El método de Newton-Raphson
(para hallar raíces de una ecuación *f(x)*=0)

1. **Introducción**.

El método de Newton para hallar las raíces de la ecuación *f(x) = 0*, es el más conocido, y a menudo, el más efectivo.

Sea *f(x)* una función continuamente diferenciable *dos veces* en el intervalo [*a*, *b*], lo cual se expresa: $f \in C^2[a,b]$. Sea $\overline{x} \in [a,b]$ una aproximación a la raíz p tal que:

$$\begin{cases} f'(x) \neq 0 \\ |\overline{x} - p| \to 0 \end{cases}$$

Expresamos el desarrollo de Taylor de primer grado para *f(x)* en torno a $\overline{x}$:

$$f(x) = f(\overline{x}) + (x - \overline{x}) f'(\overline{x}) + \frac{(x-\overline{x})^2}{2} f''(c)$$

Aquí sustituimos x=p, y, considerando: $\begin{cases} f(p) = 0 \\ (p - x)^2 \square\ 0 \end{cases}$

$$0 \square\ f(\overline{x}) + (p - \overline{x}) f'(\overline{x})$$

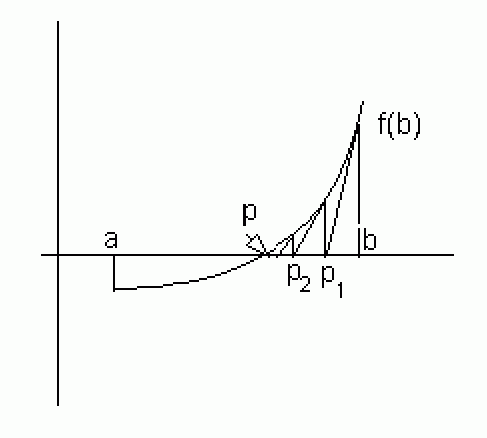
Y despejando p, tenemos:

$$p \approx \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$$

El método de Newton consiste en tomar una aproximación inicial, $\overline{x}$, y a continuación obtener una aproximación más refinada mediante la fórmula de arriba. Es decir, se trata de acercarnos a la raíz p por medio de la fórmula recursiva:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

2. Interpretación geométrica.



La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (p_n, $f(p_n)$) viene dada por:

$$y - f(p_n) = f'(p_n)(x - p_n)$$

Si hacemos y=0, $x = p_{n+1}$, obtenemos la expresión anterior:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Importante:

* Debemos tomar siempre como p_0 un valor t.q. $f(p_0) \cdot f''(p_0) > 0$.

- El método de Newton converge siempre que tomemos un p_0 lo bastante cercano al valor p de la raíz.

EL ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON

Para hallar una solución aproximada de $f(x) = 0$, dada una aproximación inicial p_0.

Entrada: aproximación inicial p_0 ; tolerancia TOL; cantidad máxima de iteraciones N;
Salida: solución aproximada p ó mensaje de fracaso.

Paso 1: Tomar i = 1;
Paso 2: Mientras que i ≤ N seguir pasos 3-6;
  Paso 3: Tomar $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ % Calculamos p_i .
  Paso 4: Si $|p - p_0| <$TOL entonces SALIDA(p);
  Paso 5: Tomar i = i+1
  Paso 6: Tomar $p_0 = p$ % redefinir p_0 .
Paso 7: SALIDA(‘El método fracasó después de N iteraciones’); PARAR.

- OTROS MÉTODOS RELACIONADOS:

1. El método de Newton modificado (fórmula de Von Mises).

A partir de la fórmula de Newton:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

Si la derivada *f'(x)* varía ligeramente en el intervalo [a, b]:

$$f'(p_0) \approx f'(p_1) \approx f'(p_2) \approx \ldots \approx f'(p_n)$$

Podemos poner la fórmula de Von Mises:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_0)}$$