DIFERENCIAS FINITAS
POISSON

INTEGRANTES:
Vicente Alves
Felipe Brana
Diego Vergara
Mauricio Raipane

ASIGNATURA: BAIN87-24
DOCENTE: Paulo Álvarez

INTRODUCCIÓN

En esta presentación hablaremos sobre para que se utiliza el método de diferenciación finitas para la ecuación de Poisson, y se hablara del problema que nos toco abordar como grupo.

Simeón Denis Poisson

PROBLEMA

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2};$$

$$u(x,0) = \cos x, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0,y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

RESOLUCION ANALITICA

1 Planteamiento del Problema

Se desea resolver analíticamente la ecuación de Poisson en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right),$$

en el dominio $0 < x < \pi,\ 0 < y < \frac{\pi}{2}$,

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \cos x, \\ u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) &= 0, \\ u(0,y) &= \cos y, \\ u(\pi,y) &= -\cos y. \end{aligned}$$

2 Reducción de la fuente

Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y,$$

la ecuación se simplifica a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\cos x\cos y.$$

3 Solución Particular

Proponemos una solución particular de la forma:

$$u_p(x, y) = A \cos x \cos y.$$

Calculando las derivadas:

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = -A \cos x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = -A \cos x \cos y,$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = -2A \cos x \cos y.$$

Igualando con el término fuente, se obtiene $A = 1$, y así:

$$u_p(x, y) = \cos x \cos y.$$

4 Solución Homogénea

La solución general de la ecuación de Poisson es:

$$u(x, y) = u_h(x, y) + u_p(x, y),$$

donde u_h satisface:

$$\nabla^2 u_h = 0.$$

Sin embargo, al verificar las condiciones de frontera con $u_p(x, y) = \cos x \cos y$, se ve que ya las cumple todas:

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= \cos x \cdot 1 = \cos x, \\
u(x, \frac{\pi}{2}) &= \cos x \cdot 0 = 0, \\
u(0, y) &= 1 \cdot \cos y = \cos y, \\
u(\pi, y) &= -1 \cdot \cos y = -\cos y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución homogénea $u_h(x, y)$ debe ser cero.

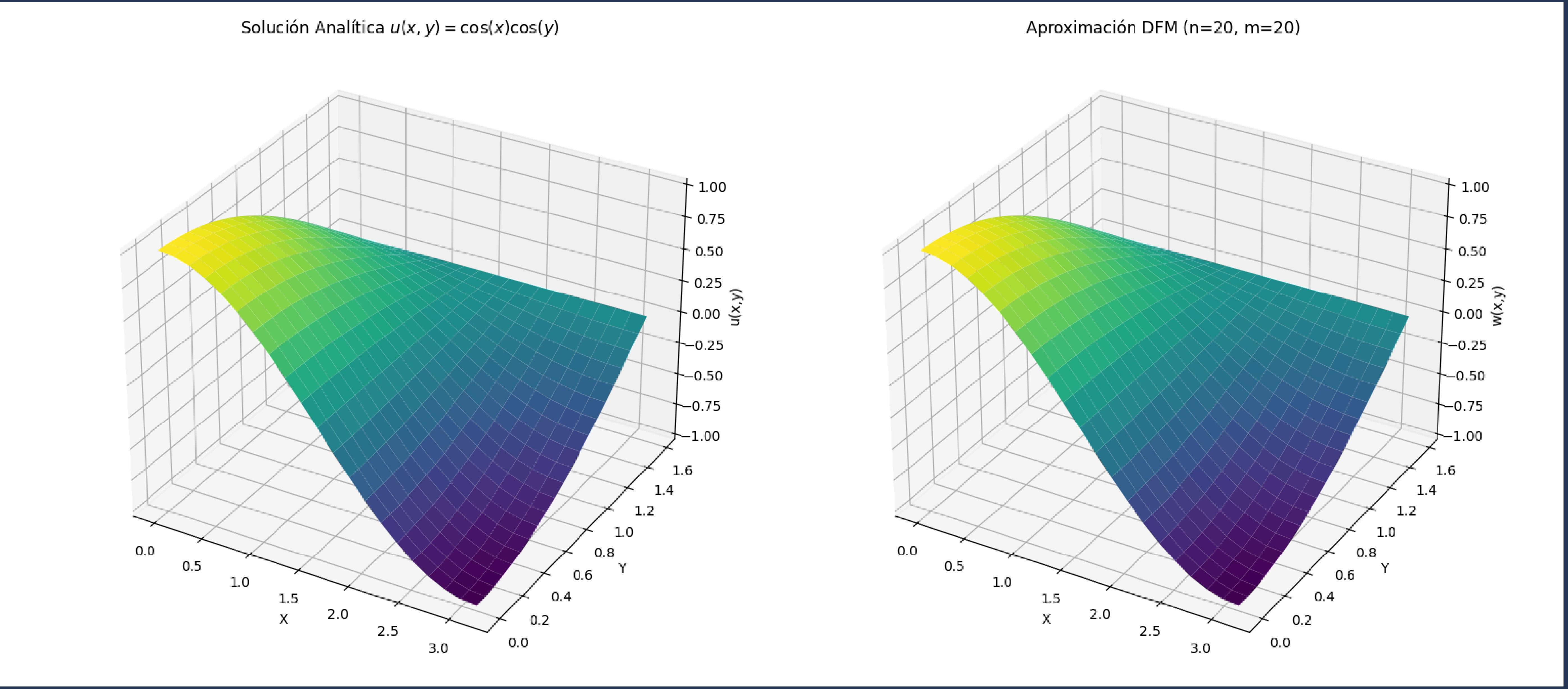
5 Solución Final y Dominio

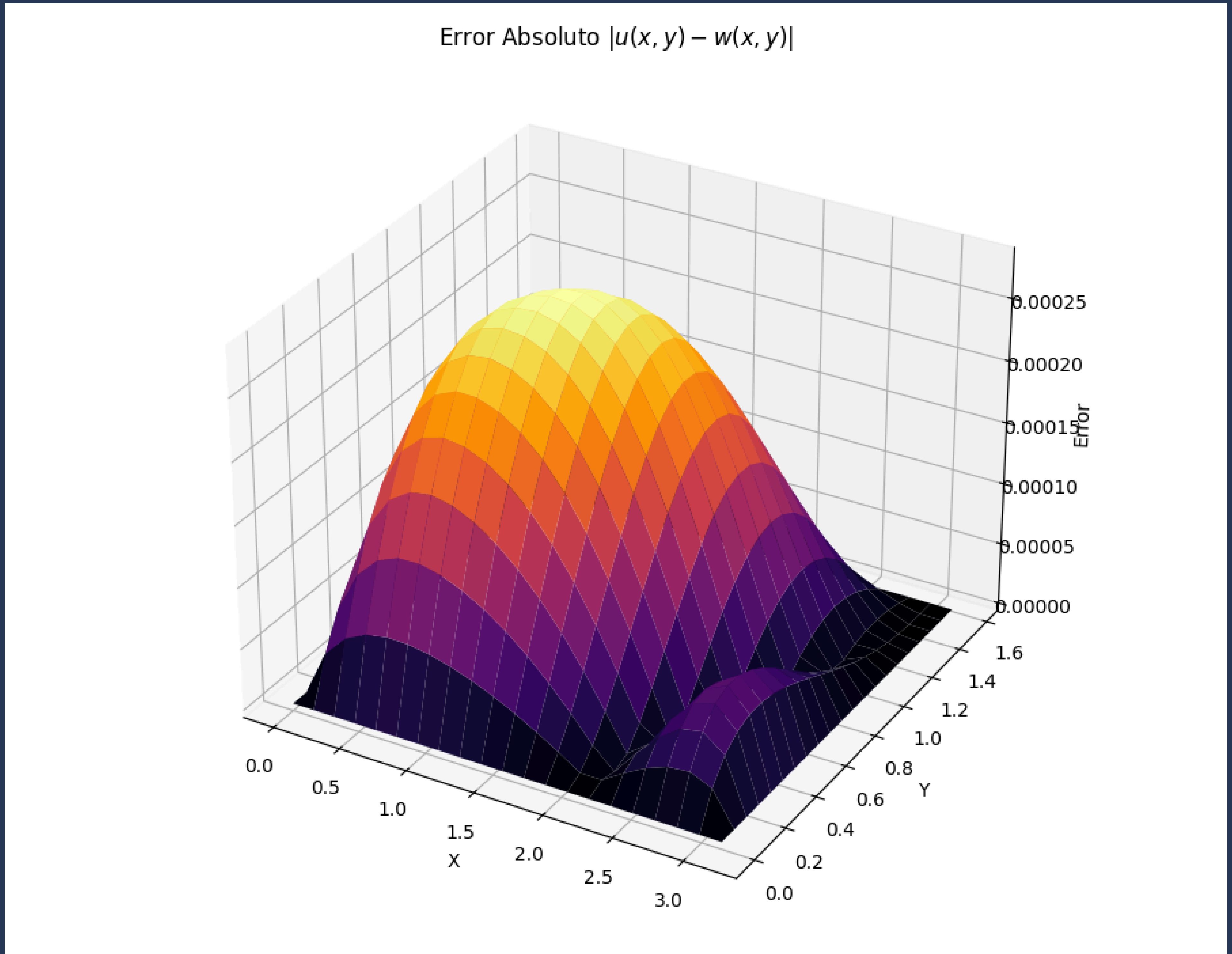
La solución analítica es:

$$\boxed{u(x, y) = \cos x \cos y},$$

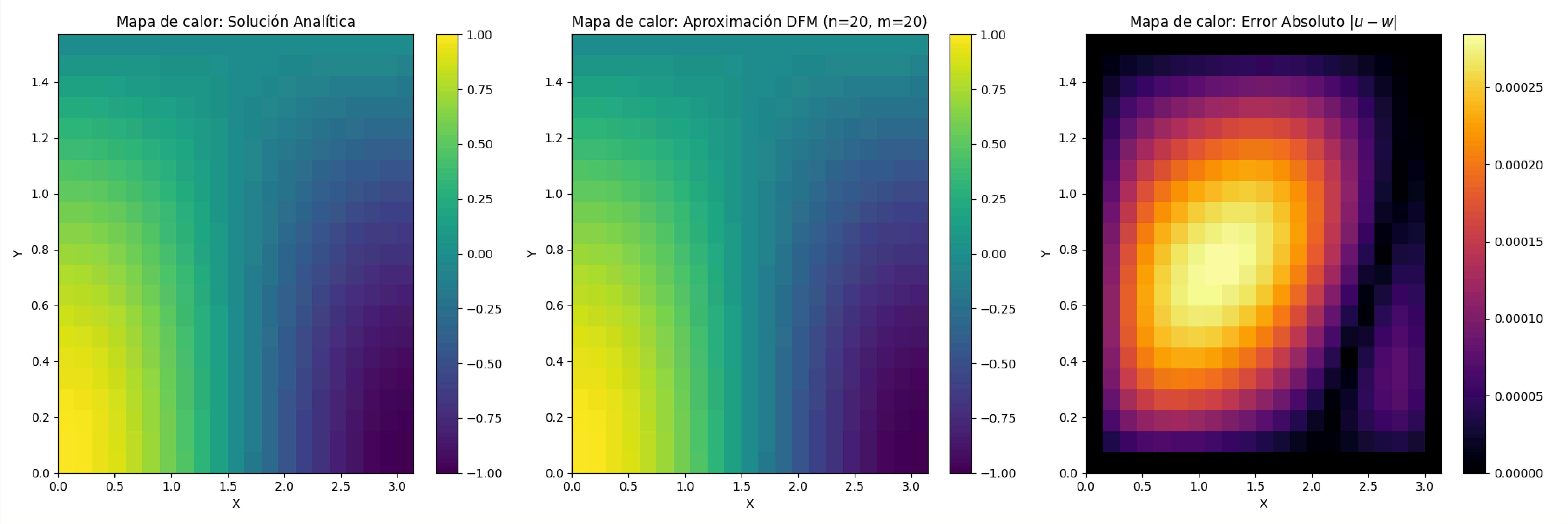
válida en el dominio cerrado $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, ya que satisface la ecuación diferencial y las condiciones de frontera.

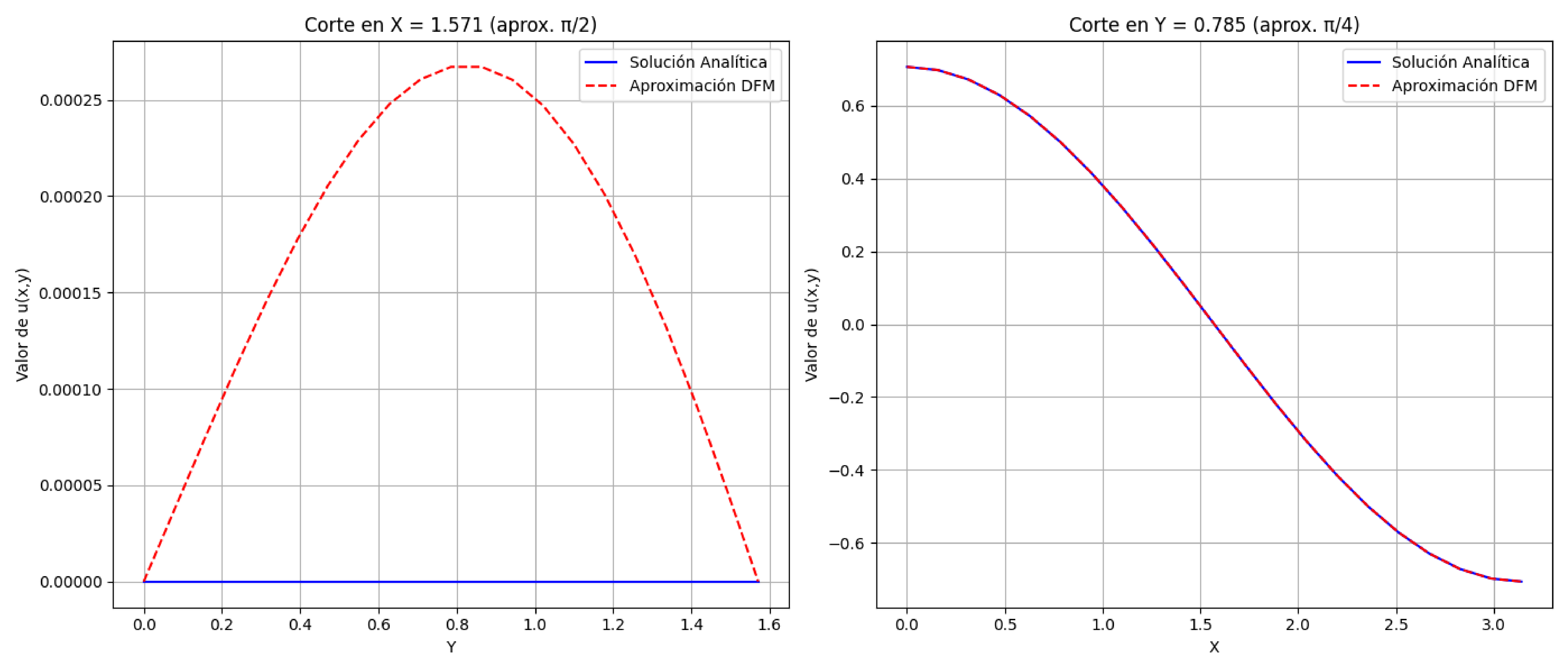
REPRESENTACION GRAFICA DEL PROBLEMA

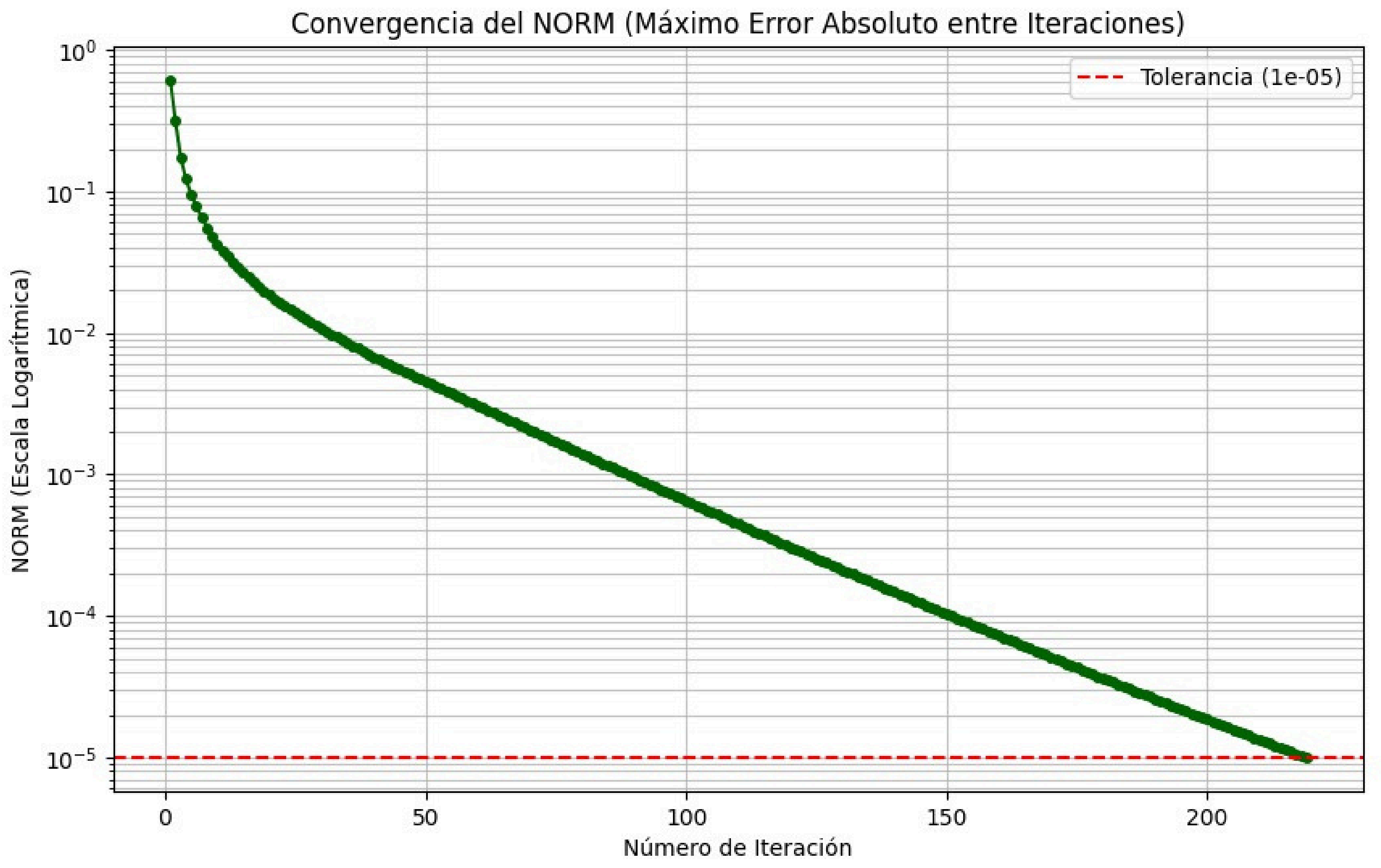



Error Absoluto $|u(x,y) - w(x,y)|$
0.00025
0.00020
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
Error
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
X
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
Y

REPRESENTACION DE ERRORES/DIFERENCIAS




Corte en X = 1.571 (aprox. π/2)
Solución Analítica
Aproximación DFM
Valor de u(x,y)
Y
0.00025
0.00020
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
Corte en Y = 0.785 (aprox. π/4)
Solución Analítica
Aproximación DFM
Valor de u(x,y)
X
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


Convergencia del NORM (Máximo Error Absoluto entre Iteraciones)
Tolerancia (1e-05)
NORM (Escala Logarítmica)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
0
50
100
150
200
Número de Iteración

METODO ANALITICO

El método analítico busca obtener una solución exacta de la ecuación diferencial en forma de una función explícita. En el caso de la ecuación de Poisson, este enfoque suele implicar la técnica de separación de variables, que transforma la ecuación en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), las cuales pueden ser resueltas con métodos clásicos. Las condiciones de frontera se utilizan para determinar constantes y garantizar que la solución cumpla con el problema planteado.

VENTAJAS/DESVENTAJAS

VENTAJAS:

PROPORCIONA UNA FÓRMULA EXACTA PARA LA SOLUCIÓN U(X,Y).

PERMITE ANALIZAR EL COMPORTAMIENTO GENERAL DE LA SOLUCIÓN.

ES ÚTIL PARA VALIDAR MÉTODOS NUMÉRICOS EN CASOS SIMPLES.

DESVENTAJAS:

SOLO PUEDE APLICARSE CUANDO EL DOMINIO ES REGULAR (POR EJEMPLO, UN RECTÁNGULO O CÍRCULO).

REQUIERE CONDICIONES DE FRONTERA COMPATIBLES CON LAS TÉCNICAS ANALÍTICAS.

NO ES VIABLE PARA GEOMETRÍAS COMPLEJAS O CONDICIONES DE FRONTERA ARBITRARIAS.

METODO NUMERICO

El método numérico mediante diferencias finitas consiste en discretizar el dominio dividiéndolo en una malla de puntos, y reemplazar las derivadas por aproximaciones algebraicas (por ejemplo, diferencias centradas). Esto genera un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve iterativamente, comúnmente con métodos como Gauss-Seidel.

VENTAJAS/DESVENTAJAS

VENTAJAS:

PUEDE APLICARSE A PROBLEMAS CON DOMINIOS Y CONDICIONES DE FRONTERA COMPLEJOS.

SE ADAPTA A SITUACIONES DONDE NO EXISTE SOLUCIÓN ANALÍTICA.

ES IMPLEMENTABLE EN COMPUTADORES Y ESCALABLE A GRANDES SISTEMAS.

DESVENTAJAS:

NO PROPORCIONA UNA FÓRMULA EXACTA, SOLO UNA APROXIMACIÓN NUMÉRICA.

REQUIERE ANÁLISIS DEL ERROR Y CONTROL DE TOLERANCIAS.

PUEDE SER COSTOSO EN TIEMPO DE CÓMPUTO Y MEMORIA SI SE USAN MALLAS FINAS.

CONCLUSION

Ambos métodos son herramientas fundamentales en el análisis de ecuaciones de Poisson. El método analítico permite comprender y validar, mientras que el método numérico permite aplicar la teoría a problemas concretos del mundo real.

MUCHAS GRACIAS