(y) \land Sisters(w1, w2) \longleftrightarrow BrothersInLaw(x, y))$

13. Ένα σύνολο είναι υποσύνολο κάποιου άλλου συνόλου αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου είναι και στοιχείο του δεύτερου.
    $\forall X \forall Y(Subset(X, Y) \longleftrightarrow \forall z(z \in X \land z \in Y))$

14. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ένα πολύγωνο που έχει τέσσερεις πλευρές που είναι ευθύγραμμα τμήματα και τέσσερεις ορθές γωνίες.
    $\forall x\,(\text{Rectangle}(x) \leftrightarrow (\text{Polygon}(x) \land \exists s_1, s_2, s_3, s_4\,(\text{SideOf}(s_1, x) \land \text{SideOf}(s_2, x) \land \text{SideOf}(s_3, x) \land \text{SideOf}(s_4, x) \land s_1 \neq s_2 \land s_1 \neq s_3 \land s_1 \neq s_4 \land s_2 \neq s_3 \land s_2 \neq s_4 \land s_3 \neq s_4 \land \text{Segment}(s_1) \land \text{Segment}(s_2) \land \text{Segment}(s_3) \land \text{Segment}(s_4) \land \text{RightAngleBetween}(s_1, s_2, x) \land \text{RightAngleBetween}(s_2, s_3, x) \land \text{RightAngleBetween}(s_3, s_4, x) \land \text{RightAngleBetween}(s_4, s_1, x))))$

15. Τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο και οι τέσσερεις πλευρές είναι ίσες.
    $\forall x\,(\text{Square}(x) \leftrightarrow (\text{Rectangle}(x) \land \exists s_1, s_2, s_3, s_4\,(\text{SideOf}(s_1, x) \land \text{SideOf}(s_2, x) \land \text{SideOf}(s_3, x) \land \text{SideOf}(s_4, x) \land s_1 \neq s_2 \land s_1 \neq s_3 \land s_1 \neq s_4 \land s_2 \neq s_3 \land s_2 \neq s_4 \land s_3 \neq s_4 \land \text{EqualLength}(s_1, s_2) \land \text{EqualLength}(s_2, s_3) \land \text{EqualLength}(s_3, s_4) \land \text{EqualLength}(s_4, s_1))))$

3 Πρόβλημα 3

3.1 Ερώτημα α

Απο την θεωρία ξέρουμε ότι το πεδίο της I είναι τα αντικείμενα που βλέπουμε στην εικόνα. Για την δοσμένη εικόνα, εφόσον πρέπει να αγνοήσουμε οτιδήποτε άλλο εκτός από τους ανθρώπους, το πεδίο I αντιστοιχεί σε $|I| = \{Man, Woman\}$ με τις εξής αντιστοιχήσεις: $Man^I = man, Woman^I = woman$ για τα σύμβολα σταθερών ενω για τα σύμβολα κατηγορημάτων $Asleep = \{man\}$

3.2 Ερώτημα β

Ελέγχουμε αν οι δοσμένες προτάσεις ικανοποιούνται απο την I:

- $\varphi_1 = \exists x(Max(x) \land Asleep(x))$
  Για τον τύπο ϕ_1, από τον ορισμό της ικανοποίησης έχουμε:
  $\models_I \exists x(Max(x) \land Asleep(x))[s]$ αν και μόνο αν υπάρχει $d_x \in |I|$ τέτοιο ώστε $(Max(x) \land Asleep(x))[s(x|d_x)]$ που ισχύει αν και μονο αν υπάρχει $d_x \in |I|$.
  Δεδομένου ότι,

  1. $|I| = \{Man, Woman\}$
  2. $Man^I = man$
  3. $Asleep = \{man\}$

  υπάρχει μόνο μία δυνατή ανάθεση για τη μεταβλητή x. Ουσιαστικά στην μεταβλητή x ανατίθεται η τιμή man και η πρόταση φ1 ικανοποιείται.

- $\varphi_2 = \forall x(Max(x) \lor Woman(x))$
  Για τον τύπο ϕ_2, από τον ορισμό της ικανοποίησης έχουμε:
  $\models_I \forall x(Max(x) \lor Woman(x))[s]$ αν και μόνο αν υπάρχει $d_x \in |I|$ τέτοιο ώστε $(Max(x) \lor Woman(x))[s(x|d_x)]$ που ισχύει αν και μονο αν υπάρχει $d_x \in |I|$.
  Με δεδομένο ότι:

  1. $|I| = \{Man, Woman\}$
  2. $Man^I = man, Woman^I = woman$

  είτε το x = man είτε το x = woman η πρόταση φ2 ικανοποιείται.

- $\varphi_3 = \exists x(Woman(x) \land Asleep(x))$
  Για τον τύπο ϕ_3, από τον ορισμό της ικανοποίησης έχουμε:
  $\models_I \exists x(Woman(x) \land Asleep(x))[s]$ αν και μόνο αν υπάρχει $d_x \in |I|$ τέτοιο ώστε $(Woman(x) \land Asleep(x))[s(x|d_x)]$ που ισχύει αν και μονο αν υπάρχει $d_x \in |I|$.
  Λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

  1. $|I| = \{Man, Woman\}$
  2. $Woman^I = woman$
  3. $Asleep = \{man\}$

  δεν υπάρχει x στο $|I|$ για το οποίο και τα δύο μέρη της πρόταση να είναι αληθή ταυτόχρονα, άρα η φ3 δεν ικανοποιείται.

4 Πρόβλημα 4

Αναλύοντας μια μια τις προτάσεις έχουμε:

- **All roses are flowers**
  Όλα τα τριαντάφυλλα είναι λουλούδια, άρα αν ένα αντικείμενο είναι τριαντάφυλο είναι και λουλούδι.

- **Some flowers fade quickly**
  Έχουμε ότι κάποια λουλούδια μαραίνονται γρήγορα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα λουλούδι που μαραίνεται γρήγορα.

Στην περίπτωση μας, η πρώτη πρόταση λέει ότι όλα τα τριαντάφυλλα είναι λουλούδια, αλλά δεν μας λέει τίποτα για το αν τα τριαντάφυλλα μαραίνονται γρήγορα ή όχι. Η δεύτερη πρόταση μας λέει ότι κάποια λουλούδια μαραίνονται γρήγορα, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι αυτά τα λουλούδια είναι τριαντάφυλλα. Έτσι, δεν υπάρχει ικανοποίηση για την τρίτη πρόταση από τις δύο πρώτες στην τρέχουσα ερμηνεία.

Το συμπέρασμα ότι κάποια λουλούδια μαραίνονται γρήγορα (some roses fade quickly) δεν προκύπτει λογικά απο τις προτάσεις αφού δεν έχουμε πληροφορίες ότι το λουλούδι που μαραίνεται γρήγορα είναι απαραίτητα τριαντάφυλλο.

Ένα συμπέρασμα που θα μπορούσε να εξαχθεί είναι ότι κάποια τριαντάφυλλα μπορεί να μαραίνονται γρήγορα. (Some roses may fade quickly.)

5 Πρόβλημα 5

5.1 Ερώτημα α

Η δοσμένη πρόταση $(\forall x)(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$, εννοεί ότι

1. Το προαπαιτούμενο είναι ότι για κάθε x, ισχύει ότι $(P(x) \lor Q(x)$:
$$(\forall x)(P(x) \lor Q(x)$$
2. Το συμπέρασμα είναι ότι είτε P(x) ισχύει για όλα τα x είτε Q(x) ισχύει για όλα τα x, δηλαδή:
$$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$$

Η πρόσταση δεν είναι έγκυρη και θα δειχθεί με ένα αντιπαράδειγμα. Αρκεί να δείξουμε ότι απο κάτι αληθές οδηγούμαστε σε κάτι ψευδες.

Έστω ένα σύνολο τιμών A= 0,1, όπου οι προτάσεις P, Q ορίζονται ως εξης:

- Για x = 0, P(0) = True, Q(0) = False
- Για x = 1, P(1) = False, Q(1) = True

Οπότε έχουμε:

1. $(\forall x)(P(x) \lor Q(x))$
Το αριστερό μέλος της πρότασης ισχύει πάντα, αφου:
   - Για x = 0, $(P(x) \lor Q(x)) = True \lor False = True$
   - Για x = 1, $(P(x) \lor Q(x)) = False \lor True = True$
2. $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$
Για να ισχύει το δεξί μέλος θα πρέπει είτε το P(x) είναι αληθές για κάθε x είτε ότι Q(x) είναι αληθές για κάθε x. Απο τον ορισμό πιο πάνω αυτό δεν ισχύει αφου P(1) = False και Q(0) = False.

Η πρόταση δεν είναι έγκυρη, καθώς βρήκαμε αντιπαράδειγμα όπου η υπόθεση είναι αληθής, αλλά το συμπέρασμα ψευδές.

5.2 Ερώτημα β

Η πρόταση $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \lor Q(x))$ λέει το εξής:

1. Το προαπαιτούμενο είναι ότι είτε P(x) ισχύει για όλα τα x είτε Q(x) ισχύει για όλα τα x, δηλαδή:
$$(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$$
2. Το συμπέρασμα είναι ότι για κάθε x, ισχύει ότι $(P(x) \lor Q(x)$:
$$(\forall x)(P(x) \lor Q(x)$$

Έστω ότι ισχύει $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- **Πρώτη περίπτωση:** $(\forall x)P(x)$
Αν $(\forall x)P(x)$ είναι αληθές, τότε αφού για κάθε x το P(x)είναι αληθές. Επομένως, για κάθε x, το $(P(x) \lor Q(x)$ είναι επίσης αληθές. Άρα ισχύει το συμπέρασμα.
- **Δεύτερη περίπτωση:** $(\forall x)Q(x)$
Αν $(\forall x)Q(x)$ είναι αληθές, τότε για κάθε x το Q(x)είναι αληθές. Επομένως, για κάθε x, το $(P(x) \lor Q(x)$ είναι επίσης αληθές. Άρα ισχύει το συμπέρασμα.

Αποδείξαμε ότι αν ισχύει η υπόθεση $(\forall x)P(x) \lor (\forall x)Q(x)$, τότε ισχύει και το συμπέρασμα $(\forall x)(P(x) \lor Q(x))$. Επομένως, η πρόταση είναι αληθής.

6 Πρόβλημα 6

Μόνο η πρόταση $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ αποδείχτηκε ότι είναι έγκυρη απο το ερώτημα 5. Συνεπώς, με χρήση της ανάλυσης θα αποδείξουμε ότι η άρνηση της πρότασης μας είναι μη ικανοποιήσιμη , οπότε η πρόταση μας θα είναι και έγκυρη.

Η άρνηση της πρότασης μας είναι:

$$\neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \overset{\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q}{\Longrightarrow}$$
$$((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \vee Q(x)))$$

Αρχικά, πρέπει να μετατρέψουμε την πρόταση σε CNF μορφη.

1. Μετατροπή σε CNF μορφή

$$((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \overset{(P \to Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow}$$
$$((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \wedge (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

2. Προτυποποίηση μεταβλητών

$$((\forall x_1)P(x_1) \vee (\forall x_2)Q(x_2) \wedge (\exists x_3)(\neg P(x_3) \wedge \neg Q(x_3))$$

3. Αφαίρεση ποσοδεικτών

Στο σημείο αυτο αφαιρούμε τους ποσοδείκτες, αφαιρώντας ολοκληρωτικα τον καθολικο ποσοδείκτη, ενώ για τον υπαρξιακό εισάγουμε την σταθερά Skolem.

$$(P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg P(c_1) \wedge \neg Q(c_1))$$

4. Εφαρμογή της ανάλυσης

Για να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της ανάλυσης γράφουμε τις φράσεις τη μία κάτω από την άλλη:

$$P(x) \vee Q(x)$$
$$\neg P(c_1)$$
$$\neg Q(c_1)$$

Θέτοντας όπου x = c_1, το οποίο είναι έγκυρο επειδή το c_1 είναι συγκεκριμένο στοιχείο του πεδίου ορισμού (Skolem constant), έχουμε

- Από $P(c_1) \vee Q(c_1)$ και $\neg P(c_1)$, προκύπτει $Q(c_1)$.
- Από $P(c_1) \vee Q(c_1)$ και $\neg Q(c_1)$, προκύπτει $P(c_1)$ (1).
- Από (1) και $\neg P(c_1)$, έχουμε άτοπο.

Η άρνηση οδηγεί σε άτοπο, επομένως η πρόταση $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \to (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ ισχύει.

7 Πρόβλημα 7

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο ενοποίησης θα εξετάσουμε για τα παρακάτω αν υπάρχει ένας γενικός ενοποιητής:

- P(x, F(y), A, w) και P(G(u), v, u, x)
  Στην περίπτωση αυτή ο γενικός ενοποιητής είναι: $\{x/G(u), v/F(y), u/A, w/G(A)\}$.
- Q(x, y, w, z) και Q(A, F(B), z, G(z))
  Στην περίπτωση αυτή ο γενικός ενοποιητής είναι: $\{x/A, y/F(B), w/z, z/Q(w)\}$.
- R(F(x), G(y), z, d) και R(u, v, H(u), v)
  Στην περίπτωση αυτή ο γενικός ενοποιητής είναι: $\{u/F(x), v/G(y), z/H(F(x)), d/G(y)\}$.
- S(x, y, z, e) και S(F(w), w, G(w), H(w))
  Στην περίπτωση αυτή ο γενικός ενοποιητής είναι: $\{x/F(w), y/w, z/G(w), e/H(w)\}$.
- T(x, A, y, w) και T(G(z), z, H(w), K)
  Στην περίπτωση αυτή ο γενικός ενοποιητής είναι: $\{x/G(z), z/A, y/H(w), w/k\}$.

8 Πρόβλημα 8

8.1 Ερώτημα α

Για τις ακόλουθες προτάσεις υπάρχουν οι εξής κωδικοποιήσεις:

1. Ο Στέφανος, η Θεοδώρα και η Γιώτα είναι μέλη του πολιτικού κόμματος "ΤΟ ΚΑΣΕΛΑΚΙ".
   $PartyMemberOfKaselaki(Stephanos) \wedge PartyMemberOfKaselaki(Theodora) \wedge PartyMemberOfKaselaki(Giota)$

2. Κάθε μέλος του κόμματος "ΤΟ ΚΑΣΕΛΑΚΙ" που δεν είναι δεξιός, είναι φιλελεύθερος.
   $\forall x((PartyMemberOfKaselaki(x) \wedge \neg Right(x)) \rightarrow Liberal(x))$

3. Στους δεξιούς δεν αρέσει ο σοσιαλισμός.
   $\forall x(Right(x) \rightarrow \neg Like(x, Socialism))$

4. Σ' όποιον δεν αρέσει ο καπιταλισμός, δεν είναι φιλελεύθερος.
   $\forall x(\neg Like(x, Capitalism) \rightarrow \neg Liberal(x))$

5. Στον Στέφανο δεν αρέσει ό,τι αρέσει στη Θεοδώρα, και του αρέσει ό,τι δεν αρέσει στην Θεοδώρα.
   $\forall x(Like(Stephanos, x) \longleftrightarrow \neg Like(Theodora, x)) \wedge \forall y(\neg Like(Stephanos, x) \longleftrightarrow Like(Theodora, x))$

6. Στη Θεοδώρα αρέσει ο σοσιαλισμός και ο καπιταλισμός.
   $Like(Theodora, Socialism) \wedge Like(Theodora, Capitalism)$

7. Υπάρχει ένα μέλος του κόμματος "ΤΟ ΚΑΣΕΛΑΚΙ" που είναι φιλελεύθερος αλλά δεν είναι δεξιός.
   $\exists x(PartyMemberOfKaselaki(x) \wedge Liberal(x) \wedge \neg Right(x))$

Η βάση γνώσης KB περιλαμβάνει τις προτάσεις (1) έως (6) μετασχηματισμένες σε λογική πρώτης τάξης. Η έβδομη πρόταση θα ονομαστεί πρόταση φ. Άρα: $\varphi : \exists x(PartyMemberOfKaselaki(x) \wedge Liberal(x) \wedge \neg Right(x))$

8.2 Ερώτημα β

Προκειμένου να δείξουμε ότι $KB \models \varphi$, αρκεί να δείξουμε ότι $KB \wedge \neg\varphi$ είναι κένο σύνολο.Συνεπώς έχουμε:

$$\neg\varphi = \neg(\exists x(PartyMemberOfKaselaki(x) \wedge Liberal(x) \wedge \neg Right(x))) \overset{\neg\forall \equiv \exists}{\Longrightarrow}$$
$$\neg\varphi = \forall x(\neg PartyMemberOfKaselaki(x) \vee \neg Liberal(x) \vee Right(x))$$

1. Μετατροπή σε CNF μορφή

Πρέπει οι προτάσεις 1 με 6 να έρθουν σε CNF μορφή. Άρα για κάθε μια ισχύει:

1. Πρόταση 1:
   $PartyMemberOfKaselaki(Stephanos) \wedge PartyMemberOfKaselaki(Theodora) \wedge PartyMemberOfKaselaki(Giota)$

2. Πρόταση 2:

$$\forall x((PartyMemberOfKaselaki(x) \wedge \neg Right(x)) \rightarrow Liberal(x)) \overset{(P \rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow}$$
$$\forall x((\neg(PartyMemberOfKaselaki(x) \wedge \neg Right(x))) \vee Liberal(x)) \rightarrow Liberal(x)) \Longrightarrow$$
$$\forall x(\neg PartyMemberOfKaselaki(x) \vee Right(x) \vee Liberal(x))$$

3. Πρόταση 3:

$$\forall x(Right(x) \rightarrow \neg Like(x, Socialism)) \overset{(P \rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow}$$
$$\forall x(\neg Right(x) \vee \neg Like(x, Socialism))$$

4. Πρόταση 4:

$$\forall x(\neg Like(x, Capitalism) \rightarrow \neg Liberal(x)) \overset{(P \rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow}$$
$$\forall x(Like(x, Capitalism) \vee \neg Liberal(x))$$

5. Πρόταση 5:
Με βάση τις ιδιότητες ότι: $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \land (B \to A)$ και $(P \to Q) \equiv \neg P \lor Q$, έχουμε:

$$\forall x\big(Like(Stephanos, x) \leftrightarrow \neg Like(Theodora, x)\big) \land \forall y\big(\neg Like(Stephanos, y) \leftrightarrow Like(Theodora, y)\big)$$
$$\implies$$
$$\forall x\Big(\big(Like(Stephanos, x) \to \neg Like(Theodora, x)\big) \land \big(\neg Like(Theodora, x) \to Like(Stephanos, x)\big)\Big)\land$$
$$\forall y\Big(\big(\neg Like(Stephanos, y) \to Like(Theodora, y)\big) \land \big(Like(Theodora, y) \to \neg Like(Stephanos, y)\big)\Big) \implies$$
$$\forall x\Big(\big(\neg Like(Stephanos, x) \lor \neg Like(Theodora, x)\big) \land \big(Like(Theodora, x) \lor Like(Stephanos, x)\big)\Big)\land$$
$$\forall y\Big(\big(Like(Stephanos, y) \lor Like(Theodora, y)\big) \land \big(\neg Like(Theodora, y) \lor \neg Like(Stephanos, y)\big)\Big).$$

6. Πρόταση 6:
$Like(Theodora, Socialism) \land Like(Theodora, Capitalism)$

2. Προτυποποίηση μεταβλητών

1. Πρόταση 2:
$\forall x_1(\neg PartyMemberOfKaselaki(x_1) \lor Right(x_1) \lor Liberal(x_1))$
2. Πρόταση 3:
$\forall x_2(\neg Right(x_2) \lor \neg Like(x_2, Socialism))$
3. Πρόταση 4:
$\forall x_3(Like(x_3, Capitalism) \lor \neg Liberal(x_3))$
4. Πρόταση 5:

$$\forall x_4\Big(\big(\neg Like(Stephanos, x_4) \lor \neg Like(Theodora, x_4)\big) \land \big(Like(Theodora, x_4) \lor Like(Stephanos, x_4)\big)\Big)\land$$
$$\forall y_1\Big(\big(Like(Stephanos, y_1) \lor Like(Theodora, y_1)\big) \land \big(\neg Like(Theodora, y_1) \lor \neg Like(Stephanos, y_1)\big)\Big)$$

3. Αφαίρεση ποσοδεικτών

1. Πρόταση 2:
$(\neg PartyMemberOfKaselaki(x) \lor Right(x) \lor Liberal(x))$
2. Πρόταση 3:
$(\neg Right(x) \lor \neg Like(x, Socialism))$
3. Πρόταση 4:
$(Like(x, Capitalism) \lor \neg Liberal(x))$
4. Πρόταση 5:

$$\Big(\big(\neg Like(Stephanos, x) \lor \neg Like(Theodora, x)\big) \land \big(Like(Theodora, x) \lor Like(Stephanos, x)\big)\Big)\land$$
$$\Big(\big(Like(Stephanos, y) \lor Like(Theodora, y)\big) \land \big(\neg Like(Theodora, y) \lor \neg Like(Stephanos, y)\big)\Big)$$

4. Εφαρμογή της ανάλυσης

Επομένως πραγματοποιούμε ανάλυση μεταξυ των προτάσεων:

1. $PartyMemberOfKaselaki(Stephanos)$
2. $PartyMemberOfKaselaki(Theodora)$
3. $PartyMemberOfKaselaki(Giota)$
4. $(\neg PartyMemberOfKaselaki(x) \lor Right(x) \lor Liberal(x))$

5. $(\neg Right(x) \vee \neg Like(x, Socialism))$
6. $(Like(x, Capitalism) \vee \neg Liberal(x))$
7. $\neg Like(Stephanos, x) \vee \neg Like(Theodora, x)$
8. $Like(Theodora, x) \vee Like(Stephanos, x)$
9. $Like(Stephanos, y) \vee Like(Theodora, y)$
10. $\neg Like(Theodora, y) \vee \neg Like(Stephanos, y)$
11. $Like(Theodora, Socialism)$
12. $Like(Theodora, Capitalism)$
13. $(\neg PartyMemberOfKaselaki(x) \vee \neg Liberal(x) \vee Right(x)$ απο φ

Η ανάλυση γίνεται συνδυάζοντας τις προτάσεις για να οδηγηθούμε σε αντίφαση.

1. Επιλέγουμε τα κλάσματα:

   $PartyMemberOfKaselaki(Stephanos)$ και $(\neg PartyMemberOfKaselaki(x) \vee Right(x) \vee Liberal(x))$

   Αντικρούουμε το $PartyMemberOfKaselaki(Stephanos)$ με το $\neg PartyMemberOfKaselaki(x)$ και παίρνουμε:

   $$Right(Stephanos) \vee Liberal(Stephanos)$$

   Αυτό σημαίνει ότι ο Στέφανος είτε είναι δεξιός είτε είναι φιλελεύθερος.

2. Επιλέγουμε τα κλάσματα:

   $$Right(Stephanos) \quad \text{και} \quad (\neg Right(x) \vee \neg Like(x, Socialism))$$

   Αντικρούουμε το $Right(Stephanos)$ με το $\neg Right(x)$ και παίρνουμε:

   $$\neg Like(Stephanos, Socialism)$$

   Αυτό σημαίνει ότι στον Στέφανο δεν αρέσει ο σοσιαλισμός.

3. Επιλέγουμε τα κλάσματα:

   $Like(Theodora, Socialism)$ και $Like(Theodora, x) \vee Like(Stephanos, x)$ και $\neg Like(Stephanos, Socialism)$

   Αντικρούουμε και συνεχίζουμε μέχρι να φτάσουμε σε:

   $$Like(Stephanos, Socialism) \Rightarrow \text{Αντίφαση}$$

Αυτή η πρόταση έρχεται σε αντίφαση με τη βάση γνώσης, αφού:

- Από τη μια πλευρά έχουμε ότι ο Στέφανος είναι είτε Δεξιός είτε Λιμπεραλιστής.
- Από την άλλη, έχουμε ότι η Θεοδώρα συμπαθεί τον Σοσιαλισμό, ενώ ο Στέφανος όχι.
- Συνδυάζοντας τα κλάσματα, φτάνουμε σε μια αντίφαση για την προτίμηση του Στέφανου για τον Σοσιαλισμό, καθώς δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα το $\neg Like(Stephanos, Socialism)$ και το $Like(Stephanos, Socialism)$.

Επομένως, το σύνολο των προτάσεων οδηγεί σε αντίφαση και το σύστημα είναι ασύμβατο, καταλήγοντας σε κενό σύνολο

8.3 Ερώτημα γ

Για να εντοπίσουμε το μέλος του κόμματος που είναι φιλελεύθερος και δεν είναι δεξιός, δηλαδή να βρούμε το μέλος του κόμματος "ΤΟ ΚΑΣΕΛΑΚΙ" που ικανοποιεί την πρόταση:

$$\exists x(PartyMemberOfKaselaki(x) \wedge Liberal(x) \wedge \neg Right(x))$$

Απο την παραπάνω ανάλυση έχουμε αρχικά ότι ο Στέφανος είτε είναι δεξιός είτε Φιλελεύθερος (1), και έπειτα με την σύγκριση με την Θεοδώρα που είναι Σοσιαλίστρια, έχουμε ότι ο Στέφανος είναι Φιλελεύθερος και απο την (1) ότι είναι δεξιός.

Χρησιμοποιώντας τα λεκτικά απάντησης, εντοπίζουμε ότι το x που ικανοποιεί την ιδιότητα είναι ο Στέφανος.

9 Πρόβλημα 9

Οι προτάσεις που δώθηκαν είναι:

1. $Beautiful(Helen)$
2. $Handsome(John) \wedge Rich(John)$
3. $Muscular(Peter) \wedge Rich(Peter)$
4. $Muscular(Timos) \wedge Kind(Timos)$
5. $\forall x, y(Man(x) \wedge Woman(y) \wedge Beautiful(y) \rightarrow Likes(x, y))$
6. $\forall x(Rich(x) \rightarrow Happy(x))$
7. $\forall x, y(Man(x) \wedge Woman(y) \wedge Likes(x, y) \wedge Likes(y, x) \rightarrow Happy(x))$
8. $\forall x, y(Man(x) \wedge Woman(y) \wedge Likes(x, y) \wedge Likes(y, x) \rightarrow Happy(y))$
9. $\forall x(Max(x) \wedge Likes(Katerina, x) \rightarrow Likes(x, Katerina))$
10. $\forall x(Max(x) \wedge ((Kind(x) \wedge Rich(x)) \vee (Muscular(x) \wedge Handsome(x))) \rightarrow Likes(Helen, x))$

Άρα σε αναπαράσταση Horn, οπου πρέπει να είναι σε μορφή κανόνων όπου έχουμε μία θετική ή μη-αρνητική προϋπόθεση (conclusion), έχουμε:

1. $Beautiful(Helen)$
2. $Handsome(John)$
3. $Rich(John)$
4. $Muscular(Peter)$
5. $Rich(Peter)$
6. $Muscular(Timos)$
7. $Kind(Timos)$
8. $\neg Man(x) \vee \neg Woman(y) \vee \neg Beautiful(y) \vee Likes(x, y))$
9. $\neg Rich(x) \vee Happy(x))$
10. $\neg Man(x) \vee \neg Woman(y) \vee \neg Likes(x, y) \vee \neg Likes(y, x) \vee Happy(x)$
11. $\neg Man(x) \vee \neg Woman(y) \vee \neg Likes(x, y) \vee \neg Likes(y, x) \vee Happy(y)$
12. $\neg Max(x) \vee \neg Likes(Katerina, x) \vee Likes(x, Katerina)$
13. $\neg Max(x) \vee \neg Kind(x) \vee \neg Rich(x) \vee Likes(Helen, x)$
14. $\neg Max(x) \vee \neg Muscular(x) \vee \neg Beautiful(x) \vee Likes(Helen, x)$

Για να απαντηθούν τα ερωτήματα χρησιμοποιήθηκε prolog, και ειδικότερο το εργαλείο swish. Το πρόγραμμα που έγραψα για την επίλυση των ζητουμένων, επισυνάπτεται μέσα στο αρχείο zip. Πιο αναλυτικά, για το πρώτο ερώτημα έχουμε 3 πιθανά ζευγάρια:

- John and Helen
- Peter and Helen
- Timos and Helen

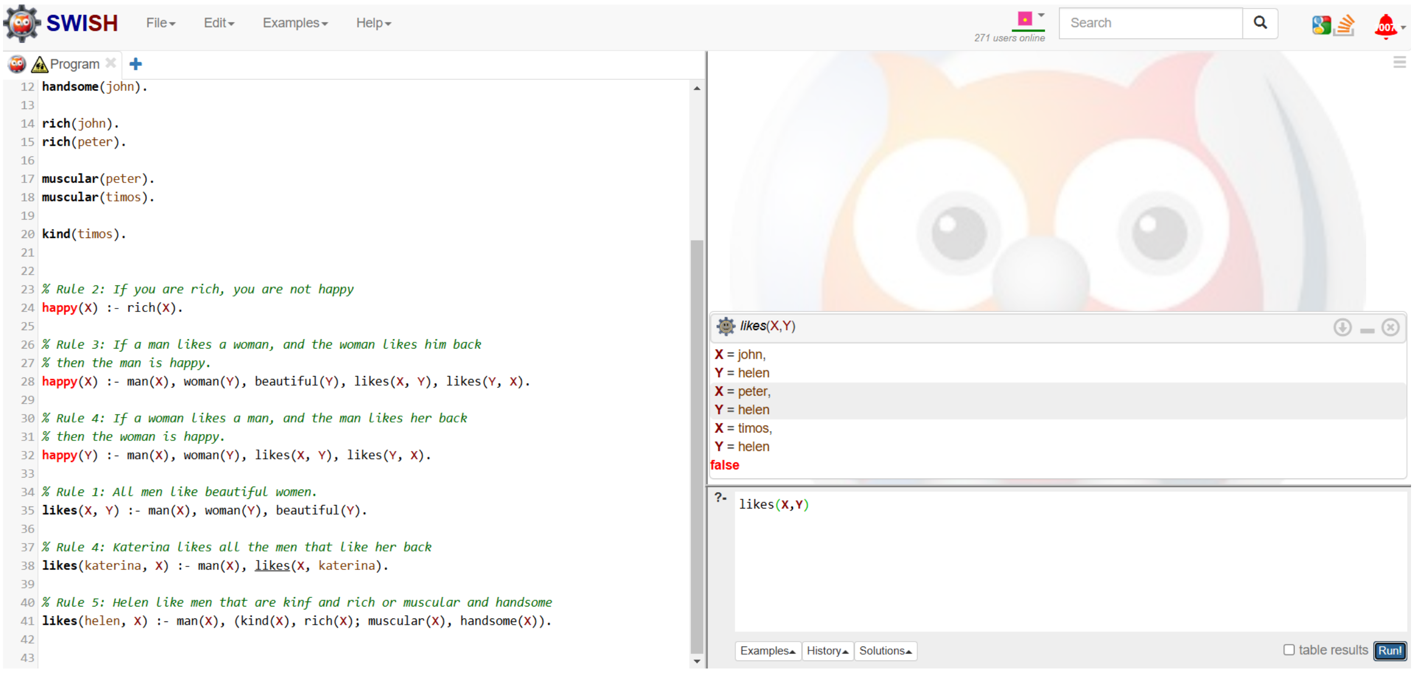

Figure 1: Screenshot του προγράμματος στην πλατφόρμα SWISH.

Για το δεύτερο ερώτημα, οι πιο ευτυχισμένοι είναι ο John και ο Peter.

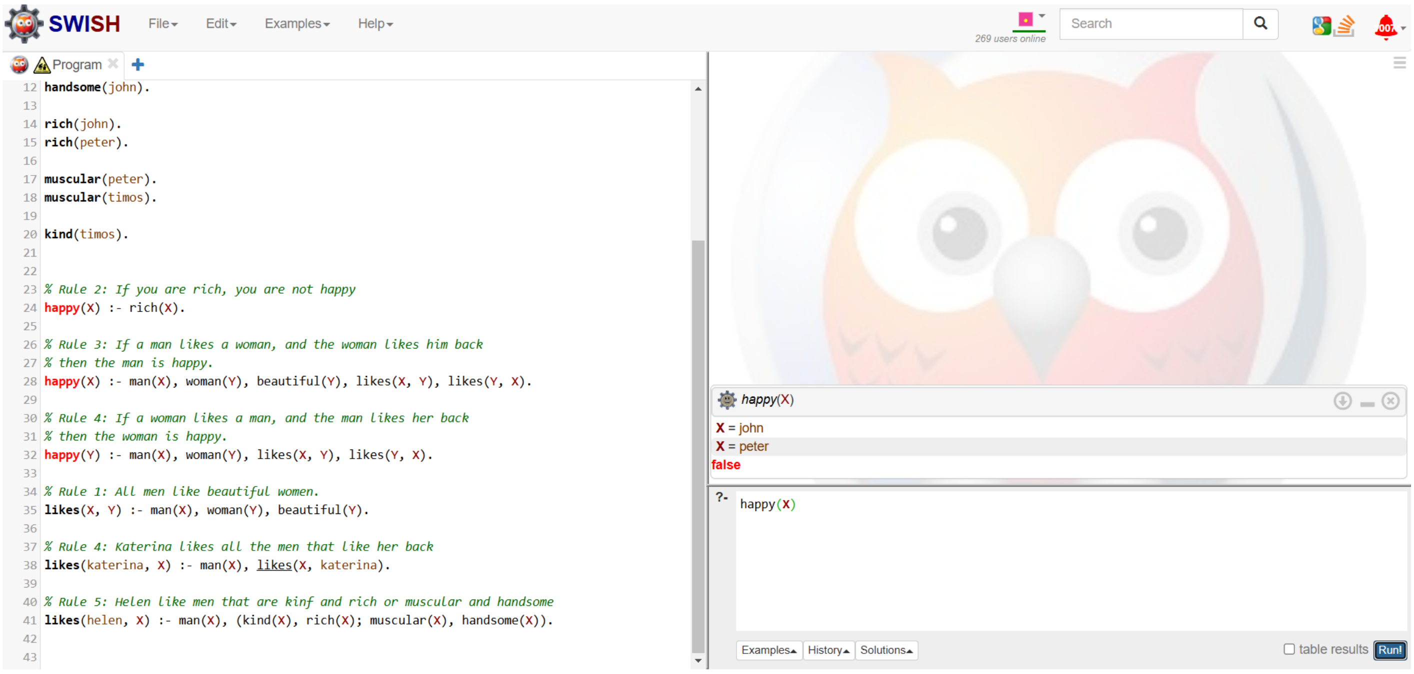

Figure 2: Screenshot του προγράμματος στην πλατφόρμα SWISH.

10 Πρόβλημα 10

10.1 Ερώτημα α

Έχουμε την πρώταση $(\forall x)((\exists y)(P(x,y) \rightarrow (\exists z)(Q(x,z) \rightarrow (\exists w)R(x,w))))$ και θέλουμε να βροούμε την CNF μορφή της.

1. Μετατροπή σε CNF μορφή

$$
\begin{gathered}
(\forall x)((\exists y)(P(x,y) \rightarrow (\exists z)(Q(x,z) \rightarrow (\exists w)R(x,w)))) \overset{(P \rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow} \\
(\forall x)(\neg(\exists y)P(x,y) \vee (\exists z)(Q(x,z) \rightarrow (\exists w)R(x,w))) \Longrightarrow \\
(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee (\neg(\exists z)Q(x,z)) \vee (\exists w)R(x,w)) \Longrightarrow \\
(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee (\forall z)\neg Q(x,z) \vee (\exists w)R(x,w))
\end{gathered}
$$

2. Προτυποποίηση μεταβλητών

$$(\forall x_1)(\forall y_1)(\neg P(x_1,y_1) \vee (\forall z_1)\neg Q(x_1,z_1) \vee (\exists w_1)R(x_1,w_1))$$

3. Αφαίρεση ποσοδεικτών

Στο σημείο αυτο αφαιρούμε τους ποσοδείκτες, αφαιρώντας ολοκληρωτικα τον καθολικο ποσοδείκτη, ενώ για τον υπαρξιακό εισάγουμε την σταθερά Skolem.

$$(\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee R(x,c_1))$$

10.2 Ερώτημα β

Για να δείξουμε ότι η πρόταση

$$\varphi_1 = (\forall x)((\exists y)(P(x,y) \rightarrow (\exists z)(Q(x,z) \rightarrow (\exists w)R(x,w))))$$

ακολουθεί λογικά την

$$\varphi_2 = (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)(P(x,y) \rightarrow (Q(x,z)) \rightarrow R(x,w)))$$

αρκεί να δείξουμε $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ ότι είναι μη ικανοποιήσιμη

Αρχικά, θα φέρουμε και τις δύο προτάσεις σε κανονική μορφή (CNF). Το αριστερό μέλος το έχουμε έτοιμο απο το προηγούμενο ερώτημα, οπότε θα εργαστούμε με το δεξί.

1. Μετατροπή σε CNF μορφή

$$
\begin{gathered}
(\neg(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)(P(x,y) \rightarrow (Q(x,z)) \rightarrow R(x,w))) \overset{(P \rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q}{\Longrightarrow} \\
(\neg(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)(P(x,y) \rightarrow (\neg Q(x,z) \vee R(x,w)))) \Longrightarrow \\
(\neg(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)(\neg P(x,y) \vee (\neg Q(x,z) \vee R(x,w)))) \Longrightarrow \\
(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(P(x,y) \wedge (Q(x,z) \wedge \neg R(x,w)))
\end{gathered}
$$

2. Προτυποποίηση μεταβλητών

$$(\exists x_1)(\forall y_1)(\forall z_1)(\forall w_1)(P(x_1,y_1) \wedge (Q(x_1,z_1) \wedge \neg R(x_1,w_1)))$$

3. Αφαίρεση ποσοδεικτών

Στο σημείο αυτο αφαιρούμε τους ποσοδείκτες, αφαιρώντας ολοκληρωτικα τον καθολικο ποσοδείκτη, ενώ για τον υπαρξιακό εισάγουμε την σταθερά Skolem.

$$(P(c_2,y) \wedge (Q(c_2,z) \wedge \neg R(c_2,w)))$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο προτάσεις έχουν την ακριβως αντίθετη συζευκτική κανονική μορφή, άρα η τομή τους είναι το κενό υποσύνολο.

Η άρνηση οδηγεί σε άτοπο, επομένως η πρόταση $\varphi_1 \models \varphi_2$ ισχύει.

11 Πρόβλημα 11

Για την απόδειξη της παραπάνω άσκησης με την χρήση του εργαλείου prover9, δημιουργήθηκαν δύο αρχεία τα οποιά επισυνάπτονται στον zip. Πιο συγκεκριμένα, το prover9_input αρχείο περιέχει:

```
assign(report_stderr, 2).
set(ignore_option_dependencies). % GUI handles dependencies

if(Prover9). % Options for Prover9
  assign(max_seconds, 150).
end_if.

if(Mace4).   % Options for Mace4
  assign(max_seconds, 60).
end_if.

formulas(assumptions).

% --- Axioms for ?? ---
all x all y all z (-(P(x,y)) | -(Q(x,z)) | R(x,c1)).

% --- Negation of ?? ---
P(c2,y) & Q(c2,z) & -R(c2,w).

% --- Goal: Prove inconsistency ---
% The system will try to find a contradiction, proving that ?? ? ??.

end_of_list.

formulas(goals).

end_of_list.
```

Επιπλεόν, στο αρχείο prover9_output, μεταξυ άλλον υπάρχει και η απόδειξη:

```
============================== prooftrans ============================
Prover9 (32) version Dec-2007, Dec 2007.
Process 16572 was started by vicky on LAPTOP-5RP38OED,
Wed Dec 18 10:50:04 2024
The command was "/cygdrive/c/Program Files (x86)/Prover9-Mace4/bin-win32/prover9".
============================== end of head ===========================

============================== end of input ==========================

============================== PROOF =================================

% -------- Comments from original proof --------
% Proof 1 at 0.00 (+ 0.00) seconds.
% Length of proof is 9.
% Level of proof is 4.
% Maximum clause weight is 0.
% Given clauses 0.

1 (all x all y all z (-P(x,y) | -Q(x,z) | R(x,c1))) # label(non_clause).  [assumption].
2 P(c2,x) & Q(c2,y) & -R(c2,z) # label(non_clause).  [assumption].
3 P(c2,x).  [clausify(2)].
4 -P(x,y) | -Q(x,z) | R(x,c1).  [clausify(1)].
5 -Q(c2,x) | R(c2,c1).  [resolve(3,a,4,a)].
6 Q(c2,x).  [clausify(2)].
7 R(c2,c1).  [resolve(5,a,6,a)].
8 -R(c2,x).  [clausify(2)].
```

```
9 $F.   [resolve(7,a,8,a)].
```

=============================== end of proof ===========================

12 Πρόβλημα 12

12.1 Ερώτημα α

Για την αναπαράσταση της σχεσιακής βάσης σε Datalog, αξιοποιήθηκε βοηθητικό υλικό.

Με βάση το παραπάνω αρχείο έχουμε:

Table declaration

.decl Teaches(Professor: symbol, Course: symbol).
.decl Course_Semester(Course_Name: symbol, Semester: number).

Insert data

Teaches(Manolis, AI).
Teaches(Manolis, Data_Structures).
Teaches(Yannis, DB).
Teaches(Mema, System_Programming).

Course_Semester(Data_Structures, 1).
Course_Semester(AI, 3).
Course_Semester(DB, 4).
Course_Semester(System_Programming, 6).

Query

$Q_1(Semester)$:- Teaches(Manolis, Course), Course_Semester(Course, Semester).

12.2 Ερώτημα β

Έστω KB οι πίνακες με τα δεδομένα που δίνονται απο την εκφώνηση σε συνδυασμό με το ερώτημα ποιά εξάμηνα διδάσκει ο καθηγητής Μανώλης.

$$\forall Semester \forall Cource(Teaches(x, Course) \wedge Course_Semester(Course, Semester) \rightarrow Q1(Semester)$$

Αν η πρόταση Teaches(Manolis, Course) εισαχθεί στην KB, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο forward chaining για να συμπεράνουμε ότι:

1. Στην πρώτη επανάληψη:
   Από Teaches(Manolis, AI) σε σύγκριση με το Cource_Semester έχουμε: Course_Semester(AI,3)

2. Στην δεύτερη επανάληψη:
   Από Teaches(Manolis, Data_Structures) σε σύγκριση με το Cource_Semester έχουμε:
   Course_Semester(Data_Structures,1)

Συνεπώς έχουμε ότι ο Μανώλης διδάσκει στα εξάμηνα 1 και 3.