

5.1. Arbres



1 . Introduction

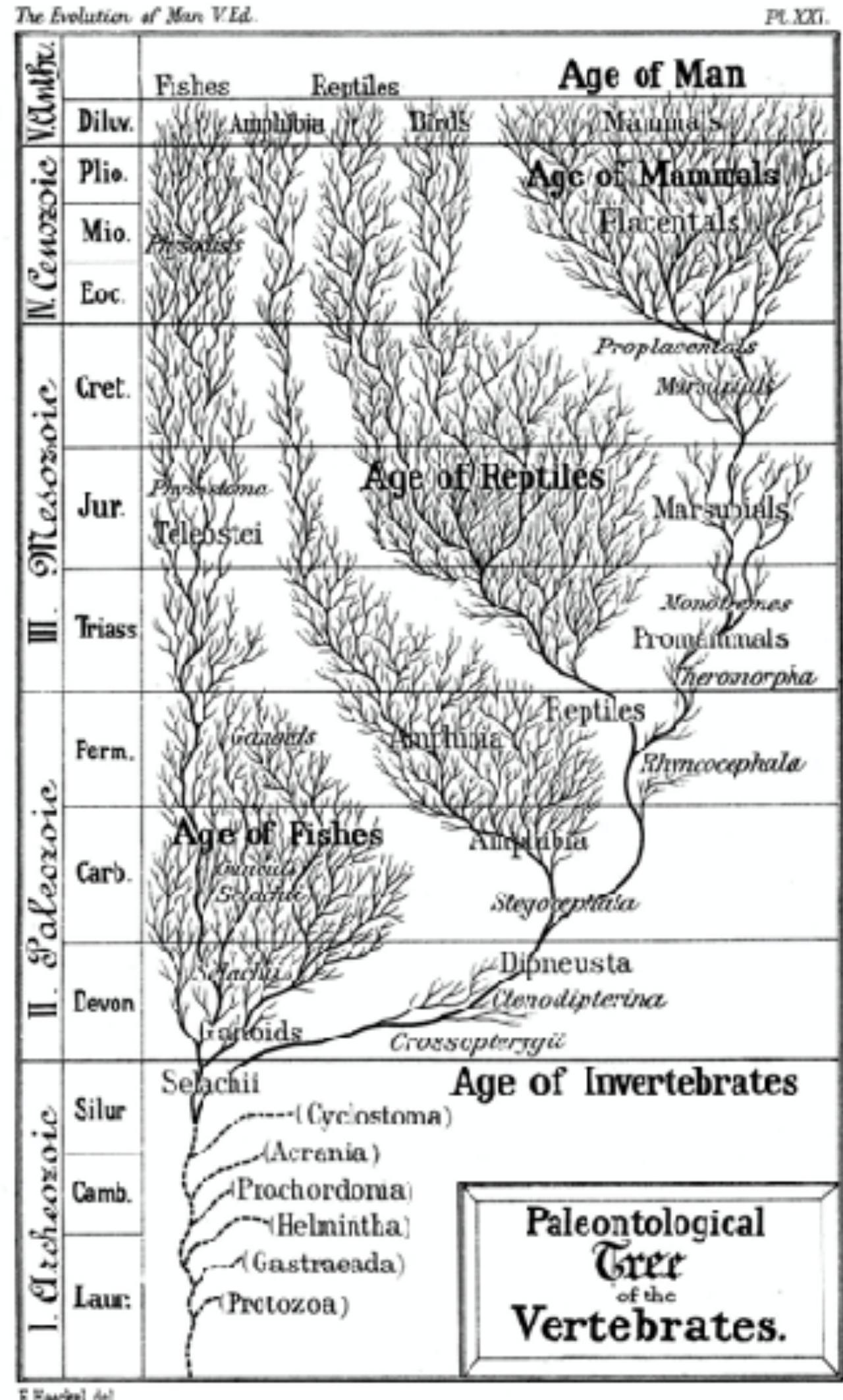


Exemples



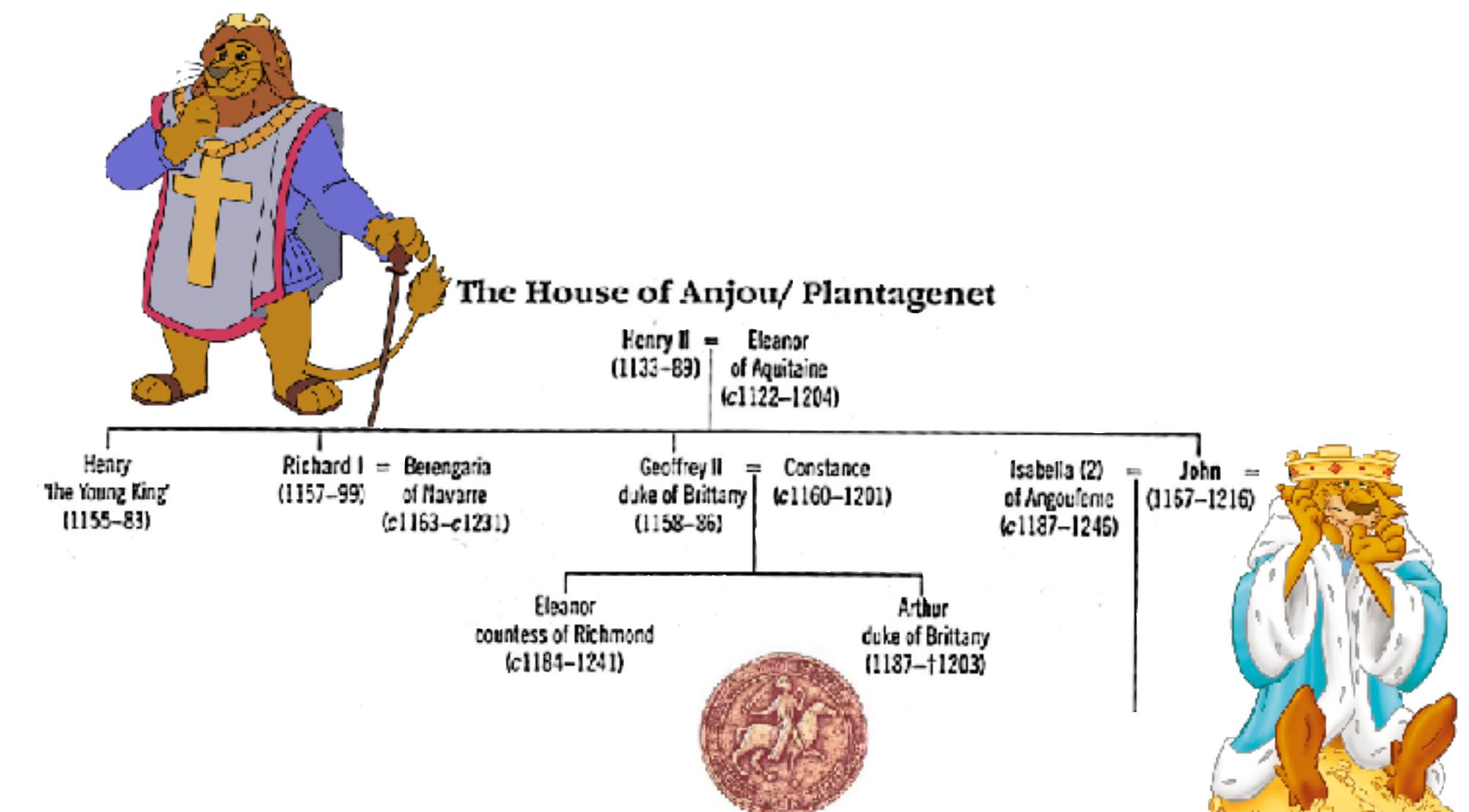
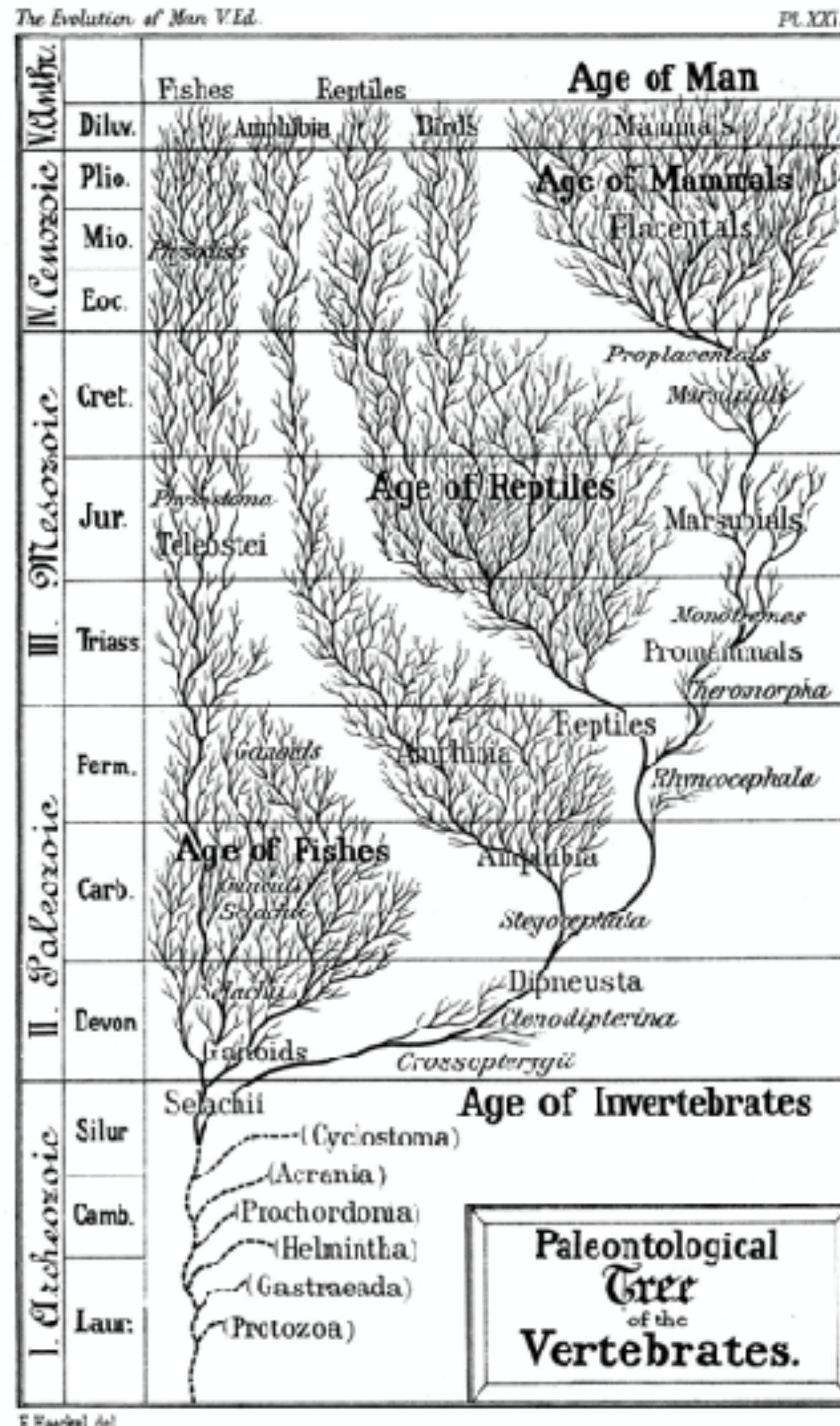


Exemples



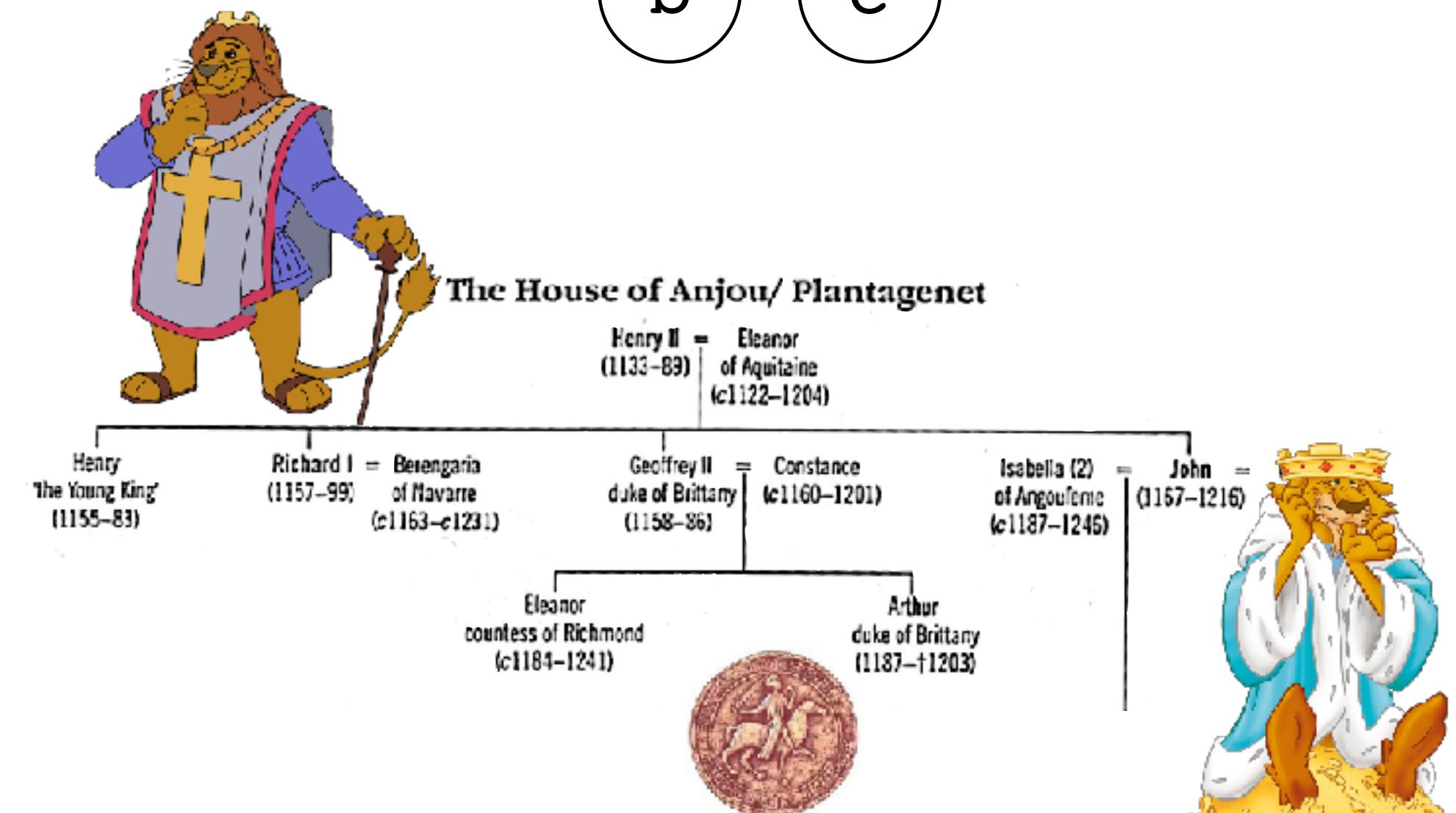
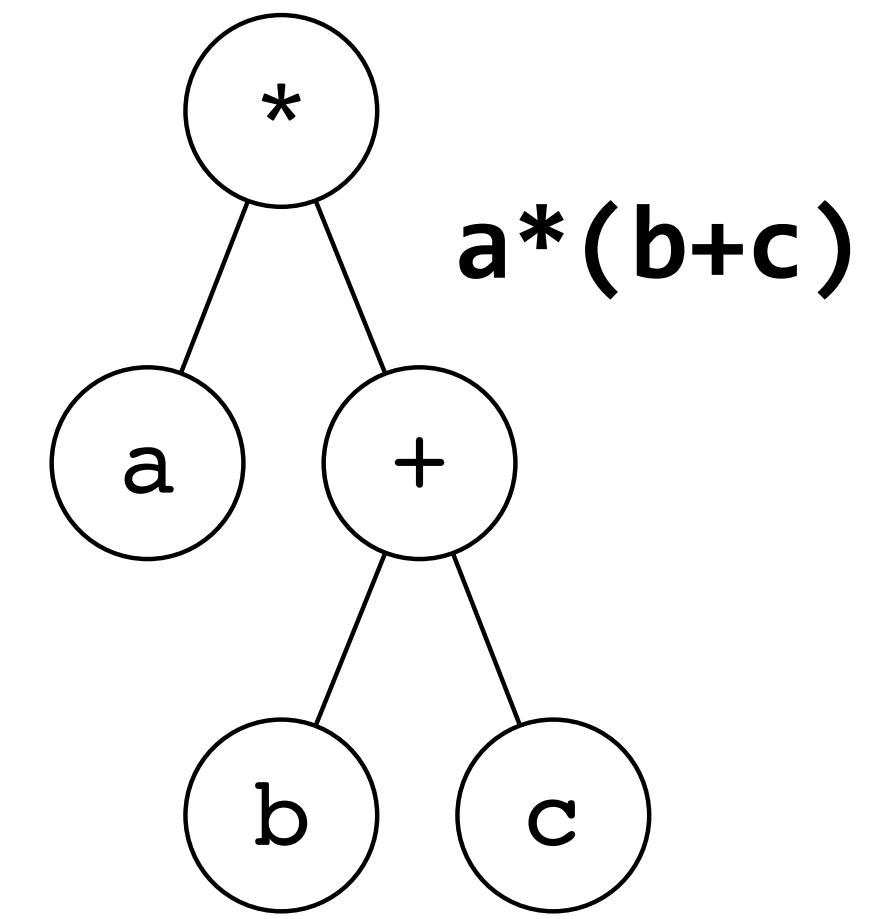
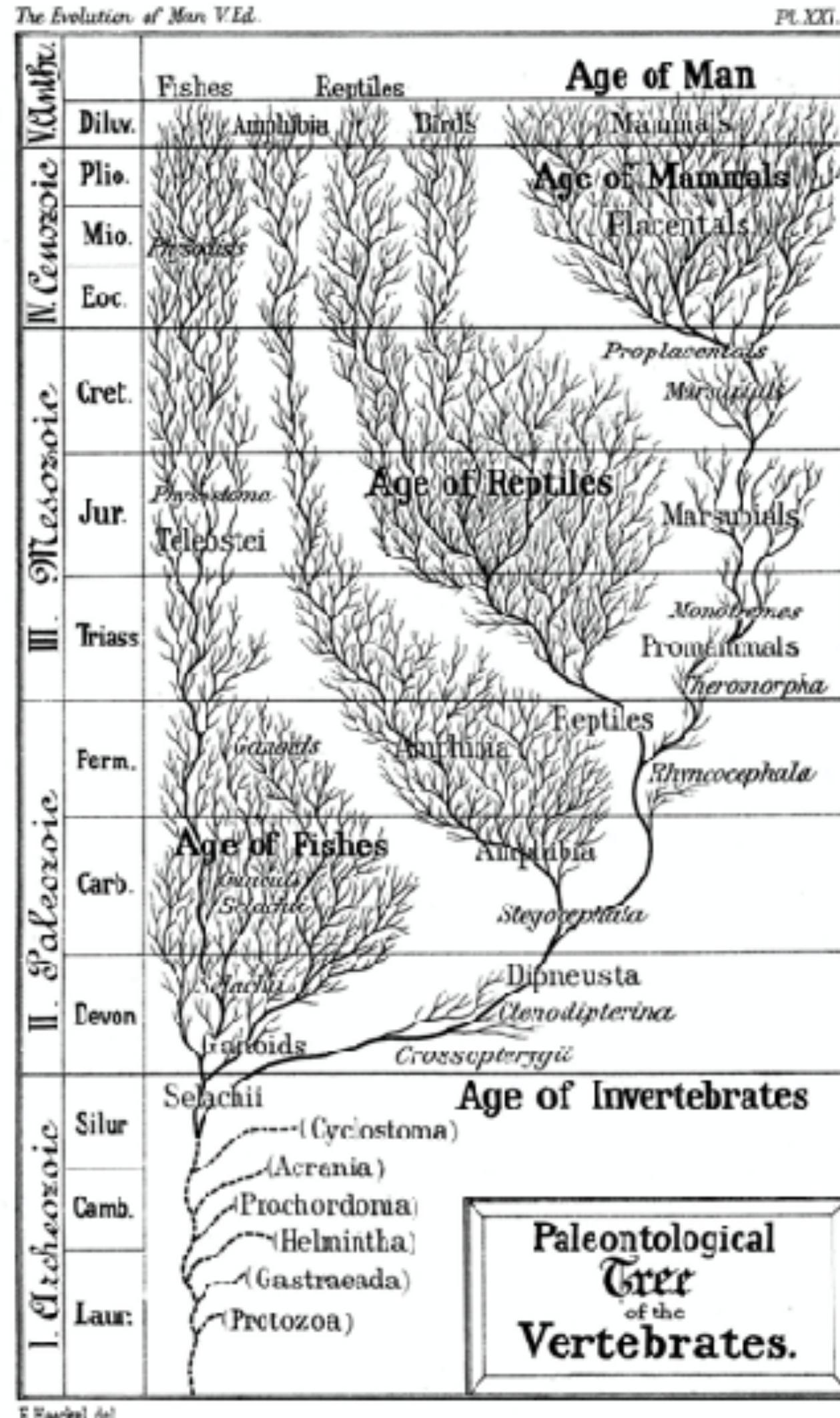


Exemples



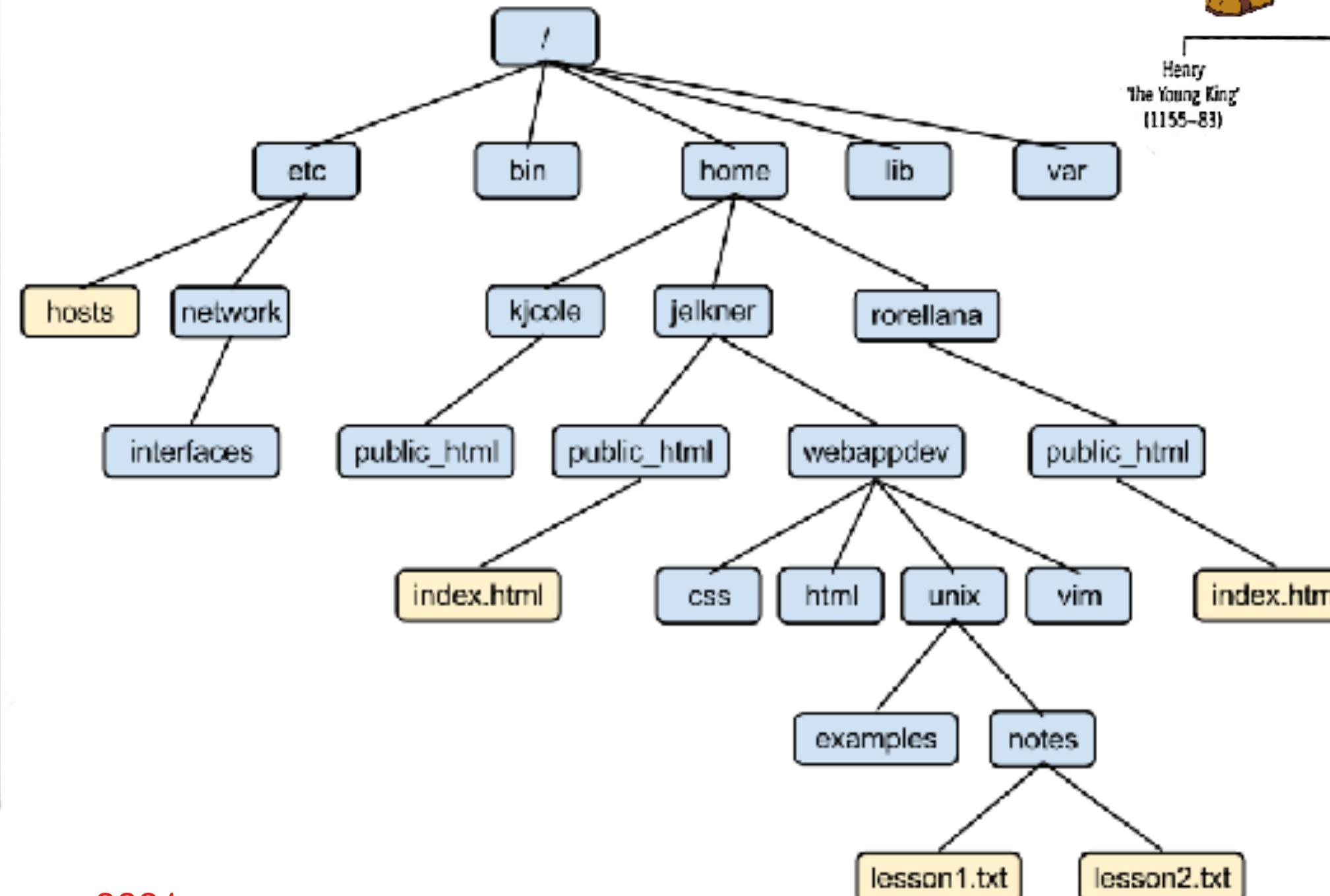
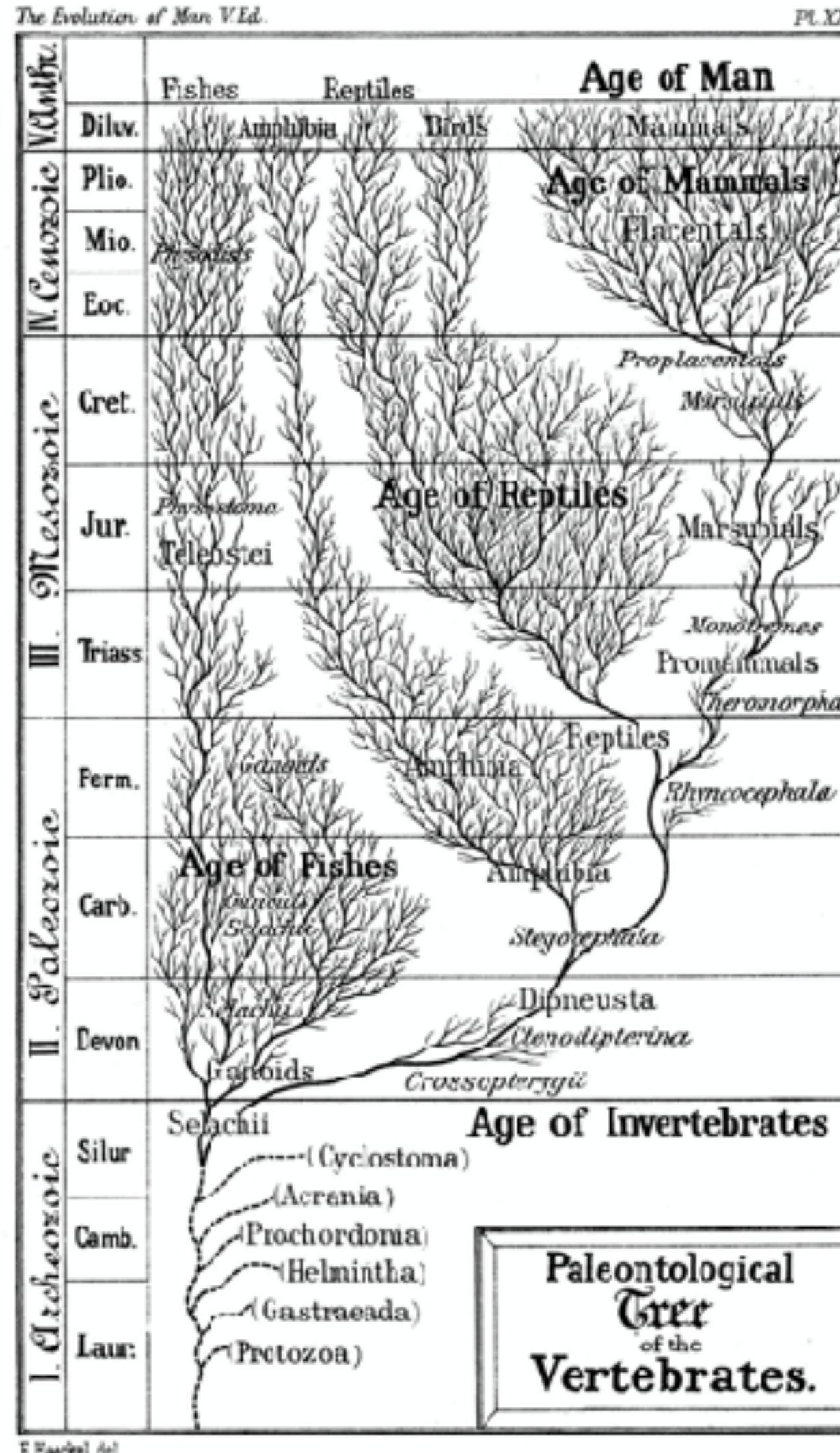


Exemples

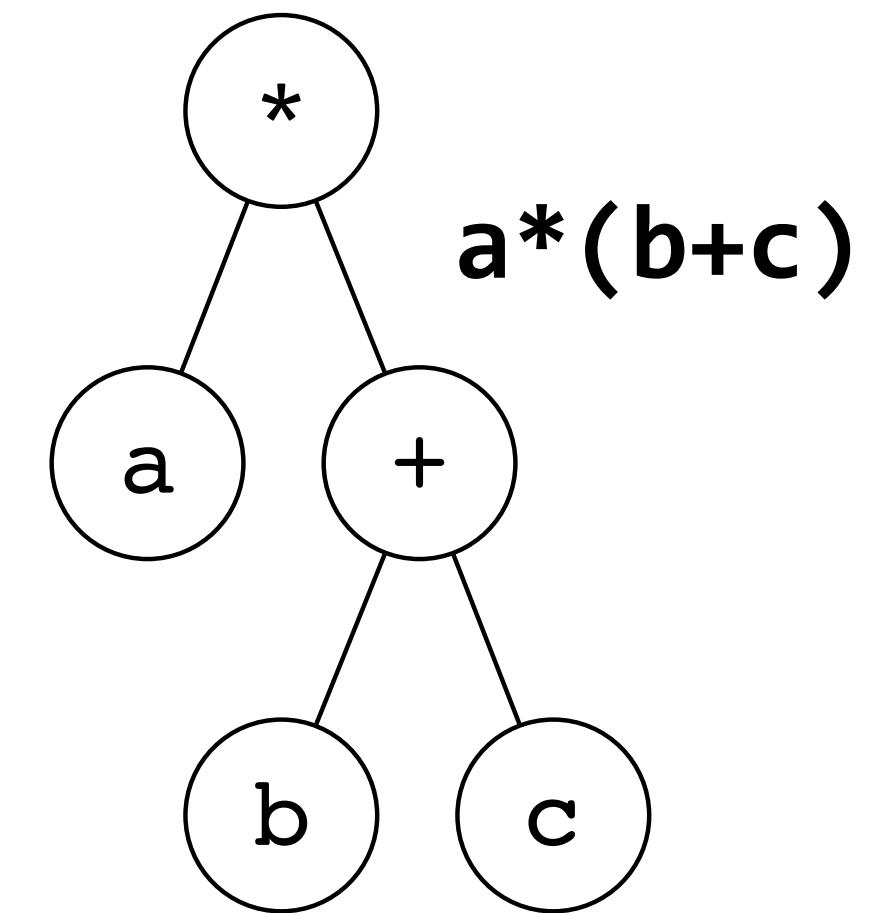
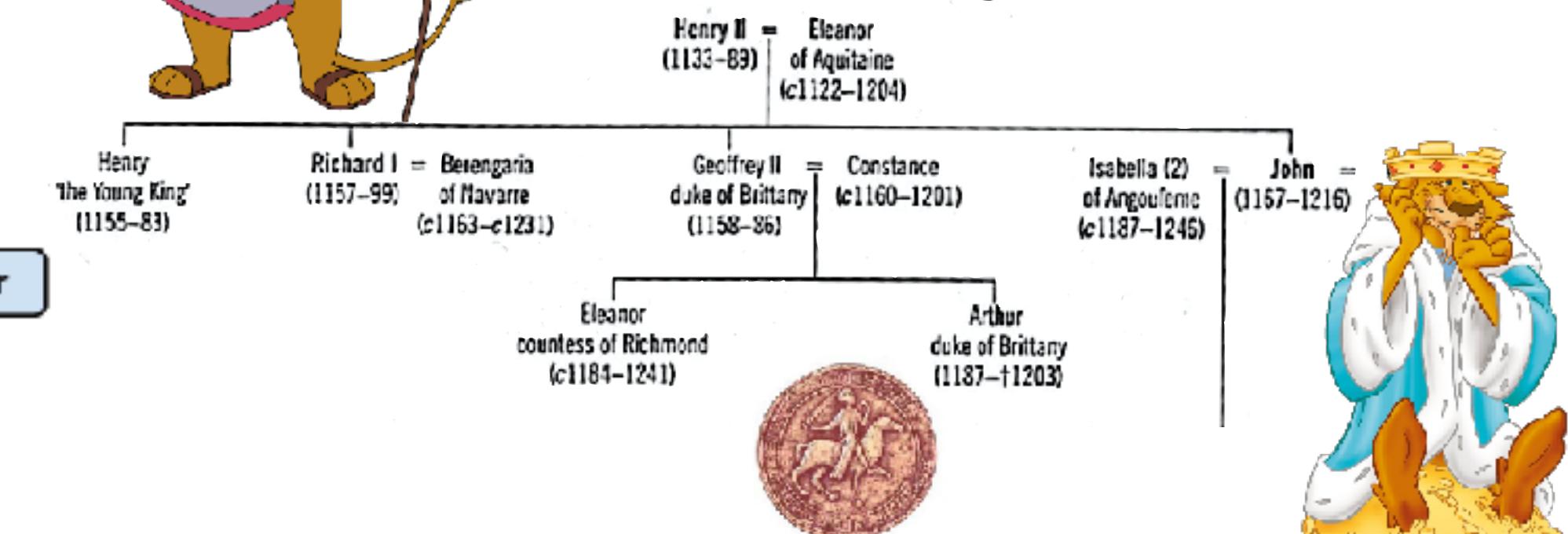




Exemples

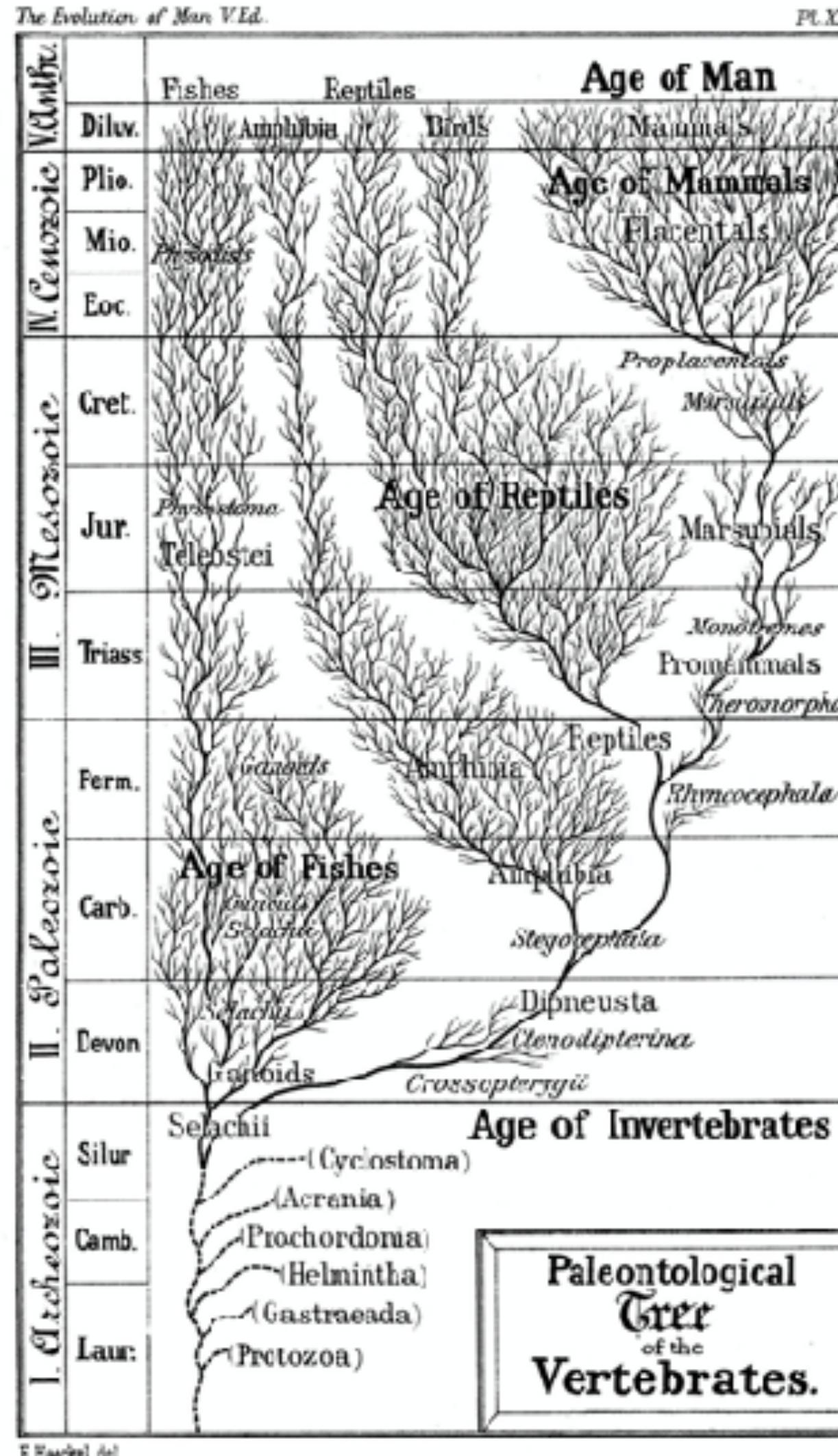


The House of Anjou/ Plantagenet

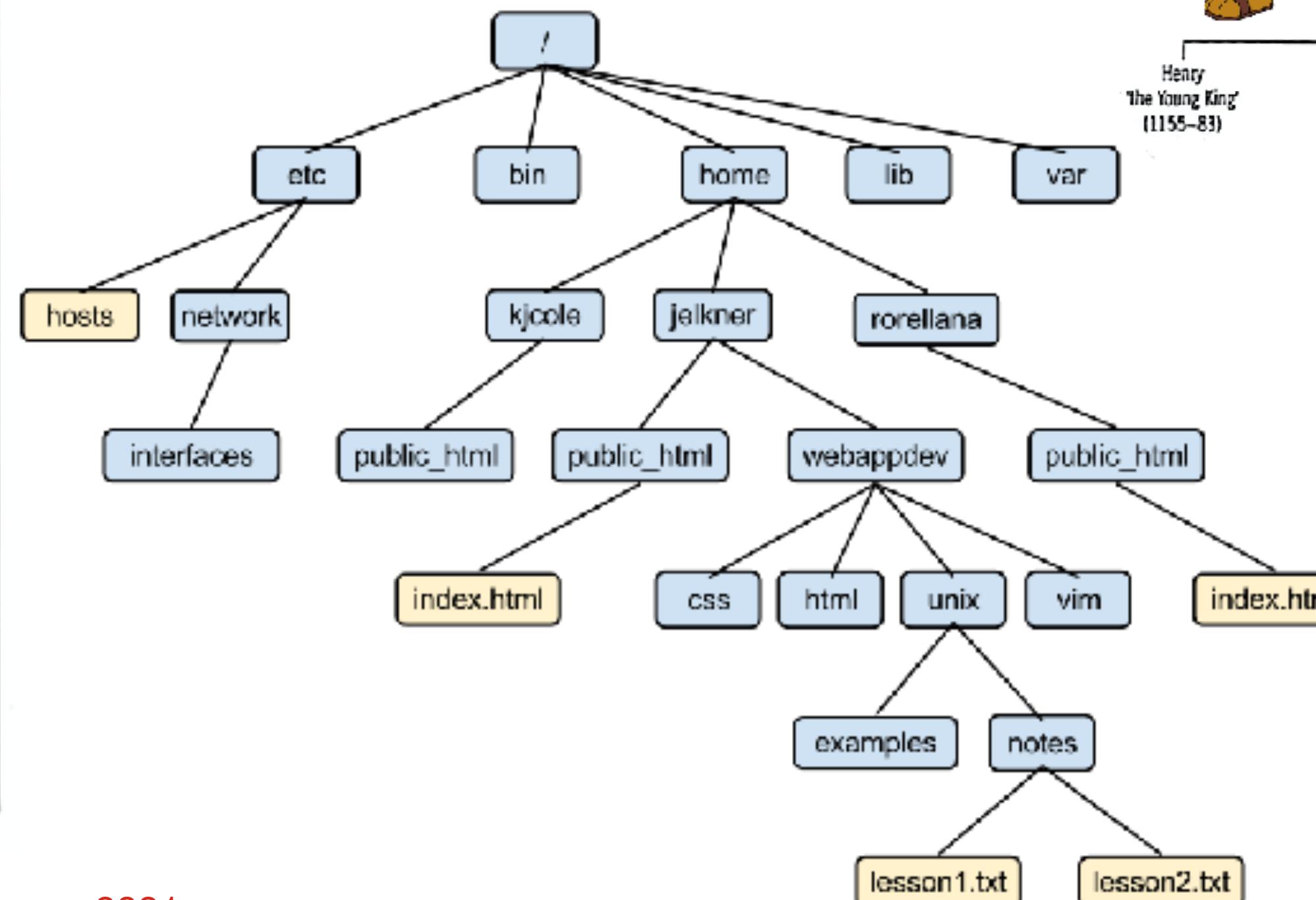
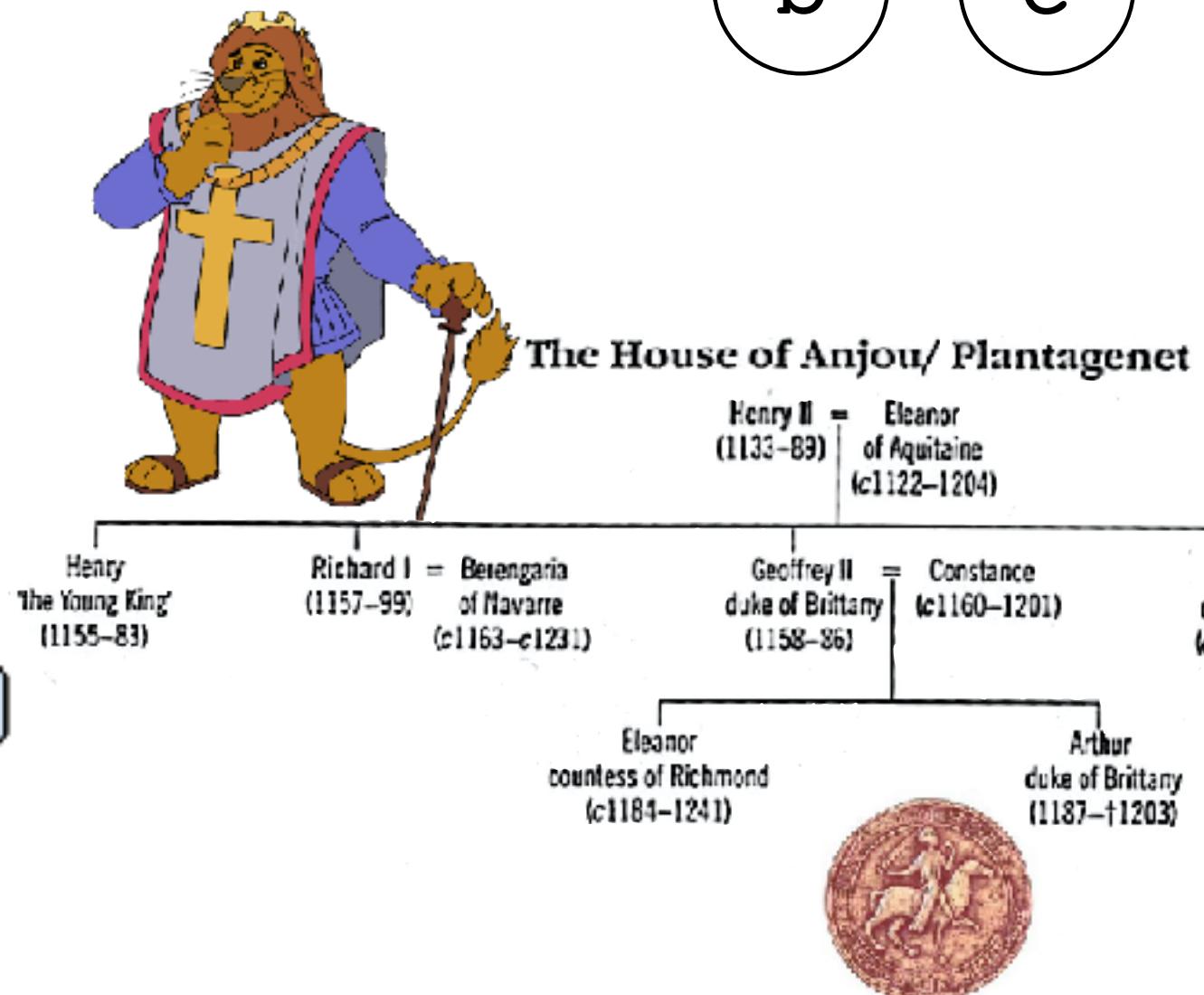
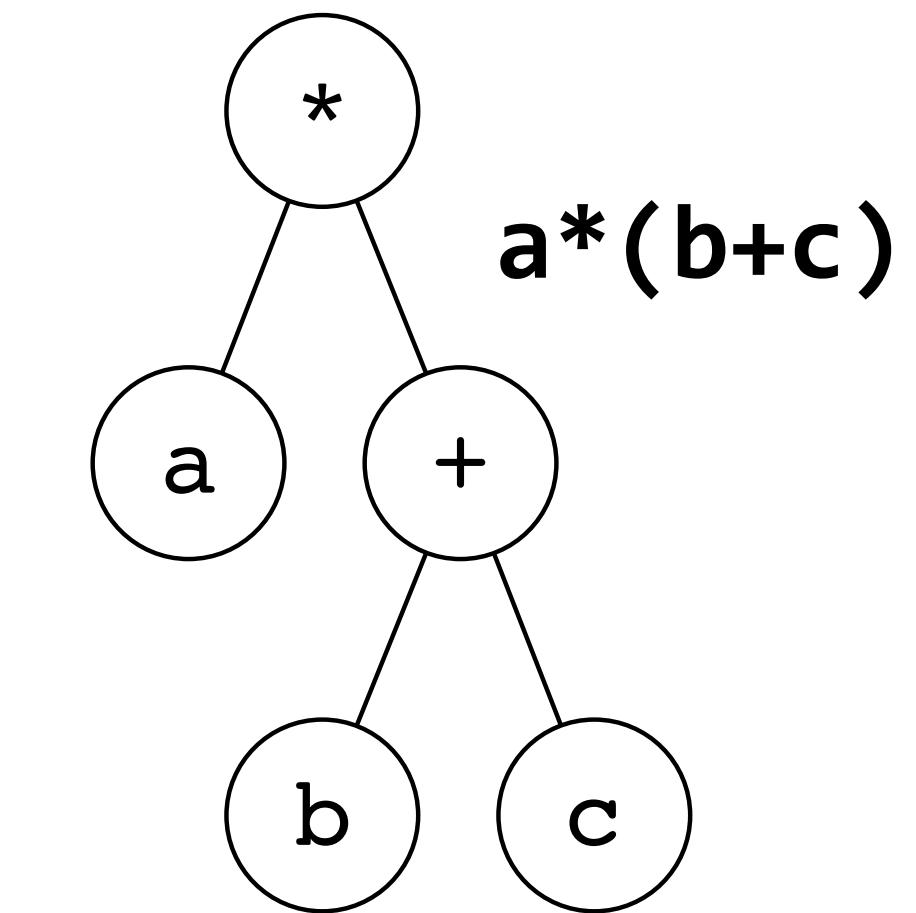




Exemples



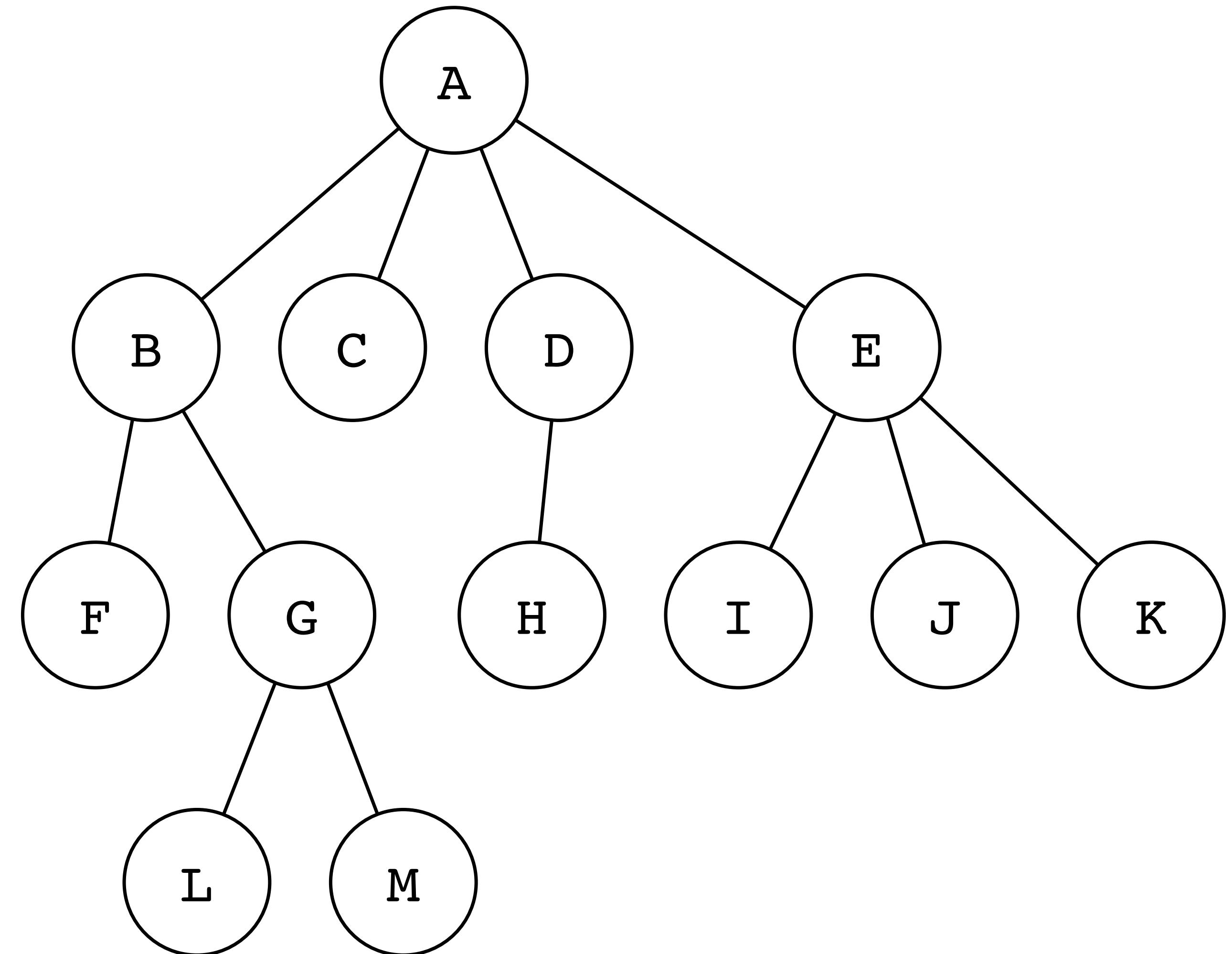
set	Set (class template)
multiset	Multiple-key set (class template)
map	Map (class template)
multimap	Multiple-key map (class template)





Qu'est-ce qu'un arbre?

Extension du concept de liste avec plusieurs éléments suivants

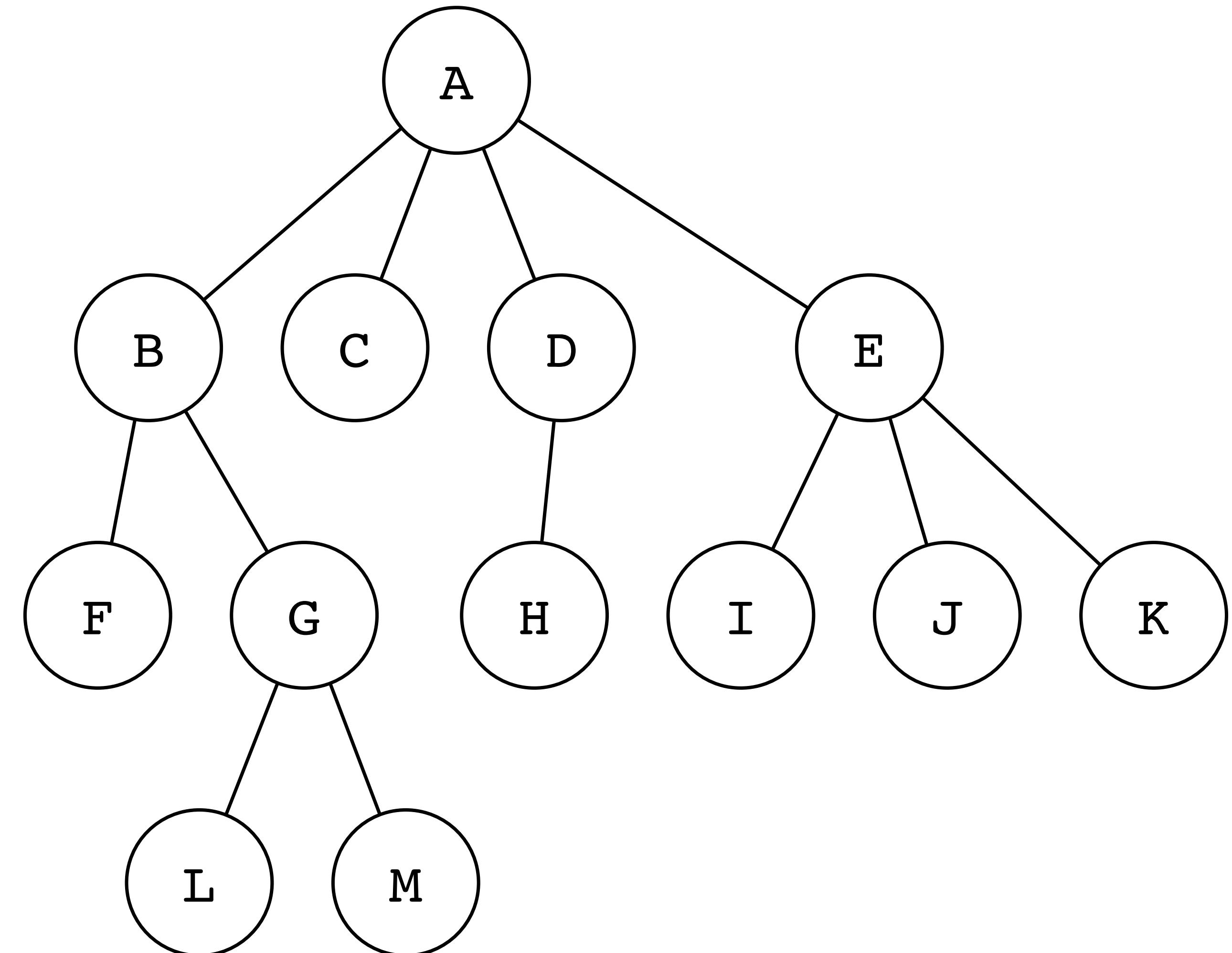




Qu'est-ce qu'un arbre?

Extension du concept de liste avec plusieurs éléments suivants

- Noeuds (maillons)

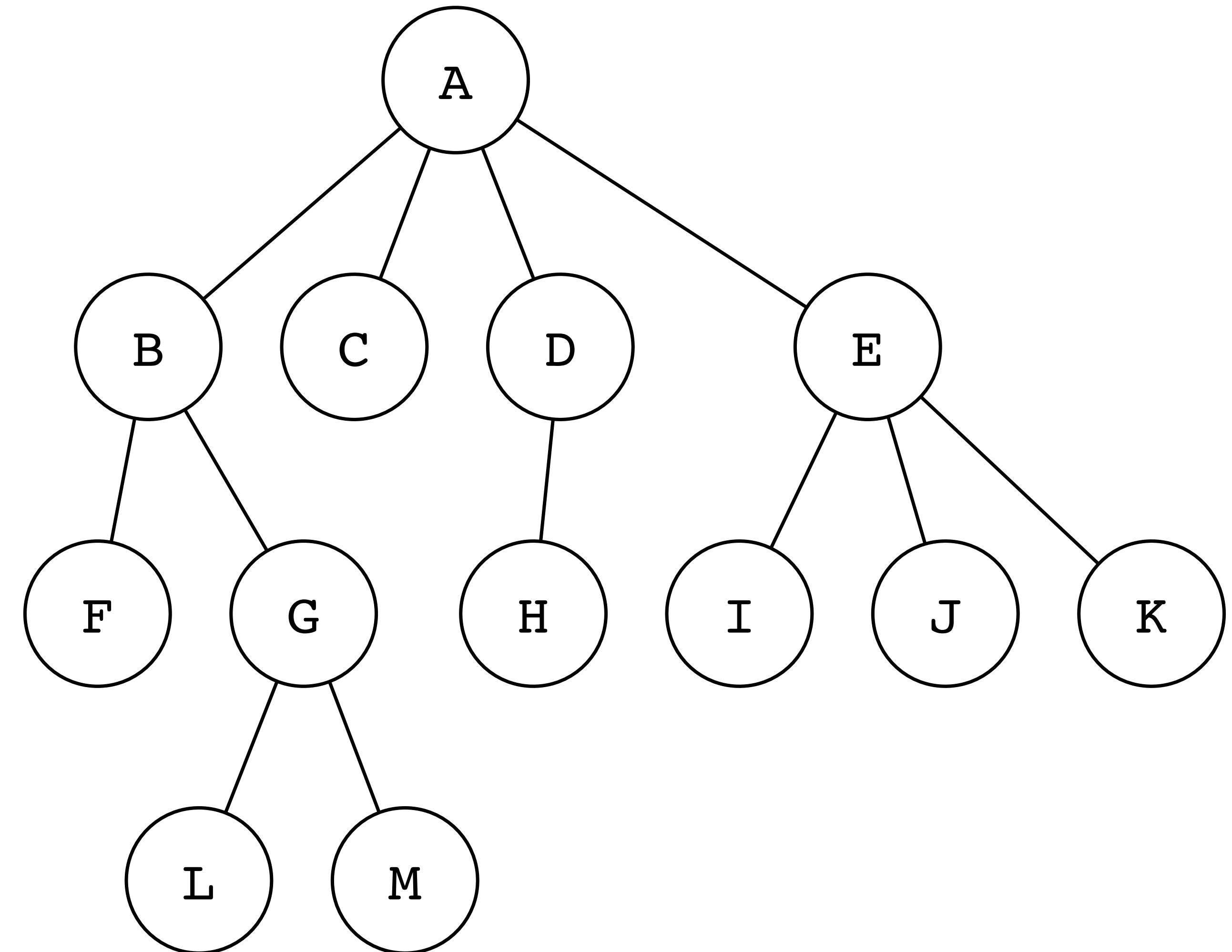




Qu'est-ce qu'un arbre?

Extension du concept de liste avec plusieurs éléments suivants

- Noeuds (maillons)
- Parent (précédent)

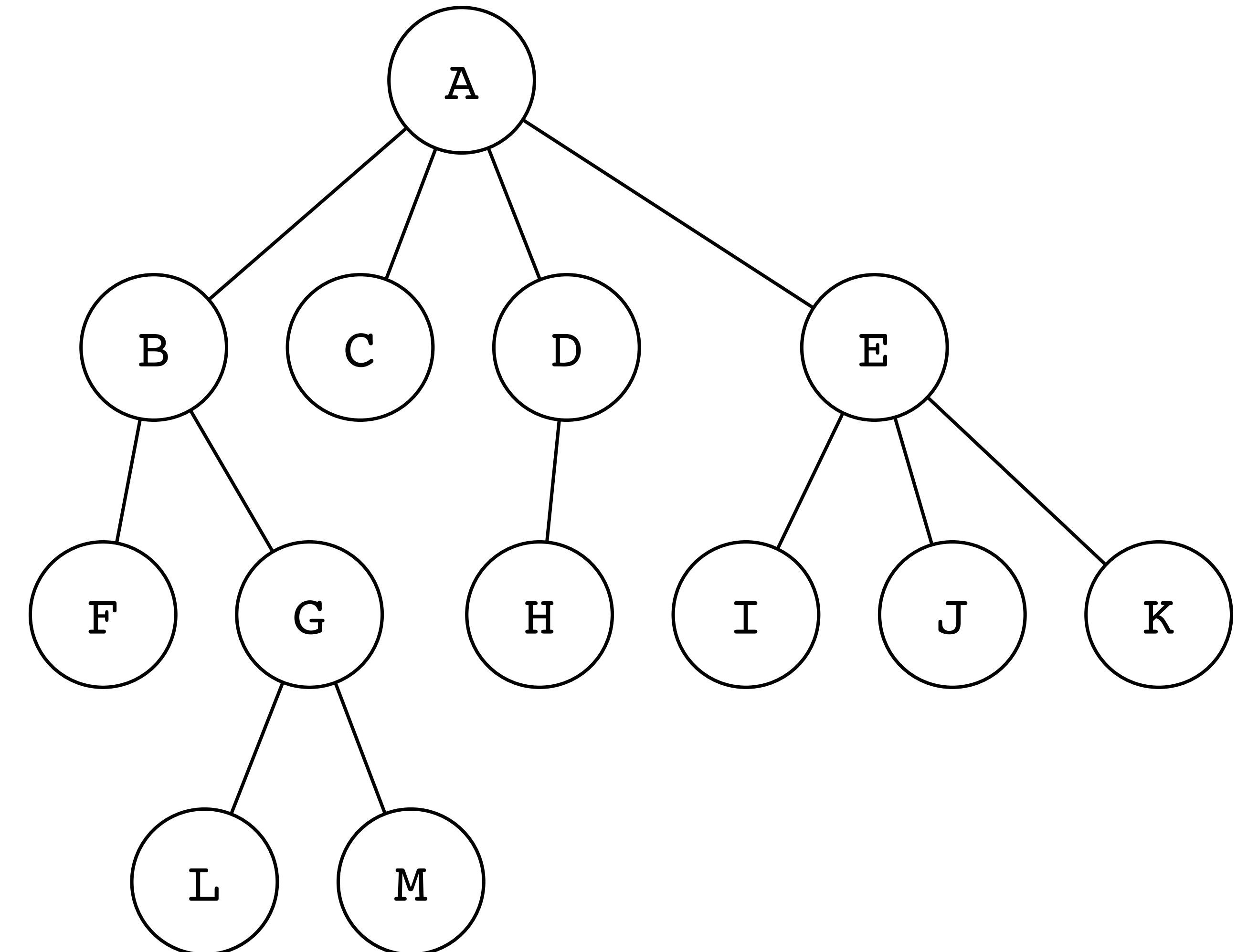




Qu'est-ce qu'un arbre?

Extension du concept de liste avec plusieurs éléments suivants

- Noeuds (maillons)
- Parent (précédent)
- Enfants (suivant)

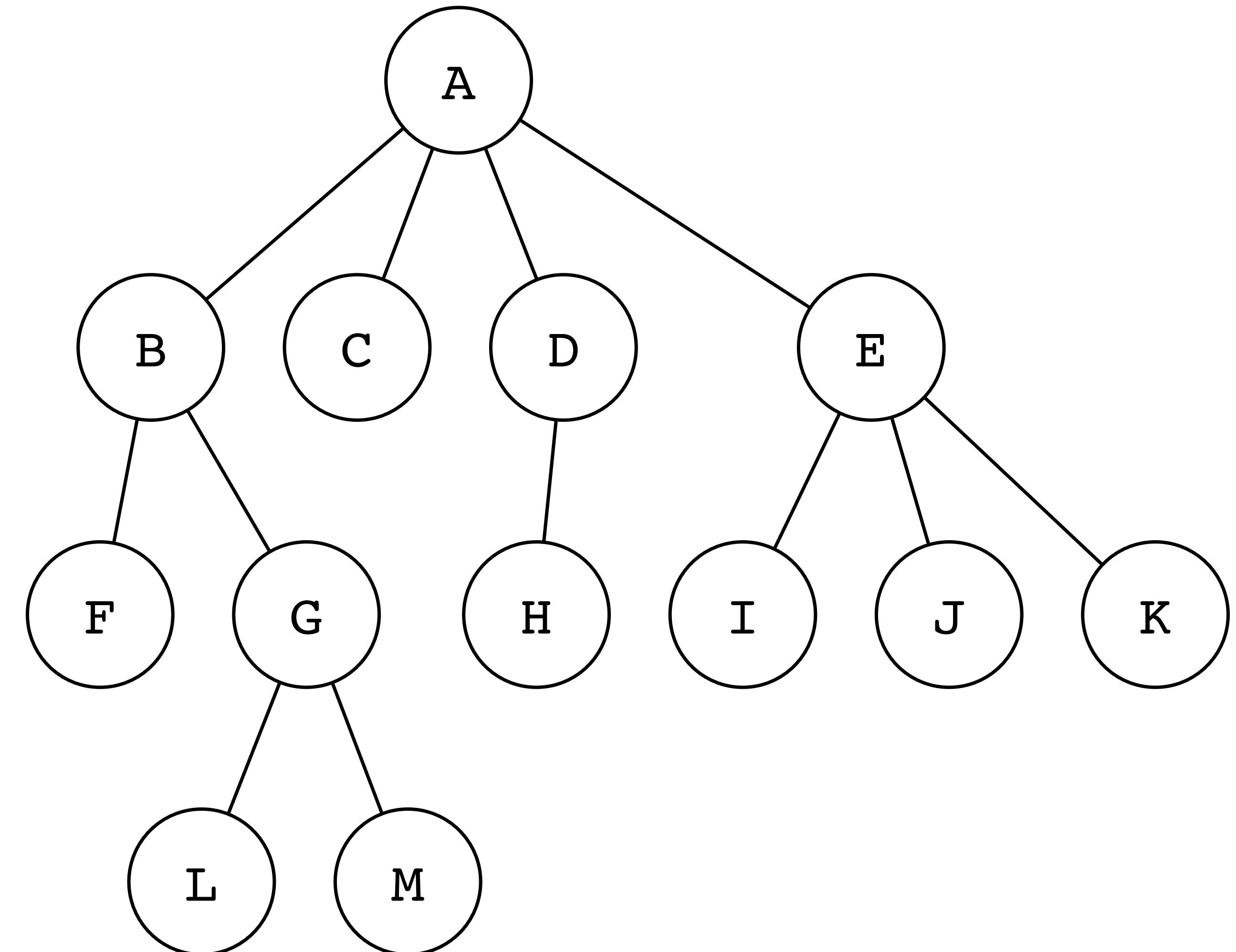




Qu'est-ce qu'un arbre?

Extension du concept de liste avec plusieurs éléments suivants

- Noeuds (maillons)
- Parent (précédent)
- Enfants (suivant)
- Racine (début)

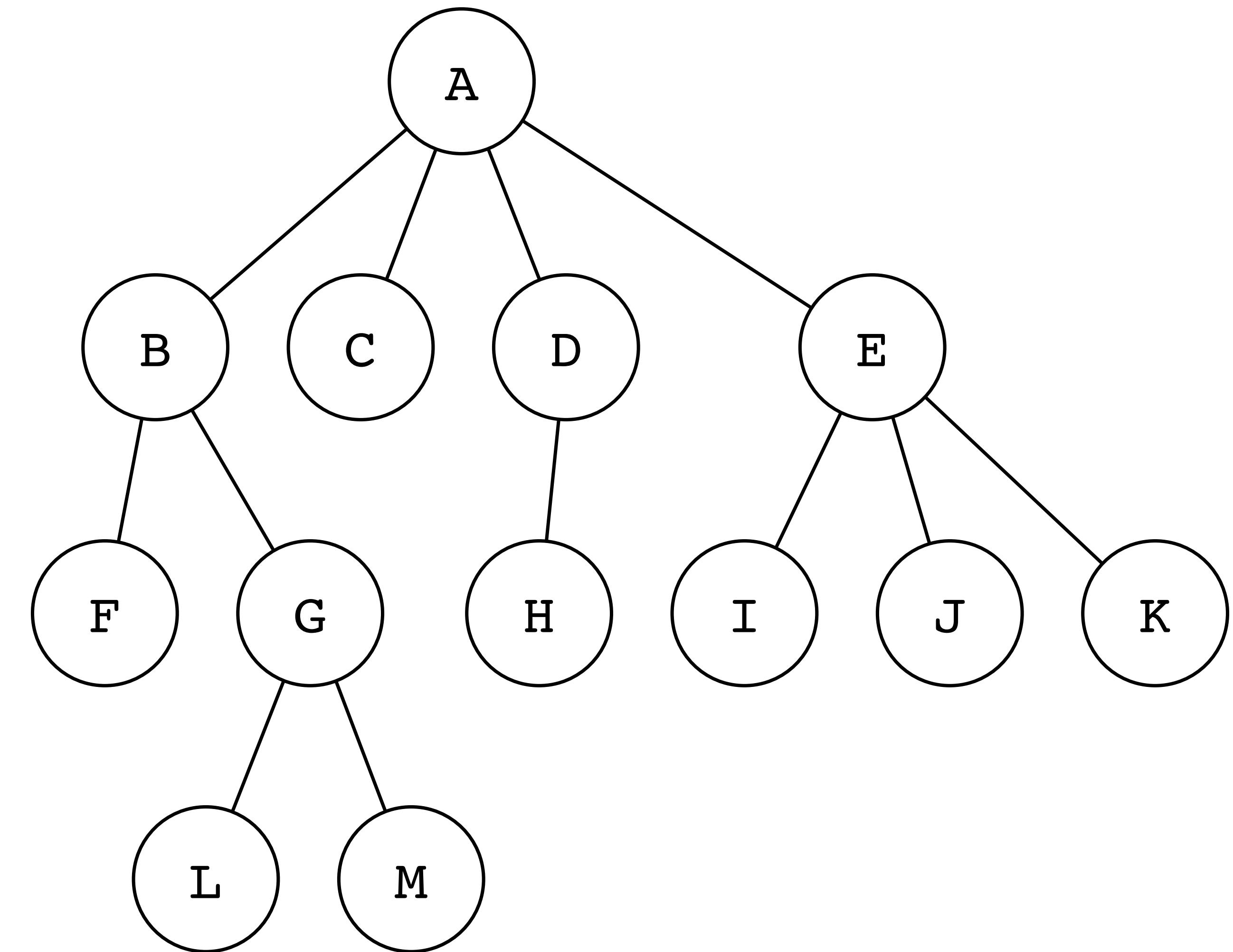




Qu'est-ce qu'un arbre?

Extension du concept de liste avec plusieurs éléments suivants

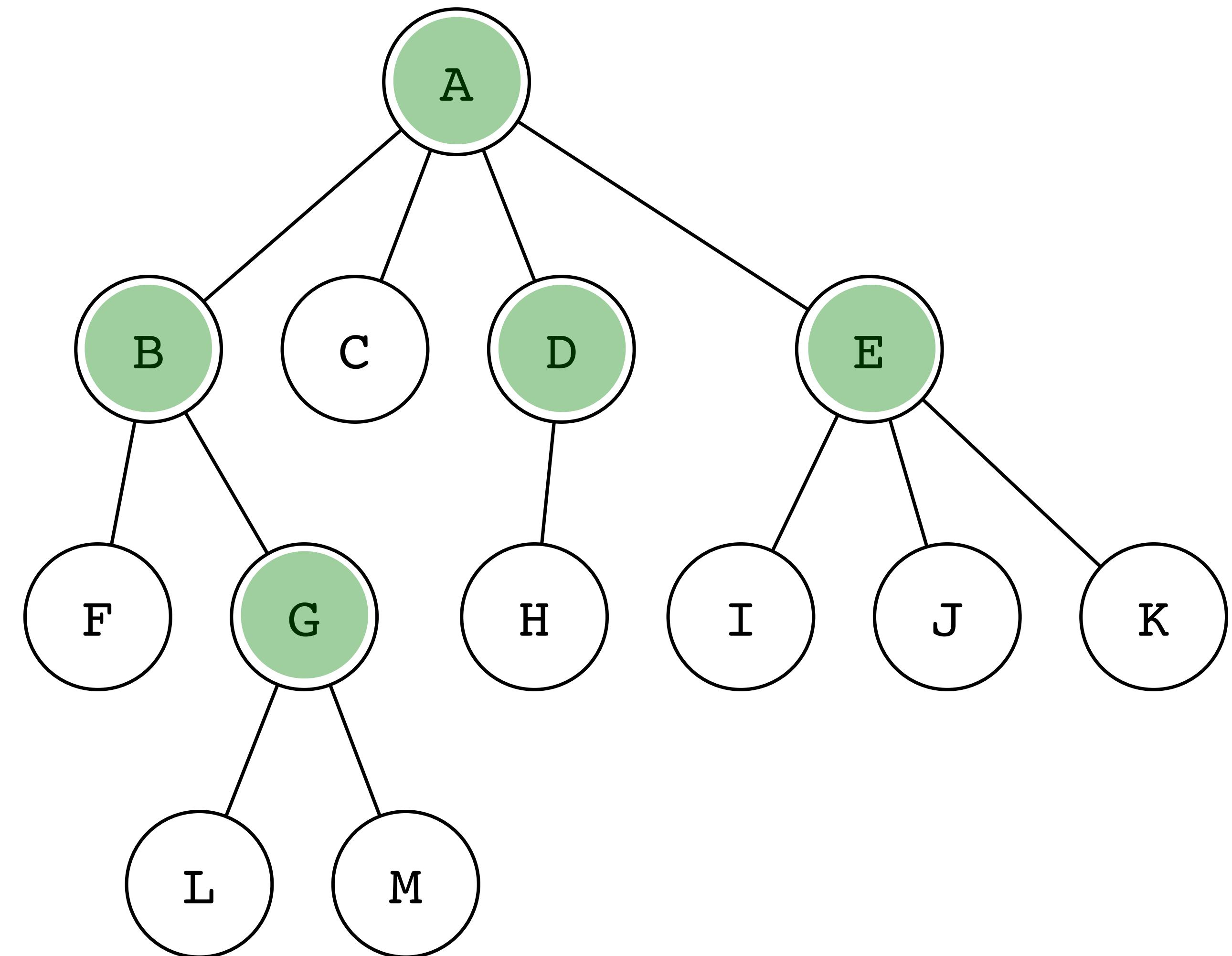
- Noeuds (maillons)
- Parent (précédent)
- Enfants (suivant)
- Racine (début)
- Etiquettes





Nomenclature des noeuds

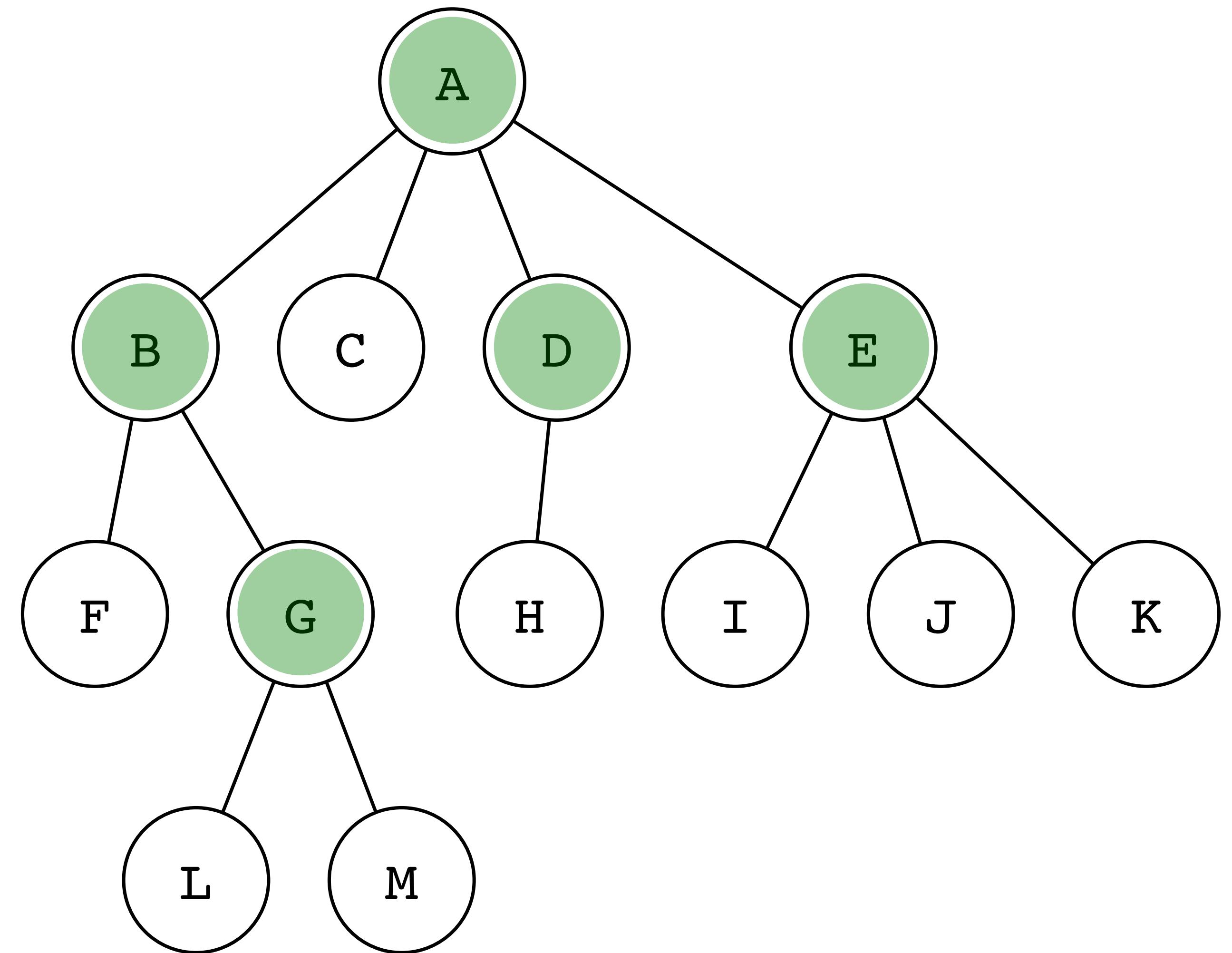
- **Noeuds internes :**
ont un ou
plusieurs enfants





Nomenclature des noeuds

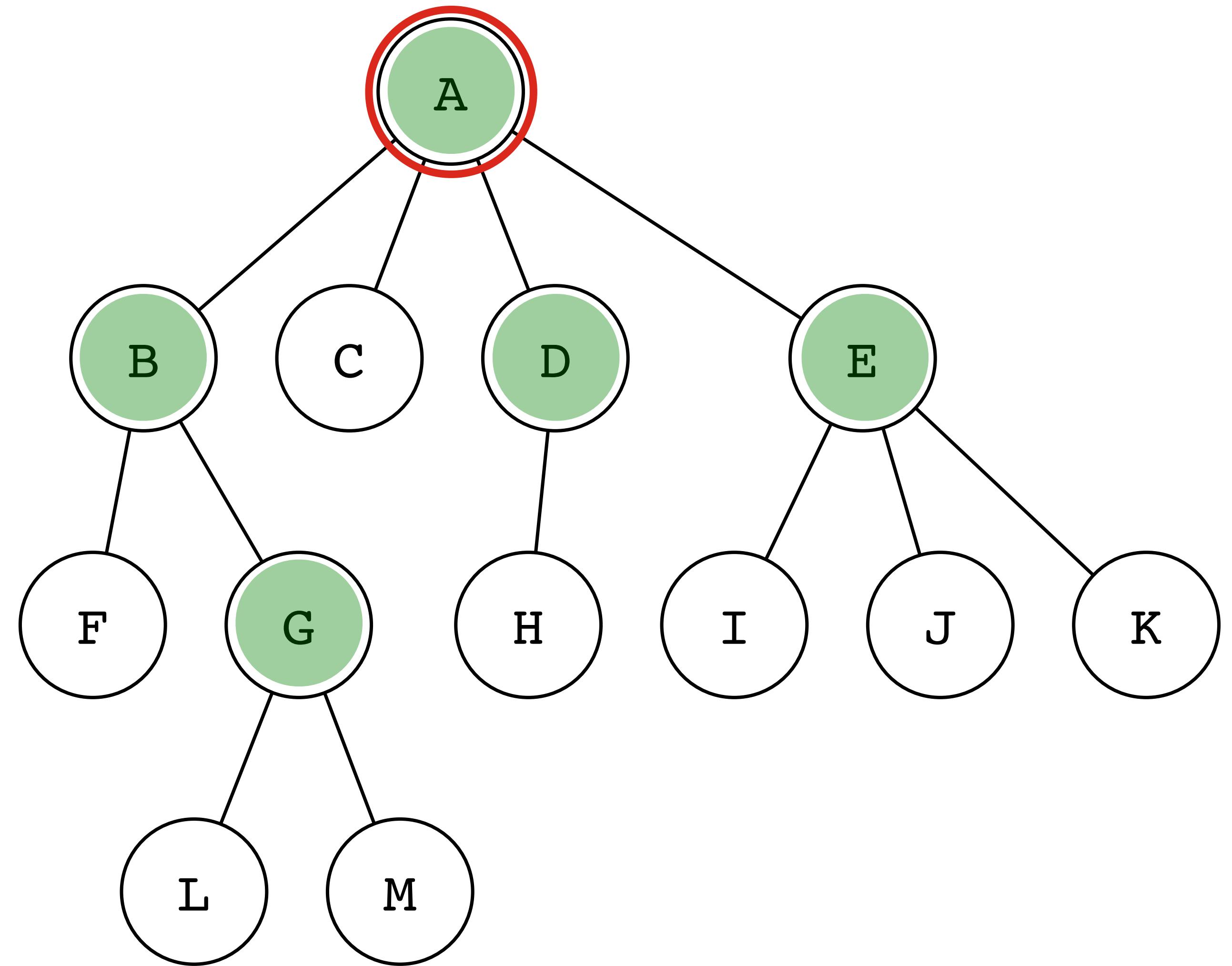
- Noeuds internes : ont un ou plusieurs enfants
- Feuilles : n'ont pas d'enfant





Nomenclature des noeuds

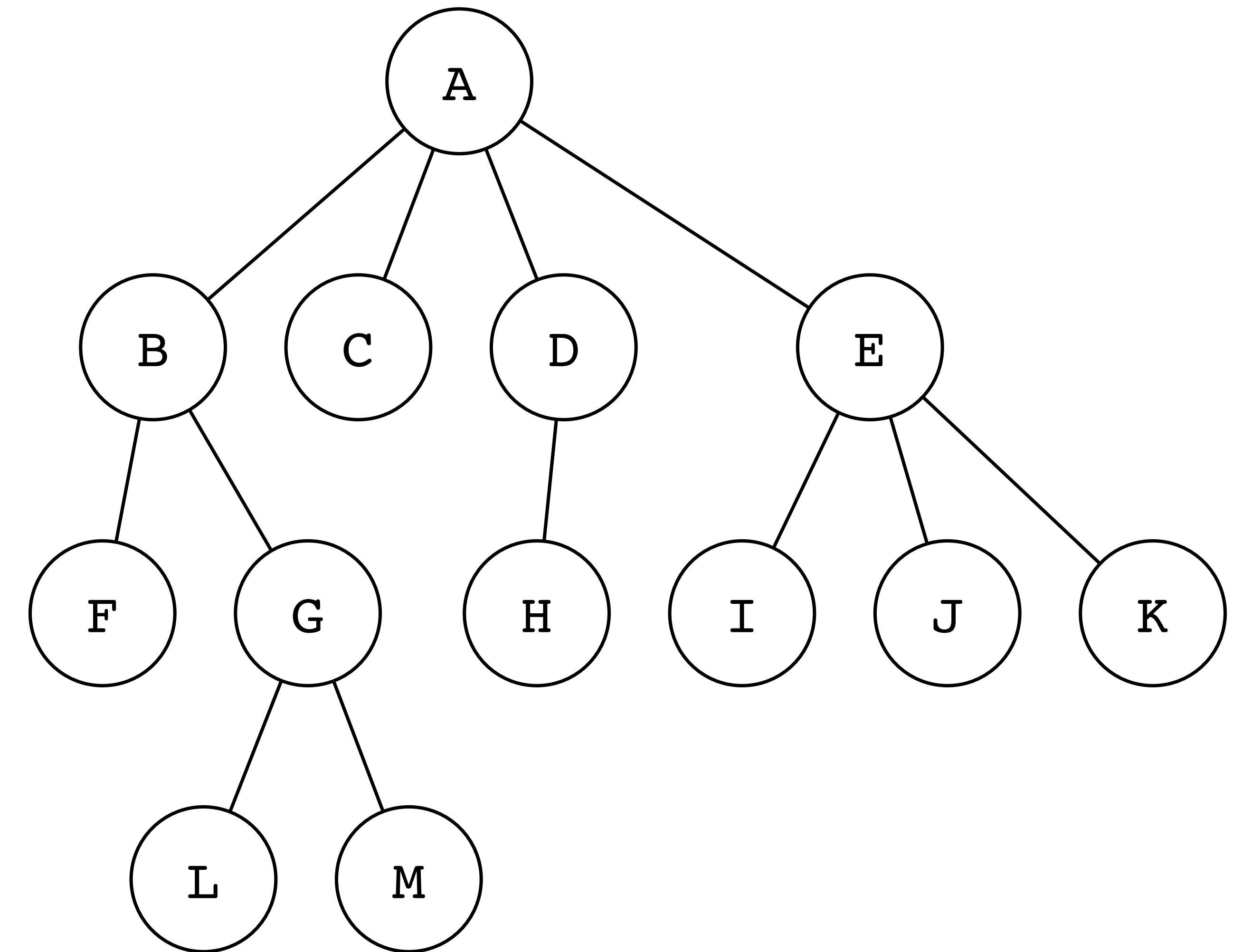
- Noeuds internes : ont un ou plusieurs enfants
- Feuilles : n'ont pas d'enfant
- Racine : n'a pas de parent





Degrés

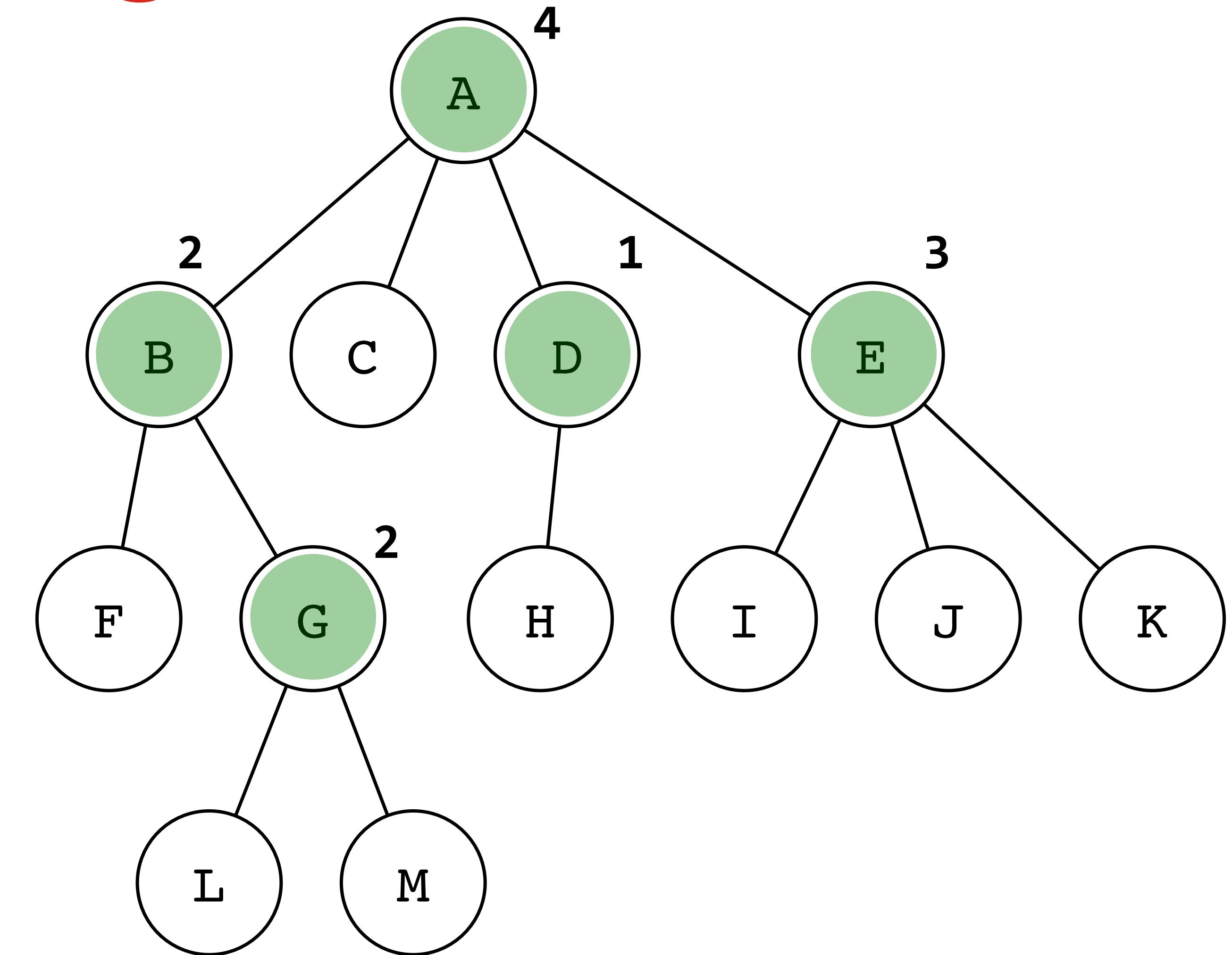
- Degré d'un noeud : nombre d'enfants





Degrés

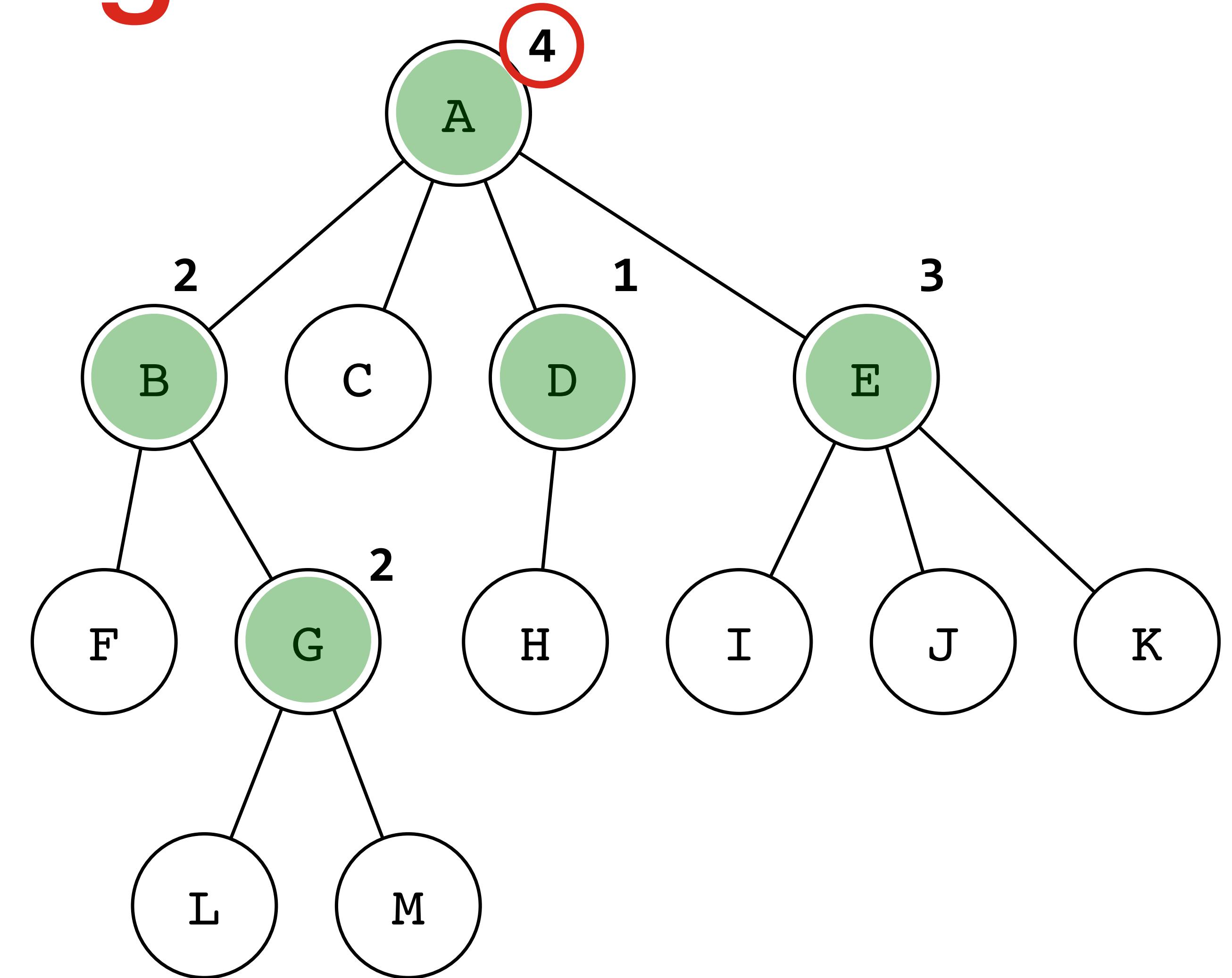
- Degré d'un noeud : nombre d'enfants





Degrés

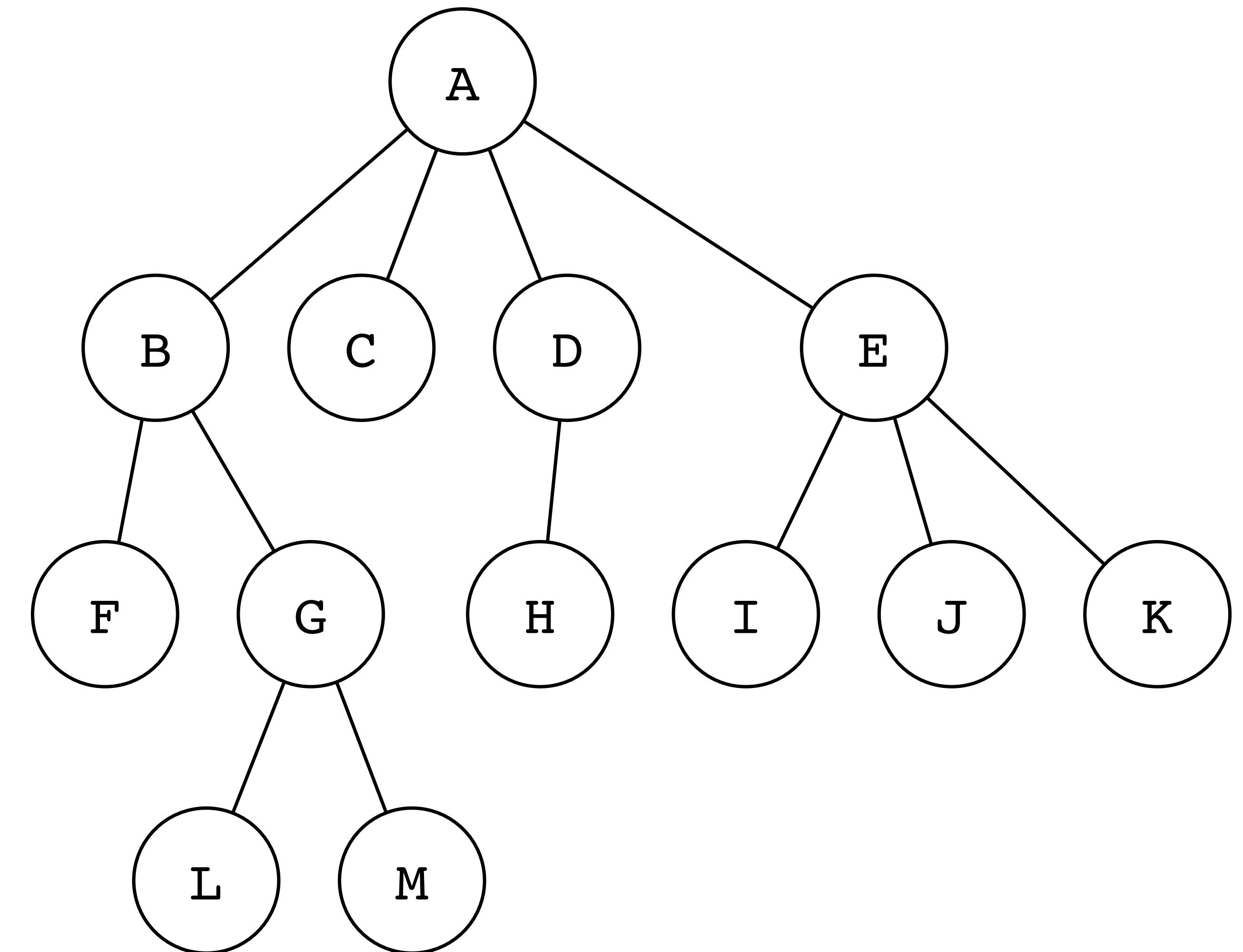
- Degré d'un noeud : nombre d'enfants
- Degré d'un arbre : degré max de ses noeuds





Chemins

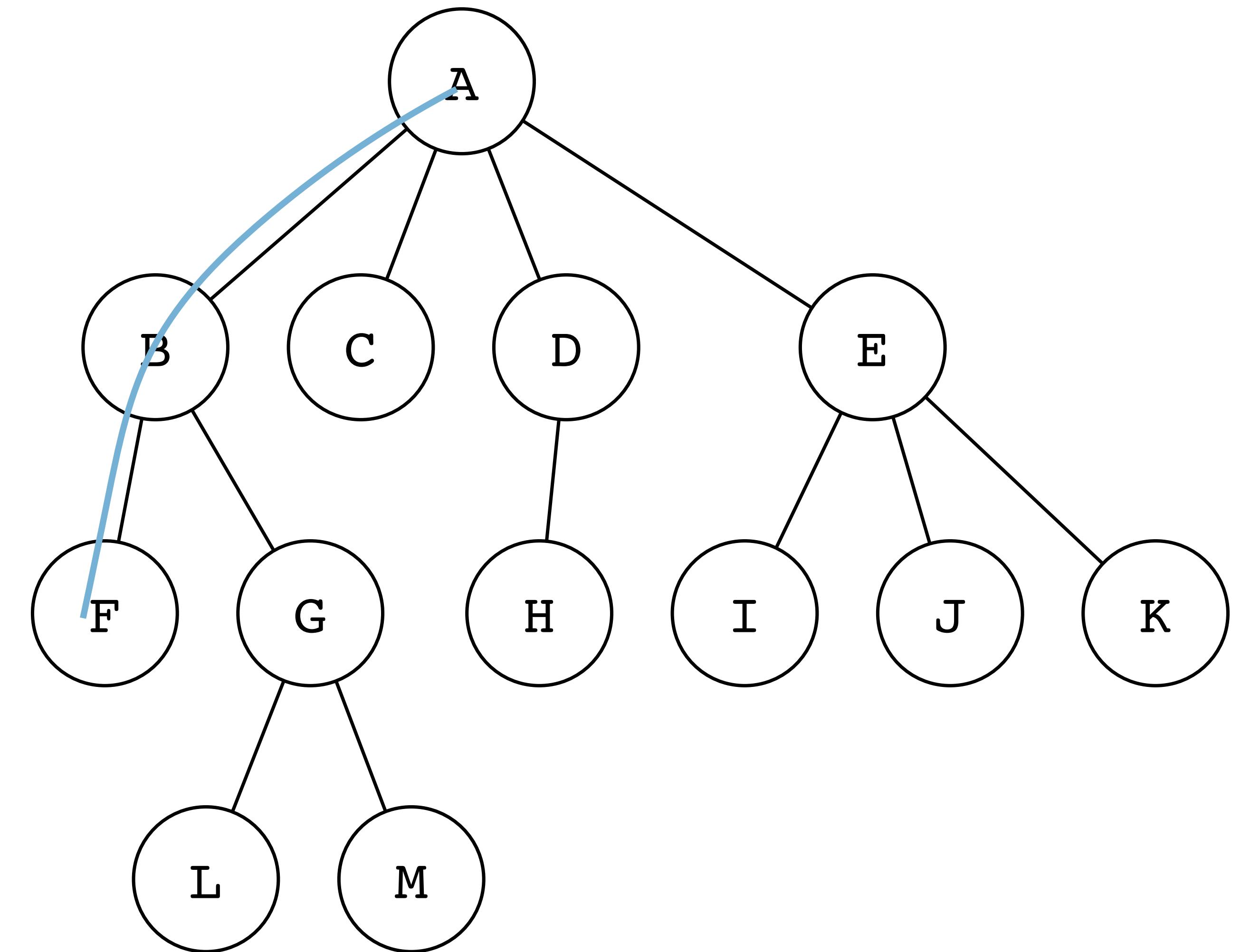
- Chemin d'un noeud : suite des noeuds reliant la racine au noeud





Chemins

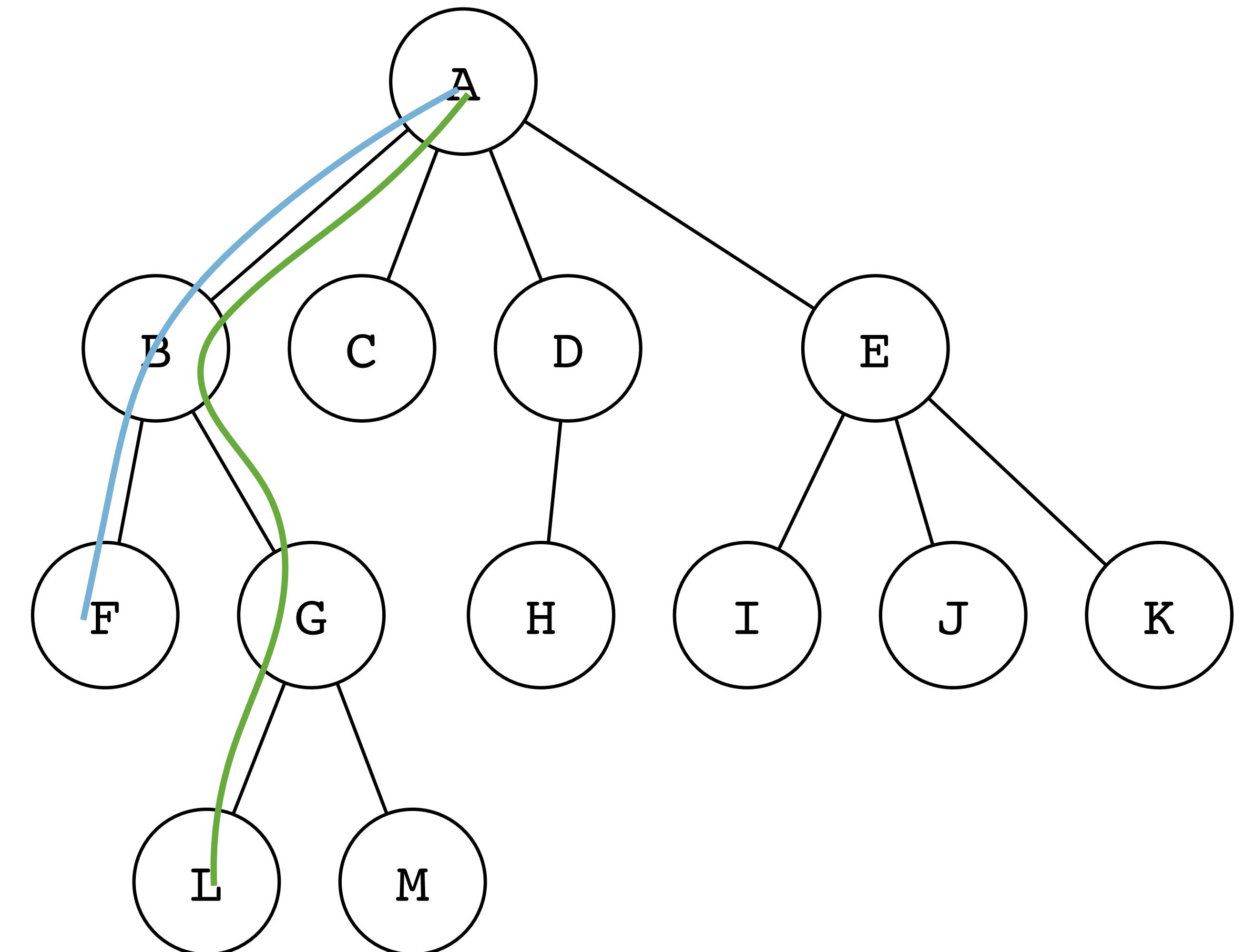
- Chemin d'un noeud : suite des noeuds reliant la racine au noeud





Chemins

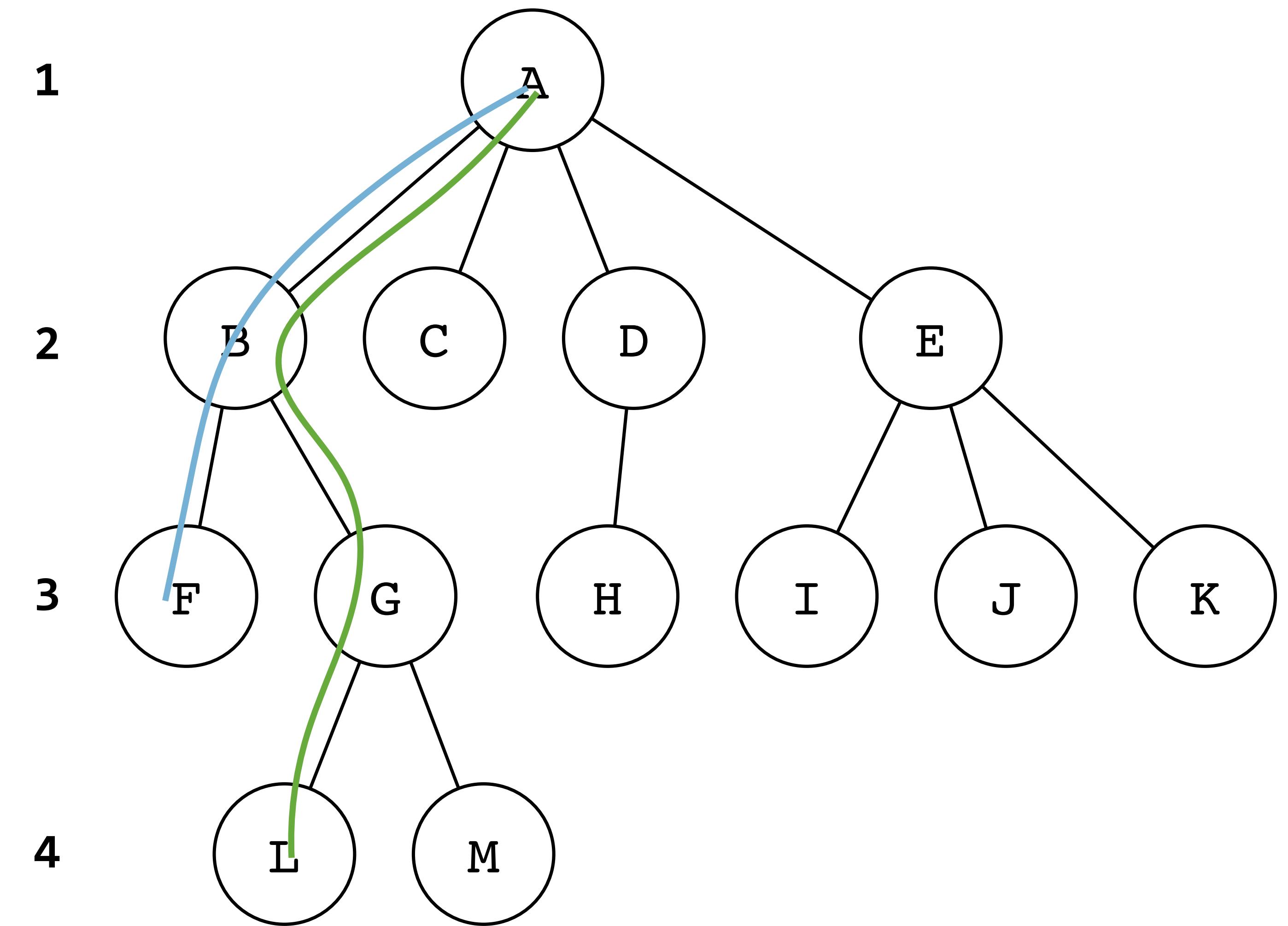
- Chemin d'un noeud : suite des noeuds reliant la racine au noeud





Chemins

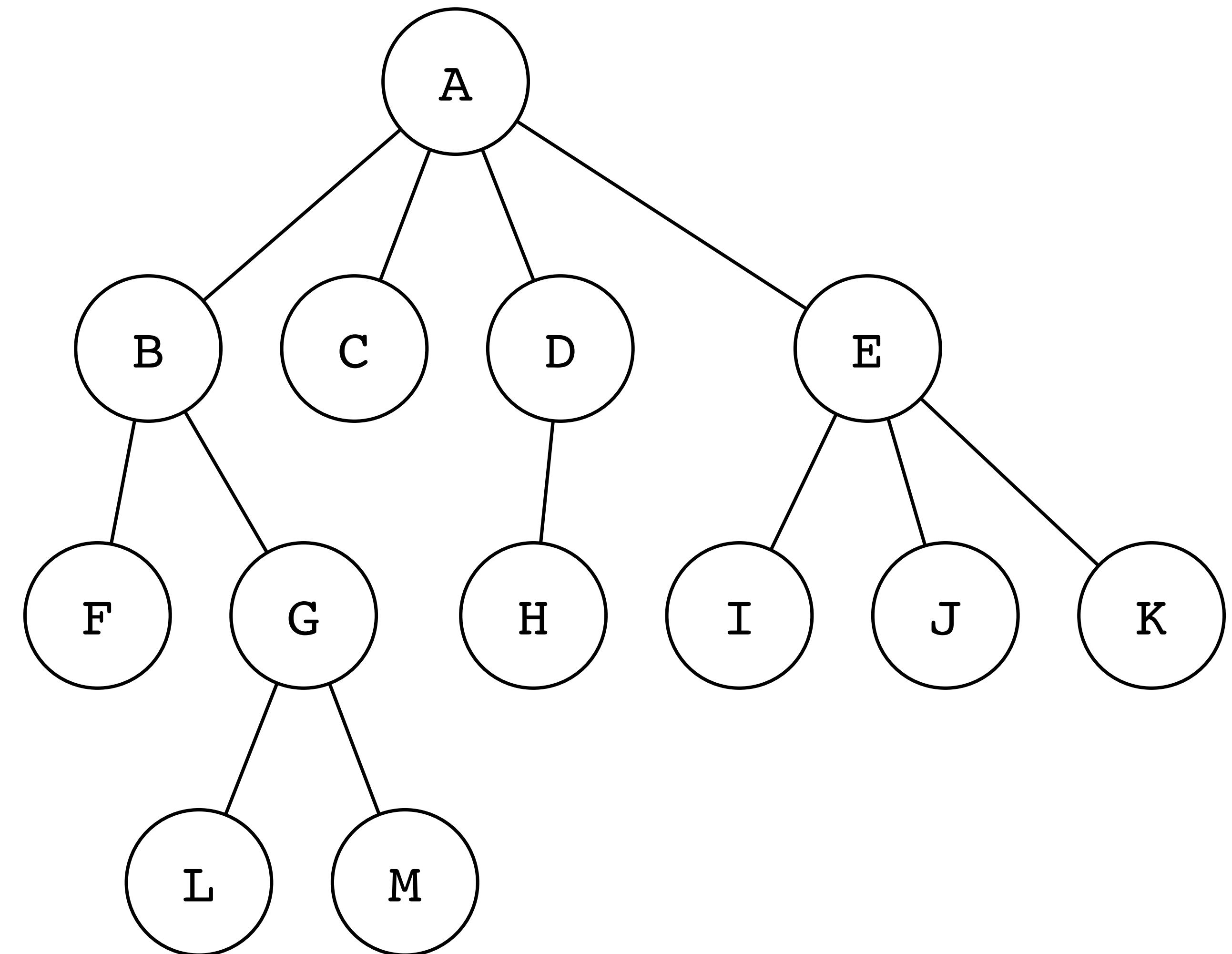
- Chemin d'un noeud : suite des noeuds reliant la racine au noeud
- Niveau d'un noeud: longueur de son chemin





Hauteur et sous-arbres

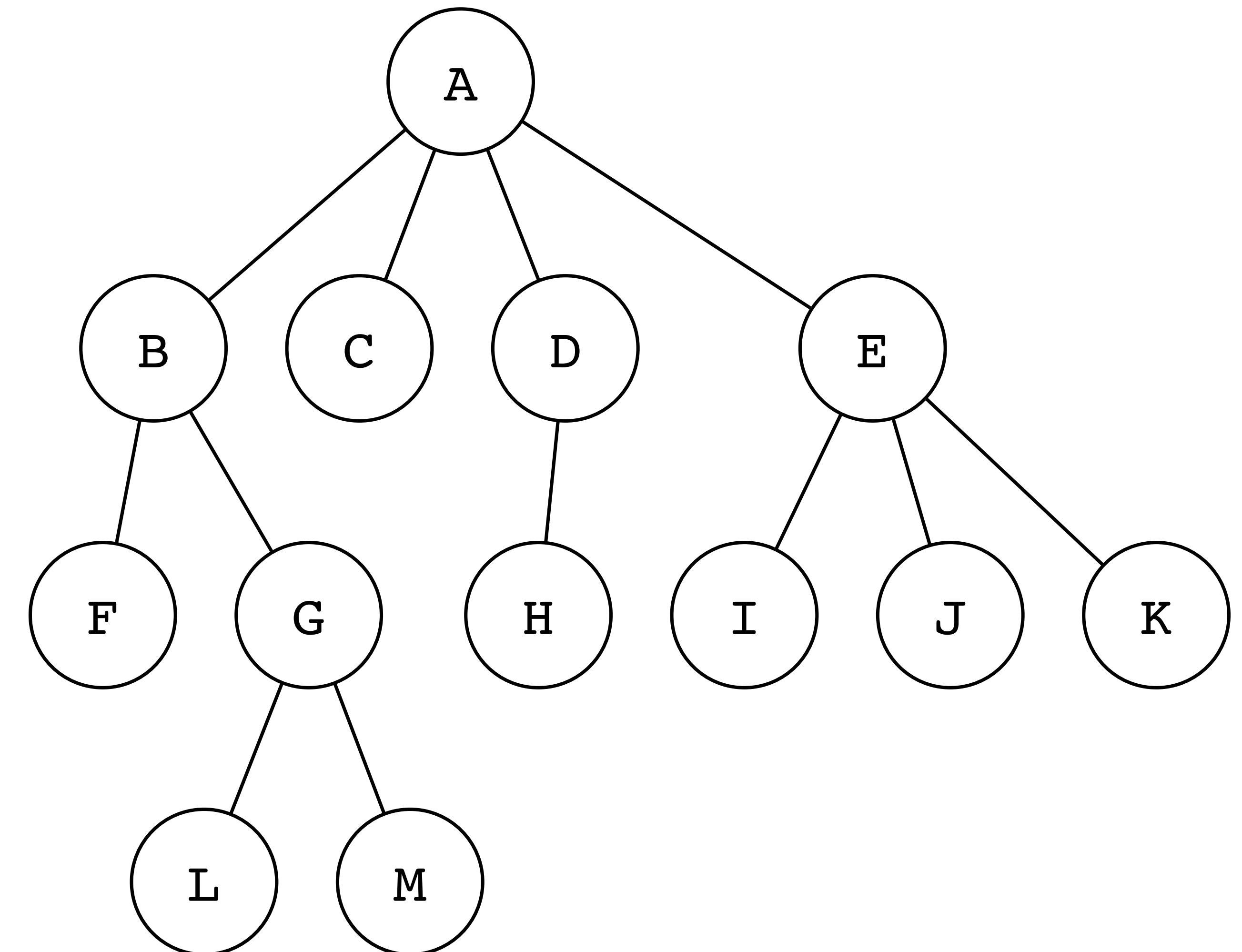
- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds





Hauteur et sous-arbres

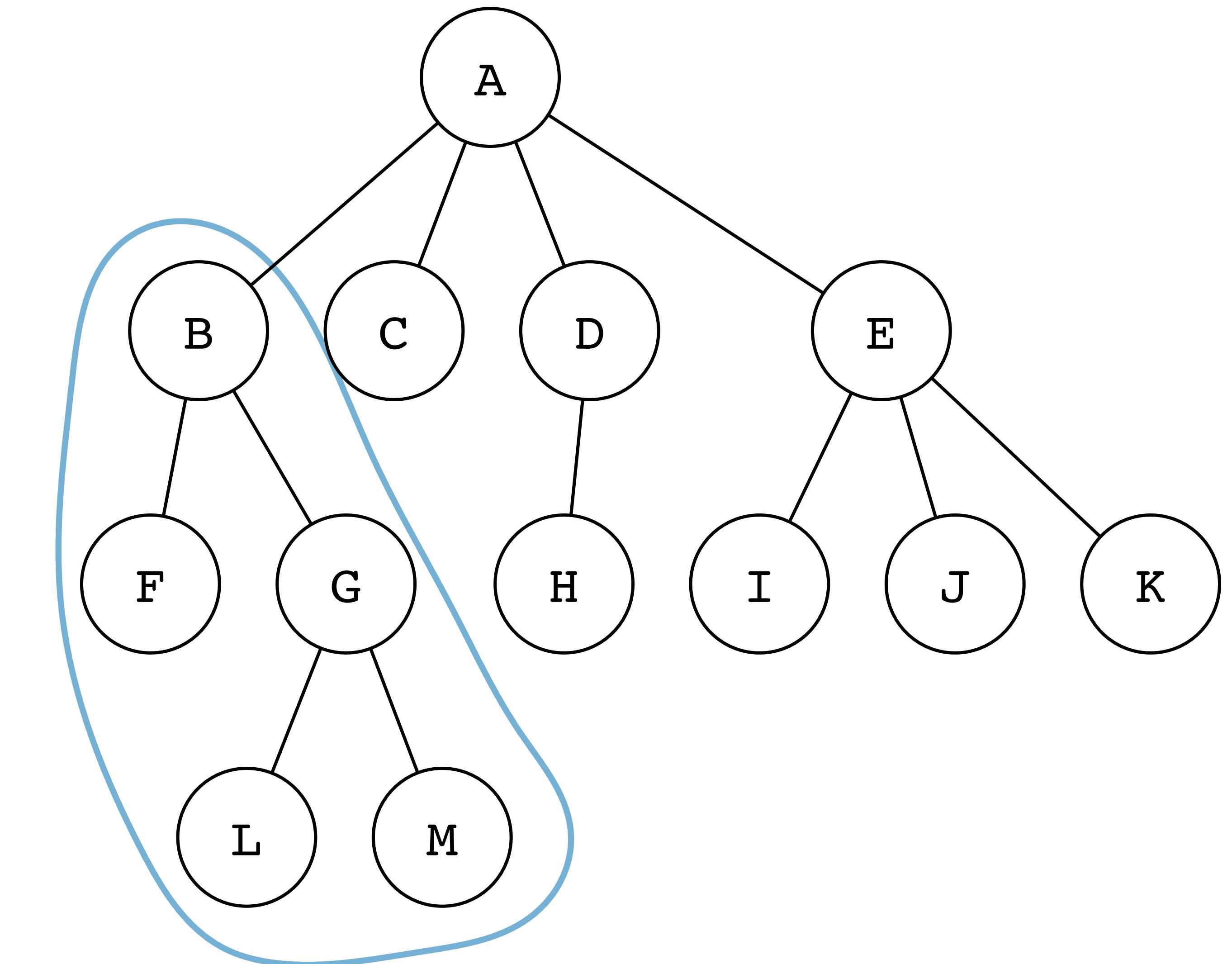
- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine





Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

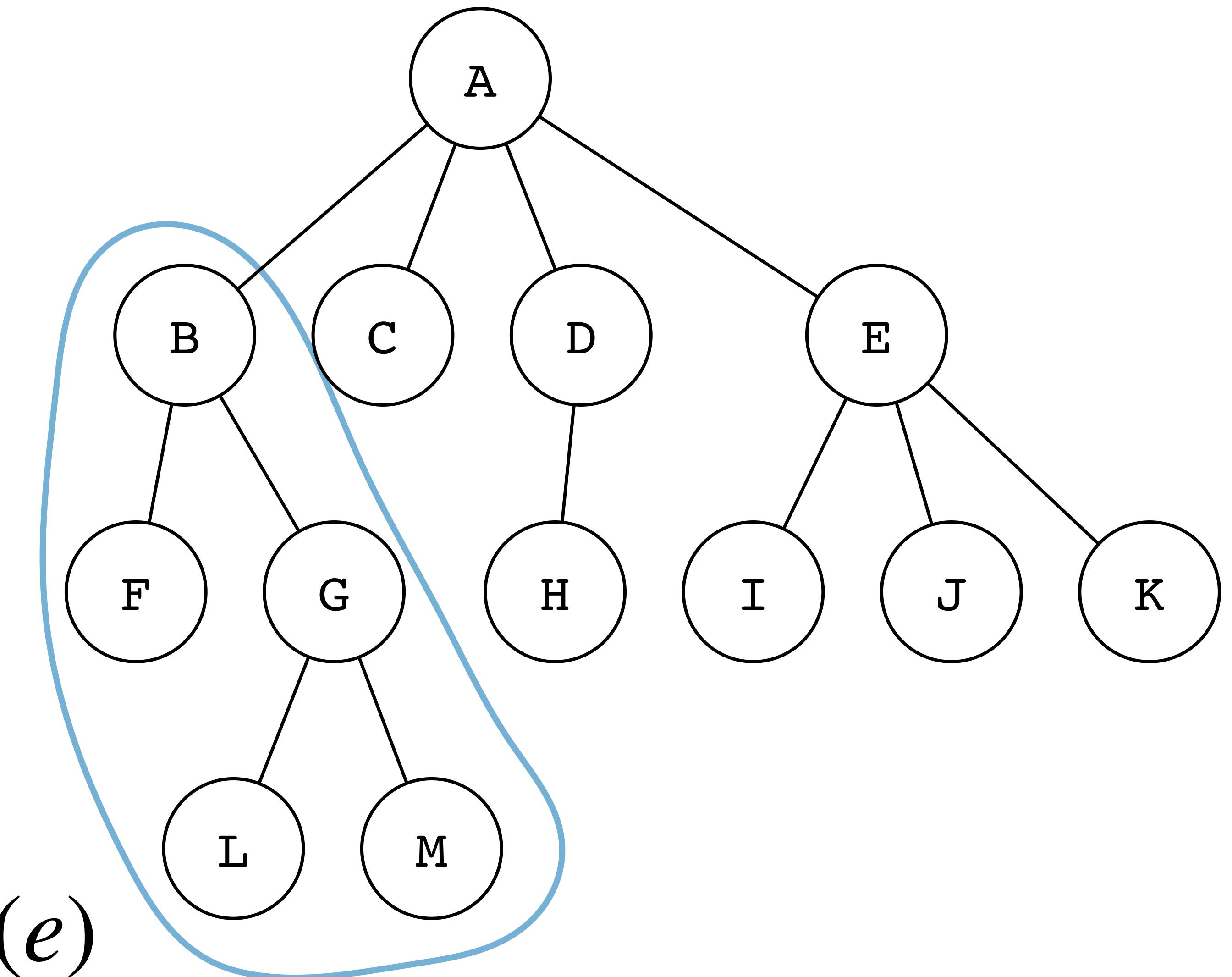




Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

$$H(n) = 1 + \max_{e \in \text{enfants}(n)} H(e)$$

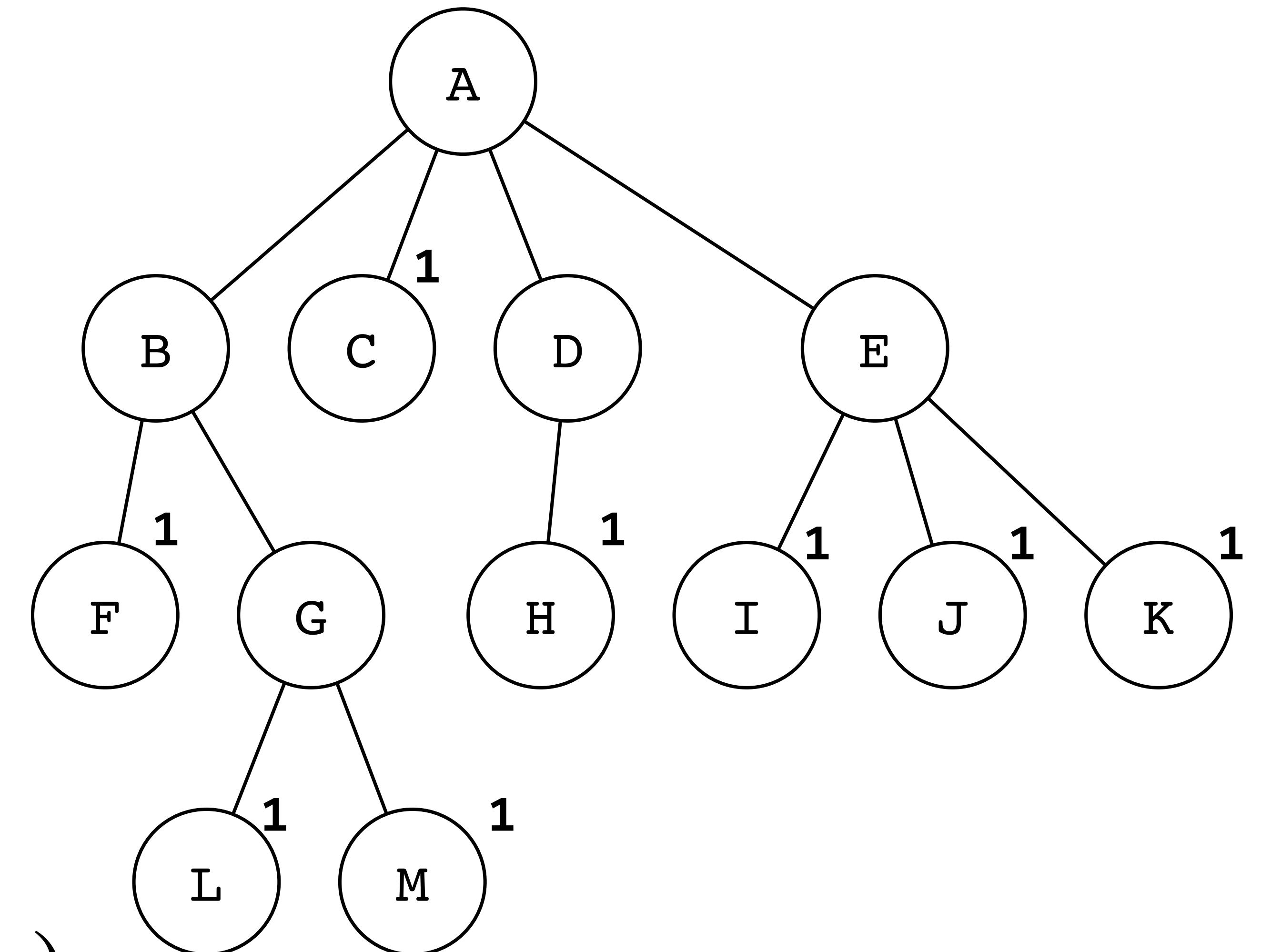




Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

$$H(n) = 1 + \max_{e \in \text{enfants}(n)} H(e)$$

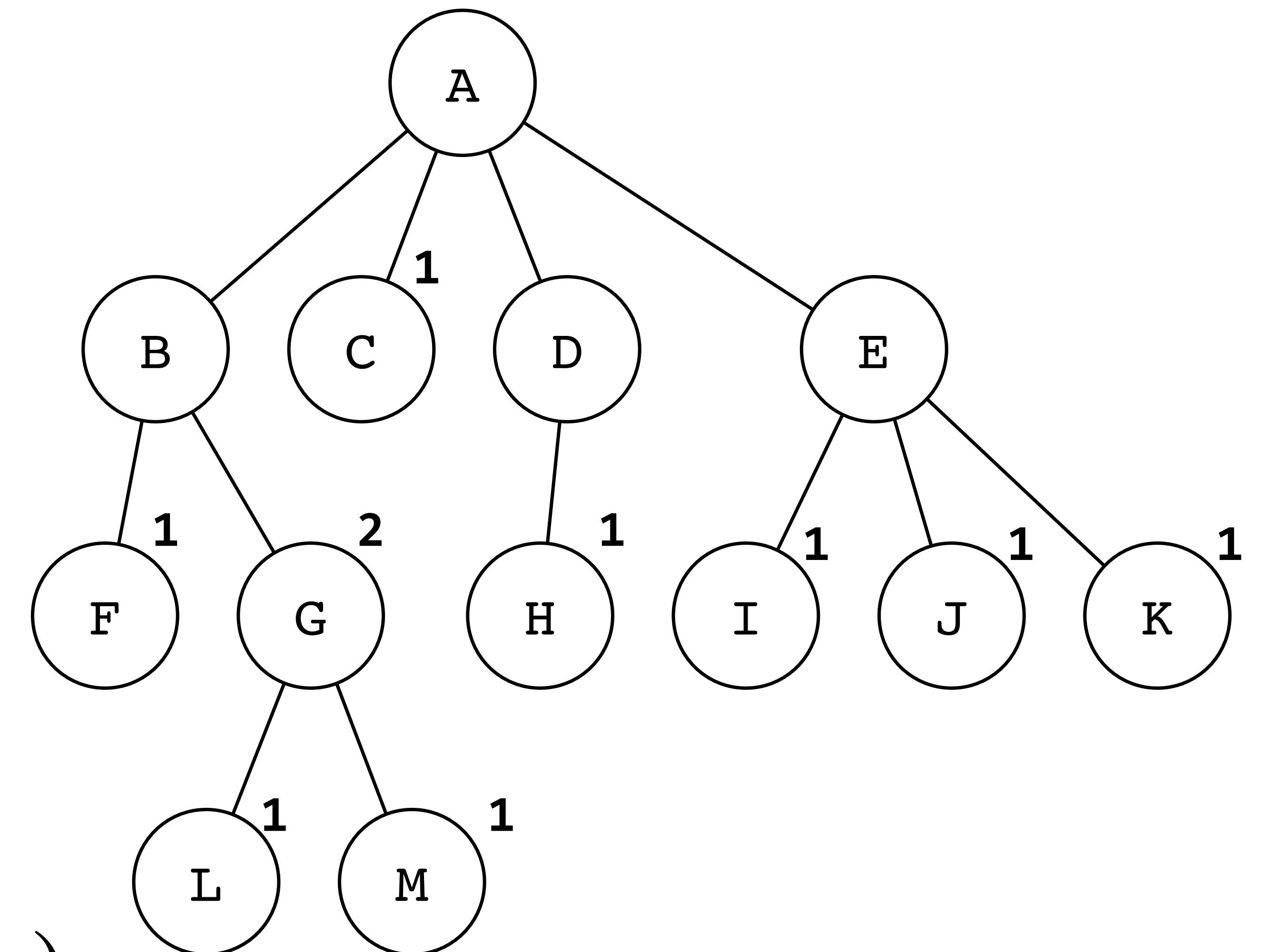




Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

$$H(n) = 1 + \max_{e \in \text{enfants}(n)} H(e)$$

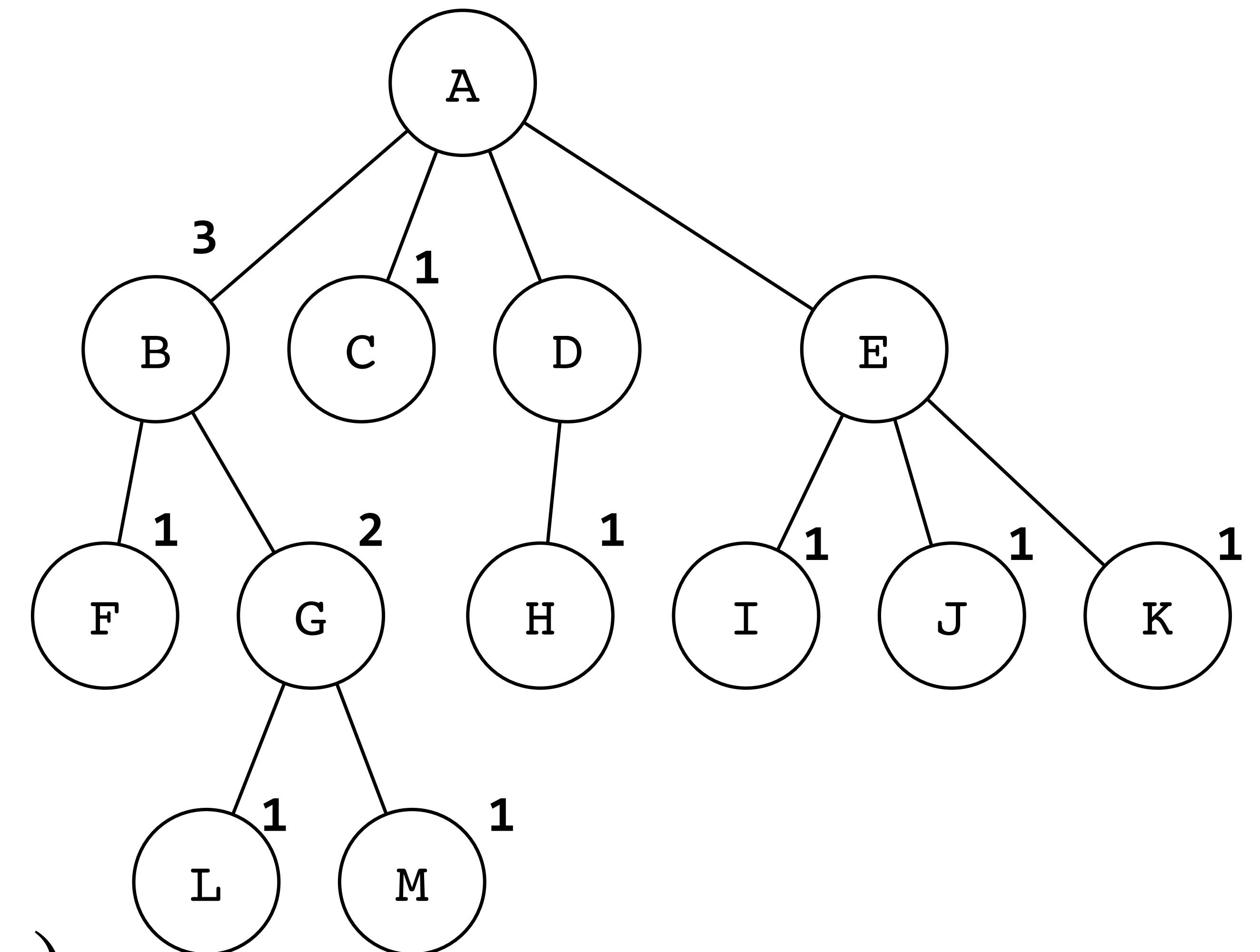




Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

$$H(n) = 1 + \max_{e \in \text{enfants}(n)} H(e)$$

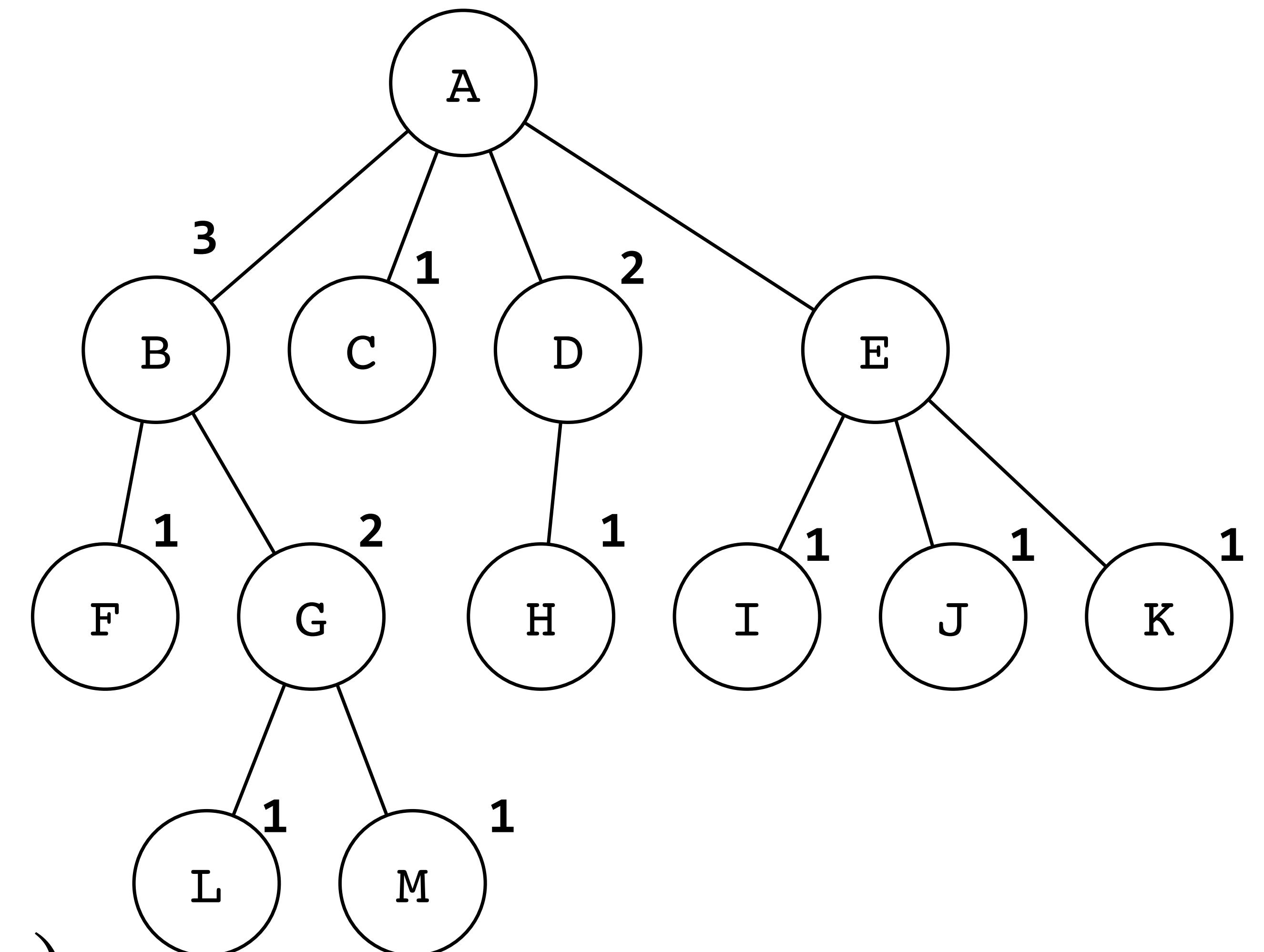




Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

$$H(n) = 1 + \max_{e \in \text{enfants}(n)} H(e)$$

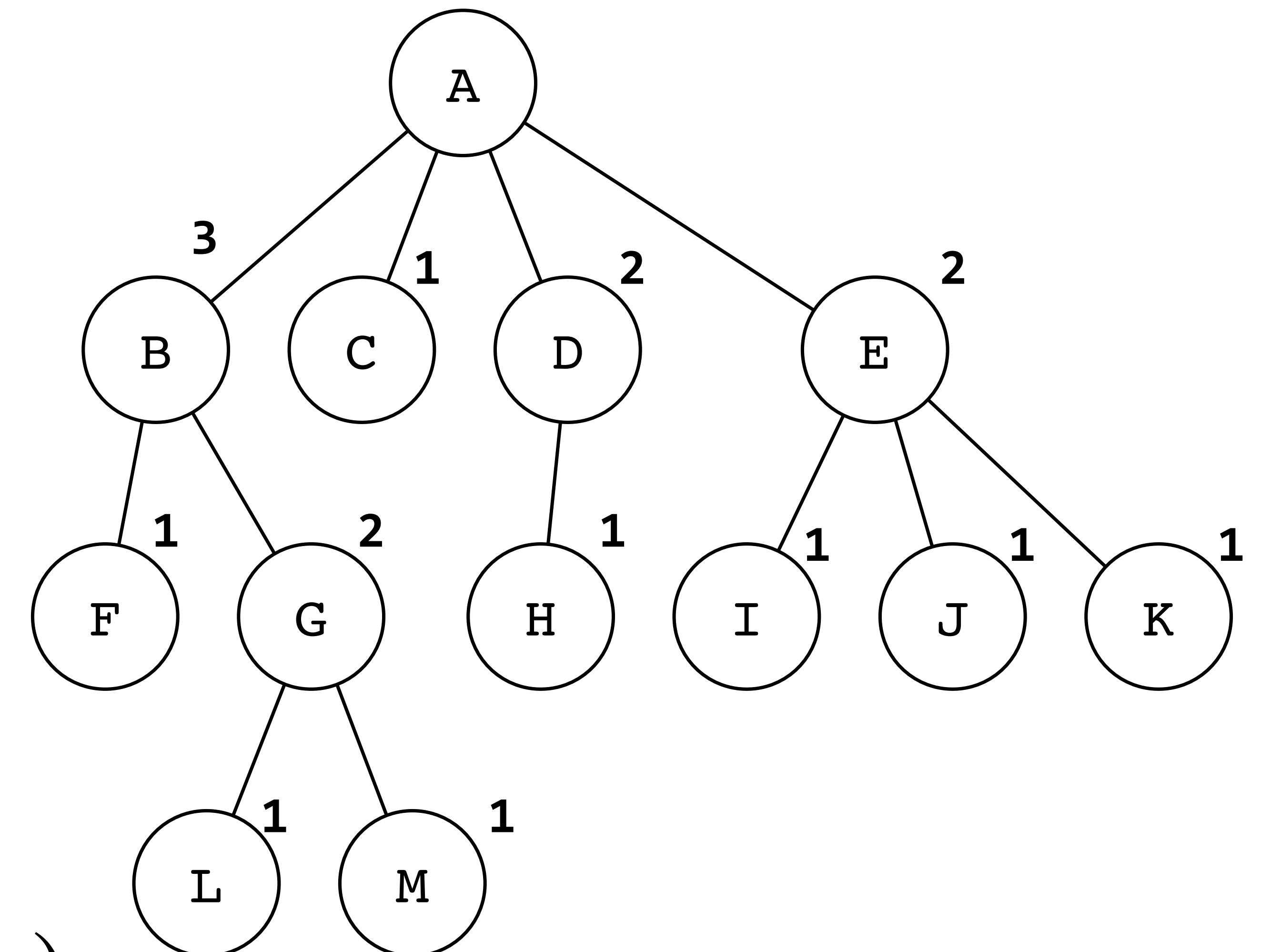




Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

$$H(n) = 1 + \max_{e \in \text{enfants}(n)} H(e)$$

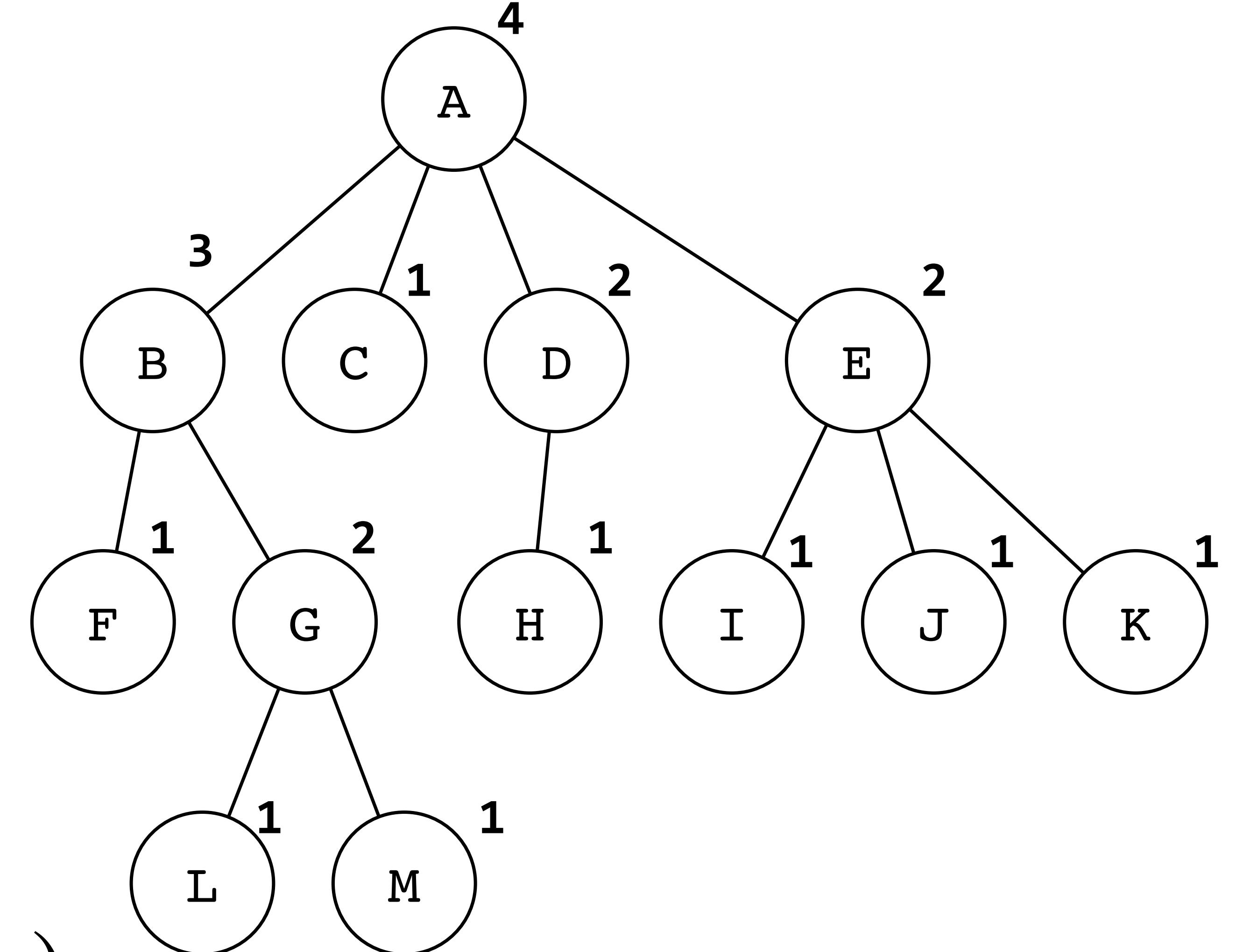




Hauteur et sous-arbres

- Hauteur d'un arbre:
niveau maximum
parmi ses noeuds
- Sous-arbre : arbre
dont un des
noeuds de l'arbre
est la racine

$$H(n) = 1 + \max_{e \in \text{enfants}(n)} H(e)$$



Arbre vide



Arbre vide



- Arbre sans aucun noeud

Arbre vide

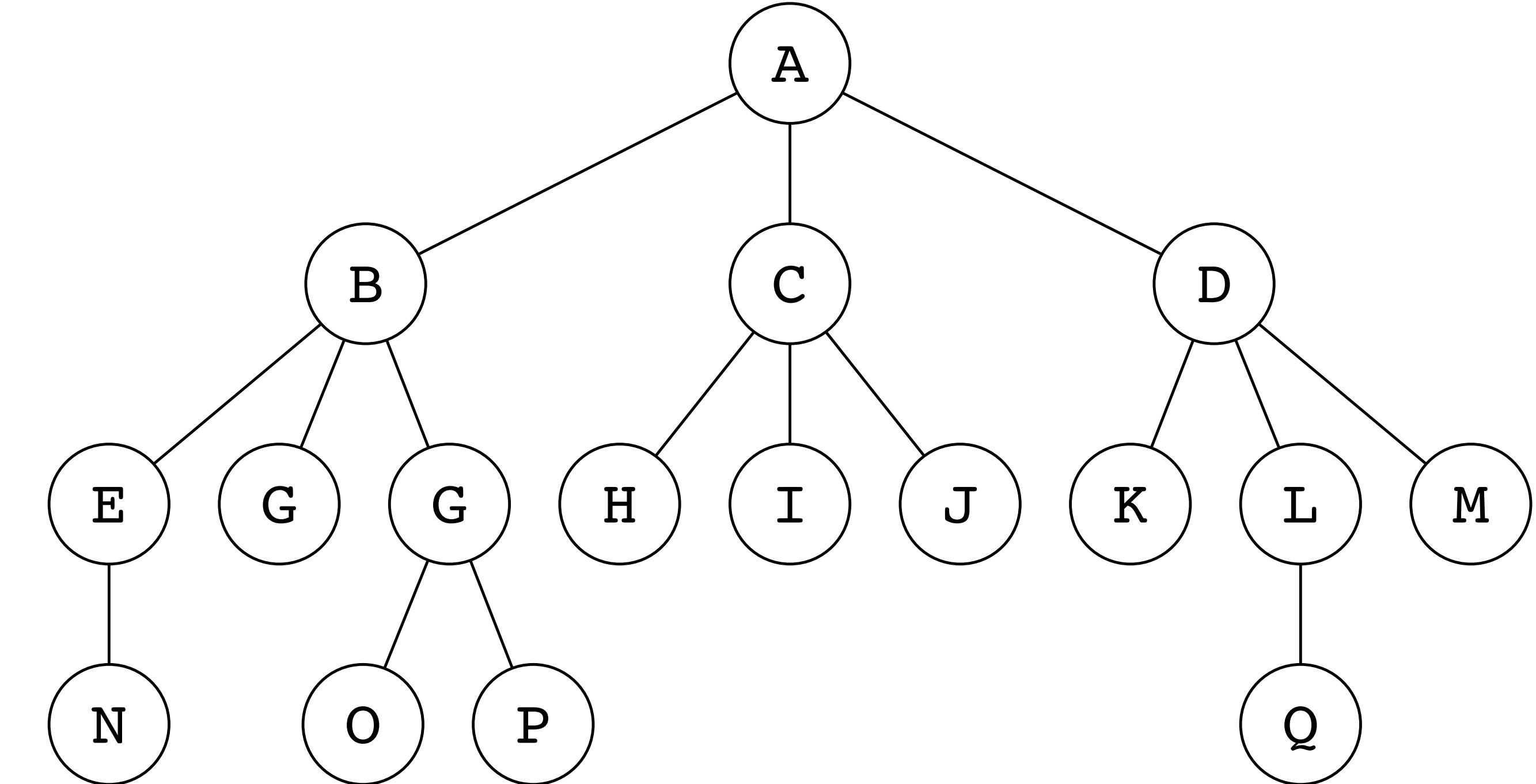


- Arbre sans aucun noeud
- A une hauteur 0



Arbre plein

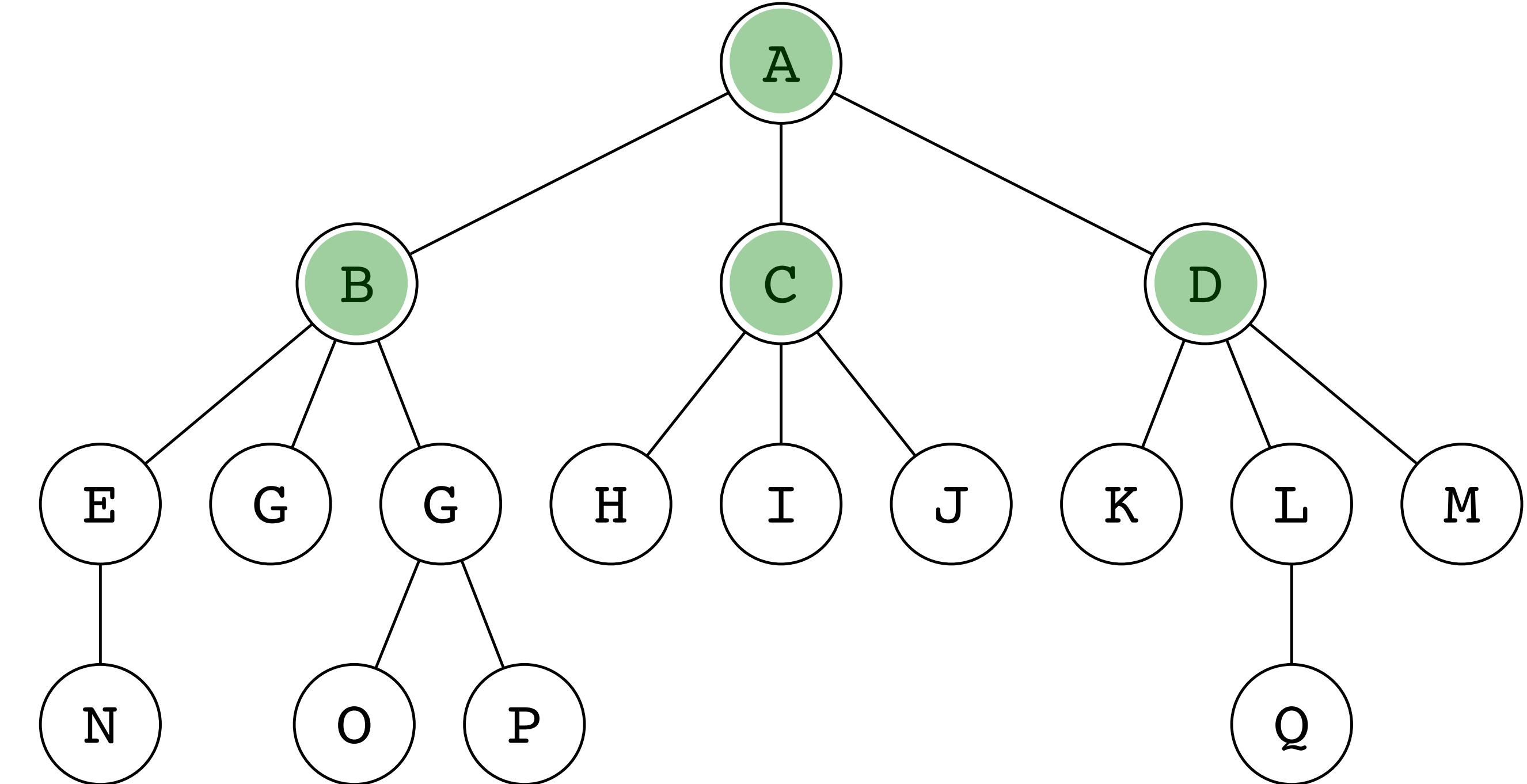
- De hauteur h (ici 4)
- De degré d (ici 3)





Arbre plein

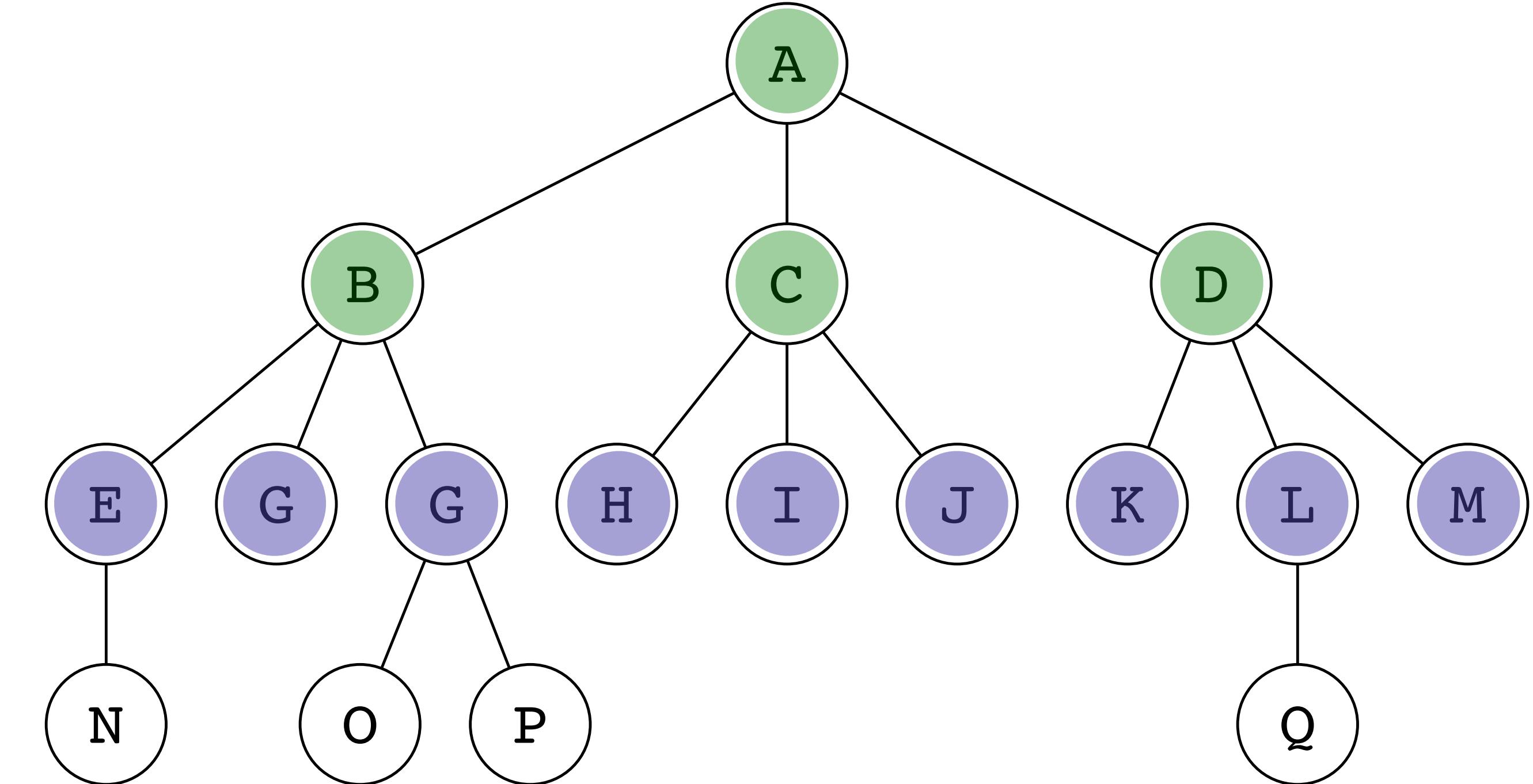
- De hauteur h (ici 4)
- De degré d (ici 3)
- Tous les **noeuds** de niveau inférieur à $h-1$ sont de degré d





Arbre plein

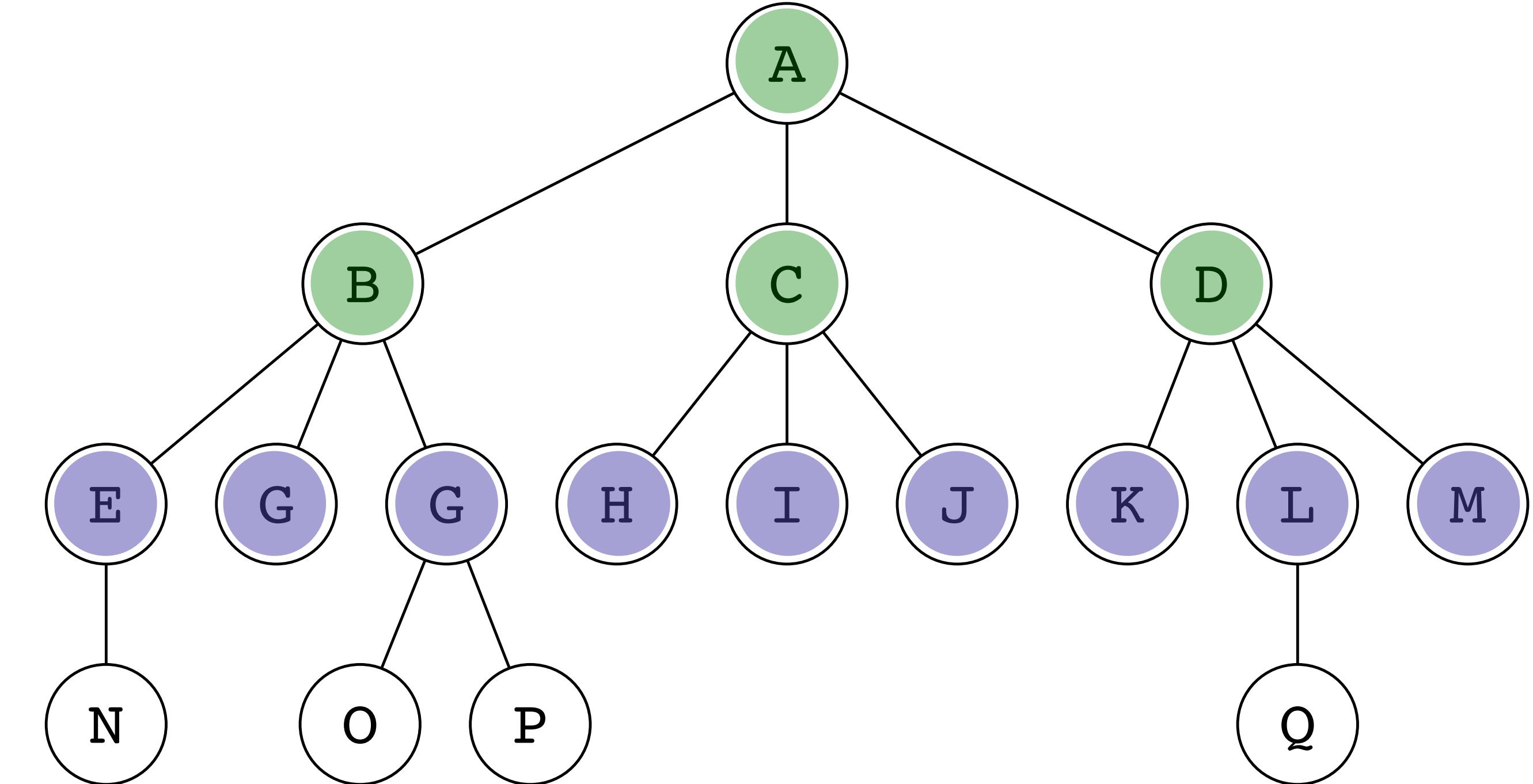
- De hauteur h (ici 4)
- De degré d (ici 3)
- Tous les **noeuds** de niveau inférieur à $h-1$ sont de degré d
- Les **noeuds** de niveau $h-1$ ont un degré quelconque





Arbre plein

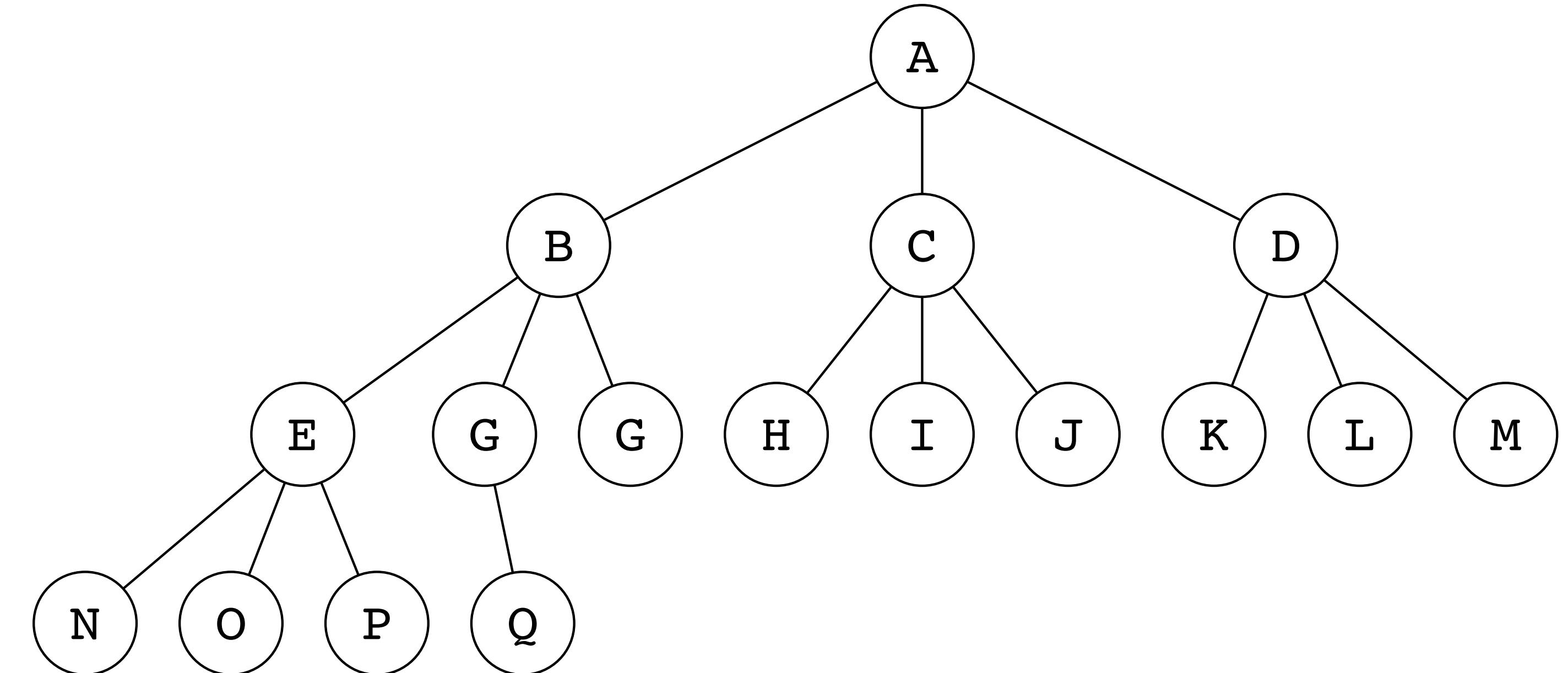
- De hauteur h (ici 4)
- De degré d (ici 3)
- Tous les **noeuds** de niveau inférieur à $h-1$ sont de degré d
- Les **noeuds** de niveau $h-1$ ont un degré quelconque
- Les **noeuds** de niveau h sont des feuilles





Arbre complet

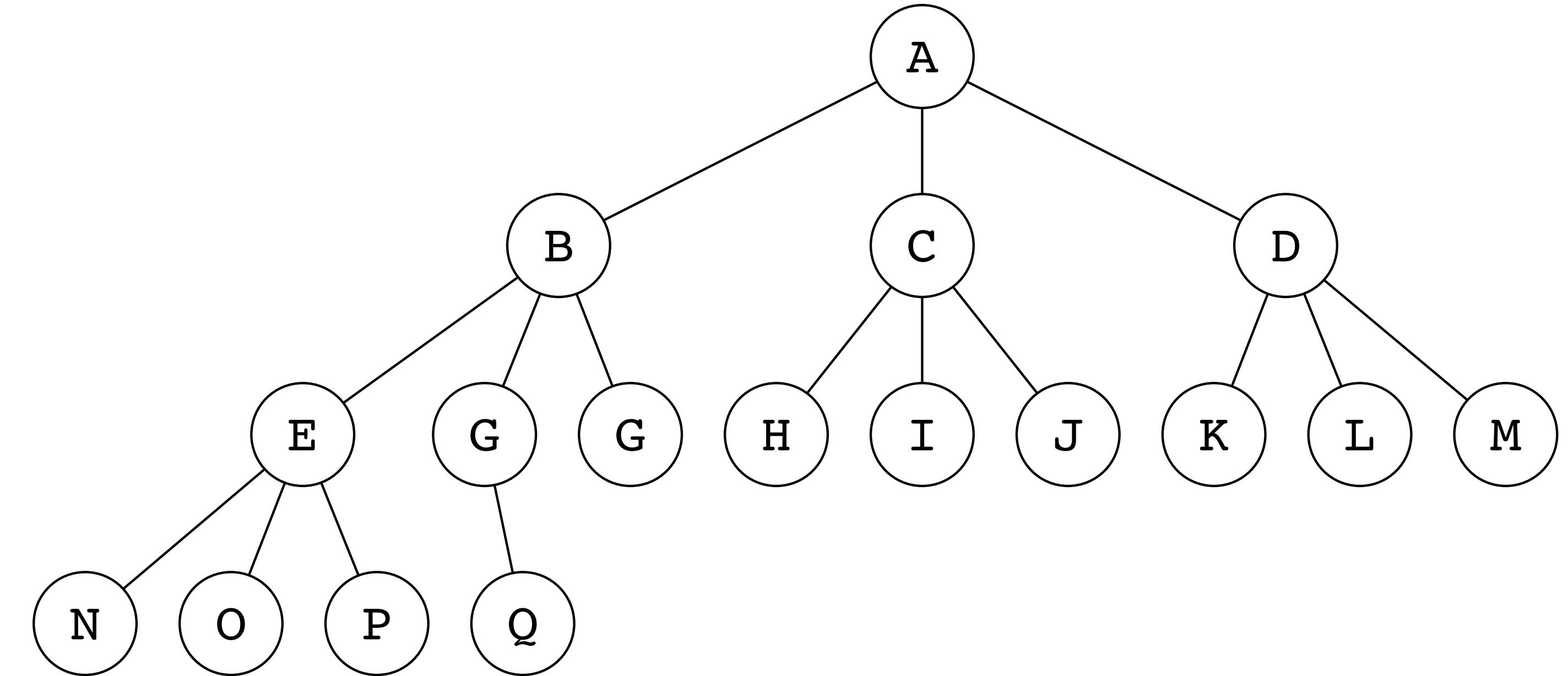
- Arbre plein dont le dernier niveau est rempli par la gauche





Arbre complet

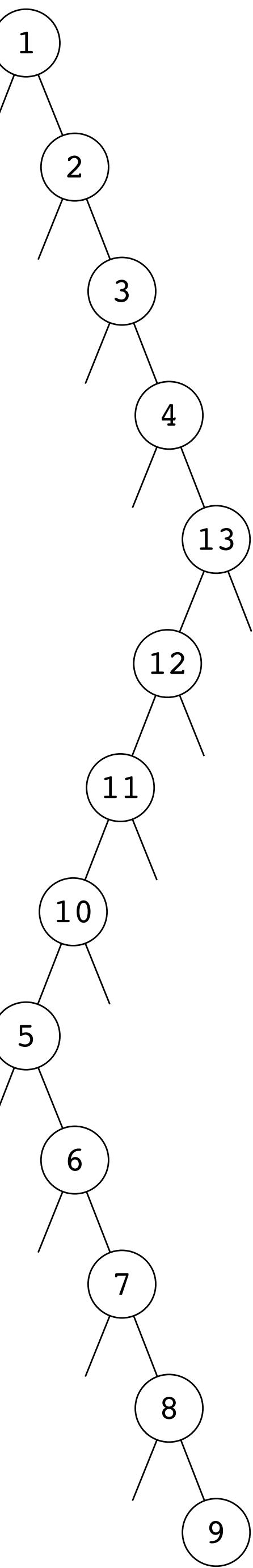
- Arbre plein dont le dernier niveau est rempli par la gauche
- Au chapitre 4, un tas était un arbre binaire complet



Arbre dégénéré



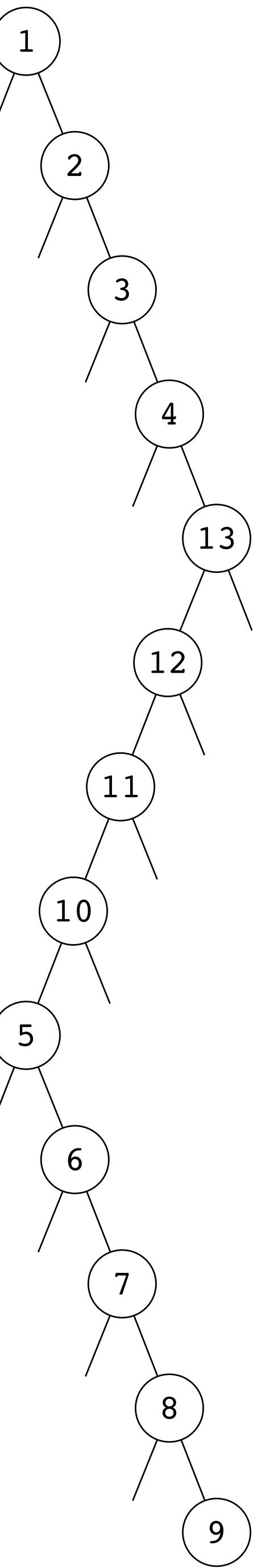
- Arbre de degré 1





Arbre dégénéré

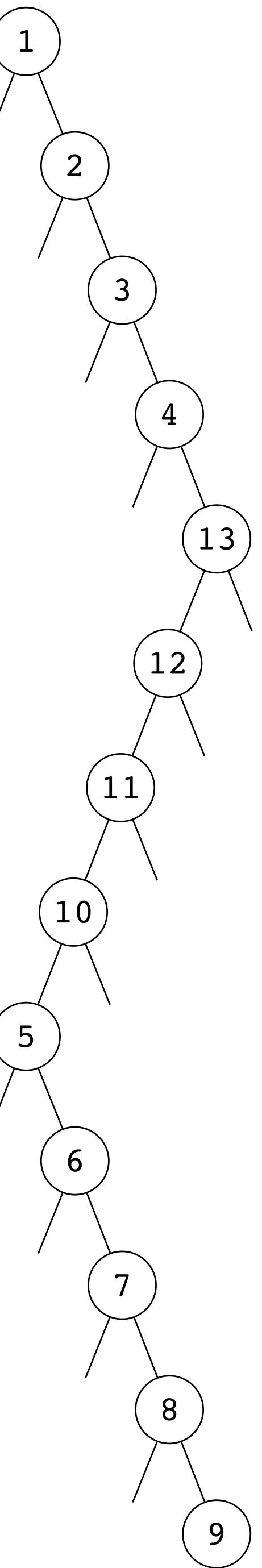
- Arbre de degré 1
- Topologiquement équivalent à une liste chainée





Arbre dégénéré

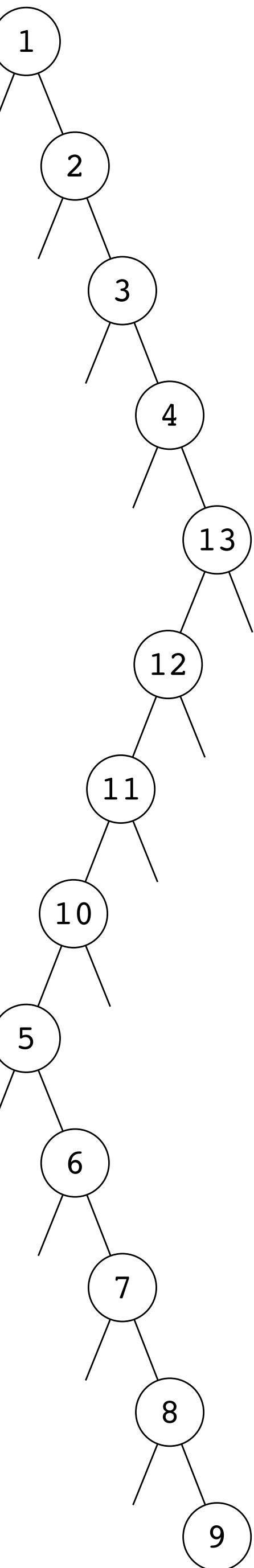
- Arbre de degré 1
- Topologiquement équivalent à une liste chainée
- Typiquement le pire cas pour les algorithmes dont la complexité dépend de la hauteur de l'arbre





Arbre dégénéré

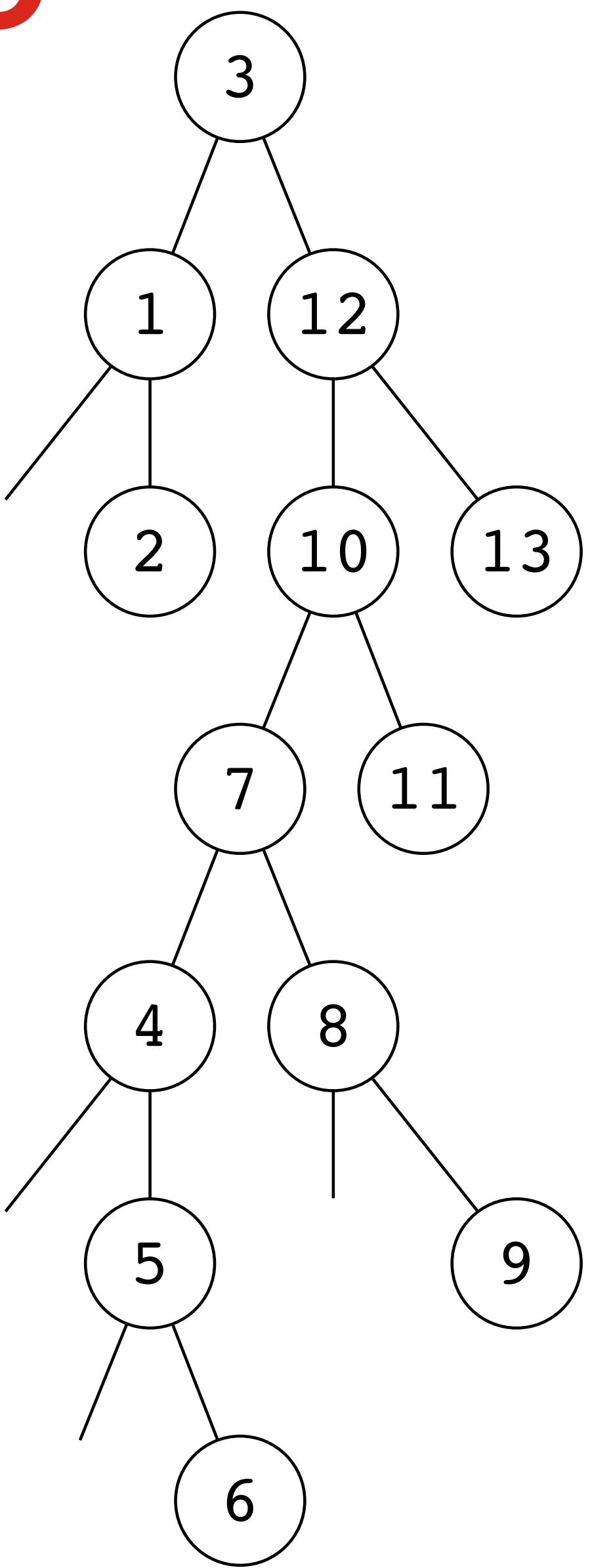
- Arbre de degré 1
- Topologiquement équivalent à une liste chainée
- Typiquement le pire cas pour les algorithmes dont la complexité dépend de la hauteur de l'arbre
- Parfois utile comme structure intermédiaire (équilibrage par linéarisation / arborisation)





Arbre binaire

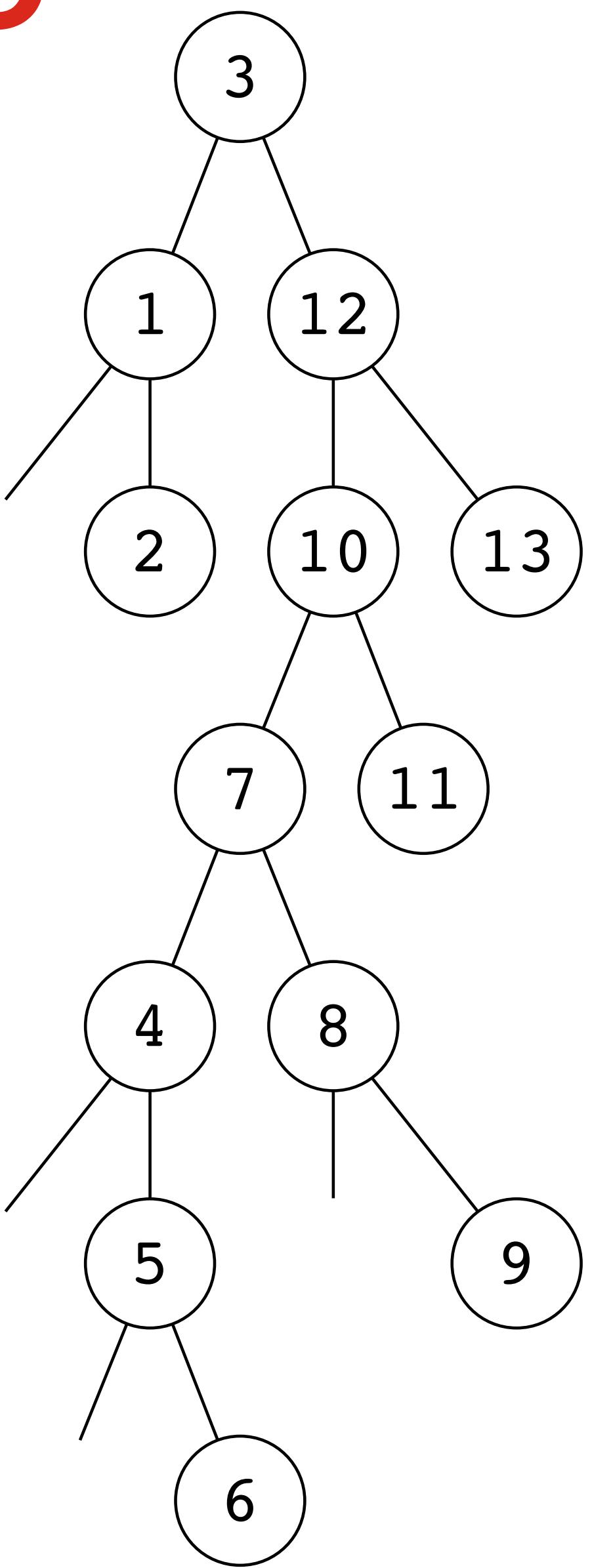
- Arbre de degré 2





Arbre binaire

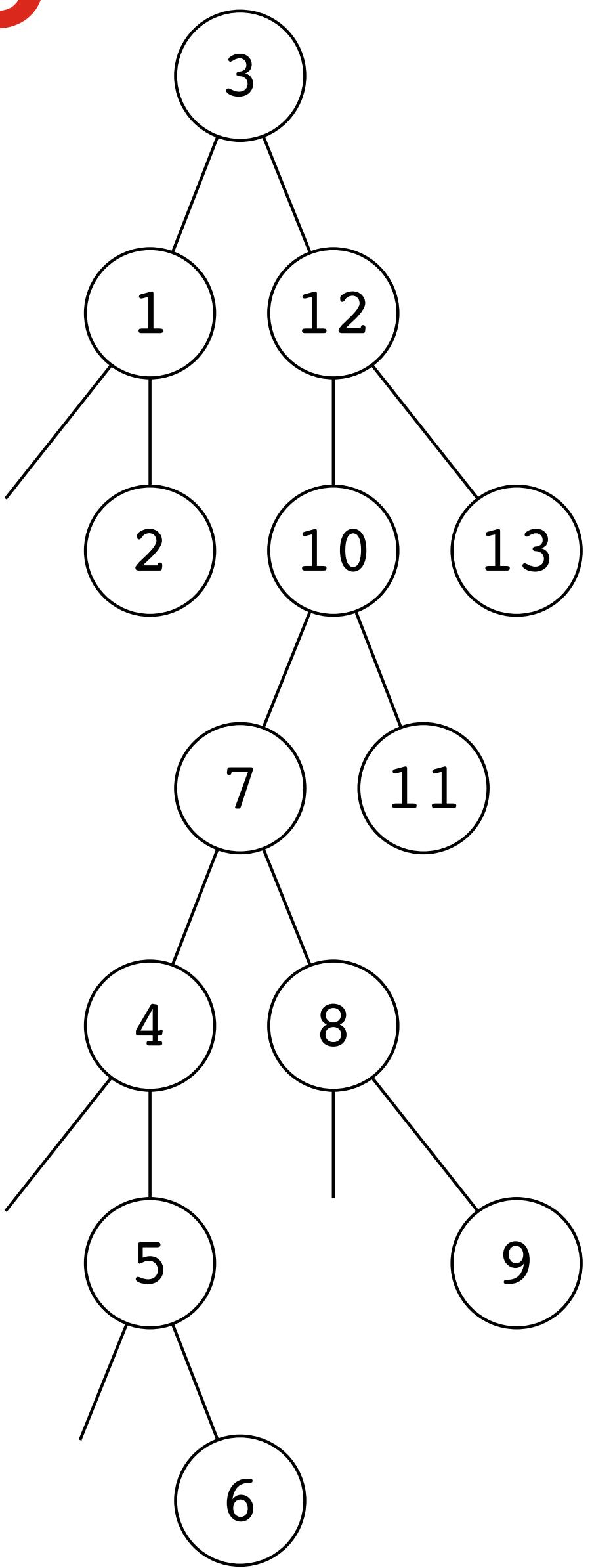
- Arbre de degré 2
- ... ou plutôt ≤ 2





Arbre binaire

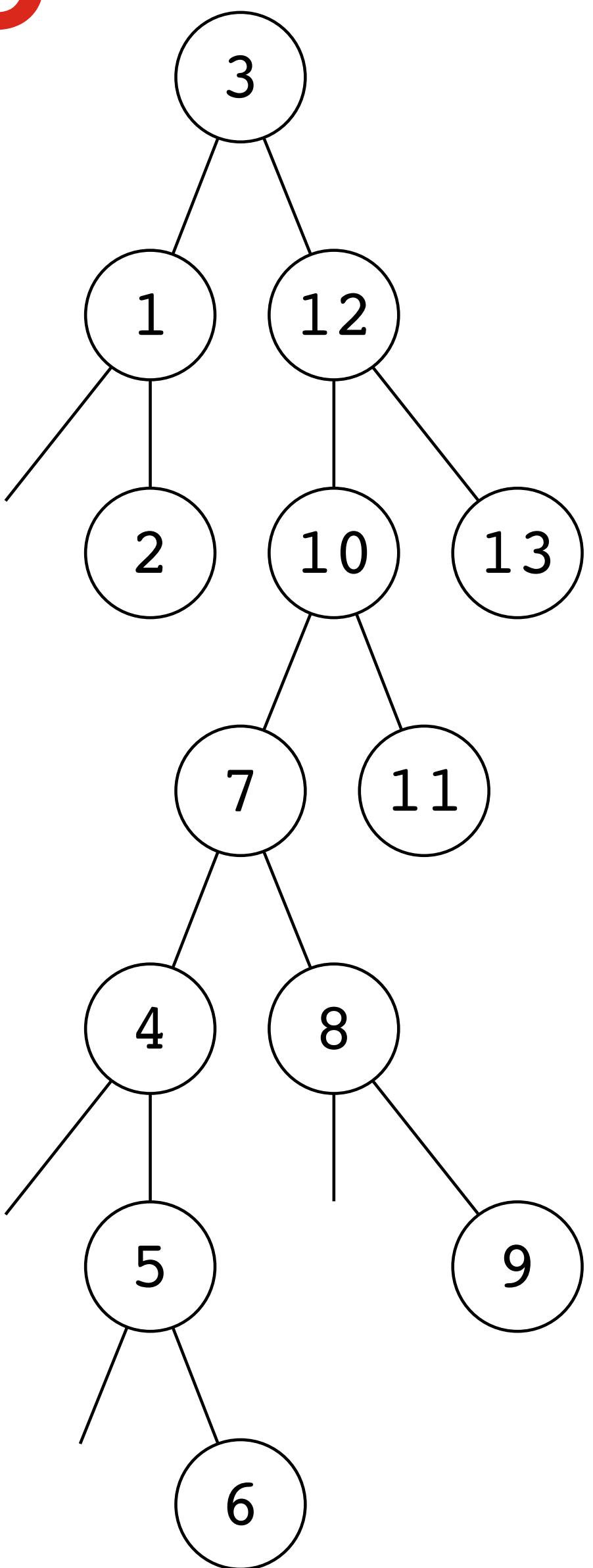
- Arbre de degré 2
- ... ou plutôt ≤ 2
- Pour les noeuds de degré 1, peut distinguer si l'enfant est à gauche ou à droite





Arbre binaire

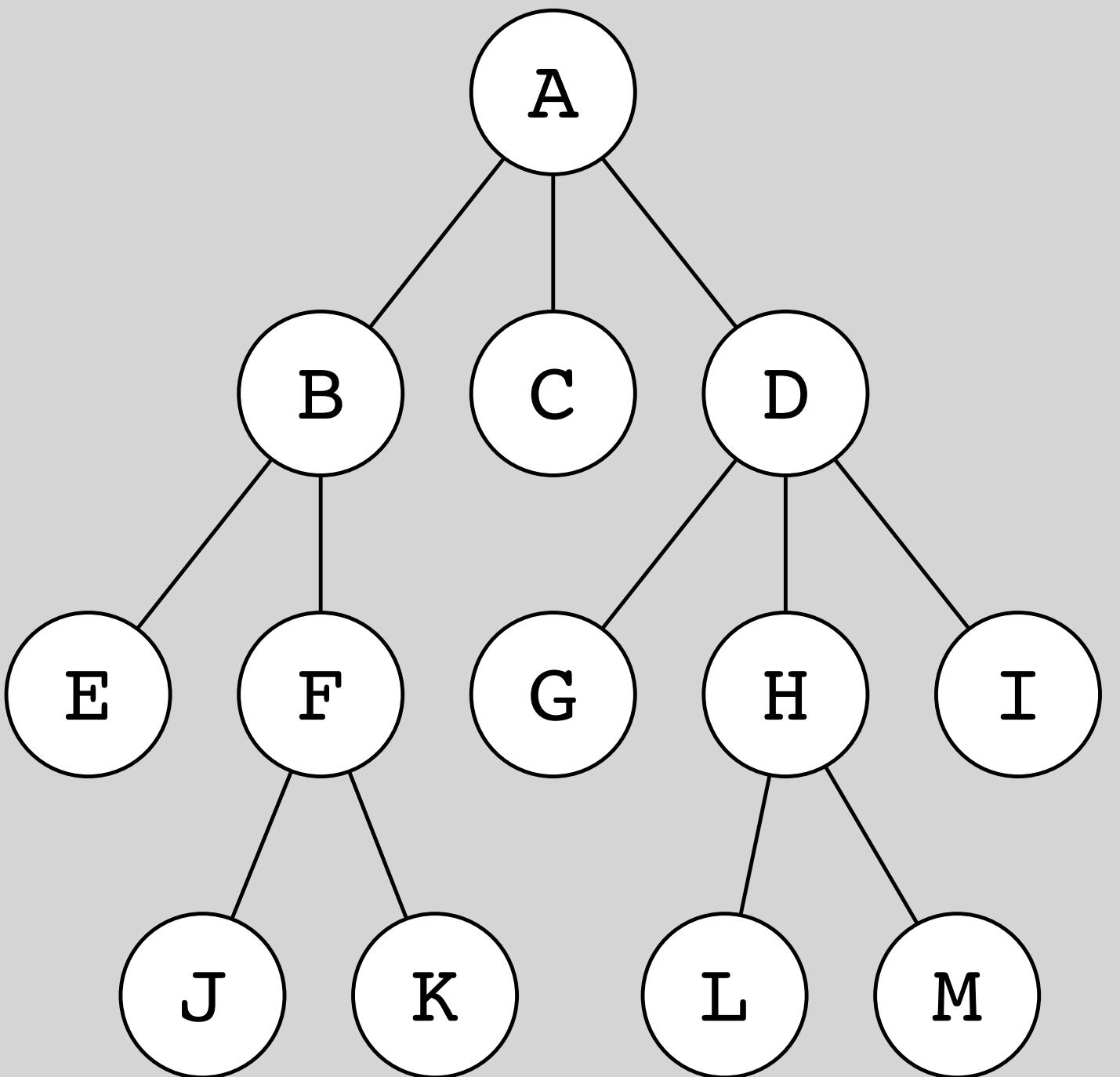
- Arbre de degré 2
- ... ou plutôt ≤ 2
- Pour les noeuds de degré 1, peut distinguer si l'enfant est à gauche ou à droite
- Etudié spécifiquement par la suite





Exercices

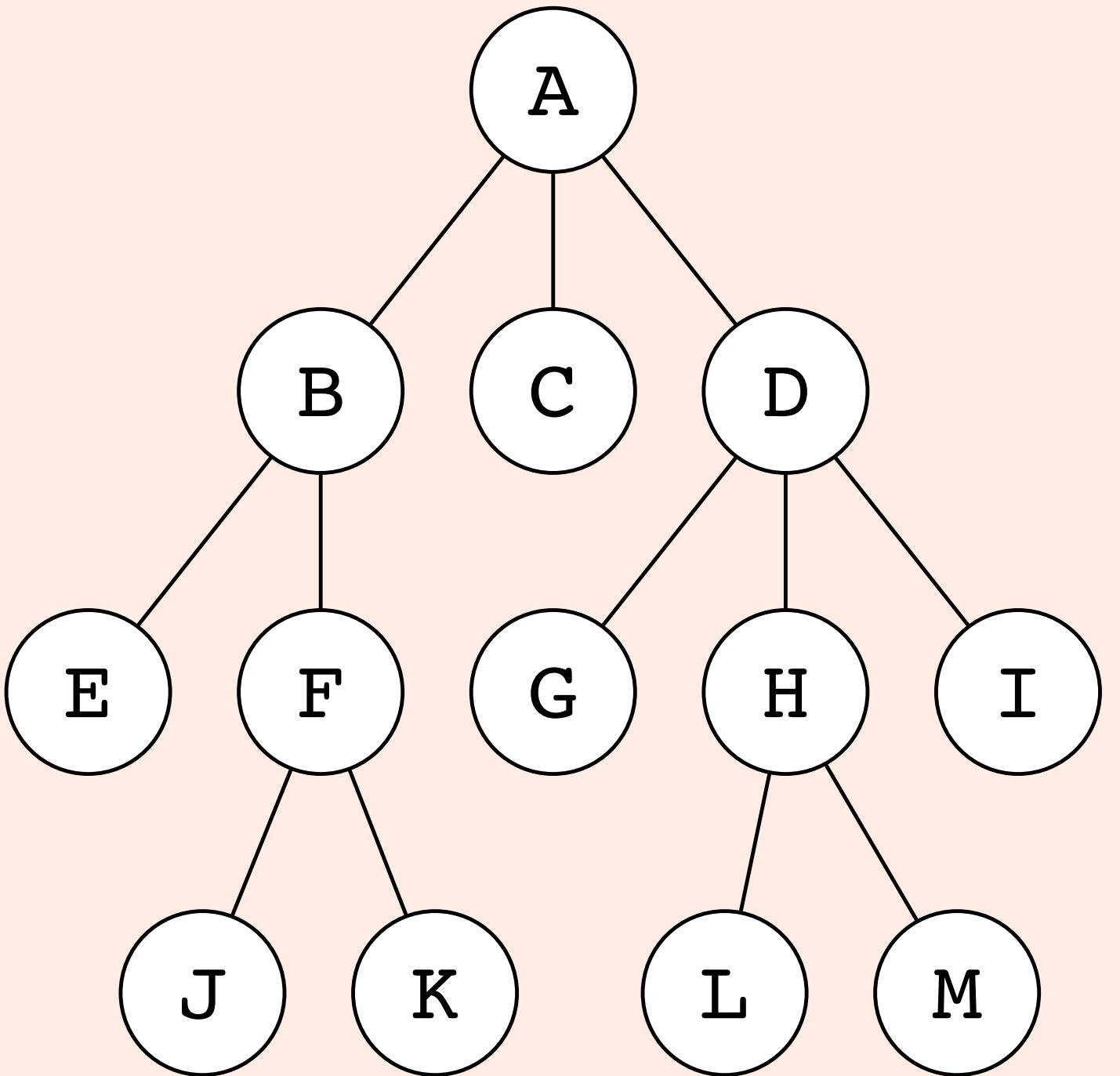
- Quelle est le degré de cet arbre ?
- Quel est le chemin du noeud F ?
- Quel est le niveau du noeud M ?
- Quelle est la racine ?
- Quels sont les noeuds internes?
- Quelles sont les feuilles





Solution

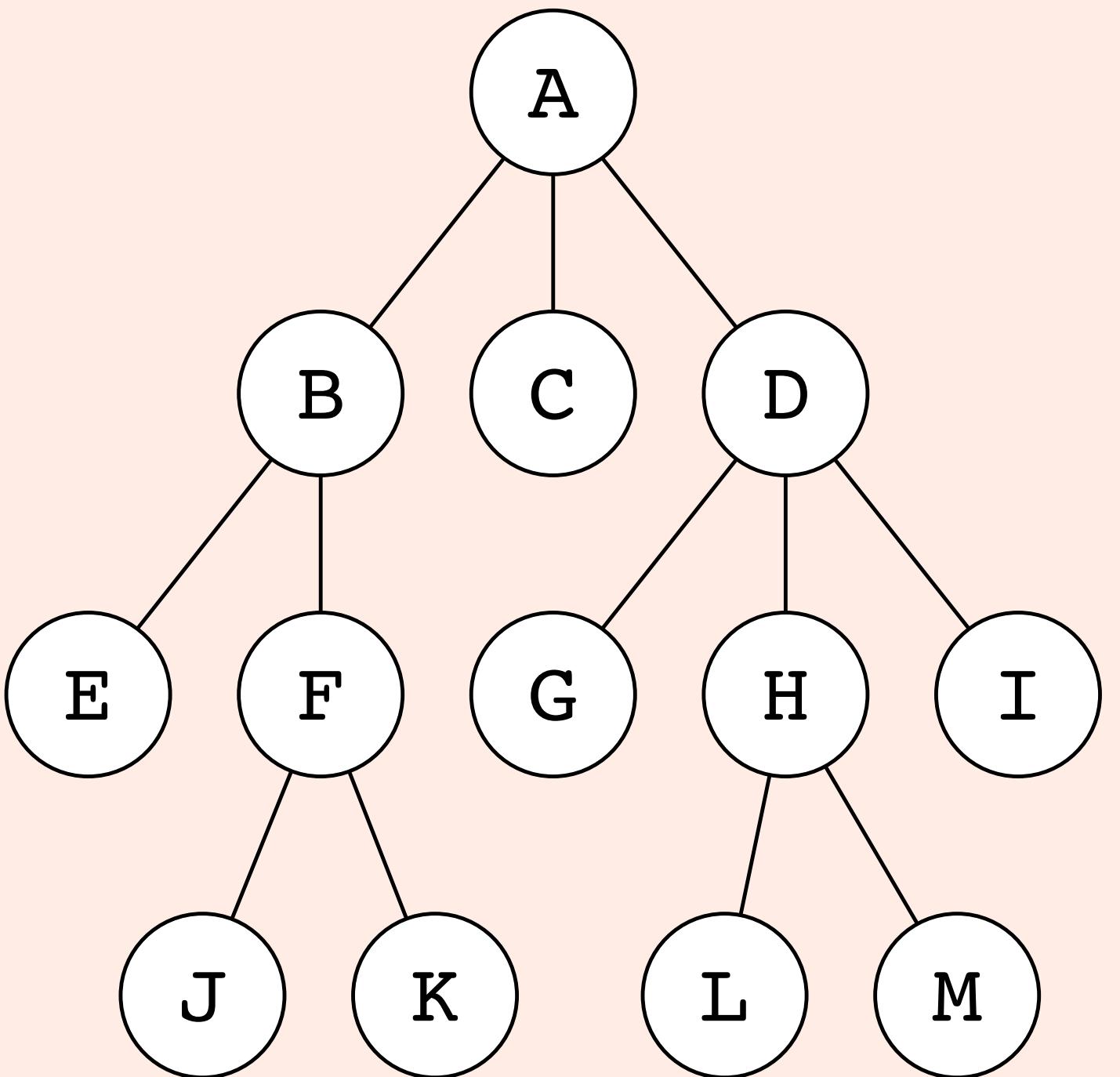
- Quelle est le degré de cet arbre ?
- Quel est le chemin du noeud F ?
- Quel est le niveau du noeud M ?
- Quelle est la racine ?
- Quels sont les noeuds internes?
- Quelles sont les feuilles





Solution

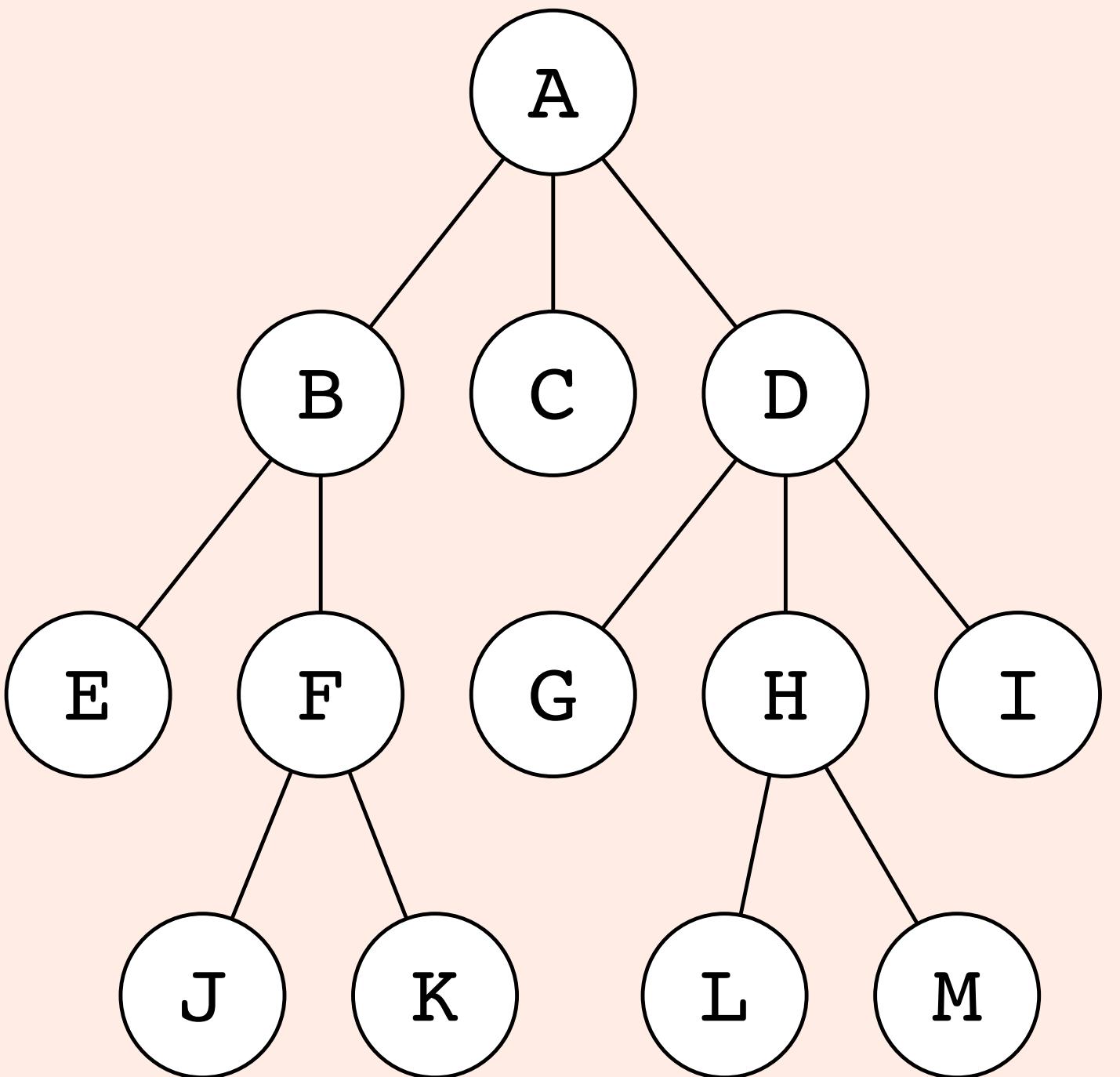
- Quelle est le degré de cet arbre ? 3
- Quel est le chemin du noeud F ?
- Quel est le niveau du noeud M ?
- Quelle est la racine ?
- Quels sont les noeuds internes?
- Quelles sont les feuilles





Solution

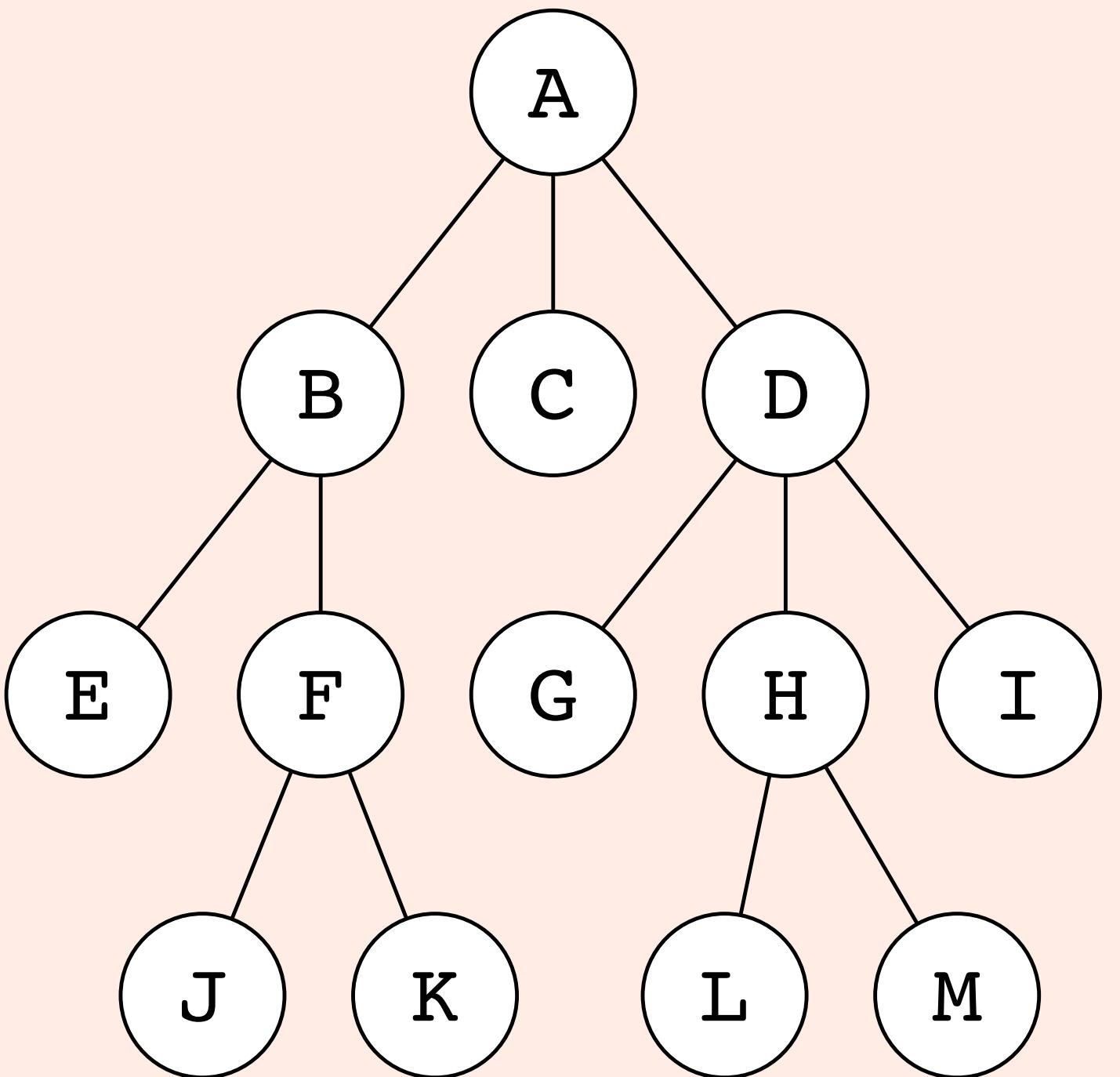
- Quelle est le degré de cet arbre ? 3
- Quel est le chemin du noeud F ? A B F
- Quel est le niveau du noeud M ?
- Quelle est la racine ?
- Quels sont les noeuds internes?
- Quelles sont les feuilles





Solution

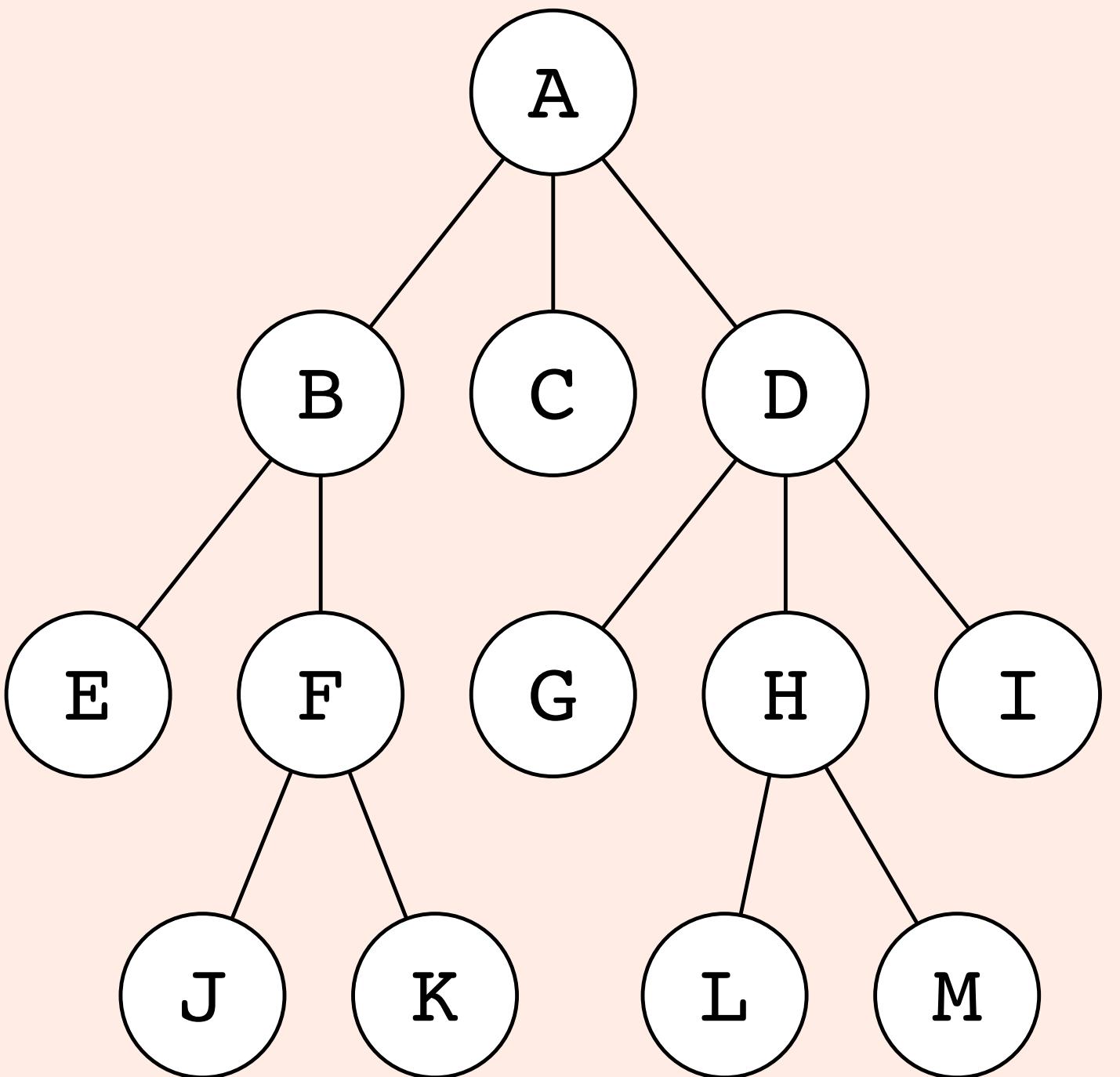
- Quelle est le degré de cet arbre ? 3
- Quel est le chemin du noeud F ? A B F
- Quel est le niveau du noeud M ? 4
- Quelle est la racine ?
- Quels sont les noeuds internes?
- Quelles sont les feuilles





Solution

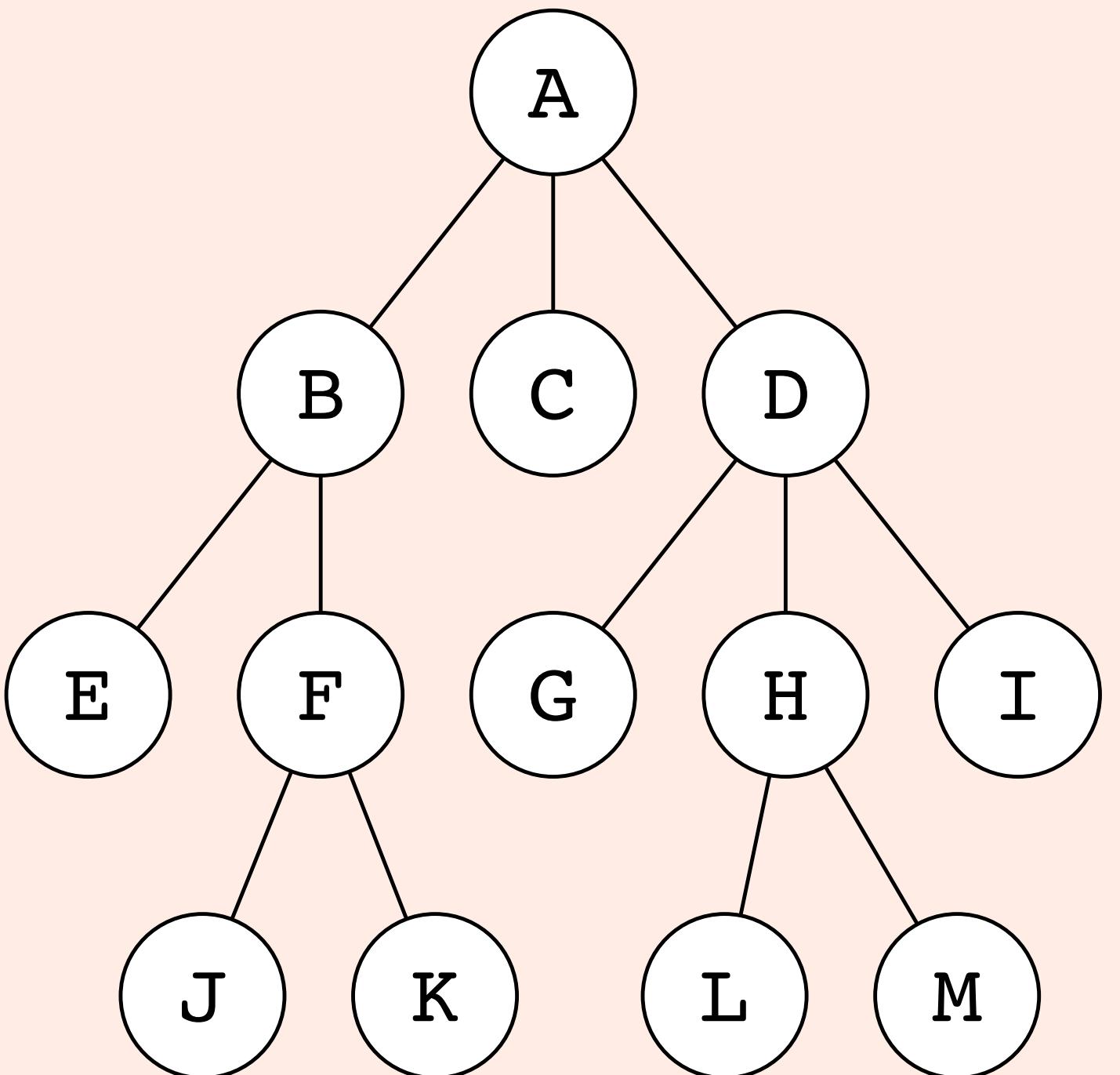
- Quelle est le degré de cet arbre ? 3
- Quel est le chemin du noeud F ? A B F
- Quel est le niveau du noeud M ? 4
- Quelle est la racine ? A
- Quels sont les noeuds internes?
- Quelles sont les feuilles





Solution

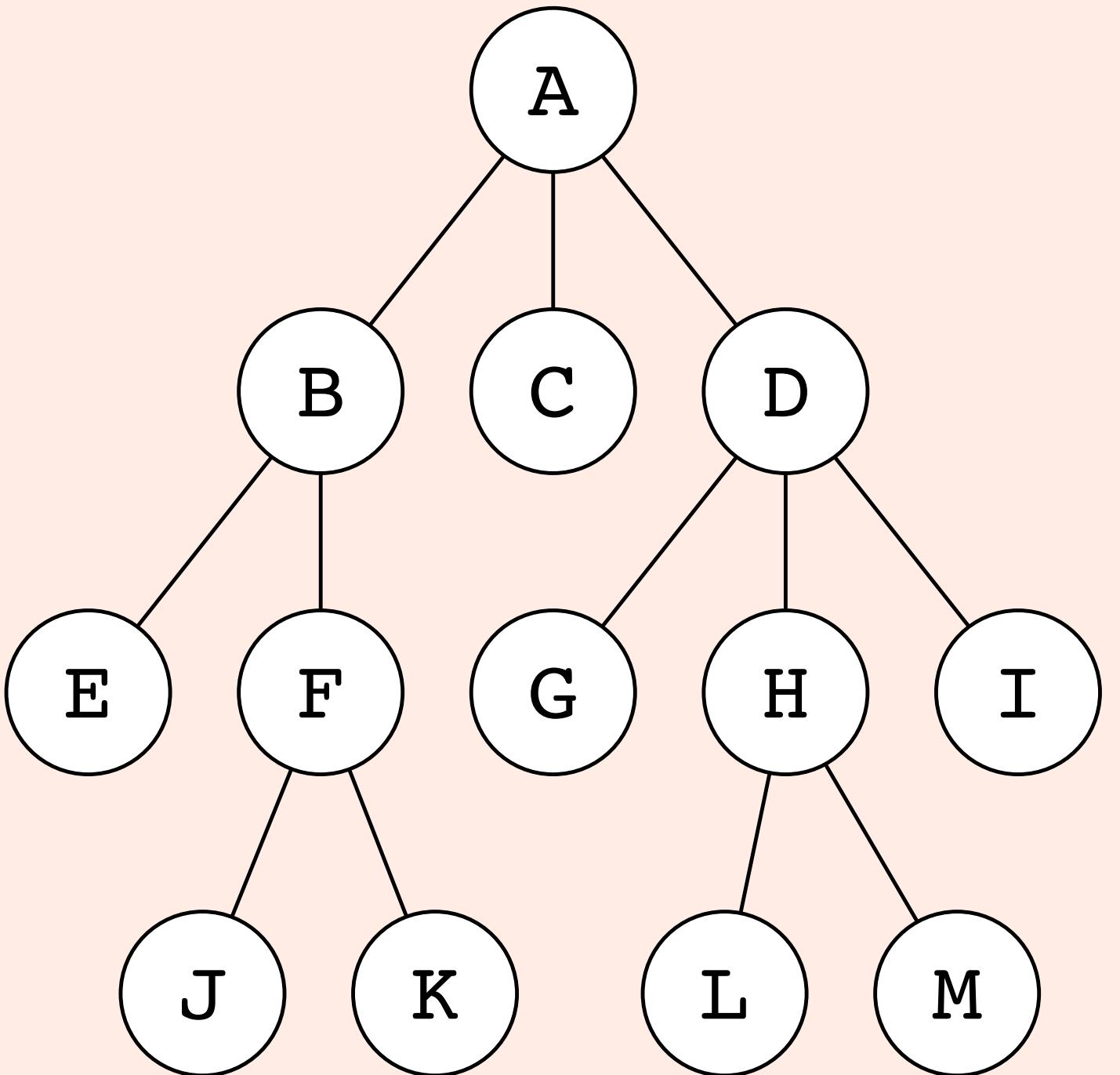
- Quelle est le degré de cet arbre ? 3
- Quel est le chemin du noeud F ? A B F
- Quel est le niveau du noeud M ? 4
- Quelle est la racine ? A
- Quels sont les noeuds internes? A B D F H
- Quelles sont les feuilles





Solution

- Quelle est le degré de cet arbre ? 3
- Quel est le chemin du noeud F ? A B F
- Quel est le niveau du noeud M ? 4
- Quelle est la racine ? A
- Quels sont les noeuds internes? A B D F H
- Quelles sont les feuilles C E G I J K L M



2. Structure





Mises en oeuvre

- Un noeud par élément, qui stocke son étiquette
- Des pointeurs vers les noeuds enfants
- Un pointeur vers le noeud parent ?



Mises en oeuvre

structure Noeud<T>

T étiquette

Tableau<Noeud*> enfants

- Un noeud par élément, qui stocke son étiquette
- Des pointeurs vers les noeuds enfants
- Un pointeur vers le noeud parent ?



Mises en oeuvre

- Un noeud par élément, qui stocke son étiquette
- Des pointeurs vers les noeuds enfants
- Un pointeur vers le noeud parent ?

structure Noeud<T>

T étiquette

Tableau<Noeud*> enfants

structure Noeud<T>

T étiquette

Noeud* parent

Tableau<Noeud*> enfants



Mises en oeuvre

- Un noeud par élément, qui stocke son étiquette
- Des pointeurs vers les noeuds enfants
- Un pointeur vers le noeud parent ?

structure Noeud<T>

T étiquette

Tableau<Noeud*> enfants

structure Noeud<T>

T étiquette

Noeud* parent

Tableau<Noeud*> enfants

structure Noeud<T>

T étiquette

Liste<Noeud*> enfants



Mises en oeuvre

- Un noeud par élément, qui stocke son étiquette
- Des pointeurs vers les noeuds enfants
- Un pointeur vers le noeud parent ?

structure Noeud<T>

T étiquette

Tableau<Noeud*> enfants

structure Noeud<T>

T étiquette

Noeud* parent

Tableau<Noeud*> enfants

structure Noeud<T>

T étiquette

Liste<Noeud*> enfants

structure Noeud<T>

T étiquette

Noeud* parent

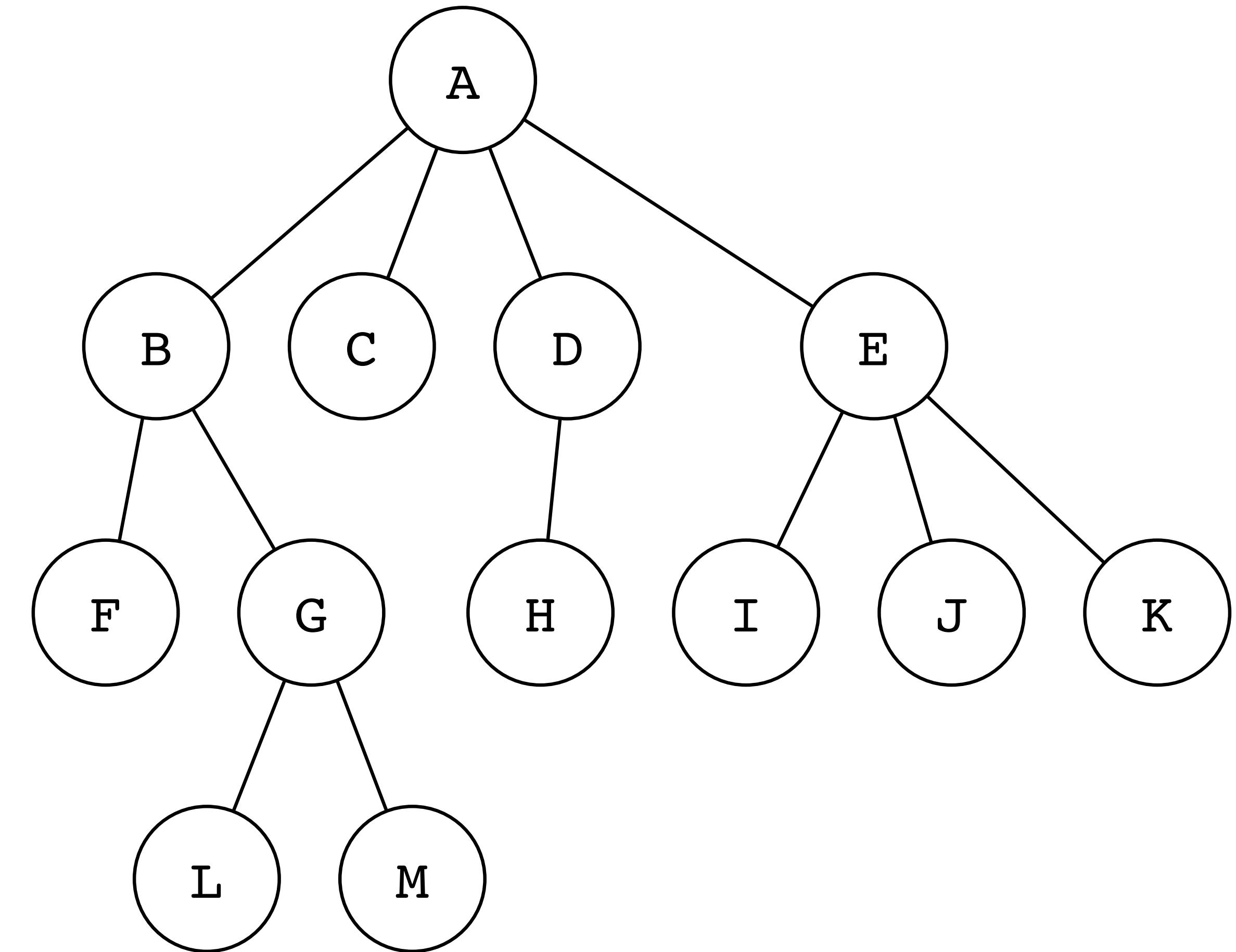
Liste<Noeud*> enfants



Sans utiliser de structures linéaires

```
structure Noeud<T>
```

```
T étiquette
```

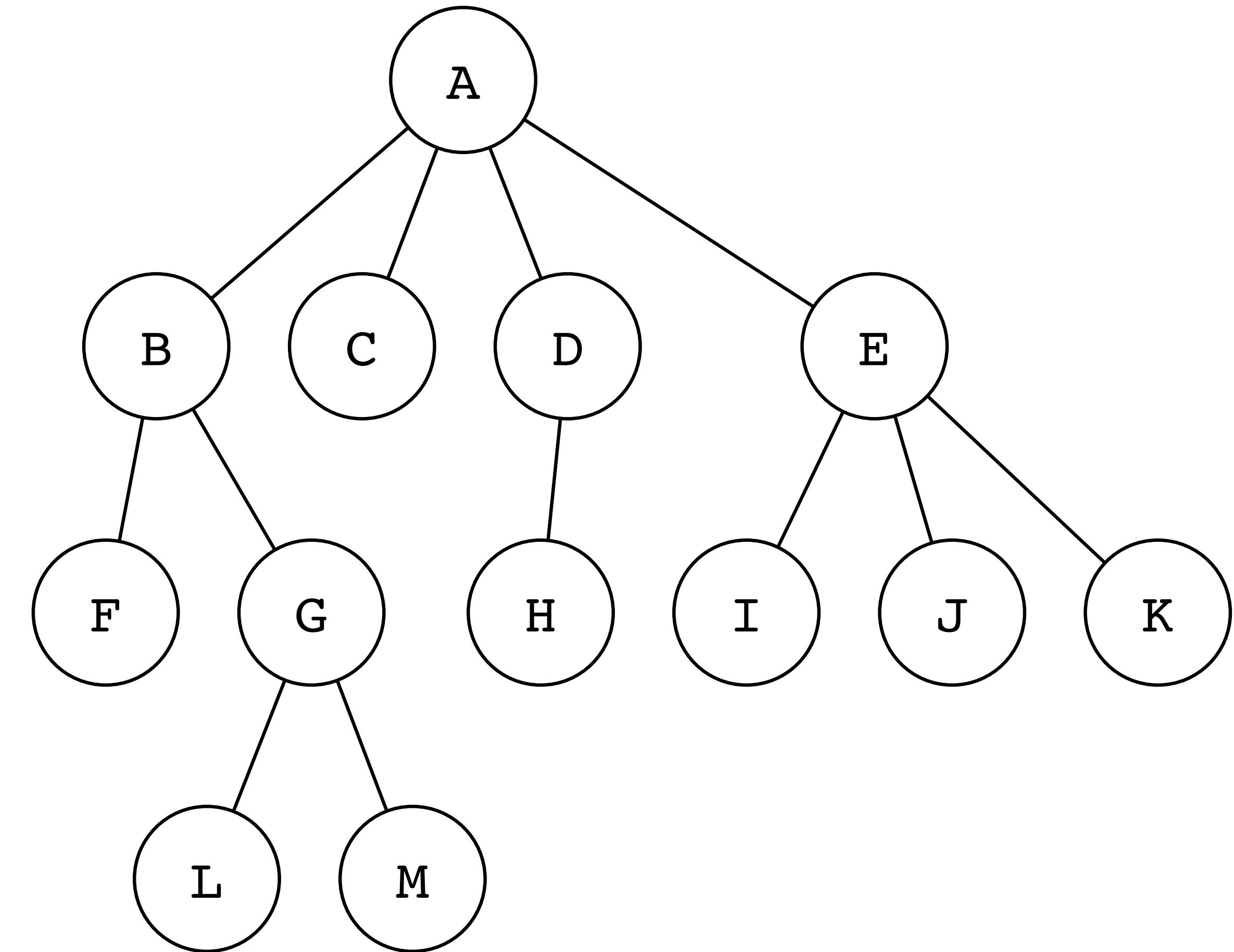




Sans utiliser de structures linéaires

- Un lien descendant vers l'ainé des enfants

```
structure Noeud<T>
T étiquette
Noeud* ainé
```

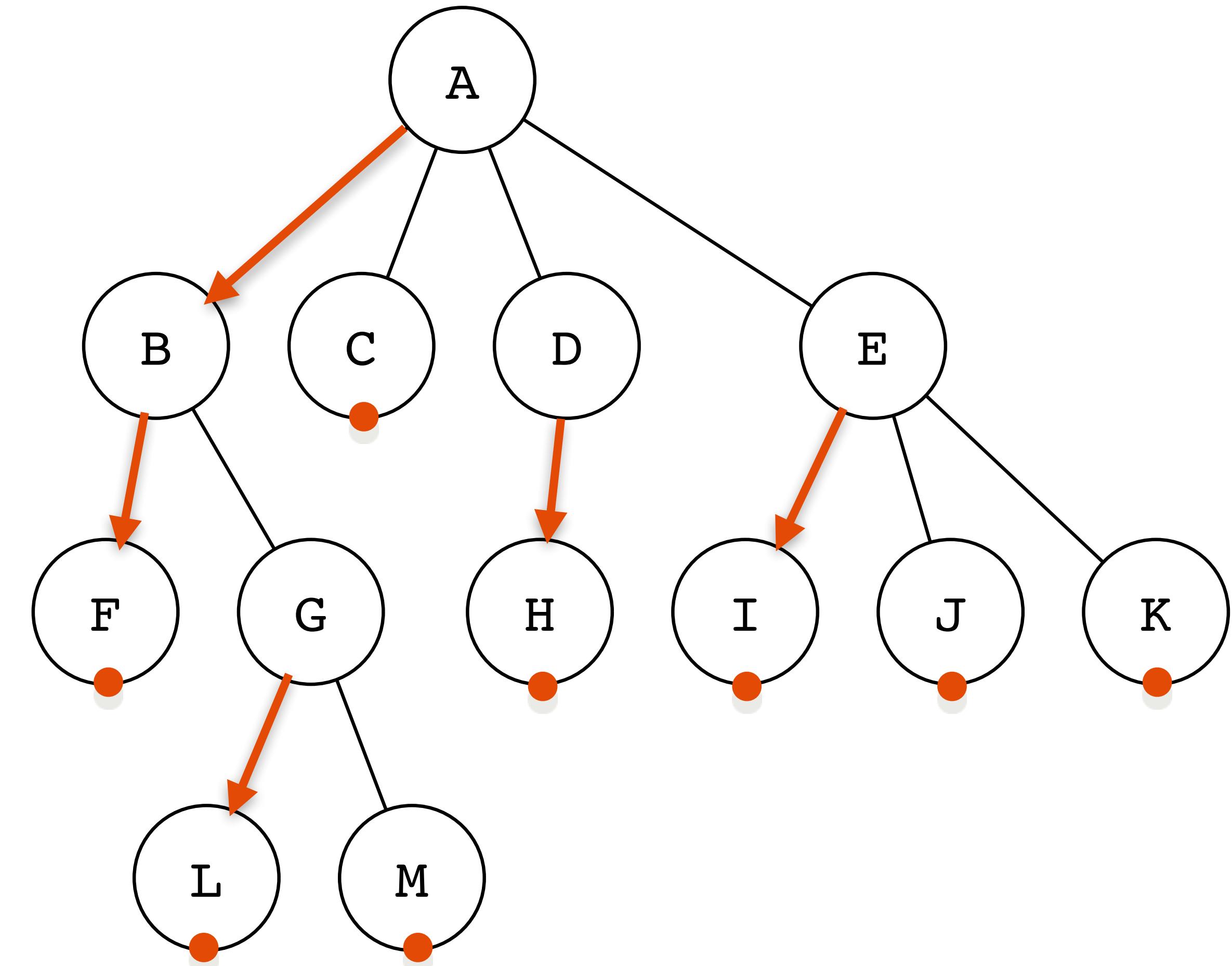




Sans utiliser de structures linéaires

- Un lien descendant vers l'ainé des enfants

```
structure Noeud<T>
T étiquette
Noeud* ainé
```

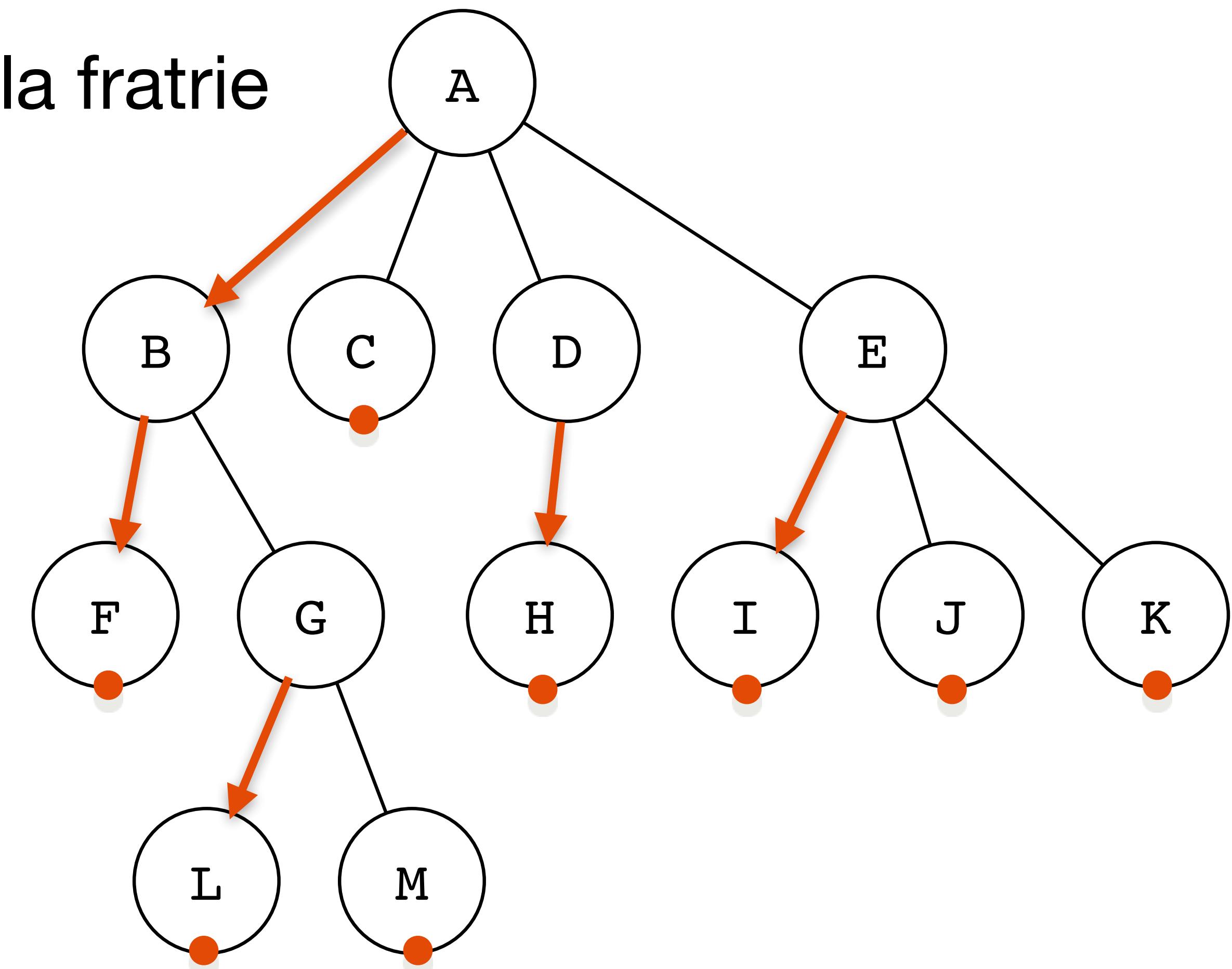




Sans utiliser de structures linéaires

- Un lien **descendant** vers l'ainé des enfants
- Un lien **horizontal** vers le puiné dans la fratrie

```
structure Noeud<T>
T étiquette
Noeud* ainé
Noeud* puiné
```

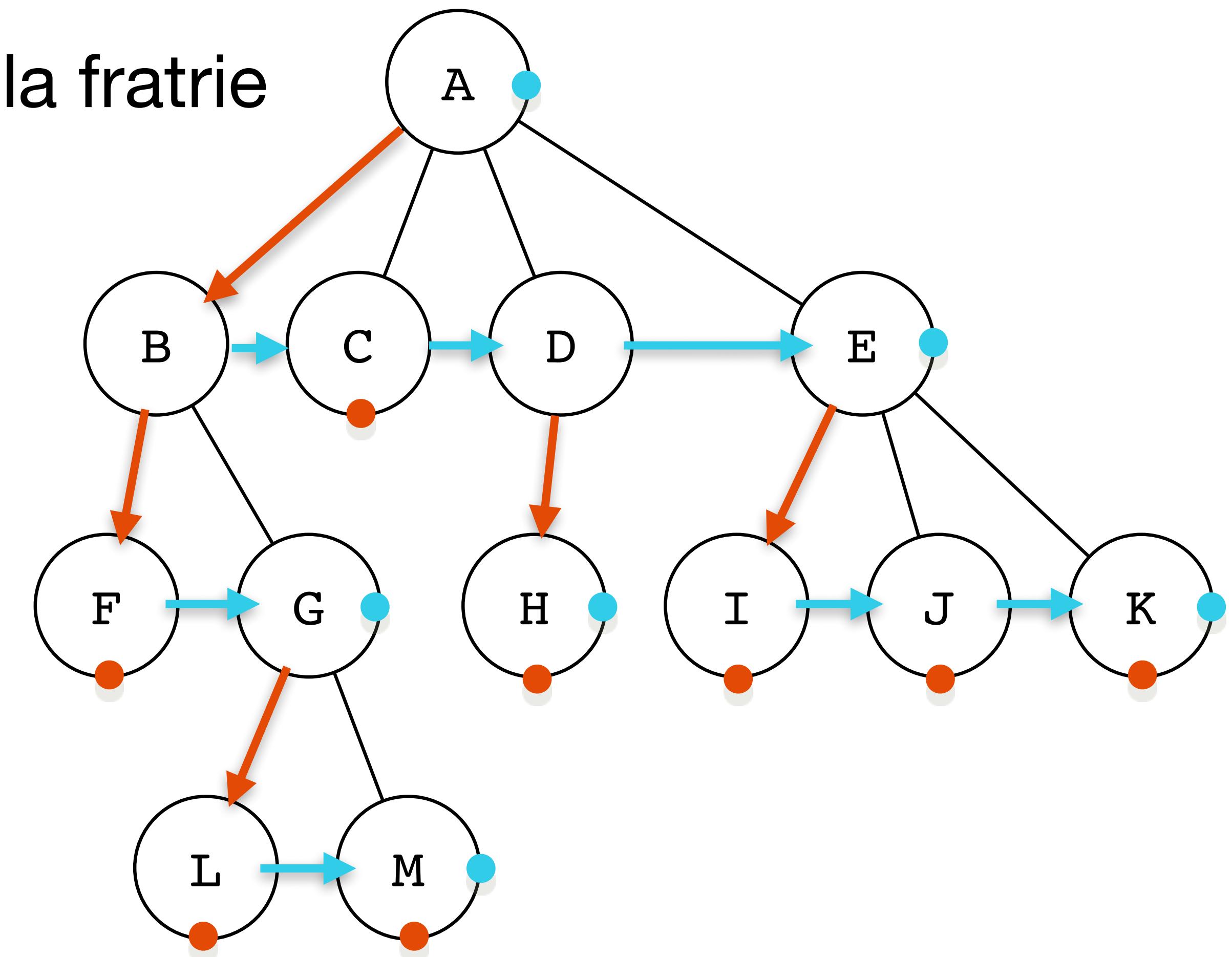




Sans utiliser de structures linéaires

- Un lien **descendant** vers l'ainé des enfants
- Un lien **horizontal** vers le puiné dans la fratrie

```
structure Noeud<T>
T étiquette
Noeud* ainé
Noeud* puiné
```

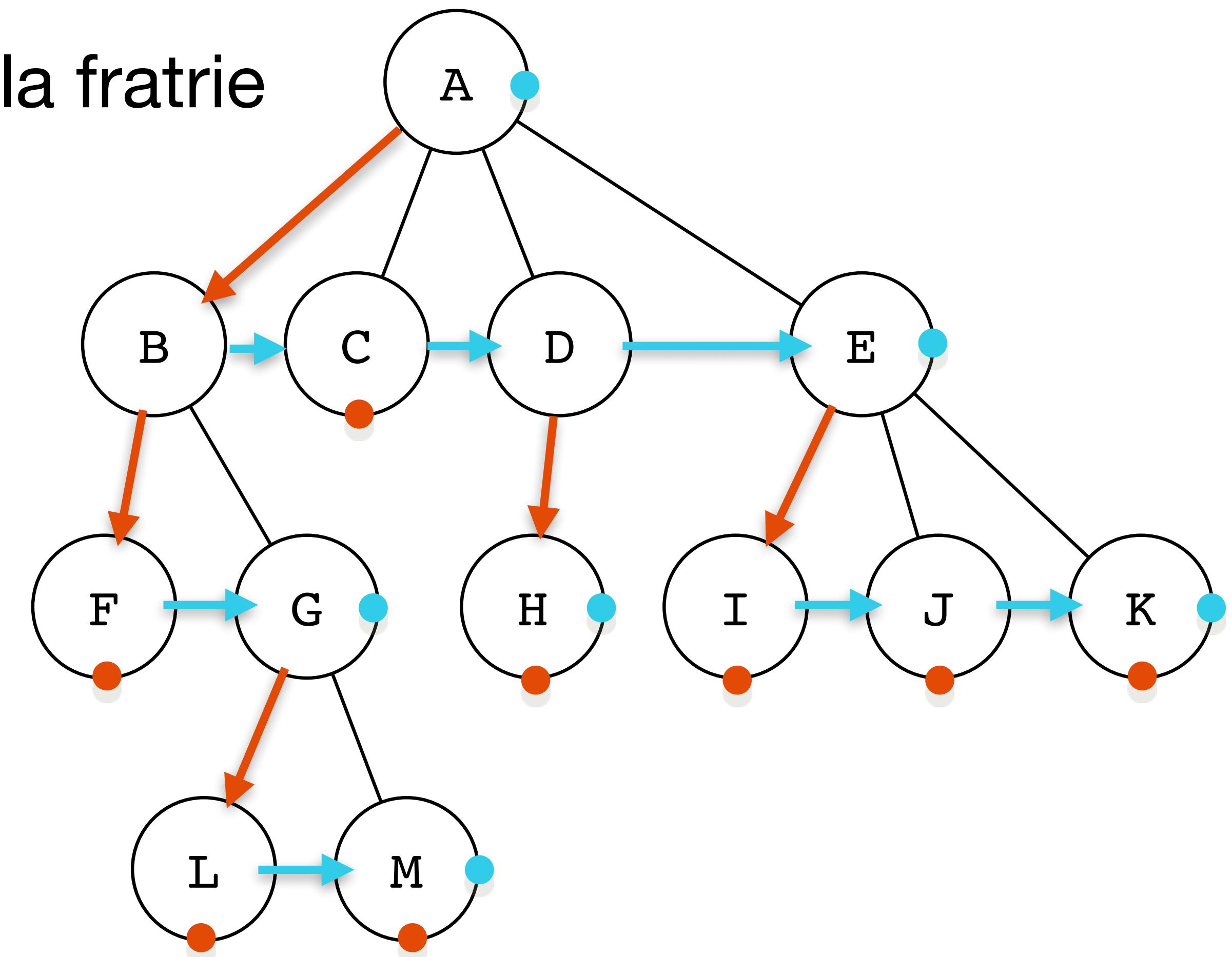




Sans utiliser de structures linéaires

- Un lien **descendant** vers l'ainé des enfants
- Un lien **horizontal** vers le puiné dans la fratrie
- Un lien **montant** vers le parent

```
structure Noeud<T>
    T étiquette
    Noeud* ainé
    Noeud* puiné
    Noeud* parent
```

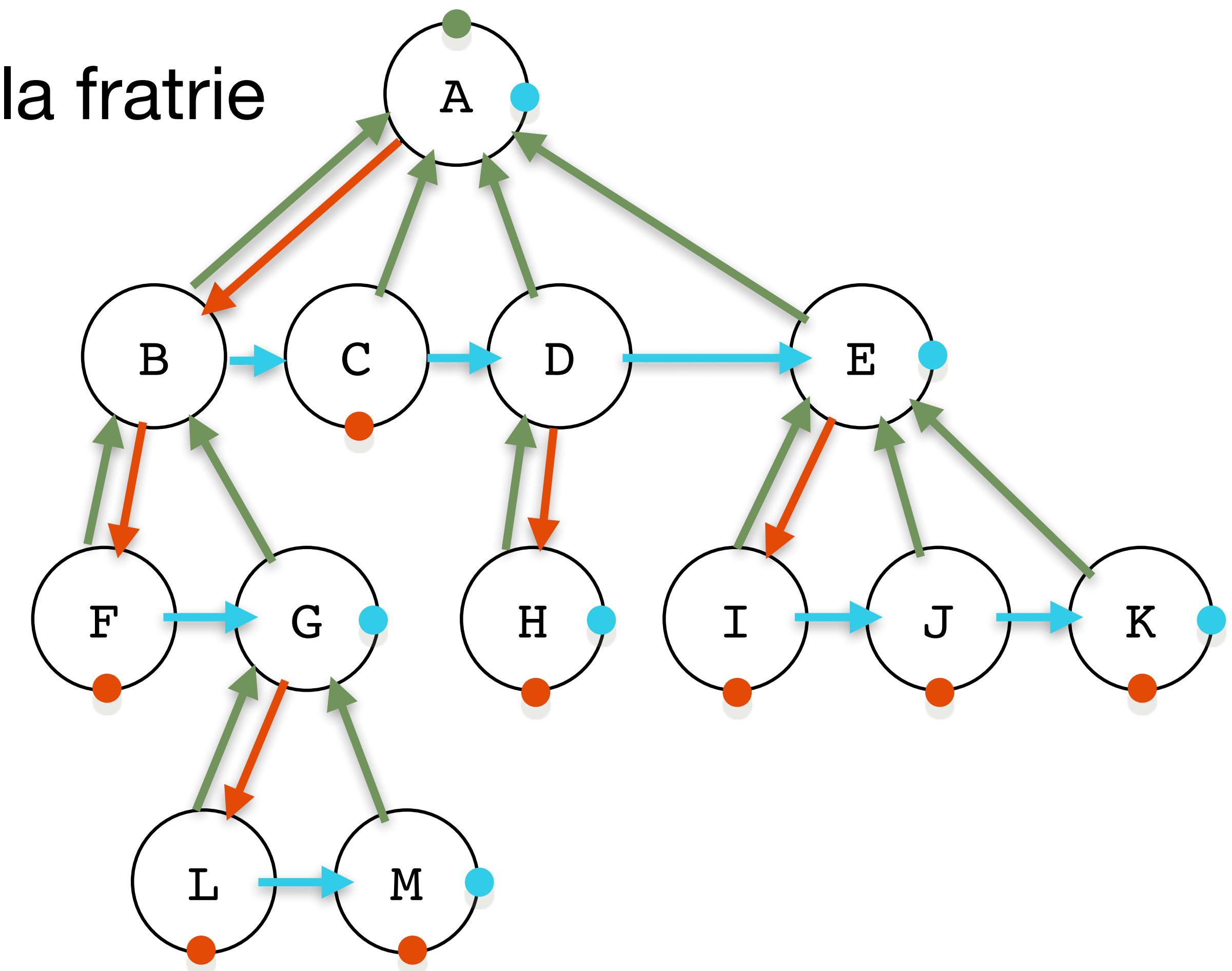




Sans utiliser de structures linéaires

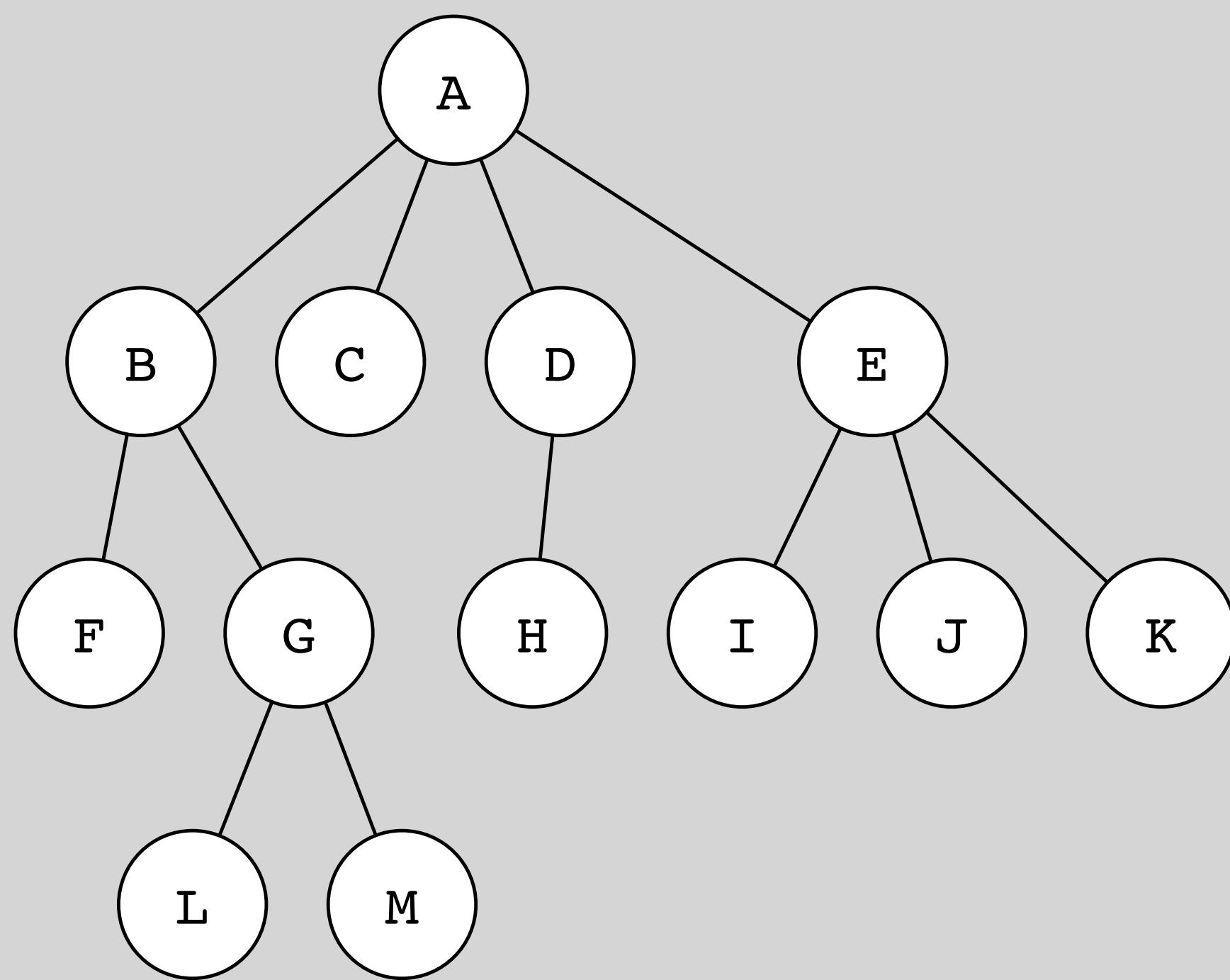
- Un lien **descendant** vers l'ainé des enfants
- Un lien **horizontal** vers le puiné dans la fratrie
- Un lien **montant** vers le parent

```
structure Noeud<T>
    T étiquette
    Noeud* ainé
    Noeud* puiné
    Noeud* parent
```



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-dessous pour stocker l'arbre ci-dessous?



```
template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*, DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

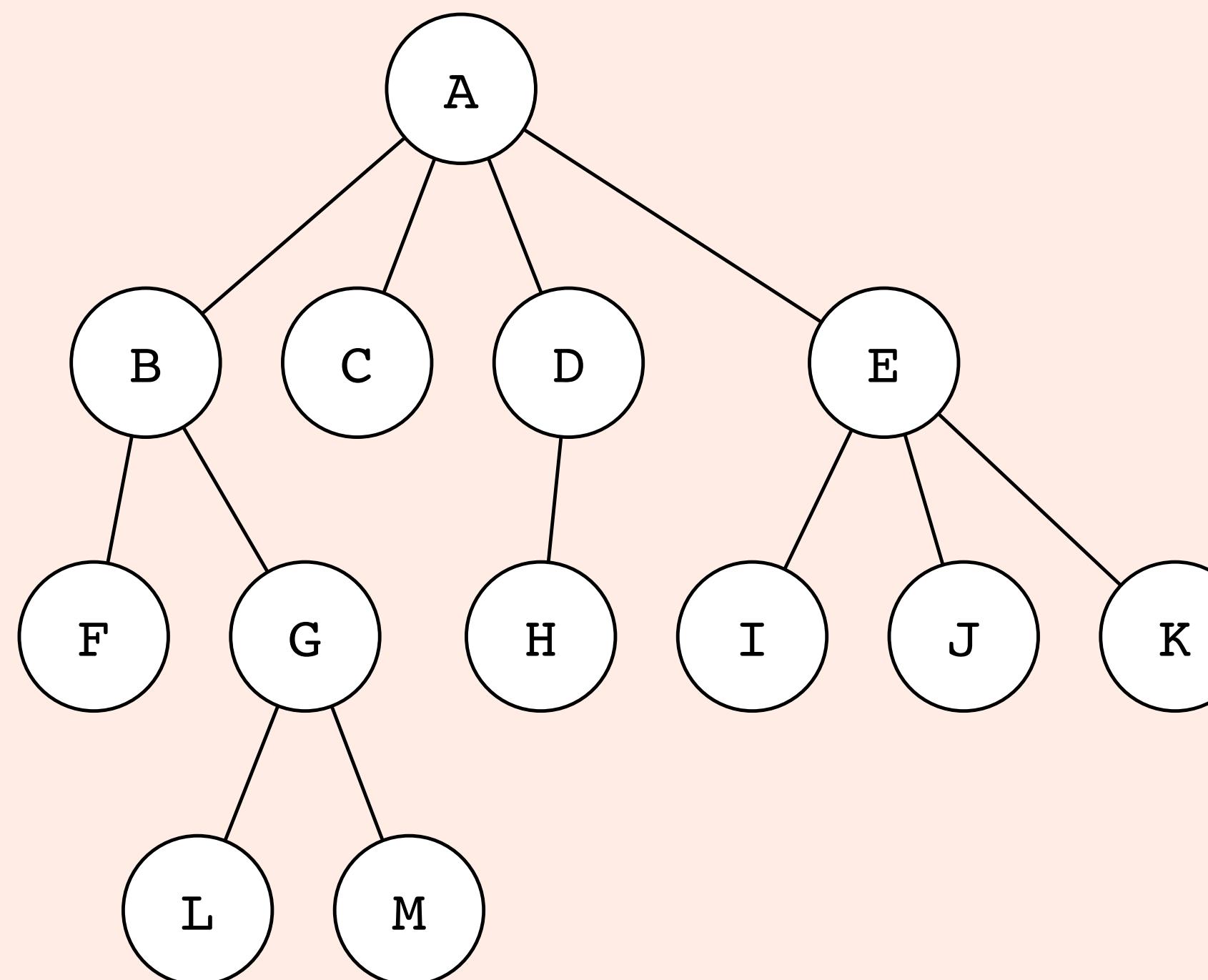
template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
```



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-contre pour stocker l'arbre ci-dessous?



```
template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*,DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

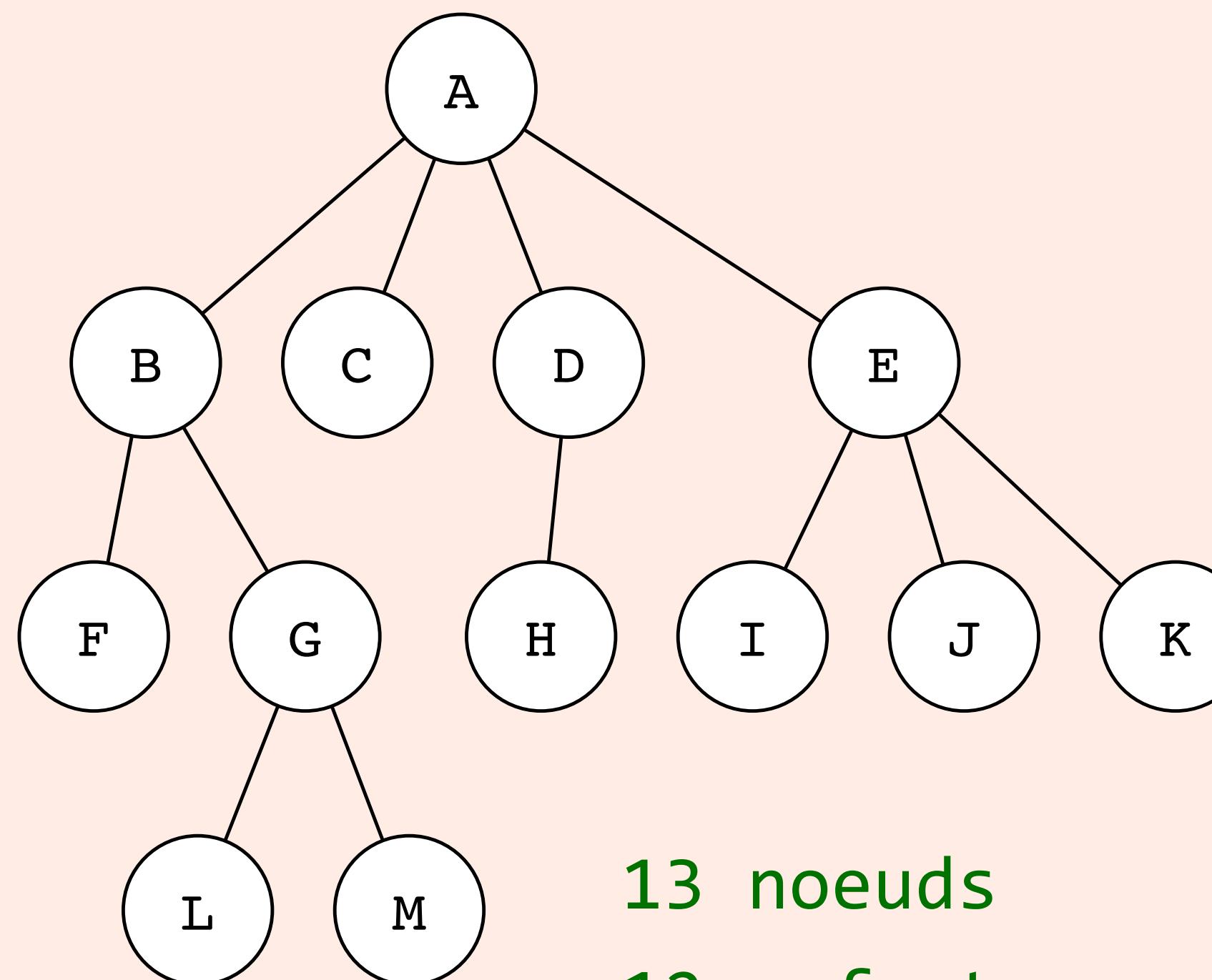
template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
```



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-contre pour stocker l'arbre ci-dessous?



```
template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*,DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

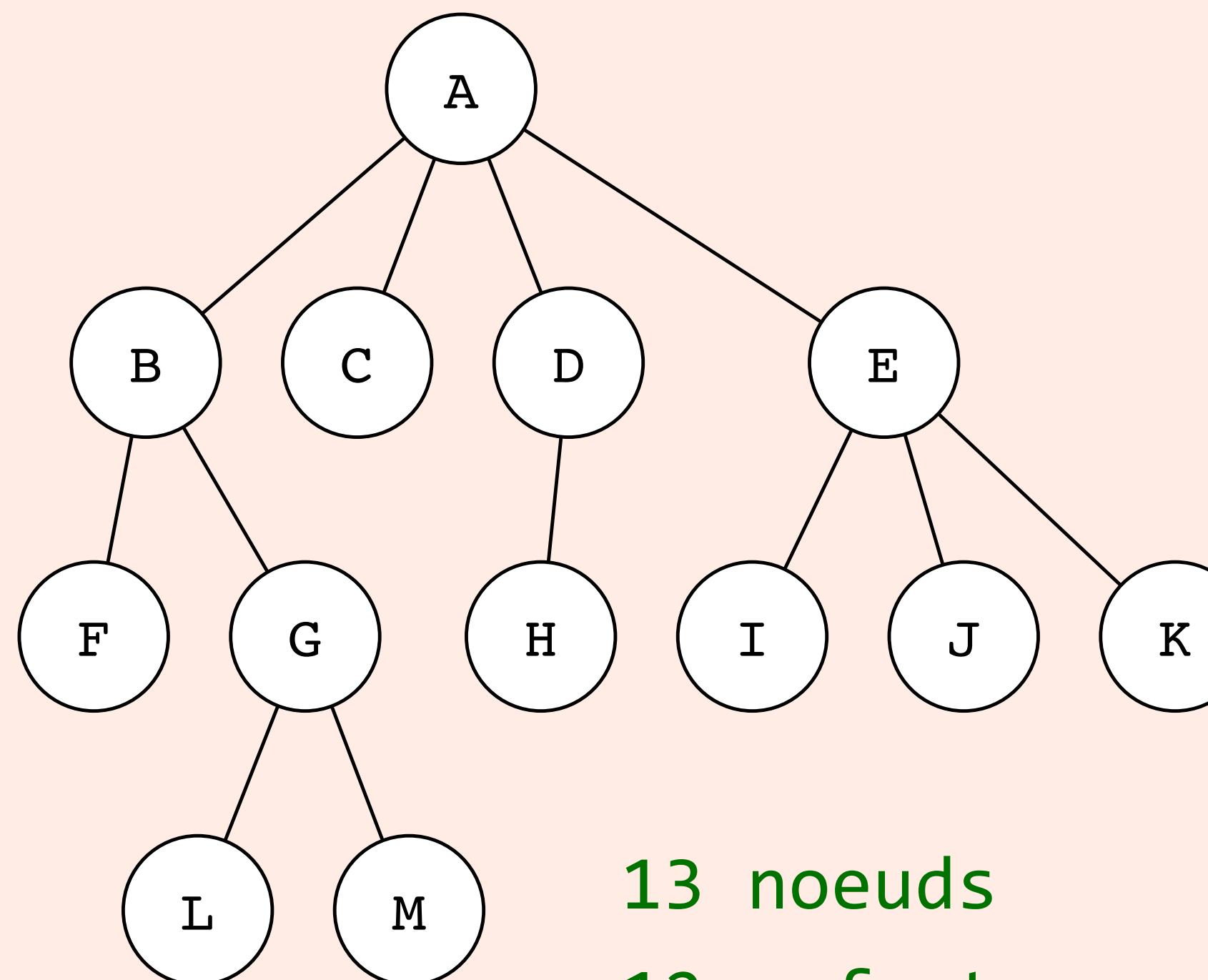
template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
```



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-contre pour stocker l'arbre ci-dessous?



```
template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*,DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
```

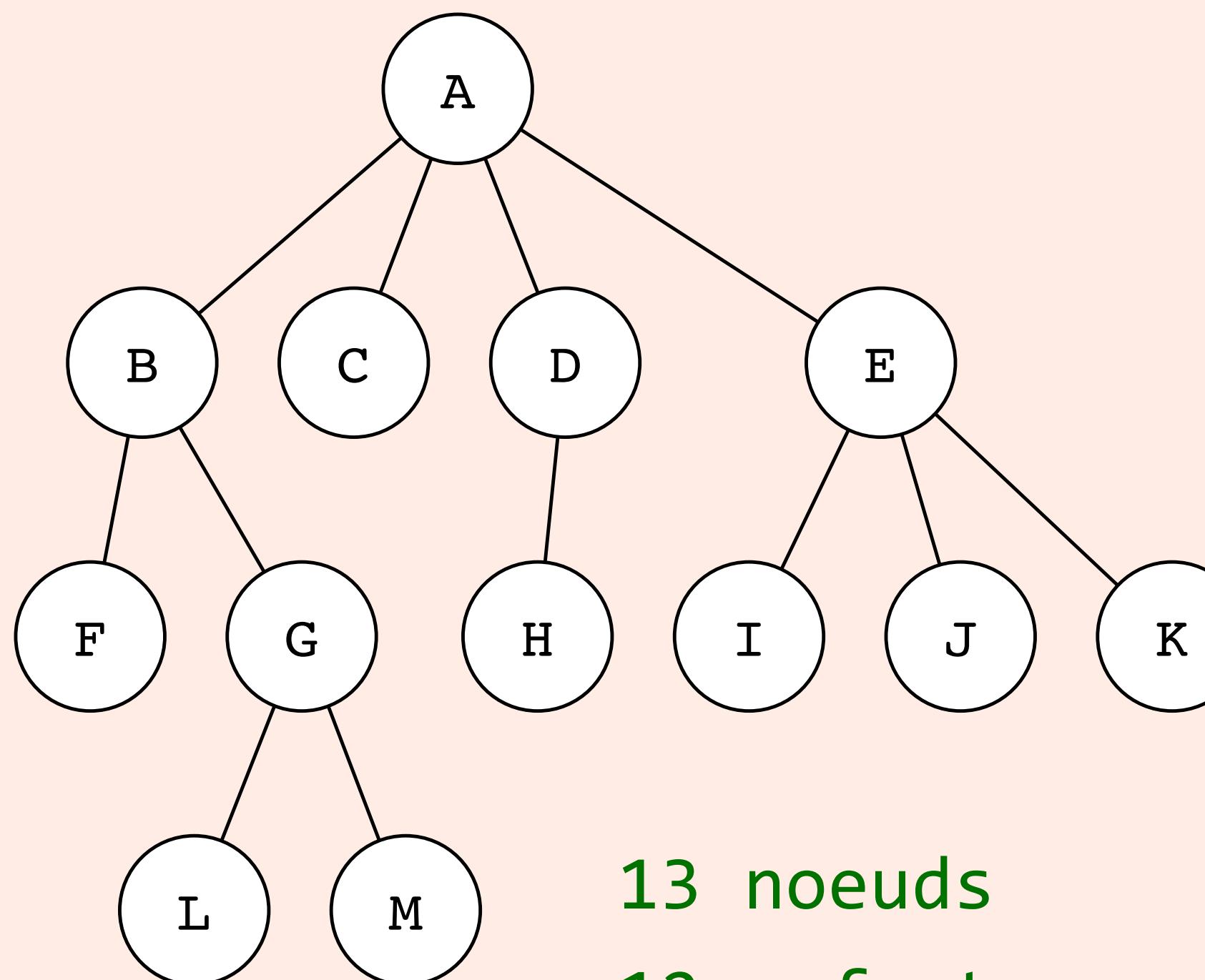
Degré 4

$$13 \times 5 = 65$$



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-contre pour stocker l'arbre ci-dessous?



```
template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*,DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
```

Degré 4

$$13 \times 5 = 65$$

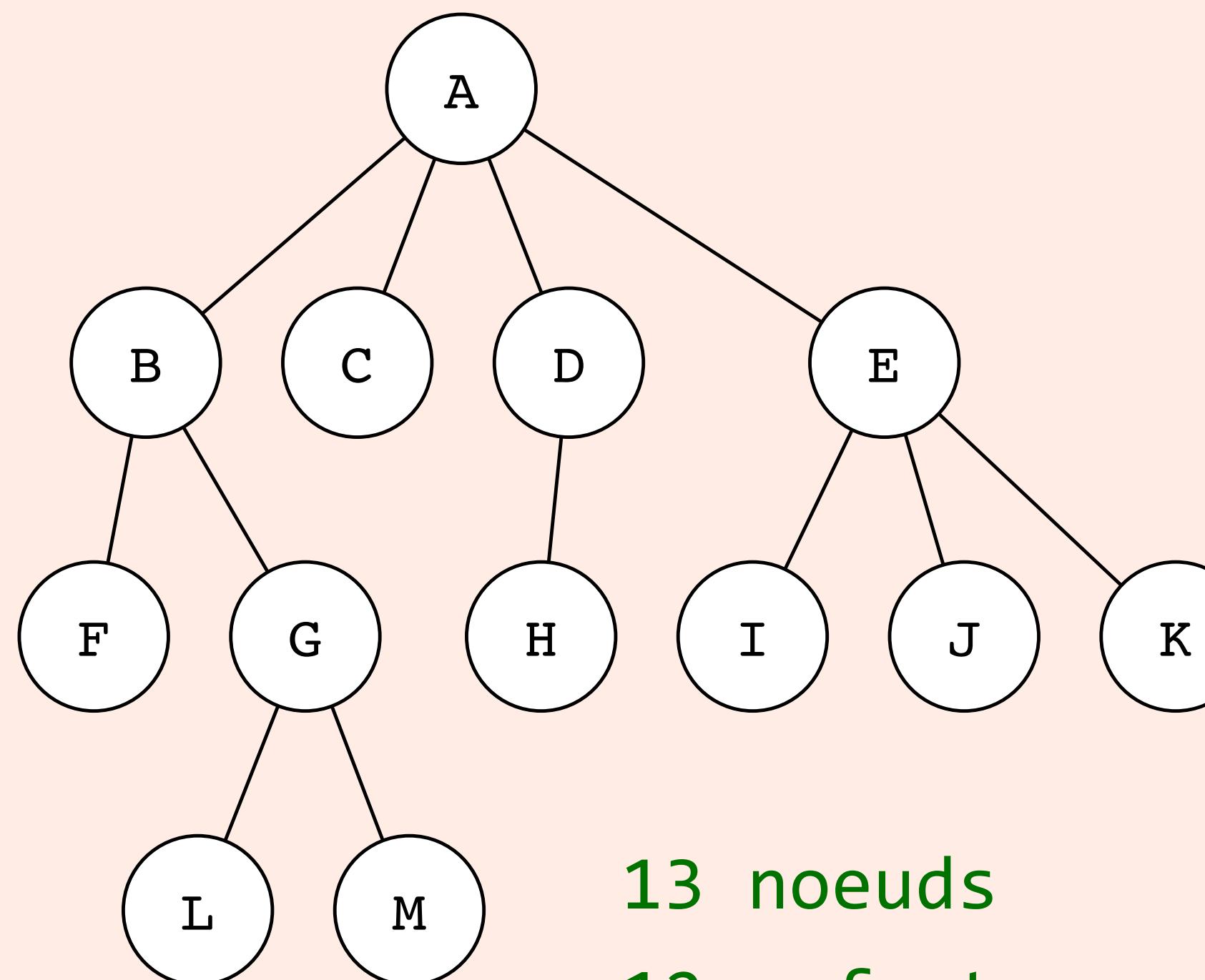
3+n par vector de n ptr

$$13 \times 4 + 12 = 64$$



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-contre pour stocker l'arbre ci-dessous?



```

template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*,DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
  
```

Degré 4

$$13 \times 5 = 65$$

$3+n$ par vector de n ptr

$$13 \times 4 + 12 = 64$$

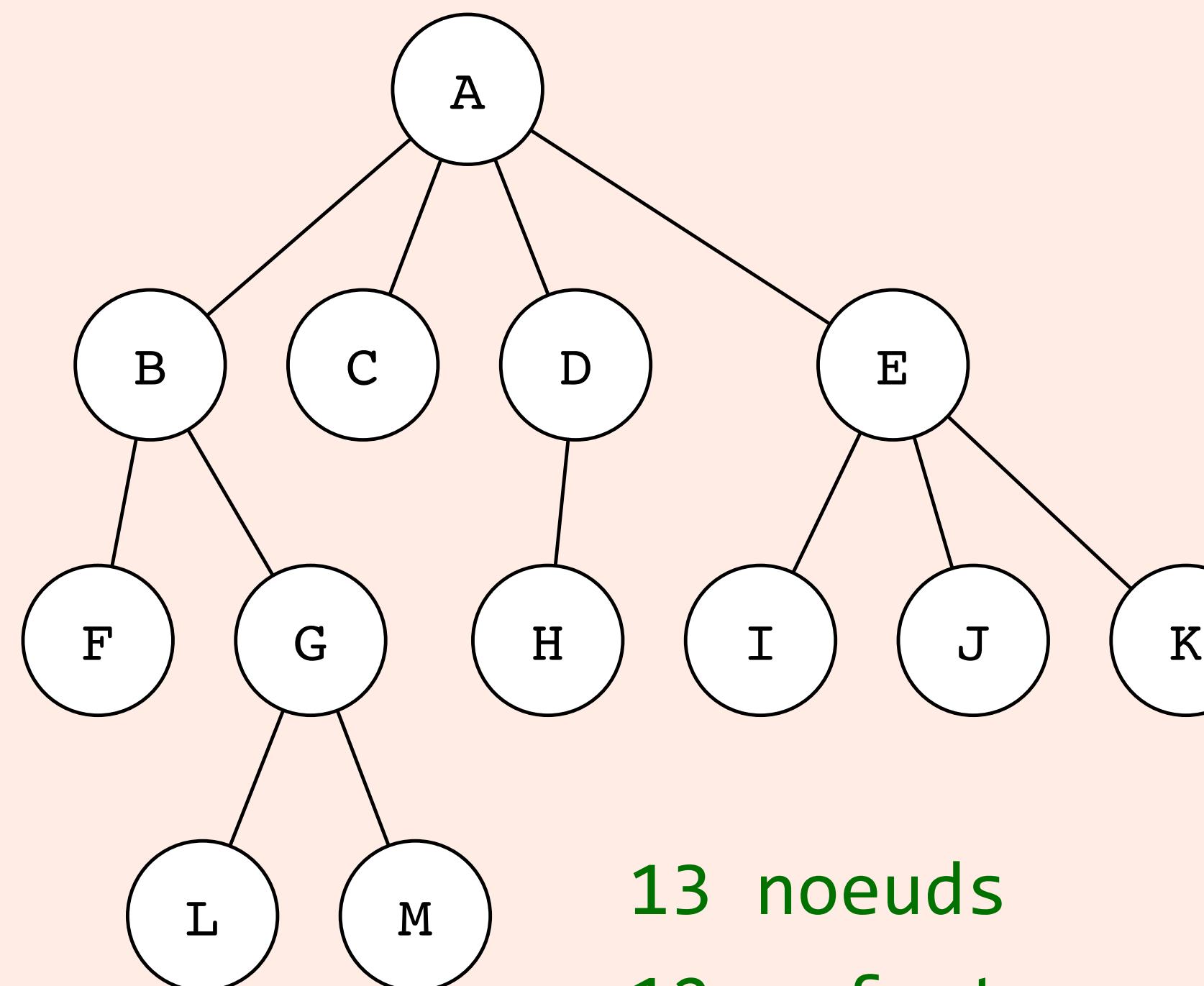
$3+3n$ ptr / liste de n ptr

$$13 \times 4 + 12 \times 3 = 88$$



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-contre pour stocker l'arbre ci-dessous?



```

template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*,DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
  
```

Degré 4

$$13 \times 5 = 65$$

$3+n$ par vector de n ptr

$$13 \times 4 + 12 = 64$$

$3+3n$ ptr / liste de n ptr

$$13 \times 4 + 12 \times 3 = 88$$

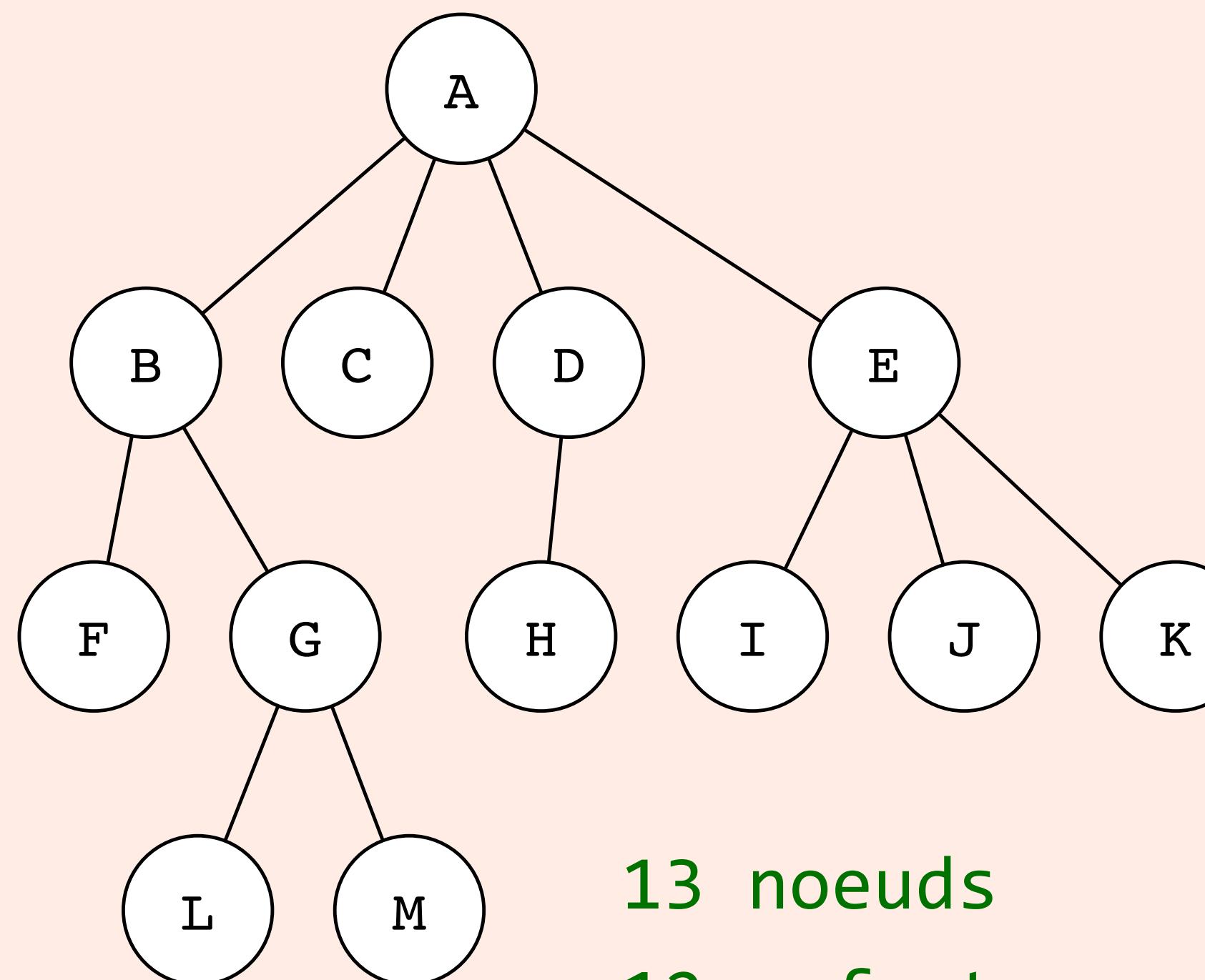
$1+2n$ ptr / liste de n ptr

$$13 \times 2 + 12 \times 2 = 50$$



Exercice

Quelle est le nombre minimum de pointeurs et/ou `size_t` utilisés par les structures ci-contre pour stocker l'arbre ci-dessous?



```

template <typename T> struct Node1 {
    T etiquette;
    Node1* parent;
    array<Node1*,DEGRE> enfants;
};

template <typename T> struct Node2 {
    T etiquette;
    Node2* parent;
    vector<Node2*> enfants;
};

template <typename T> struct Node3 {
    T etiquette;
    Node3* parent;
    list<Node3*> enfants;
};

template <typename T> struct Node4 {
    T etiquette;
    Node4* parent;
    forward_list<Node4*> enfants;
};

template <typename T> struct Node5 {
    T etiquette;
    Node5* parent;
    Node5* ainé;
    Node5* puiné;
};
  
```

Degré 4

$$13 \times 5 = 65$$

$3+n$ par vector de n ptr

$$13 \times 4 + 12 = 64$$

$3+3n$ ptr / liste de n ptr

$$13 \times 4 + 12 \times 3 = 88$$

$1+2n$ ptr / liste de n ptr

$$13 \times 2 + 12 \times 2 = 50$$

3 ptr par élément

$$13 \times 3 = 39$$

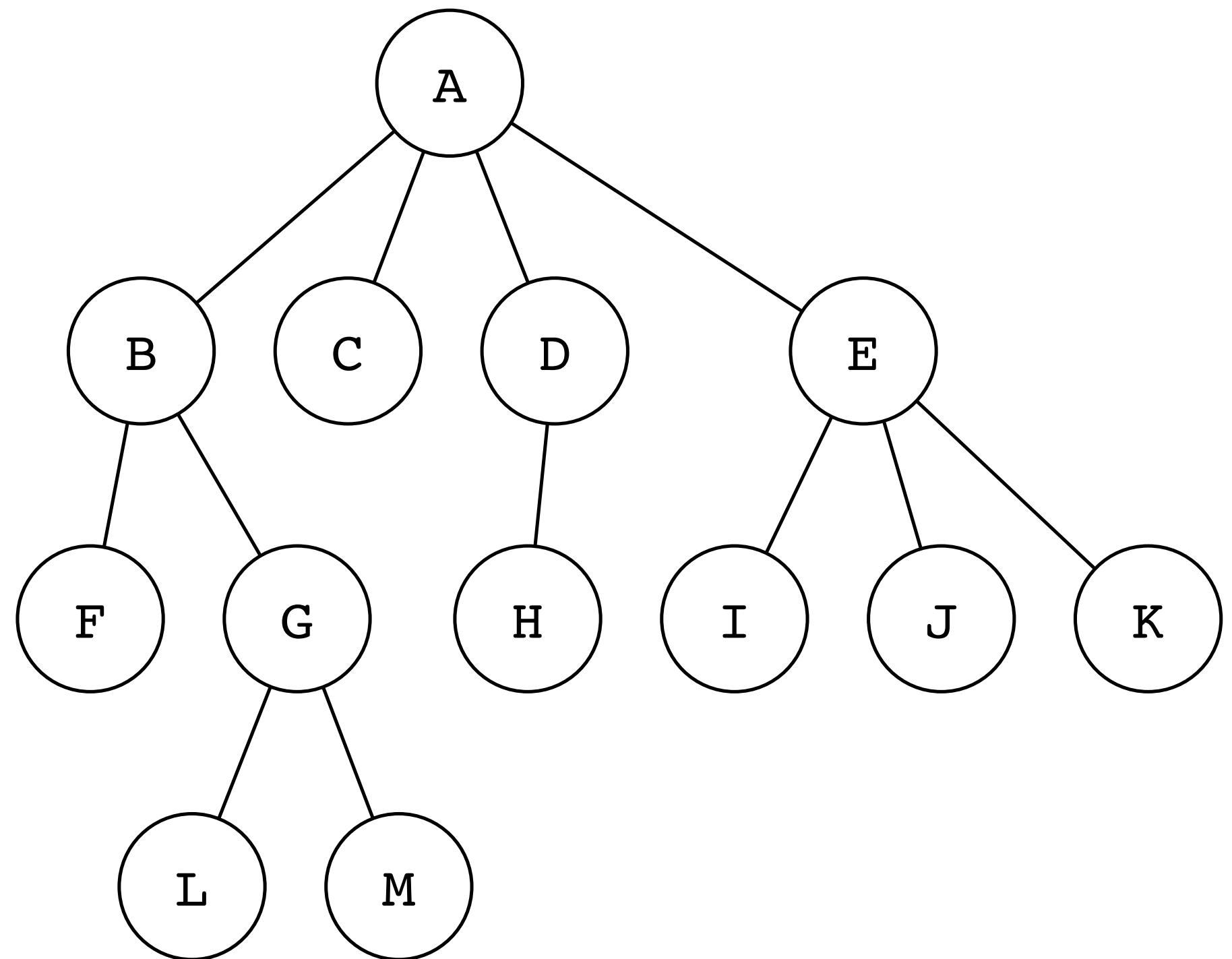
3. Parcours





Parcours en profondeur

- Comment **visiter** tous les noeuds d'un arbre ?
- **Récursivement** : visiter la racine, puis parcourir tous les sous-arbres dont ses enfants sont la racine
- **Cas trivial** : ne rien faire pour un arbre vide

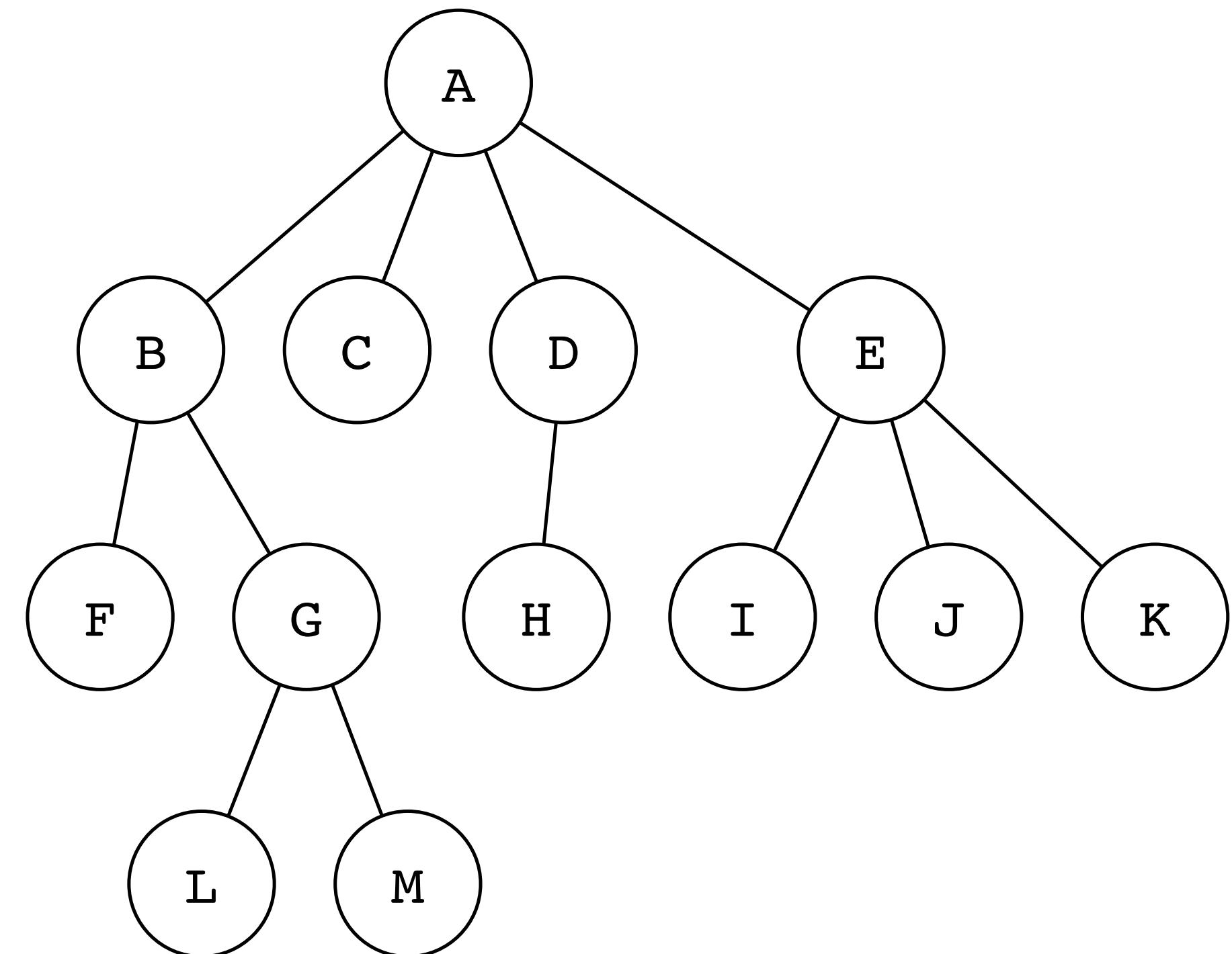




Parcours en profondeur

- Comment **visiter** tous les noeuds d'un arbre ?
- **Récursivement** : visiter la racine, puis parcourir tous les sous-arbres dont ses enfants sont la racine
- **Cas trivial** : ne rien faire pour un arbre vide

```
fonction profondeur (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pour tout enfant e de r
            profondeur(e, fn)
```





Primogéniture

- 👑 King Albert II (born 1934)
- 👑 King Philippe (b. 1960)
 - (1) Princess Elisabeth, Duchess of Brabant (b. 2001)^[1]
 - (2) Prince Gabriel (b. 2003)^[1]
 - (3) Prince Emmanuel (b. 2005)^[1]
 - (4) Princess Eléonore (b. 2008)^[1]
- (5) Princess Astrid, Archduchess of Austria-Este (b. 1962)^[1]
 - (6) Prince Amedeo, Archduke of Austria-Este (b. 1986)^[1]
 - (7) Archduchess Anna Astrid of Austria-Este (b. 2016)
 - (8) Archduke Maximilian of Austria-Este (b. 2019)
 - (9) Princess Maria Laura, Archduchess of Austria-Este (b. 1988)^[1]
 - (10) Prince Joachim, Archduke of Austria-Este (b. 1991)^[1]
 - (11) Princess Luisa Maria, Archduchess of Austria-Este (b. 1995)^[1]
 - (12) Princess Laetitia Maria, Archduchess of Austria-Este (b. 2003)^[1]
- (13) Prince Laurent (b. 1963)^[1]
 - (14) Princess Louise (b. 2004)^[1]
 - (15) Prince Nicolas (b. 2005)^[1]
 - (16) Prince Aymeric (b. 2005)^[1]

Qui succèdera à Philippe, roi des Belges ?





Primogéniture

- 👑 King Albert II (born 1934)
- 👑 King Philippe (b. 1960)
 - (1) Princess Elisabeth, Duchess of Brabant (b. 2001)^[1]
 - (2) Prince Gabriel (b. 2003)^[1]
 - (3) Prince Emmanuel (b. 2005)^[1]
 - (4) Princess Eléonore (b. 2008)^[1]
- (5) Princess Astrid, Archduchess of Austria-Este (b. 1962)^[1]
 - (6) Prince Amedeo, Archduke of Austria-Este (b. 1986)^[1]
 - (7) Archduchess Anna Astrid of Austria-Este (b. 2016)
 - (8) Archduke Maximilian of Austria-Este (b. 2019)
 - (9) Princess Maria Laura, Archduchess of Austria-Este (b. 1988)^[1]
 - (10) Prince Joachim, Archduke of Austria-Este (b. 1991)^[1]
 - (11) Princess Luisa Maria, Archduchess of Austria-Este (b. 1995)^[1]
 - (12) Princess Laetitia Maria, Archduchess of Austria-Este (b. 2003)^[1]
- (13) Prince Laurent (b. 1963)^[1]
 - (14) Princess Louise (b. 2004)^[1]
 - (15) Prince Nicolas (b. 2005)^[1]
 - (16) Prince Aymeric (b. 2005)^[1]

Qui succèdera à Philippe, roi des Belges ?

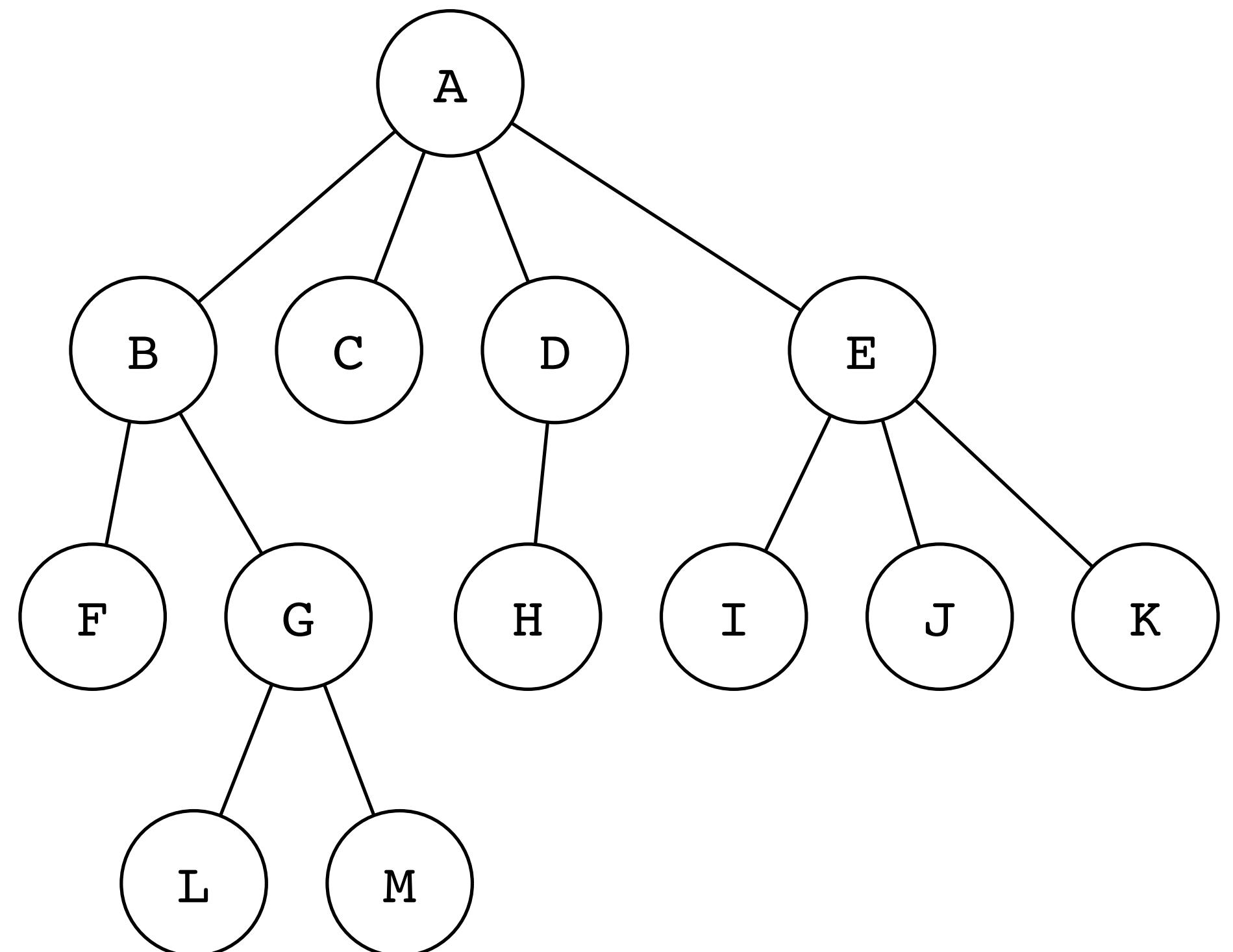




Parcours post-ordonné

```
fonction préordre (r, fn)
    si r != ø
        fn(r)
        pour tout enfant e de r
            profondeur(e, fn)
```

- Revenons sur le parcours en profondeur
- Pourquoi visiter la racine **avant** les enfants et pas **après**?
- Utile par exemple pour détruire la structure



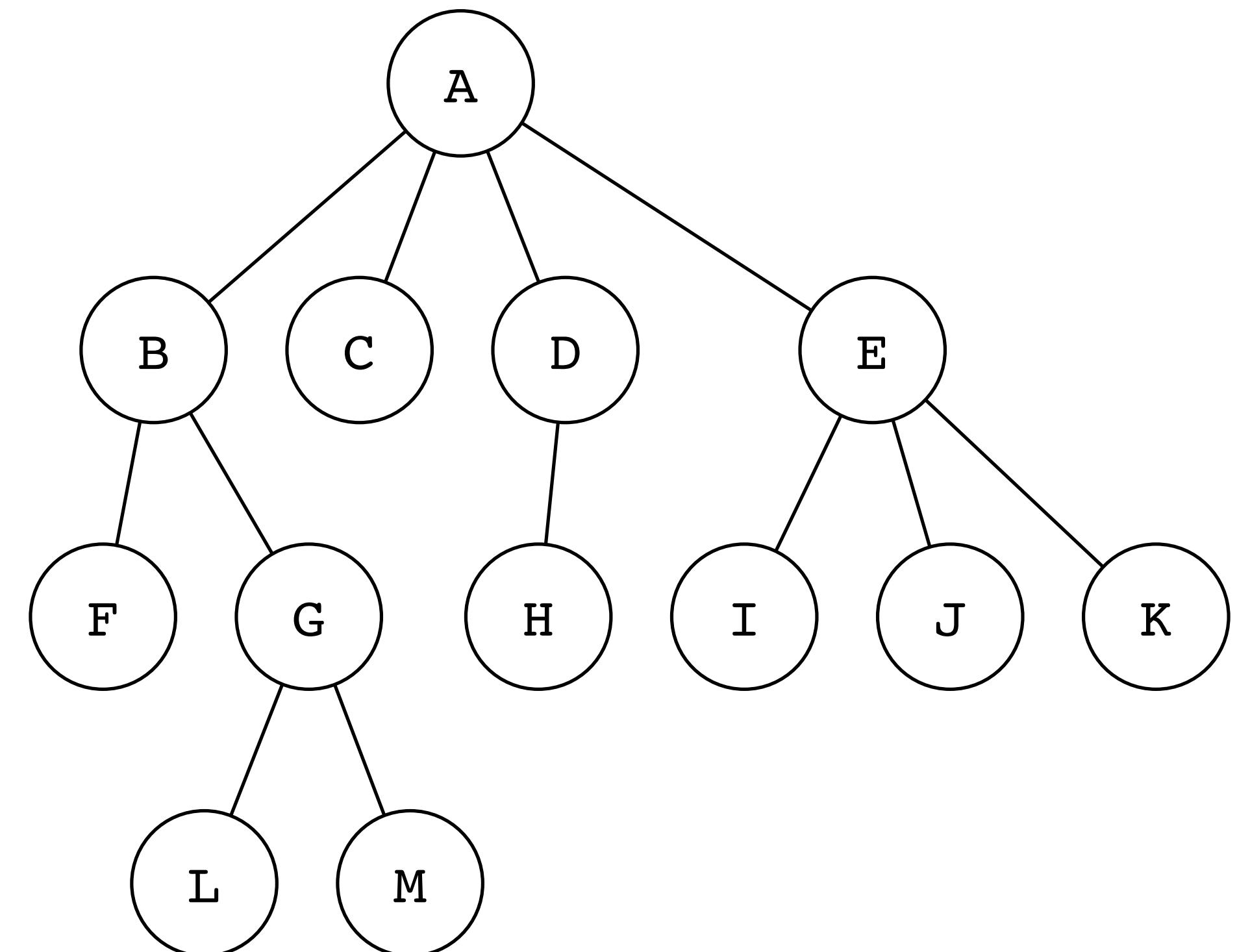


Parcours post-ordonné

```
fonction préordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pour tout enfant e de r
            profondeur(e, fn)
```

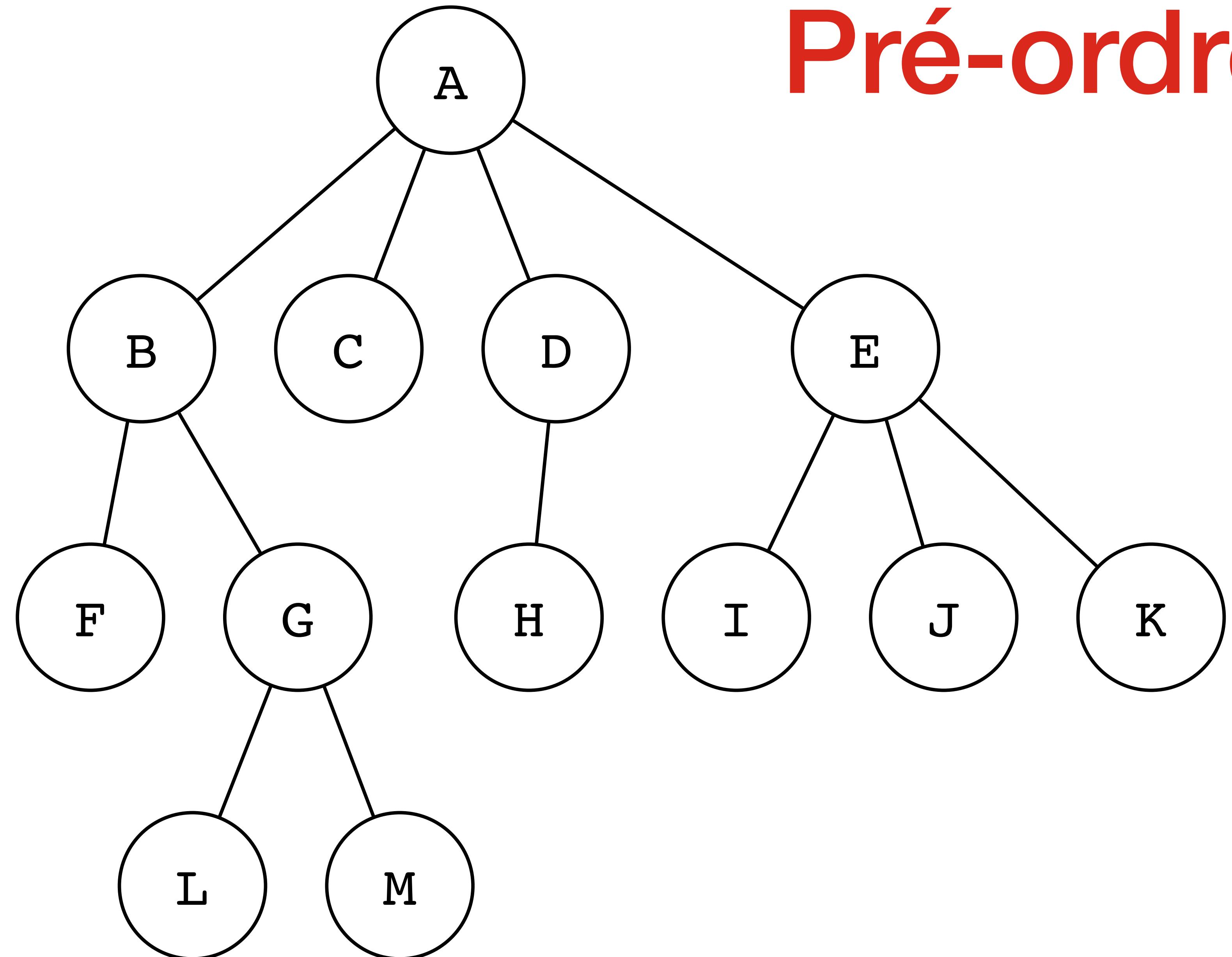
```
fonction postordre (r, fn)
    si r != Ø
        pour tout enfant e de r
            postordre(e, fn)
        fn(r)
```

- Revenons sur le parcours en profondeur
- Pourquoi visiter la racine **avant** les enfants et pas **après**?
- Utile par exemple pour détruire la structure



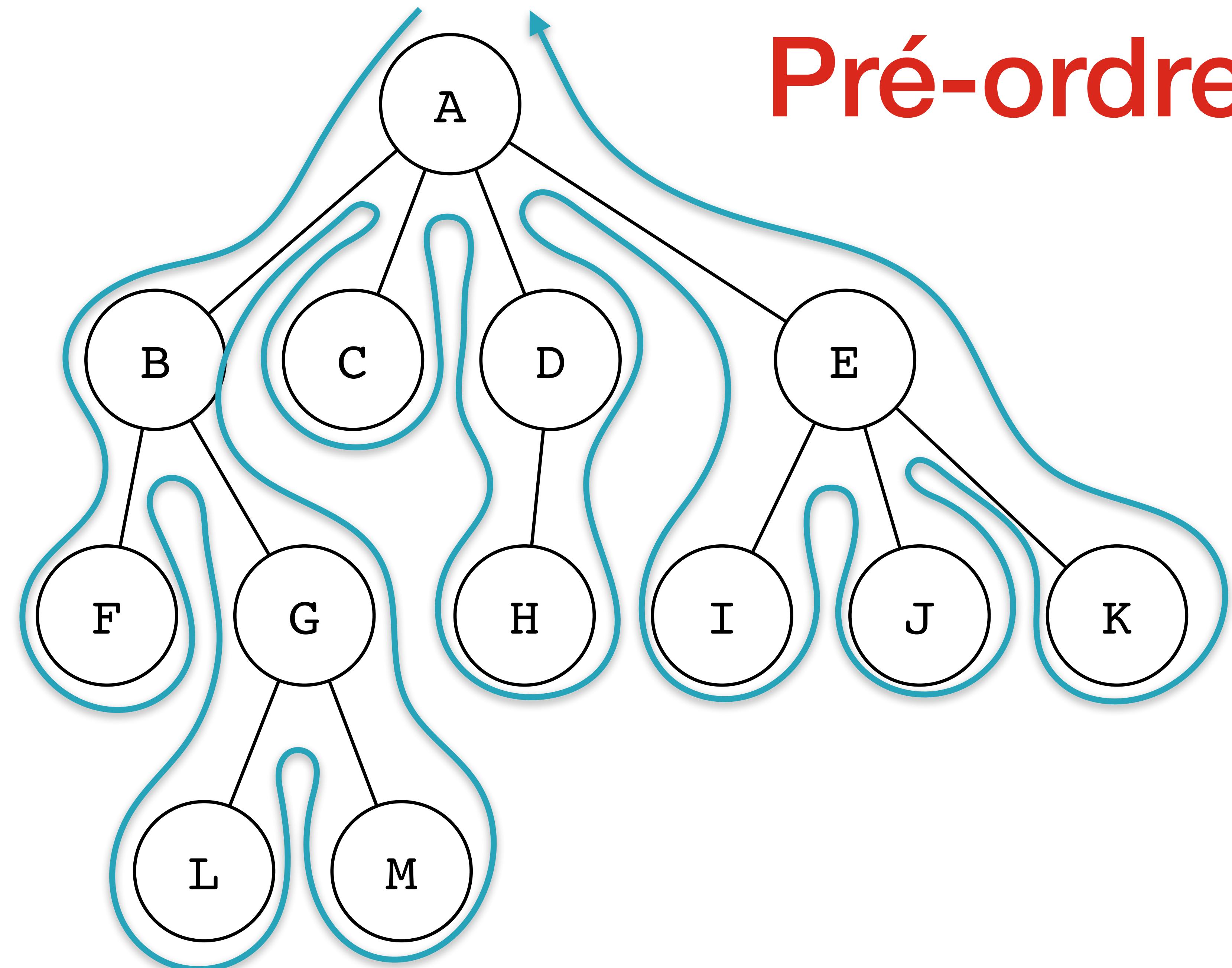


Pré-ordre



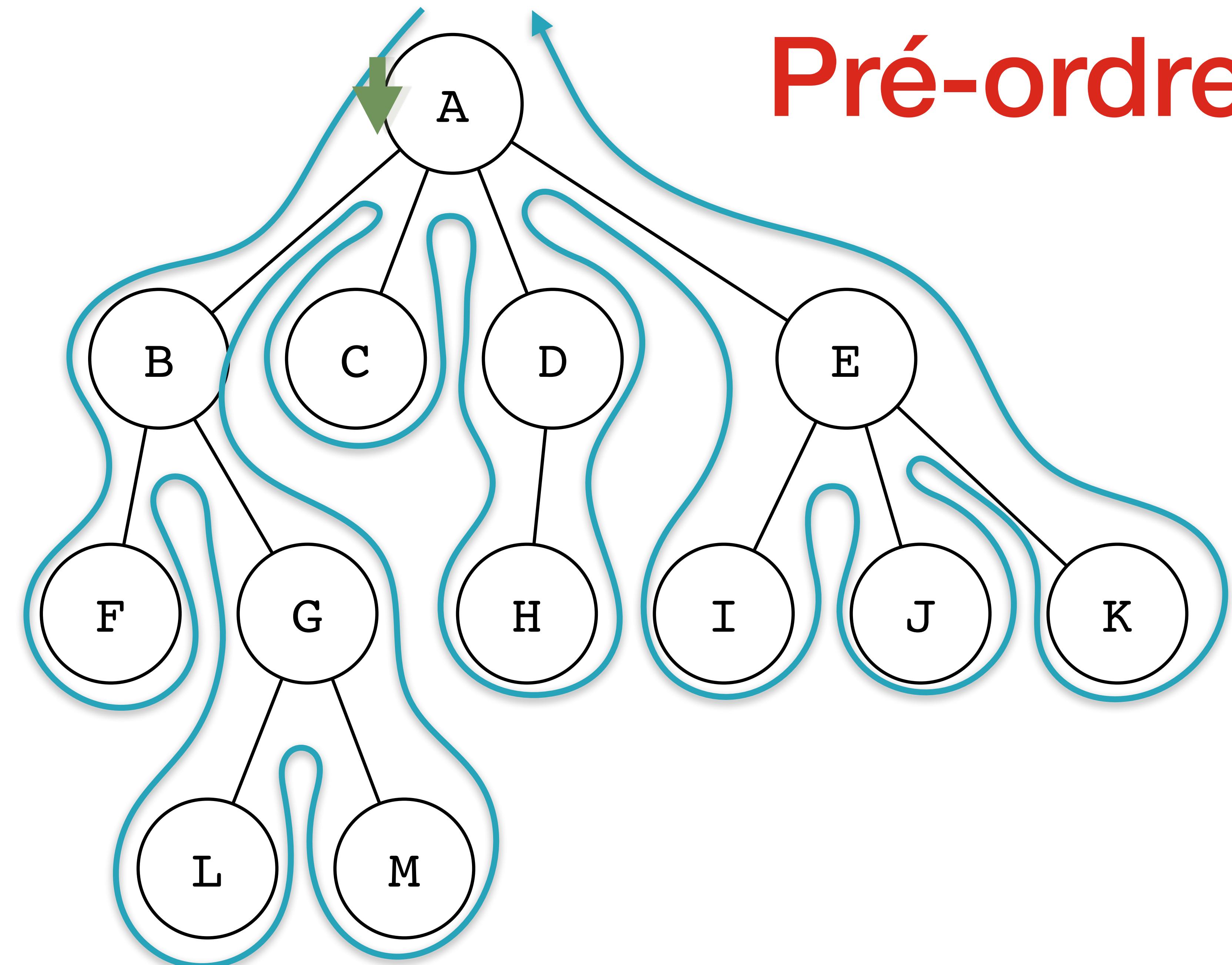


Pré-ordre



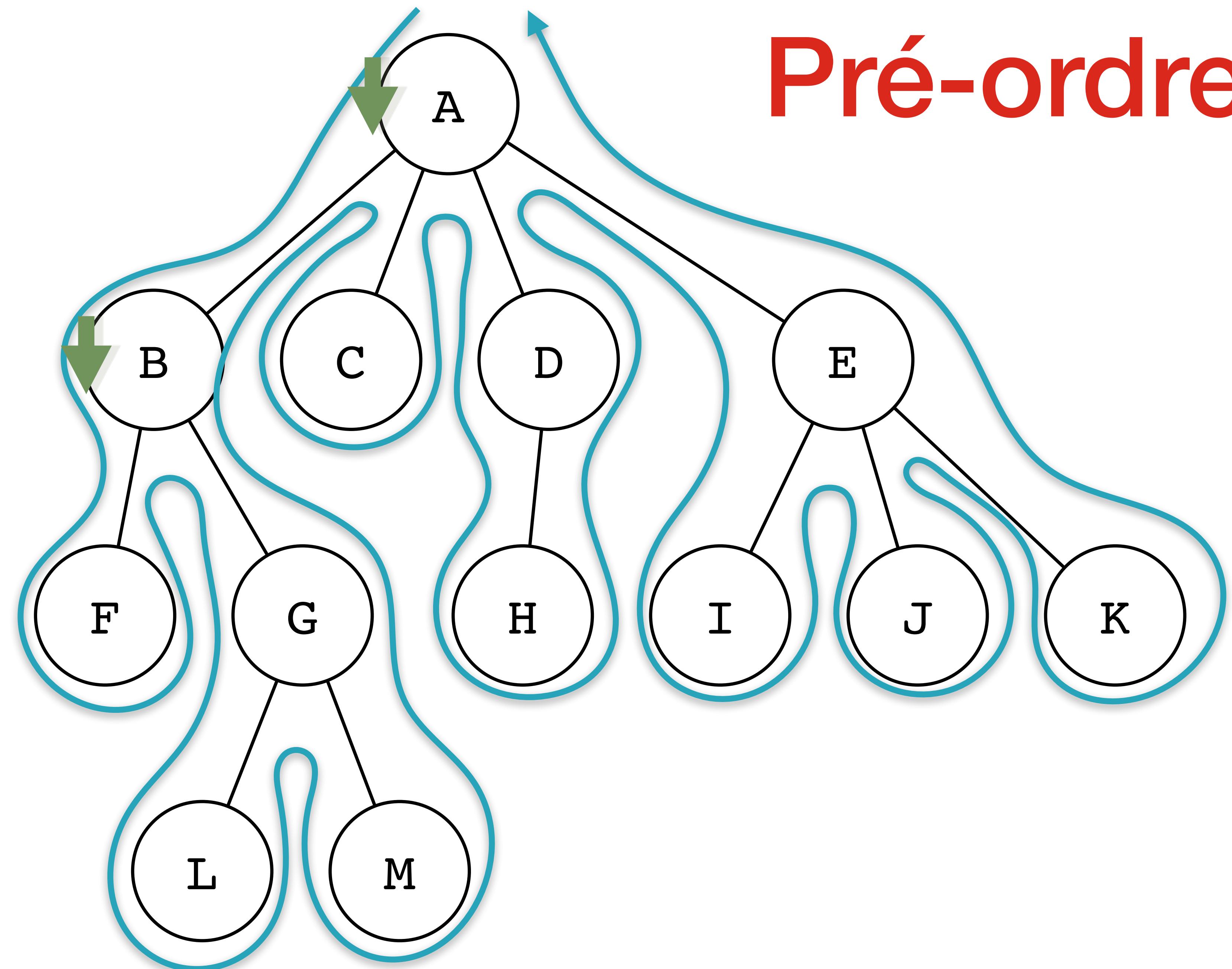


Pré-ordre



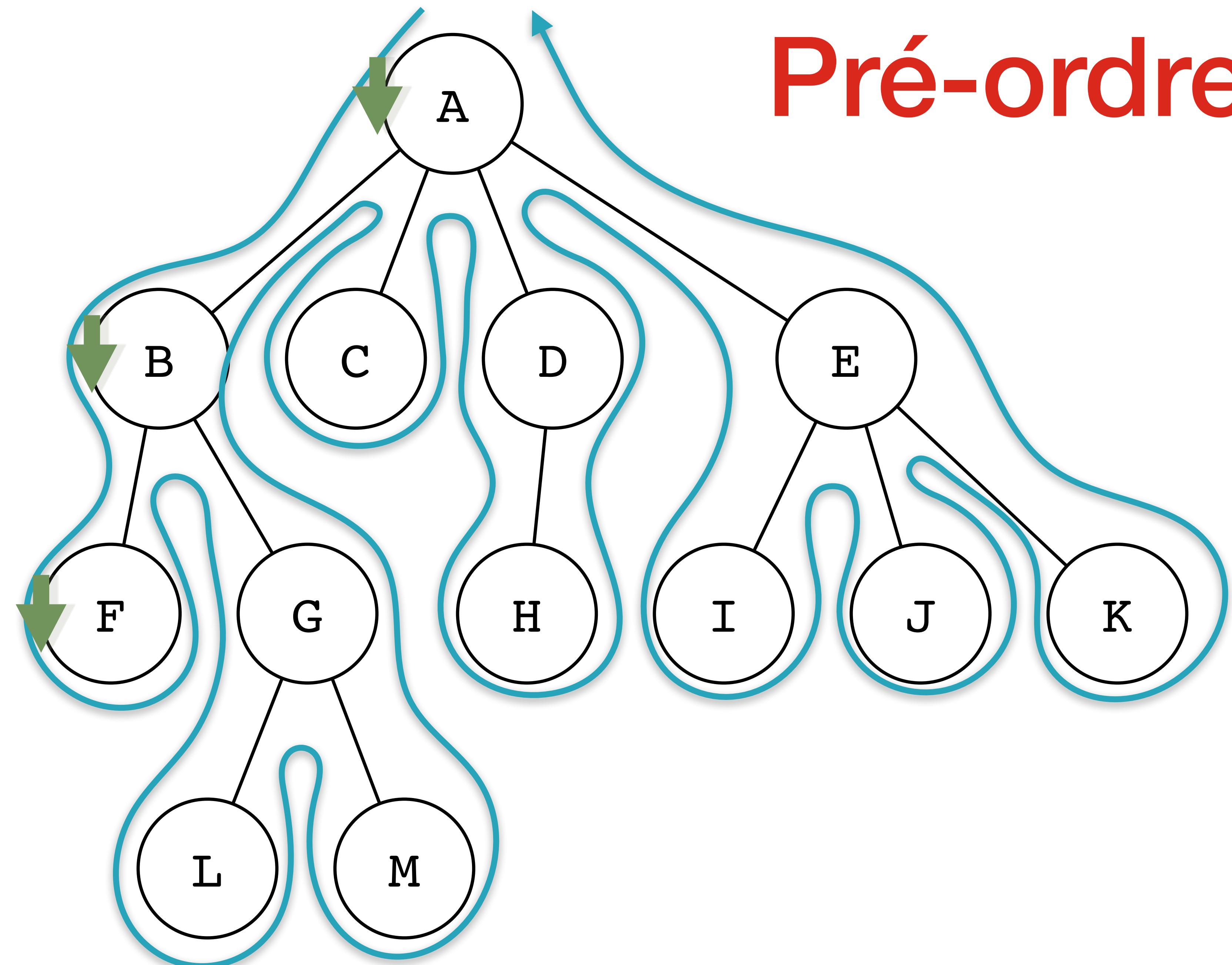


Pré-ordre



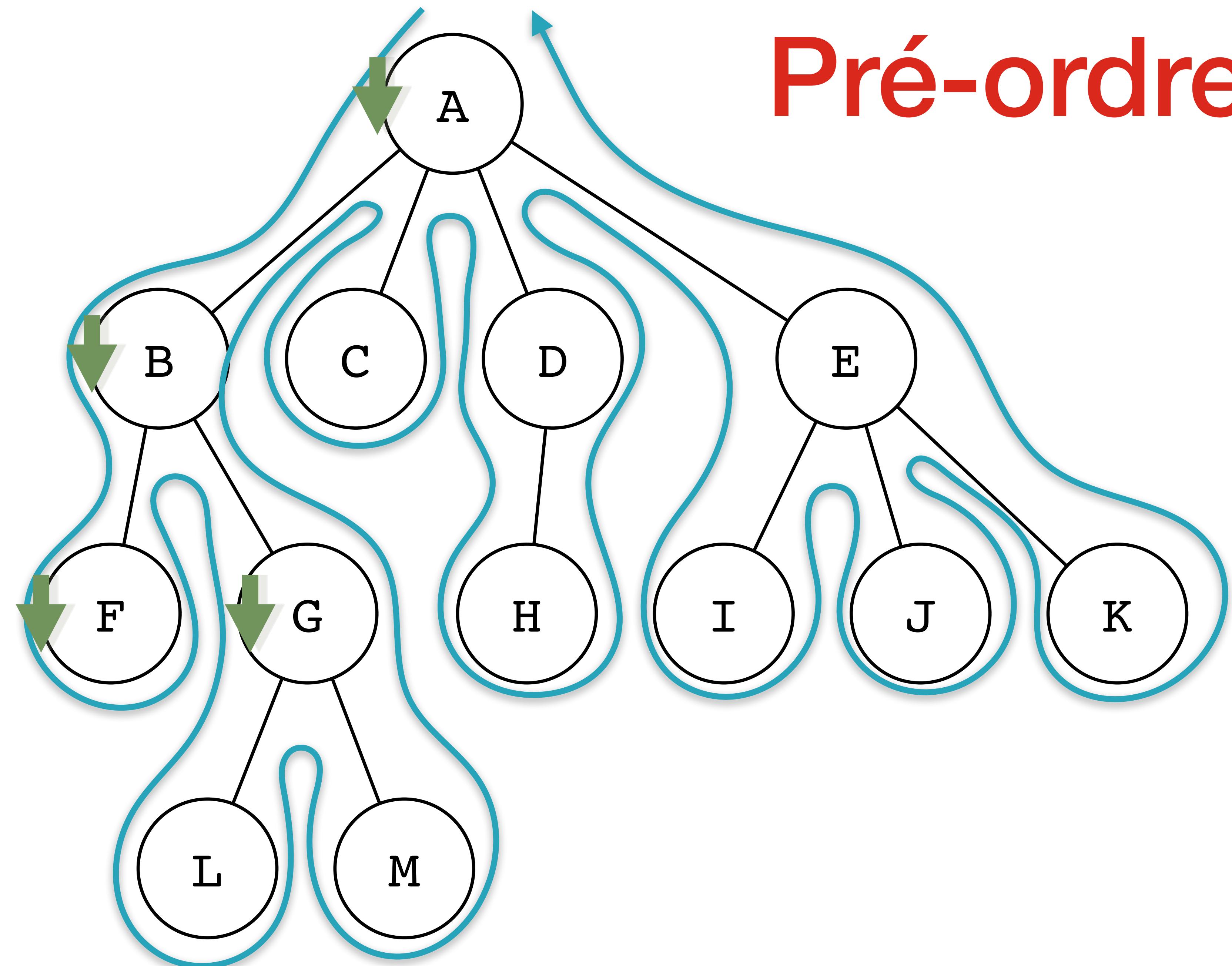


Pré-ordre



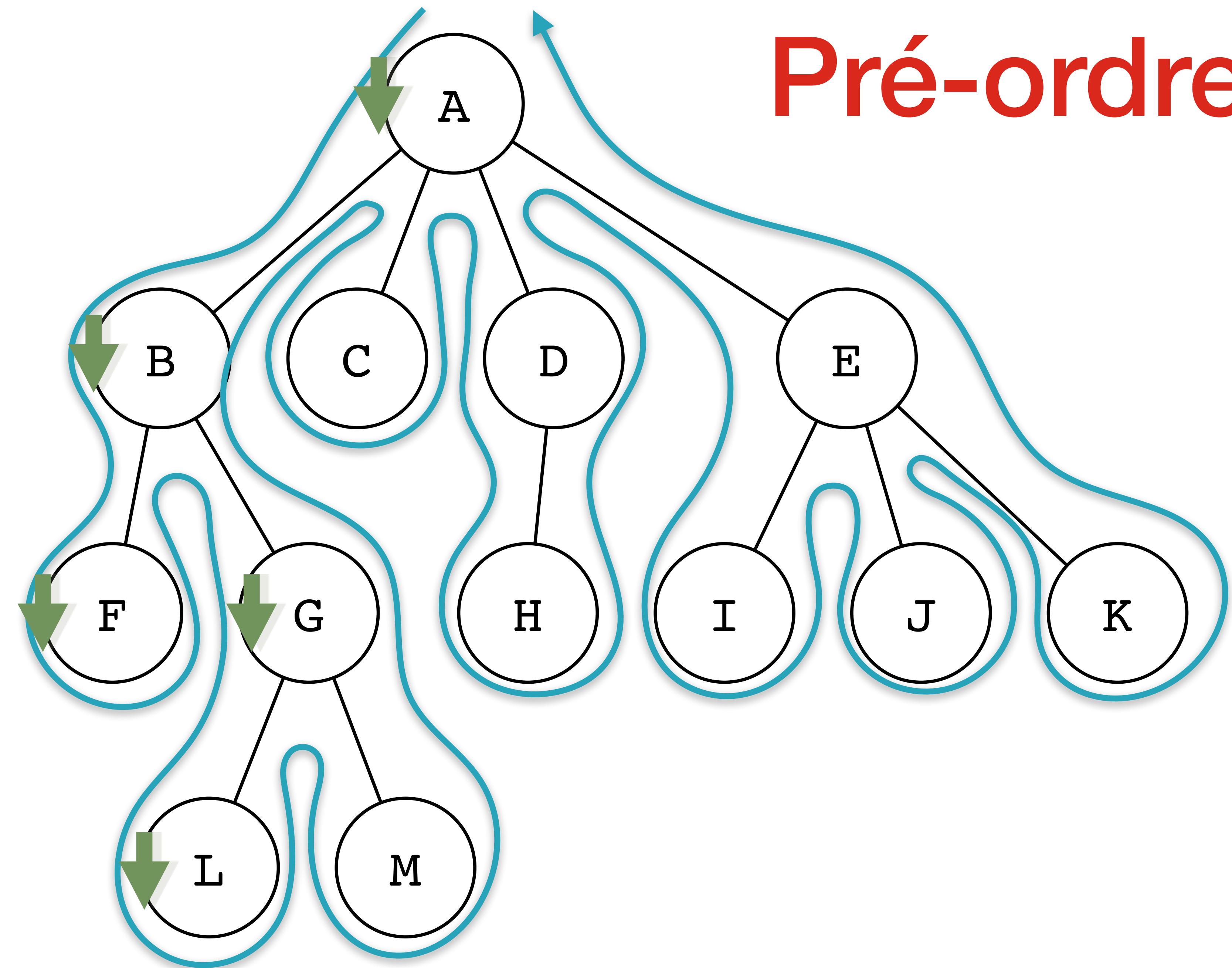


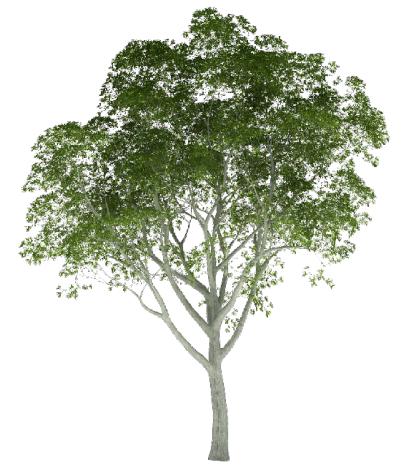
Pré-ordre



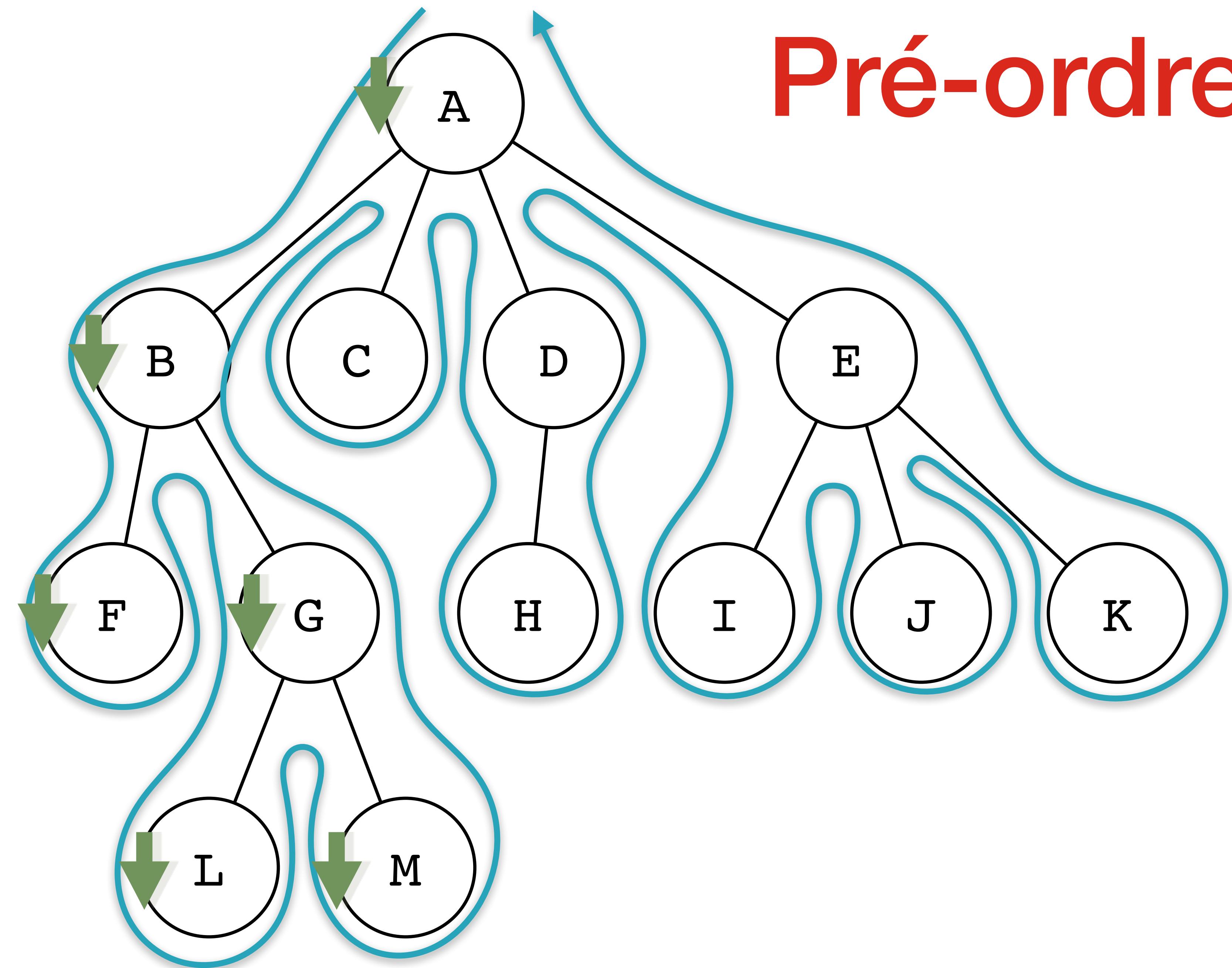


Pré-ordre



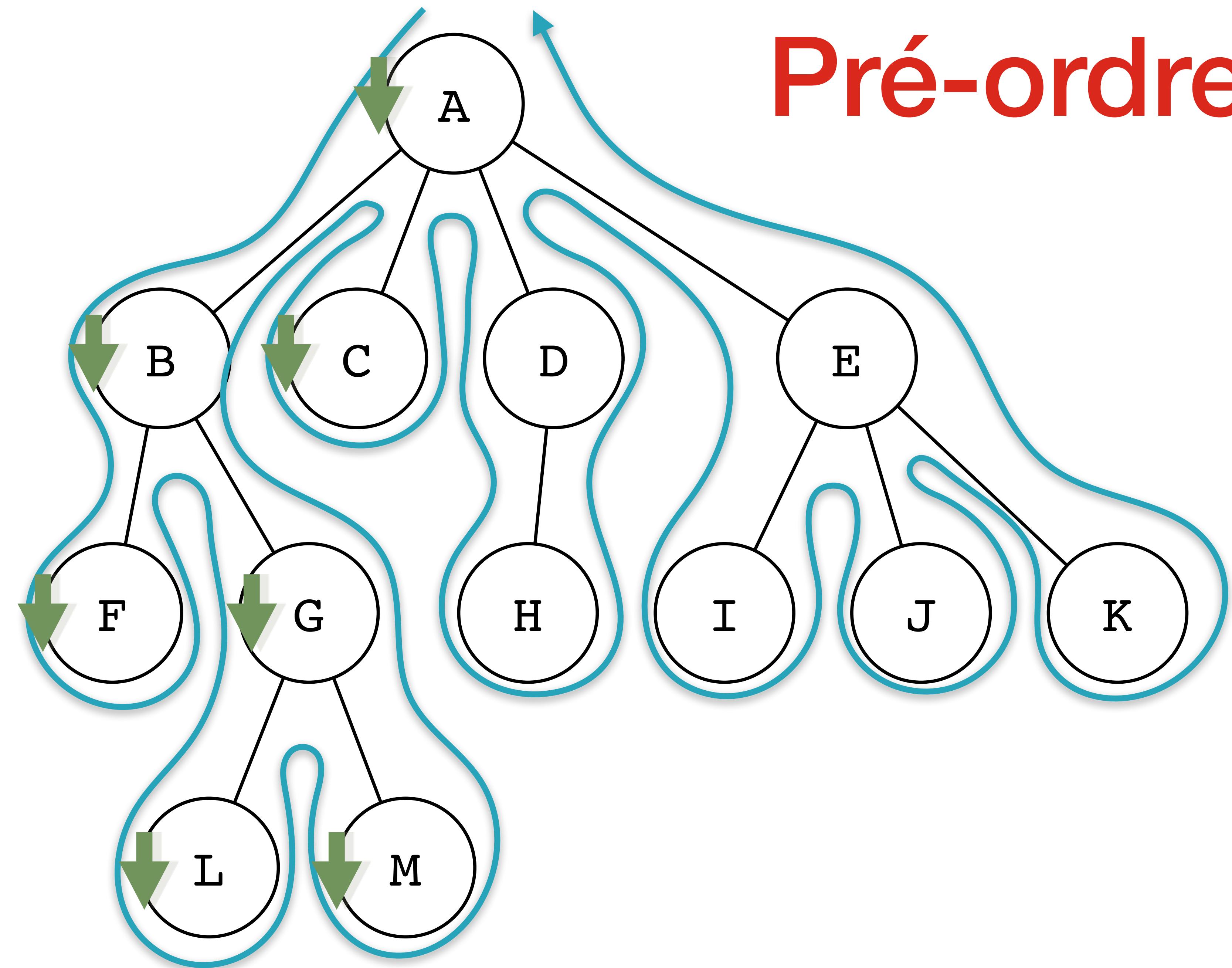


Pré-ordre



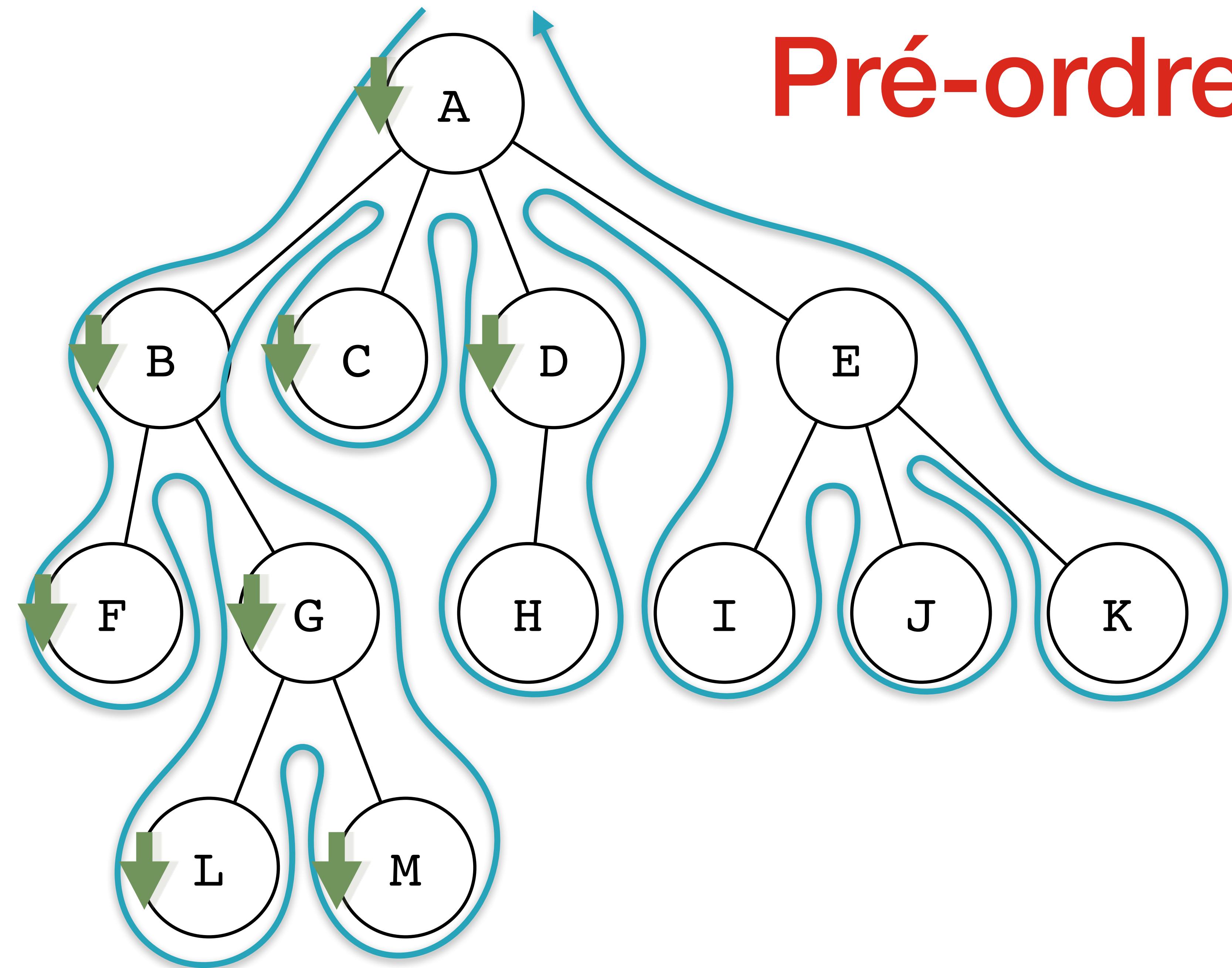


Pré-ordre



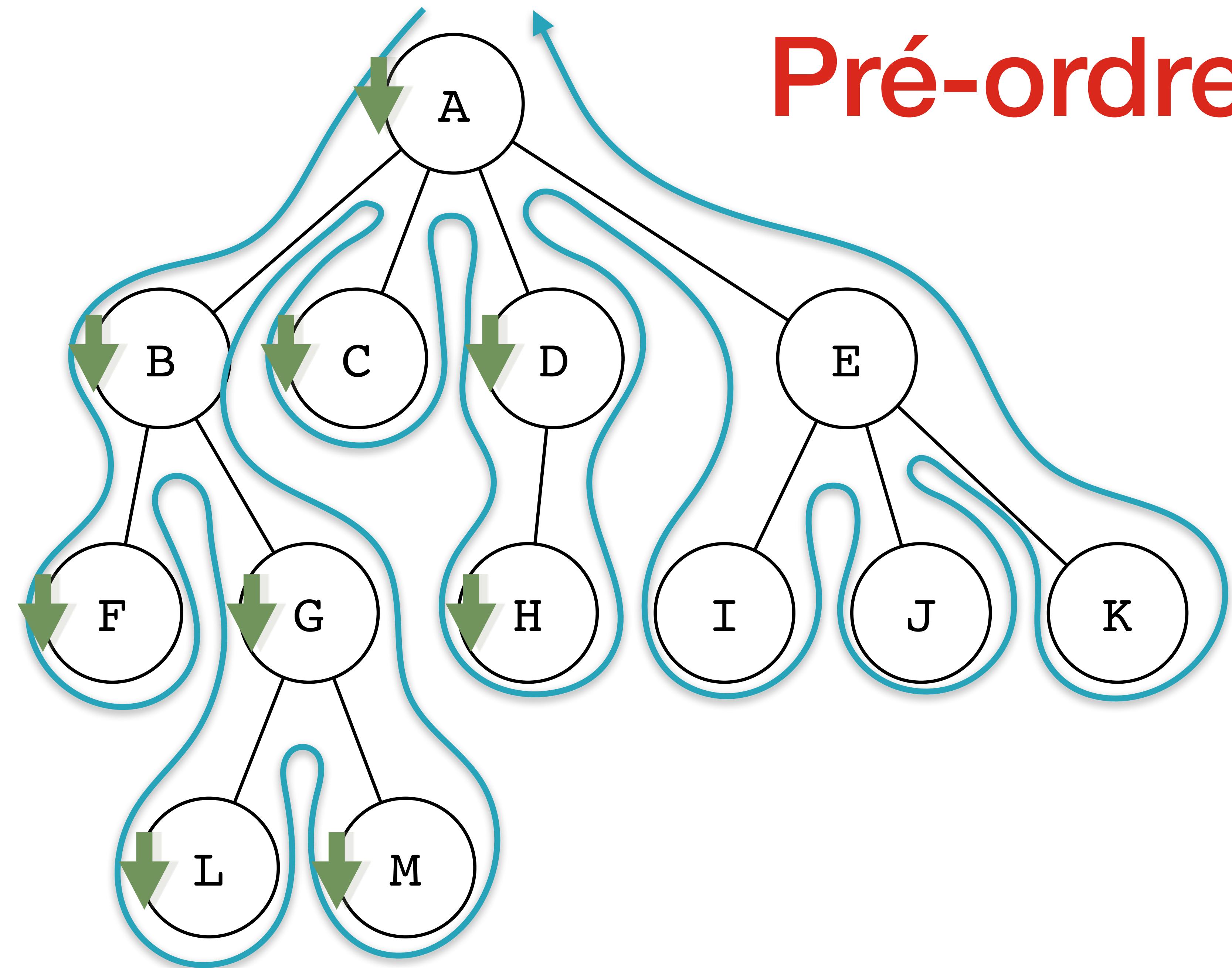


Pré-ordre



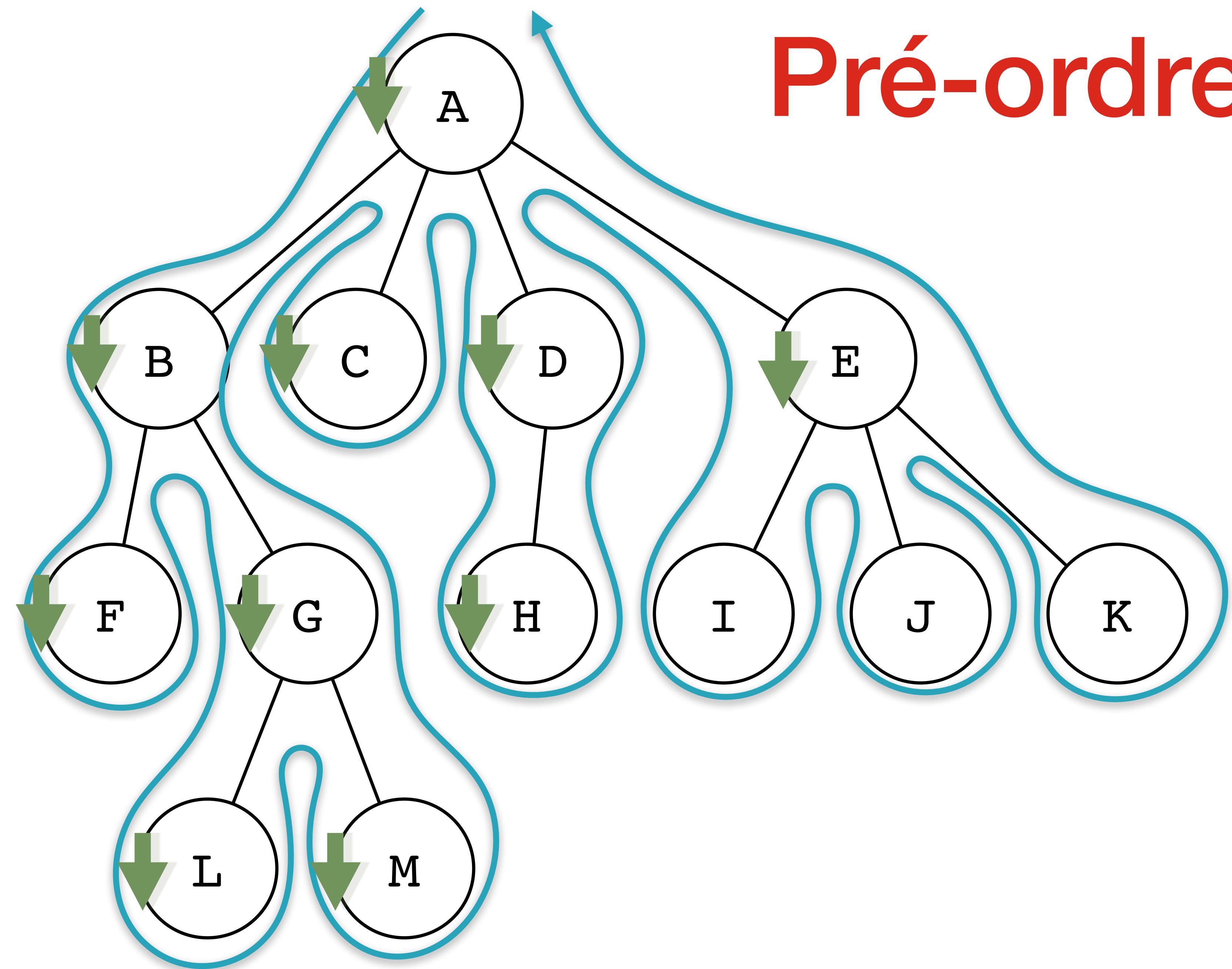


Pré-ordre



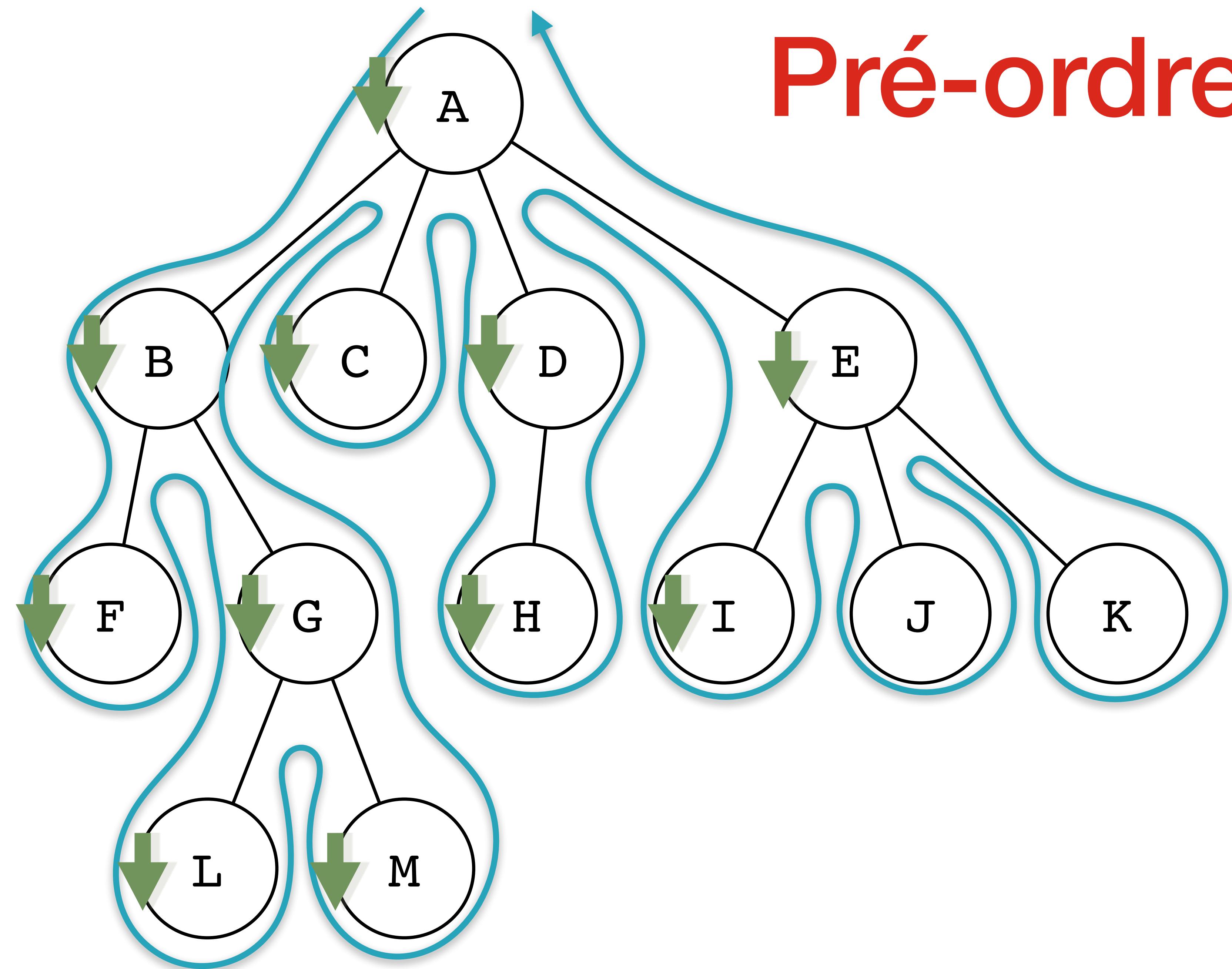


Pré-ordre



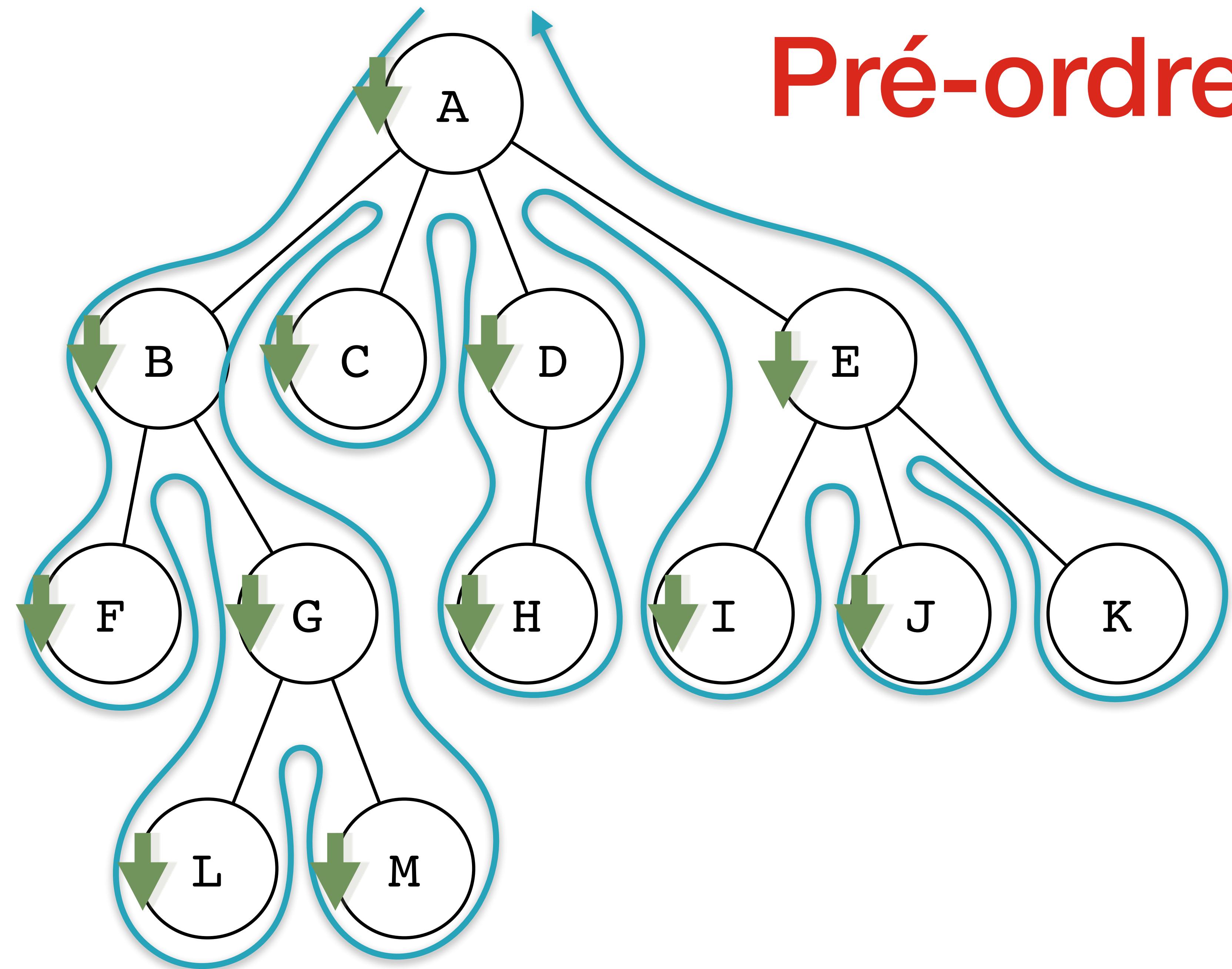


Pré-ordre



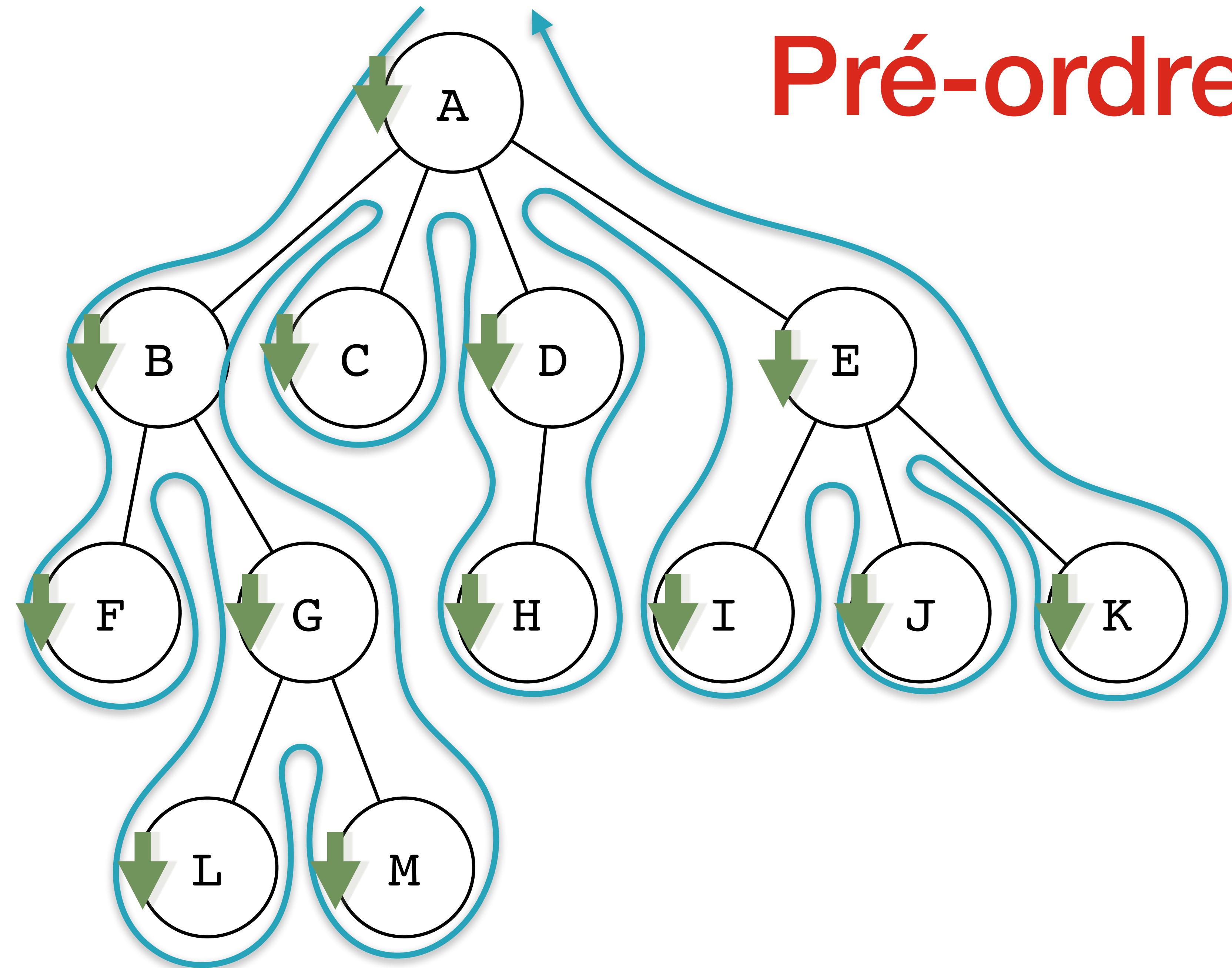


Pré-ordre



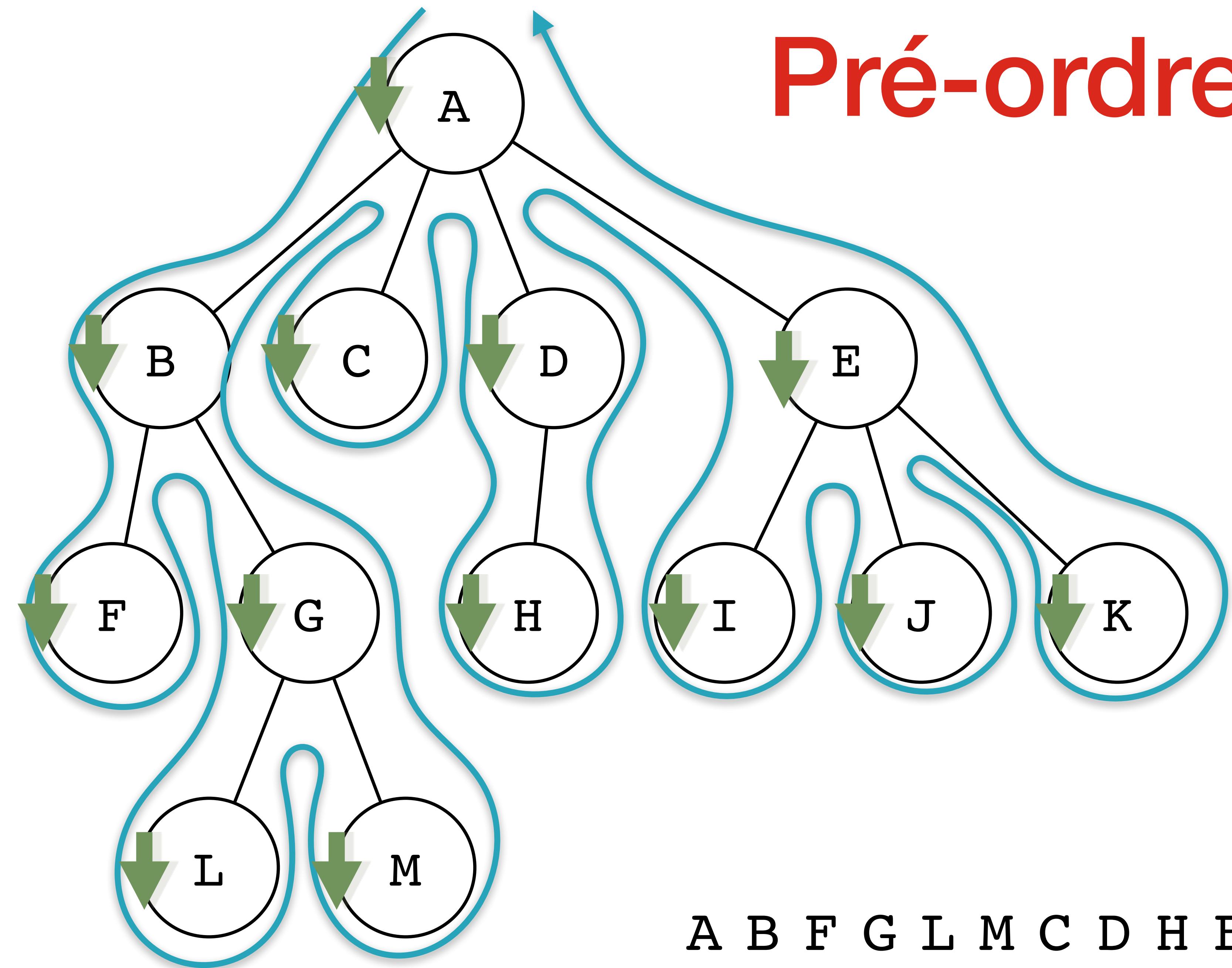


Pré-ordre



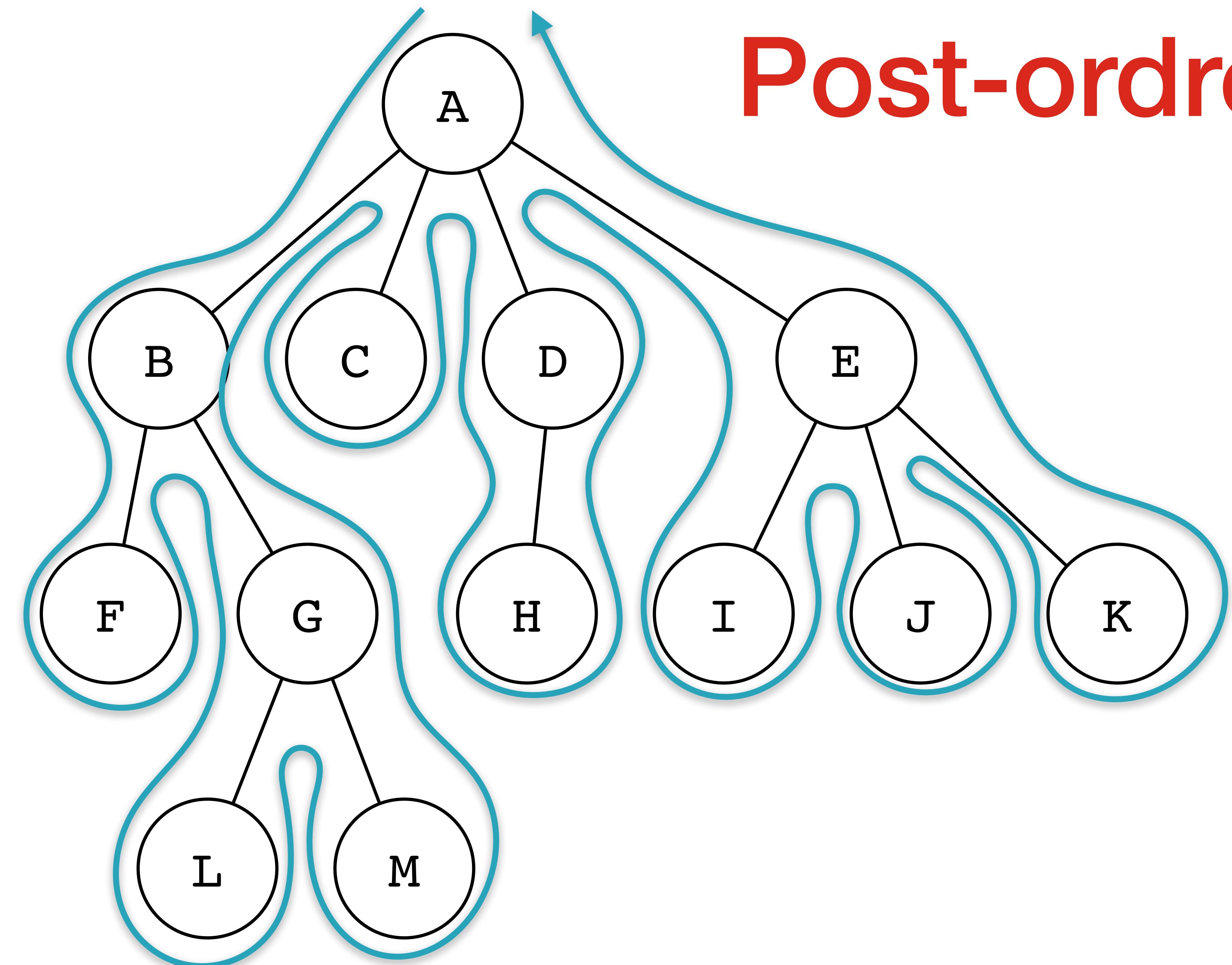


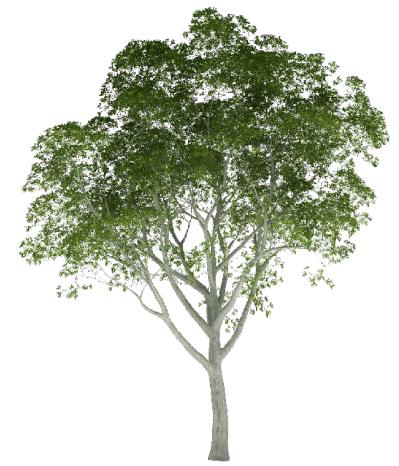
Pré-ordre



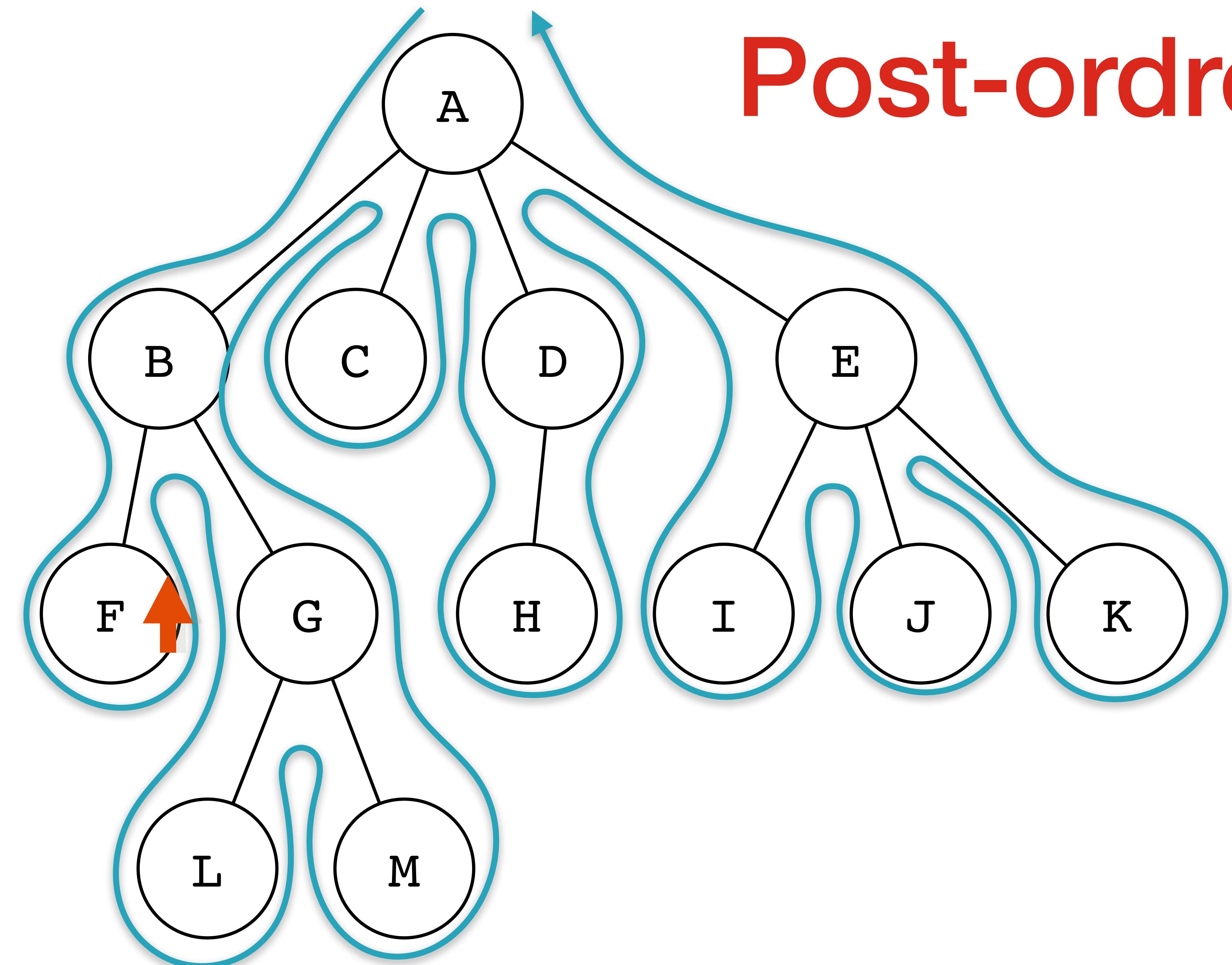


Post-ordre



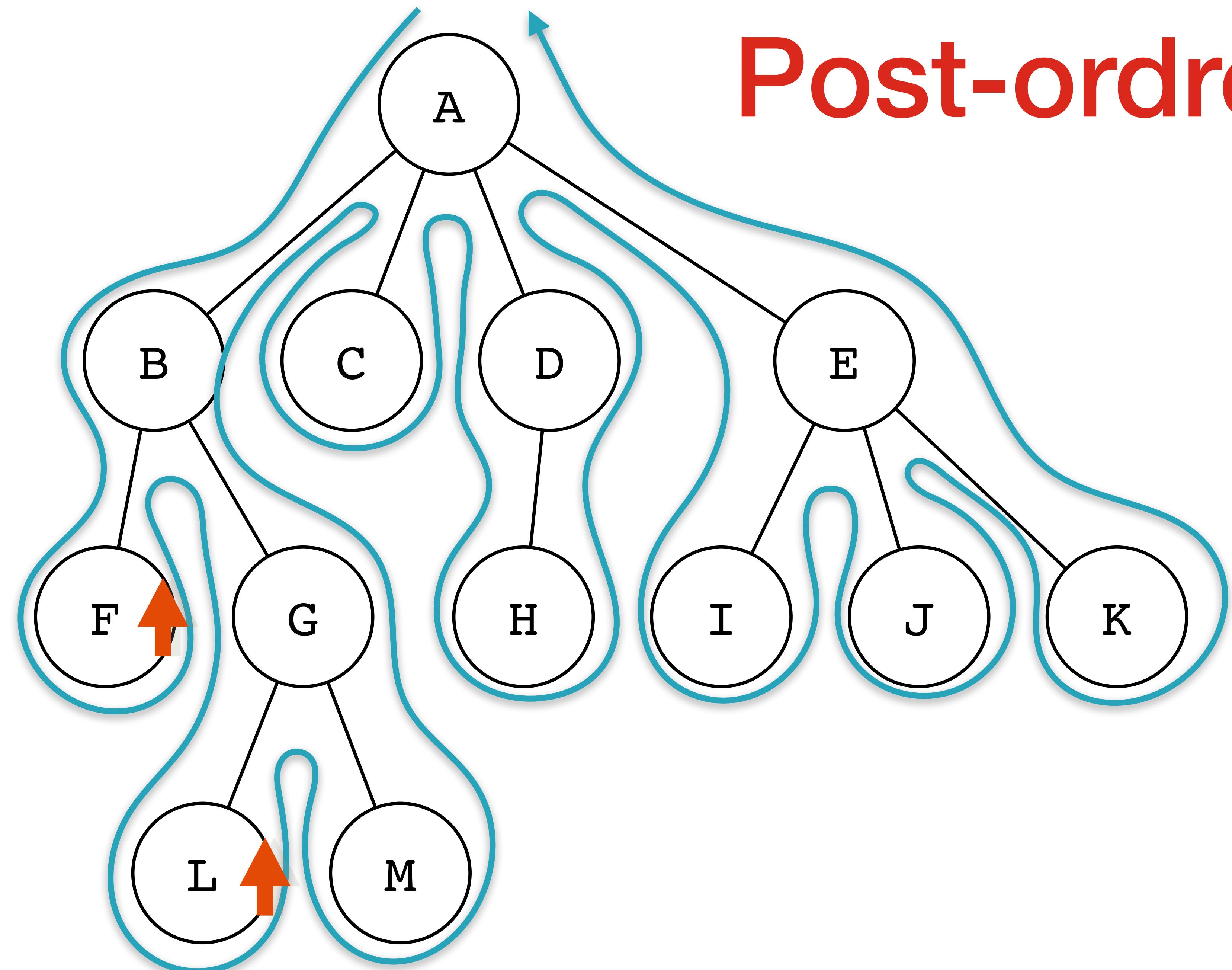


Post-ordre



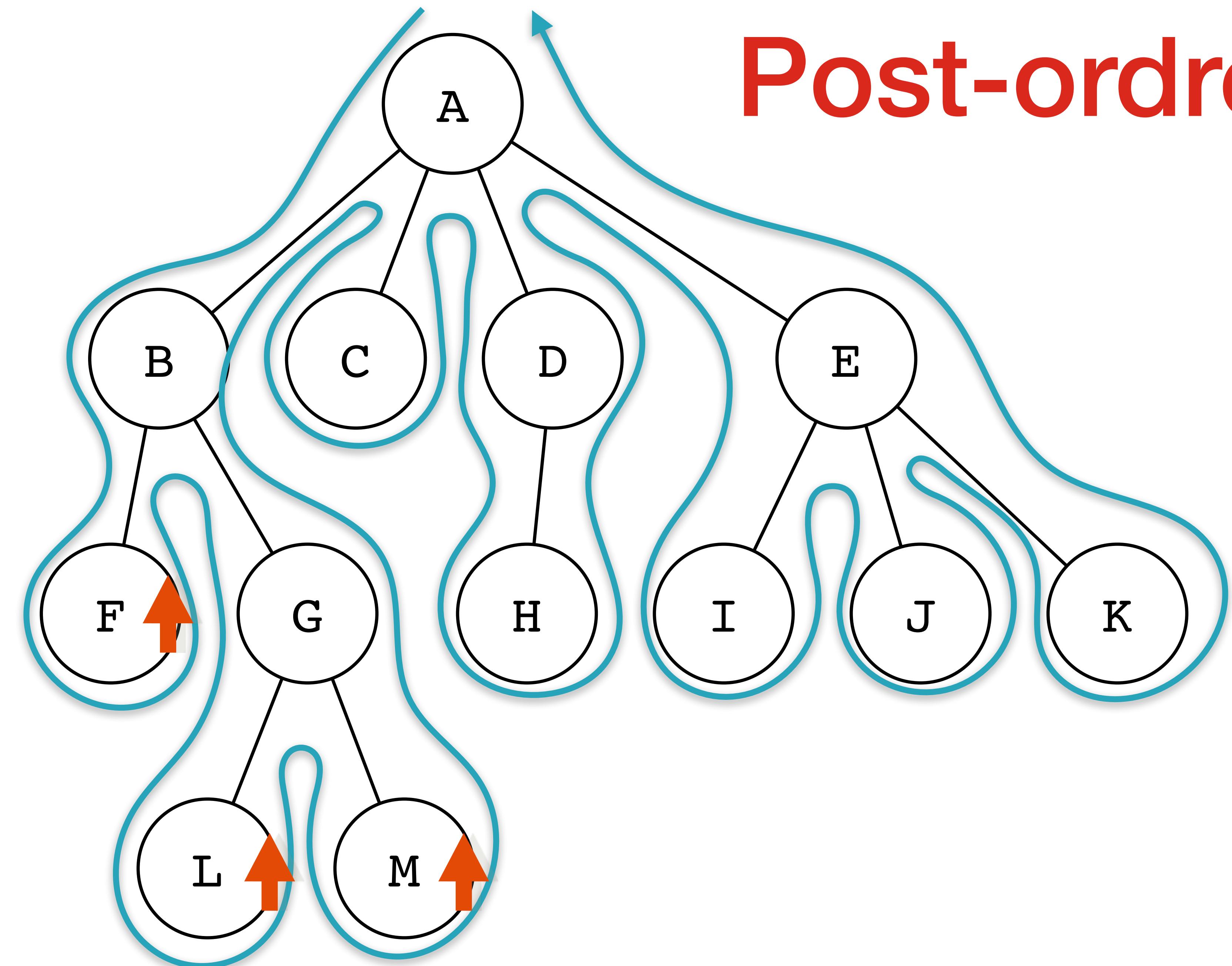


Post-ordre



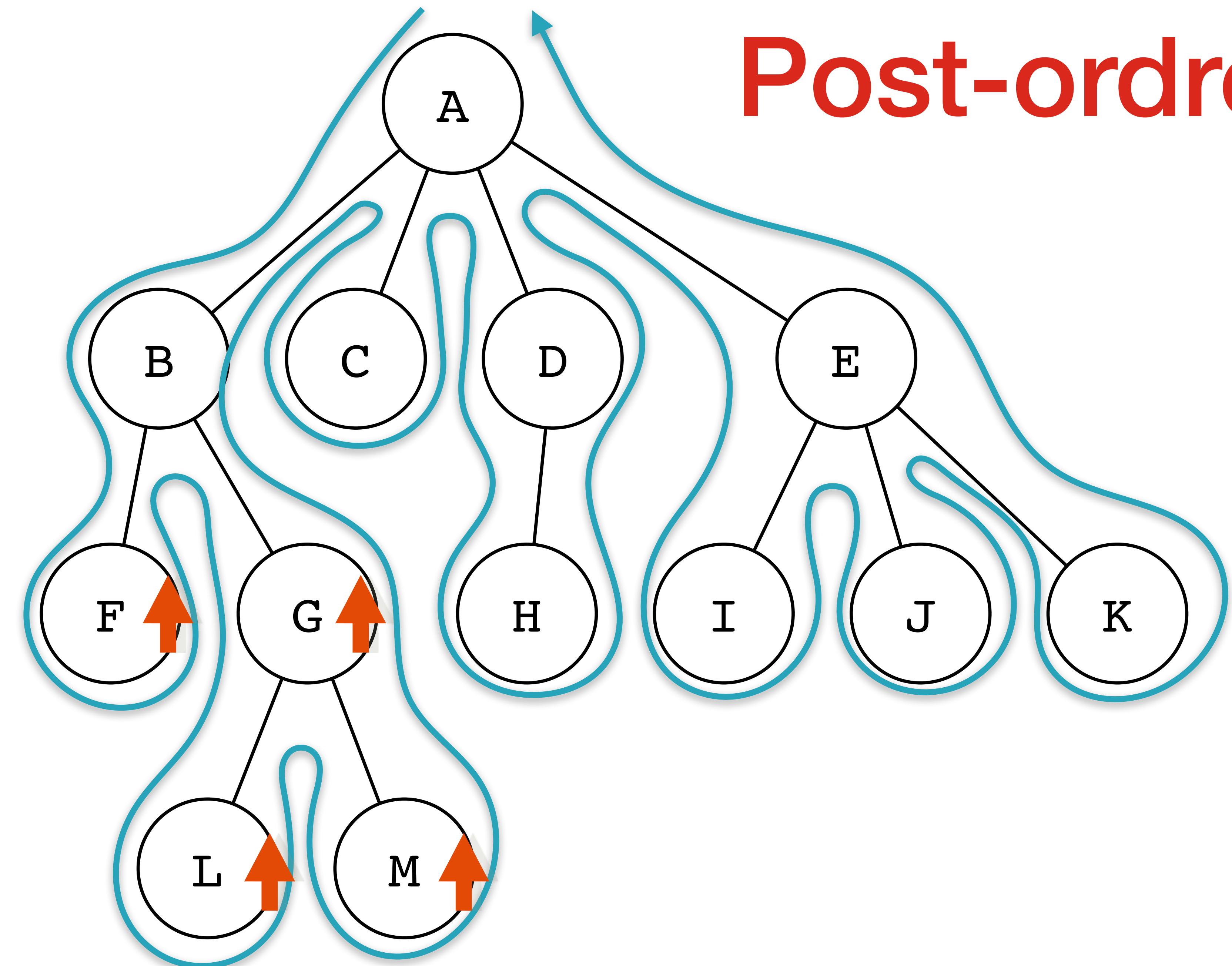


Post-ordre



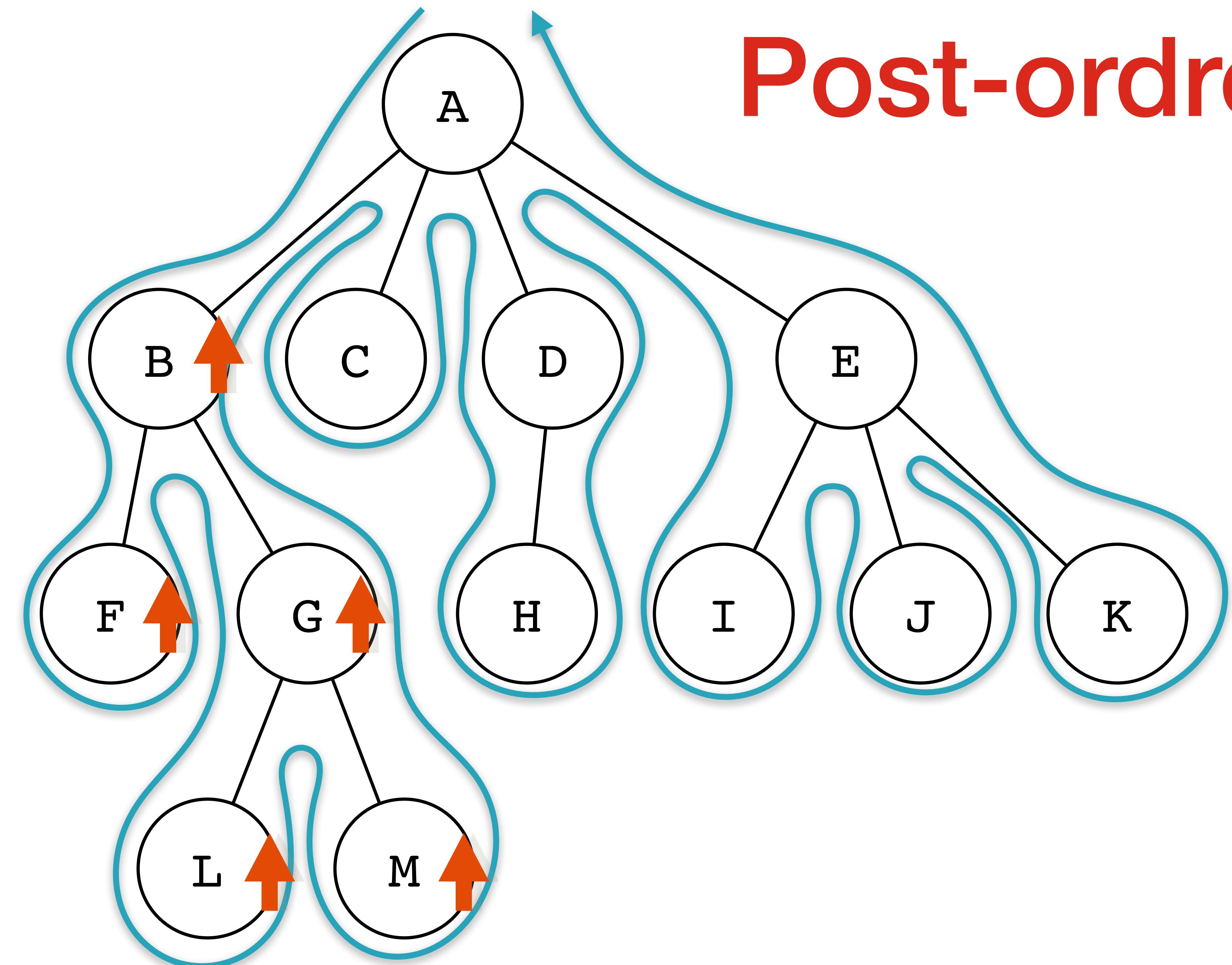


Post-ordre



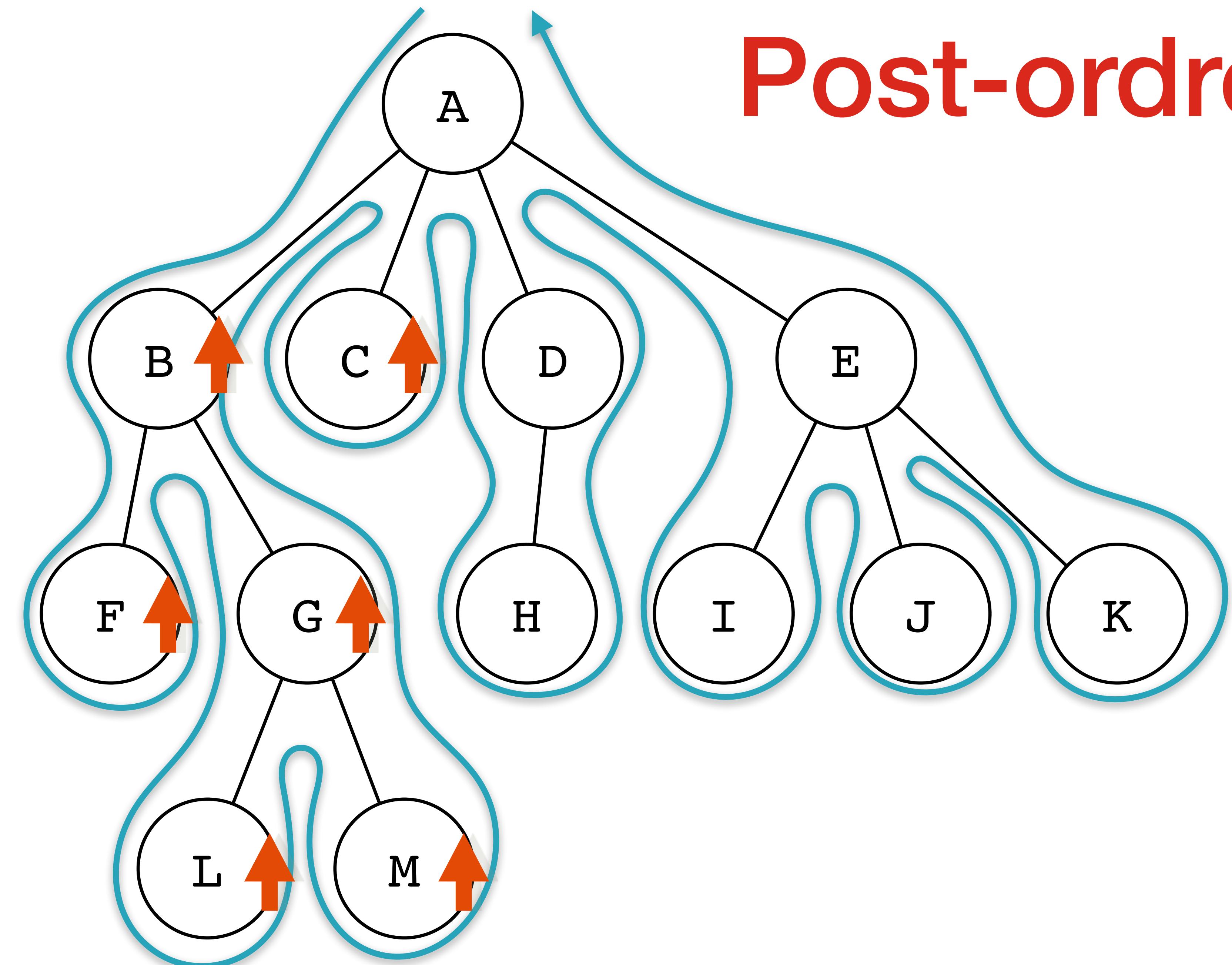


Post-ordre



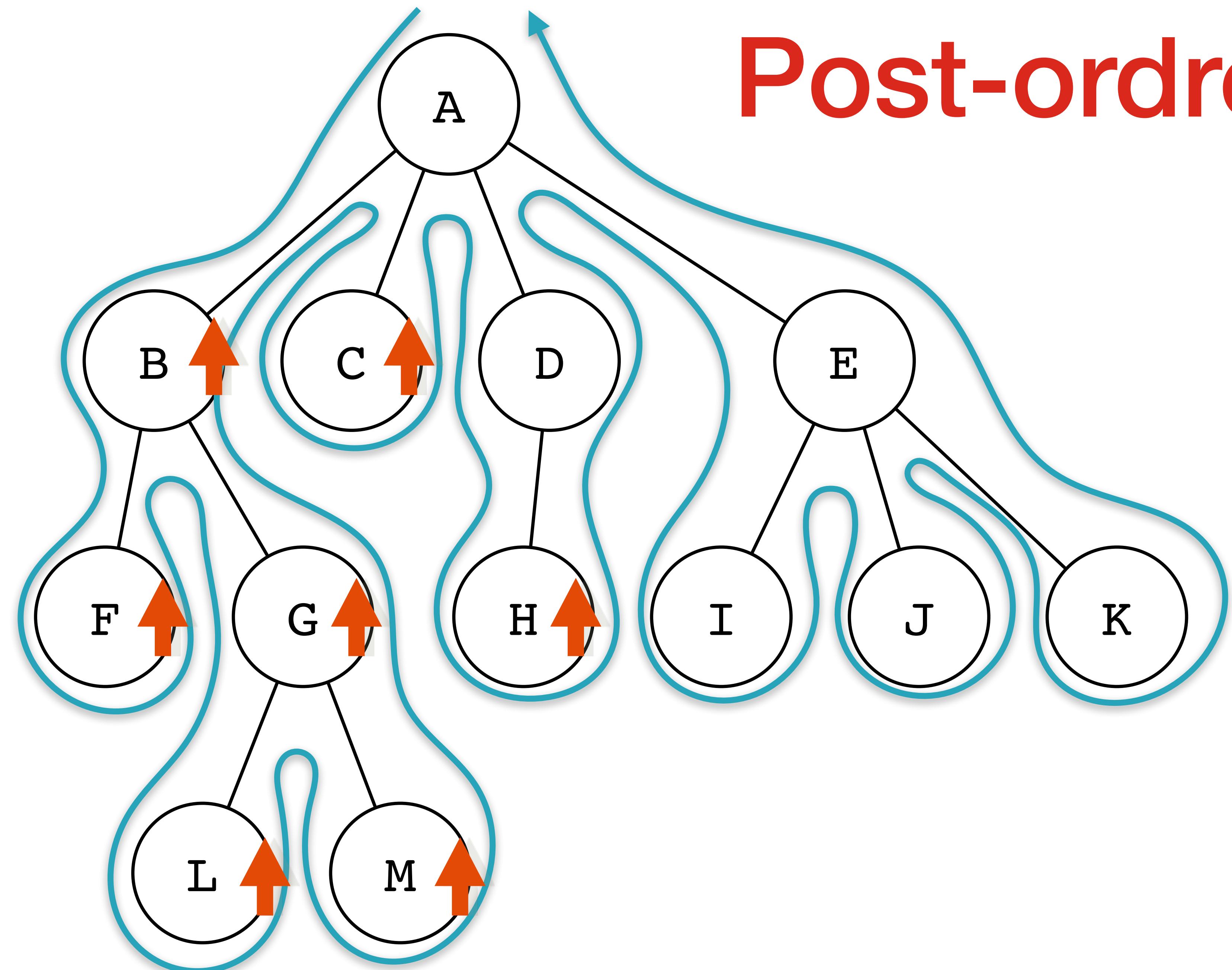


Post-ordre



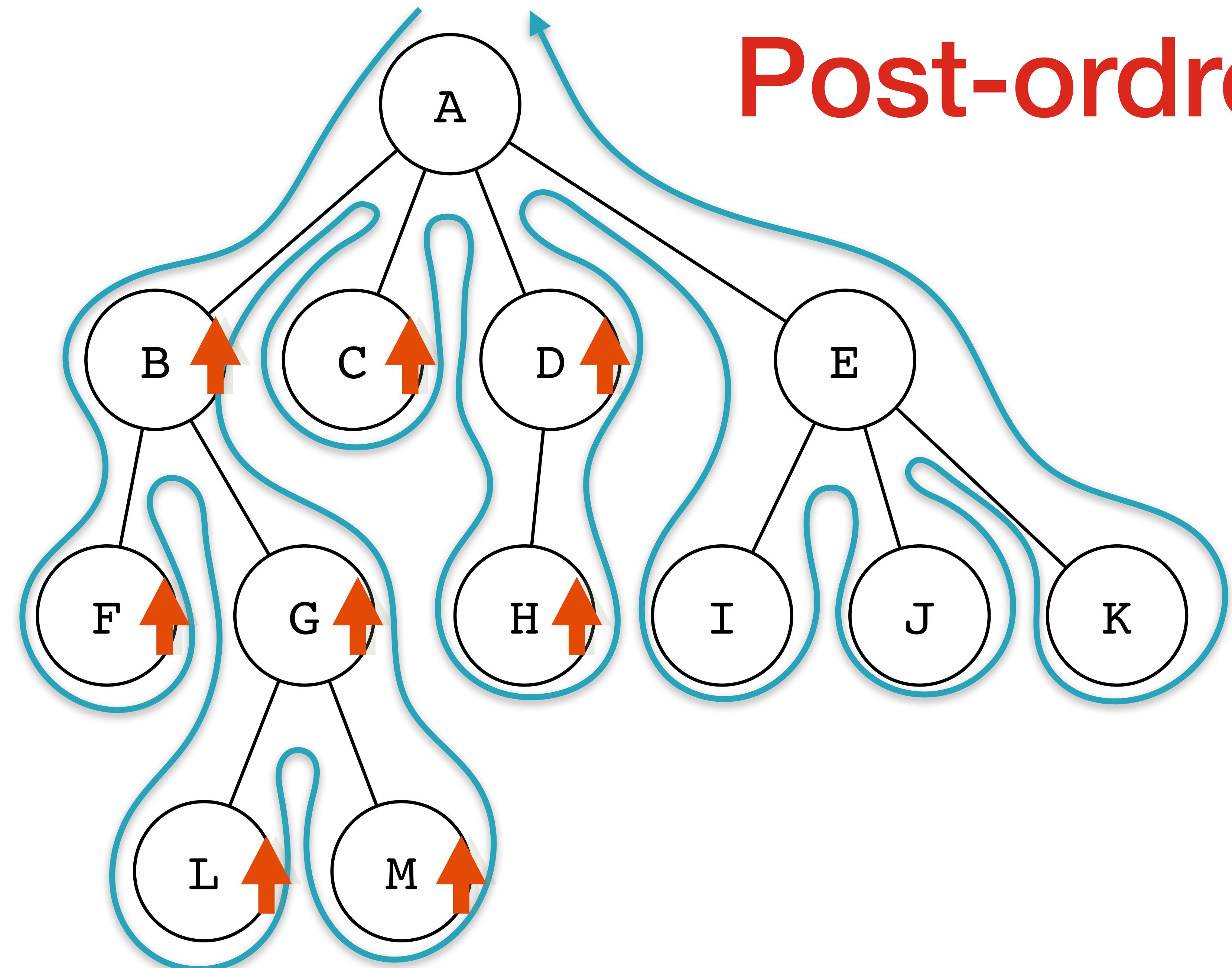


Post-ordre



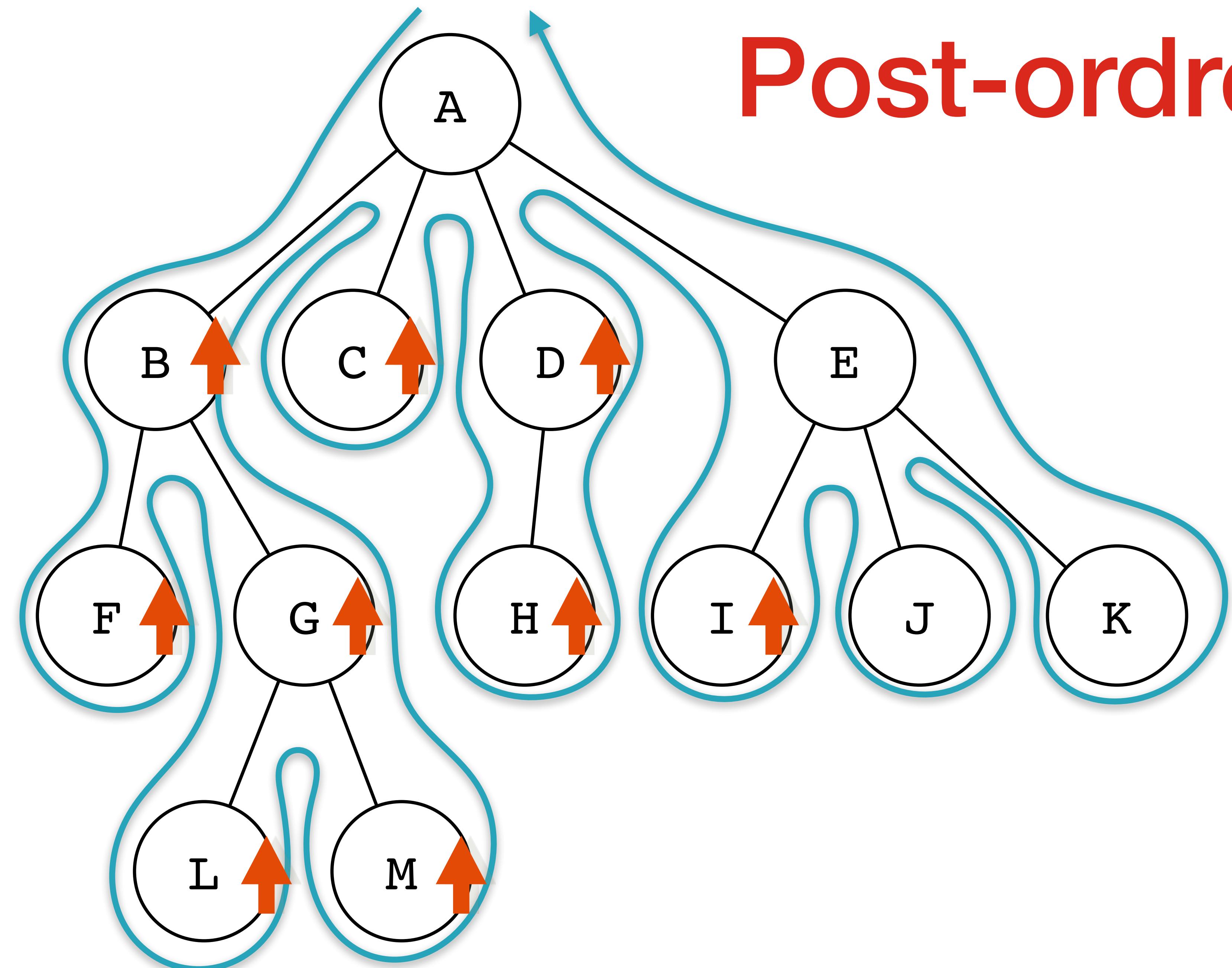


Post-ordre



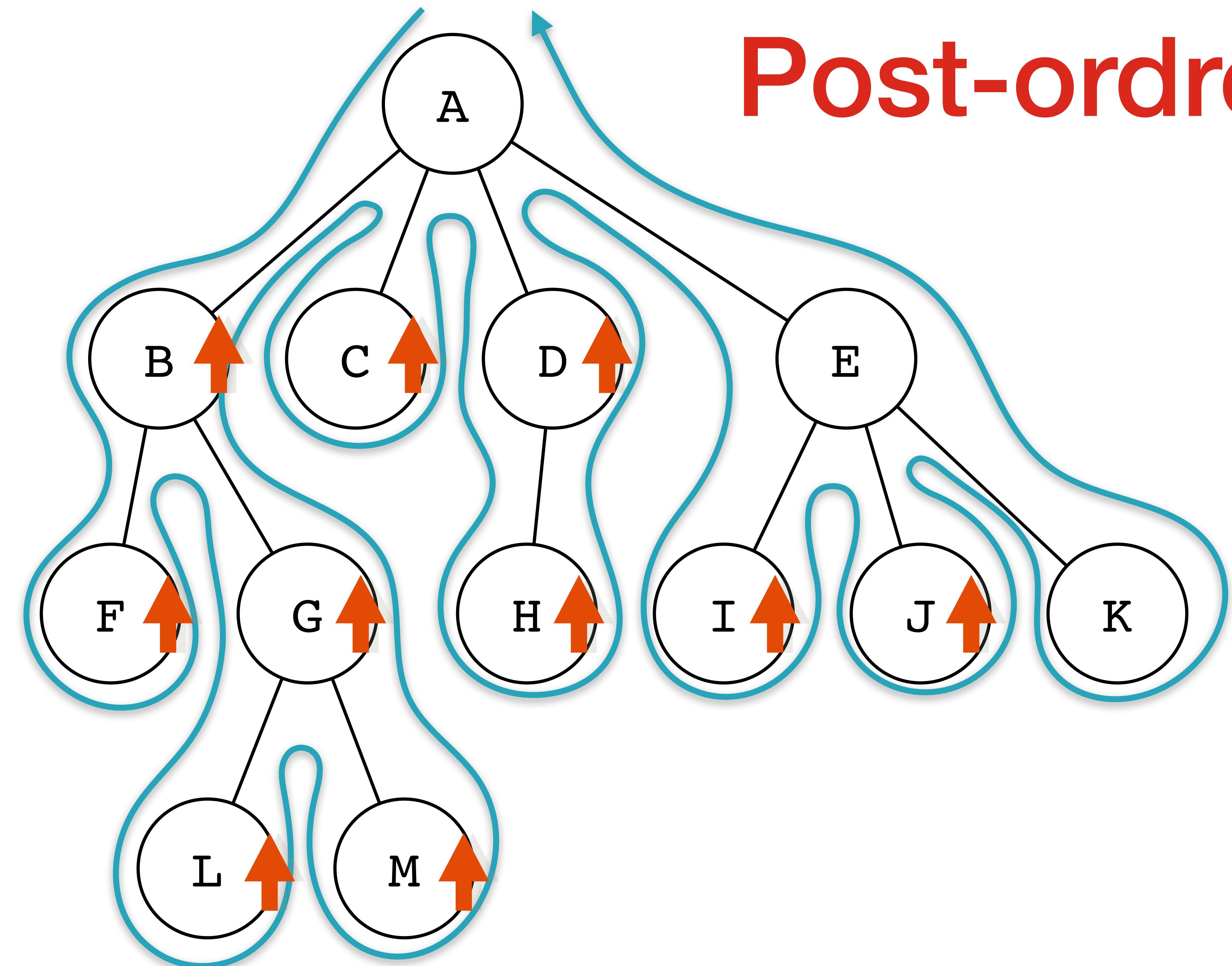


Post-ordre



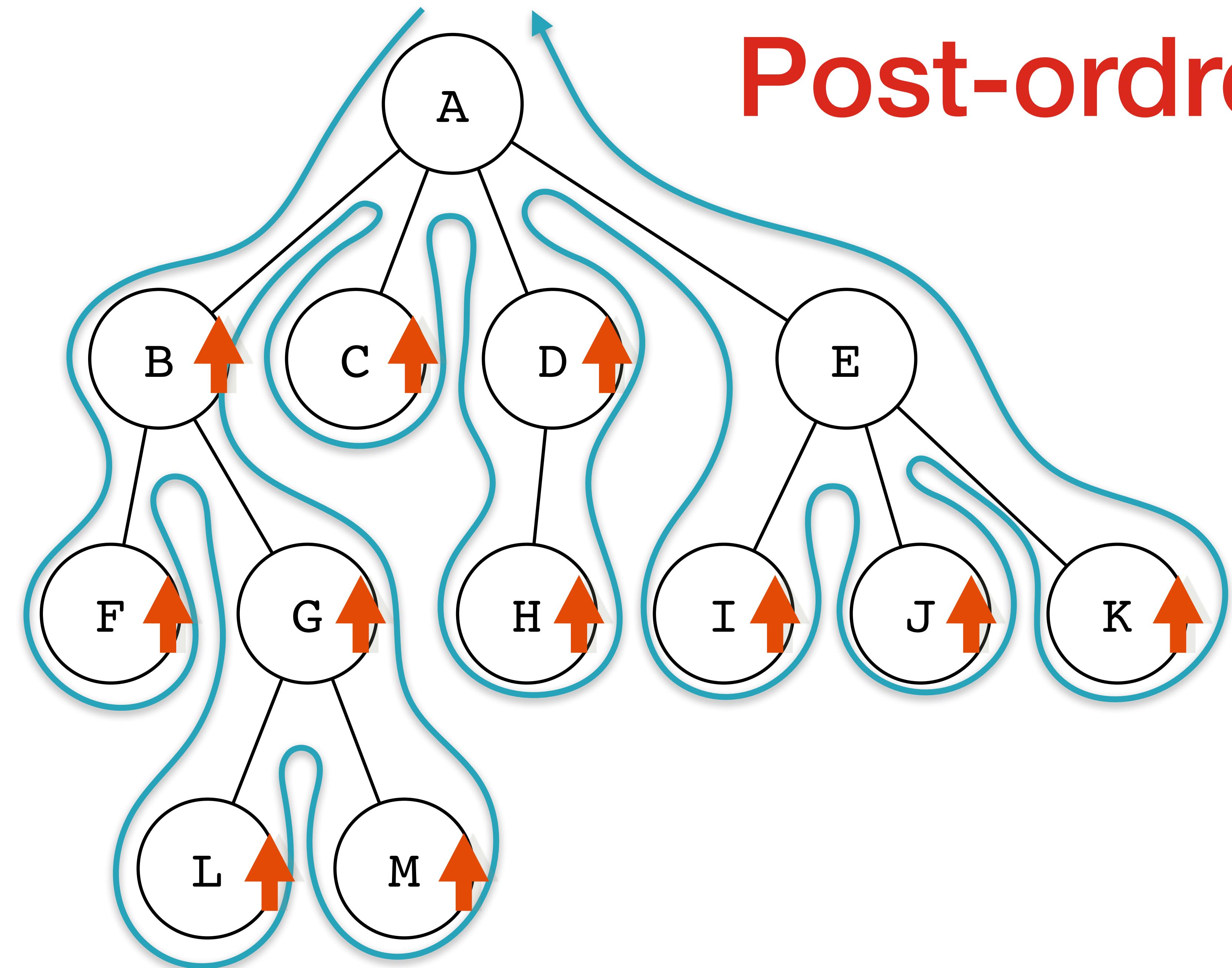


Post-ordre



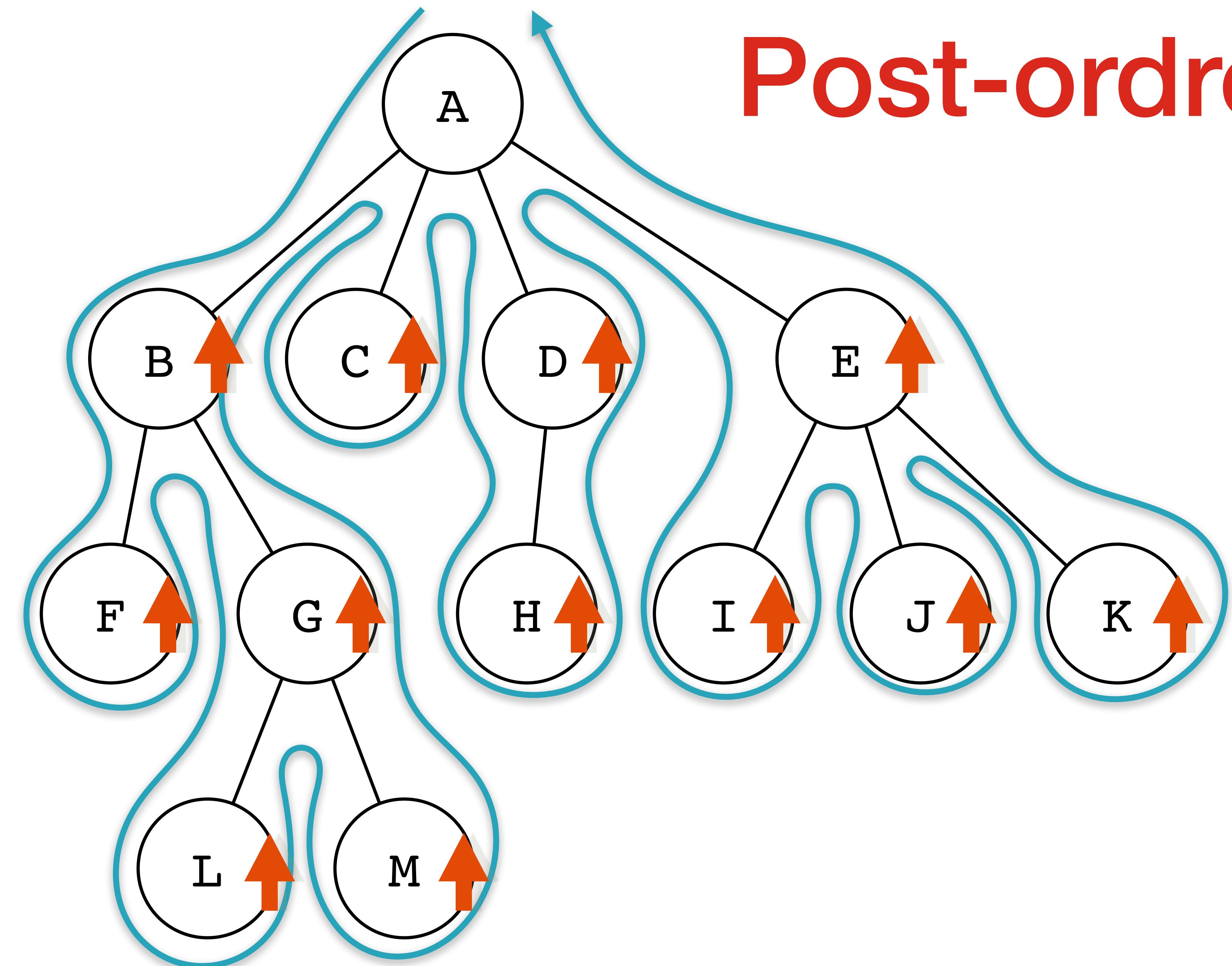


Post-ordre



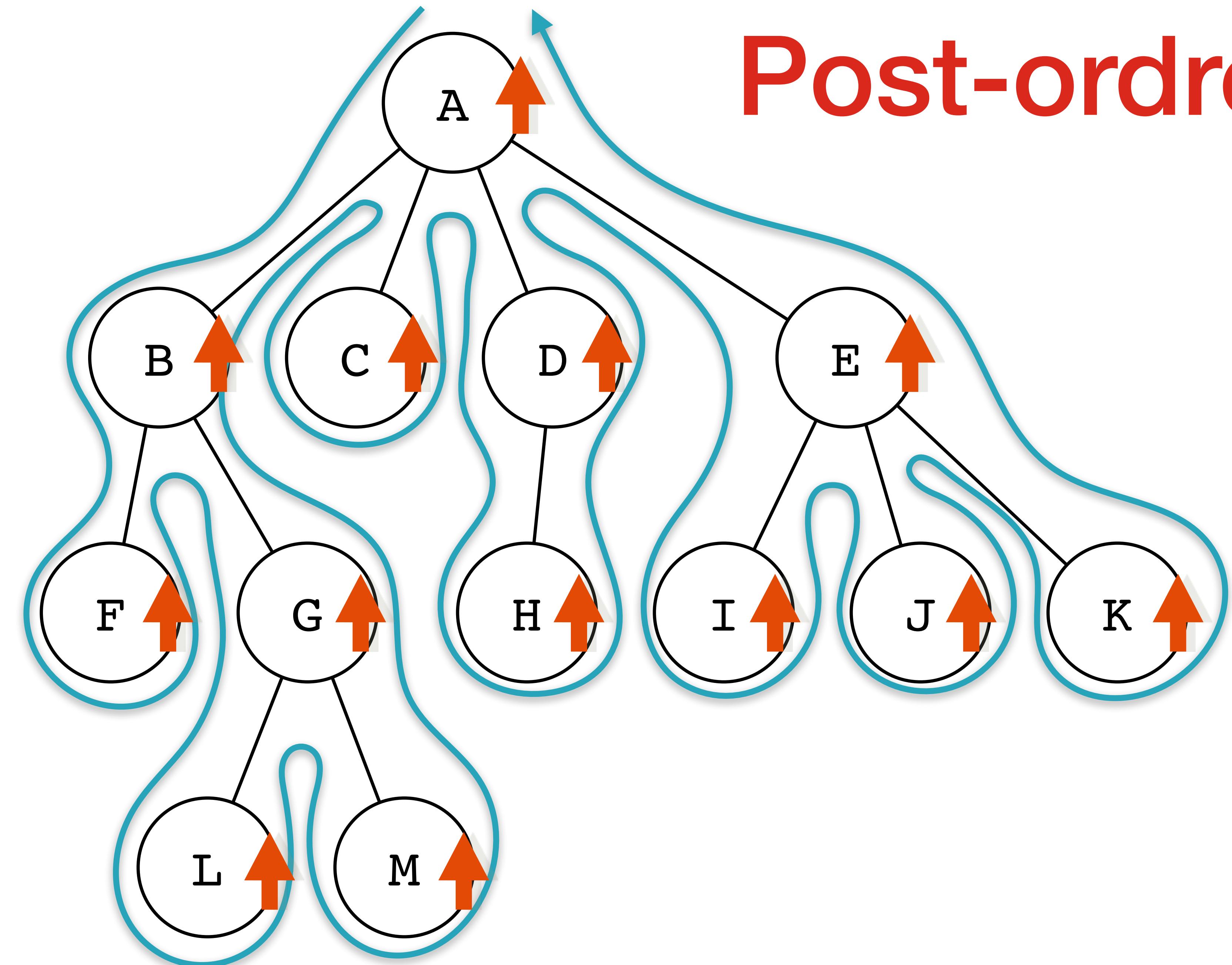


Post-ordre



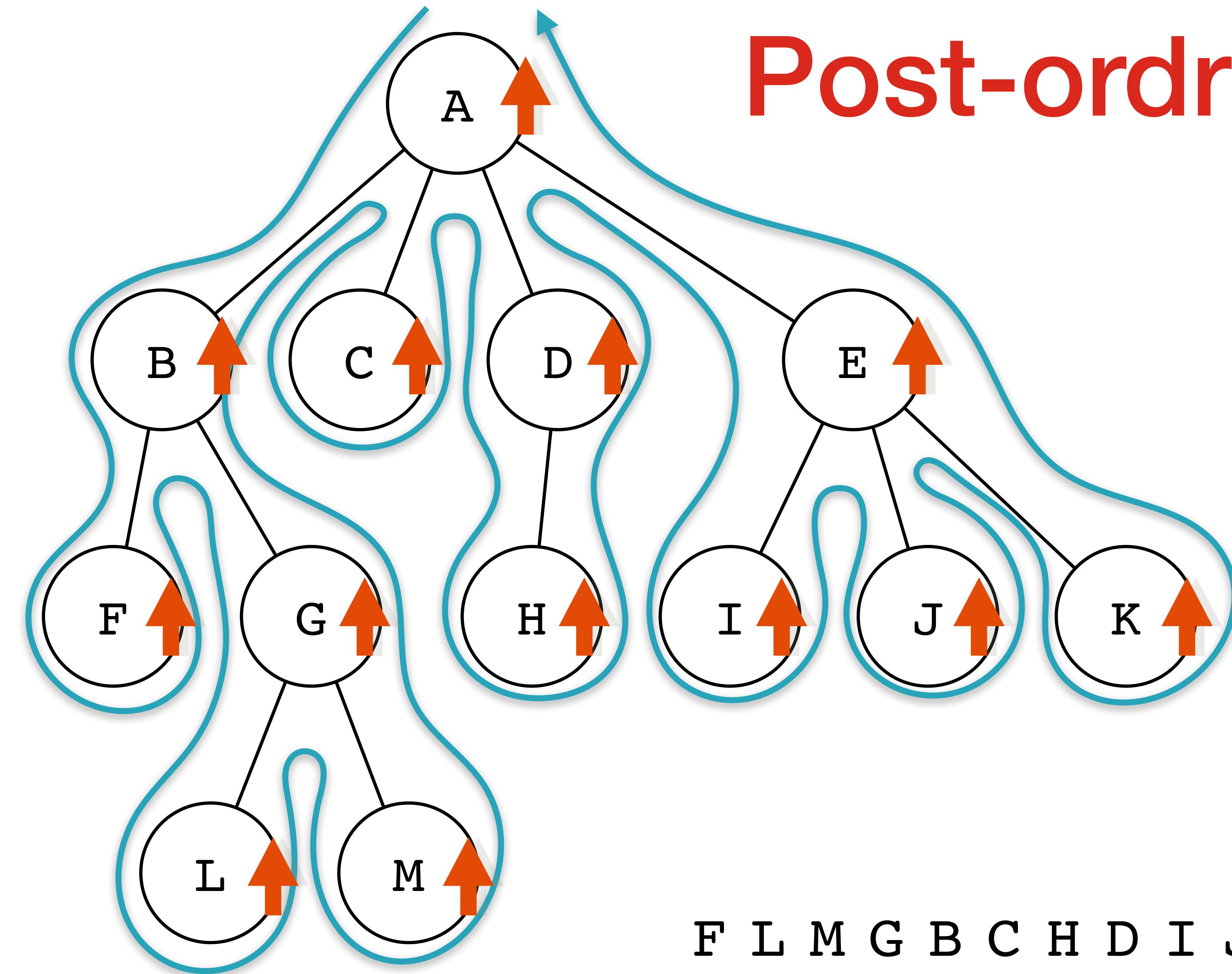


Post-ordre





Post-ordre





Applications

- Copier en pré-ordre
- Détruire en post-ordre

```
fonction copier (r)
    si r != Ø
        r2 ← nouveau noeud d'étiquette r.étiquette
        pour tout enfant e de r
            e2 ← copier(e)
            Ajouter e2 aux enfants de r2
    retourner r2
```



Applications

- Copier en pré-ordre

```
fonction copier (r)
    si r != Ø
        r2 ← nouveau noeud d'étiquette r.étiquette
        pour tout enfant e de r
            e2 ← copier(e)
            Ajouter e2 aux enfants de r2
    retourner r2
```

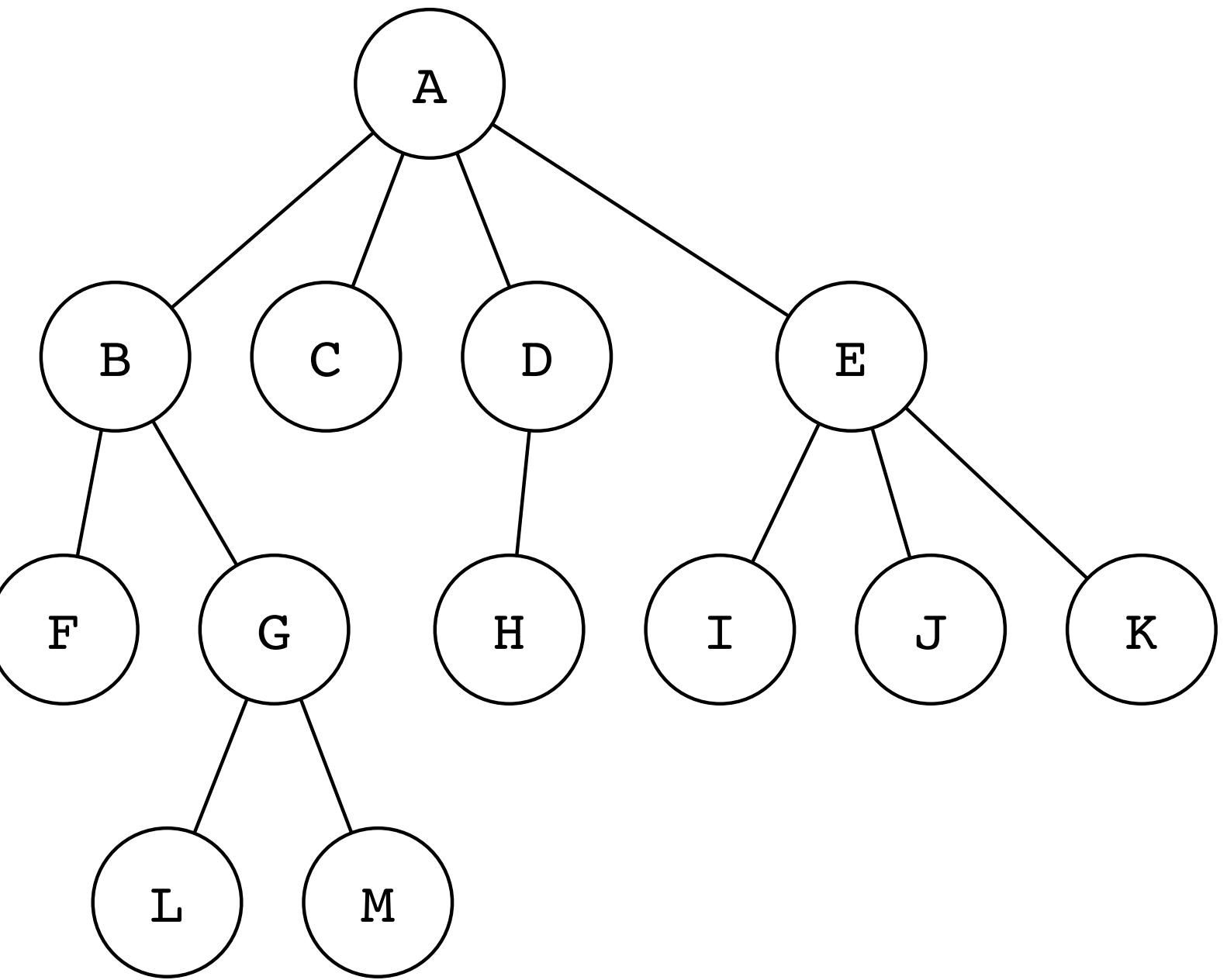
- Détruire en post-ordre

```
fonction détruire (ref r)
    si r != Ø
        pour tout enfant e de r
            détruire(e)
        effacer le noeud r
```



Parcours en largeur

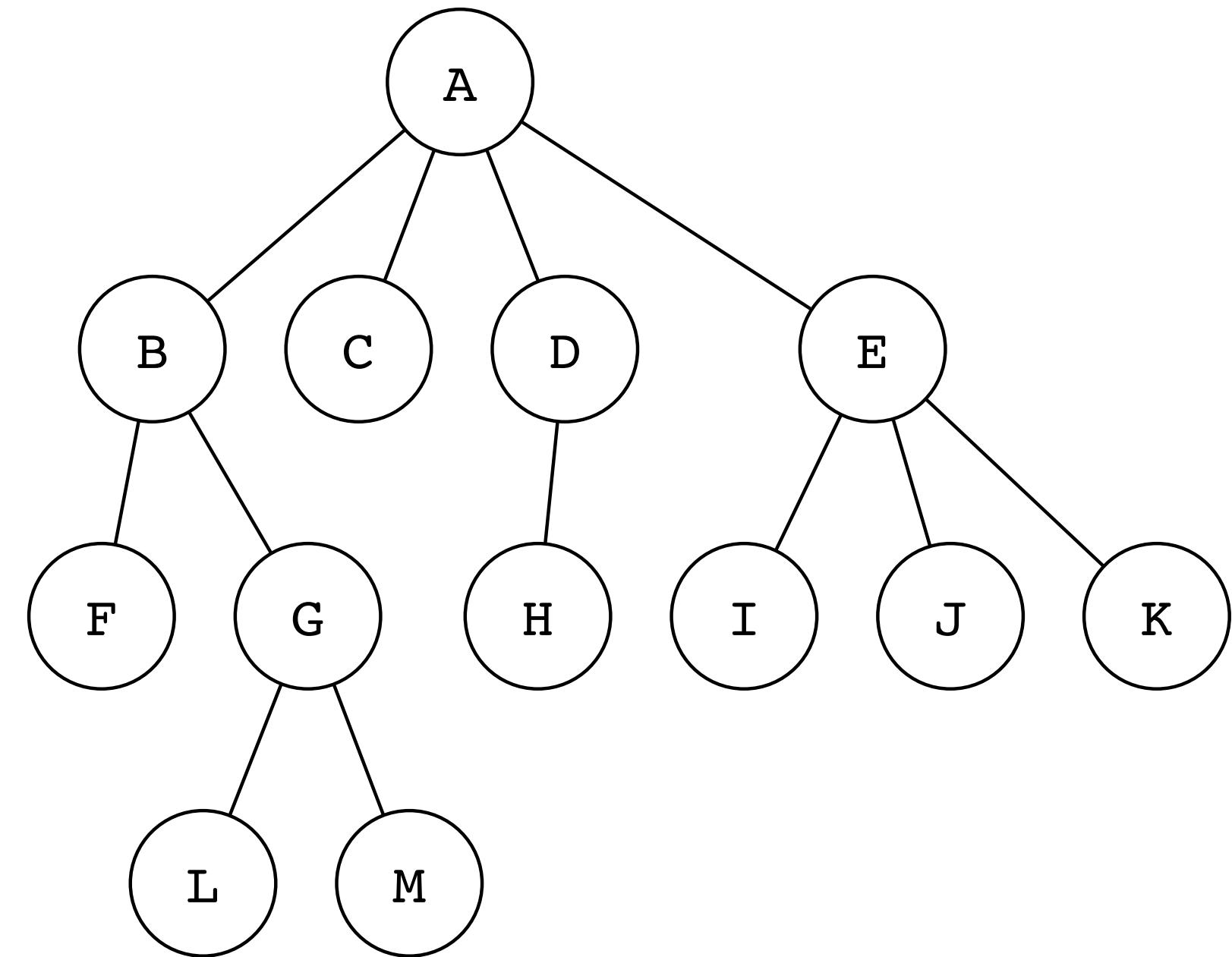
- Visiter les noeuds d'un arbre niveau par niveau
- Comment savoir que le noeud F suit le noeud E?
- S'en souvenir depuis que l'on a visité son parent B
- Utiliser une file FIFO





Parcours en largeur

- Visiter les noeuds d'un arbre niveau par niveau
- Comment savoir que le noeud F suit le noeud E?
- S'en souvenir depuis que l'on a visité son parent B
- Utiliser une file FIFO

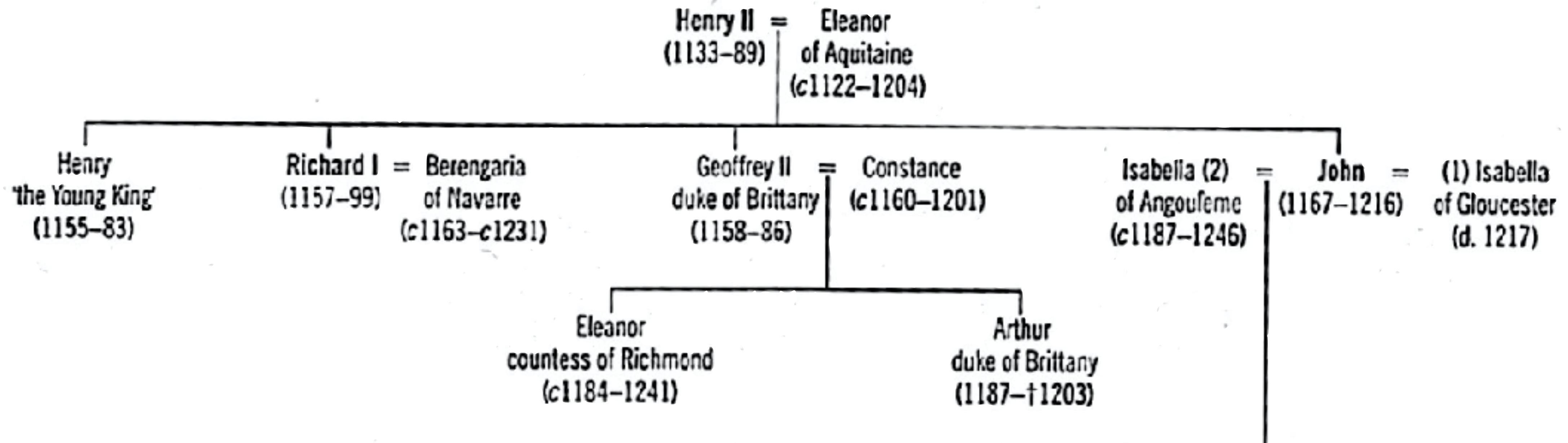


```
fonction largeur (r, fn)
    Initialiser File Q
    Q.push(r)
    tant que pas Q.vide()
        r = Q.front(); Q.pop()
        fn(r)
        pour tout enfant e de r
            Q.push(e)
```



Succession de Richard Coeur de Lion

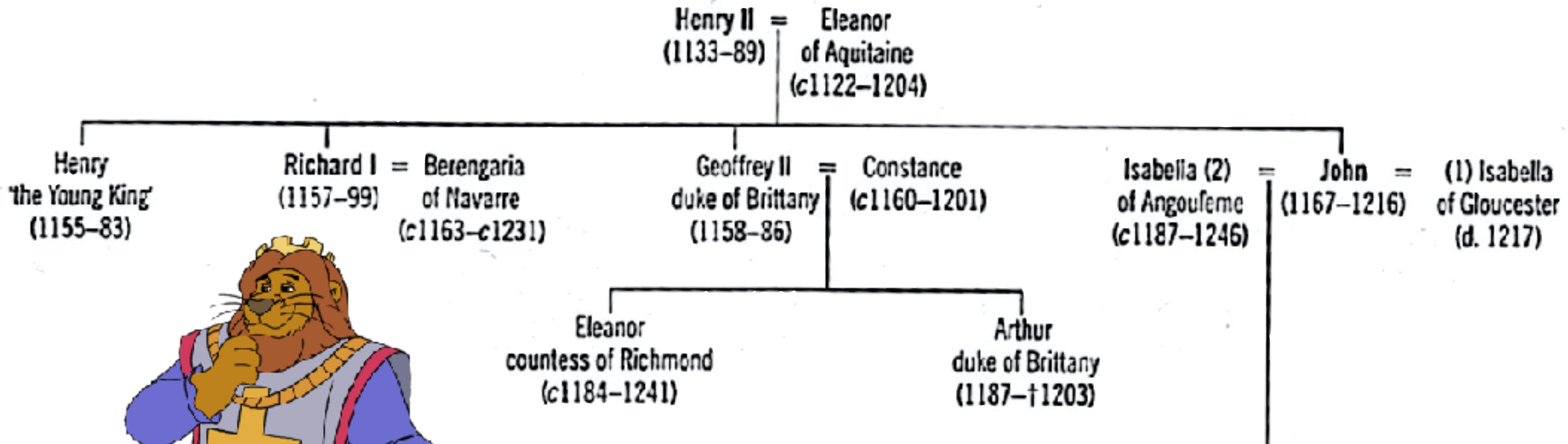
The House of Anjou/ Plantagenet





Succession de Richard Coeur de Lion

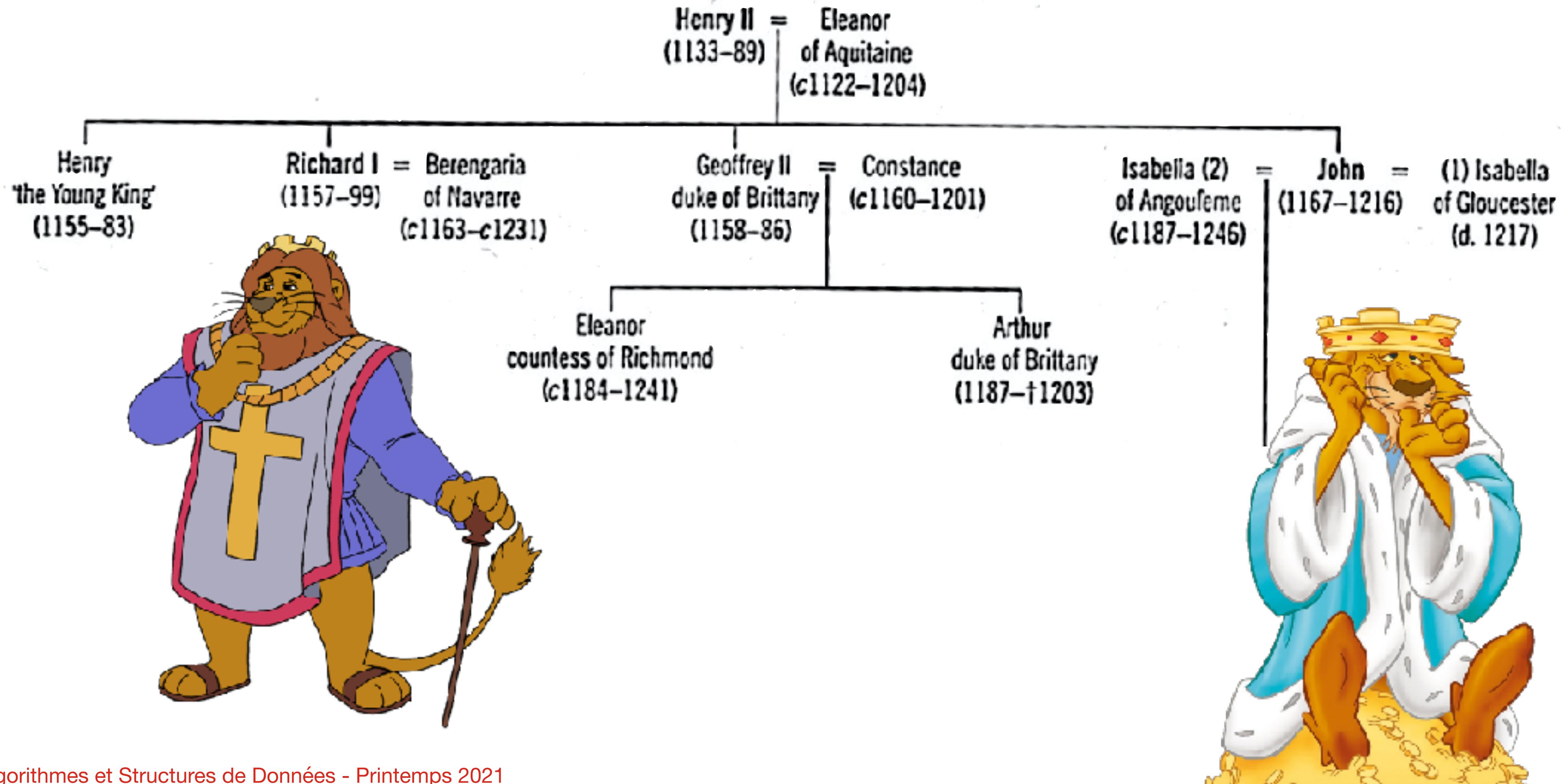
The House of Anjou/ Plantagenet





Succession de Richard Coeur de Lion

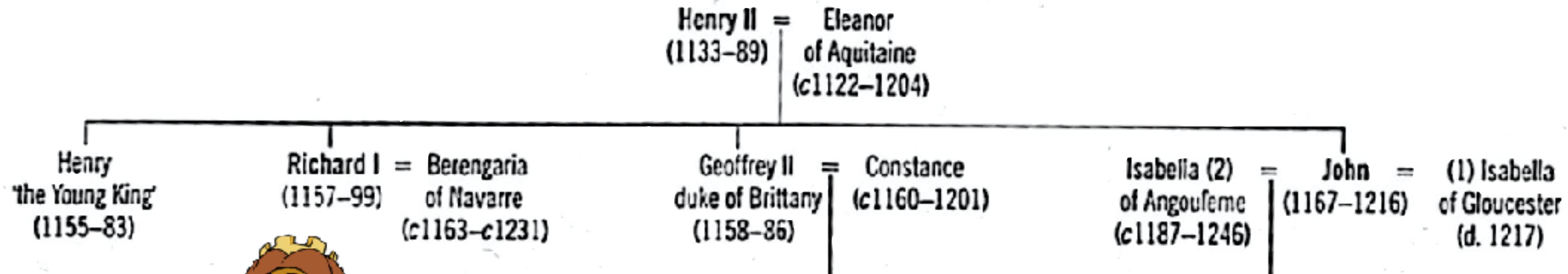
The House of Anjou/ Plantagenet





Succession de Richard Coeur de Lion

The House of Anjou/ Plantagenet



Eleanor
countess of Richmond
(c1184–1241)



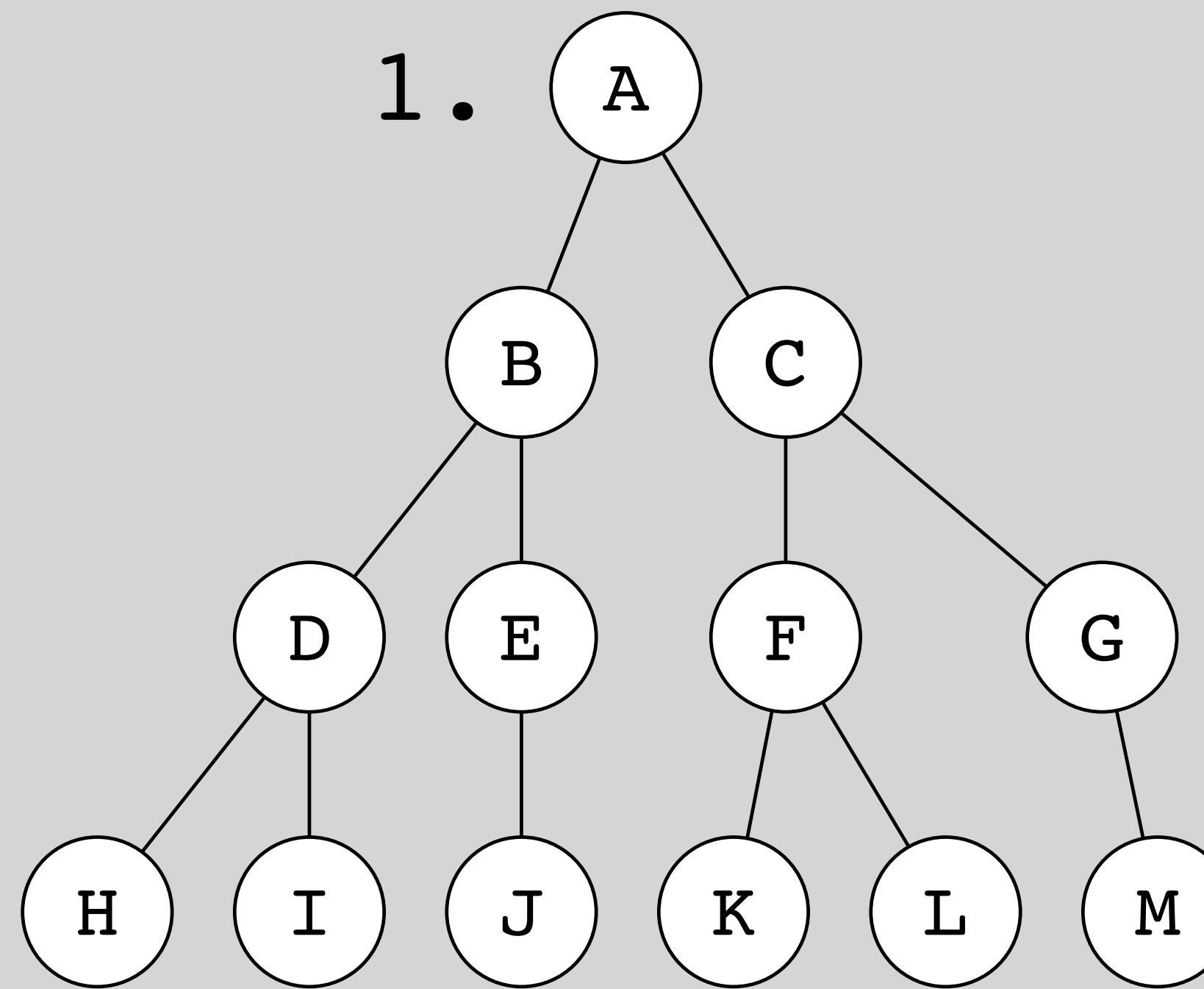
Arthur
duke of Brittany
(1187–†1203)



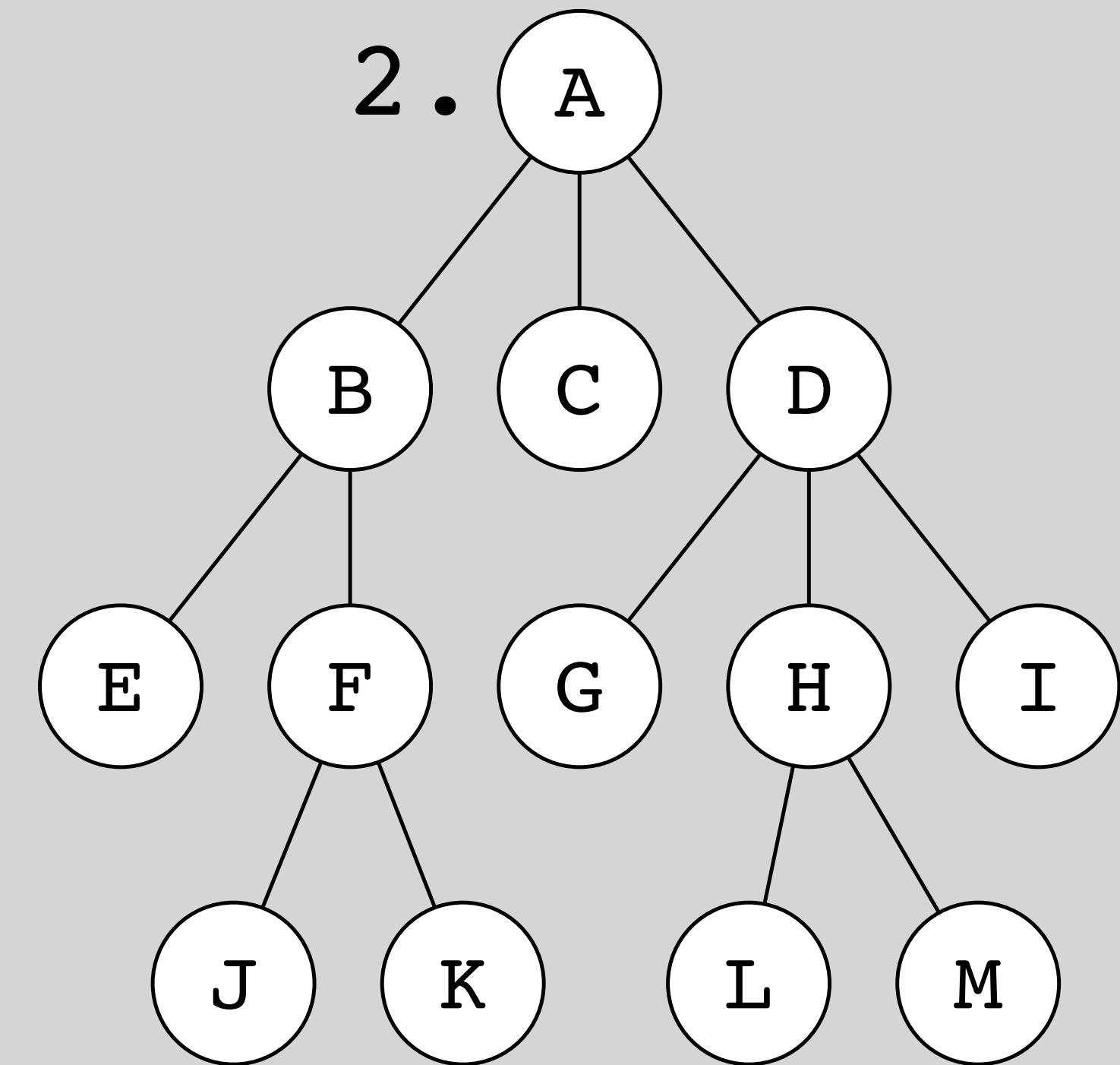


Effectuez les 3 parcours pour chaque arbre

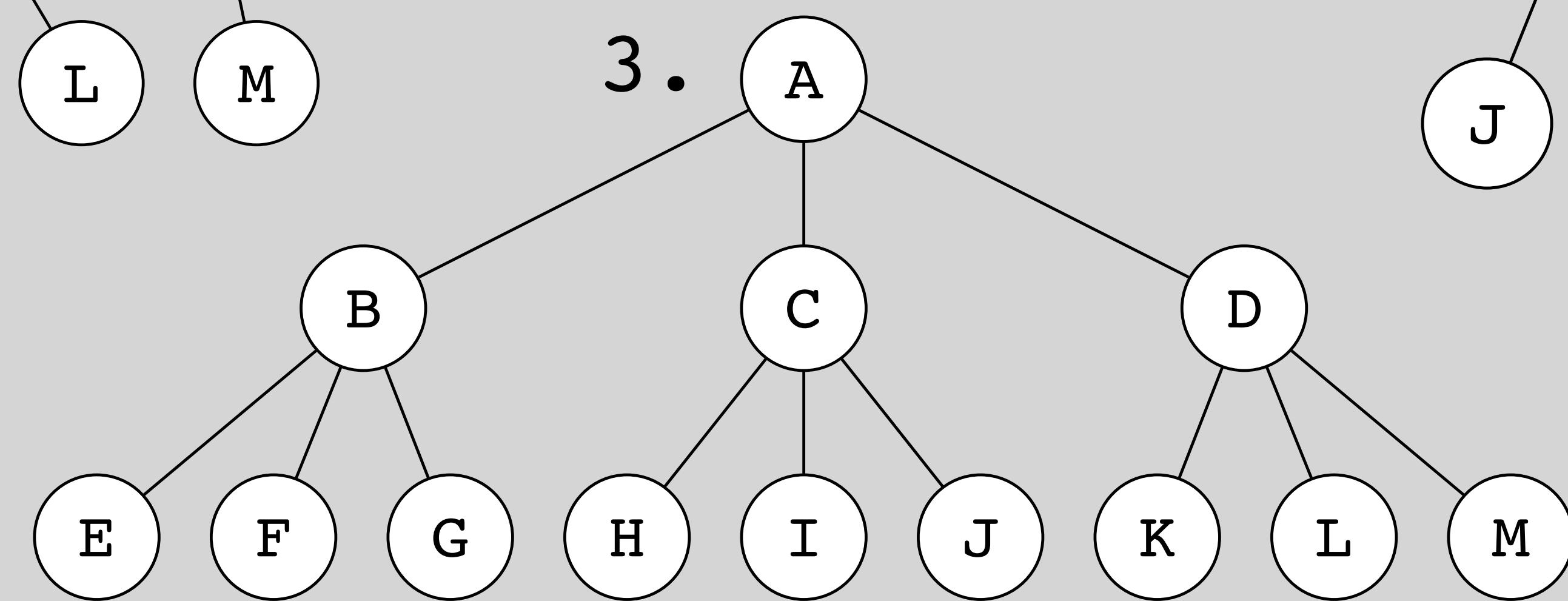
1.



2.

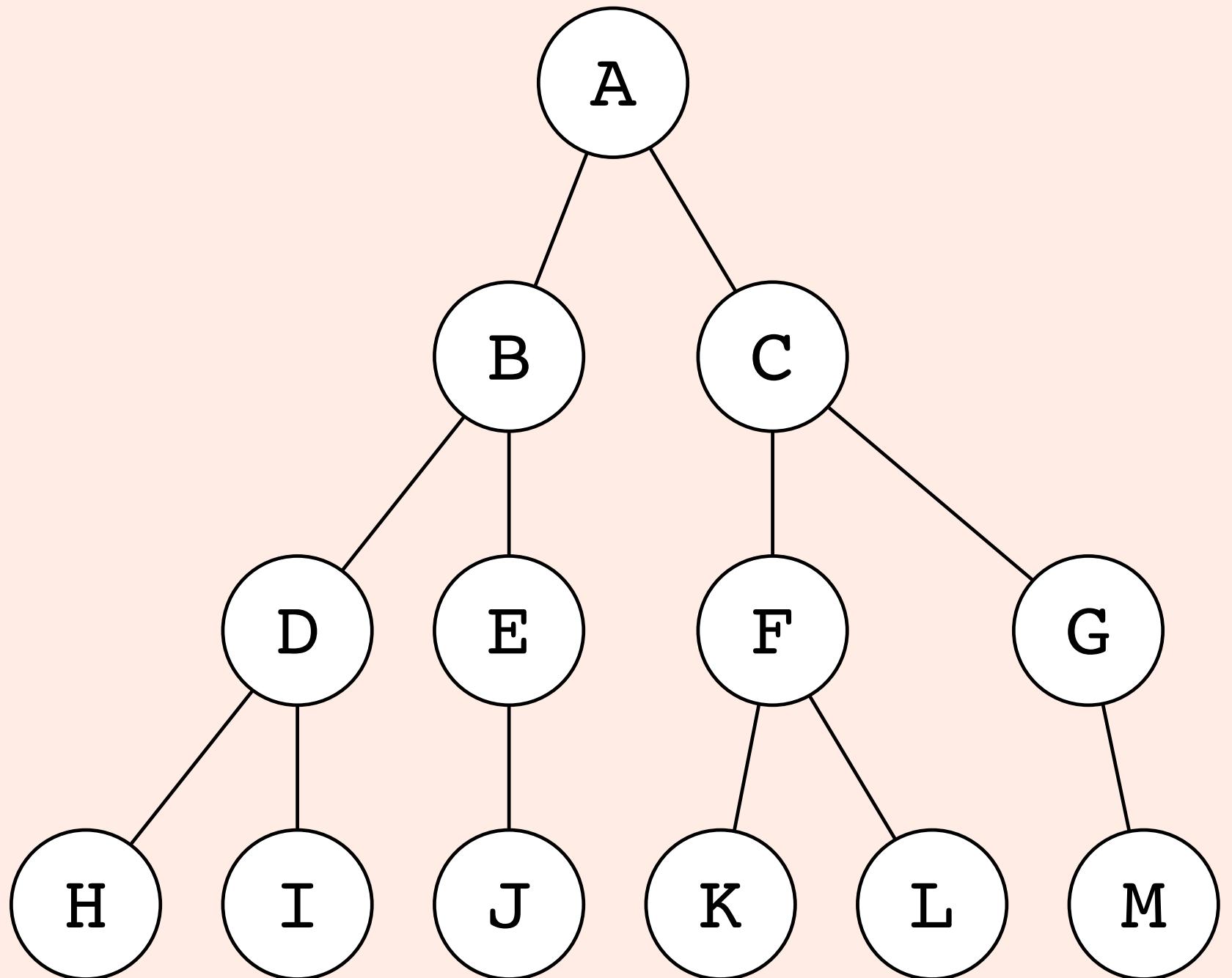


3.



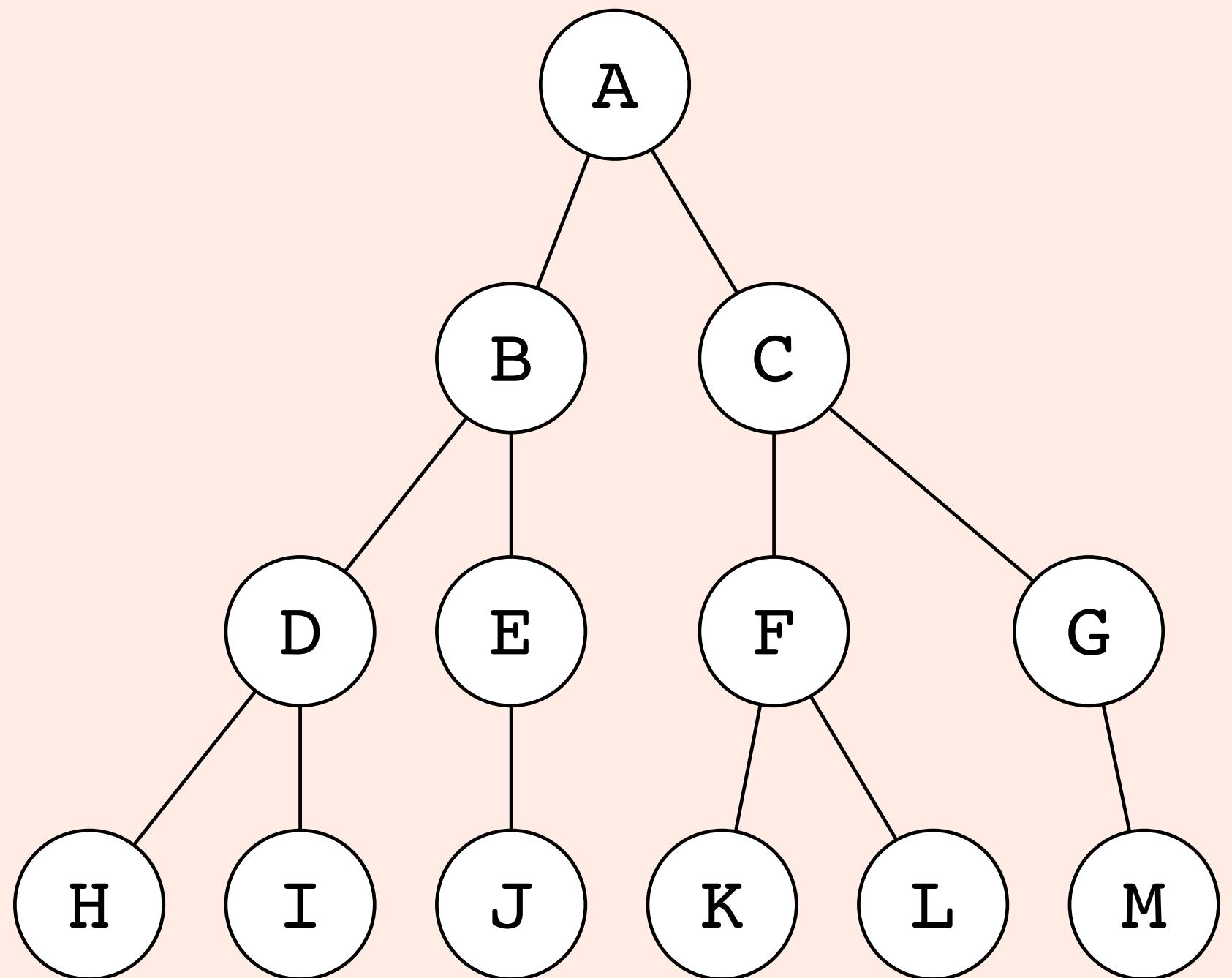


Parcours (1)





Parcours (1)

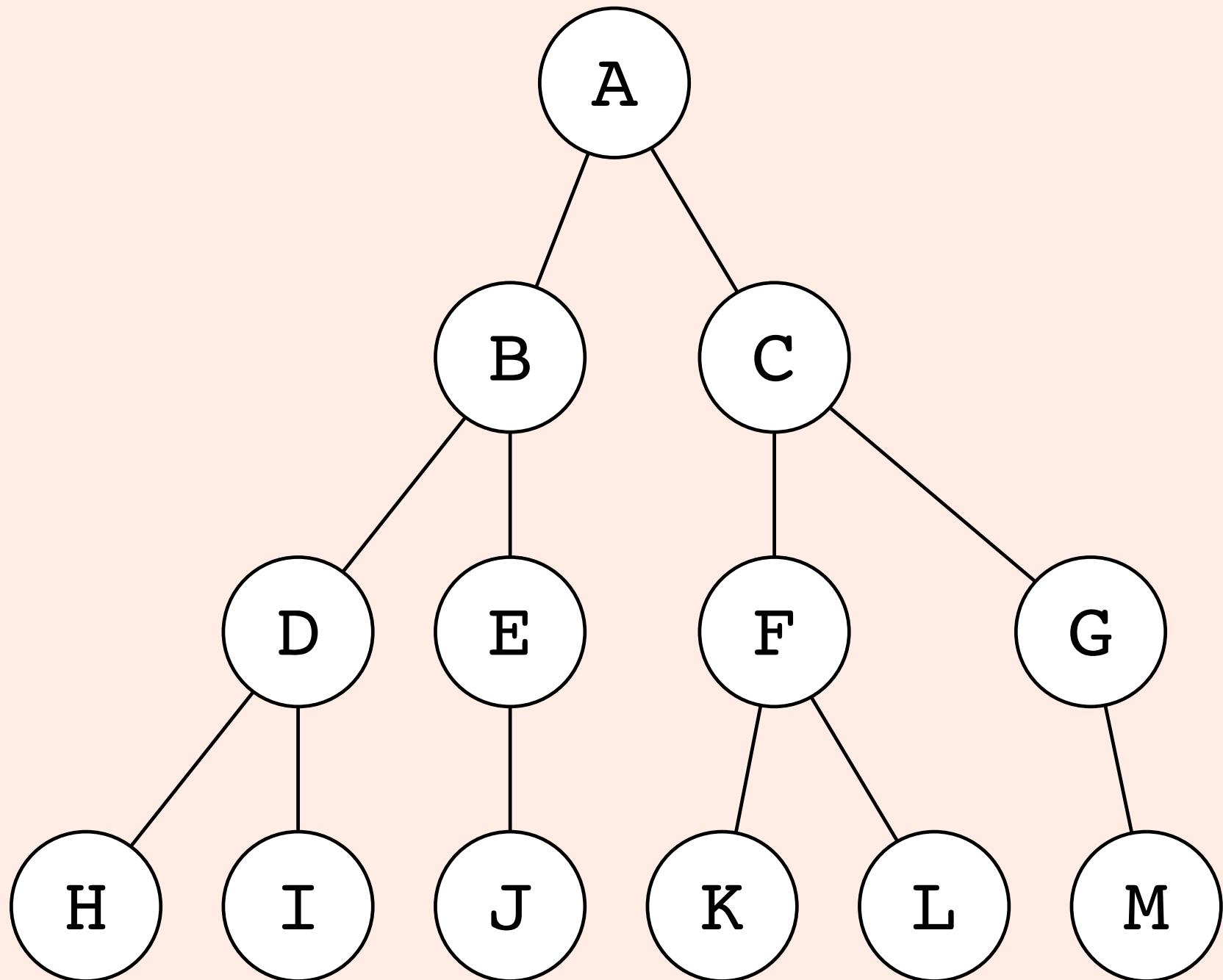


Pré:

ABDHIEJCFKLGM



Parcours (1)



Pré:

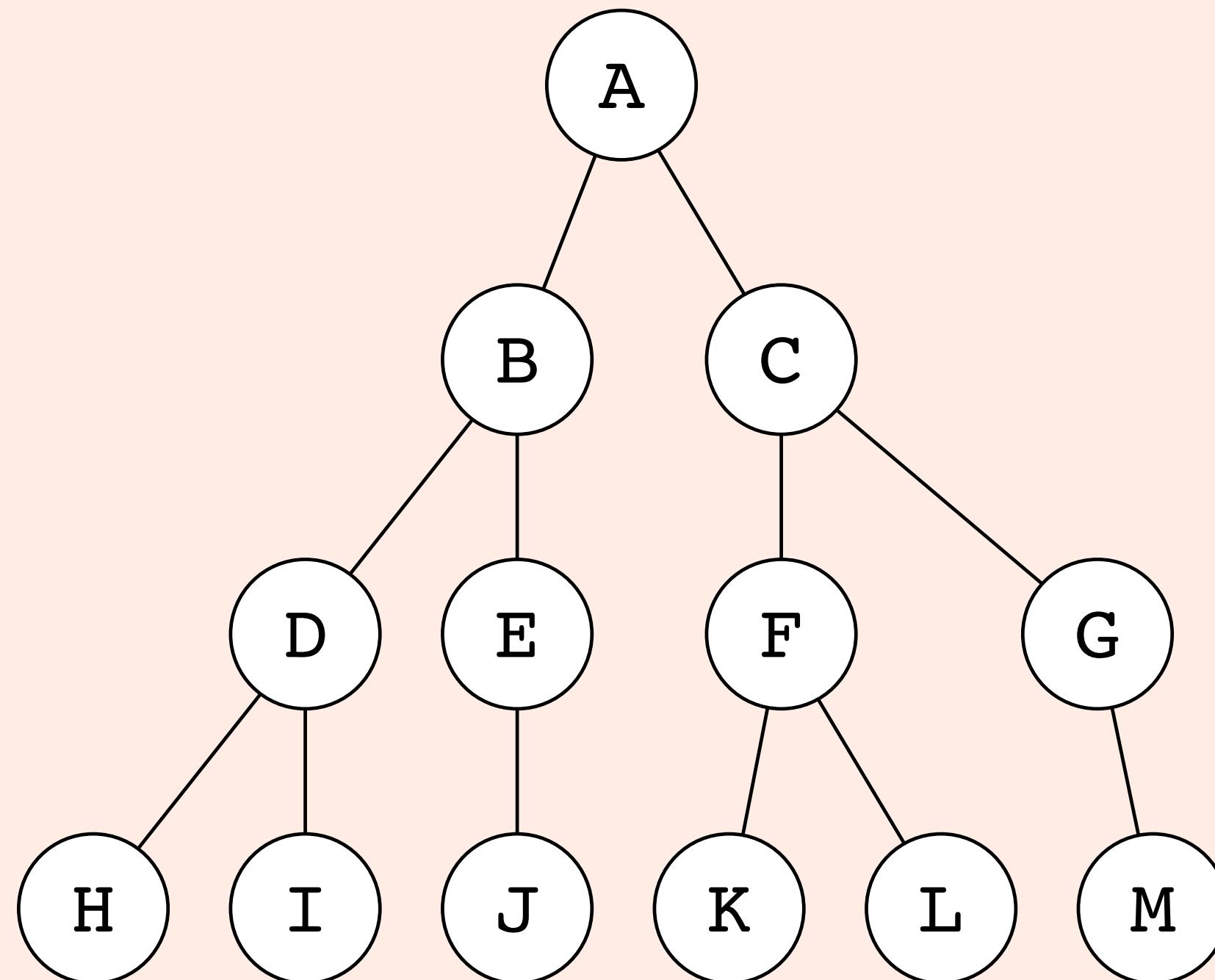
ABDHIEJCFKLGM

Post:

HIDJEBKLFGCA



Parcours (1)



Pré:

ABDHIEJCFKLGM

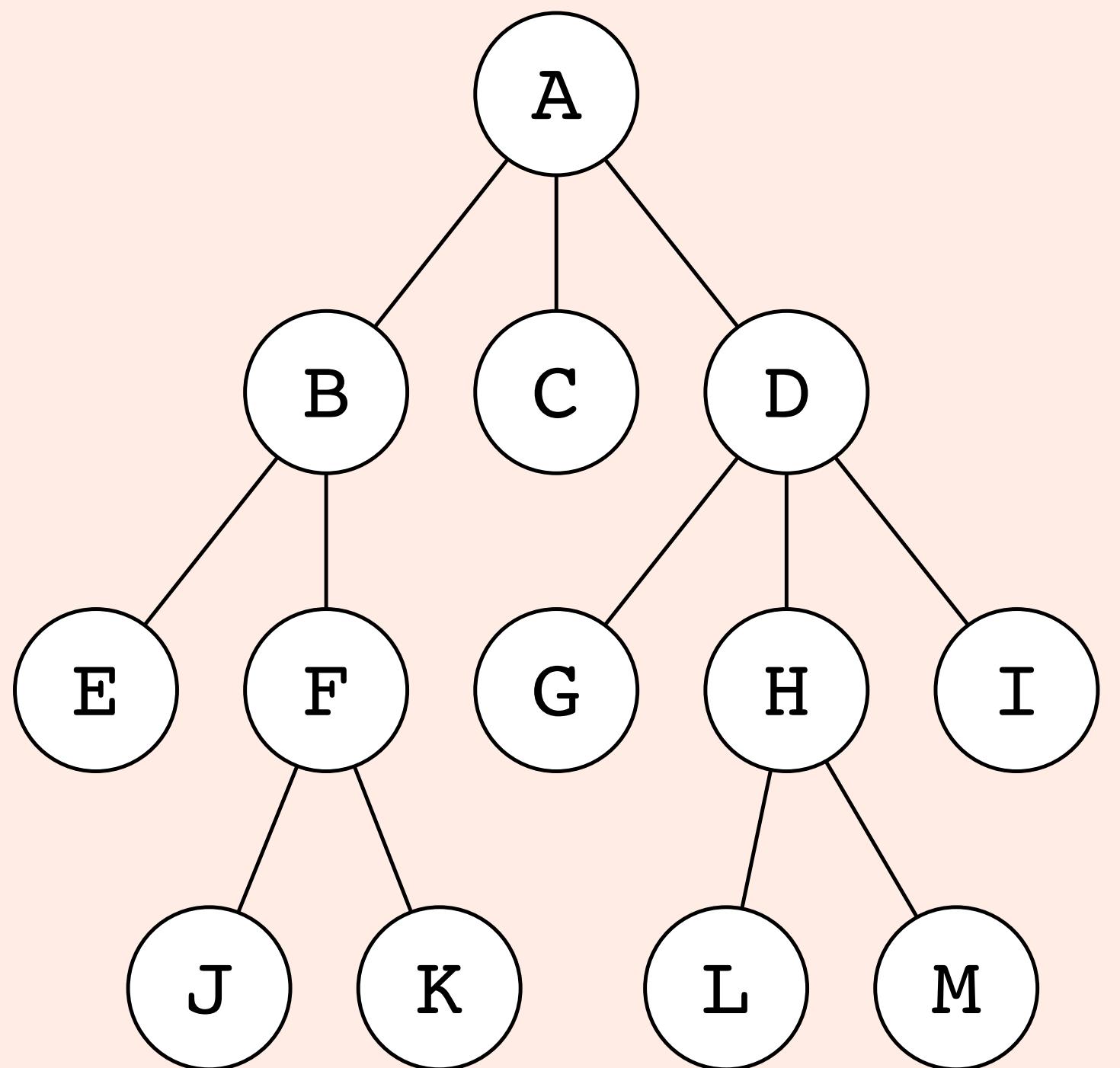
Post:

HIDJEBKLFGCA

Largeur: ABCDEFIGHIJKLMNOP

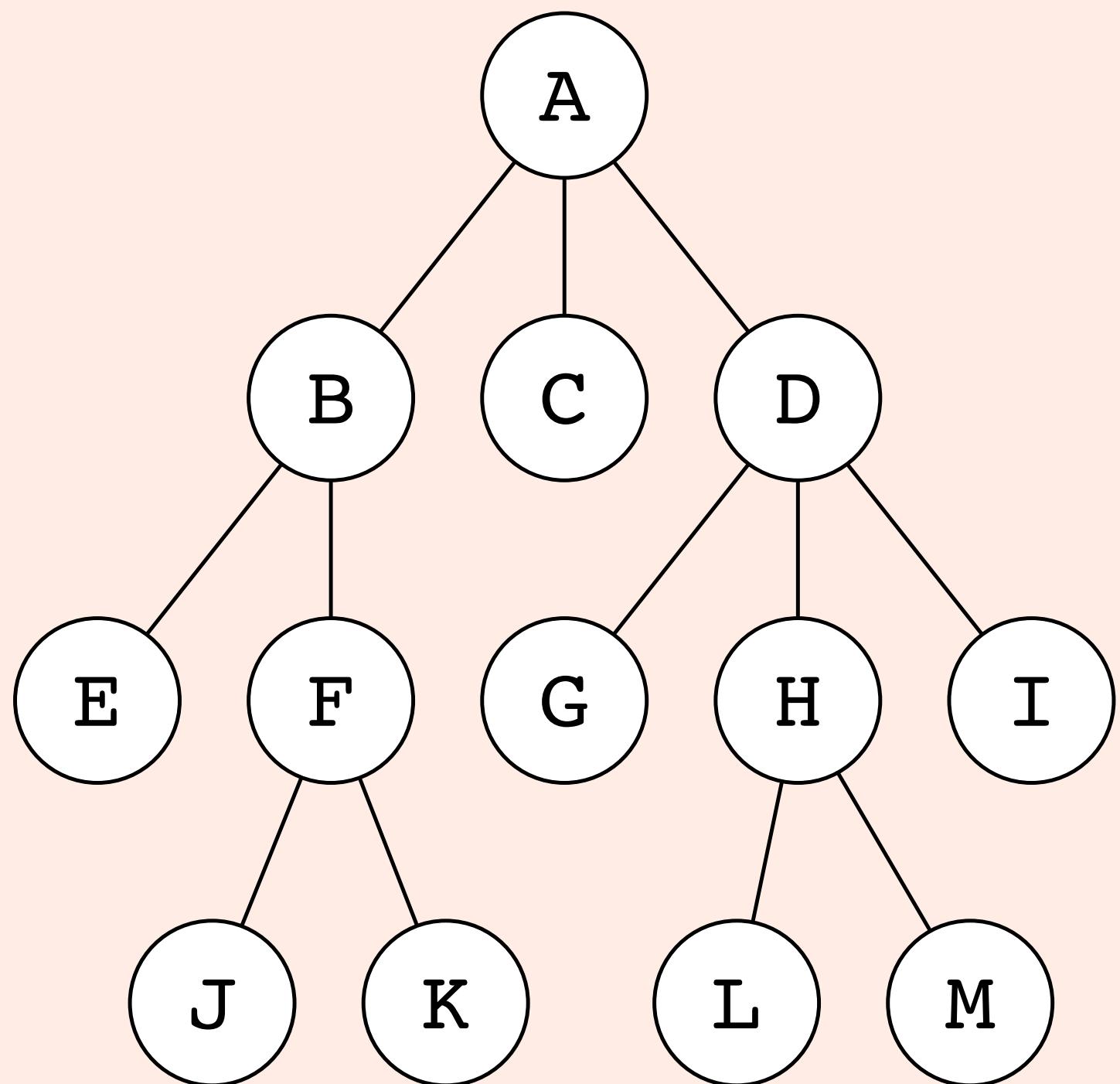


Parcours (2)





Parcours (2)

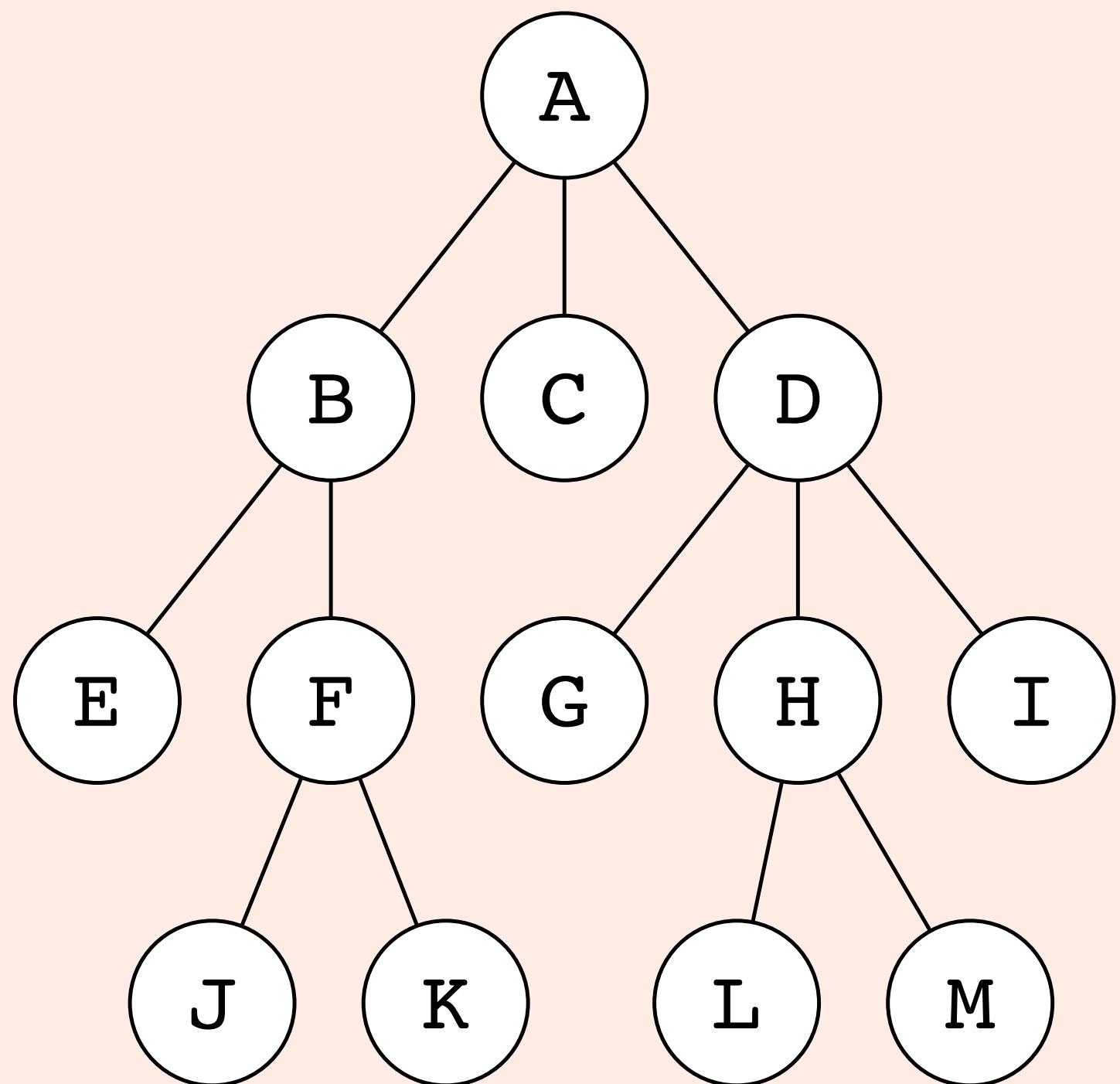


Pré:

ABEFJKCDGHLMI



Parcours (2)



Pré:

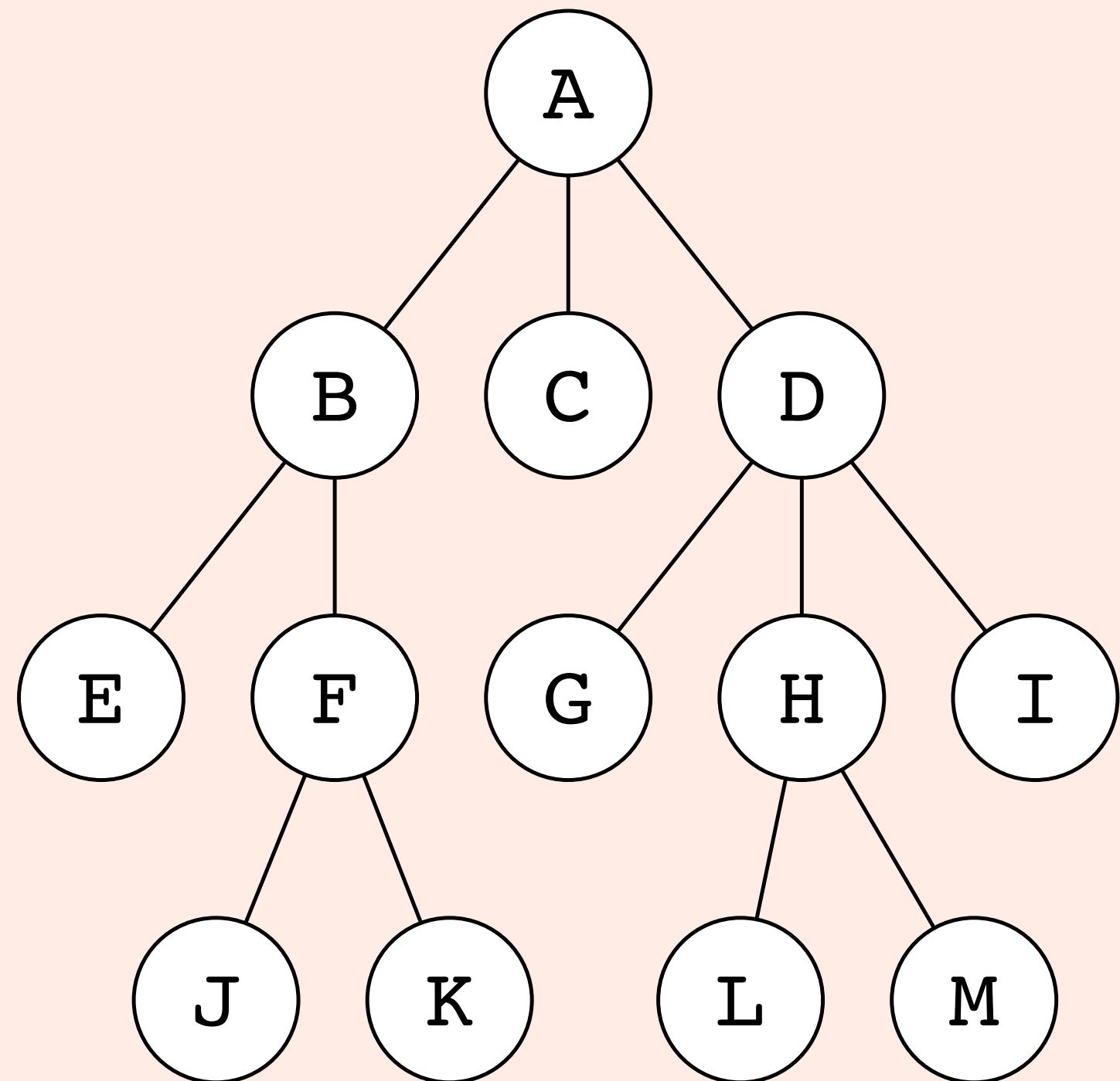
ABEFJKCDGHLMI

Post:

EJKFBCGLMHIDA



Parcours (2)



Pré:

ABEFJKCDGHLMI

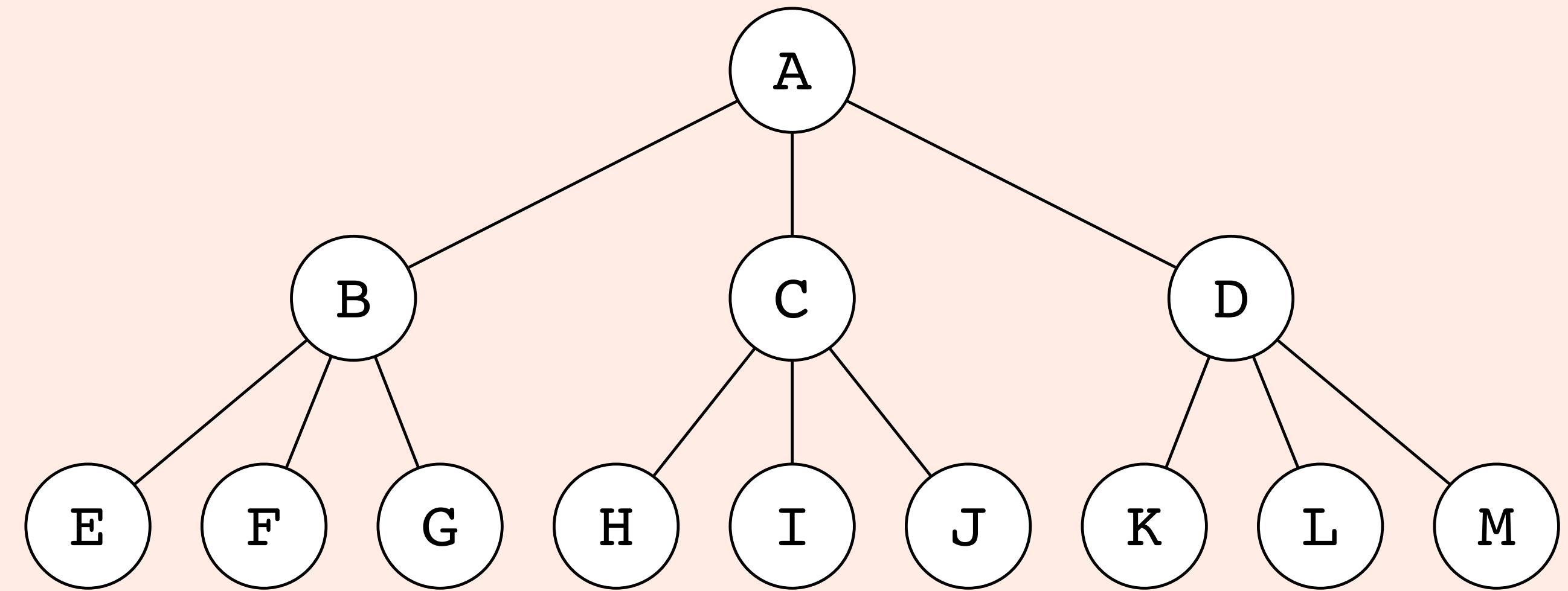
Post:

EJKFBCGLMHIDA

Largeur: ABCDEFGHIJKLMNOP

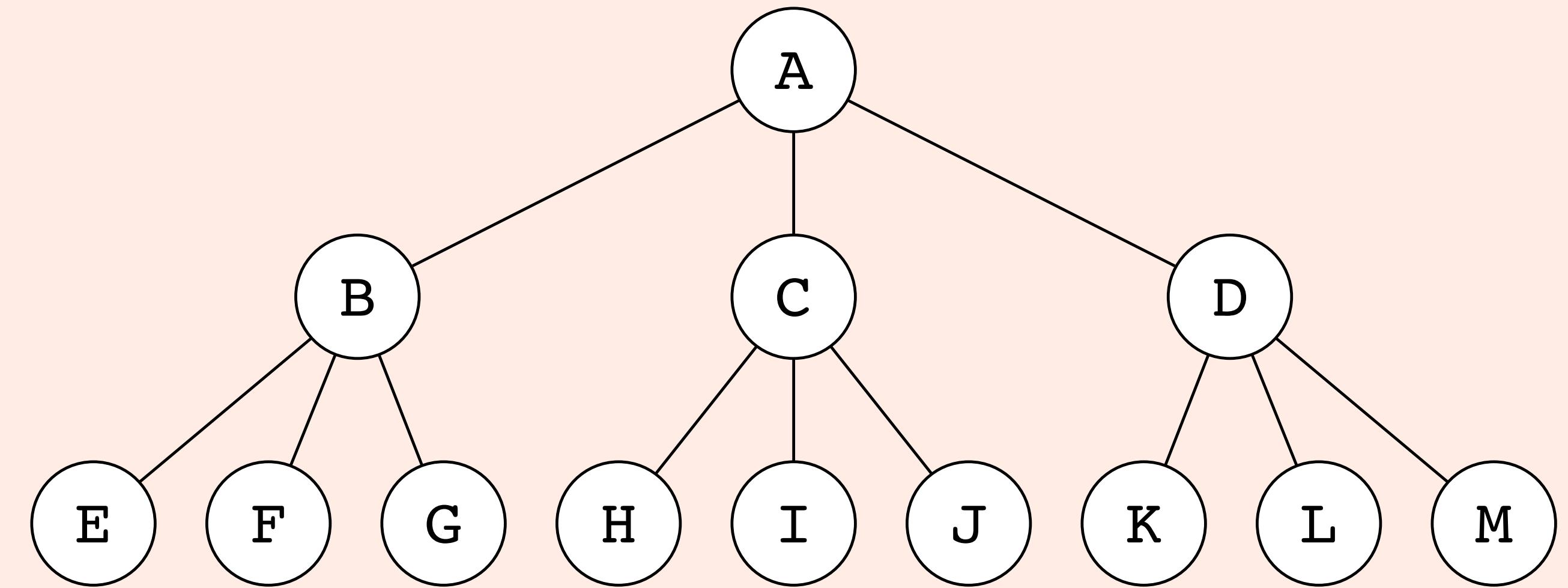


Parcours (3)





Parcours (3)

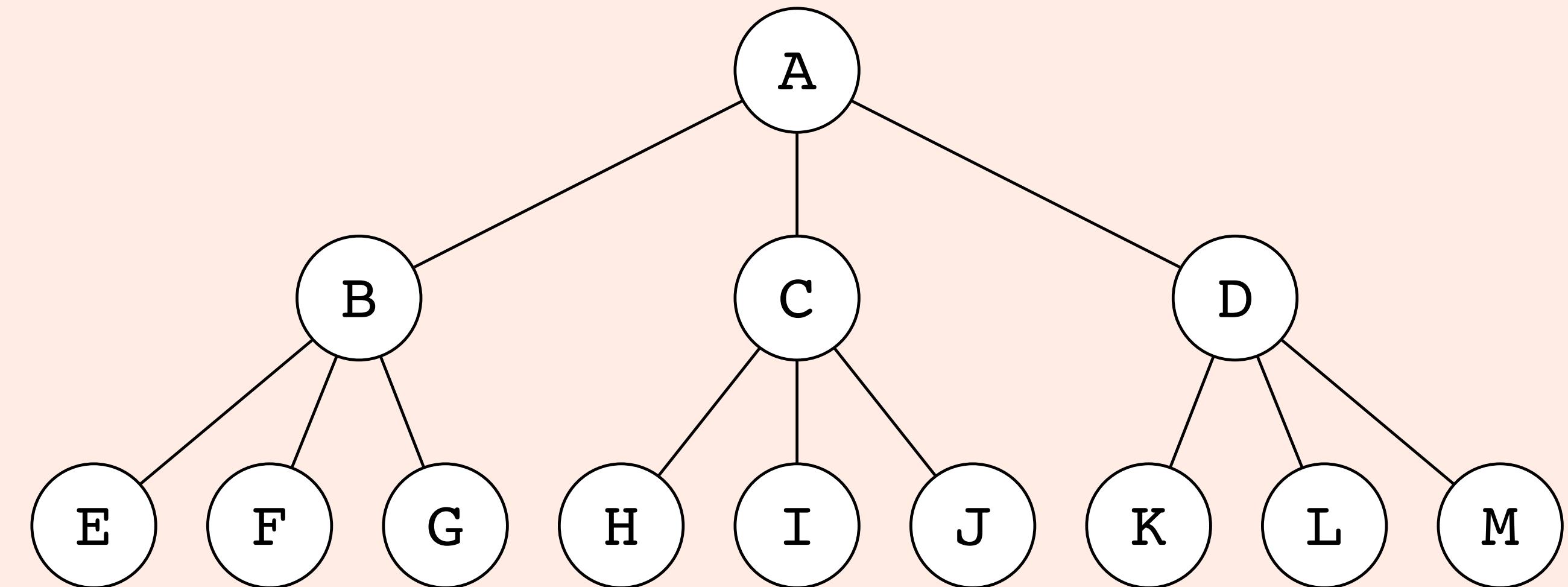


Pré:

ABEFGCHIJKL



Parcours (3)



Pré:

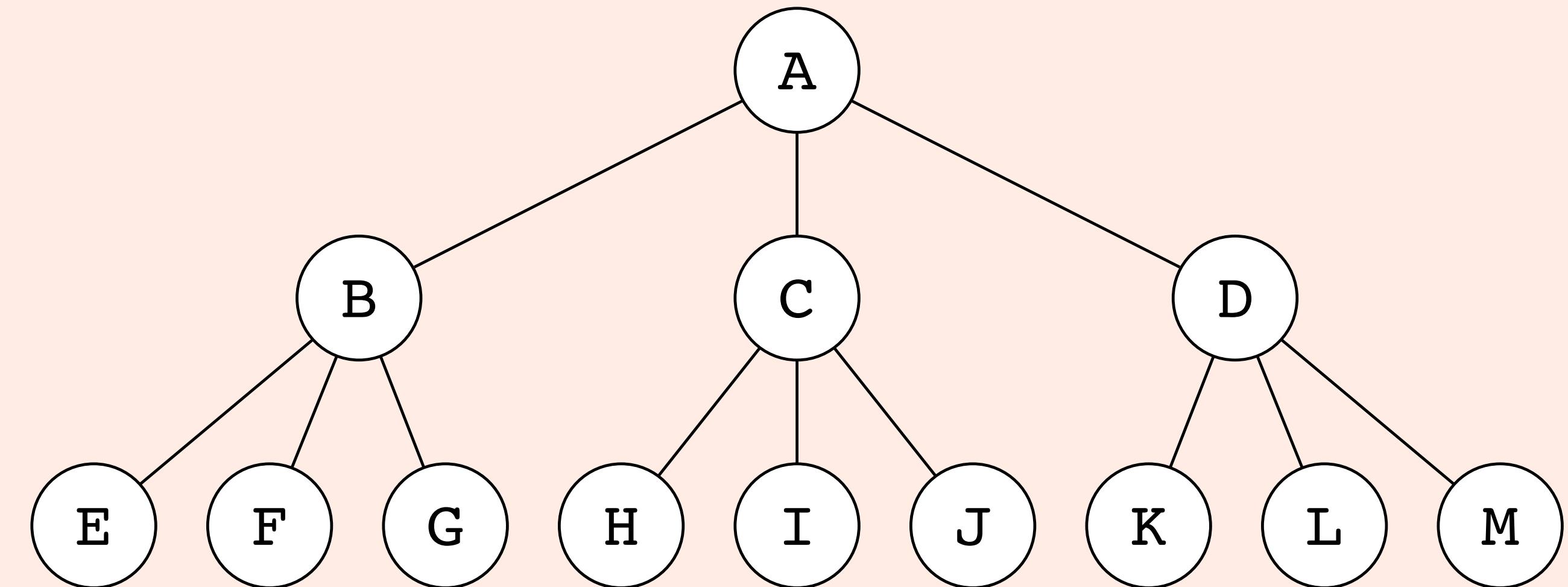
ABEFGCHIJDKLM

Post:

EFGBH_IJCKLMDA



Parcours (3)



Pré: ABEFGCHIJDKLM

Post: EFGBHIJCKLMDA

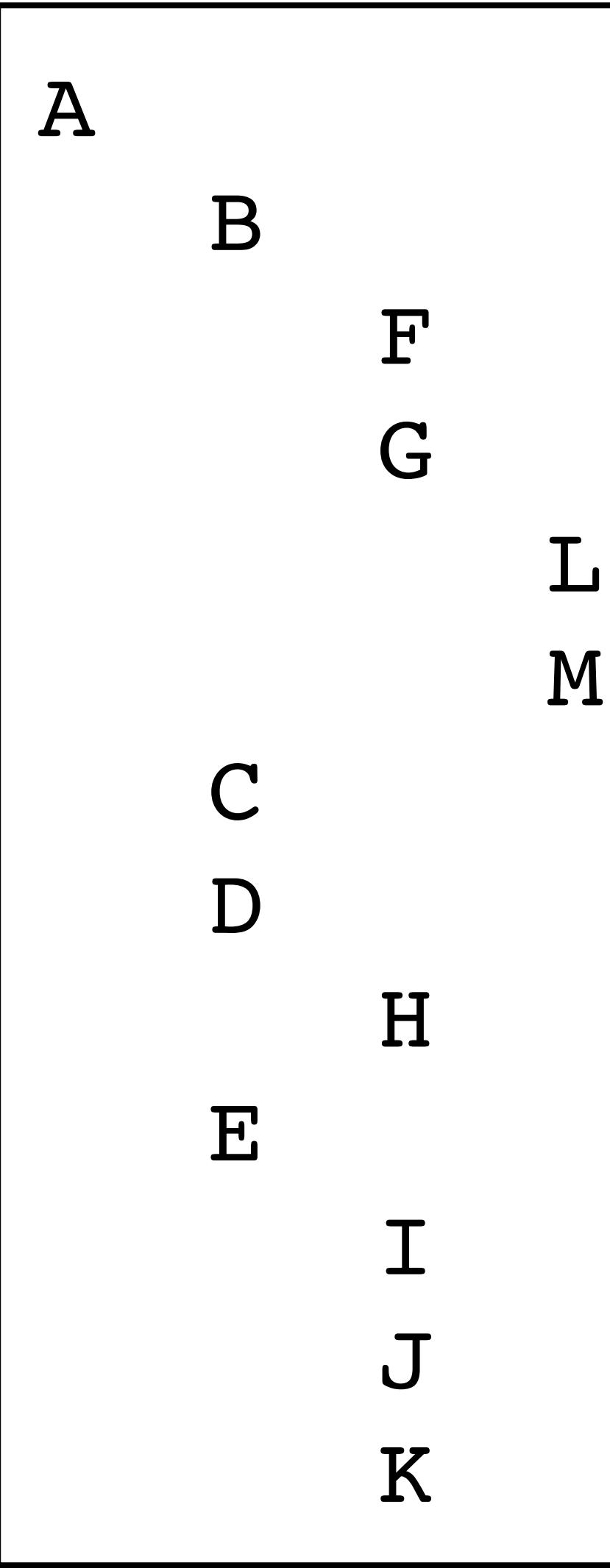
Largeur: ABCDEFGHIJKLM

4. Représentations linéaires





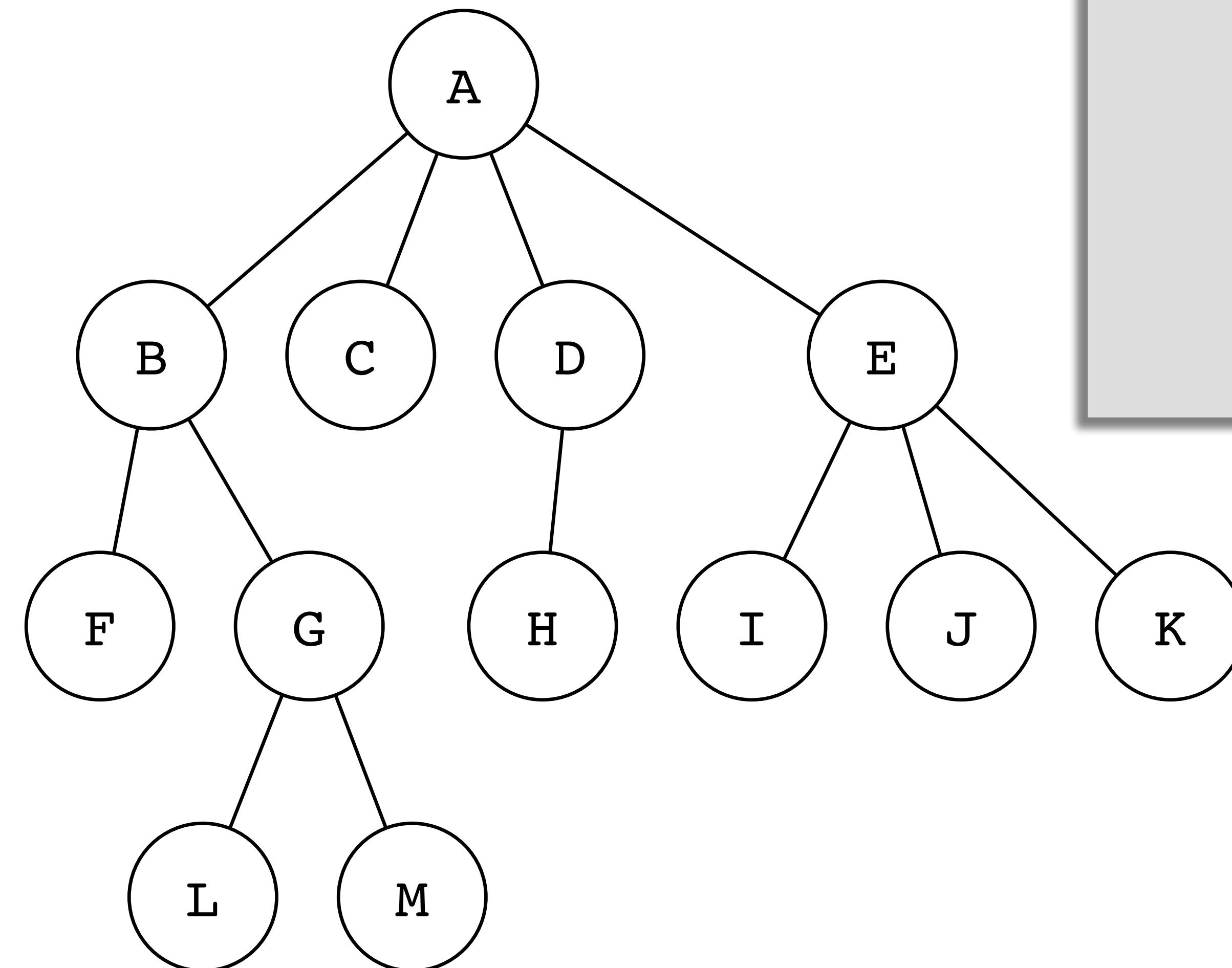
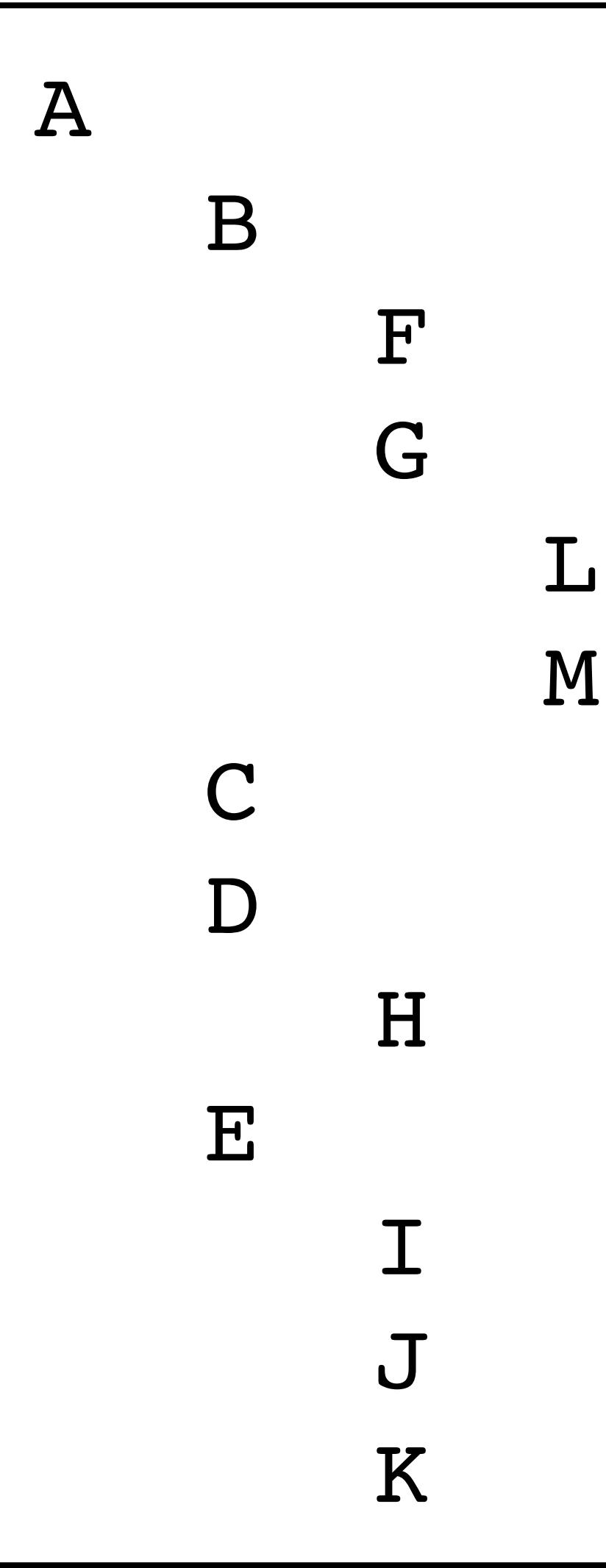
Représentation indentée (1)



fonction `indenter(r, n)`



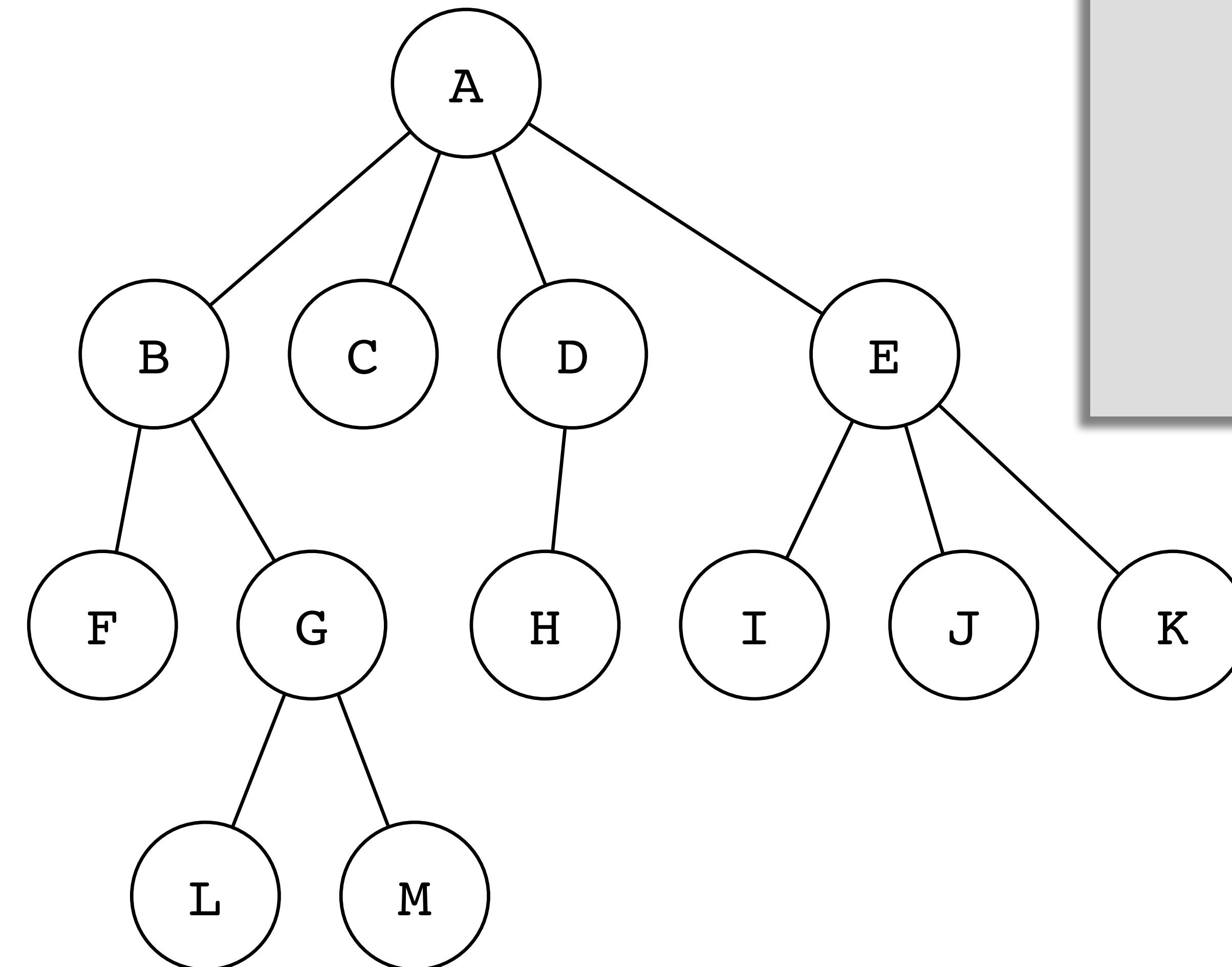
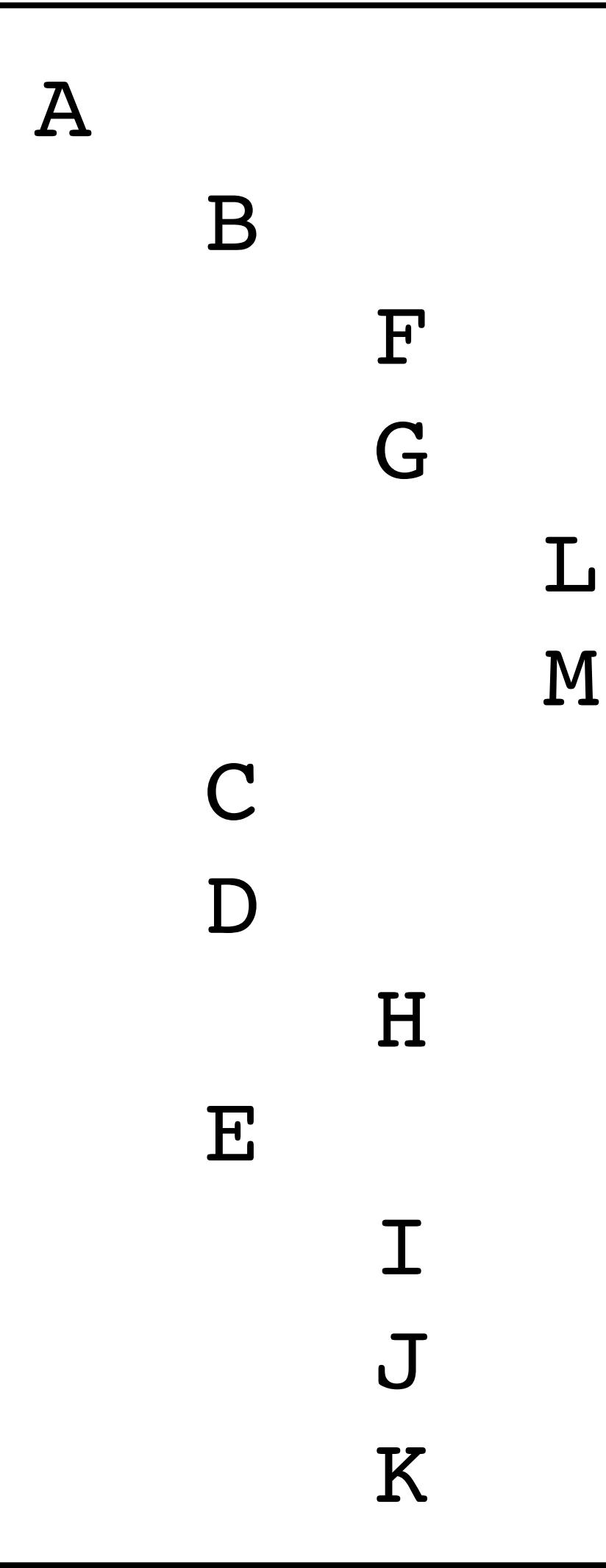
Représentation indentée (1)



```
fonction indenter(r, n)
    si r != Ø
```



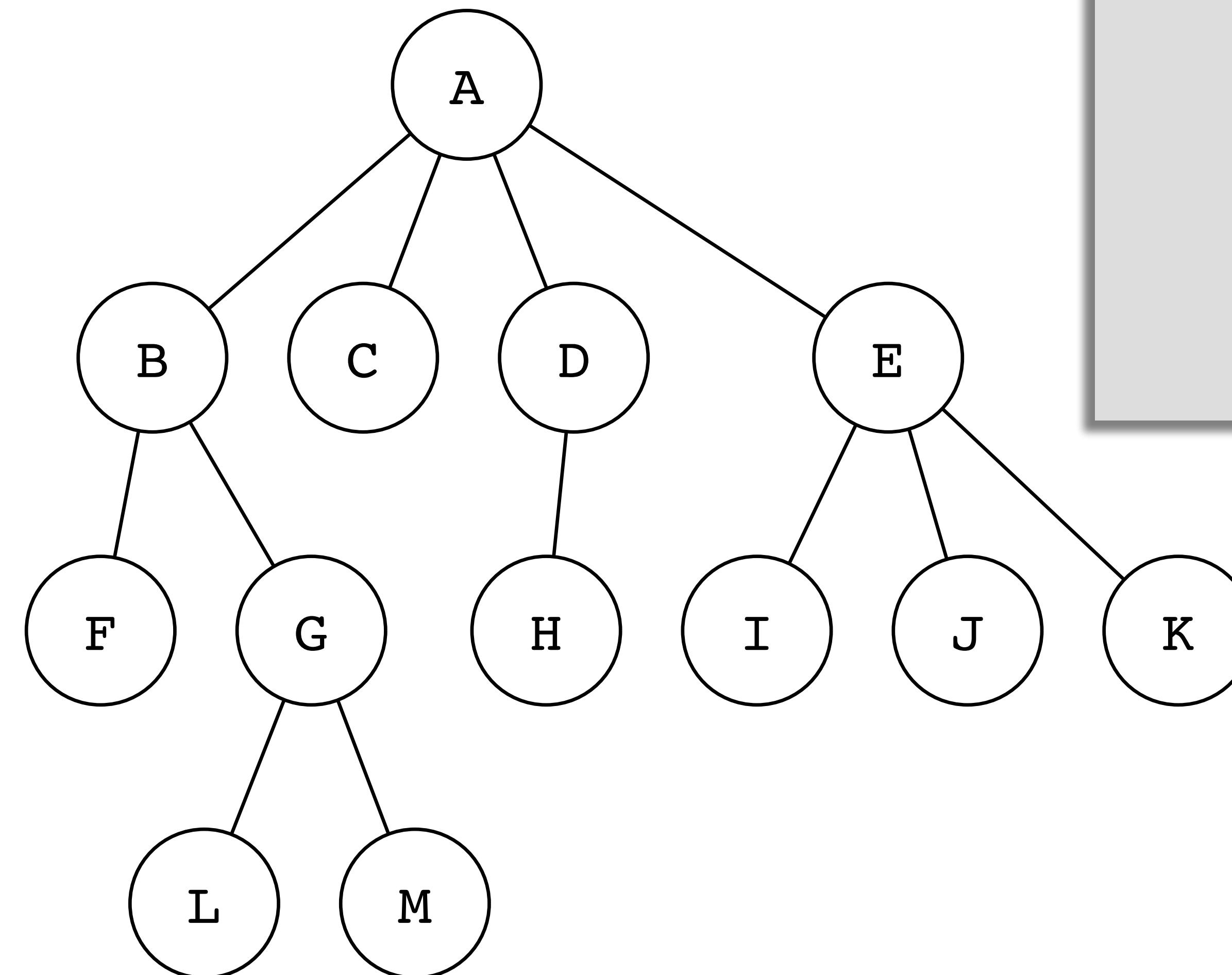
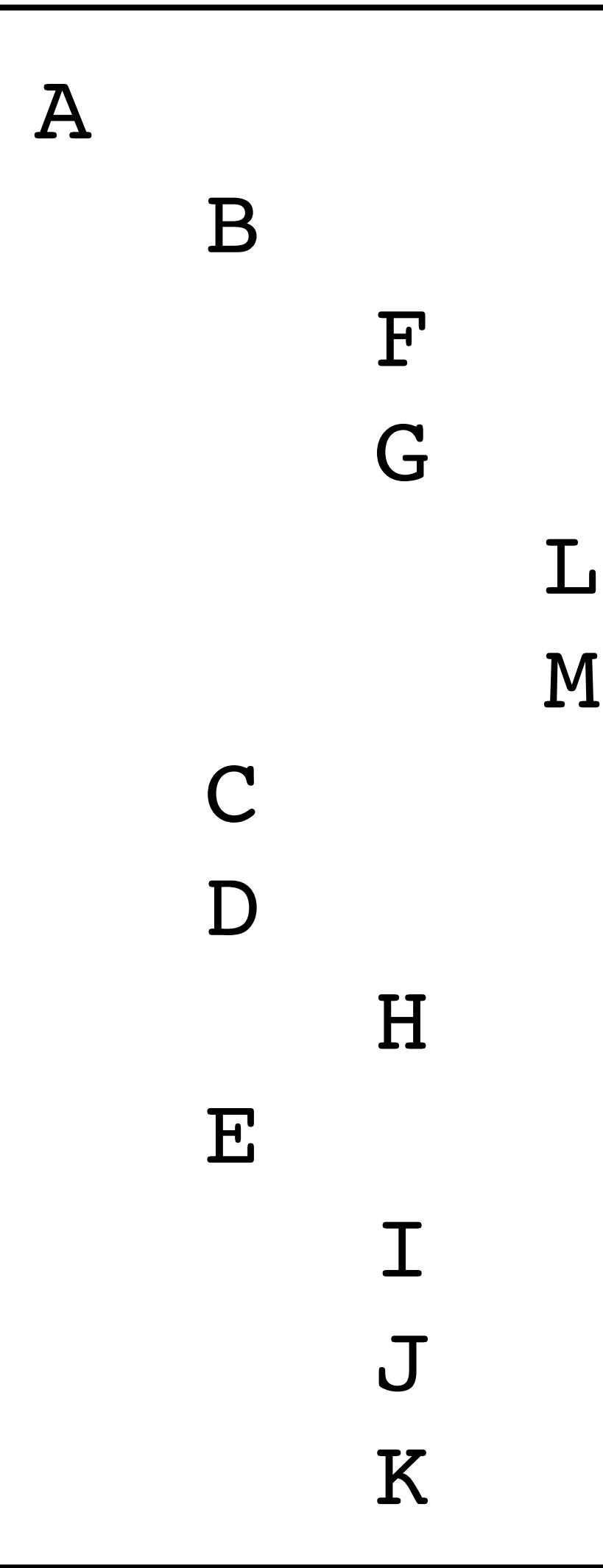
Représentation indentée (1)



```
fonction indenter(r, n)
    si r != Ø
        Afficher n blancs
        Afficher r.etiquette
        Afficher saut de ligne
```



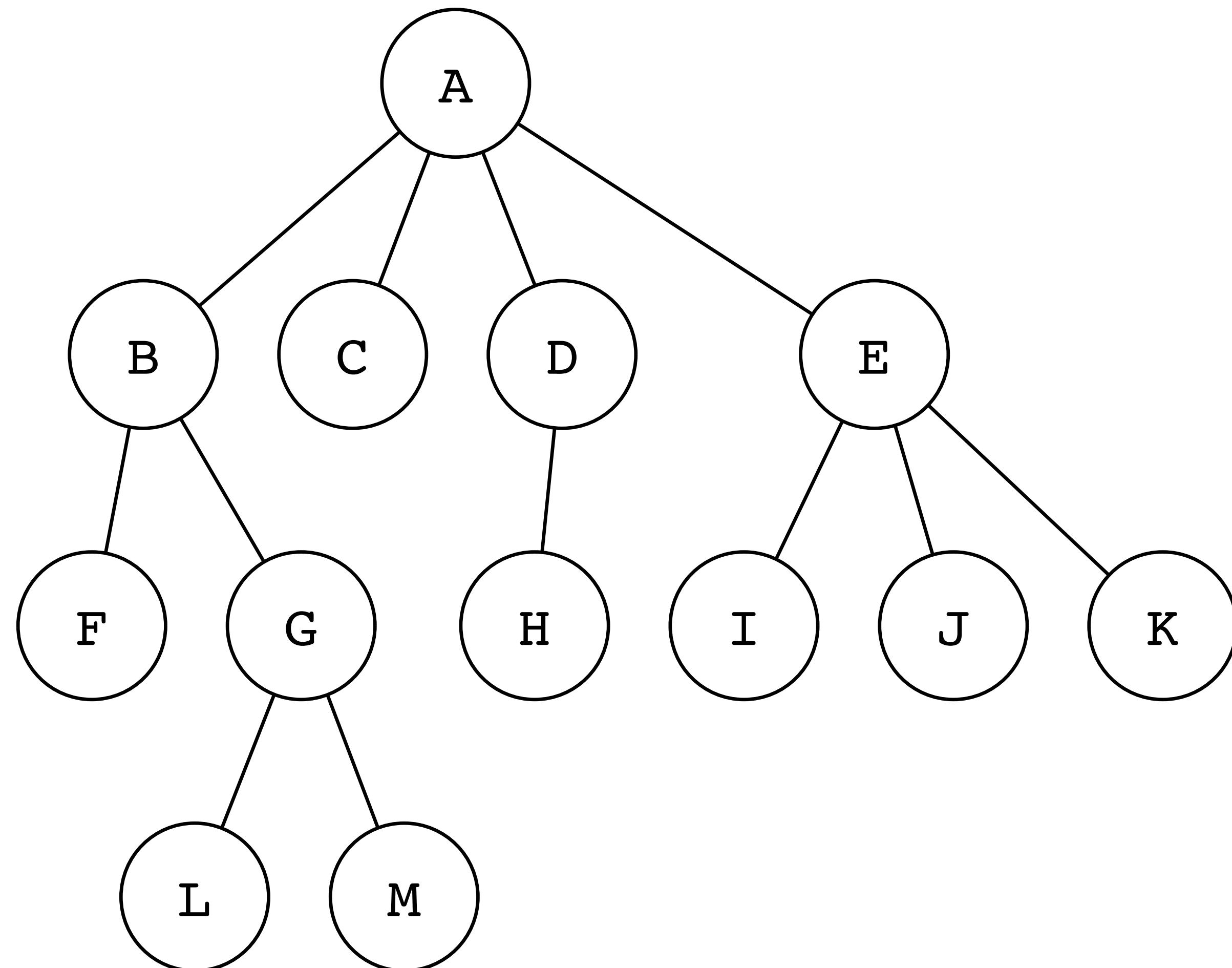
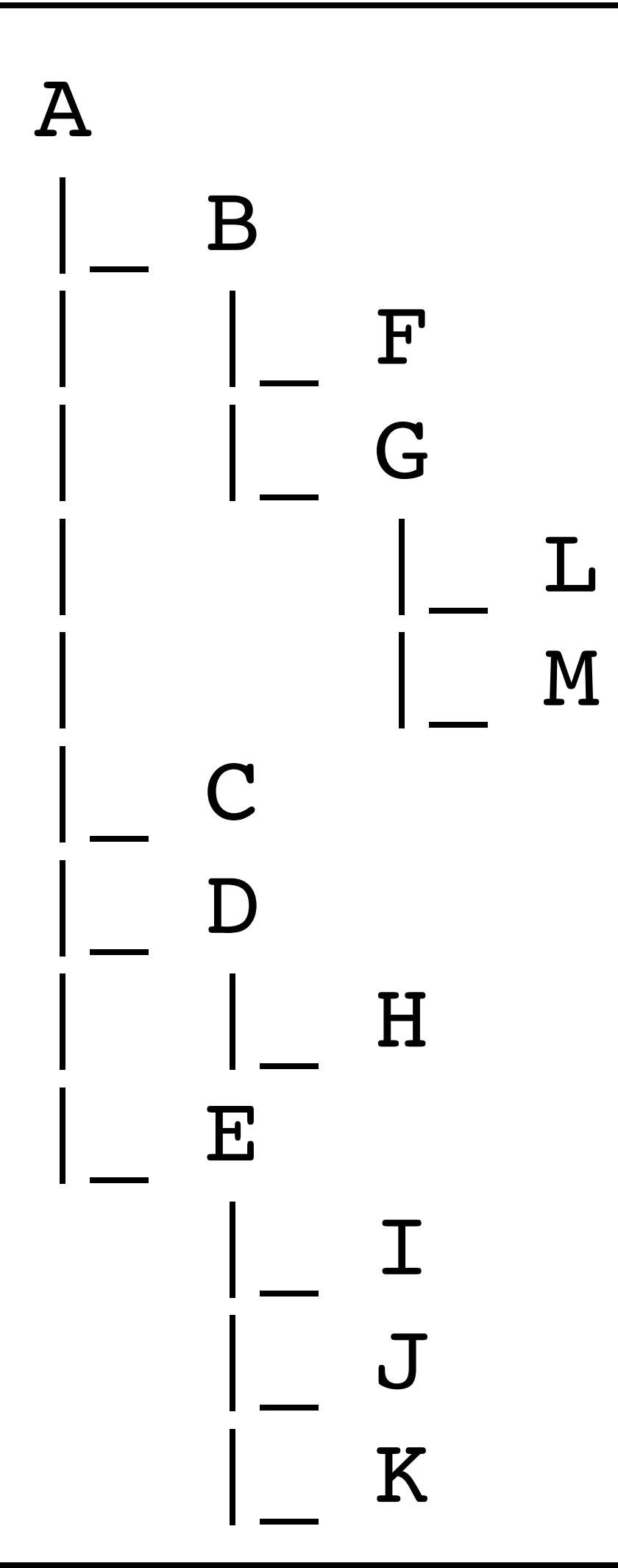
Représentation indentée (1)



```
fonction indenter(r, n)
    si r != Ø
        Afficher n blancs
        Afficher r.etiquette
        Afficher saut de ligne
        pour tout enfant e de r
            indenter(e, n+1)
```

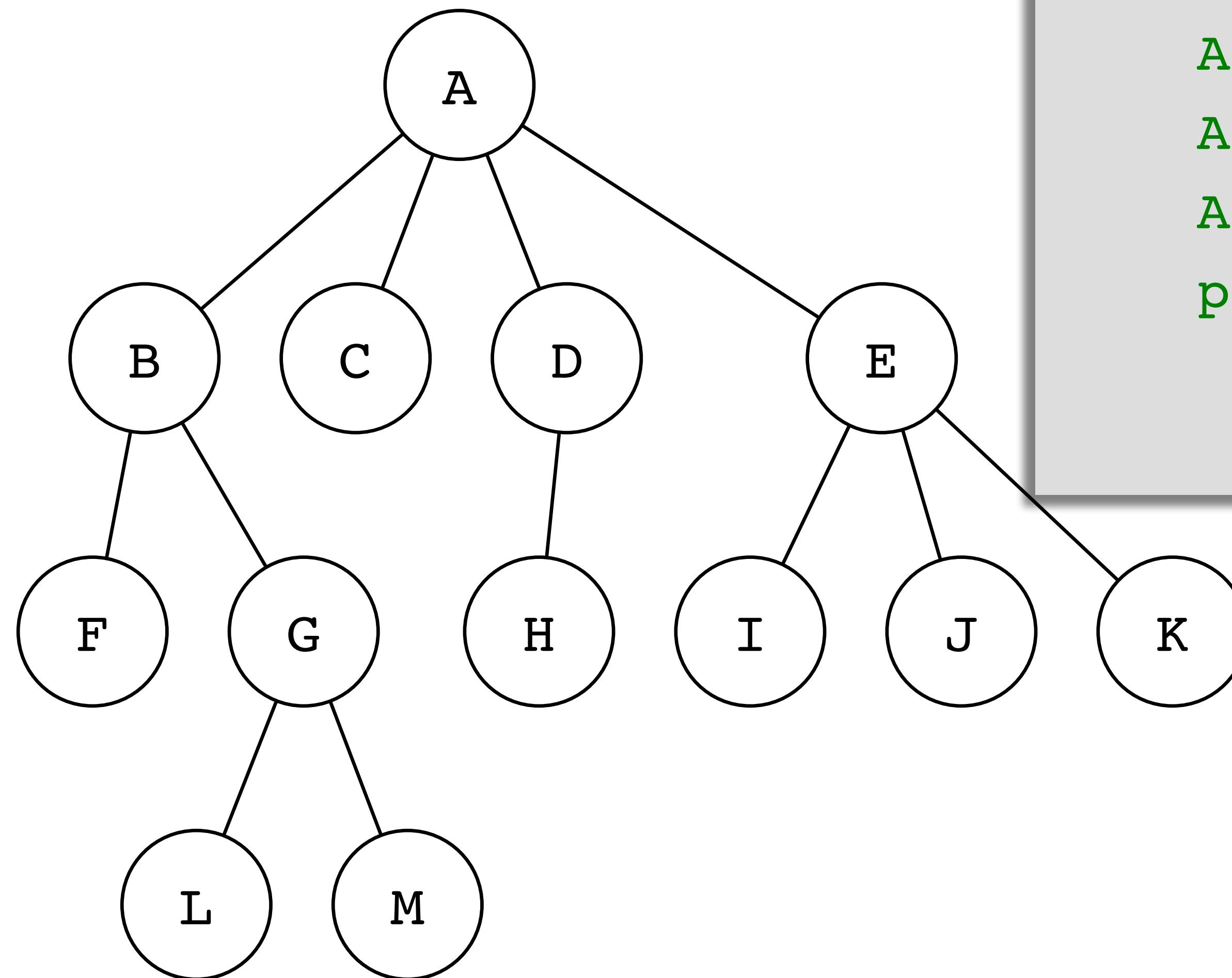
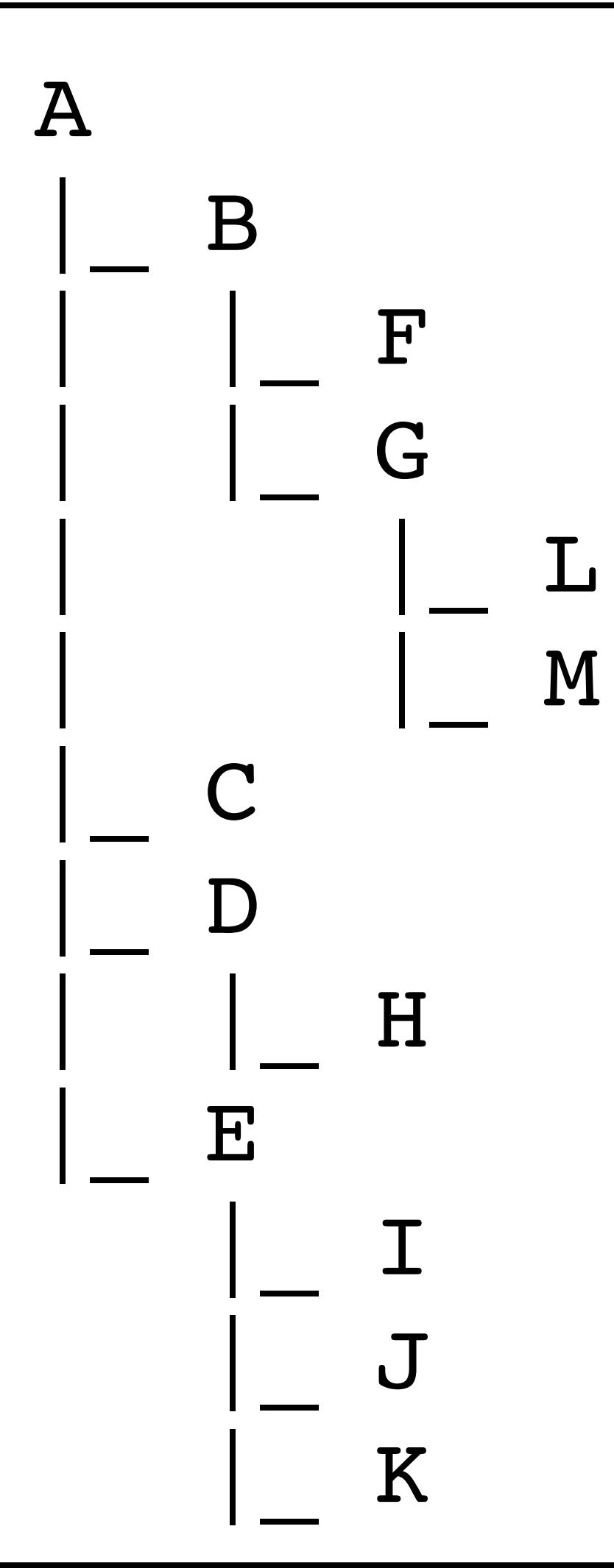


Représentation indentée (2)





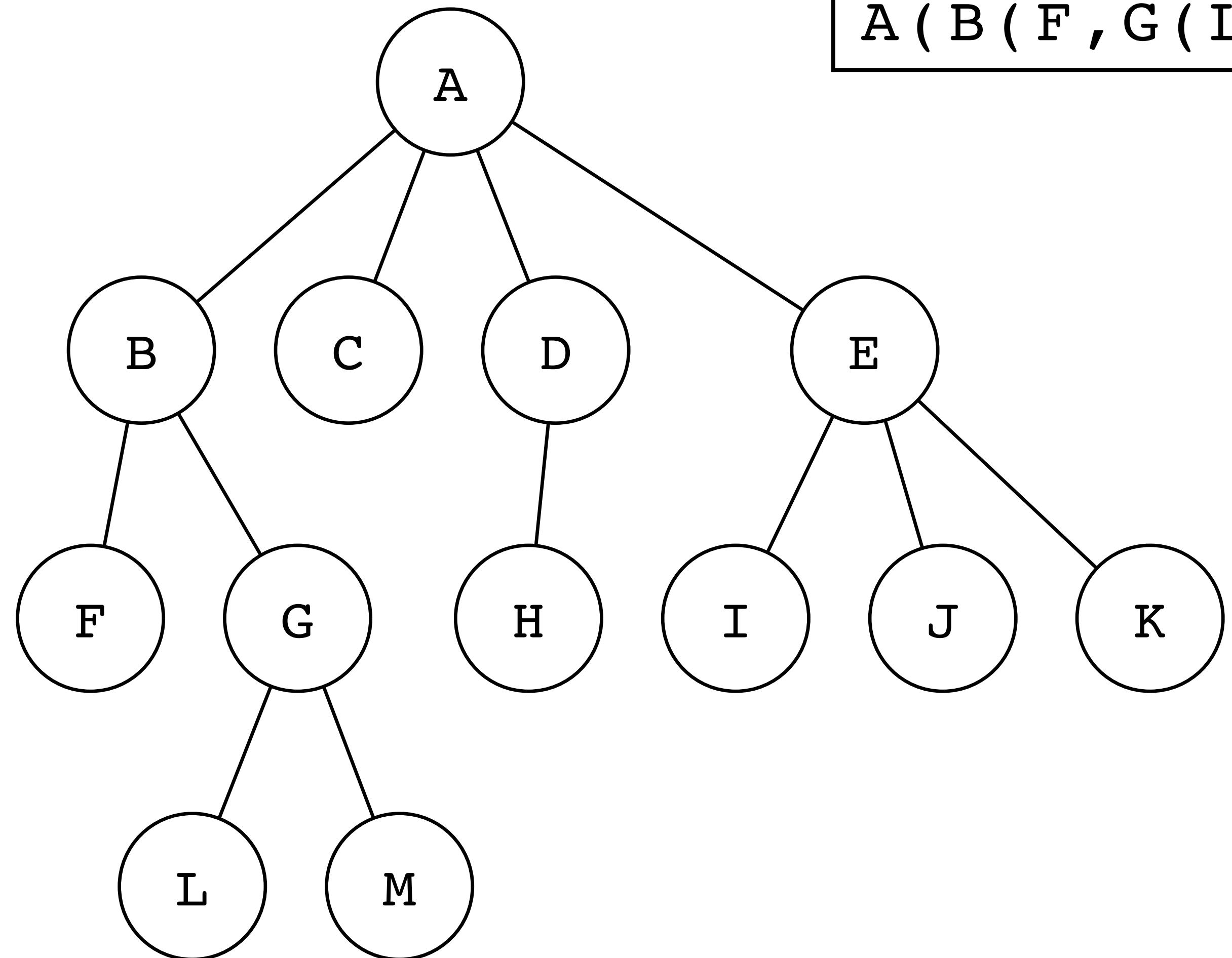
Représentation indentée (2)



```
fonction indenter(r, préfixe)
    si r != Ø
        Afficher préfixe
        Afficher r.etiquette
        Afficher saut de ligne
        pour tout enfant e de r
            pe ← préfixe modifié
            indenter(r,pe)
```



Listes imbriquées

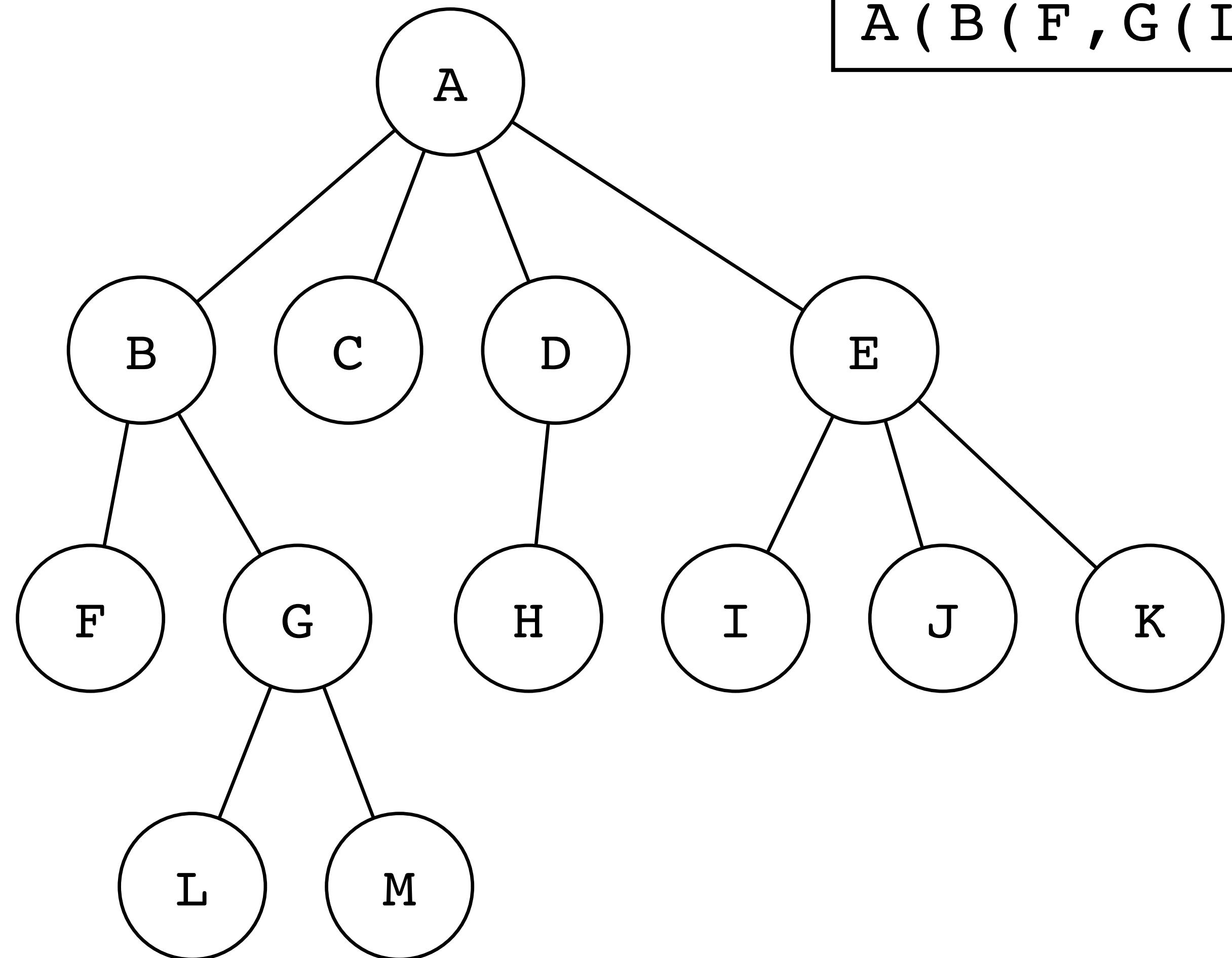


A(B(F , G(L , M)) , C , D(H) , E(I , J , K))

fonction imbriquer(r)



Listes imbriquées

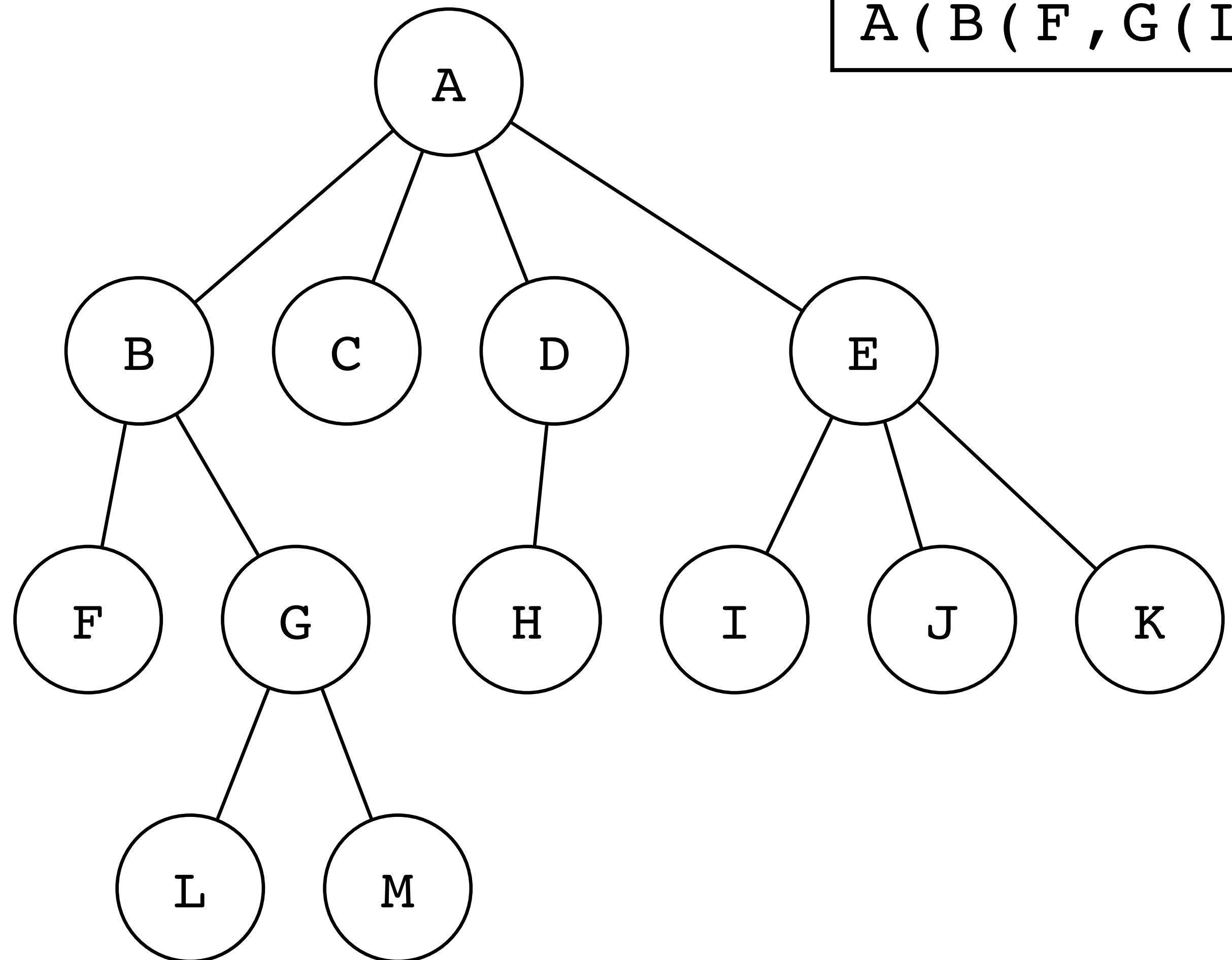


A(B(F , G(L , M)) , C , D(H) , E(I , J , K))

```
fonction imbriquer(r)
    si r != Ø
```



Listes imbriquées

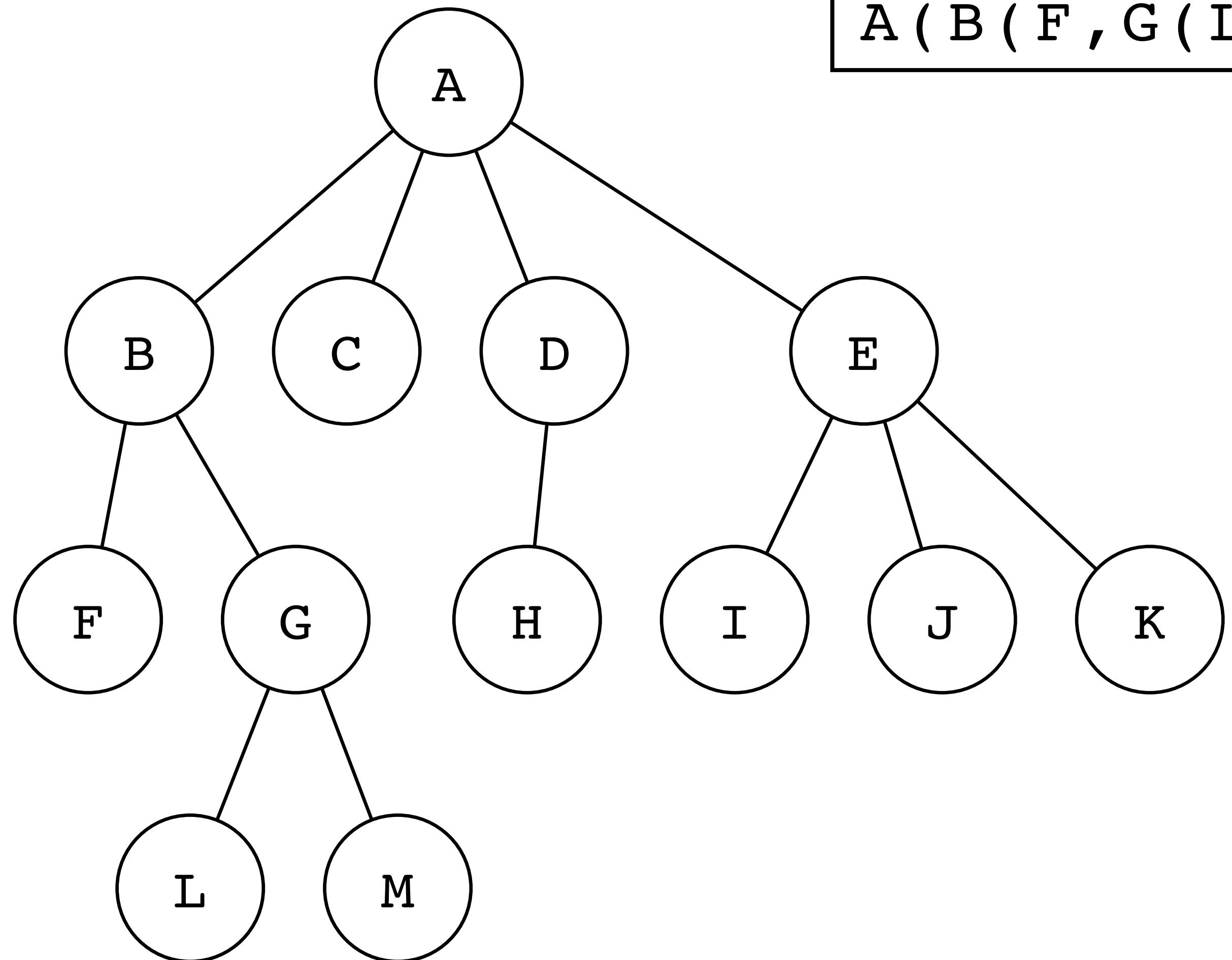


A(B(F , G(L , M)) , C , D(H) , E(I , J , K))

```
fonction imbriquer(r)
    si r != Ø
        Afficher r.etiquette
```



Listes imbriquées

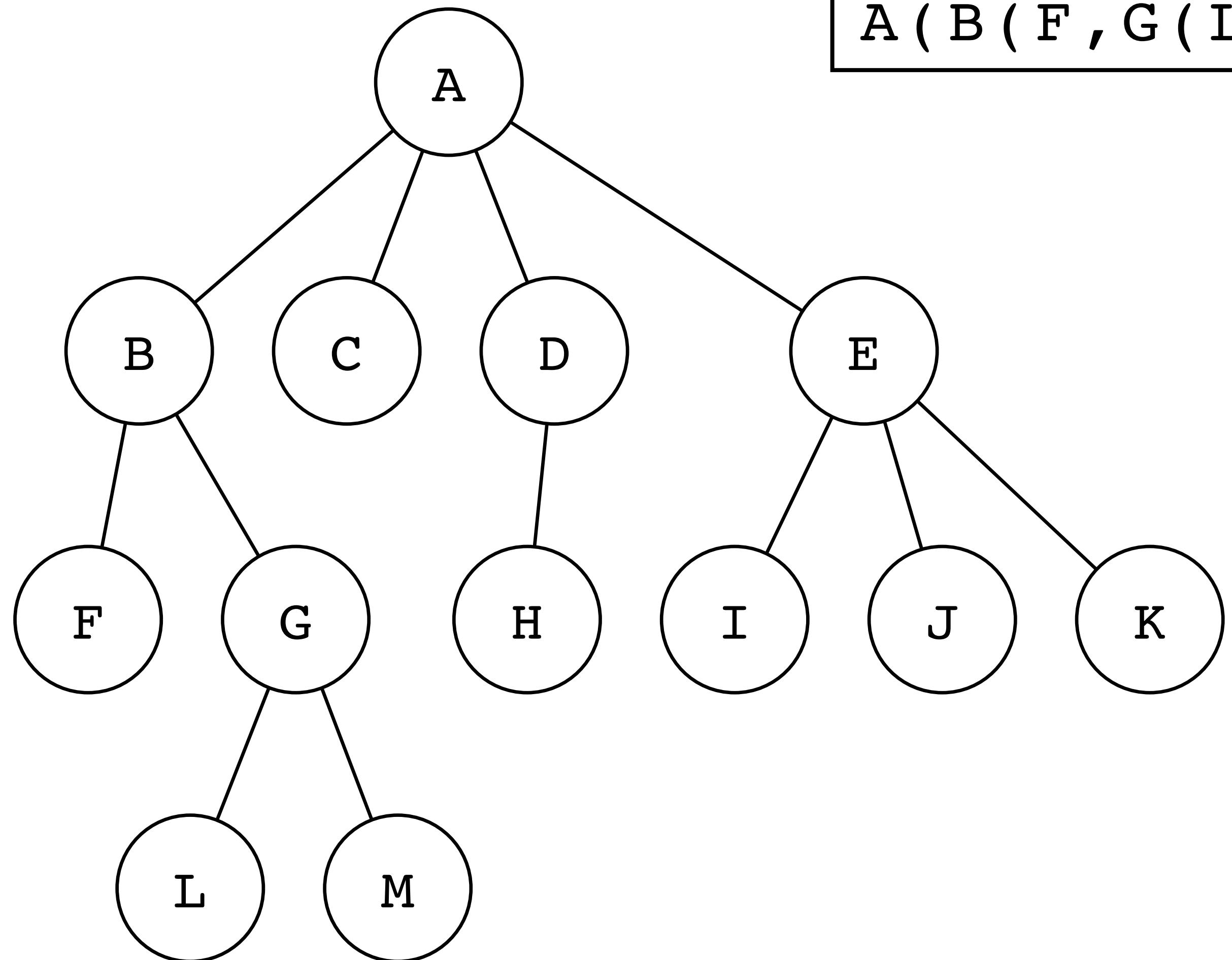


A(B(F , G(L , M)) , C , D(H) , E(I , J , K))

```
fonction imbriquer(r)
    si r != Ø
        Afficher r.etiquette
        si degré(r) > 0
```



Listes imbriquées

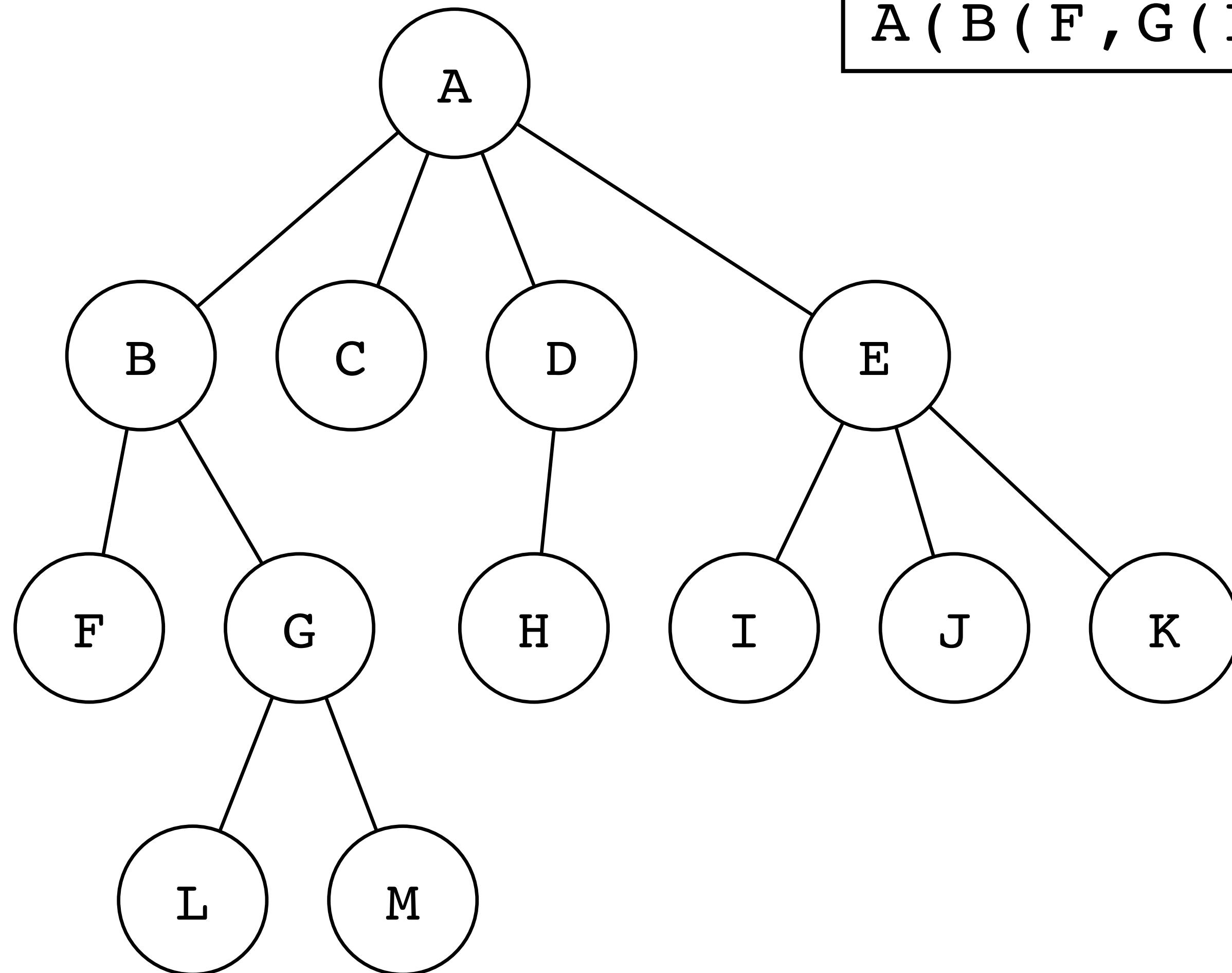


```
A( B( F , G( L , M ) ) , C , D( H ) , E( I , J , K ) )
```

```
fonction imbriquer(r)
    si r != Ø
        Afficher r.etiquette
        si degré(r) > 0
            Afficher "("
```



Listes imbriquées

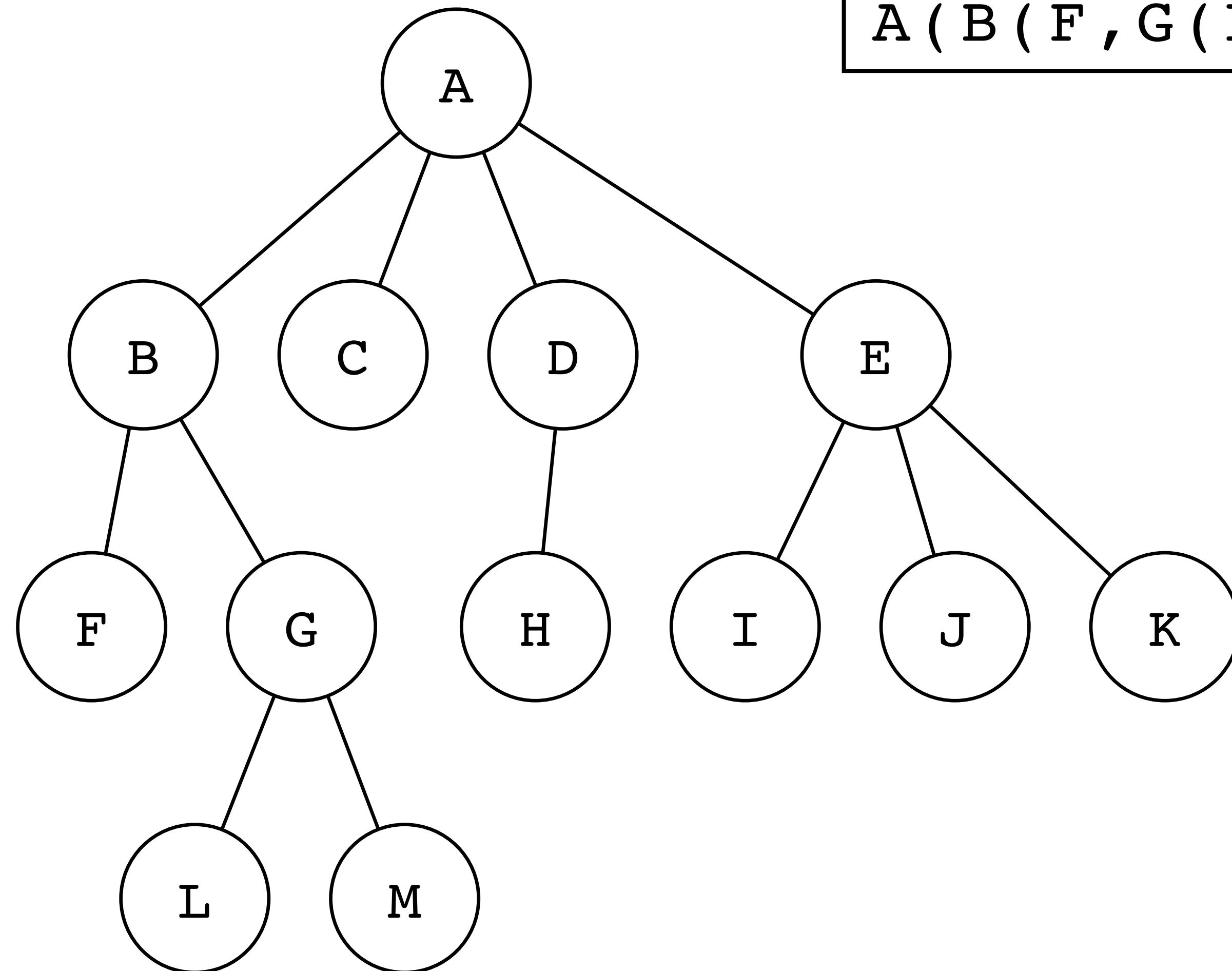


A(B(F , G(L , M)) , C , D(H) , E(I , J , K))

```
fonction imbriquer(r)
    si r != Ø
        Afficher r.etiquette
        si degré(r) > 0
            Afficher "("
            pour tout enfant e de r
                imbriquer(e)
```



Listes imbriquées

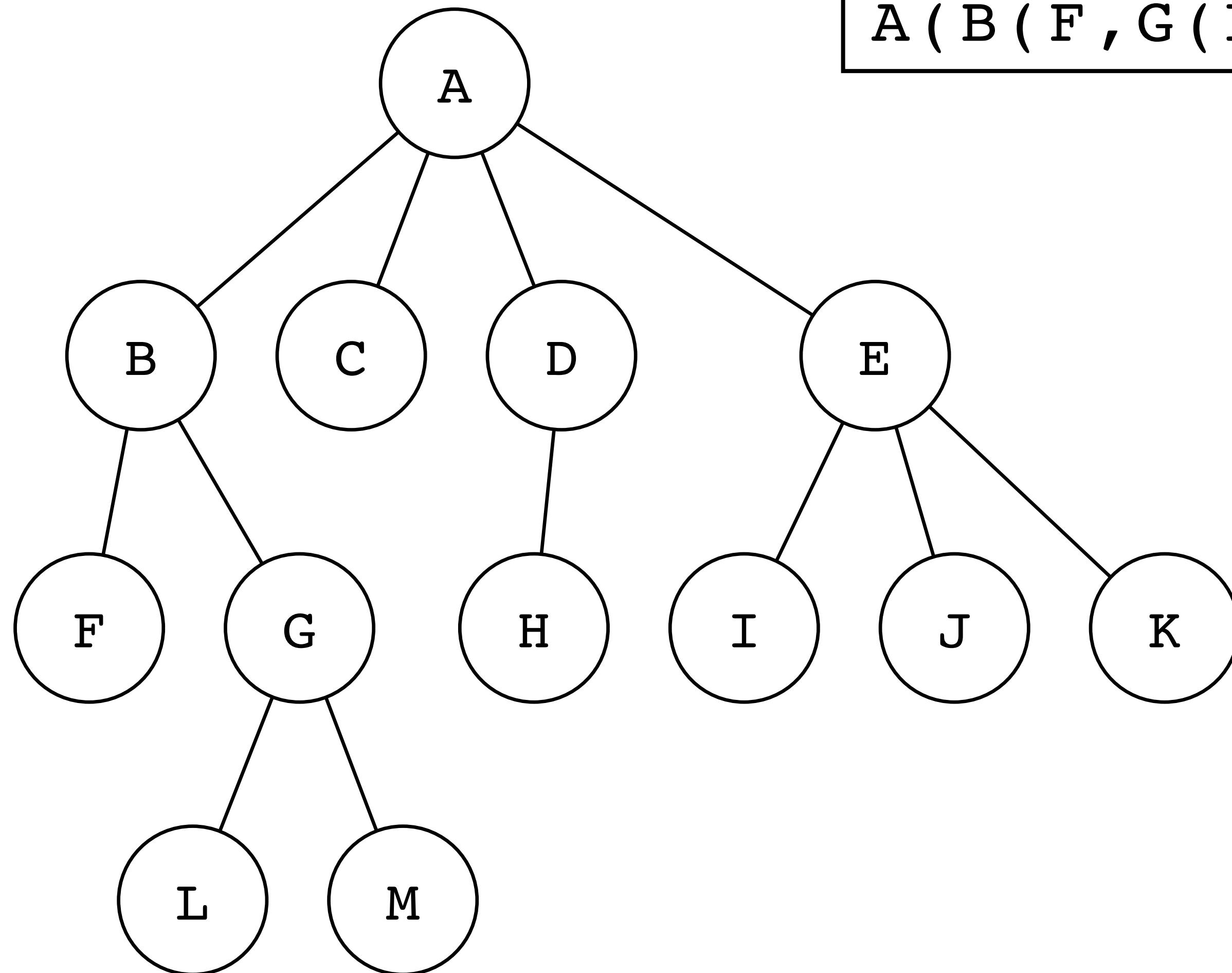


A(B(F , G(L , M)) , C , D(H) , E(I , J , K))

```
fonction imbriquer(r)
    si r != Ø
        Afficher r.etiquette
        si degré(r) > 0
            Afficher "("
            pour tout enfant e de r
                imbriquer(e)
                si e n'est pas le dernier
                    Afficher ","
```



Listes imbriquées



```
A( B( F, G( L, M ) ), C, D( H ), E( I, J, K ) )
```

```
fonction imbriquer(r)
    si r != Ø
        Afficher r.etiquette
        si degré(r) > 0
            Afficher "("
            pour tout enfant e de r
                imbriquer(e)
                si e n'est pas le dernier
                    Afficher ","
            Afficher ")"
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
```

```
struct Noeud {
    std::string etiquette;
    Noeud *parent;
    Noeud *aine;
    Noeud *puine;
};
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
```

```
    struct Noeud {
        std::string etiquette;
        Noeud *parent;
        Noeud *aine;
        Noeud *puine;
    };
}
```

```
Arbre::Arbre(std::string const &imbriquees) {
    std::istringstream s(imbriquees);
    from_string(s, nullptr, racine);
}
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {  
    out = new Noeud{read_label(s),  
                    parent, nullptr, nullptr};
```

```
struct Noeud {  
    std::string etiquette;  
    Noeud *parent;  
    Noeud *aine;  
    Noeud *puine;  
};
```

```
Arbre::Arbre(std::string const &imbriquees) {  
    std::istringstream s(imbriquees);  
    from_string(s, nullptr, racine);  
}
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
    out = new Noeud{read_label(s),
                    parent, nullptr, nullptr};

    Noeud *n = out;
    char c;
    while (s.get(c)) {
```

```
struct Noeud {
    std::string etiquette;
    Noeud *parent;
    Noeud *aine;
    Noeud *puine;
};
```

```
Arbre::Arbre(std::string const &imbriquees) {
    std::istringstream s(imbriquees);
    from_string(s, nullptr, racine);
}
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
    out = new Noeud{read_label(s),
                    parent, nullptr, nullptr};

    Noeud *n = out;
    char c;
    while (s.get(c)) {
        switch (c) {
            case ',':
                n->puine = new Noeud{read_label(s),
                                      parent, nullptr, nullptr};
                n = n->puine;
                break;
        }
    }
}
```

```
struct Noeud {
    std::string etiquette;
    Noeud *parent;
    Noeud *aine;
    Noeud *puine;
};
```

```
Arbre::Arbre(std::string const &imbriquees) {
    std::istringstream s(imbriquees);
    from_string(s, nullptr, racine);
}
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
    out = new Noeud{read_label(s),
                    parent, nullptr, nullptr};

    Noeud *n = out;
    char c;
    while (s.get(c)) {
        switch (c) {
            case ',':
                n->puine = new Noeud{read_label(s),
                                      parent, nullptr, nullptr};
                n = n->puine;
                break;
            case '(':
                from_string(s, n, n->aine);
                break;
        }
    }
}
```

```
struct Noeud {
    std::string etiquette;
    Noeud *parent;
    Noeud *aine;
    Noeud *puine;
};
```

```
Arbre::Arbre(std::string const &imbriquees) {
    std::istringstream s(imbriquees);
    from_string(s, nullptr, racine);
}
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
    out = new Noeud{read_label(s),
                    parent, nullptr, nullptr};

    Noeud *n = out;
    char c;
    while (s.get(c)) {
        switch (c) {
            case ',':
                n->puine = new Noeud{read_label(s),
                                      parent, nullptr, nullptr};
                n = n->puine;
                break;
            case '(':
                from_string(s, n, n->aine);
                break;
            case ')':
                return;
        }
    }
}
```

```
struct Noeud {
    std::string etiquette;
    Noeud *parent;
    Noeud *aine;
    Noeud *puine;
};
```

```
Arbre::Arbre(std::string const &imbriquees) {
    std::istringstream s(imbriquees);
    from_string(s, nullptr, racine);
}
```



Arbre depuis un liste imbriquée

```
void from_string(std::istringstream &s, Noeud *parent, Noeud *&out) {
    out = new Noeud{read_label(s),
                    parent, nullptr, nullptr};

    Noeud *n = out;
    char c;
    while (s.get(c)) {
        switch (c) {
            case ',':
                n->puine = new Noeud{read_label(s),
                                      parent, nullptr, nullptr};
                n = n->puine;
                break;
            case '(':
                from_string(s, n, n->aine);
                break;
            case ')':
                return;
            default :
                throw bad_expression();
        }
    }
}
```

```
struct Noeud {
    std::string etiquette;
    Noeud *parent;
    Noeud *aine;
    Noeud *puine;
};
```

```
Arbre::Arbre(std::string const &imbriquees) {
    std::istringstream s(imbriquees);
    from_string(s, nullptr, racine);
}
```



Exercices

- Dessinez les graphes représentés par les listes suivantes

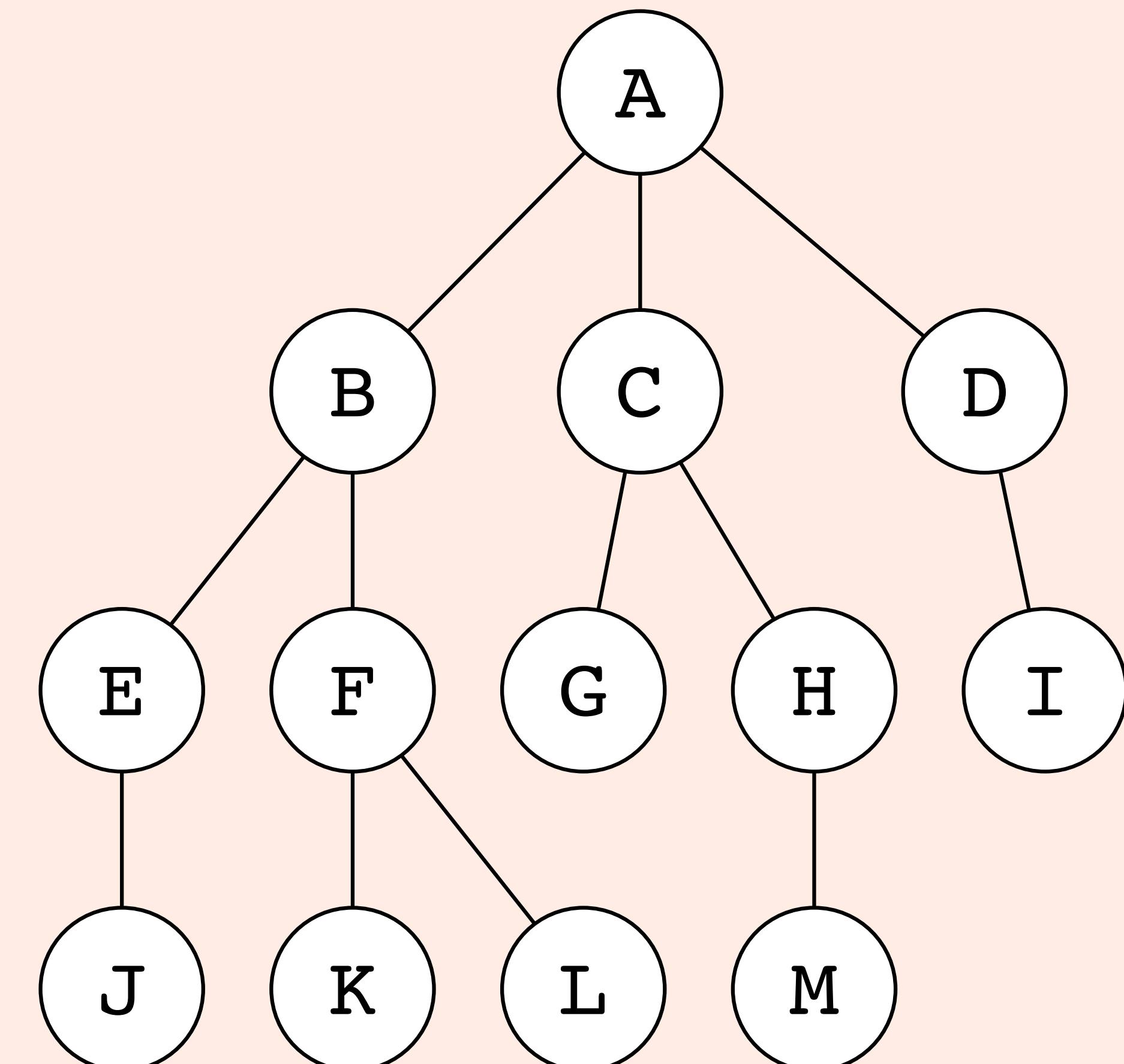
$A(B(E(J), F(K, L)), C(G, H(M))), D(I))$

$A(B(D(L), F(I), G(H, K)), C(E(M), J))$



Solution (1)

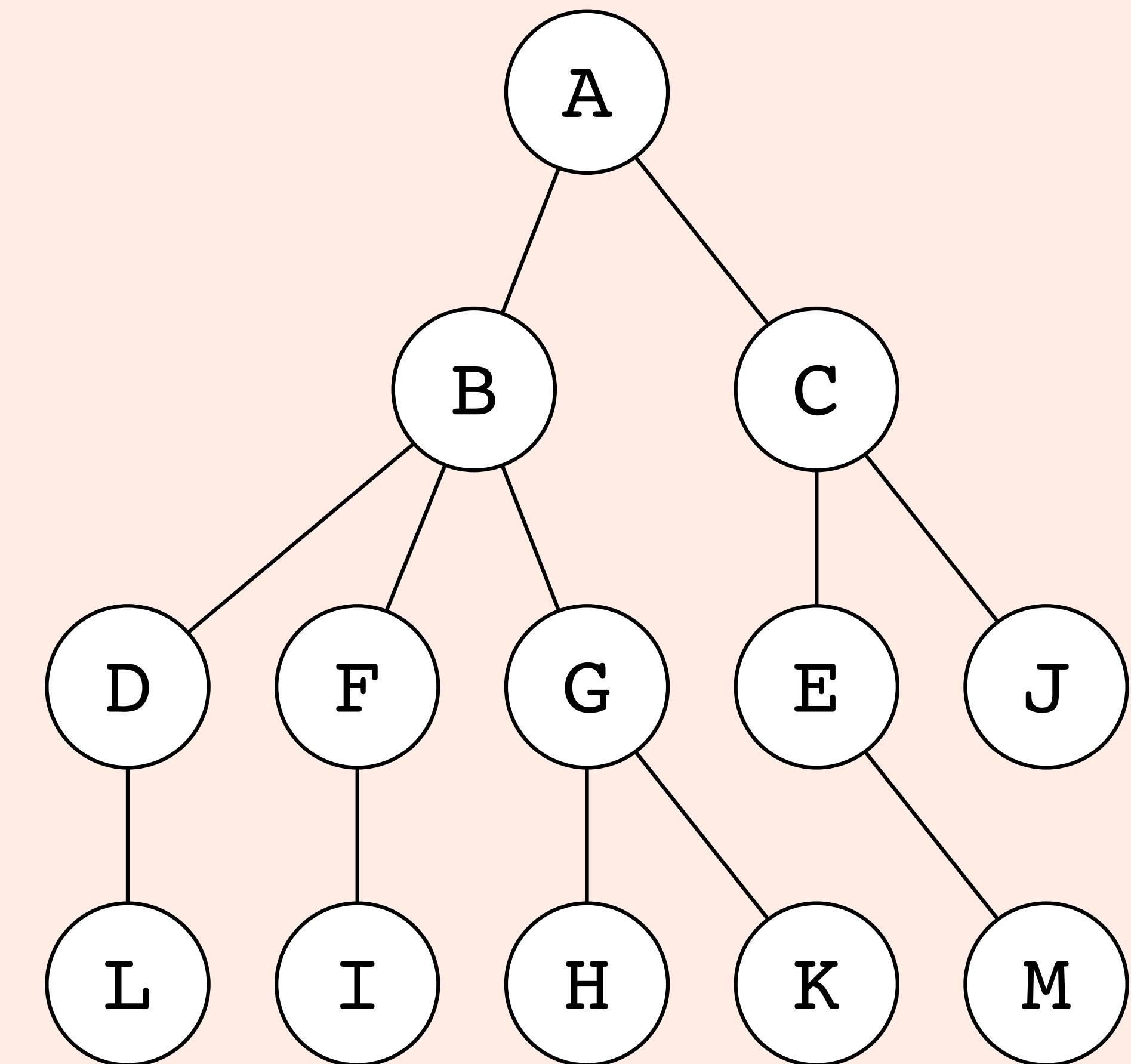
A(B(E(J), F(K, L)), C(G, H(M)), D(I))





Solution (2)

A(B(D(L), F(I), G(H, K)), C(E(M), J))



Itération sur un arbre



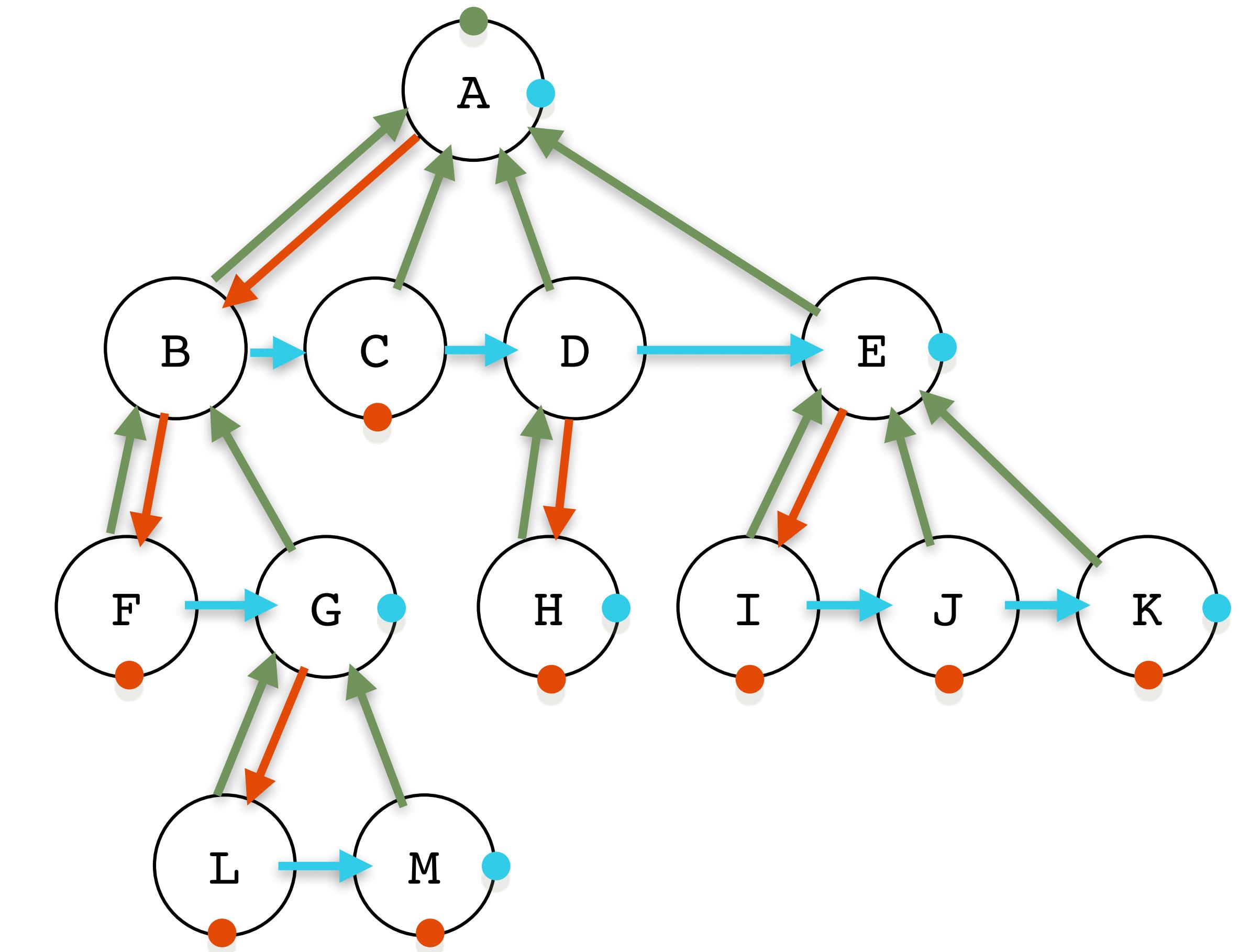


Itération

- Itérer = parcourir avec **début**, **suivant**, **fin**

```
fonction profondeur (r, fn)
n ← début(r)
tant que n != fin(n)
    fn(n)
    n ← suivant(n)
```

```
structure Noeud<T>
    T étiquette
    Noeud* parent
    Noeud* ainé
    Noeud* puiné
```



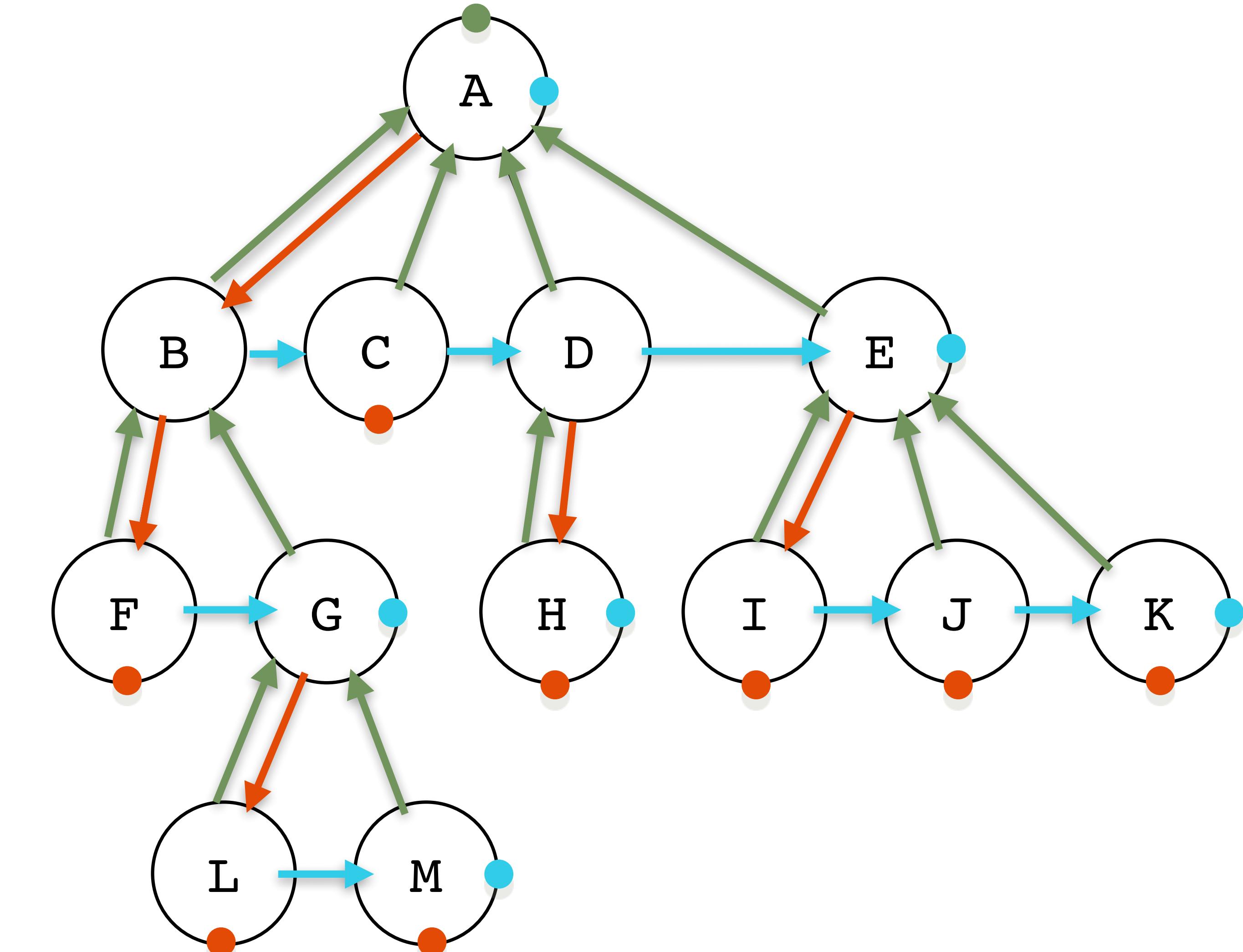


Itération en pré-ordre

fonction début(r)

fonction fin(r)

fonction suivant(r)



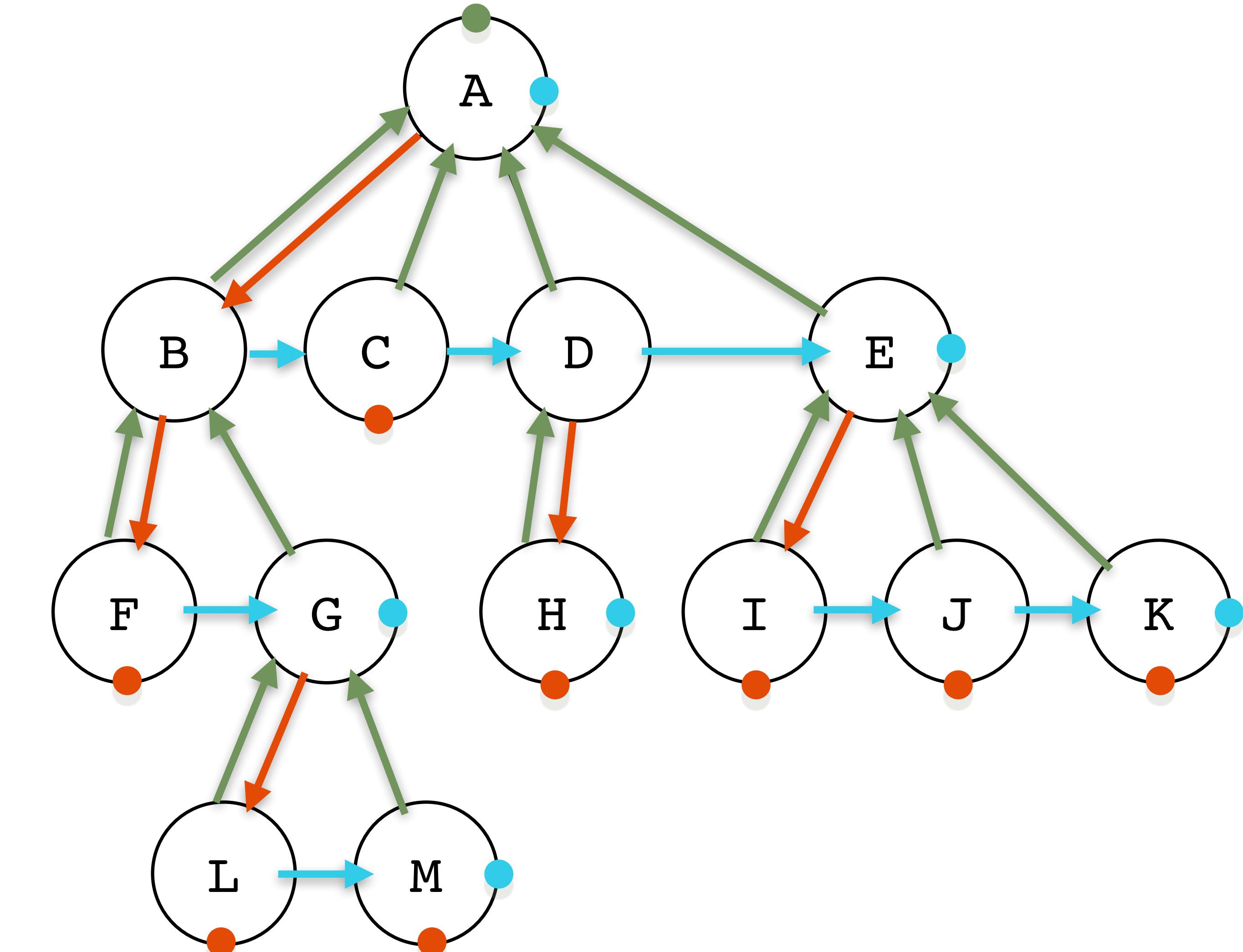


Itération en pré-ordre

```
fonction début(r)
    retourner r
```

```
fonction fin(r)
```

```
fonction suivant(r)
```



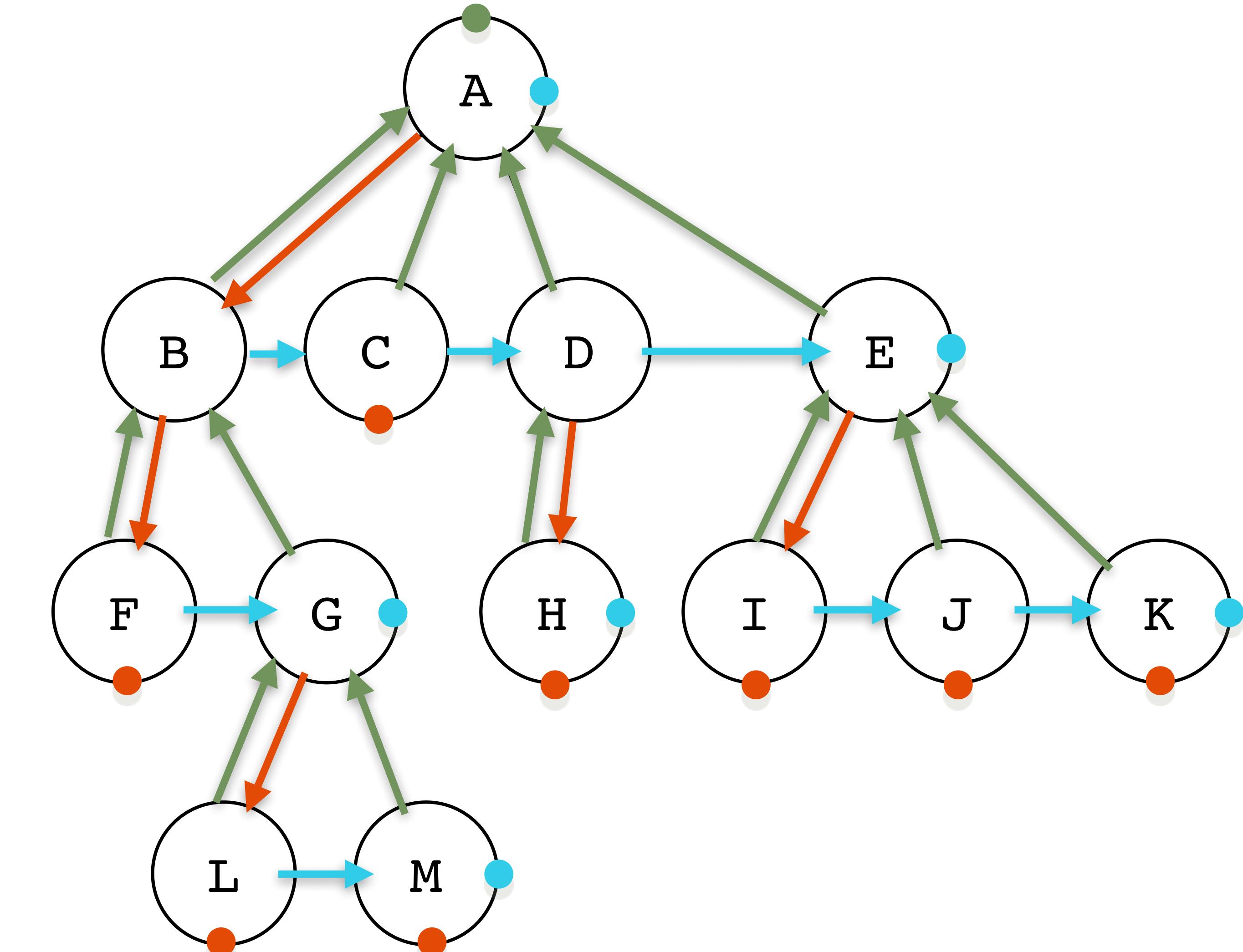


Itération en pré-ordre

```
fonction début(r)
    retourner r
```

```
fonction fin(r)
    retourner Ø
```

```
fonction suivant(r)
```



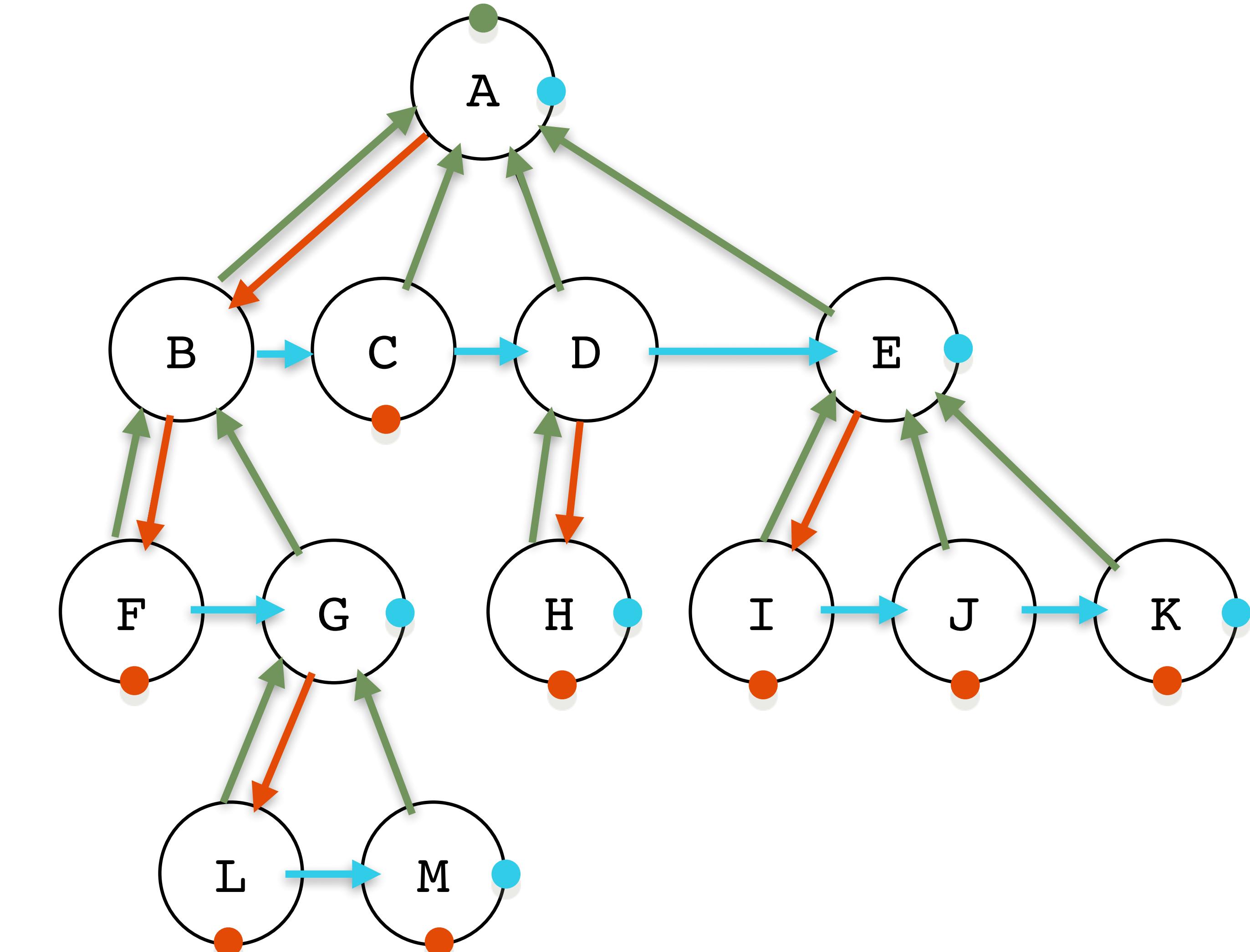


Itération en pré-ordre

```
fonction début(r)
    retourner r
```

```
fonction fin(r)
    retourner Ø
```

```
fonction suivant(r)
    si r.ainé != Ø
        retourner r.ainé
```



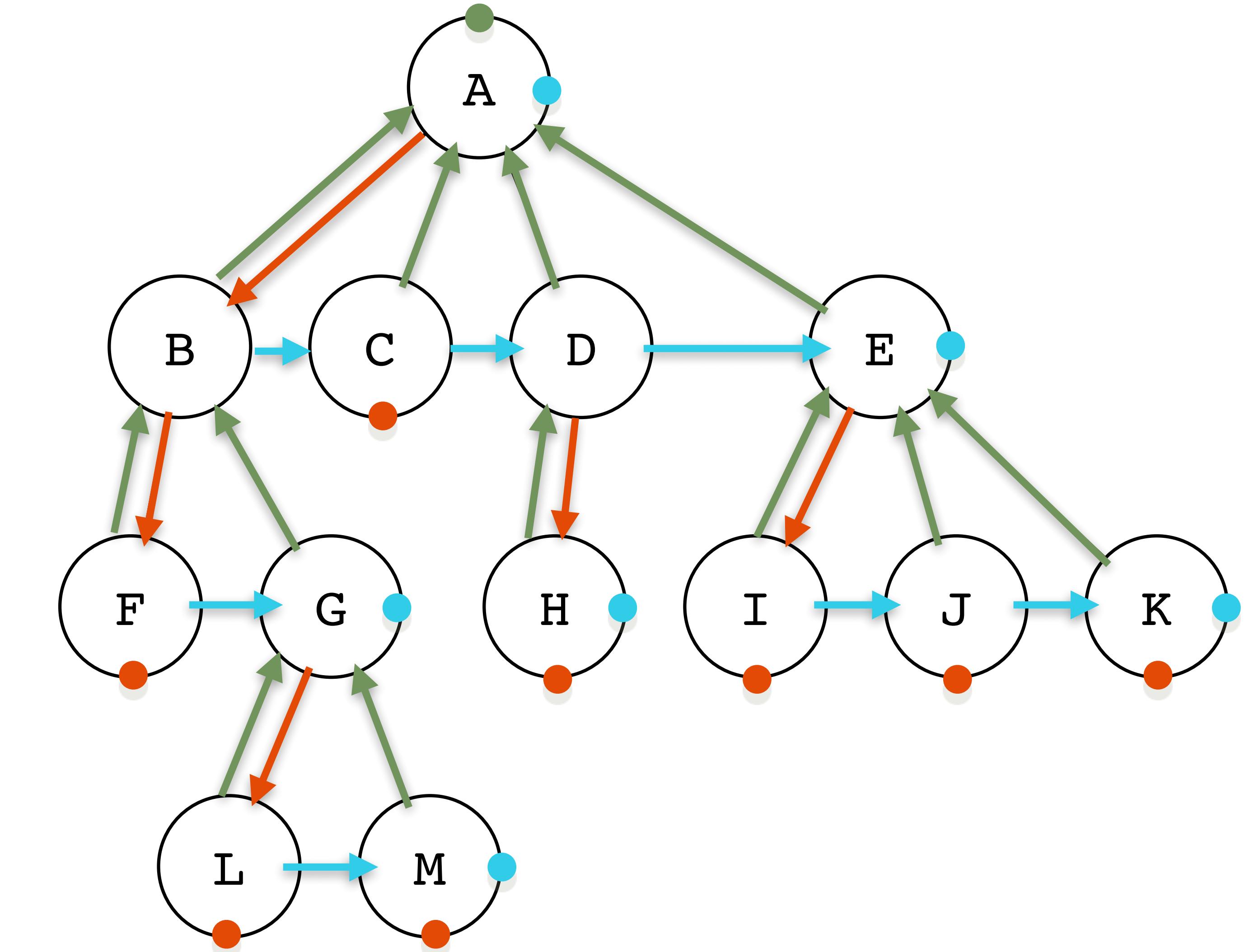


Itération en pré-ordre

```
fonction début(r)
    retourner r
```

```
fonction fin(r)
    retourner Ø
```

```
fonction suivant(r)
    si r.ainé != Ø
        retourner r.ainé
    sinon
        tant que r.puiné == Ø
            et r.parent != Ø
            r ← r.parent
        retourner r.puiné
```



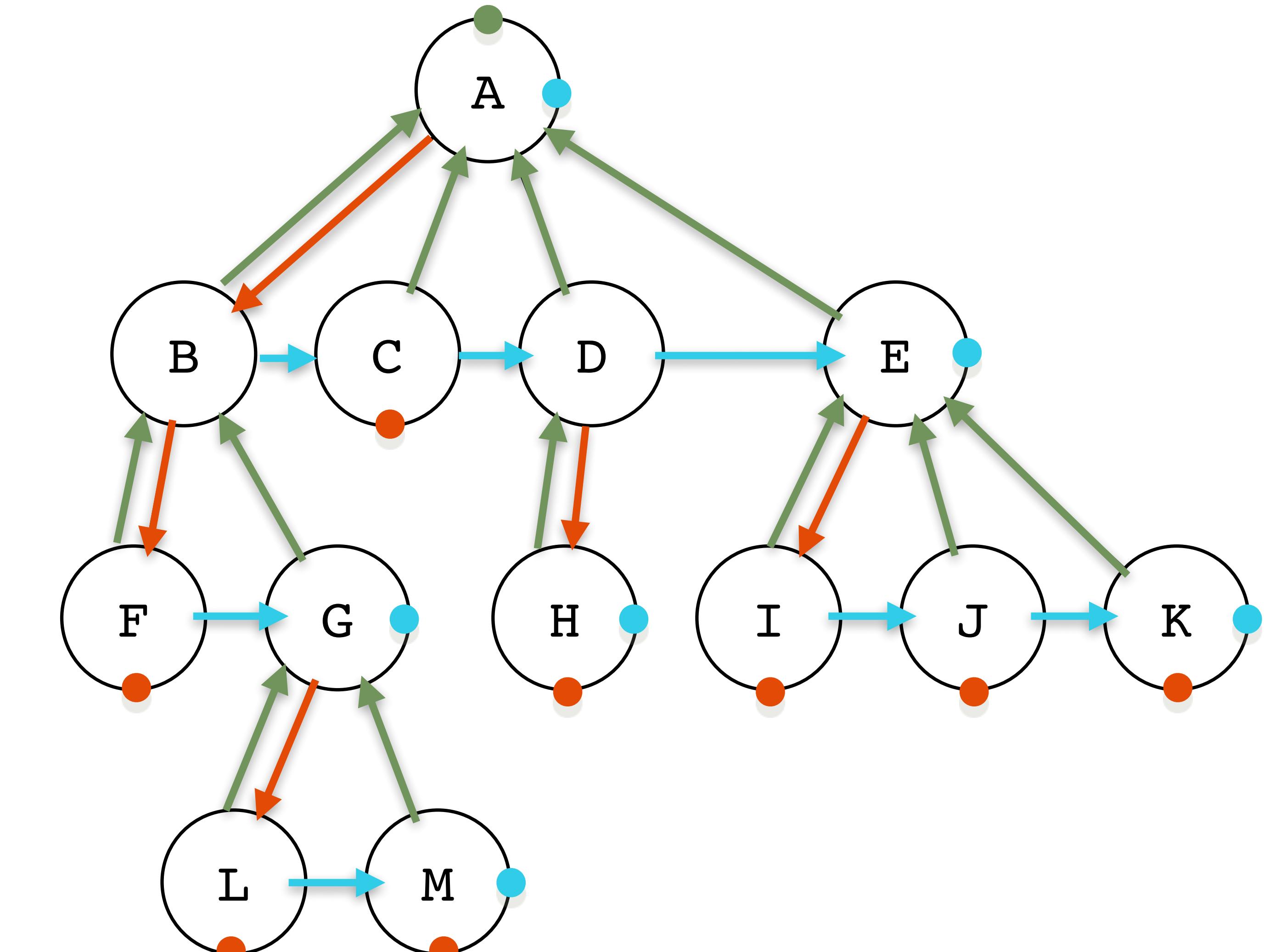


Itération en post-ordre

fonction début (r)

fonction fin(r)

fonction suivant(r)



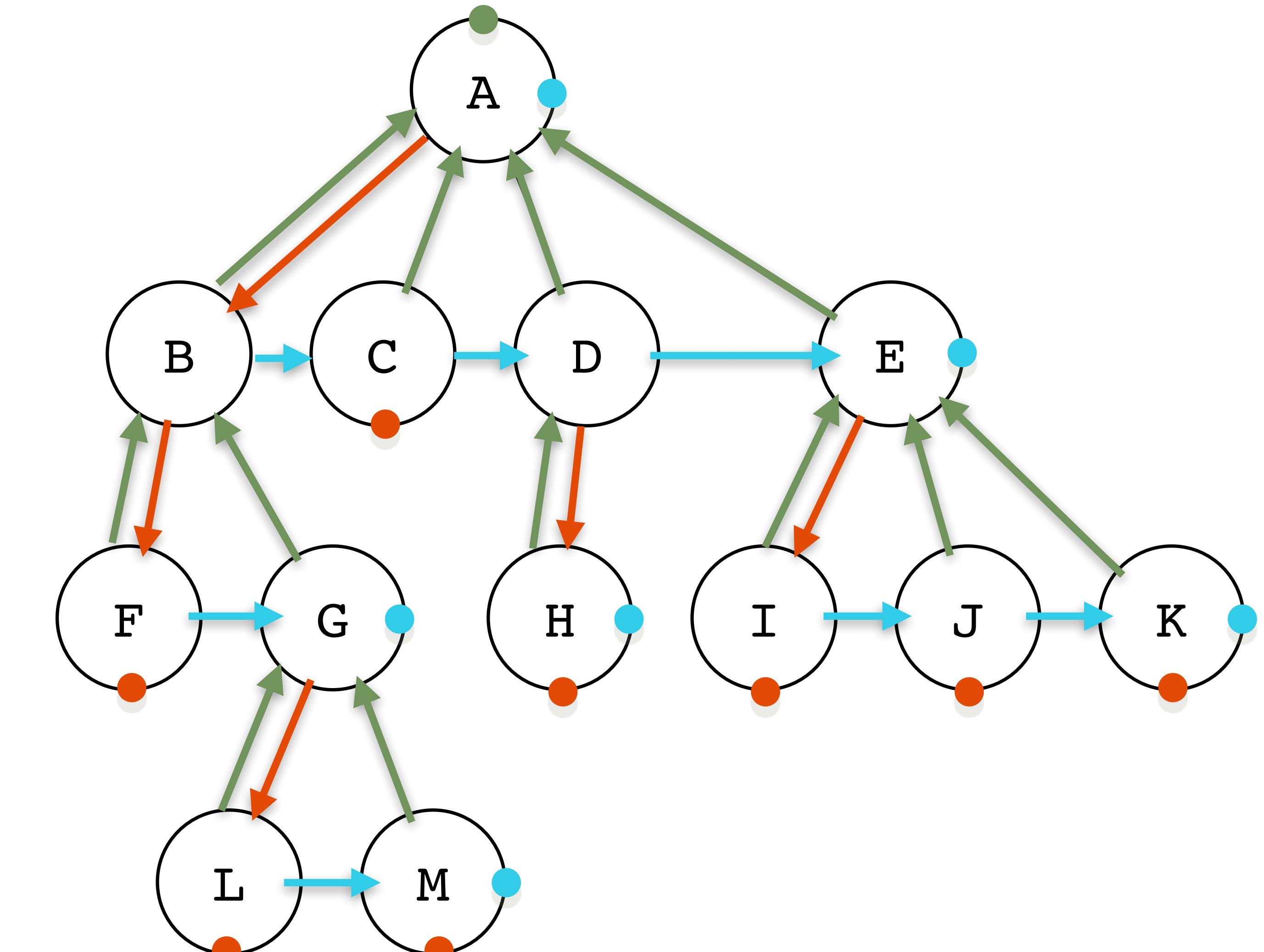


Itération en post-ordre

```
fonction début (r)
    si r == Ø, retourner Ø
    tant que r.ainé != Ø
        r ← r.ainé
    retourner r
```

```
fonction fin(r)
```

```
fonction suivant(r)
```



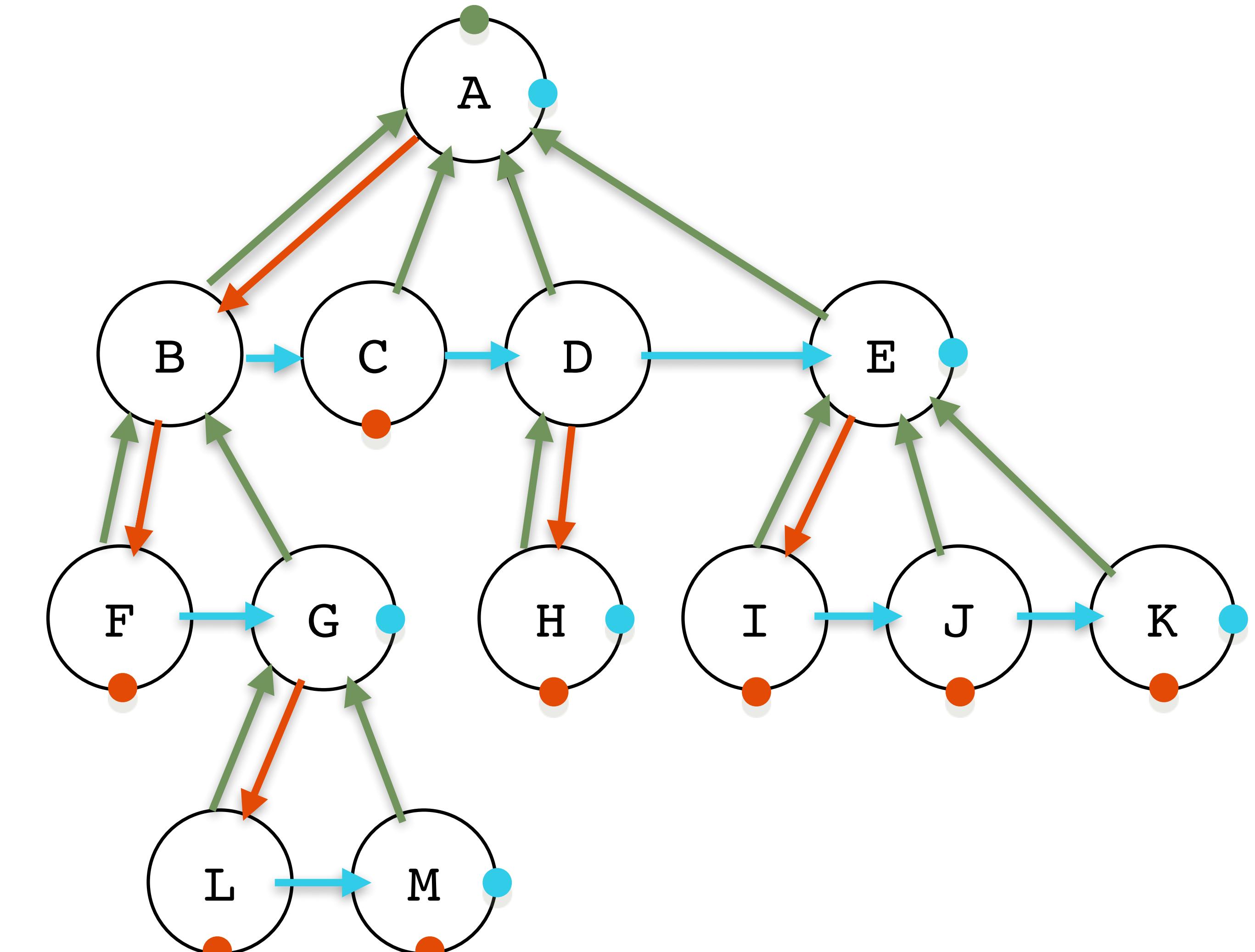


Itération en post-ordre

```
fonction début (r)
    si r == Ø, retourner Ø
    tant que r.ainé != Ø
        r ← r.ainé
    retourner r
```

```
fonction fin(r)
    retourner Ø
```

```
fonction suivant(r)
```



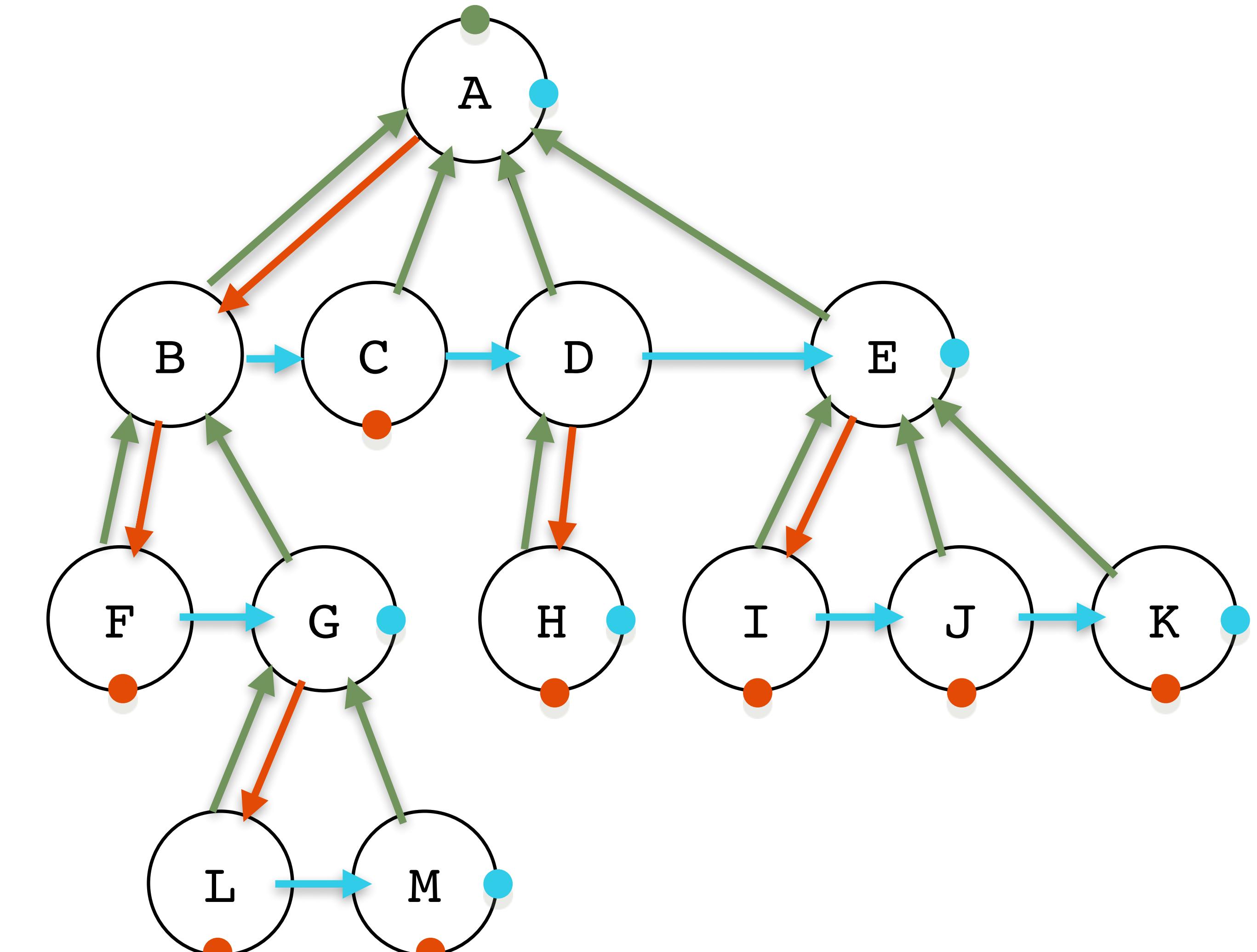


Itération en post-ordre

```
fonction début (r)
    si r == Ø, retourner Ø
    tant que r.ainé != Ø
        r ← r.ainé
    retourner r
```

```
fonction fin(r)
    retourner Ø
```

```
fonction suivant(r)
    si r.puiné != Ø
        retourner début(r.puiné)
```



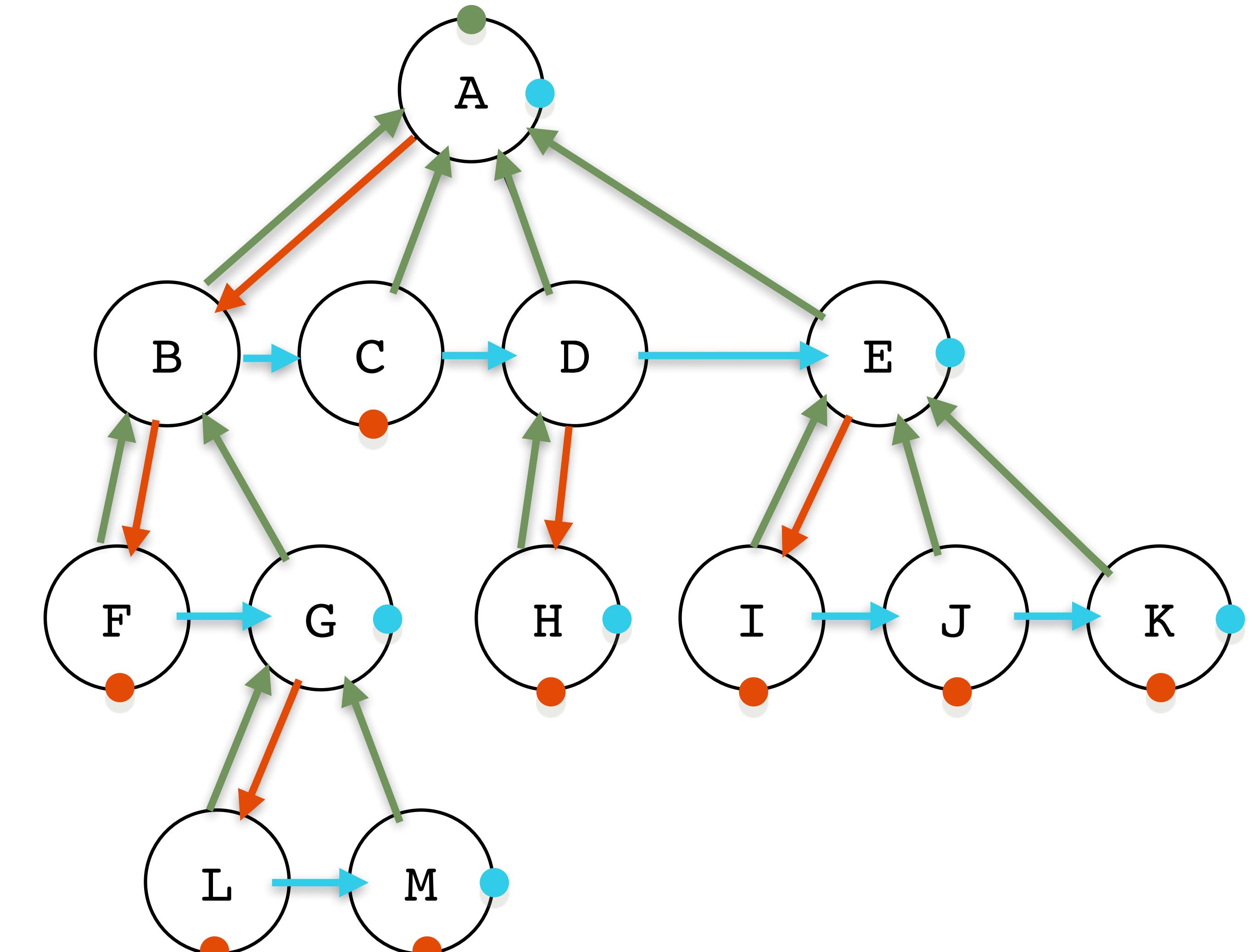


Itération en post-ordre

```
fonction début (r)
    si r == Ø, retourner Ø
    tant que r.ainé != Ø
        r ← r.ainé
    retourner r
```

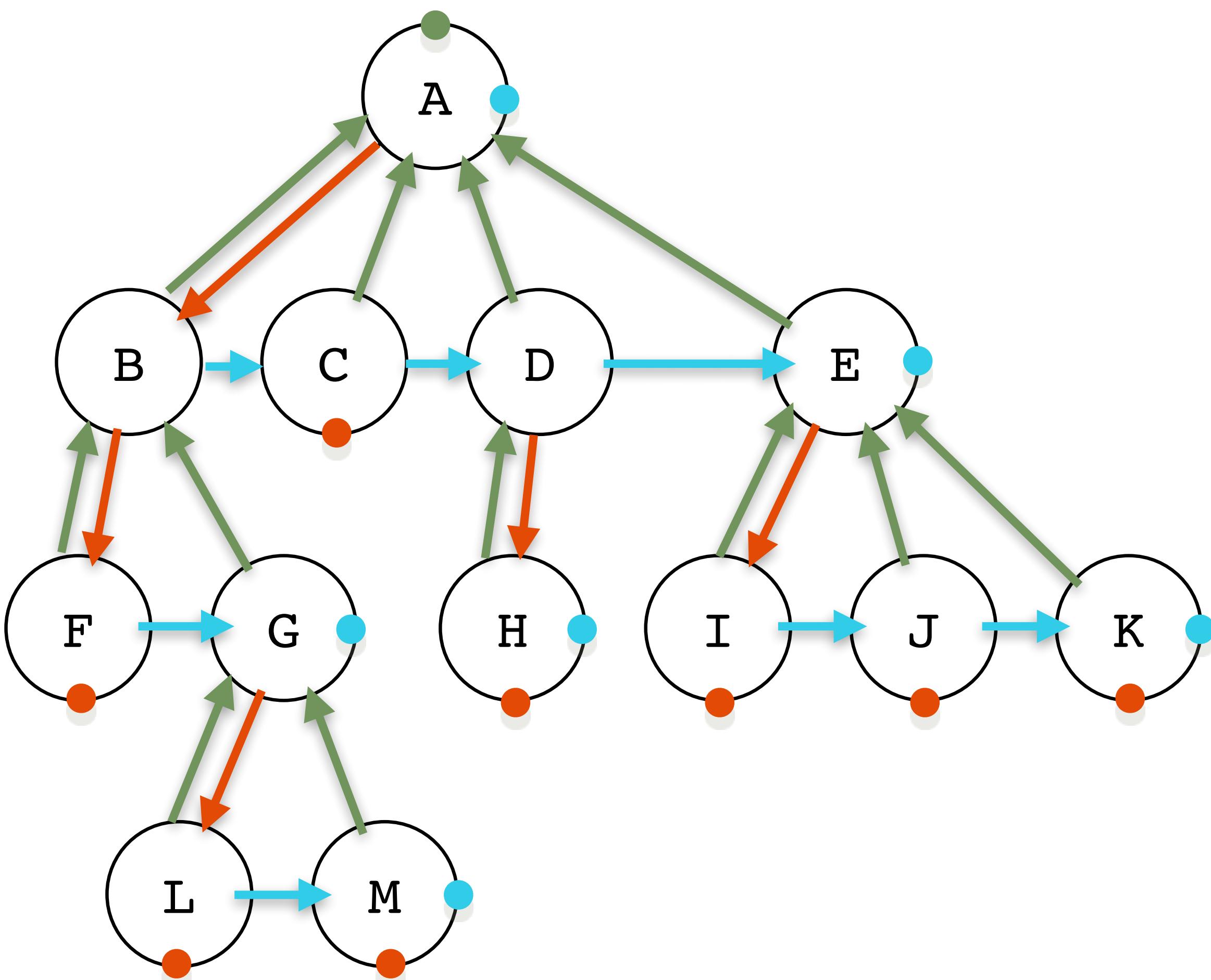
```
fonction fin(r)
    retourner Ø
```

```
fonction suivant(r)
    si r.puiné != Ø
        retourner début(r.puiné)
    sinon
        retourner r.parent
```



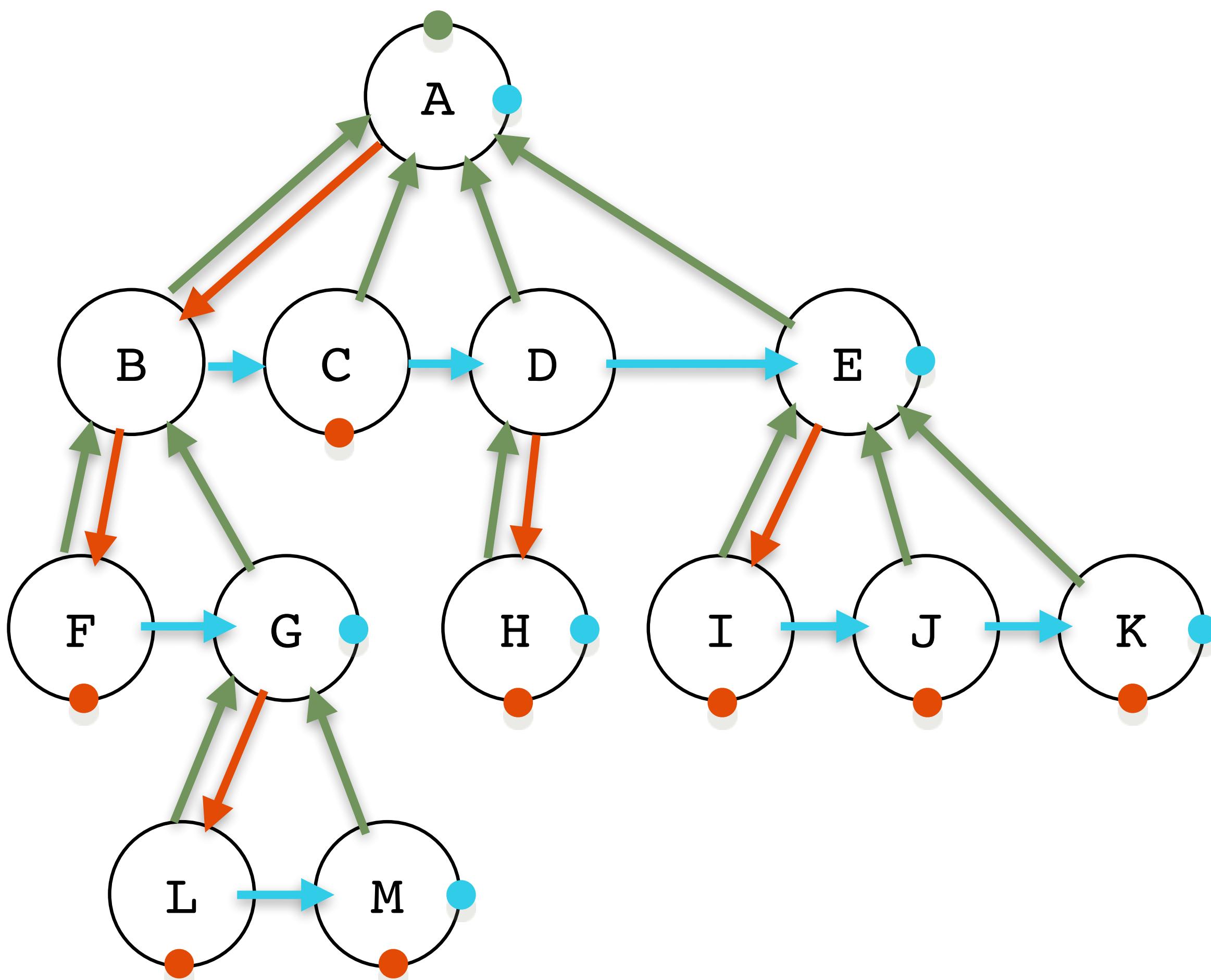


Traçons ces 2 parcours





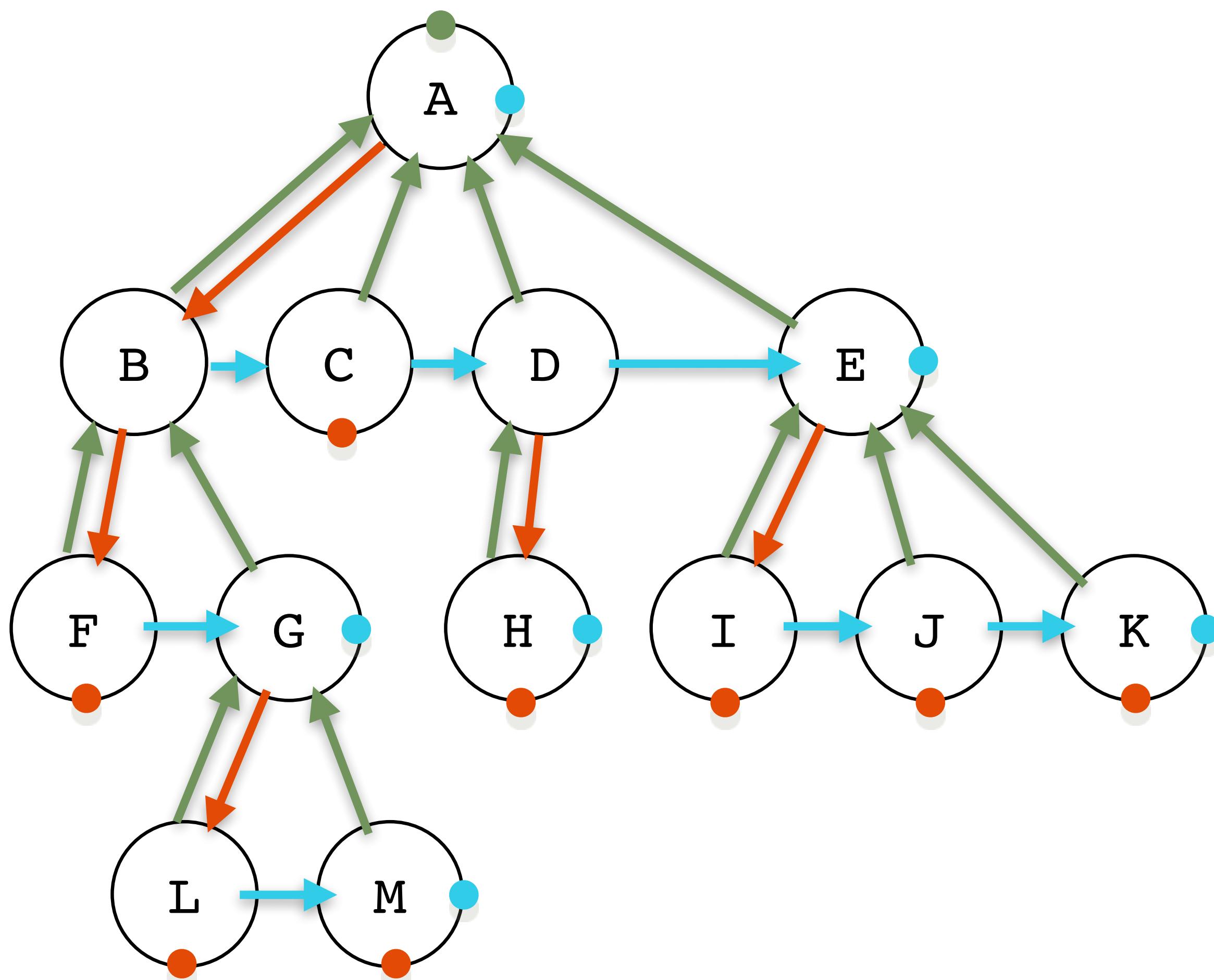
Traçons ces 2 parcours



Pré: A-B-F-G-L-M-G-B-C-D-H-D-E-I-J-K-E-A



Traçons ces 2 parcours



Pré: A-B-F-G-L-M-G-B-C-D-H-D-E-I-J-K-E-A

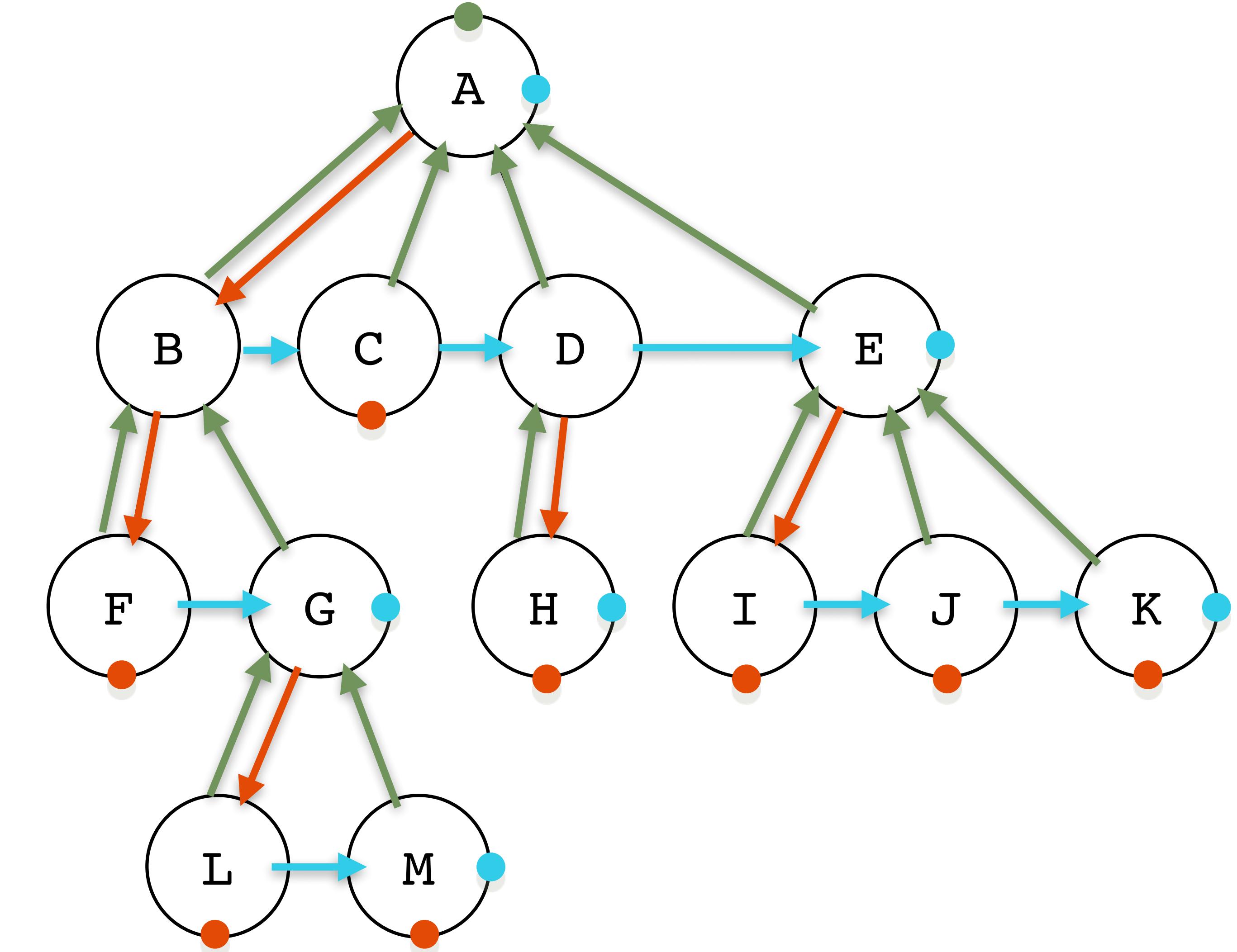
Post: A-B-F-G-L-M-G-B-C-D-H-D-E-I-J-K-E-A



Itération en largeur

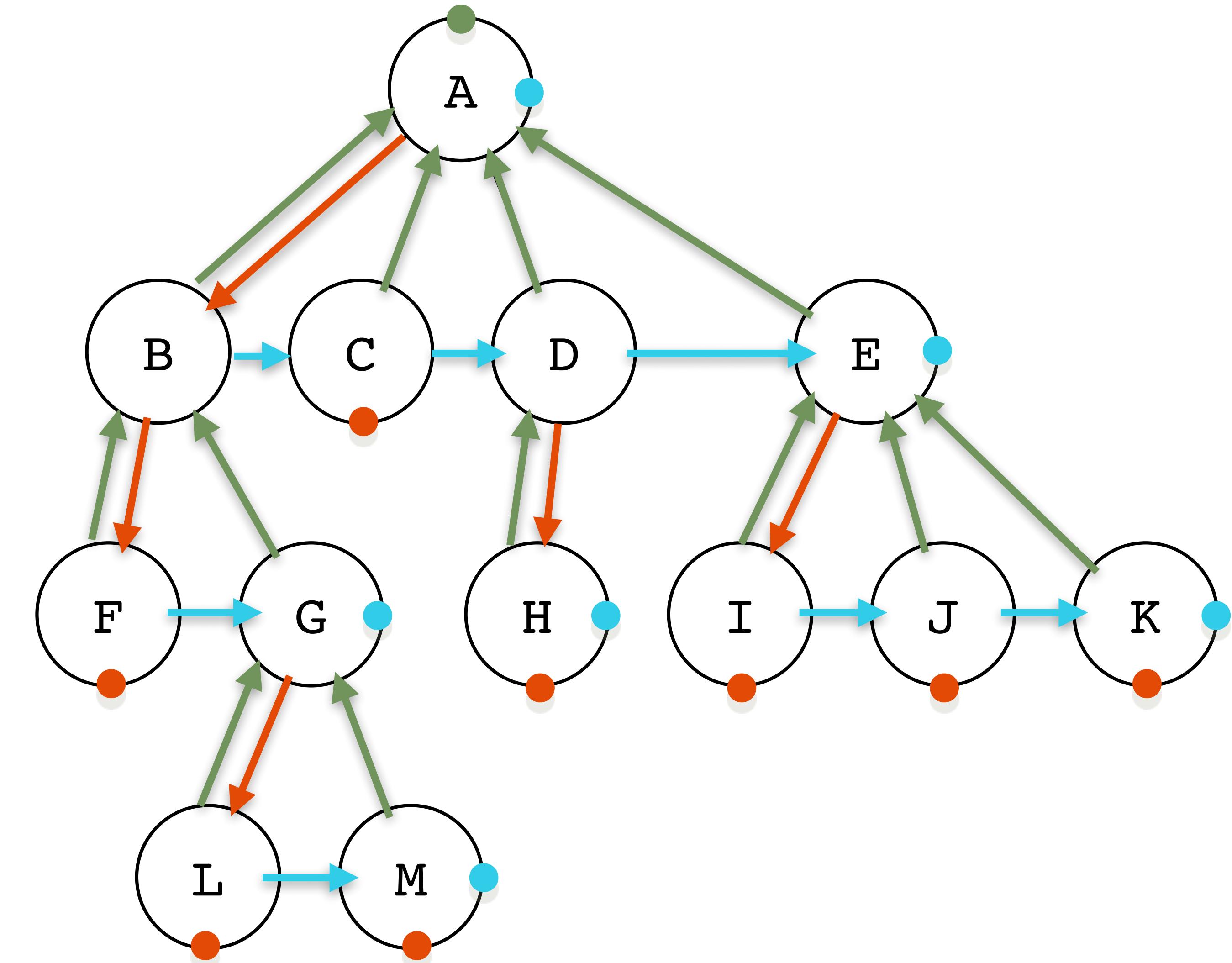
Comment aller du noeud K au noeud L en itérant, donc en ne suivant que des liens disponibles ci-contre ?

K-E-A-B-F-G-L





Itération en largeur (2)



Conclusion : on n'itère pas
en largeur



Itération en largeur (2)

A-B-C-D-E-A-B-F-G-

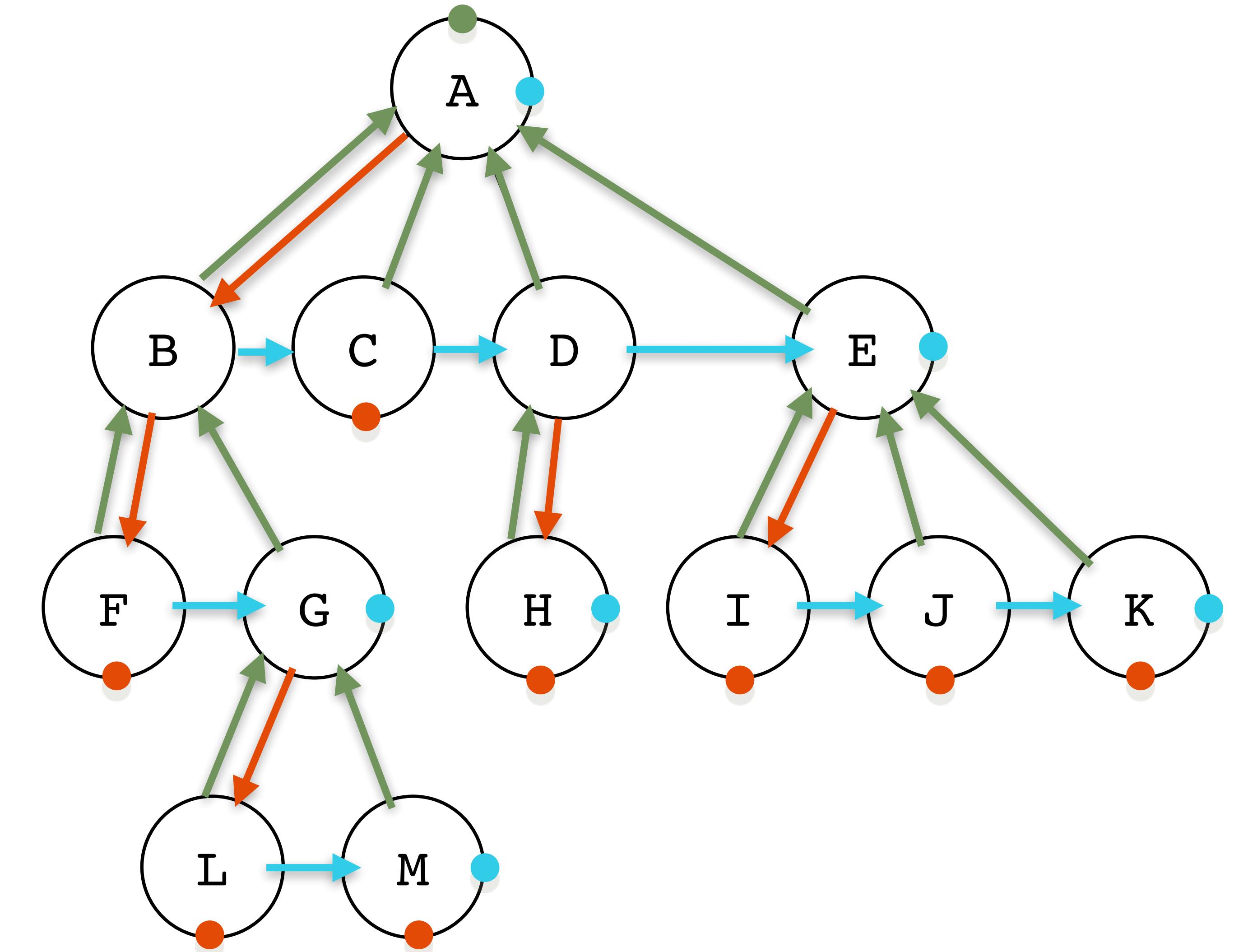
B-C-D-H-D-E-I-J-K-

E-A-B-F-G-L-M-G-B-

C-D-H-D-E-I-J-K-E-

A-B-F-G-L-M-G-B-C-

D-H-D-E-I-J-K-E-A

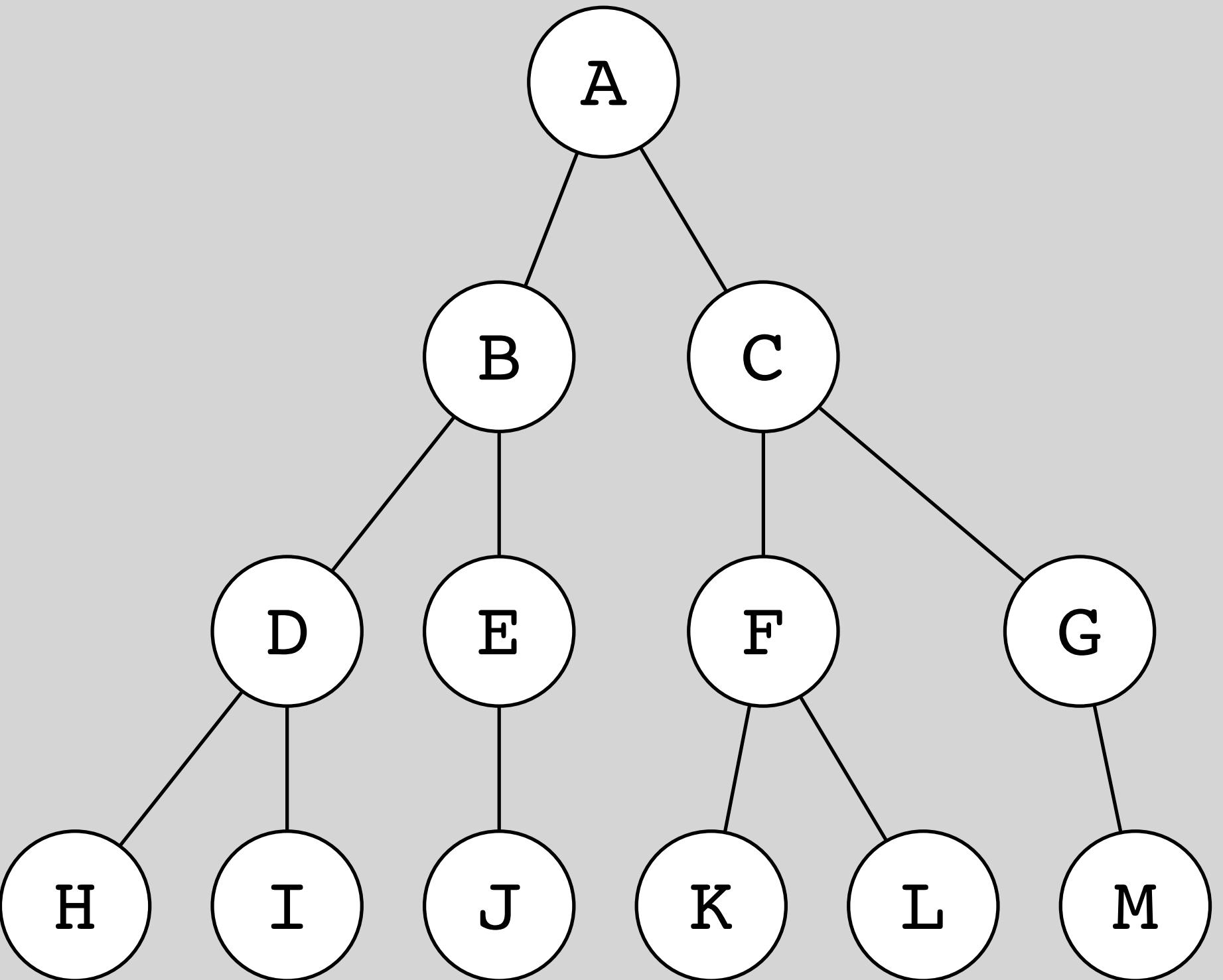


Conclusion : on n'itère pas
en largeur



Exercices

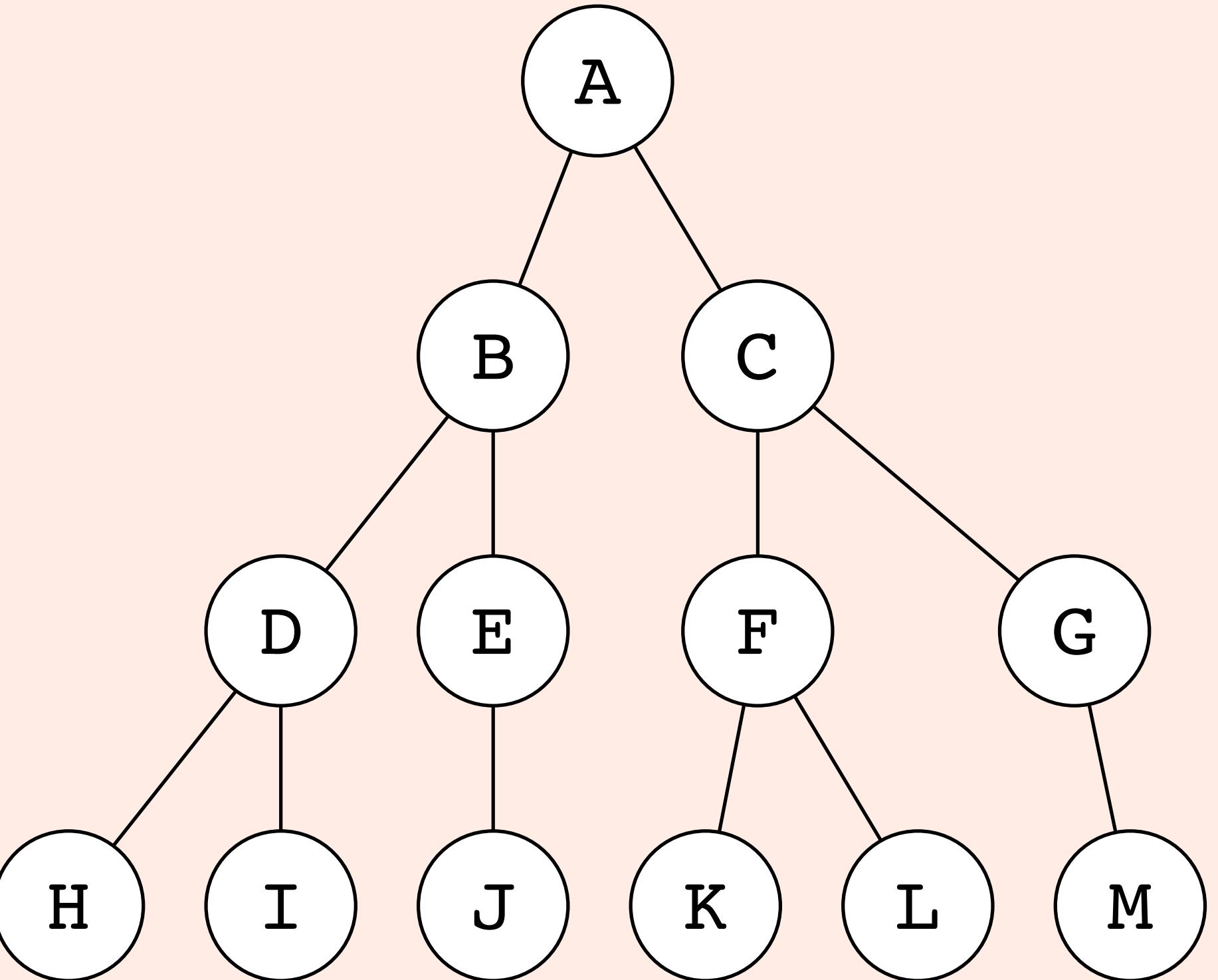
- Quel noeud suit J en pré-ordre ?
- Quel noeud suit K en pré-ordre ?
- Quel noeud suit J en post-ordre ?
- Quel noeud suit B en post-ordre ?
- Tracez les noeuds par lesquels passe l'itération en pré-ordre sur cet arbre





Solutions

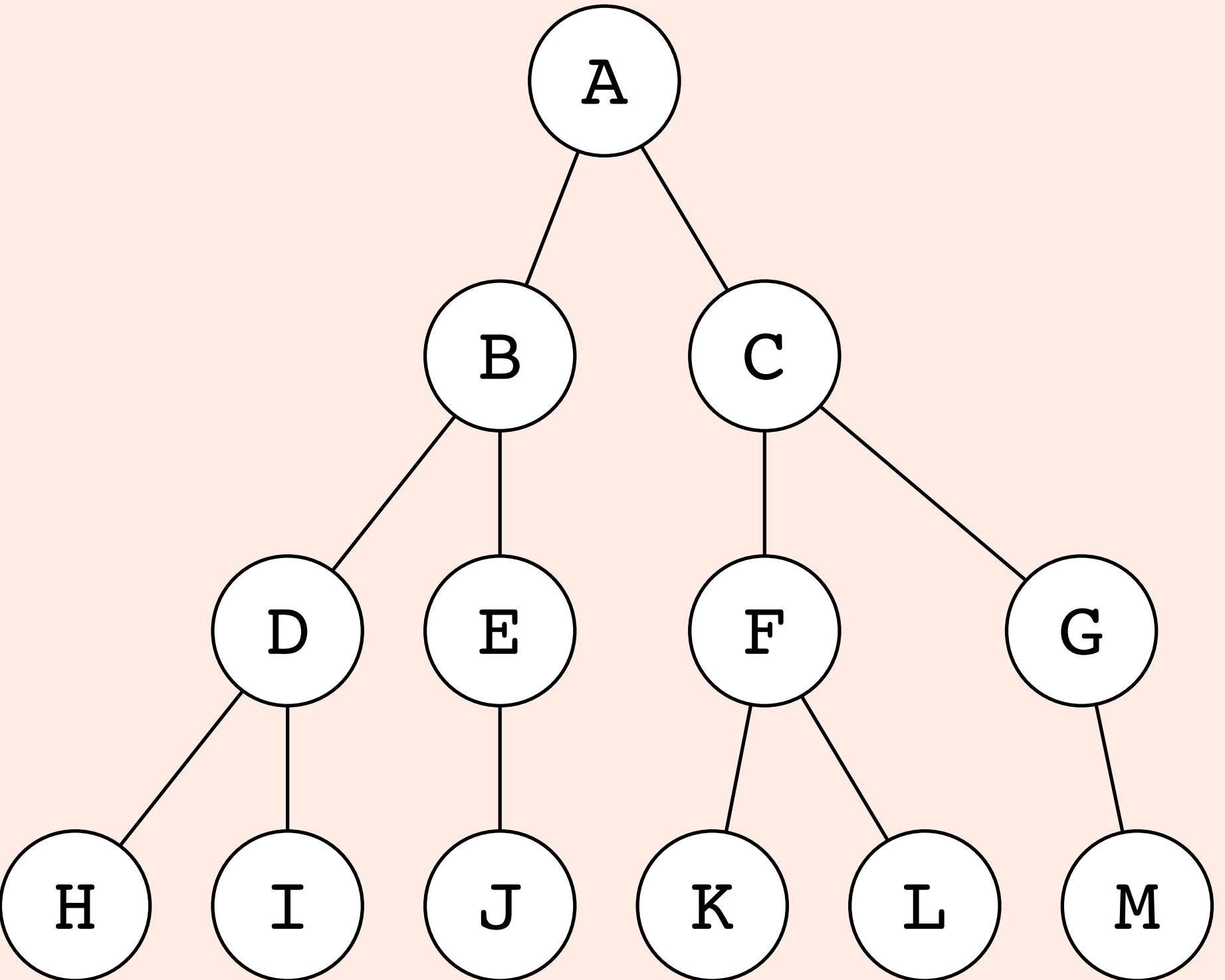
- Quel noeud suit J en pré-ordre ?
- Quel noeud suit K en pré-ordre ?
- Quel noeud suit J en post-ordre ?
- Quel noeud suit B en post-ordre ?
- Tracez les noeuds par lesquels passe l'itération en pré-ordre sur cet arbre





Solutions

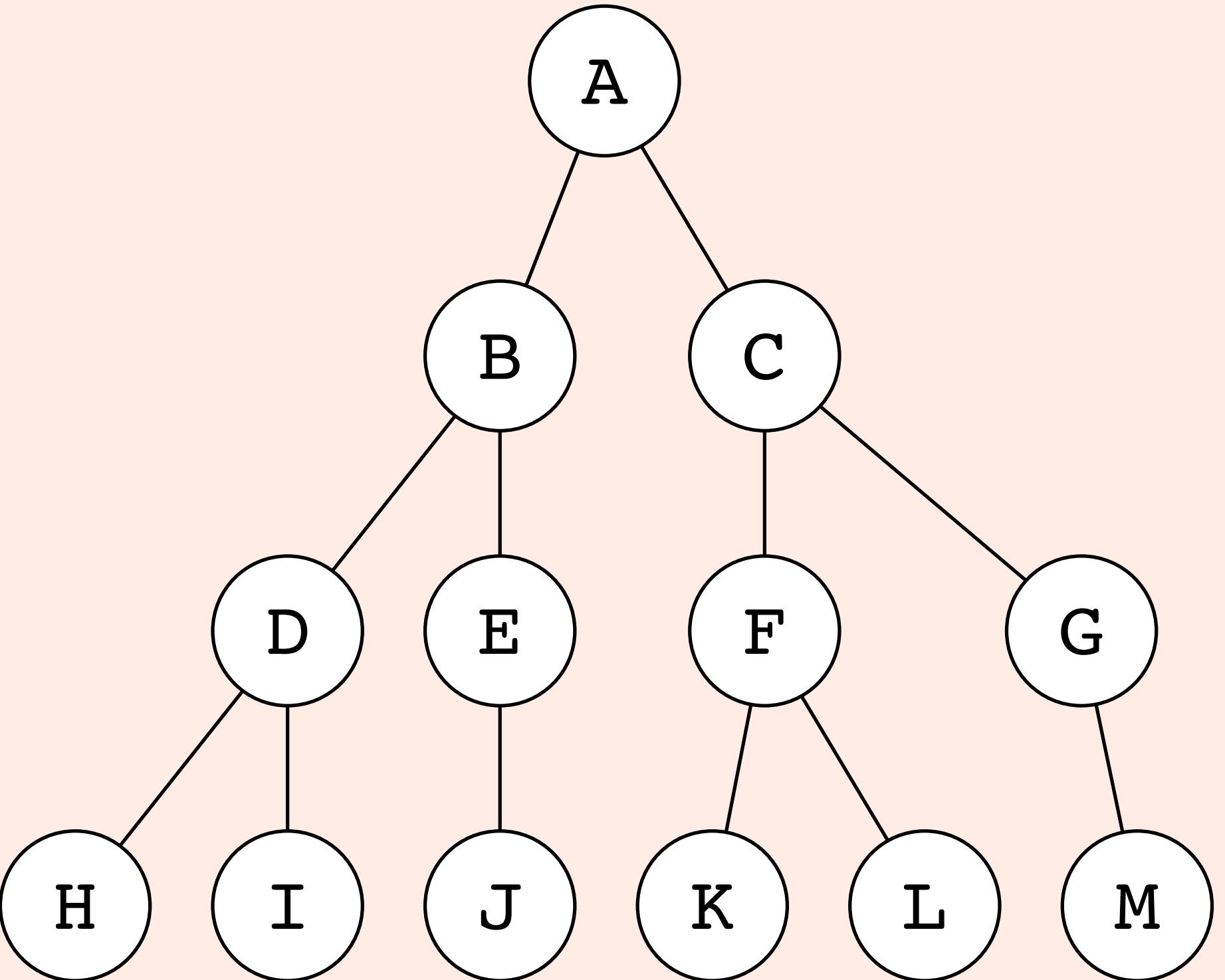
- Quel noeud suit J en pré-ordre ? C
- Quel noeud suit K en pré-ordre ?
- Quel noeud suit J en post-ordre ?
- Quel noeud suit B en post-ordre ?
- Tracez les noeuds par lesquels passe l'itération en pré-ordre sur cet arbre





Solutions

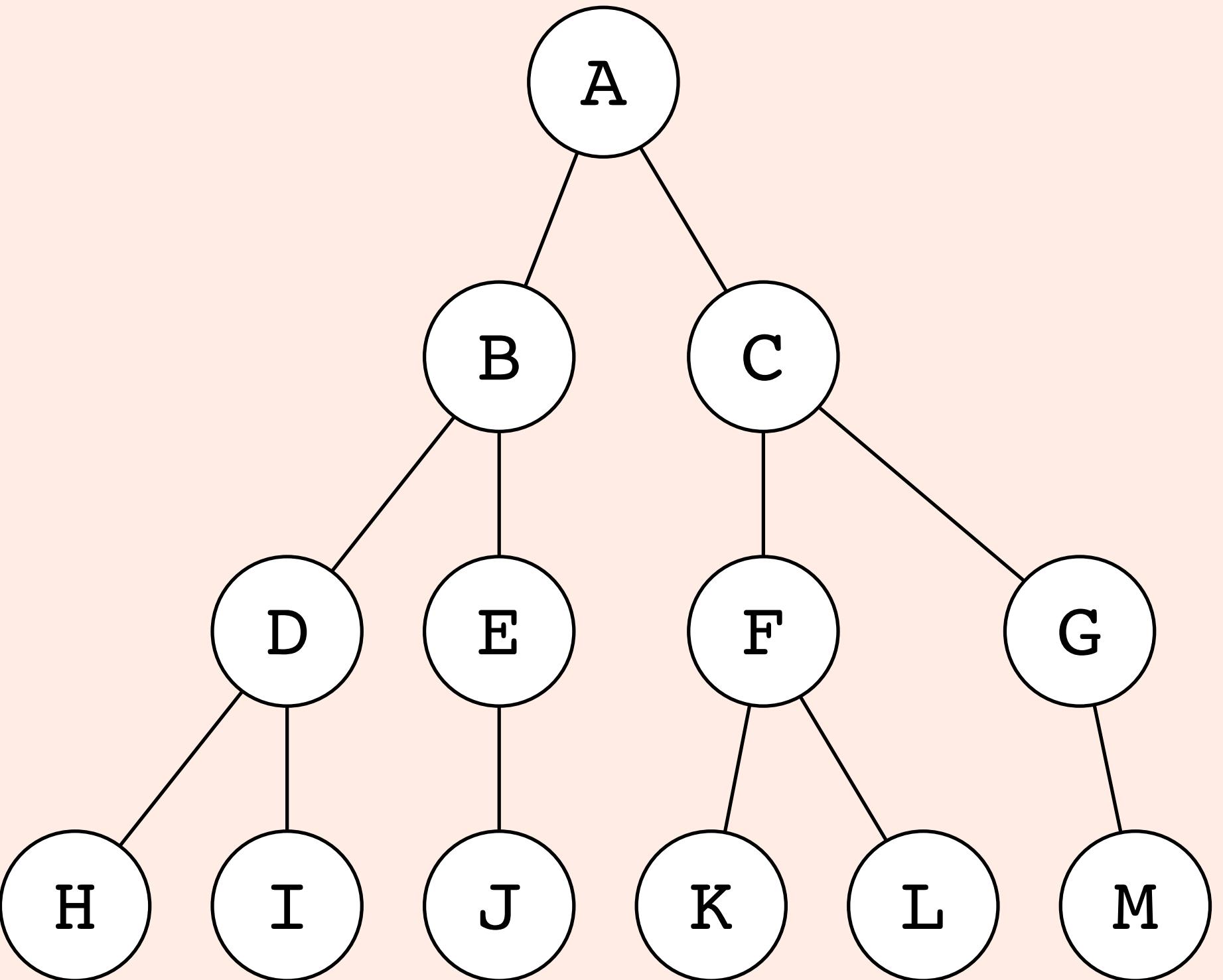
- Quel noeud suit J en pré-ordre ? C
- Quel noeud suit K en pré-ordre ? L
- Quel noeud suit J en post-ordre ?
- Quel noeud suit B en post-ordre ?
- Tracez les noeuds par lesquels passe l'itération en pré-ordre sur cet arbre





Solutions

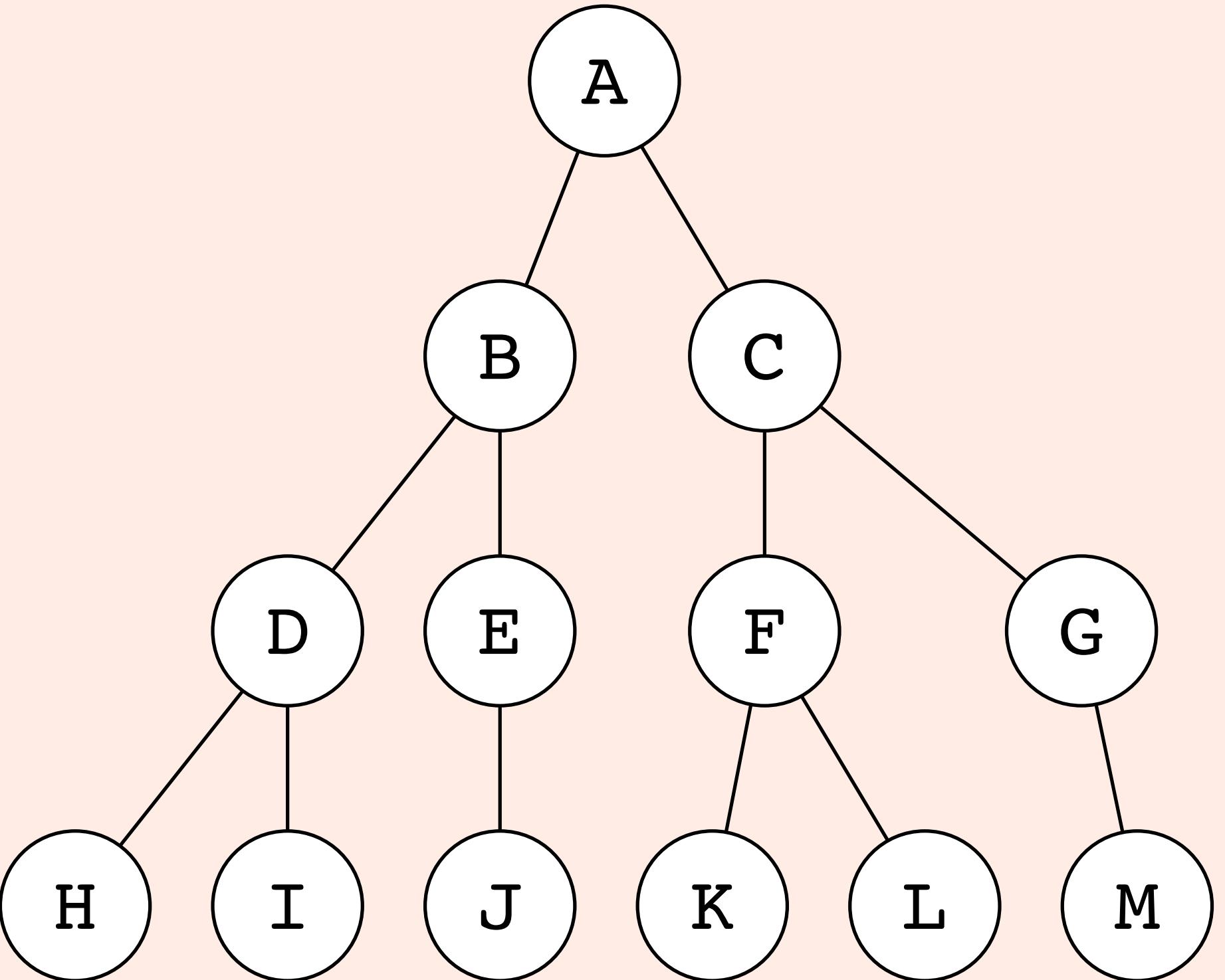
- Quel noeud suit J en pré-ordre ? C
- Quel noeud suit K en pré-ordre ? L
- Quel noeud suit J en post-ordre ? E
- Quel noeud suit B en post-ordre ?
- Tracez les noeuds par lesquels passe l'itération en pré-ordre sur cet arbre





Solutions

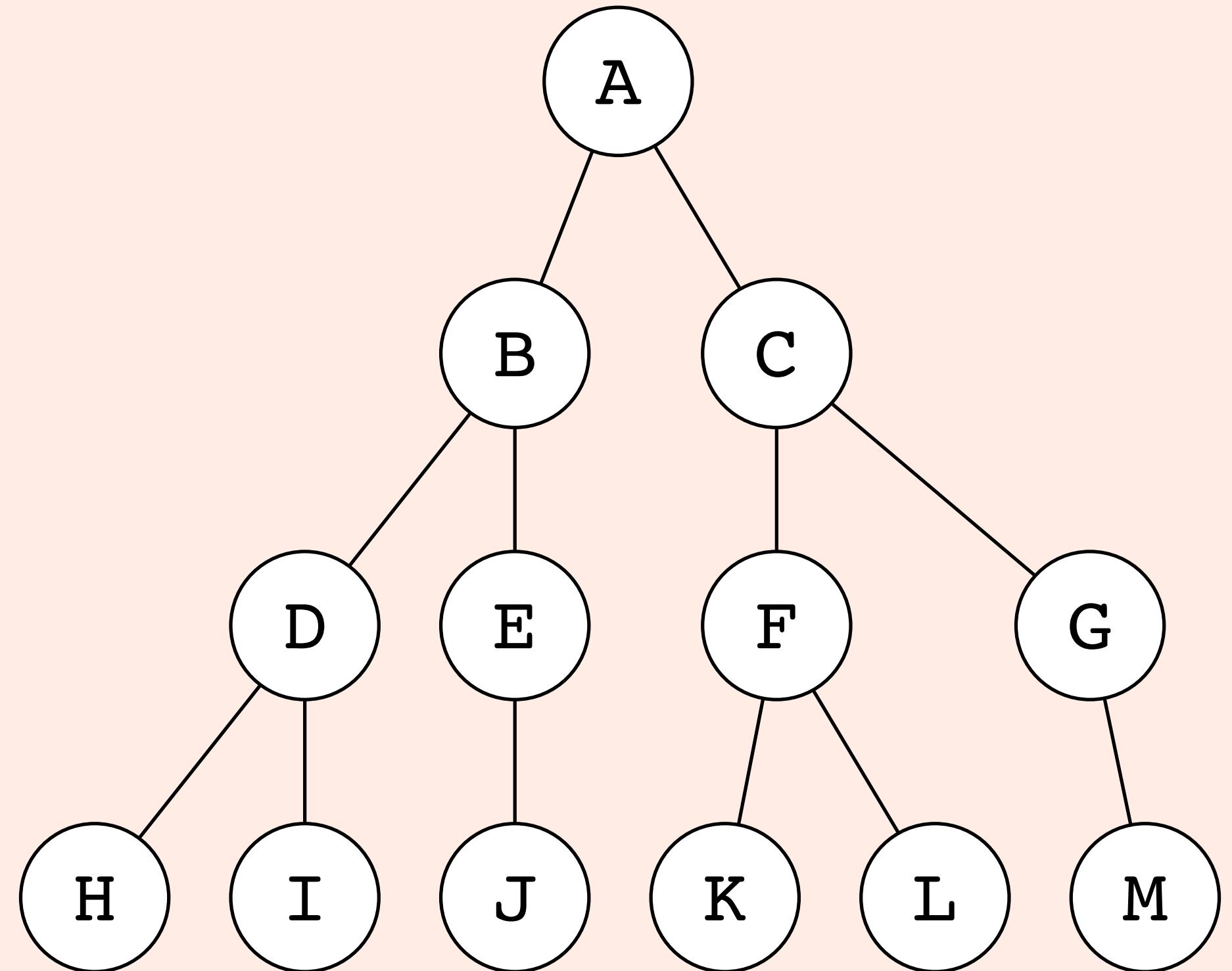
- Quel noeud suit J en pré-ordre ? C
- Quel noeud suit K en pré-ordre ? L
- Quel noeud suit J en post-ordre ? E
- Quel noeud suit B en post-ordre ? K
- Tracez les noeuds par lesquels passe l'itération en pré-ordre sur cet arbre





Solutions

- Quel noeud suit J en pré-ordre ? C
- Quel noeud suit K en pré-ordre ? L
- Quel noeud suit J en post-ordre ? E
- Quel noeud suit B en post-ordre ? K
- Tracez les noeuds par lesquels passe l'itération en pré-ordre sur cet arbre A-B-D-H-I-D-E-J-E-B-C-F-K-L-F-G-M-G-C-A



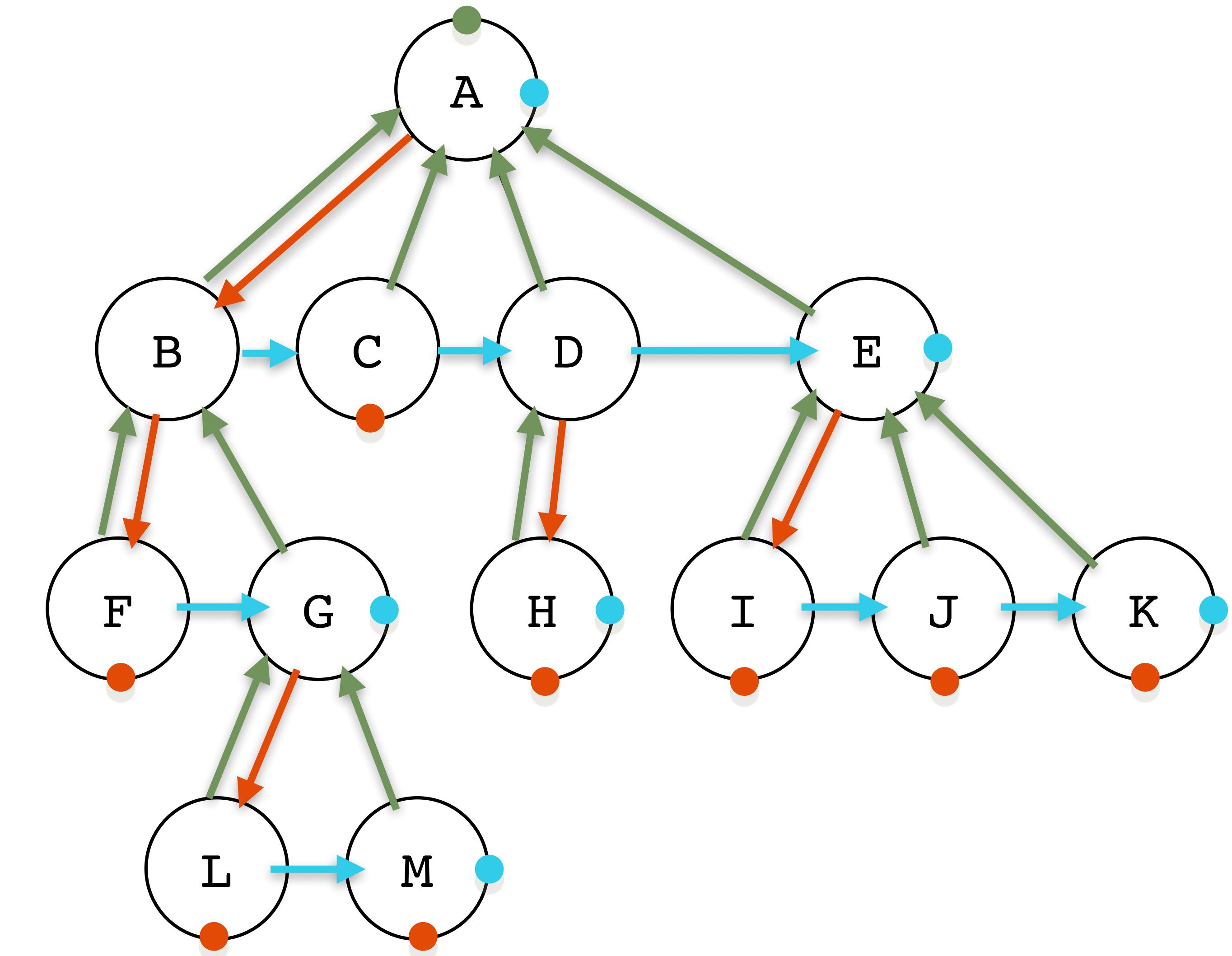
6. et encore...





Insertion / suppression

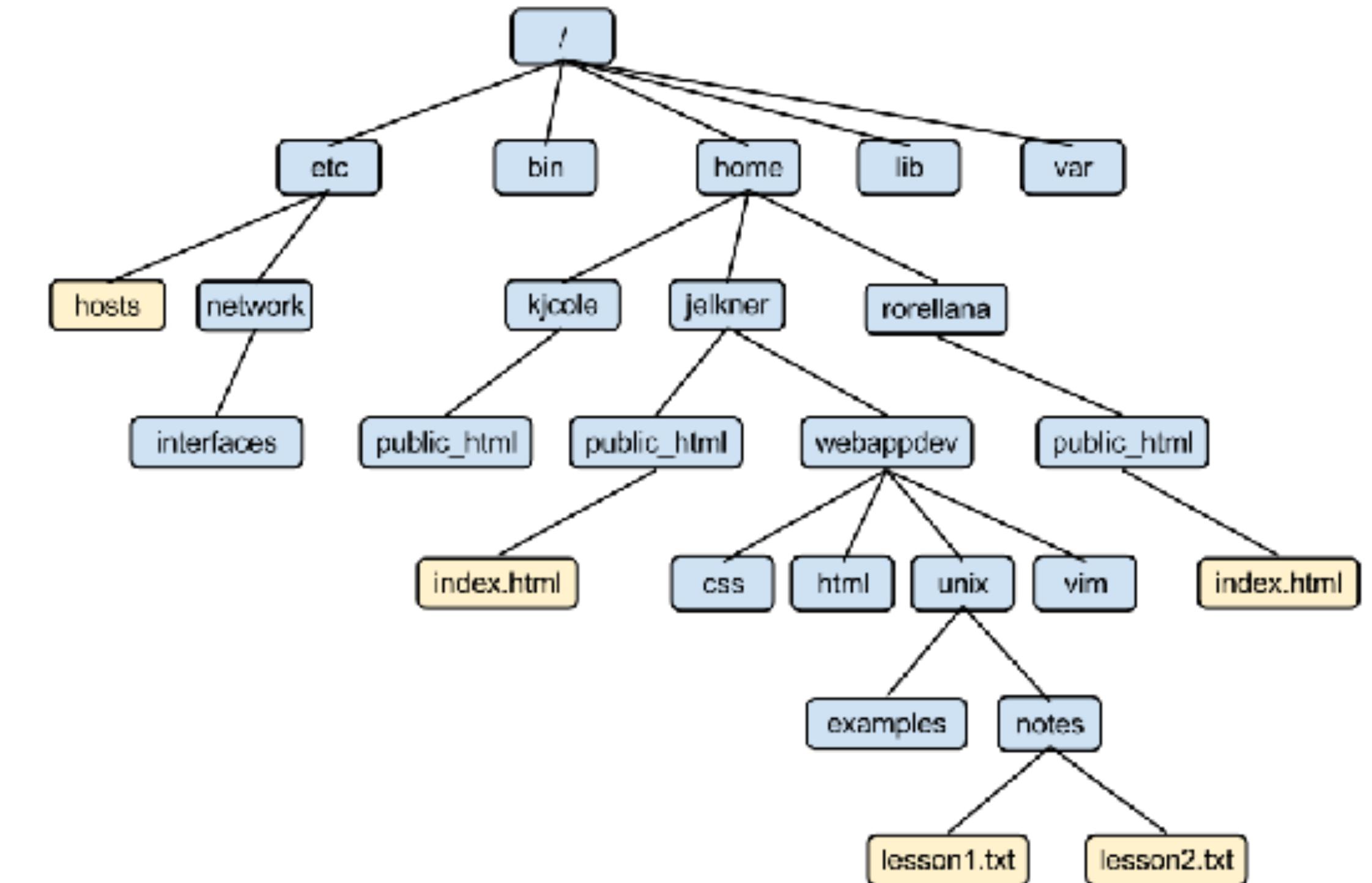
- Dépendent fortement de la structure de Noeud utilisée
- En cas de suppression, que fait-on des enfants du noeud supprimé ?





Noeuds de types différents

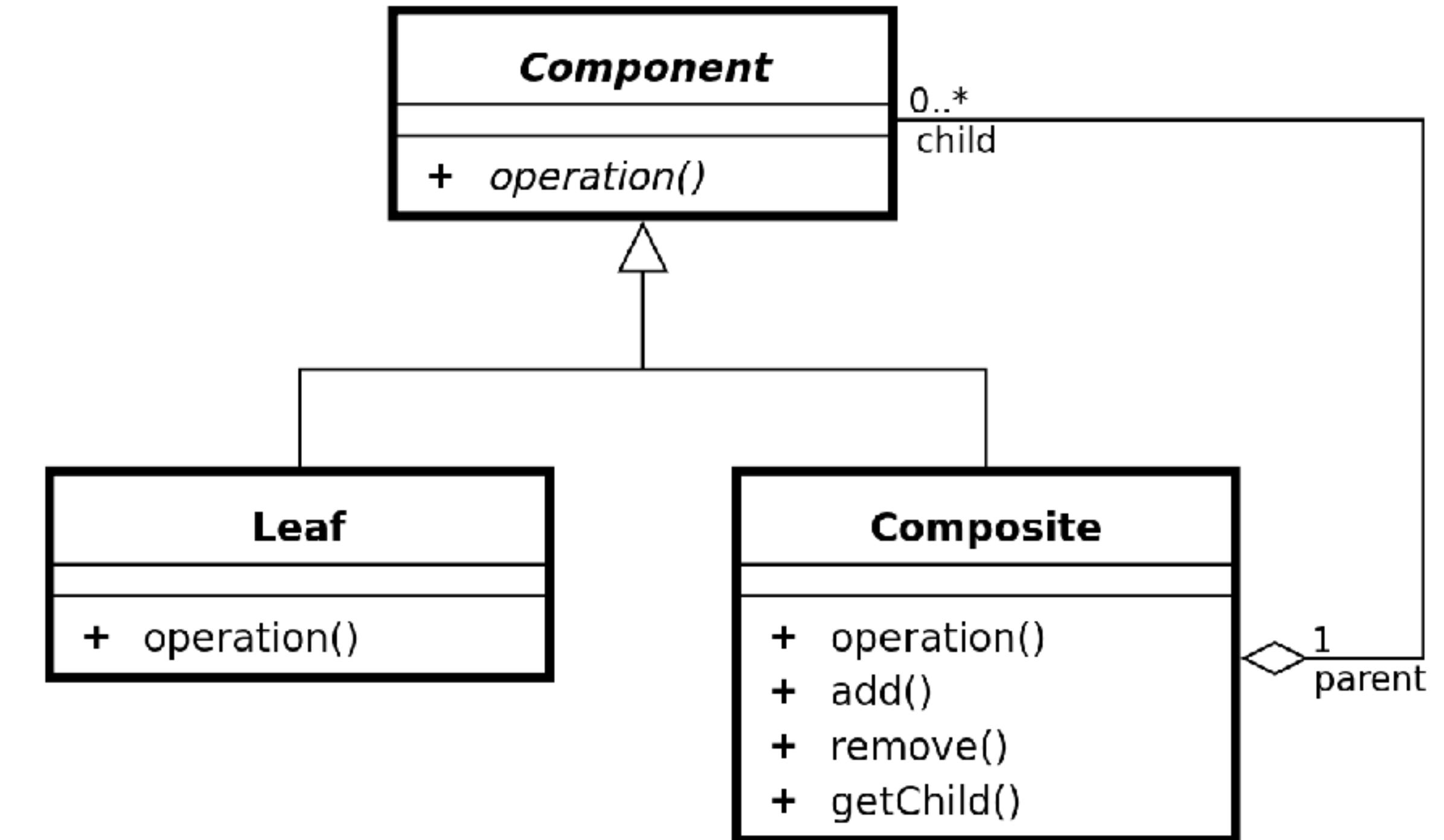
- Dans l'arbre d'un système de fichier, on a 2 types de noeuds
 - Répertoires
 - Fichiers





Composite Design Pattern

- En deuxième année
 - Programmation Orientée Objet
 - Modèles de Conception Réutilisables
 - Génie Logiciel



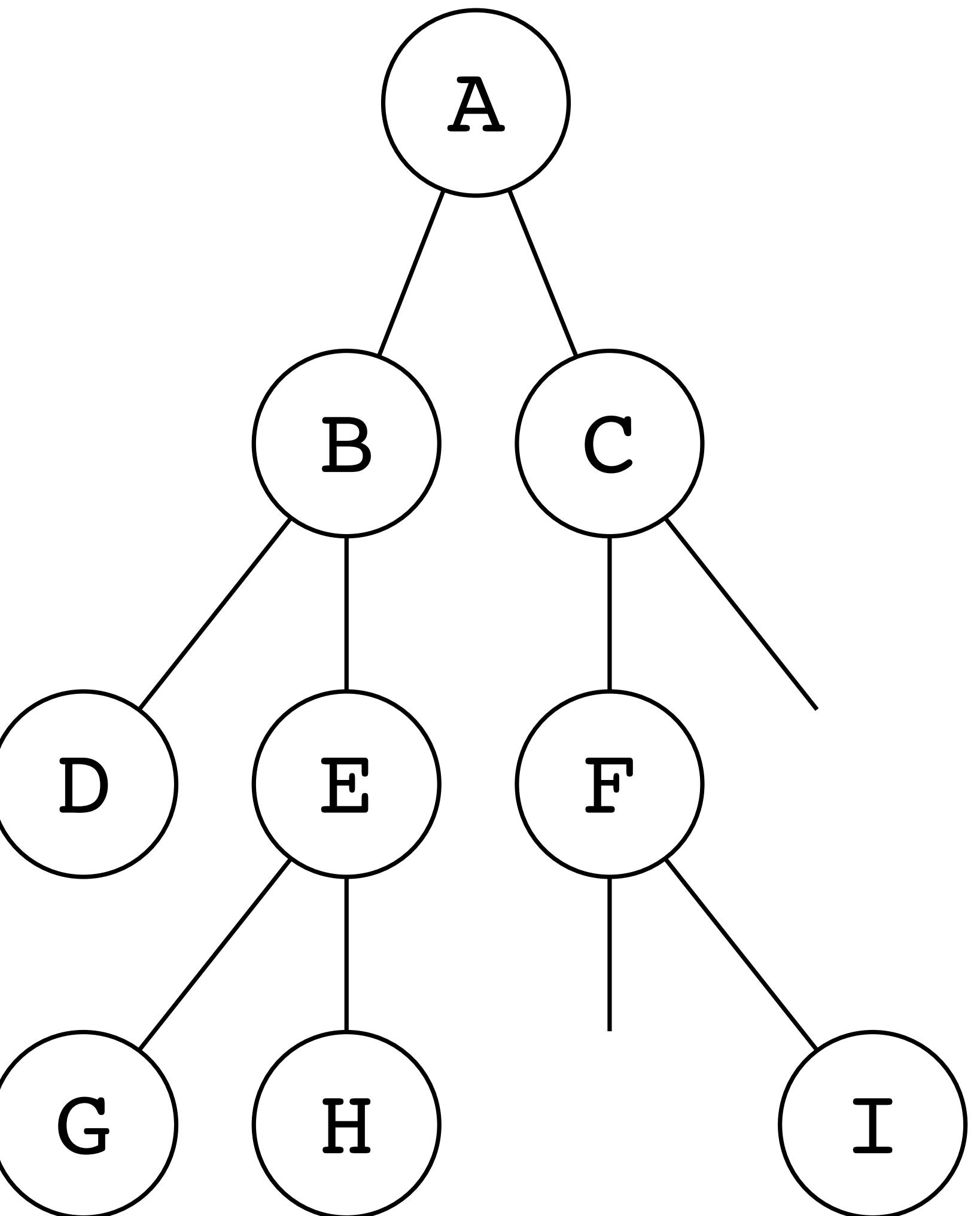
7. Arbres binaires





Binaires, pas quelconques

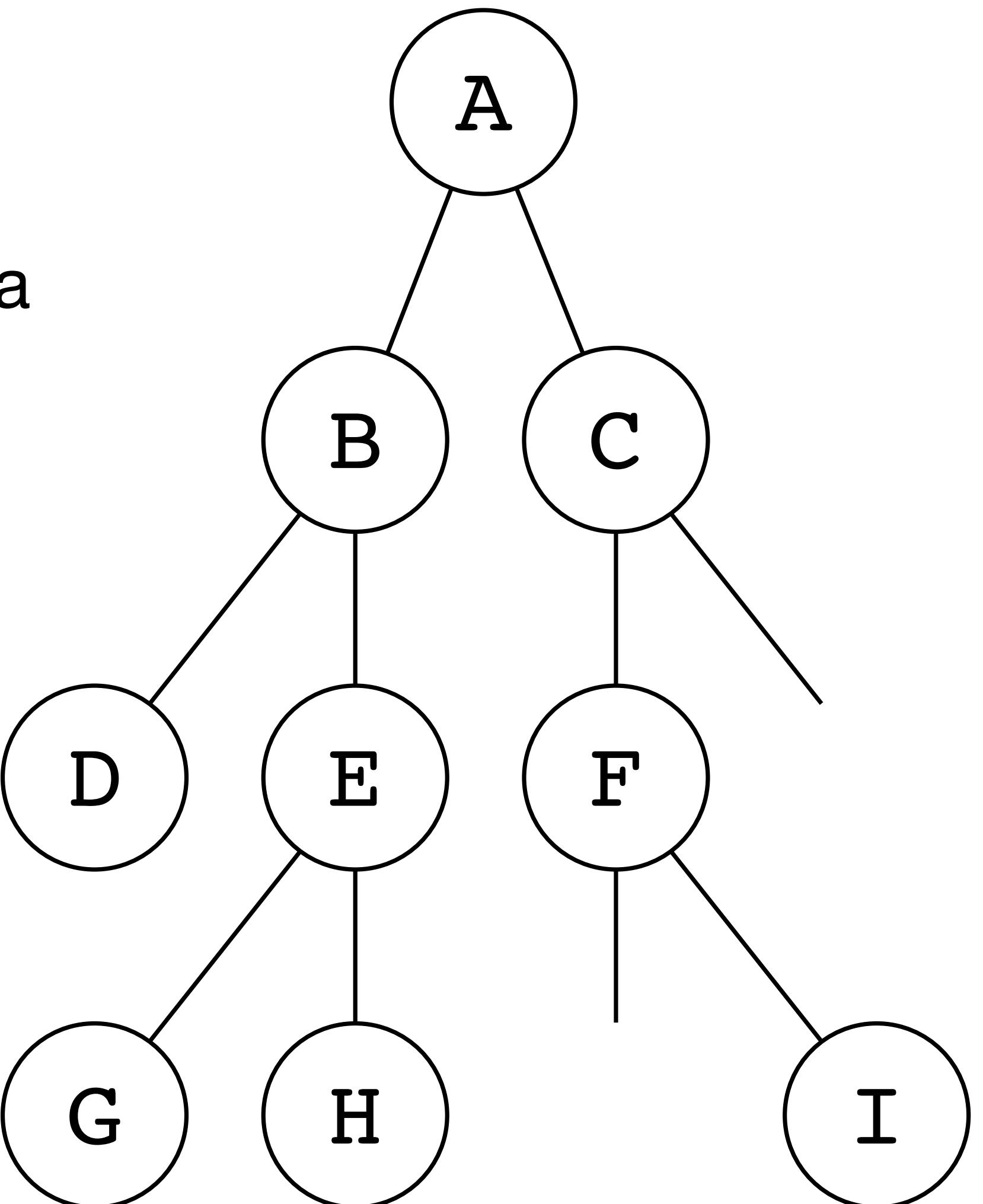
- Degré 2, mais aussi ...





Binaires, pas quelconques

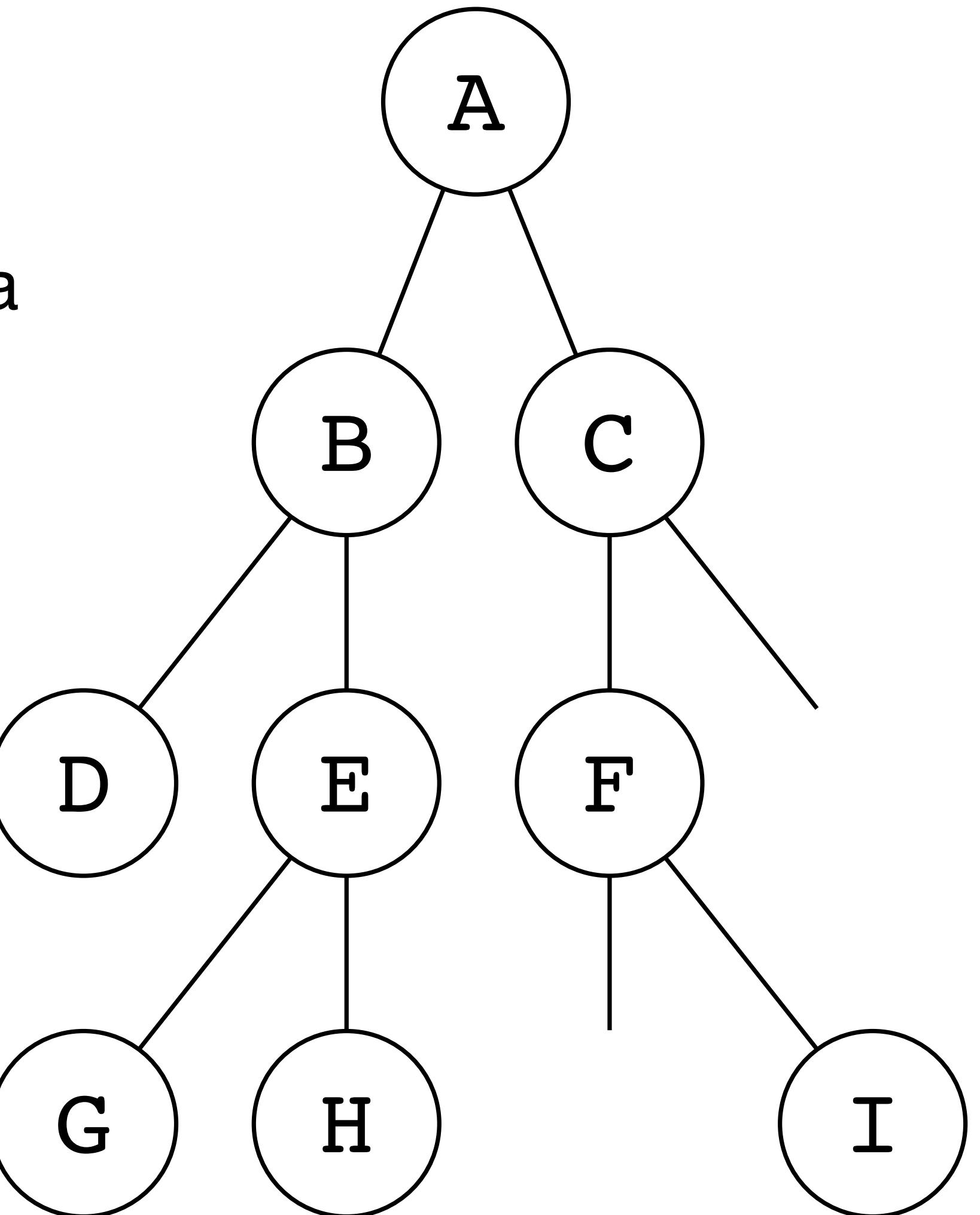
- Degré 2, mais aussi ...
 - ... enfants explicitement gauche ou droit, donc il y a 2 sortes de noeuds de degré 1





Binaires, pas quelconques

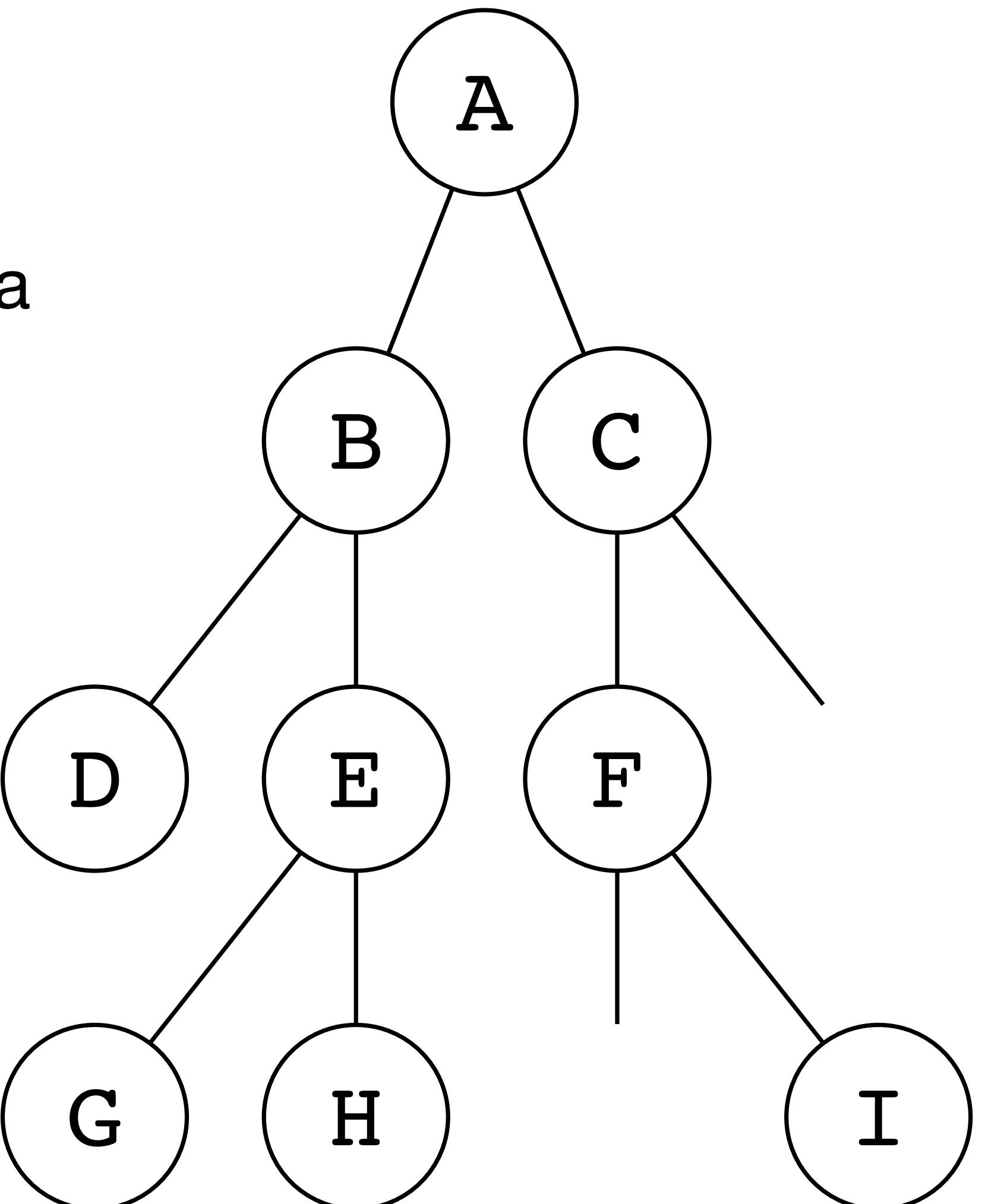
- Degré 2, mais aussi ...
 - ... enfants explicitement gauche ou droit, donc il y a 2 sortes de noeuds de degré 1
- Exemples





Binaires, pas quelconques

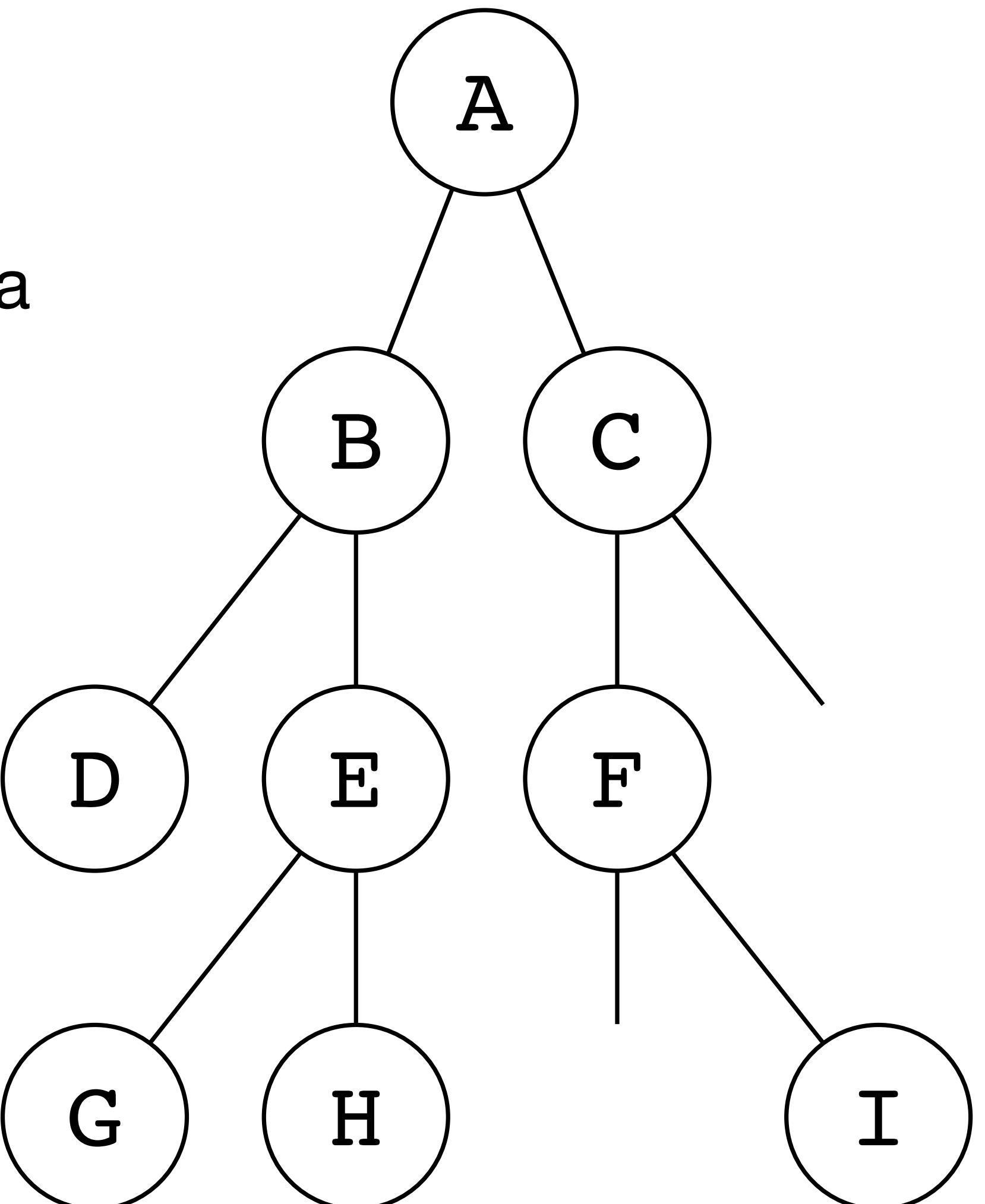
- Degré 2, mais aussi ...
 - ... enfants explicitement gauche ou droit, donc il y a 2 sortes de noeuds de degré 1
- Exemples
 - Tas (arbre binaire complet),





Binaires, pas quelconques

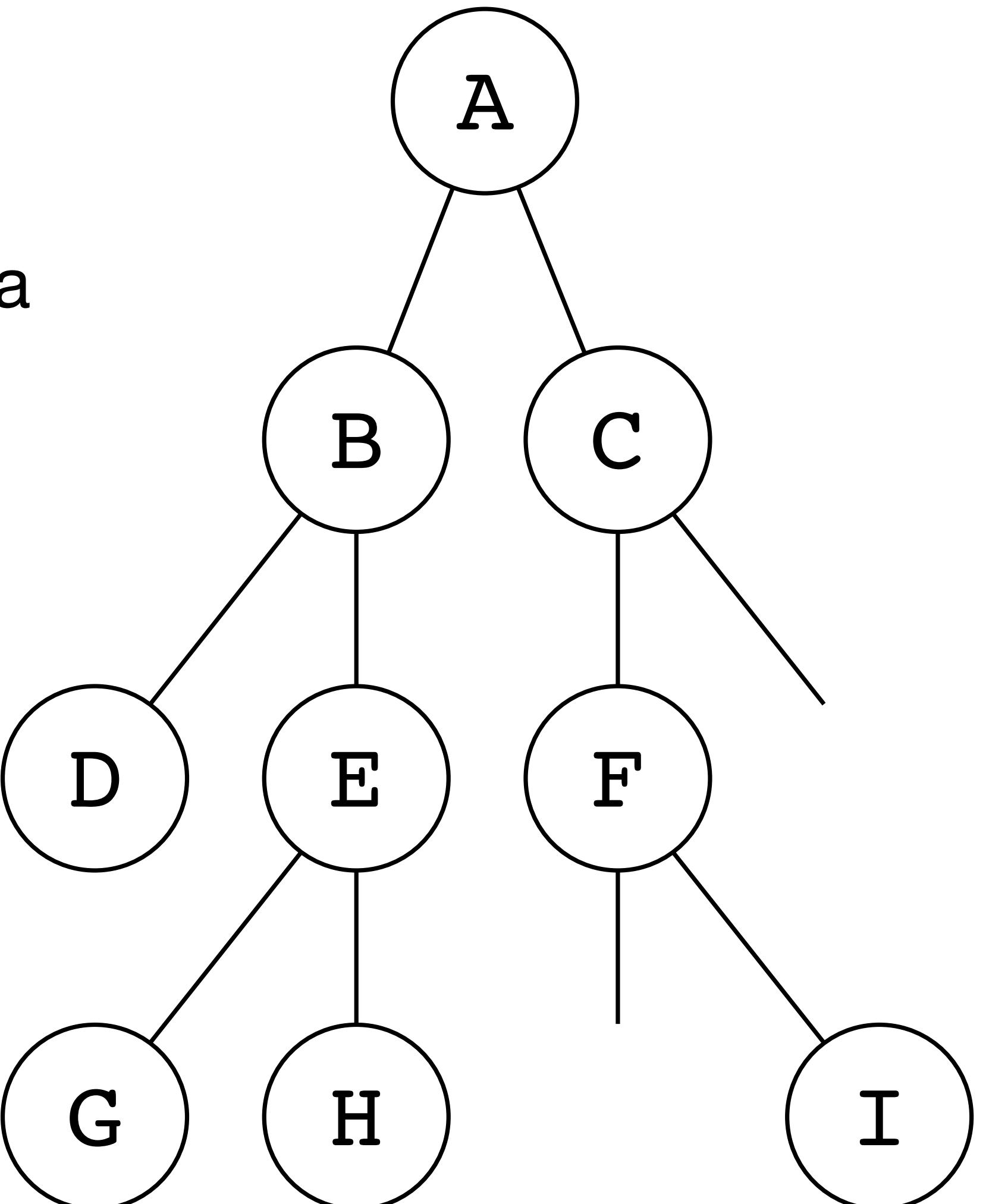
- Degré 2, mais aussi ...
 - ... enfants explicitement gauche ou droit, donc il y a 2 sortes de noeuds de degré 1
- Exemples
 - Tas (arbre binaire complet),
 - arbre binaires de recherche (ASD1),





Binaires, pas quelconques

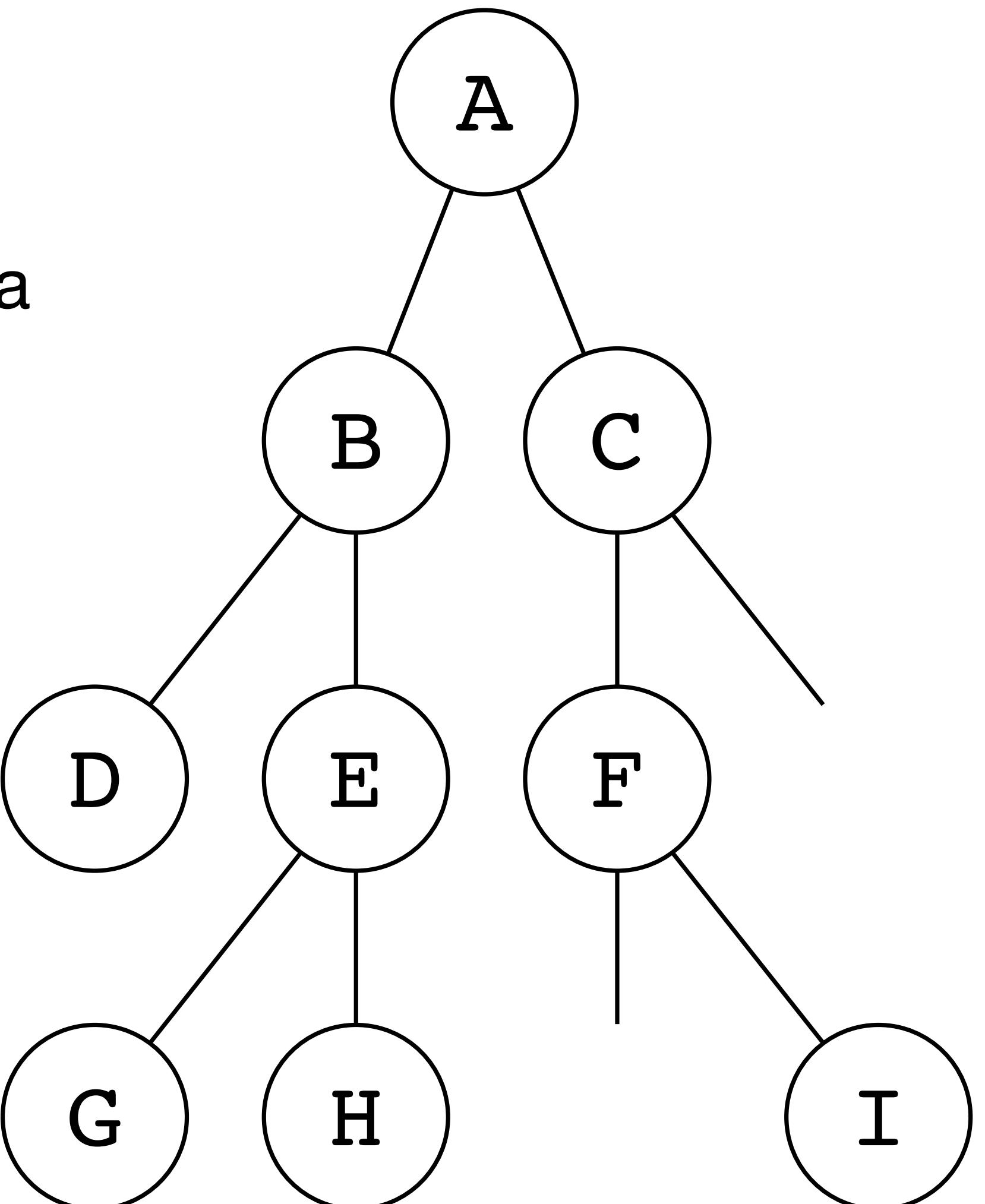
- Degré 2, mais aussi ...
 - ... enfants explicitement gauche ou droit, donc il y a 2 sortes de noeuds de degré 1
- Exemples
 - Tas (arbre binaire complet),
 - arbre binaires de recherche (ASD1),
 - arbres AVL (ASD2),





Binaires, pas quelconques

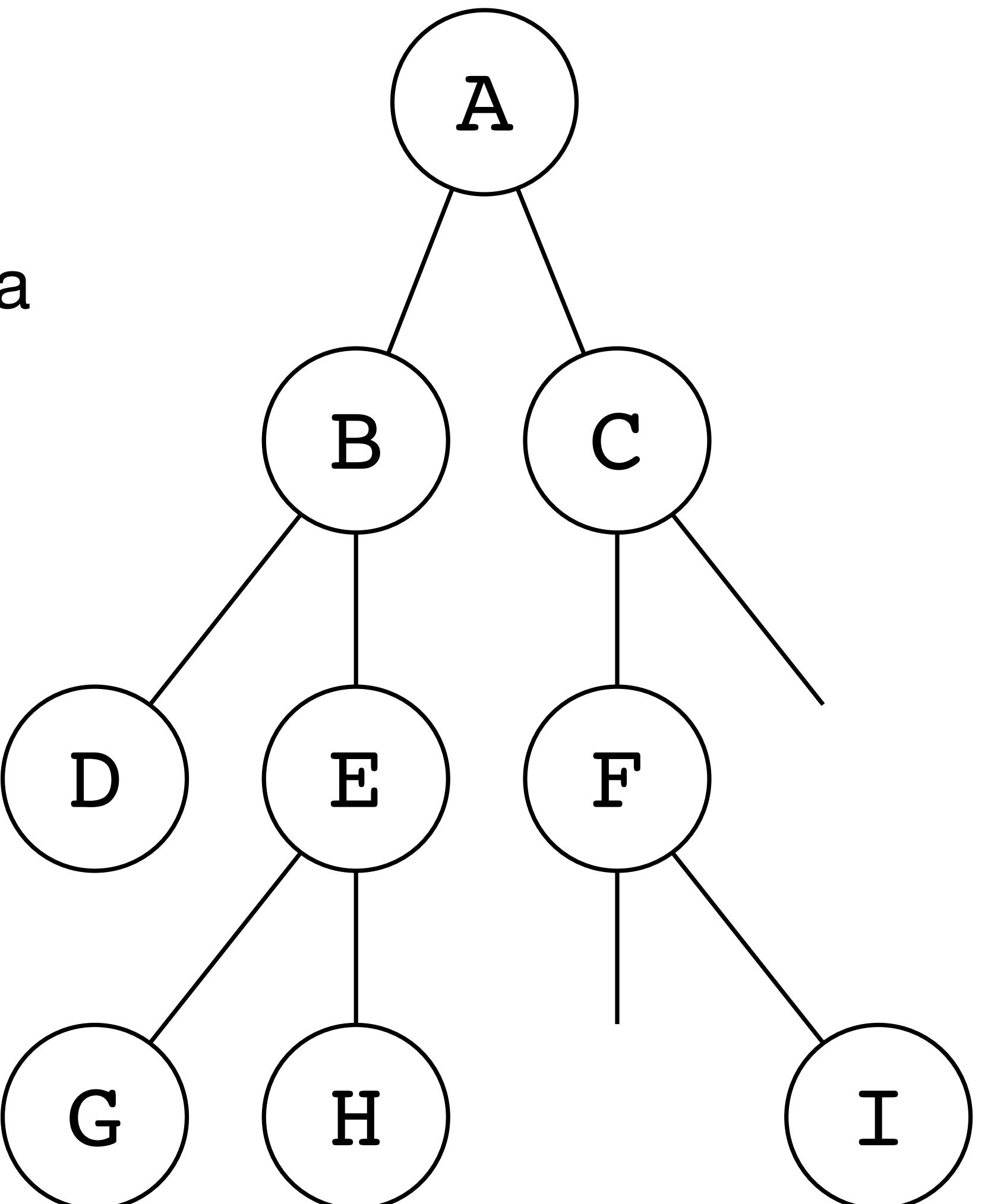
- Degré 2, mais aussi ...
 - ... enfants explicitement gauche ou droit, donc il y a 2 sortes de noeuds de degré 1
- Exemples
 - Tas (arbre binaire complet),
 - arbre binaires de recherche (ASD1),
 - arbres AVL (ASD2),
 - arbres rouge-noir (STL),





Binaires, pas quelconques

- Degré 2, mais aussi ...
 - ... enfants explicitement gauche ou droit, donc il y a 2 sortes de noeuds de degré 1
- Exemples
 - Tas (arbre binaire complet),
 - arbre binaires de recherche (ASD1),
 - arbres AVL (ASD2),
 - arbres rouge-noir (STL),
 - arbres d'Andersson, ...





Représentation

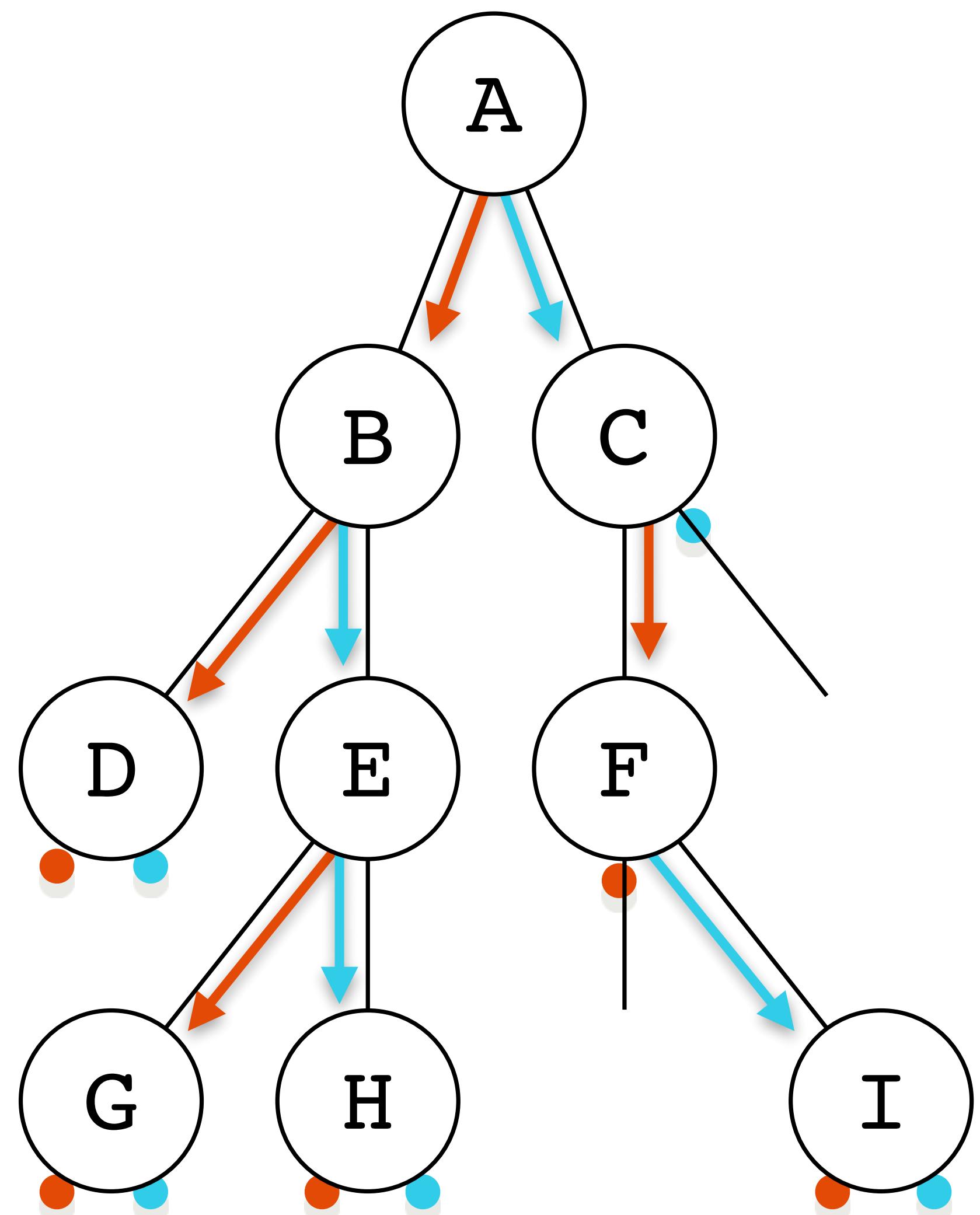
```
structure Noeud<T>
```

T étiquette

Noeud* gauche

Noeud* droit

- Liens explicites vers les enfants gauche et droit

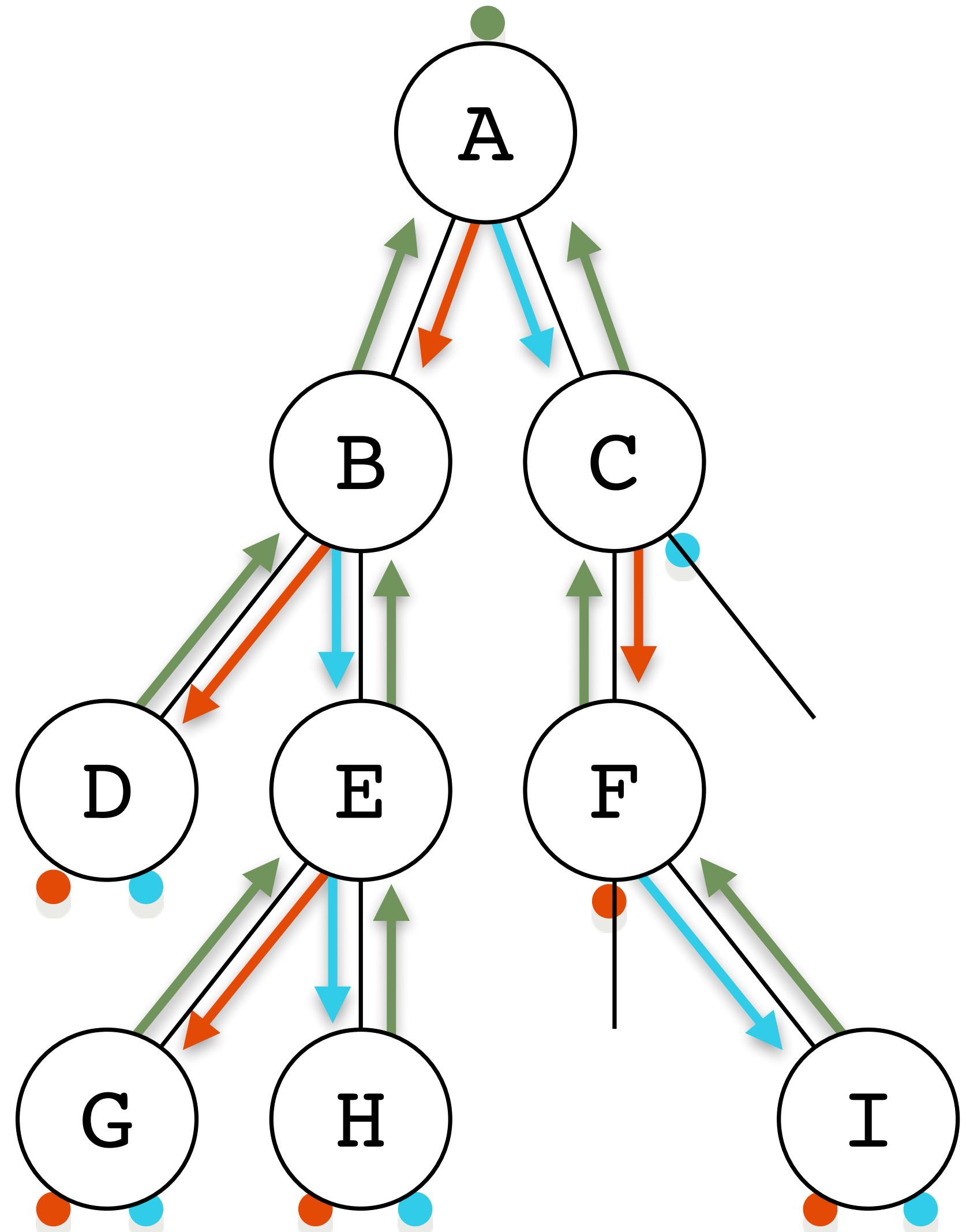




Représentation

```
structure Noeud<T>
    T étiquette
    Noeud* gauche
    Noeud* droit
    Noeud* parent
```

- Liens explicites vers les enfants gauche et droit
- Lien optionnel vers le parent





Représentations en C++

```
template <typename T>
struct Node
{
    T label;
    Node* parent;
    Node* left;
    Node* right;
};
```



Représentations en C++

```
template <typename T>
struct Node
{
    T label;
    Node* parent;
    Node* left;
    Node* right;
};
```

```
template <typename T>
struct Node
{
    T label;
    Node* parent;
    array<Node*, 2> children;
};
```



Représentations en C++

```
template <typename T>
struct Node
{
    T label;
    Node* parent;
    Node* left;
    Node* right;
};
```

```
template <typename T>
struct Node
{
    T label;
    Node* parent;
    array<Node*, 2> children;
};
```

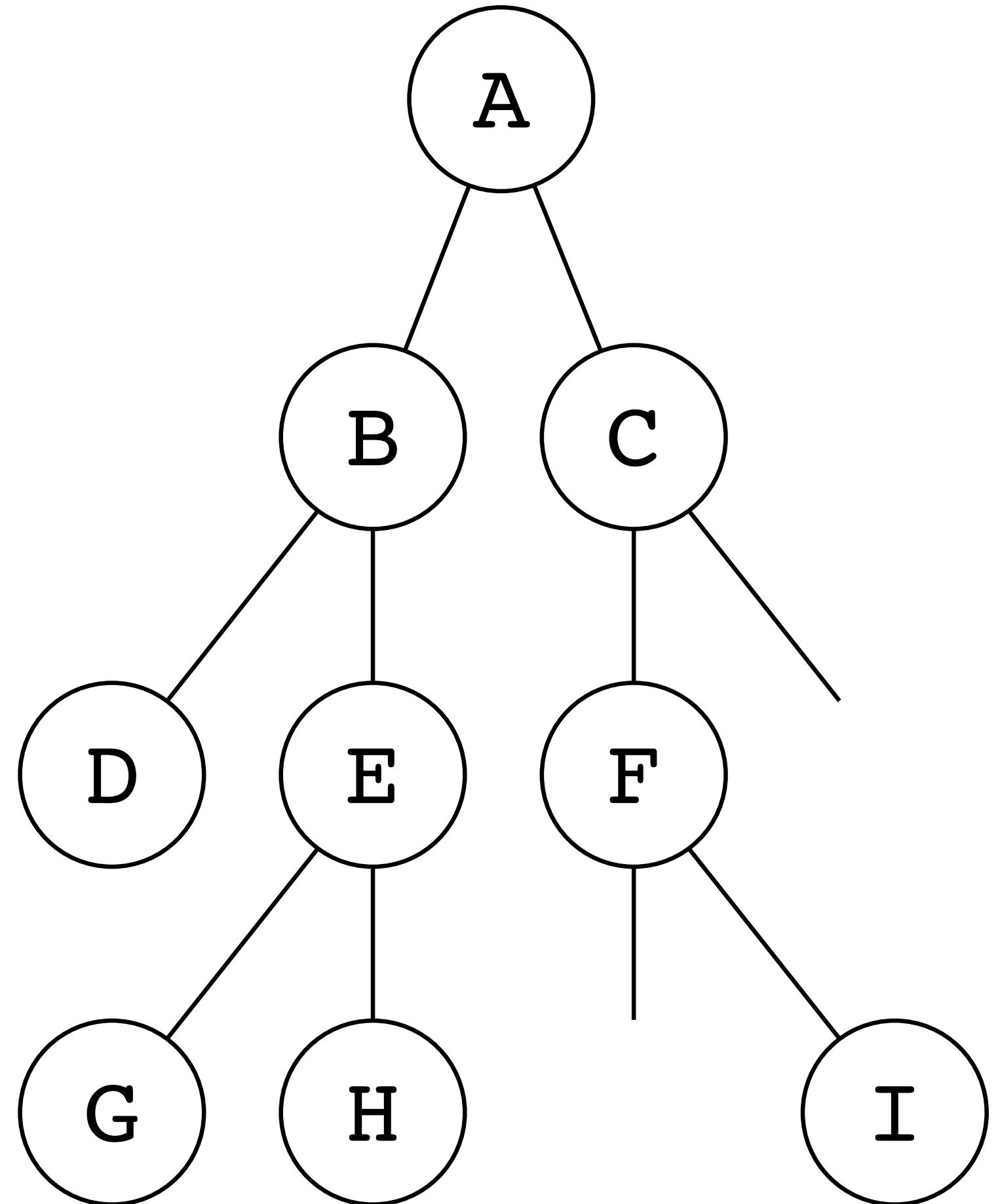
```
template <typename T> struct Node
{
    T label;
    Node* parent;
    array<Node*, 2> children;
    inline Node*& left() { return children[0]; }
    inline Node*& right() { return children[1]; }
};
```



Parcours en profondeur

```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droit, fn)
        fn(r)
```

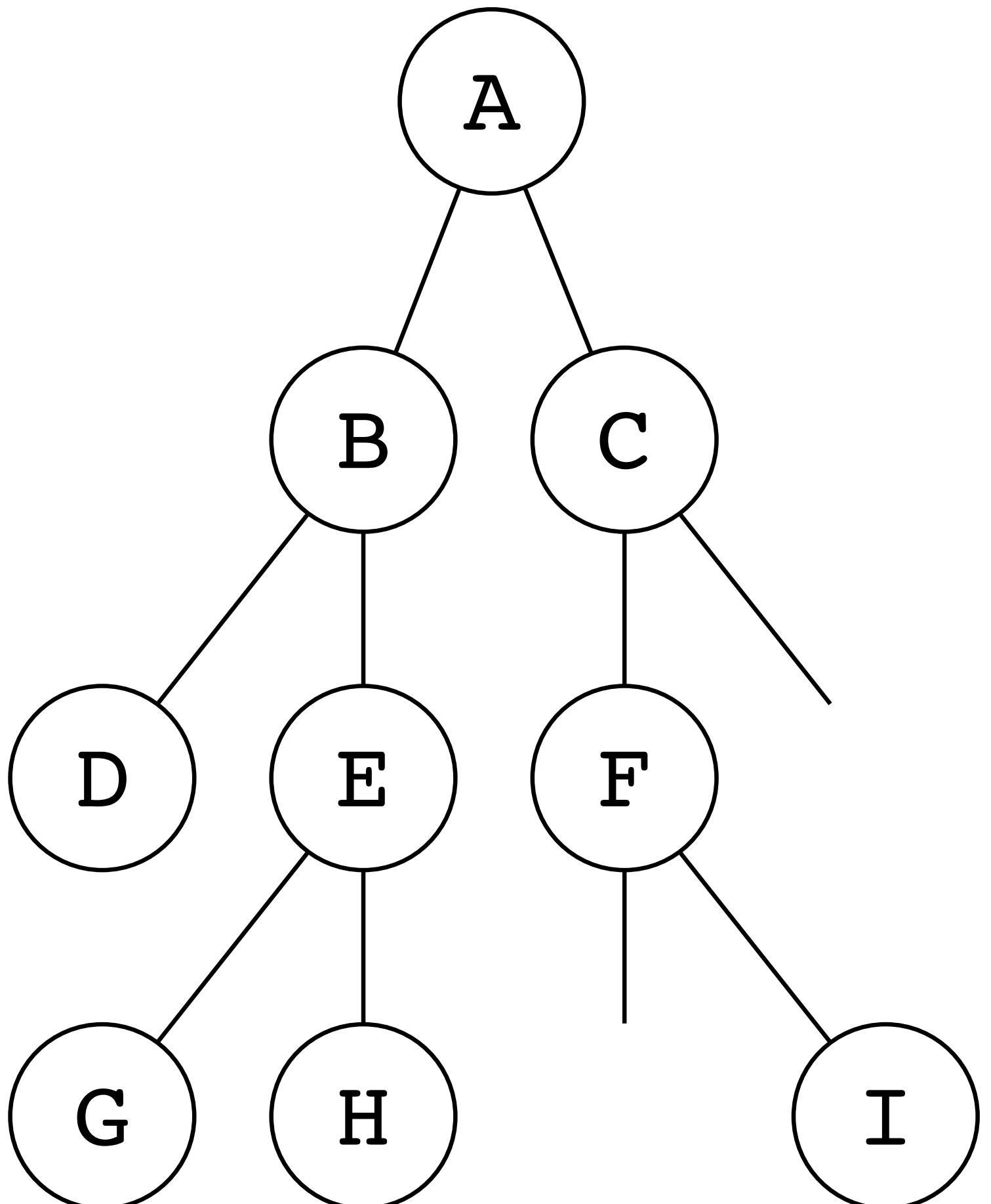




Parcours symétrique

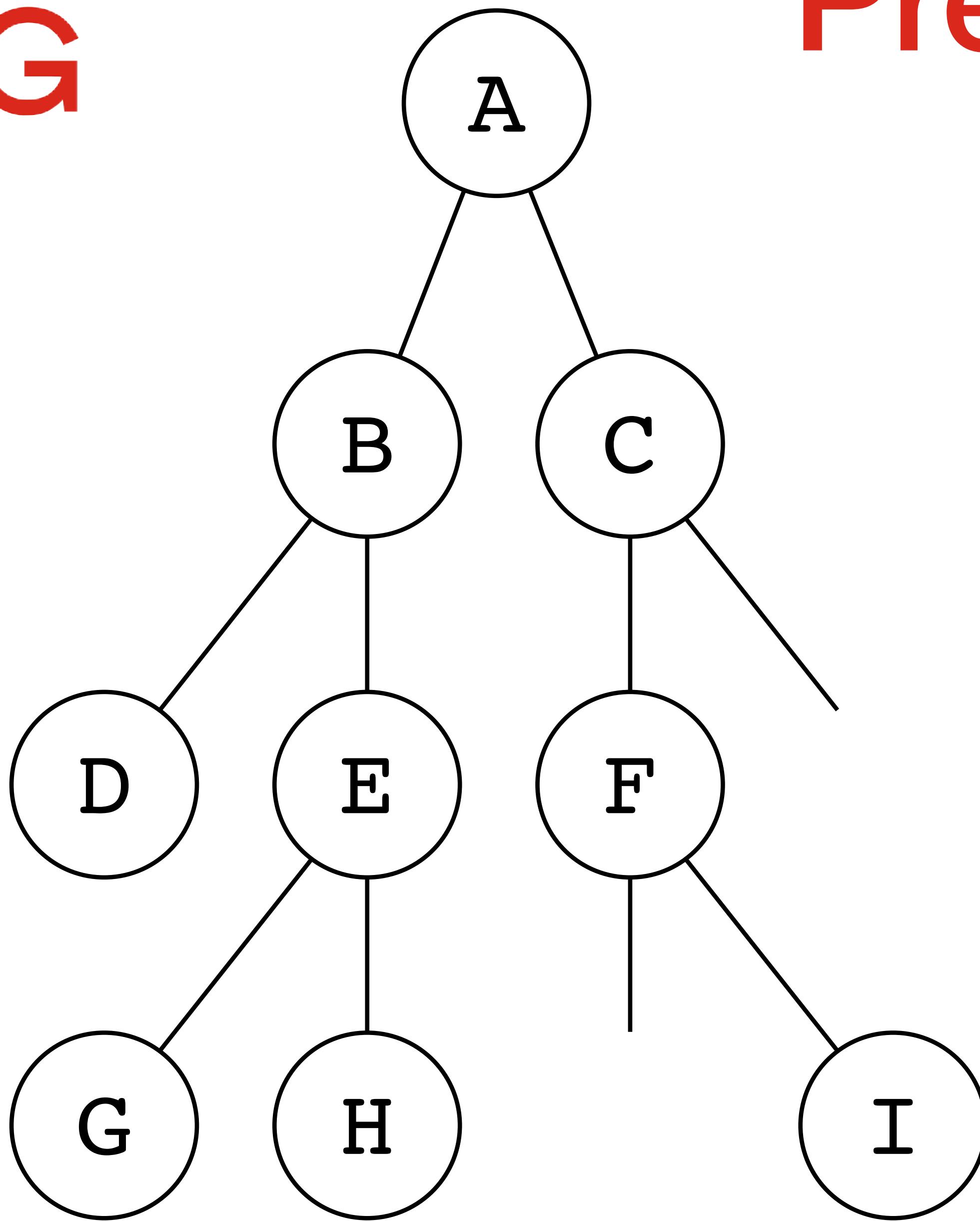
- Traitement de la racine entre les deux appels récursifs

```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droit, fn)
```



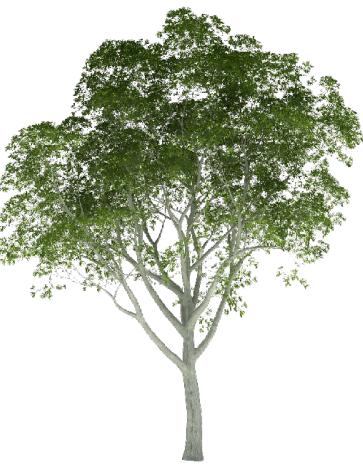


Pré-ordre

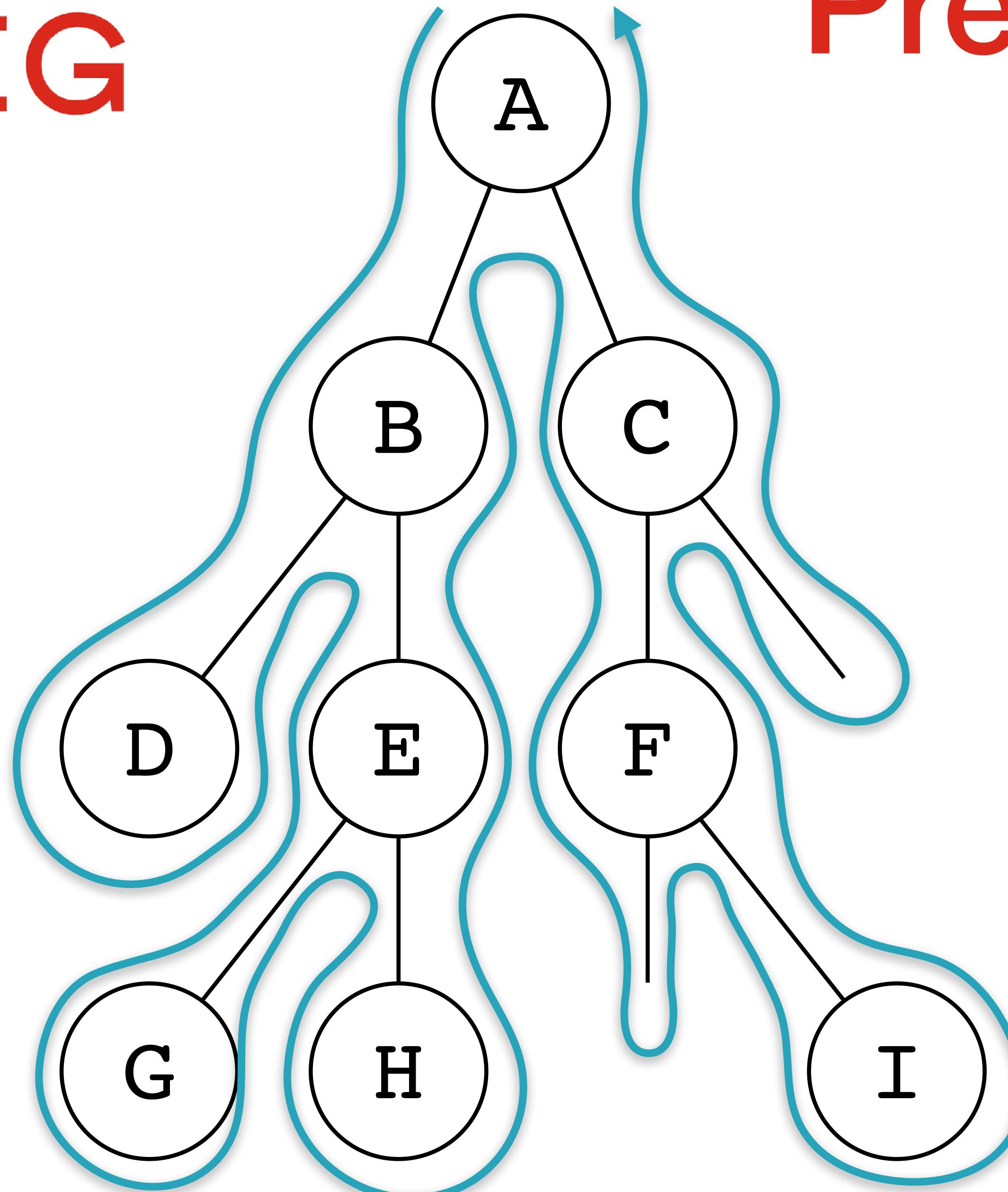


```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
- Puis sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit



Pré-ordre

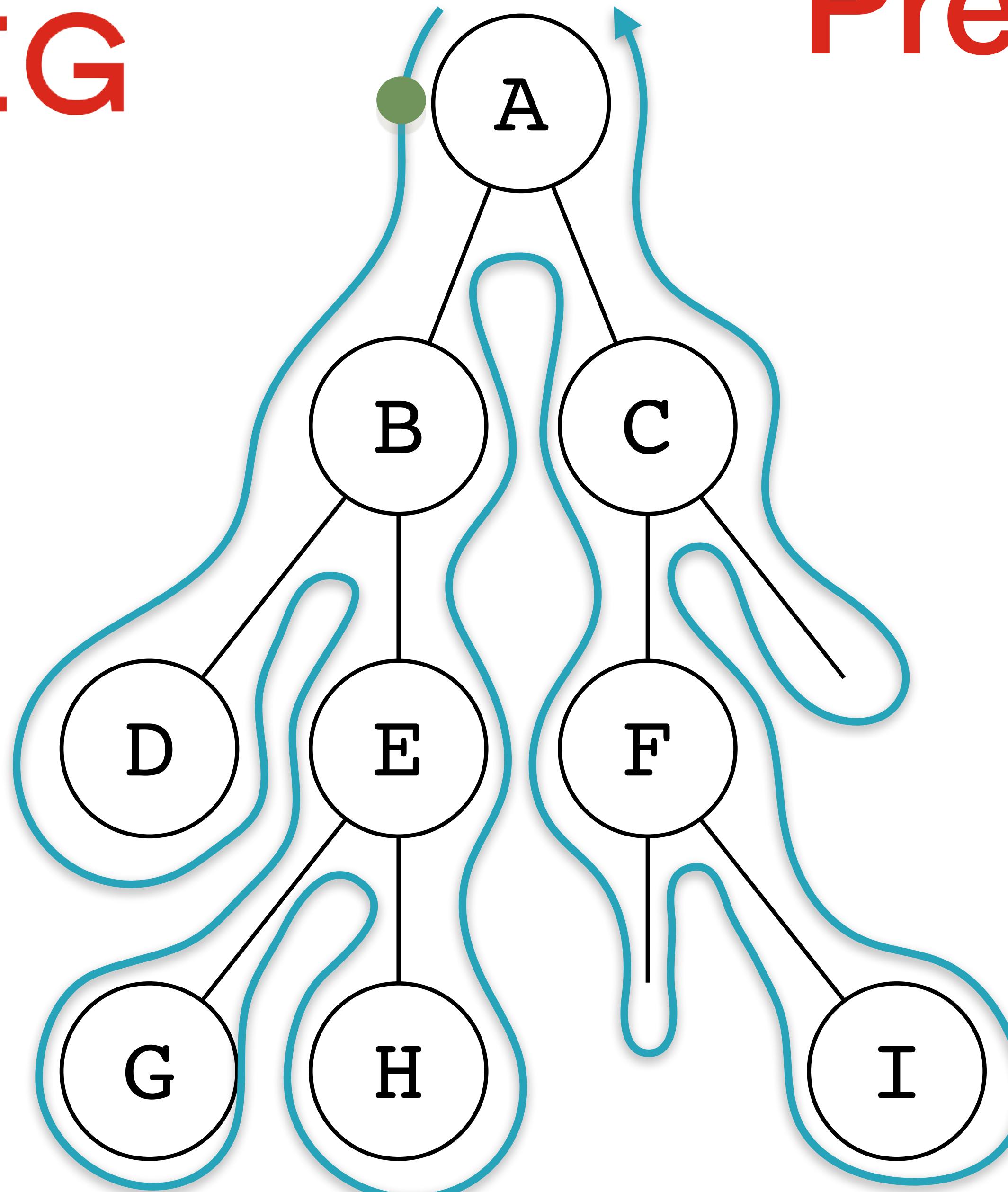


```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
- Puis sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit



Pré-ordre

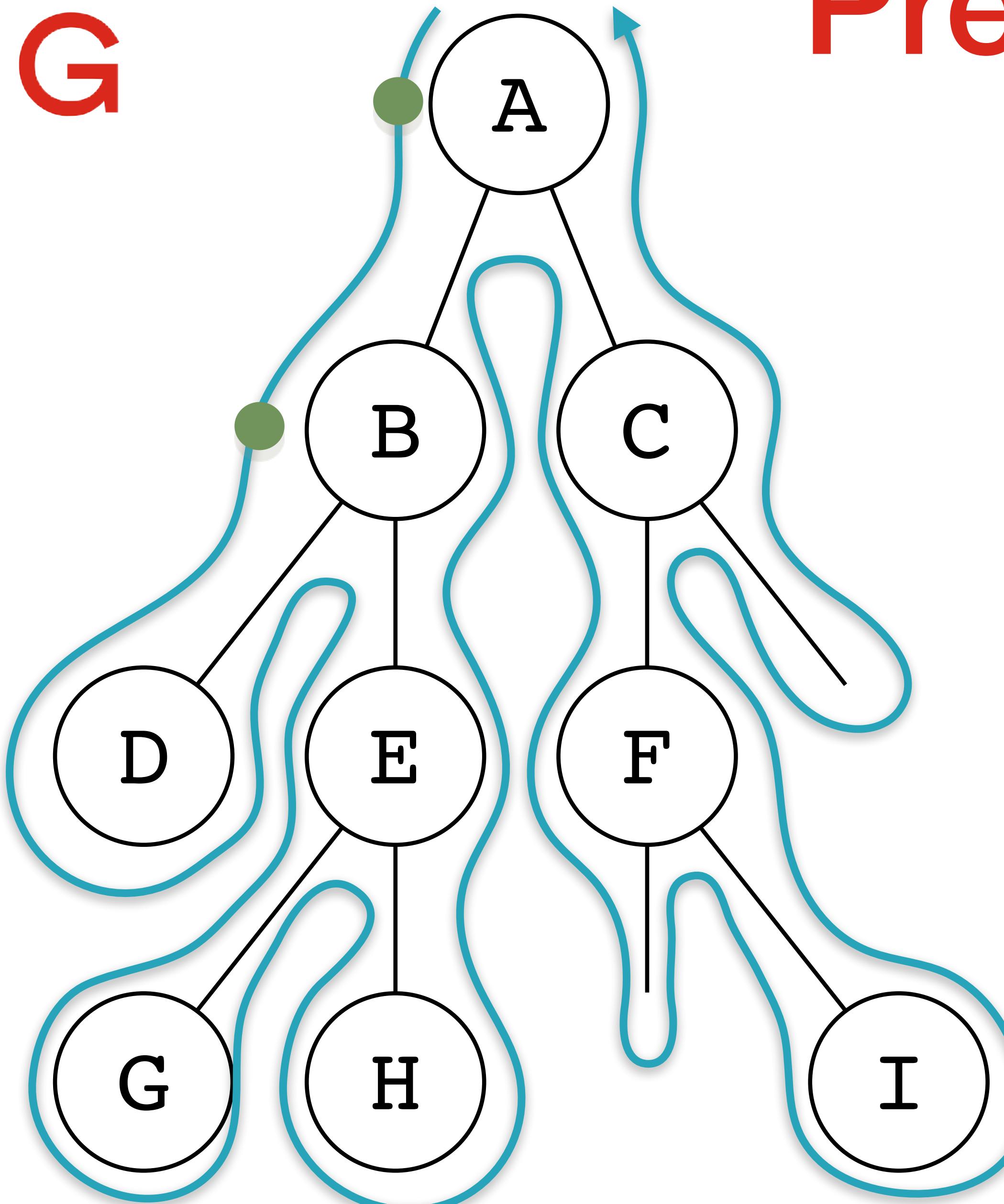


```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
 - Puis sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
- A



Pré-ordre

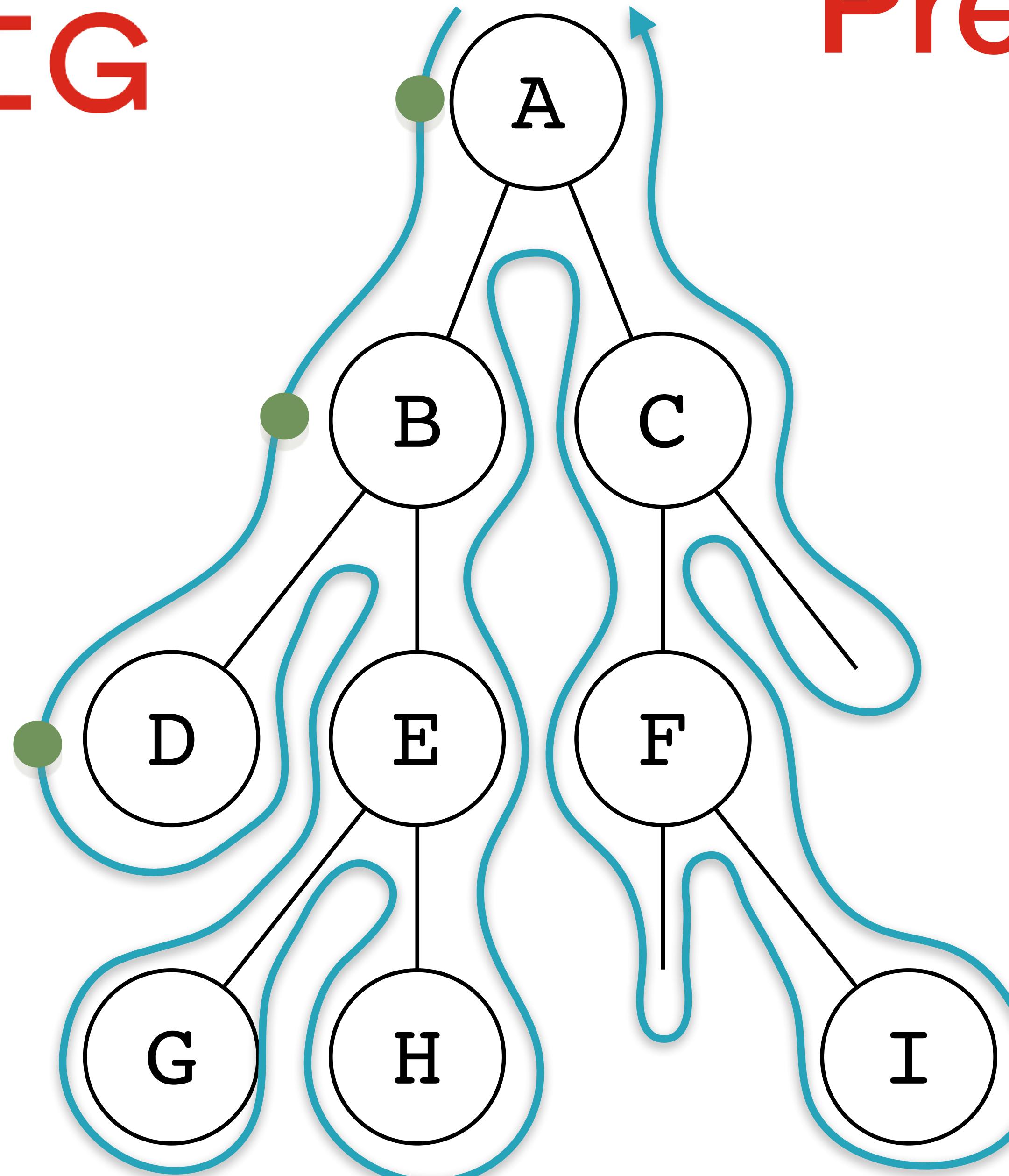


```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droite, fn)
```

- Racine
 - Puis sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
- A-B



Pré-ordre

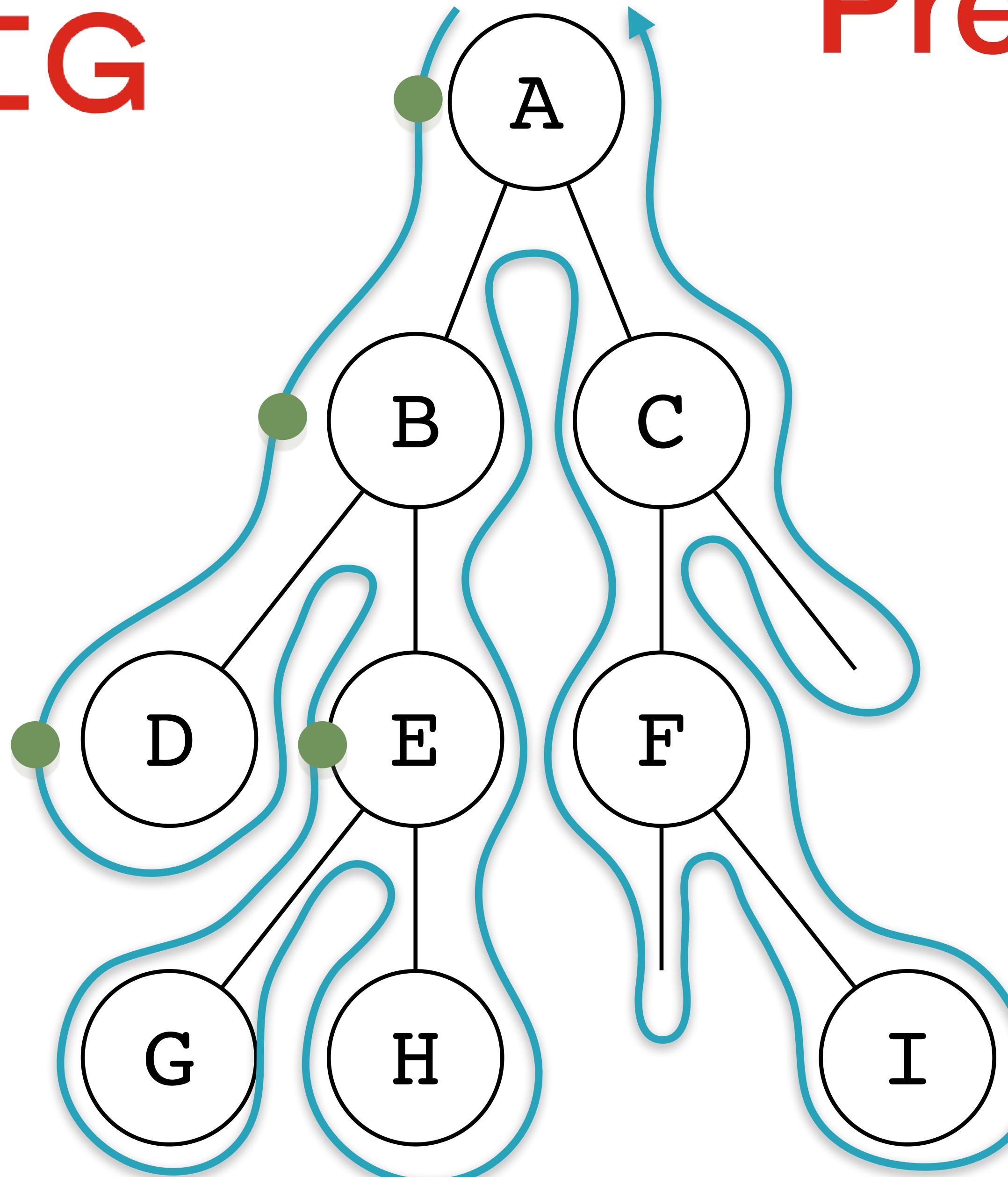


```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
 - Puis sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
- A-B-D



Pré-ordre

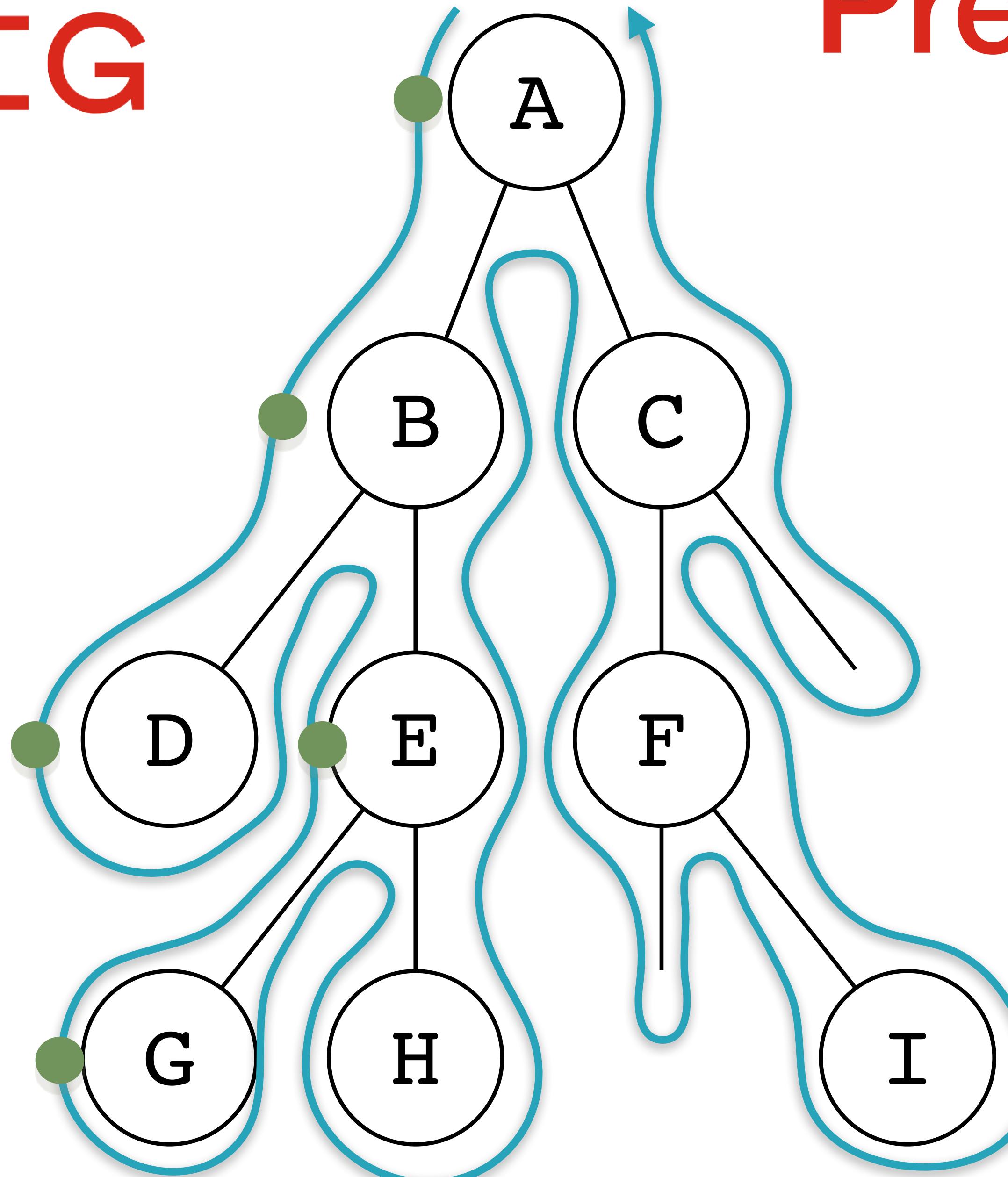


```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
 - Puis sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
- A-B-D-E



Pré-ordre



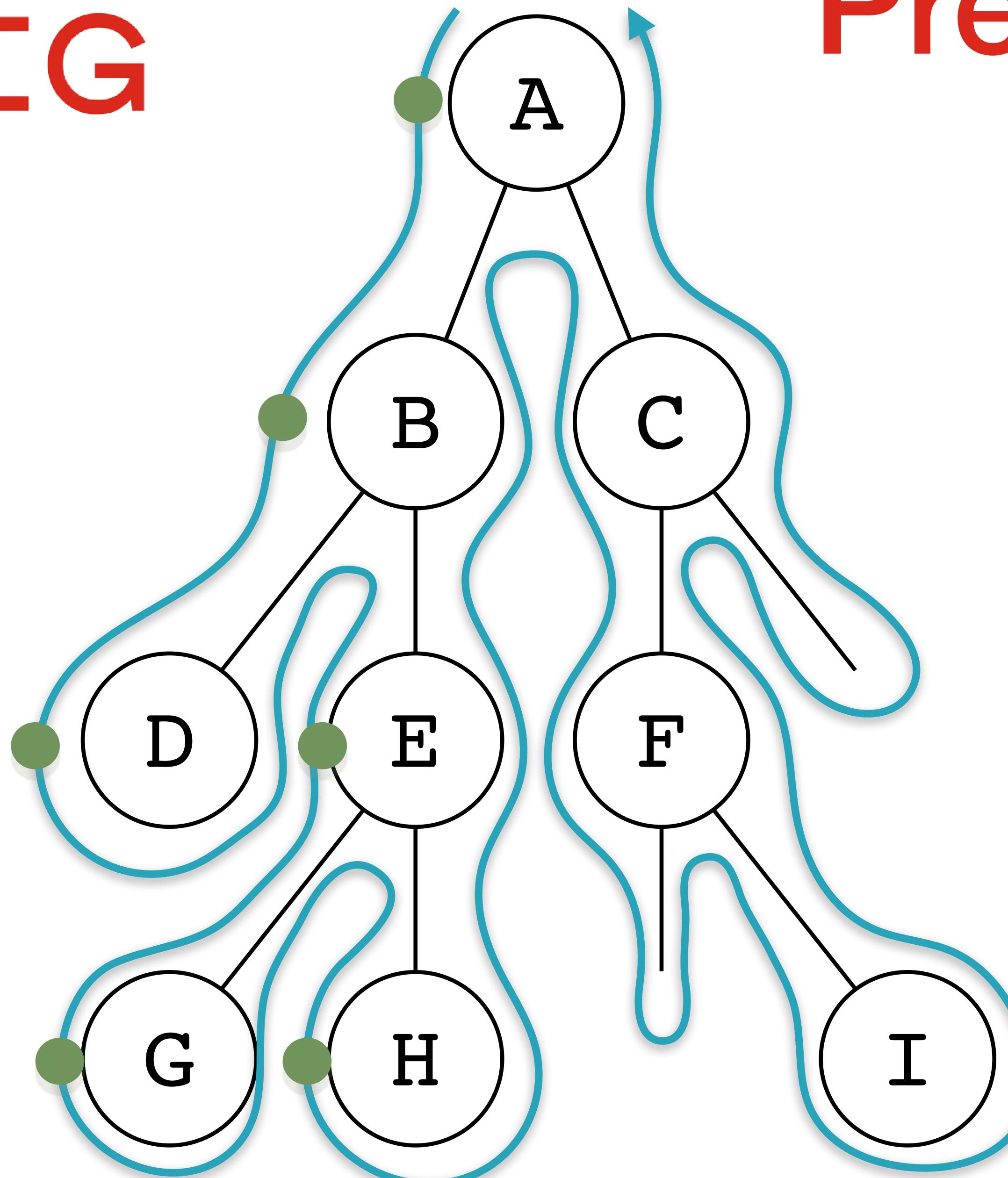
```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
- Puis sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit

A-B-D-E-G



Pré-ordre



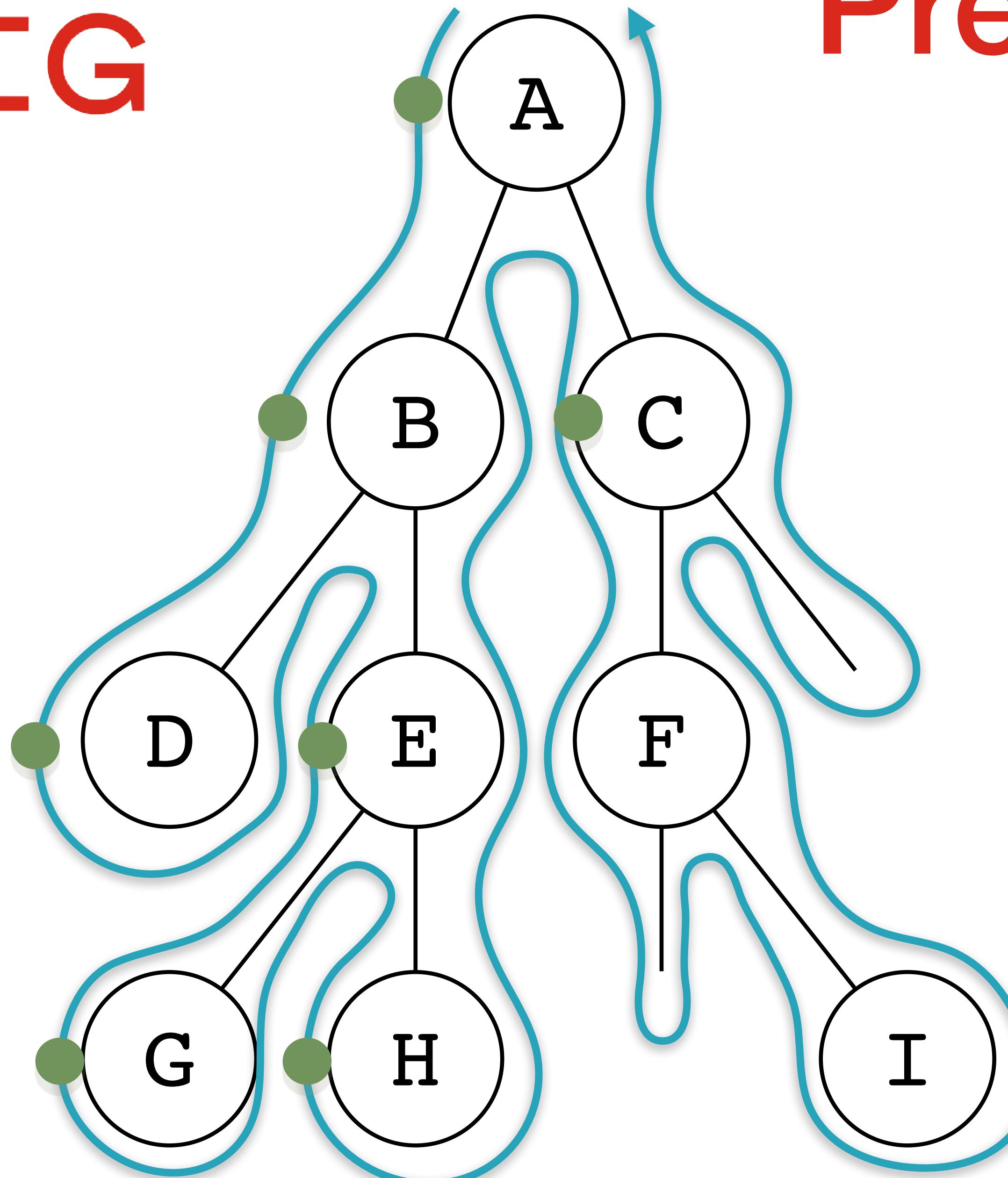
```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
- Puis sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit

A-B-D-E-G-H



Pré-ordre



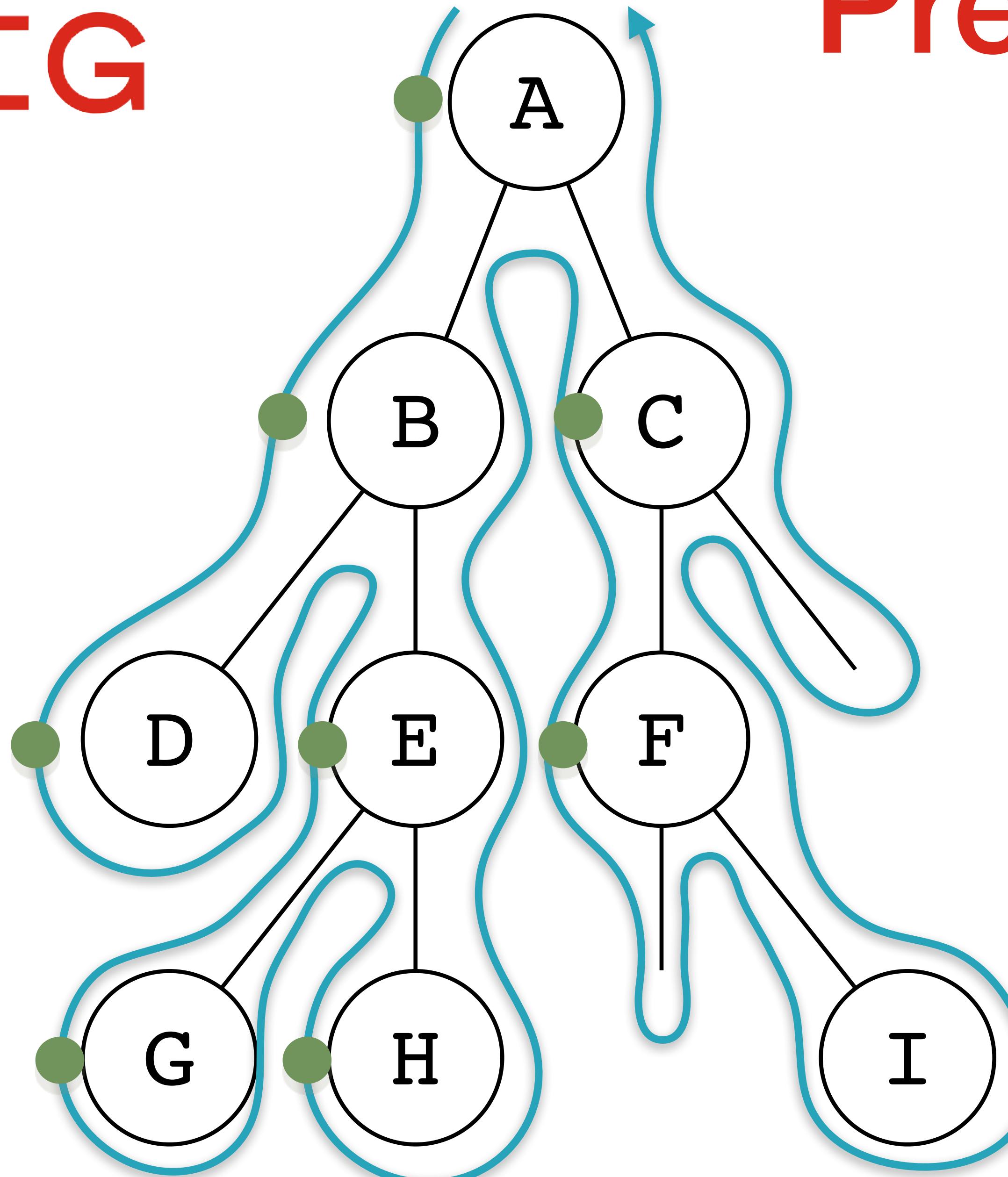
```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
- Puis sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit

A-B-D-E-G-H-C



Pré-ordre



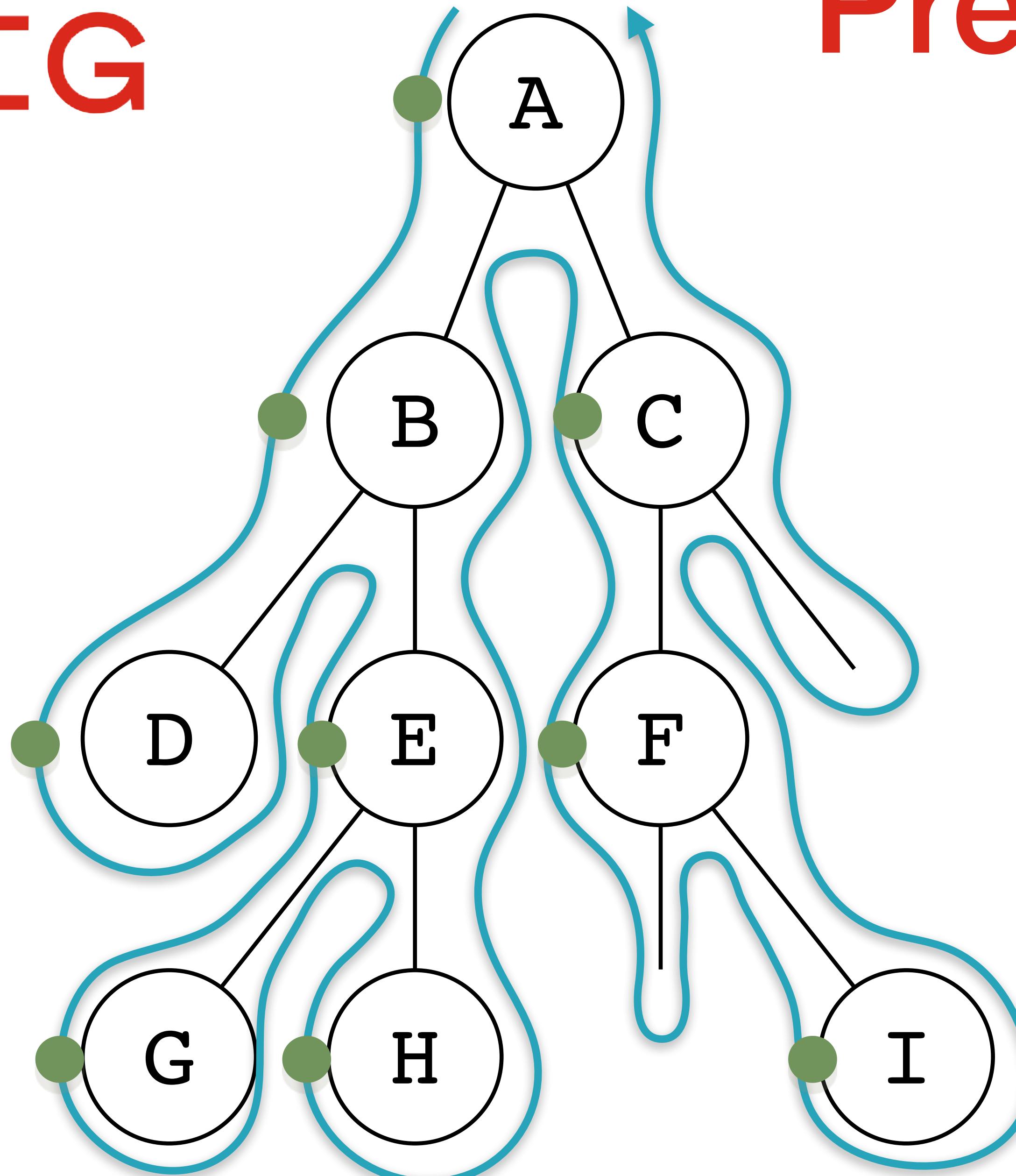
```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
- Puis sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit

A-B-D-E-G-H-C-F



Pré-ordre



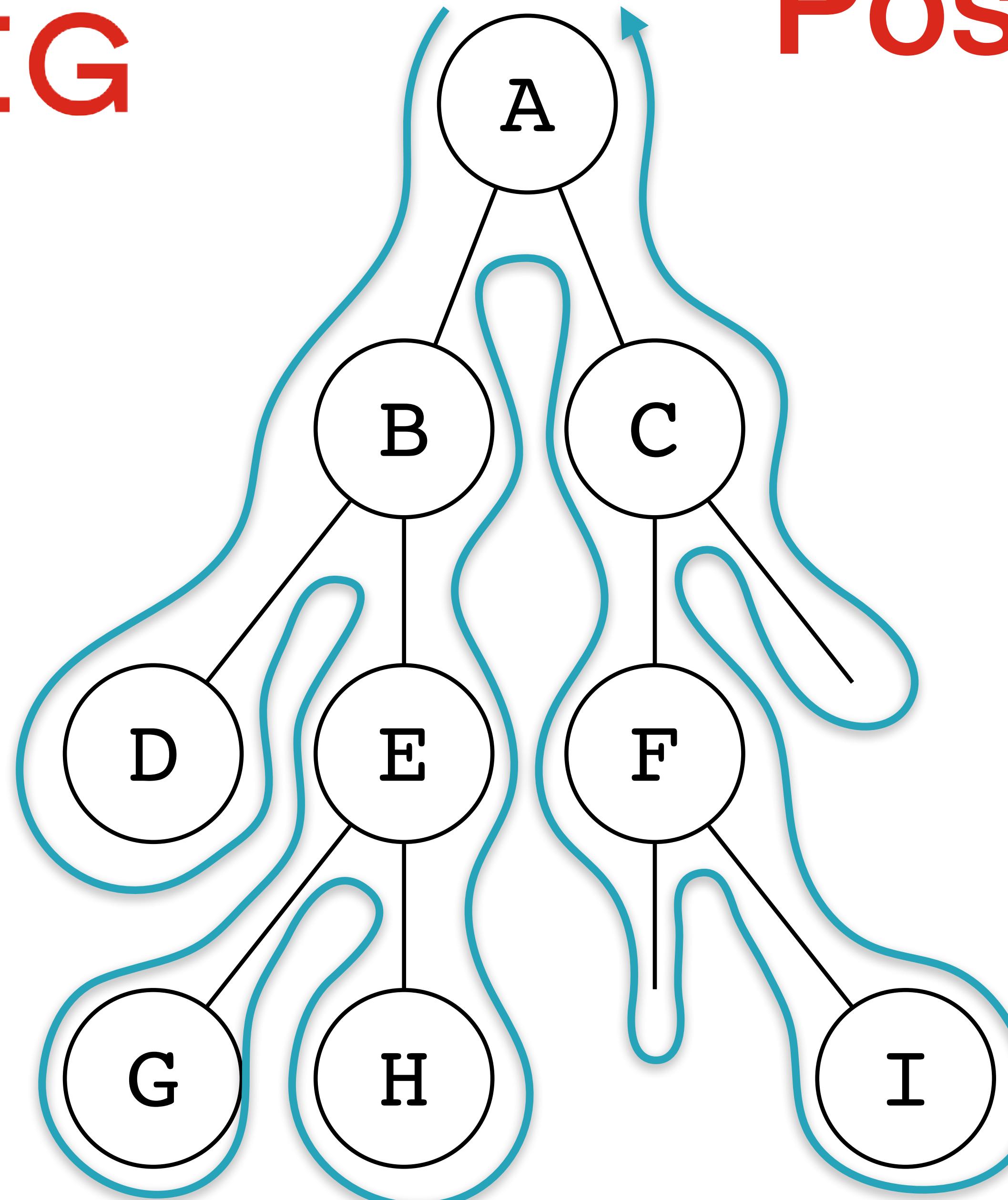
```
fonction pré-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        fn(r)
        pré-ordre(r.gauche, fn)
        pré-ordre(r.droit, fn)
```

- Racine
- Puis sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit

A-B-D-E-G-H-C-F-I



Post-ordre

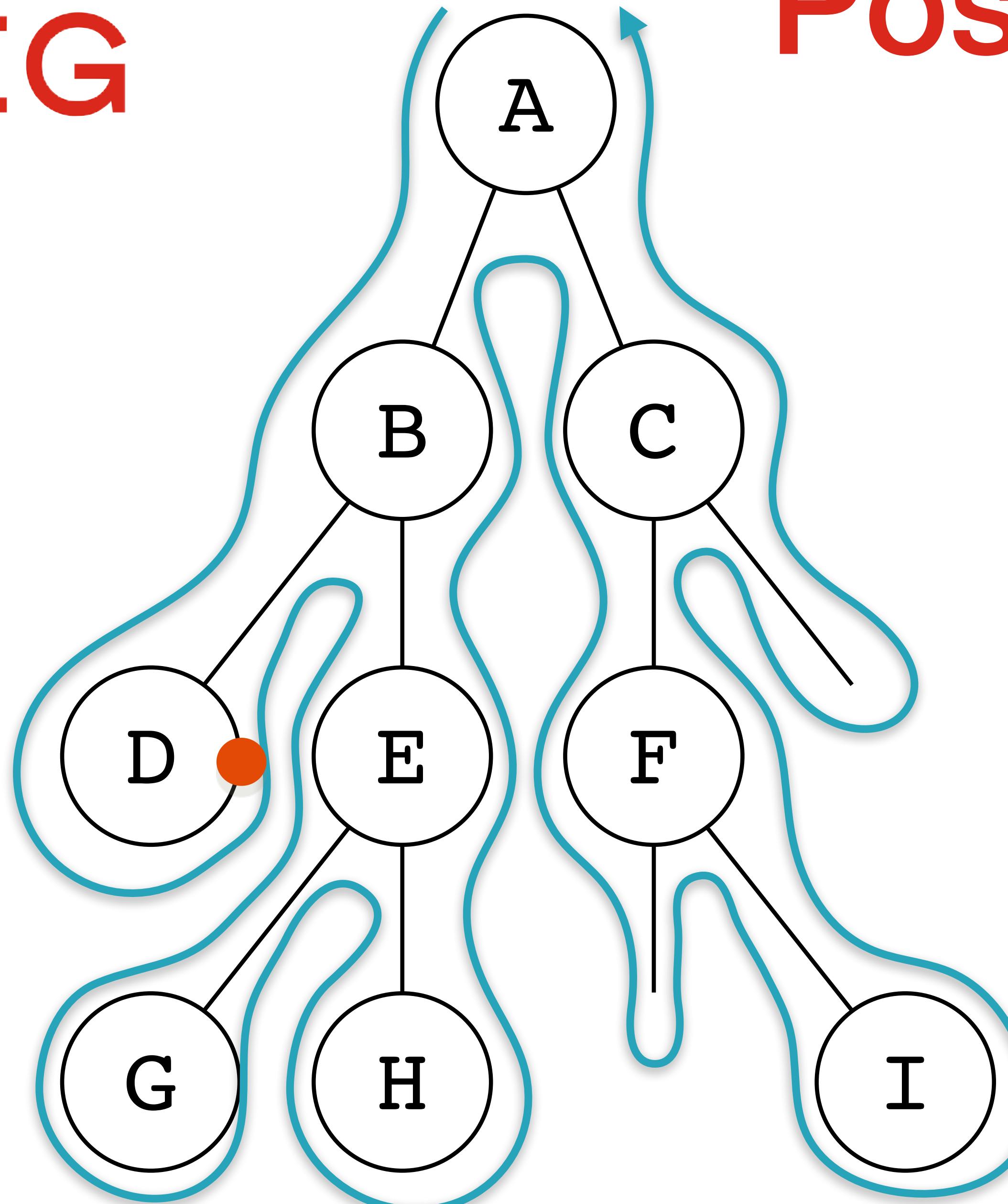


```
fonction post-ordre (r, fn)
  si r != Ø
    post-ordre(r.gauche, fn)
    post-ordre(r.droite, fn)
    fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis sous-arbre droit
- Puis racine



Post-ordre

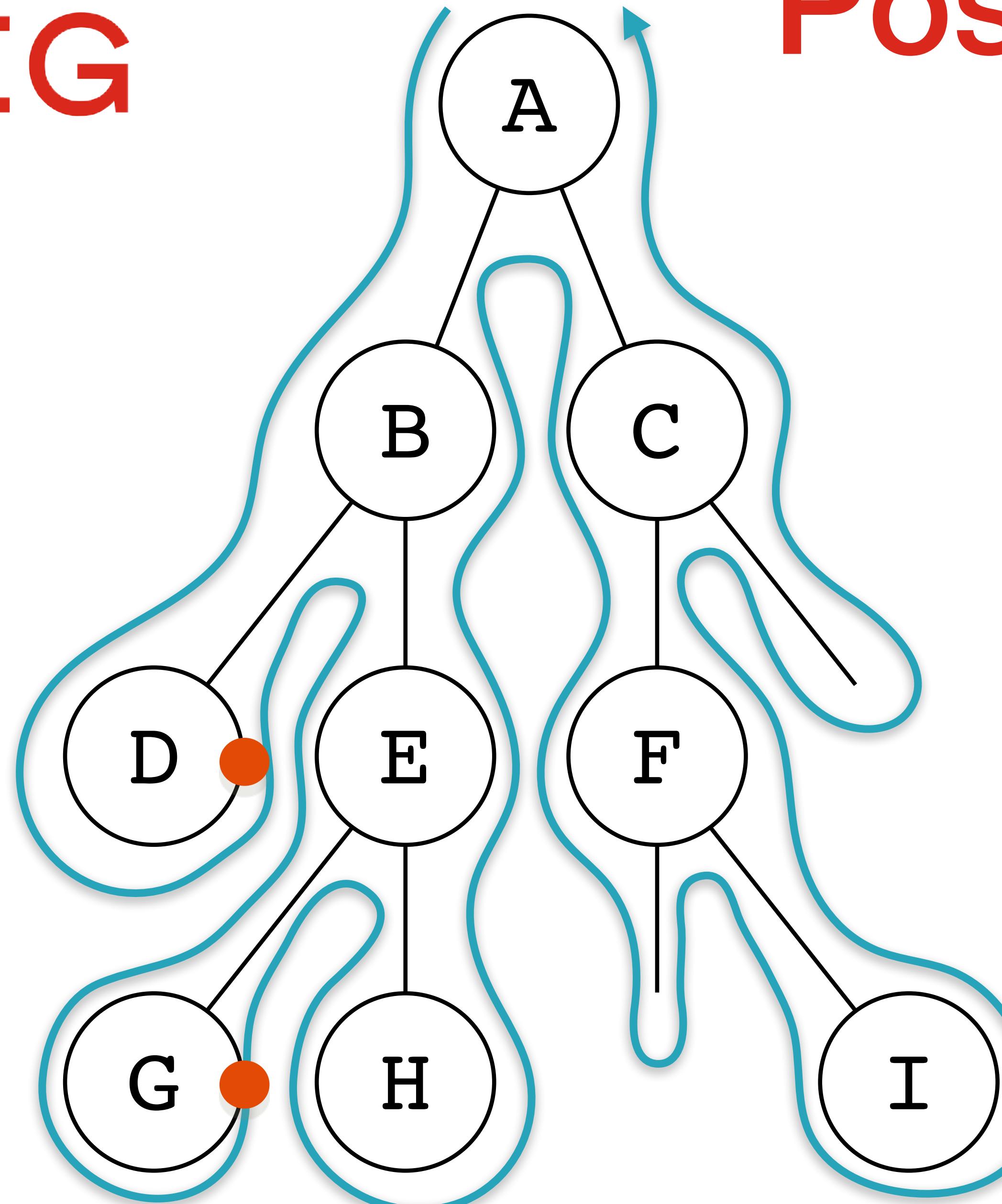


```
fonction post-ordre (r, fn)
  si r != Ø
    post-ordre(r.gauche, fn)
    post-ordre(r.droite, fn)
    fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D



Post-ordre

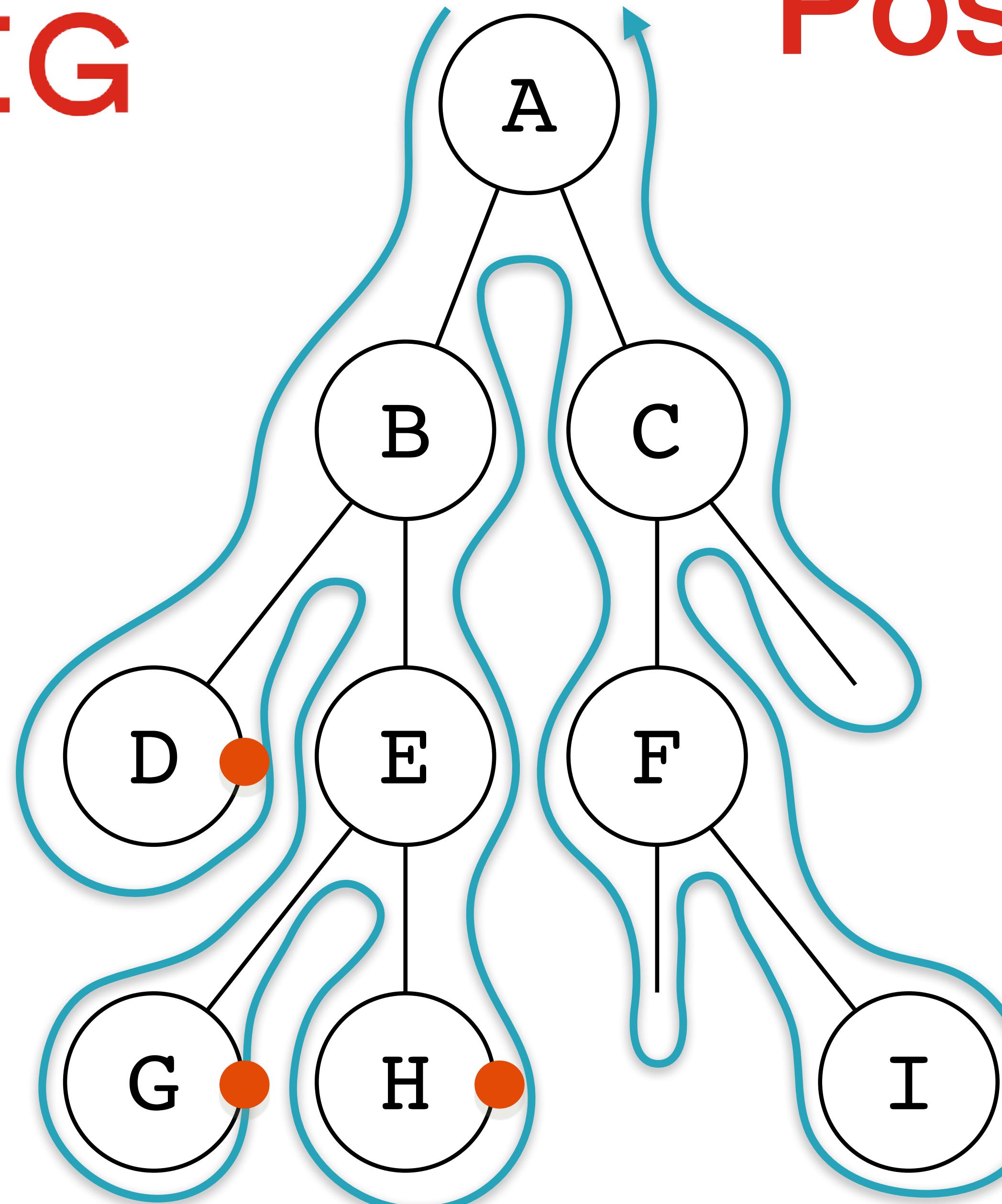


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G



Post-ordre

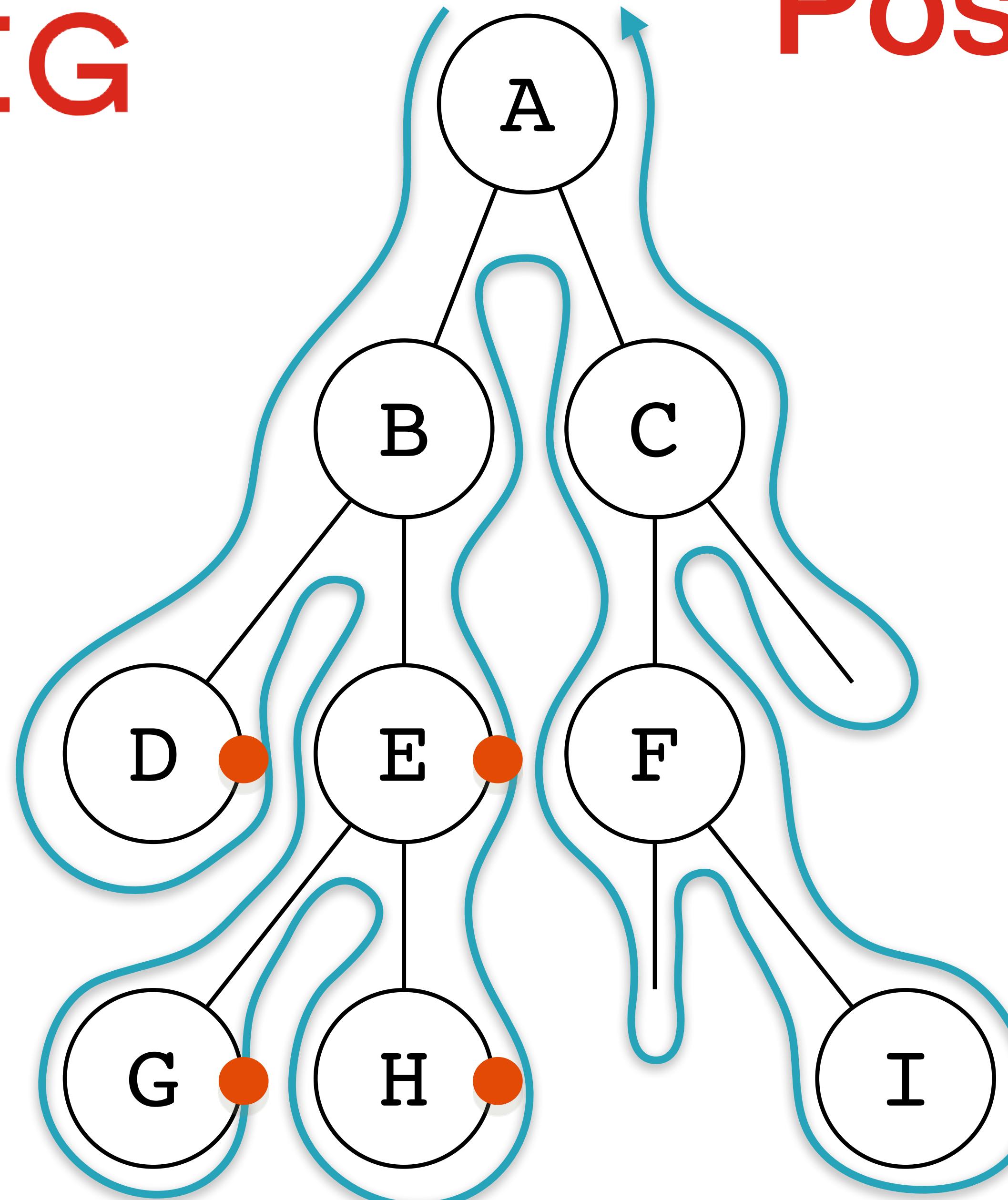


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G-H



Post-ordre

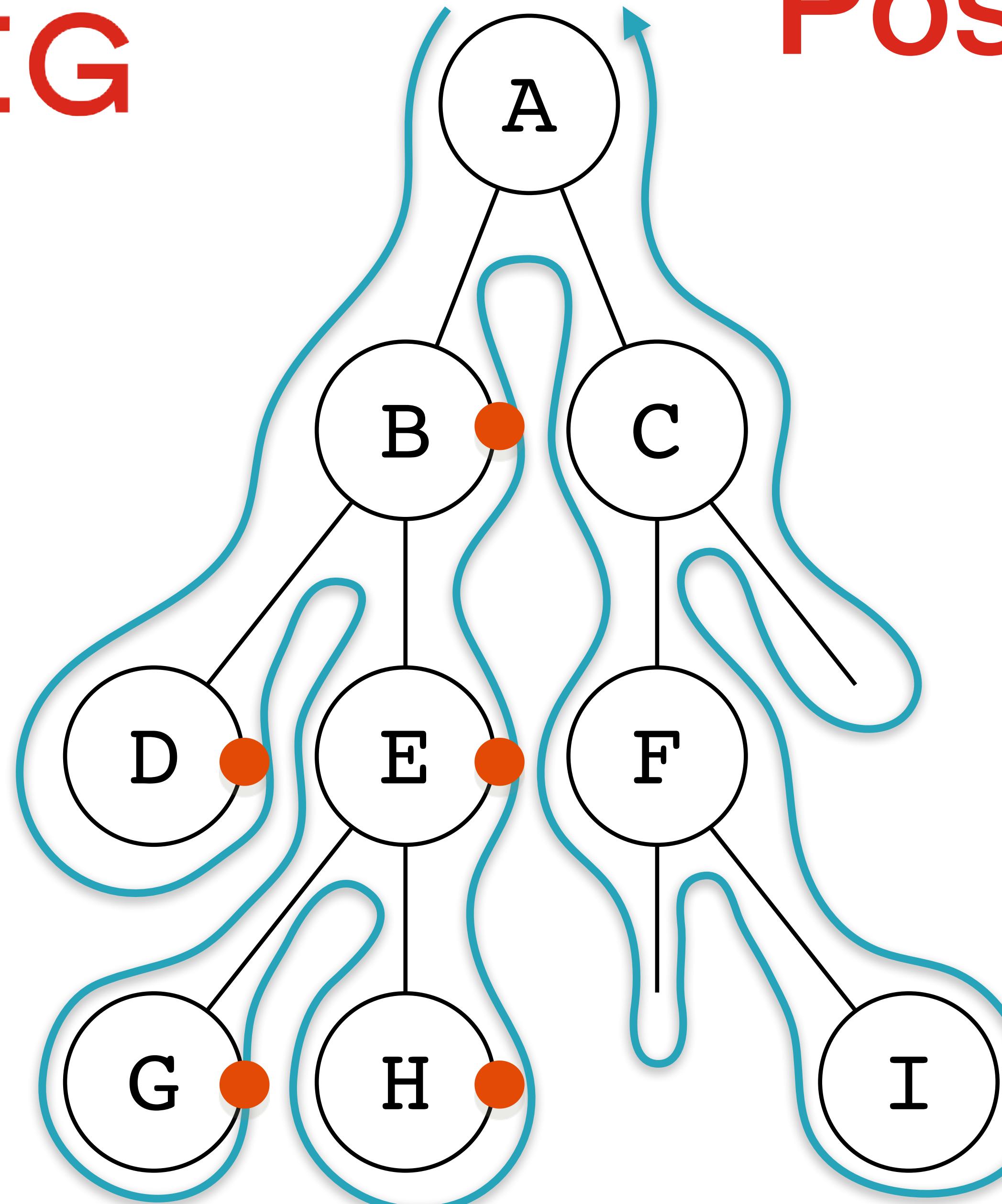


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G-H-E



Post-ordre

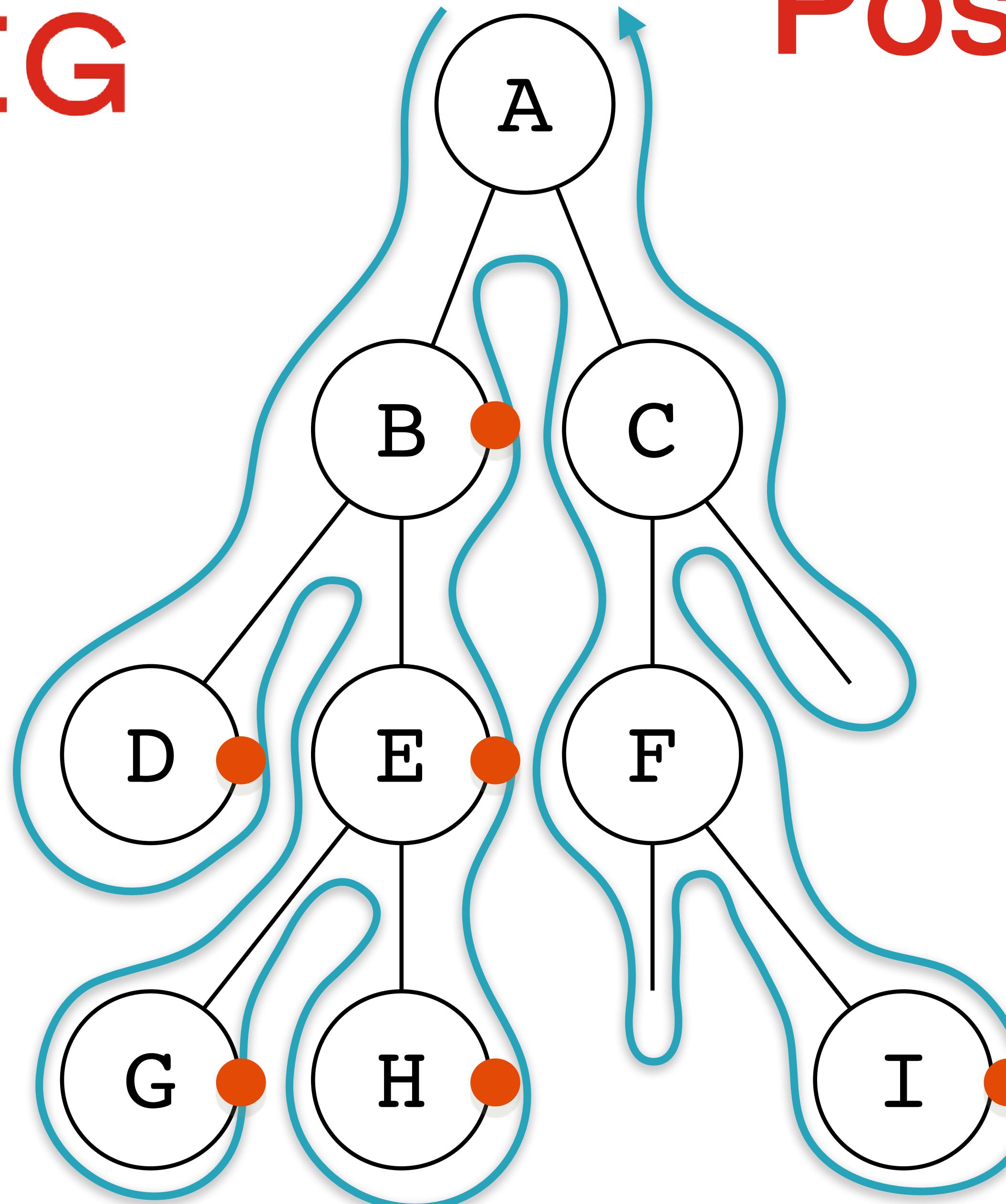


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G-H-E-B



Post-ordre

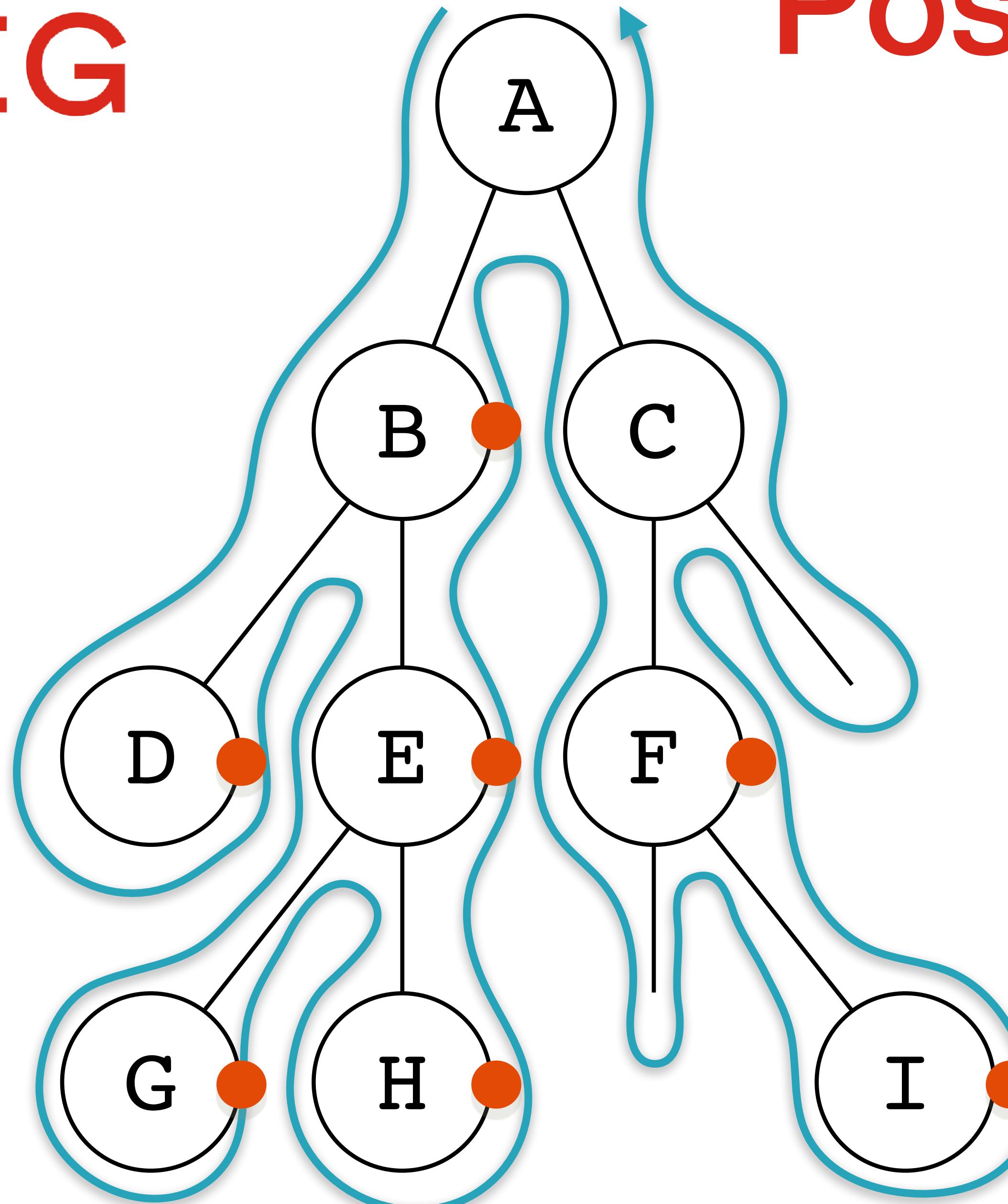


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G-H-E-B-I



Post-ordre

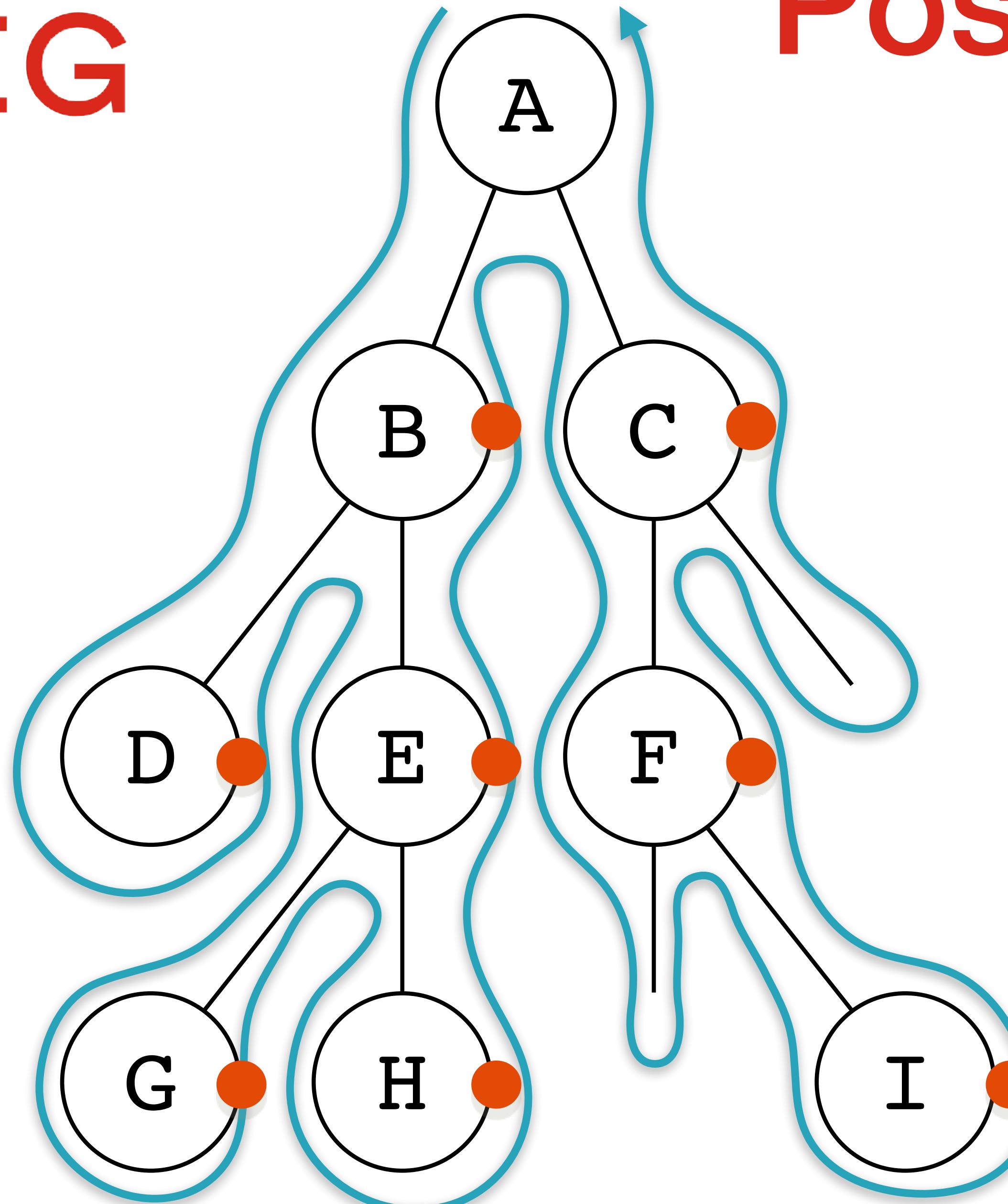


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G-H-E-B-I-F



Post-ordre

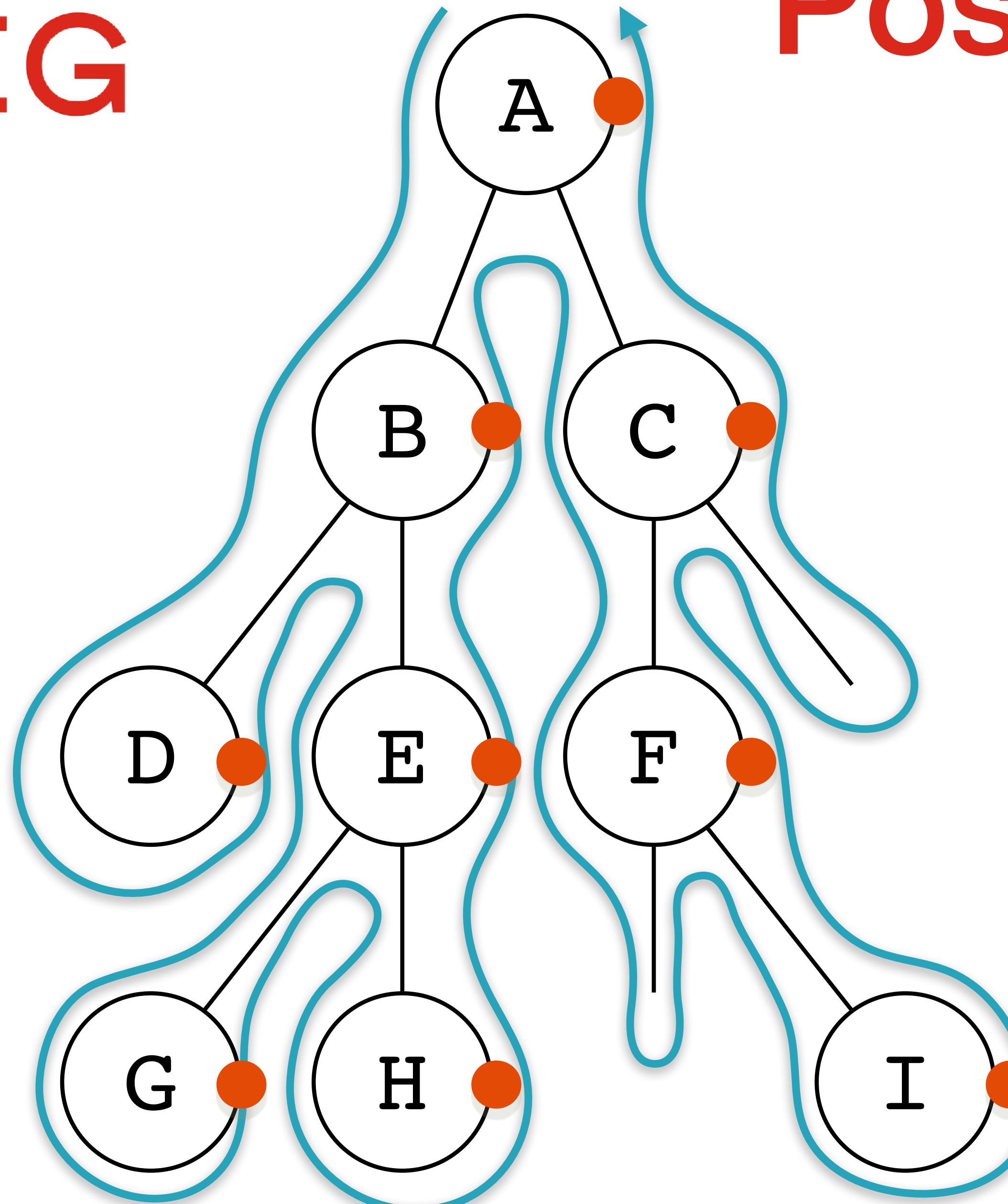


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G-H-E-B-I-F-C



Post-ordre

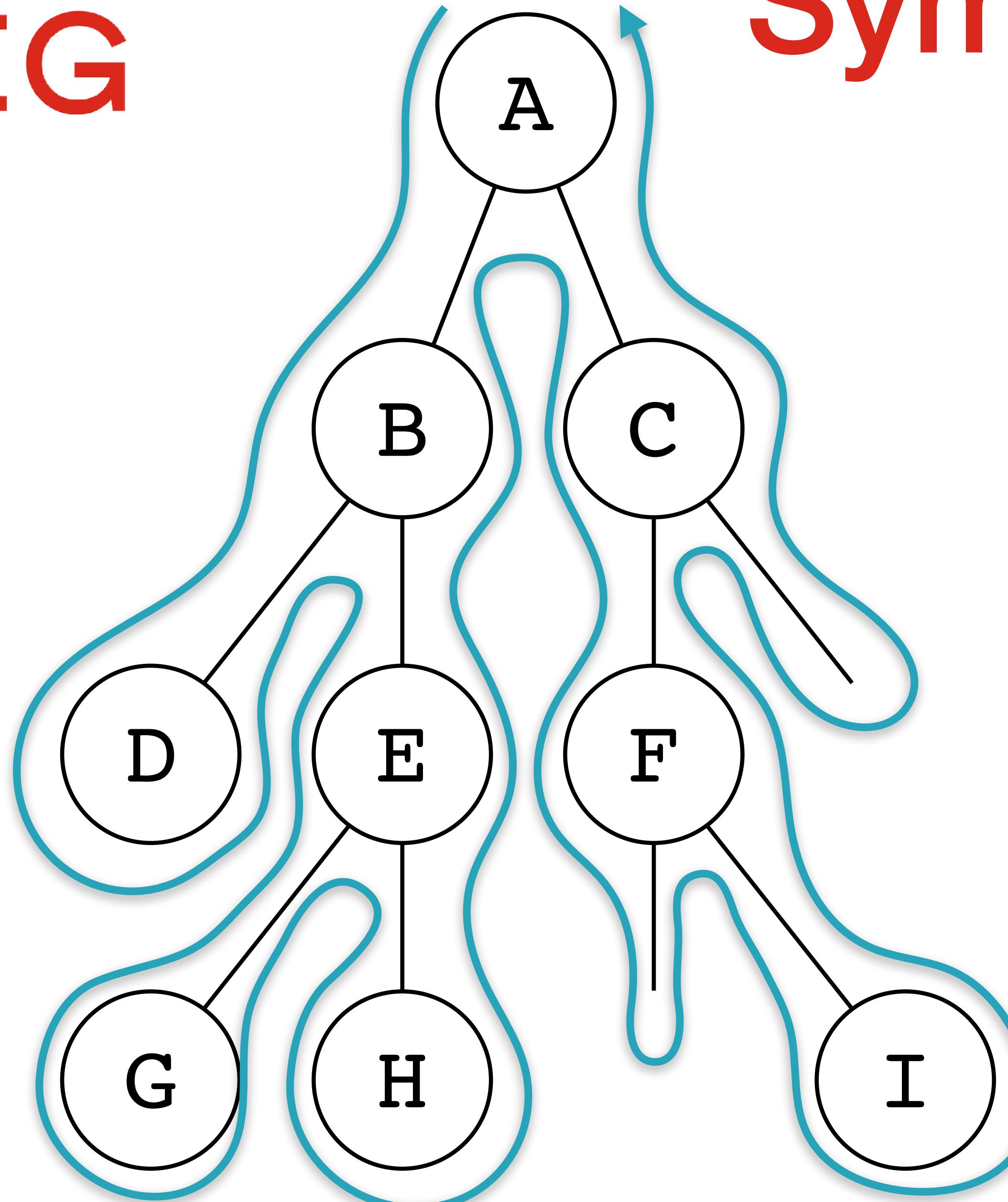


```
fonction post-ordre (r, fn)
    si r != Ø
        post-ordre(r.gauche, fn)
        post-ordre(r.droite, fn)
        fn(r)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis sous-arbre droit
 - Puis racine
- D-G-H-E-B-I-F-C-A



Symétrique

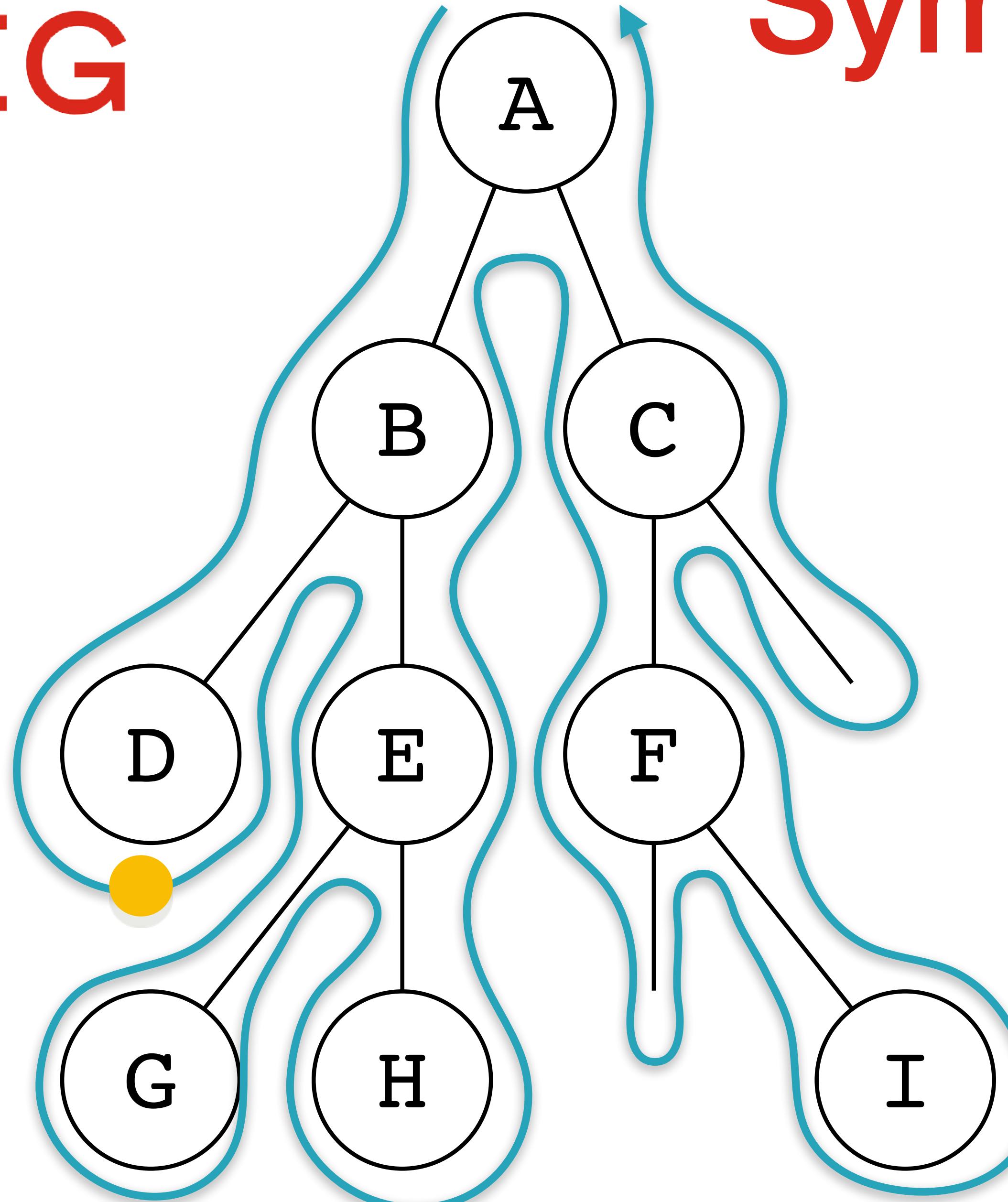


```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droit, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit



Symétrique



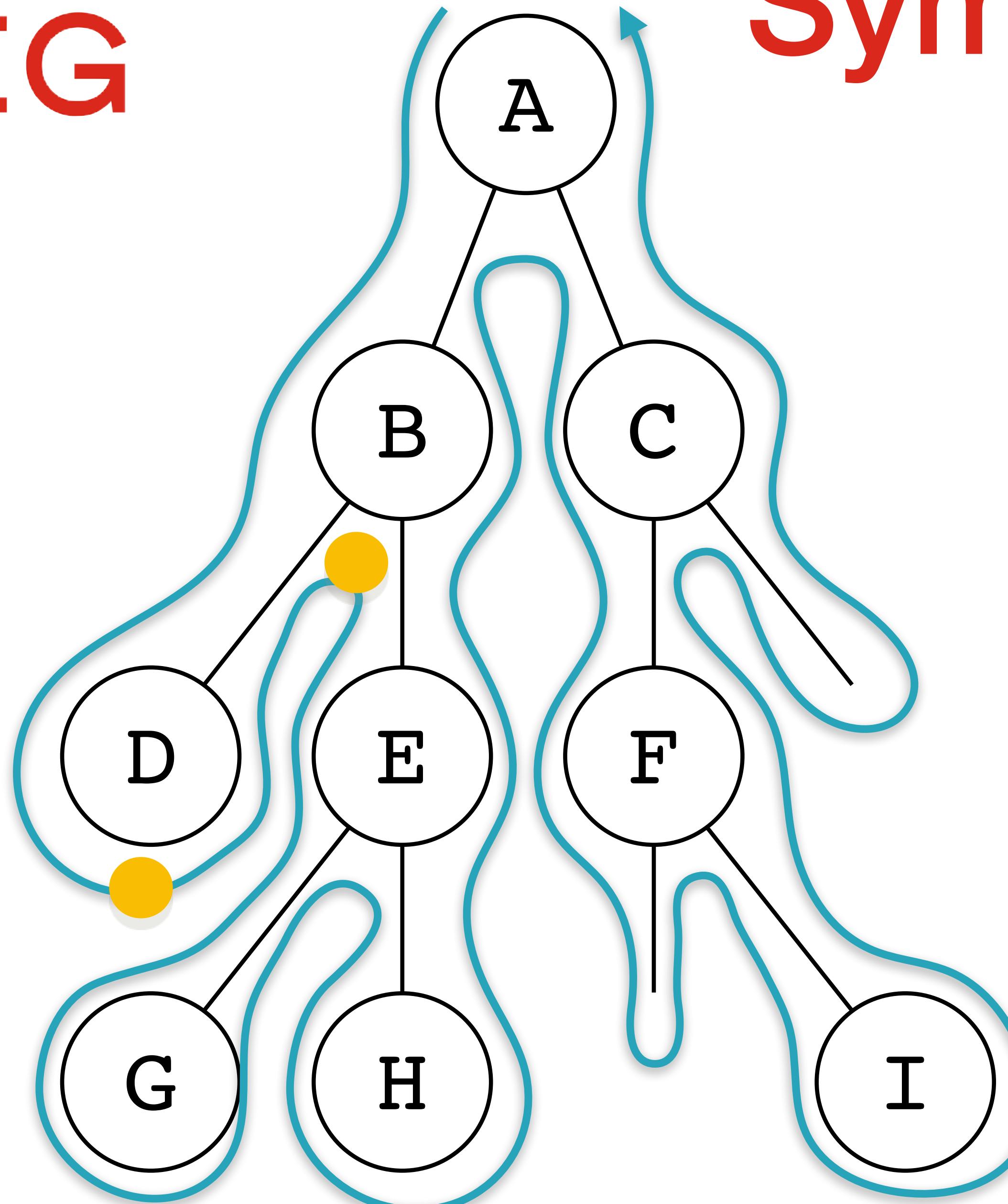
```
fonction symétrique (r, fn)
  si r != Ø
    symétrique(r.gauche, fn)
    fn(r)
    symétrique(r.droit, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D



Symétrique



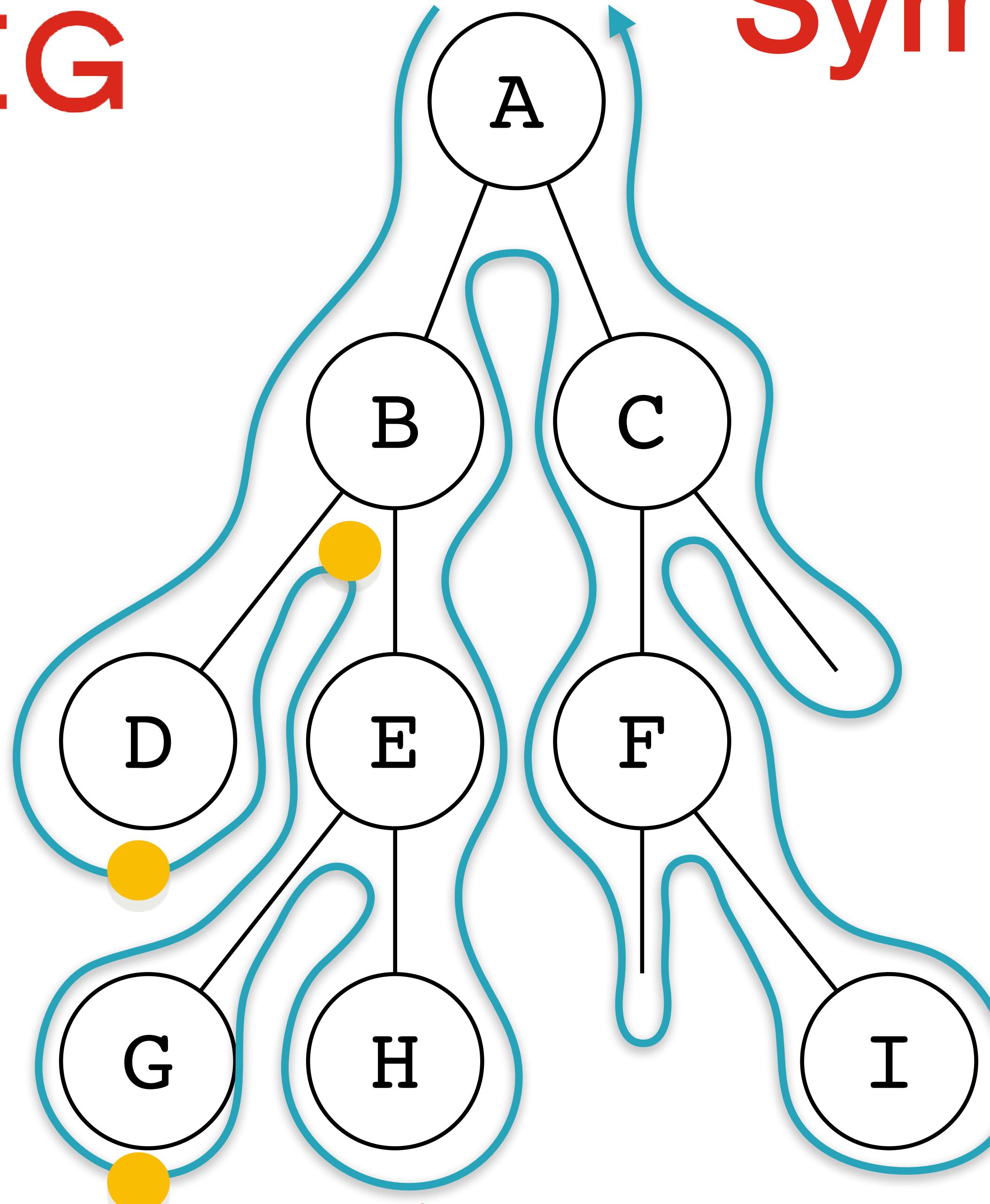
```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droit, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D-B



Symétrique

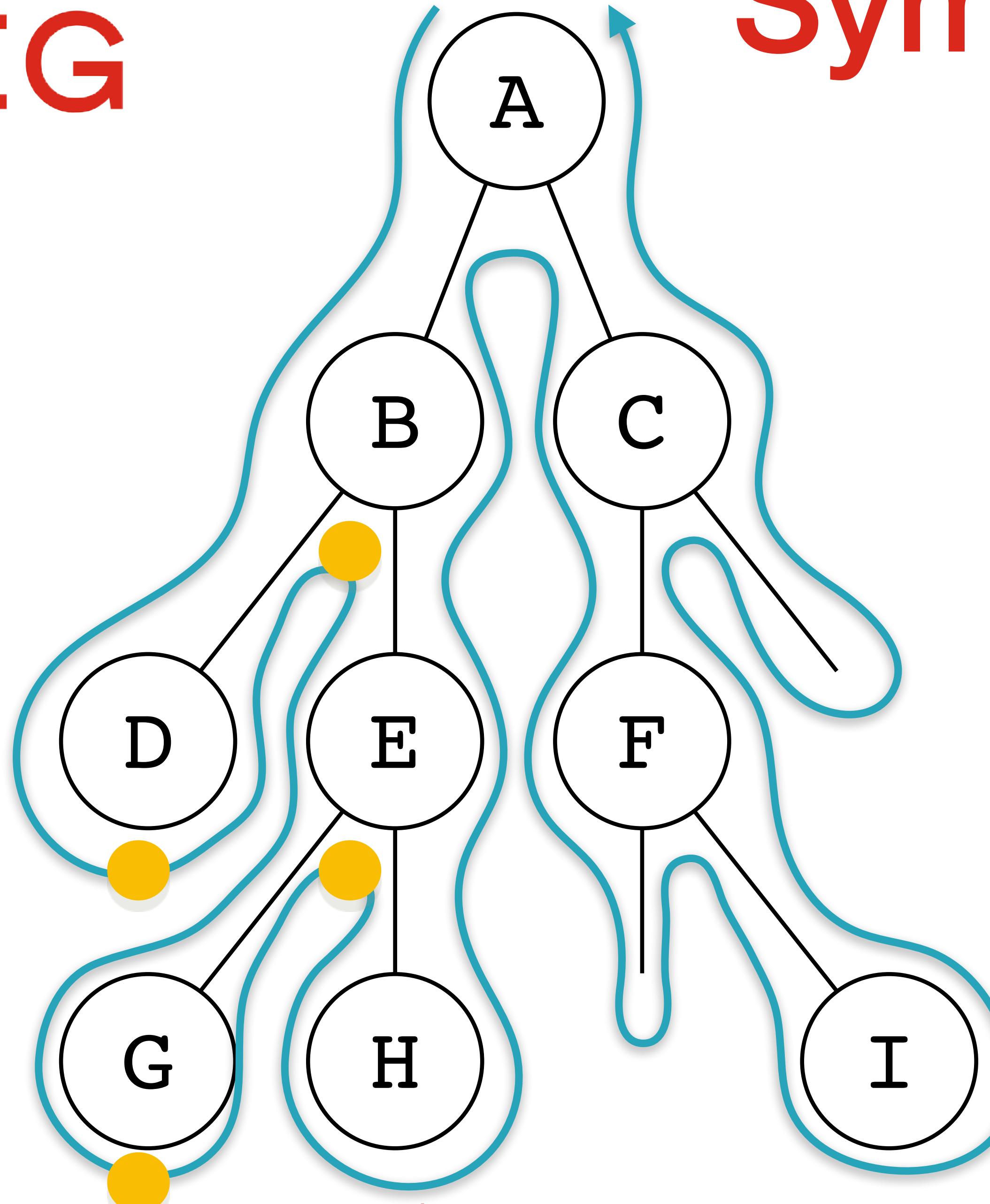


```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droit, fn)
```

- Sous-arbre gauche
 - Puis racine
 - Puis sous-arbre droit
- D-B-C



Symétrique



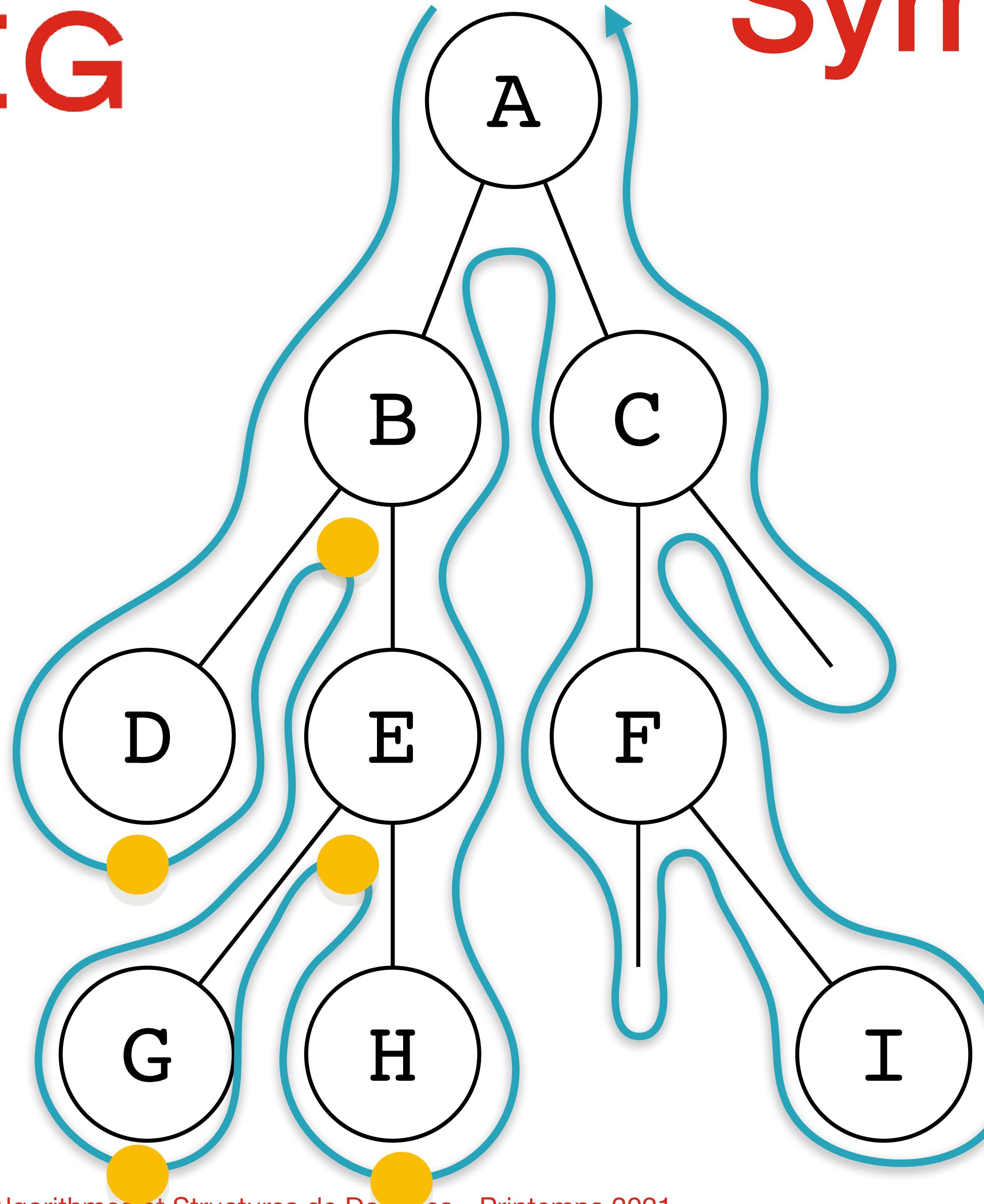
```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droite, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D-B-C-E



Symétrique



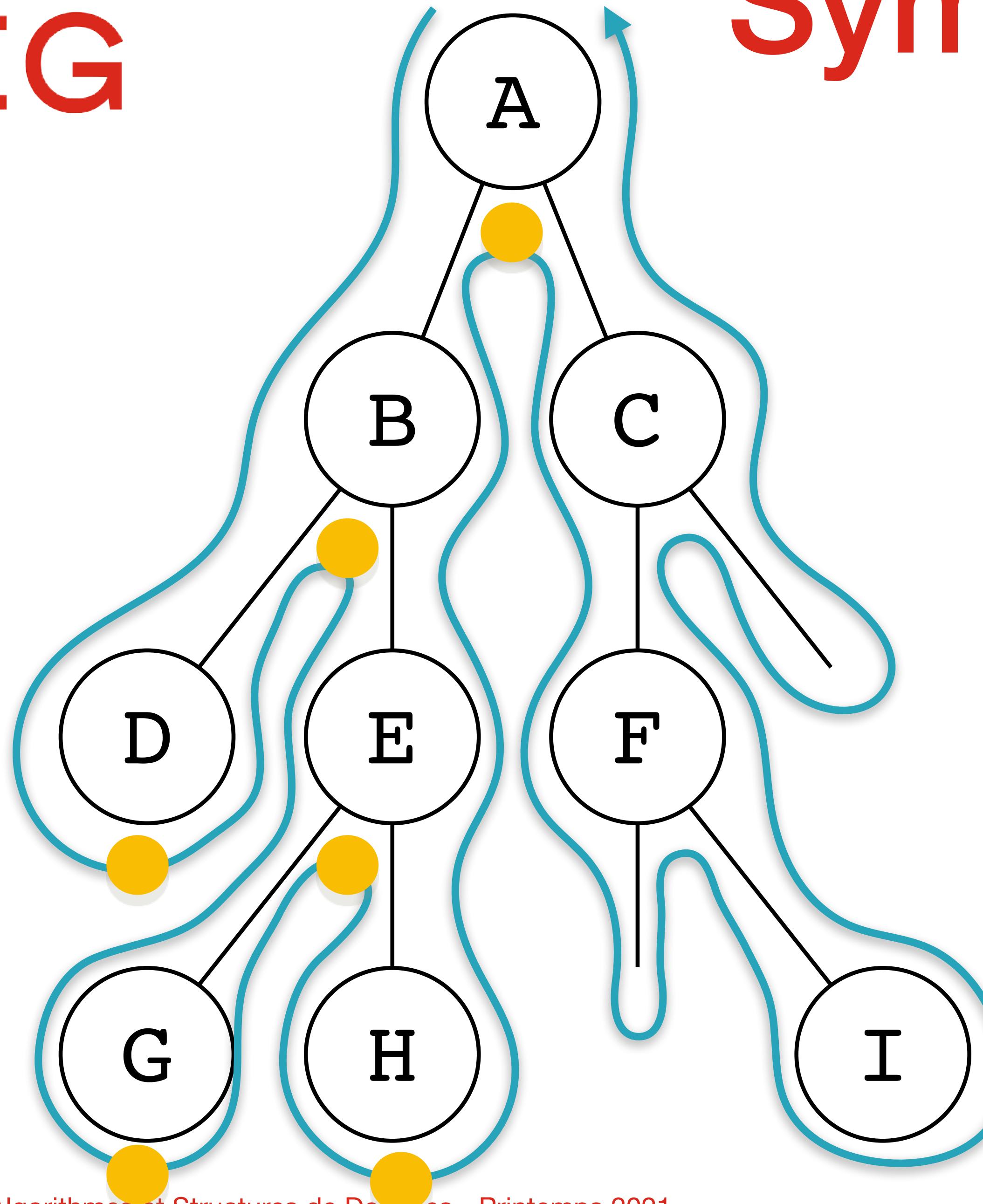
```
fonction symétrique (r, fn)
  si r != Ø
    symétrique(r.gauche, fn)
    fn(r)
    symétrique(r.droite, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D-B-C-E-H



Symétrique



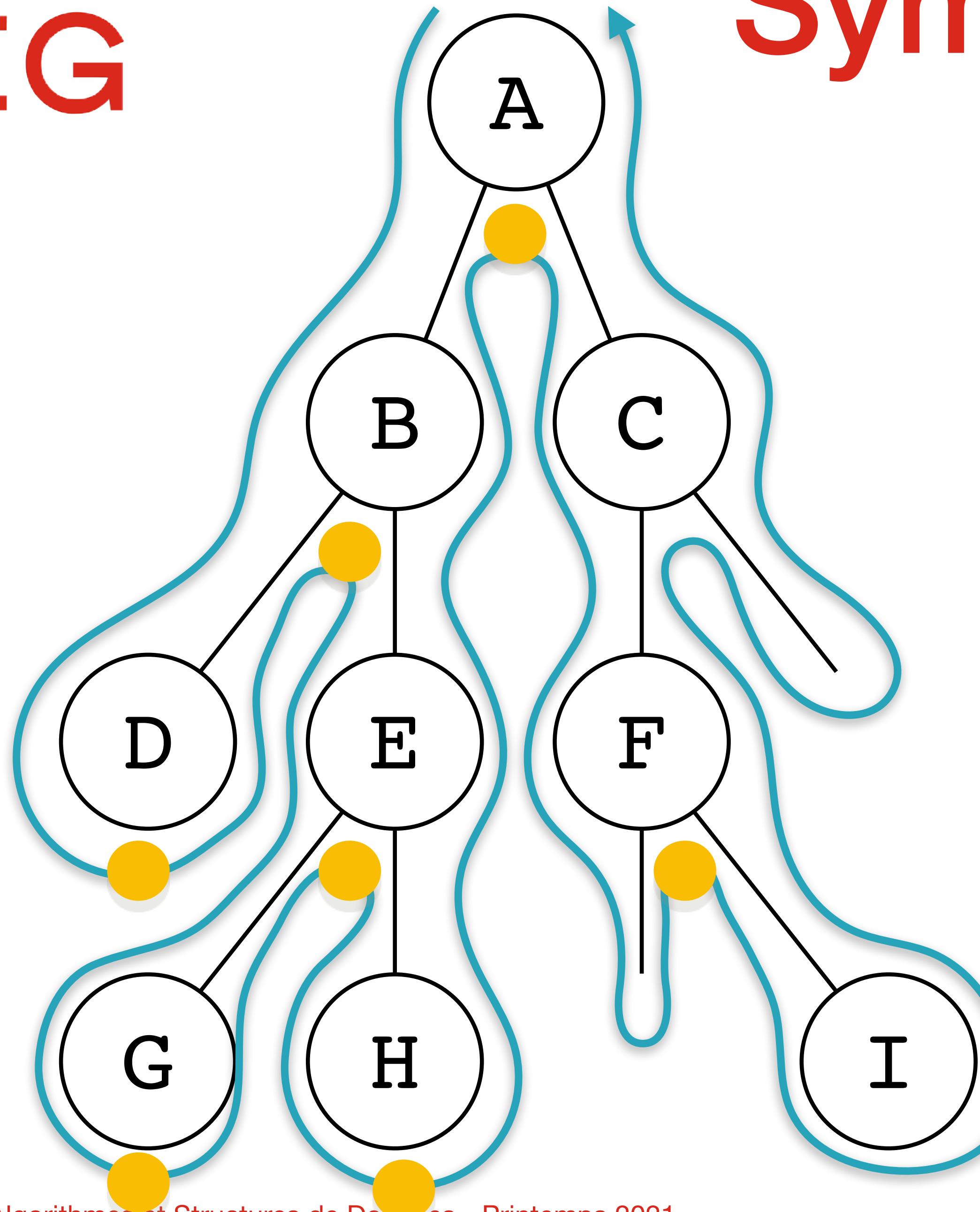
```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droite, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D-B-C-E-H-A



Symétrique



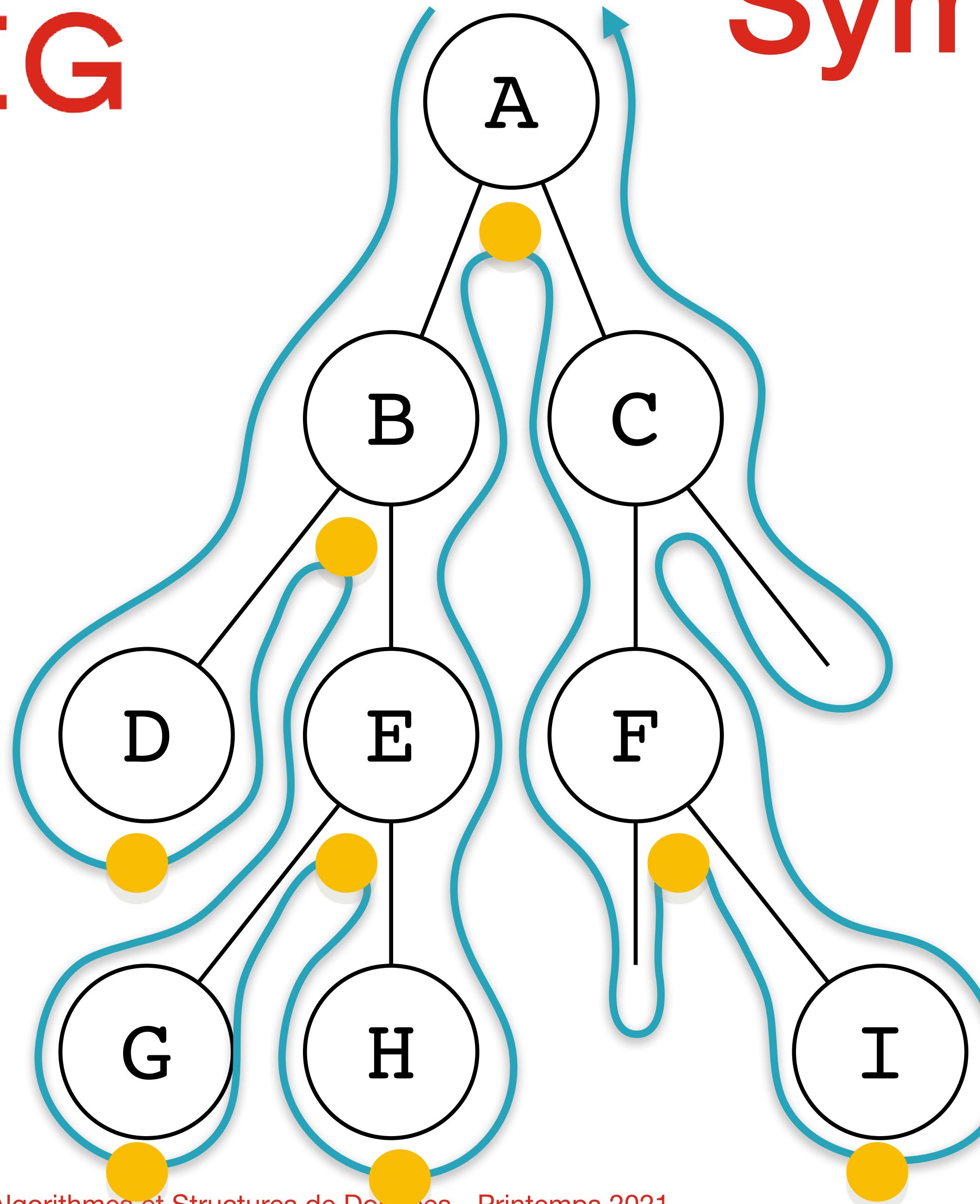
```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droit, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D-B-C-E-H-A-F



Symétrique



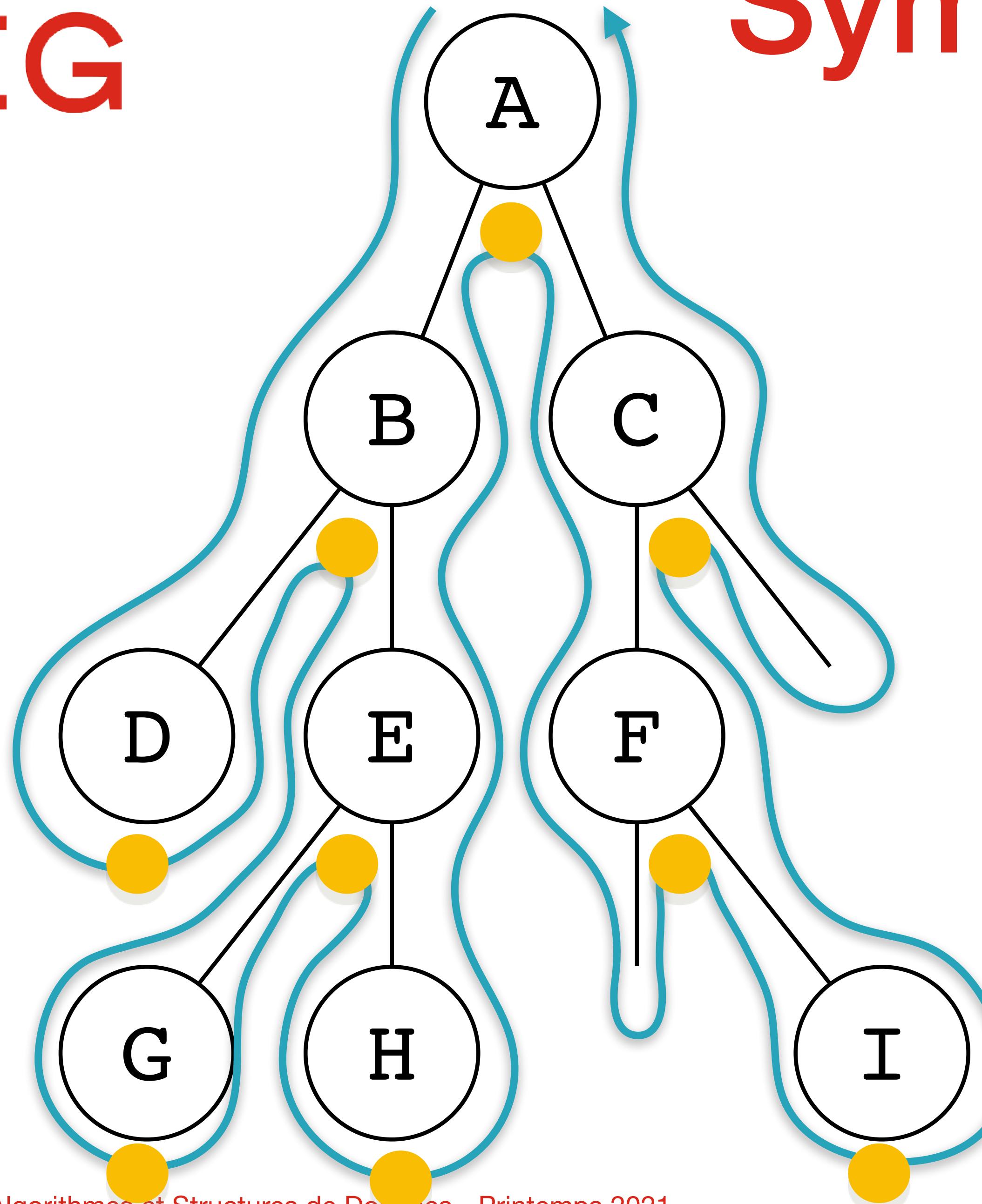
```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droite, fn)
```

- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D-B-C-E-H-A-F-I



Symétrique



```
fonction symétrique (r, fn)
    si r != Ø
        symétrique(r.gauche, fn)
        fn(r)
        symétrique(r.droite, fn)
```

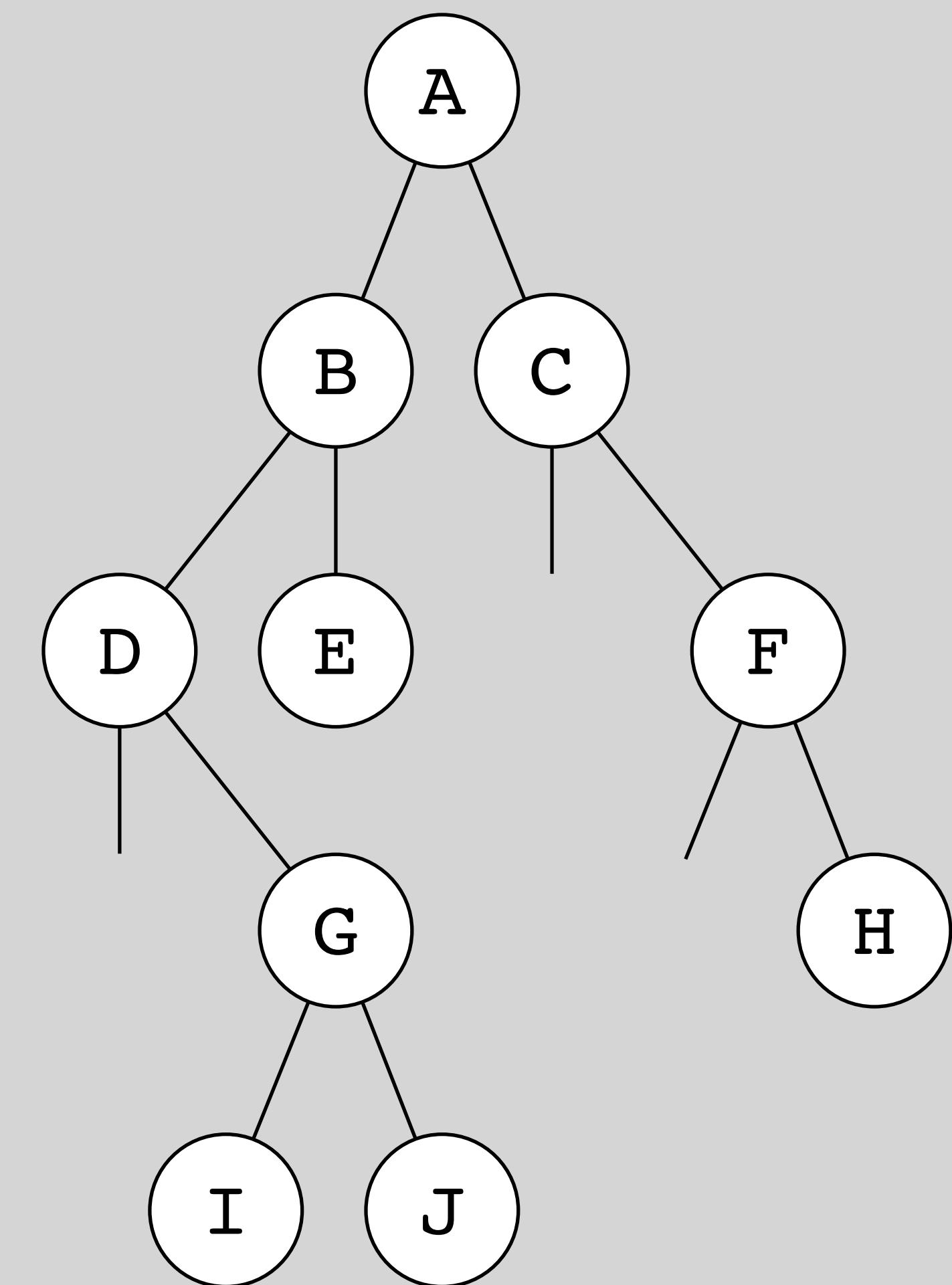
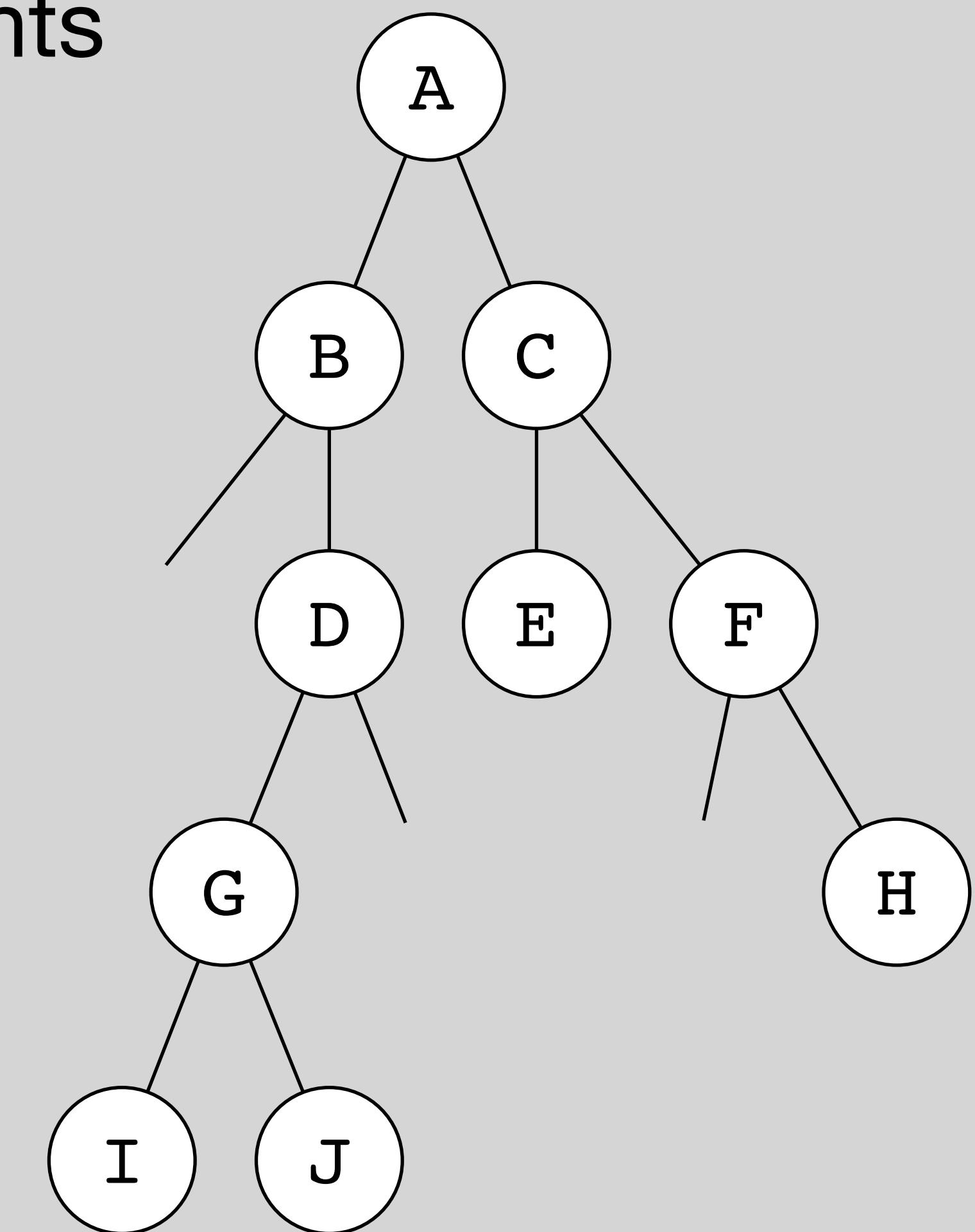
- Sous-arbre gauche
- Puis racine
- Puis sous-arbre droit

D-B-C-E-H-A-F-I-C



Exercices 1 & 2

- Effectuez les parcours pré-ordonné, symétrique et post-ordonnés des arbres suivants





Solution 1

- Pré-ordonné

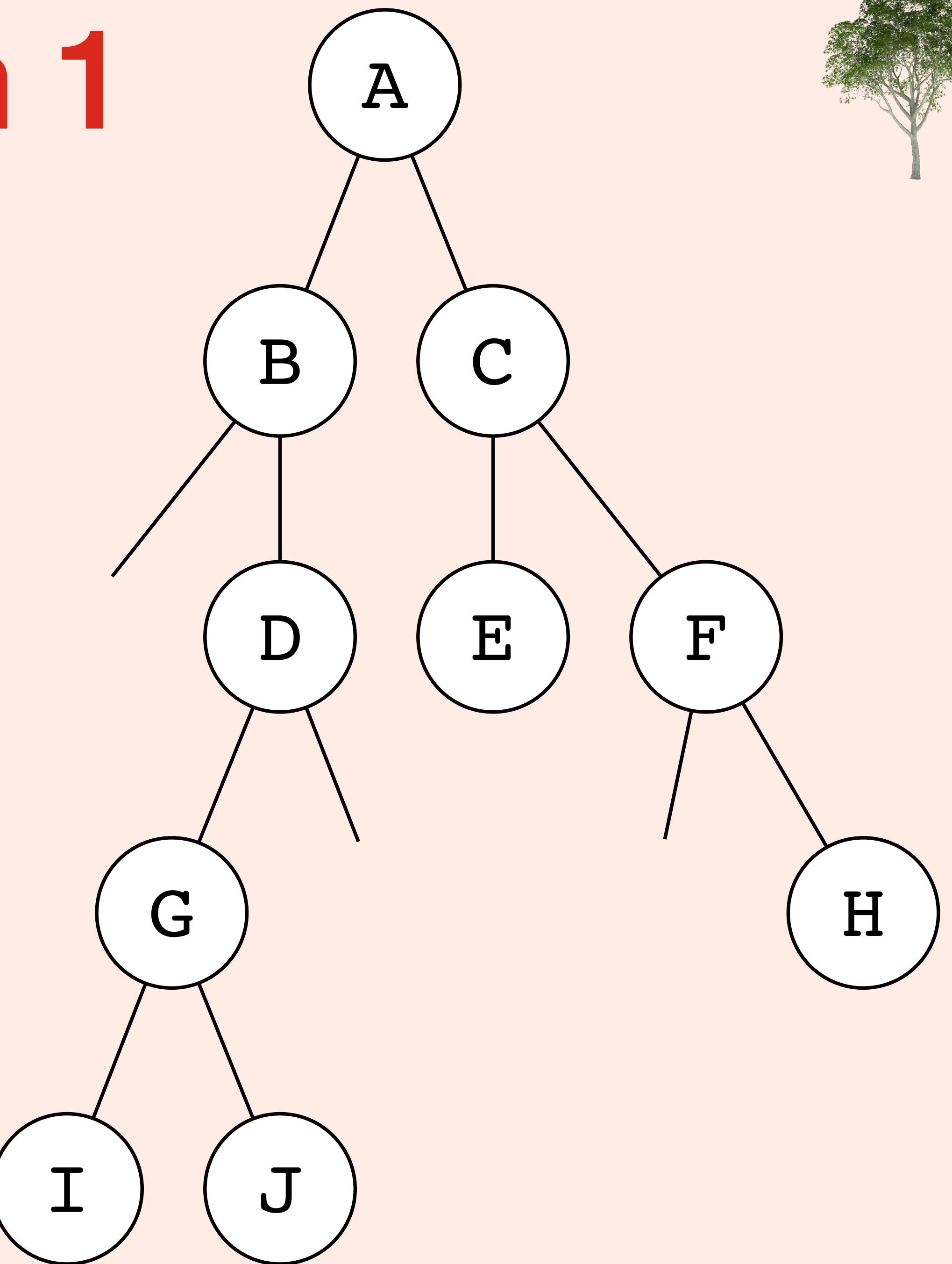
A-B-D-G-I-J-C-E-F-H

- Symétrique

B-I-G-J-D-A-E-C-F-H

- Post-ordonné

I-J-G-D-B-E-H-F-C-A





Solution 2

- Pré-ordonné

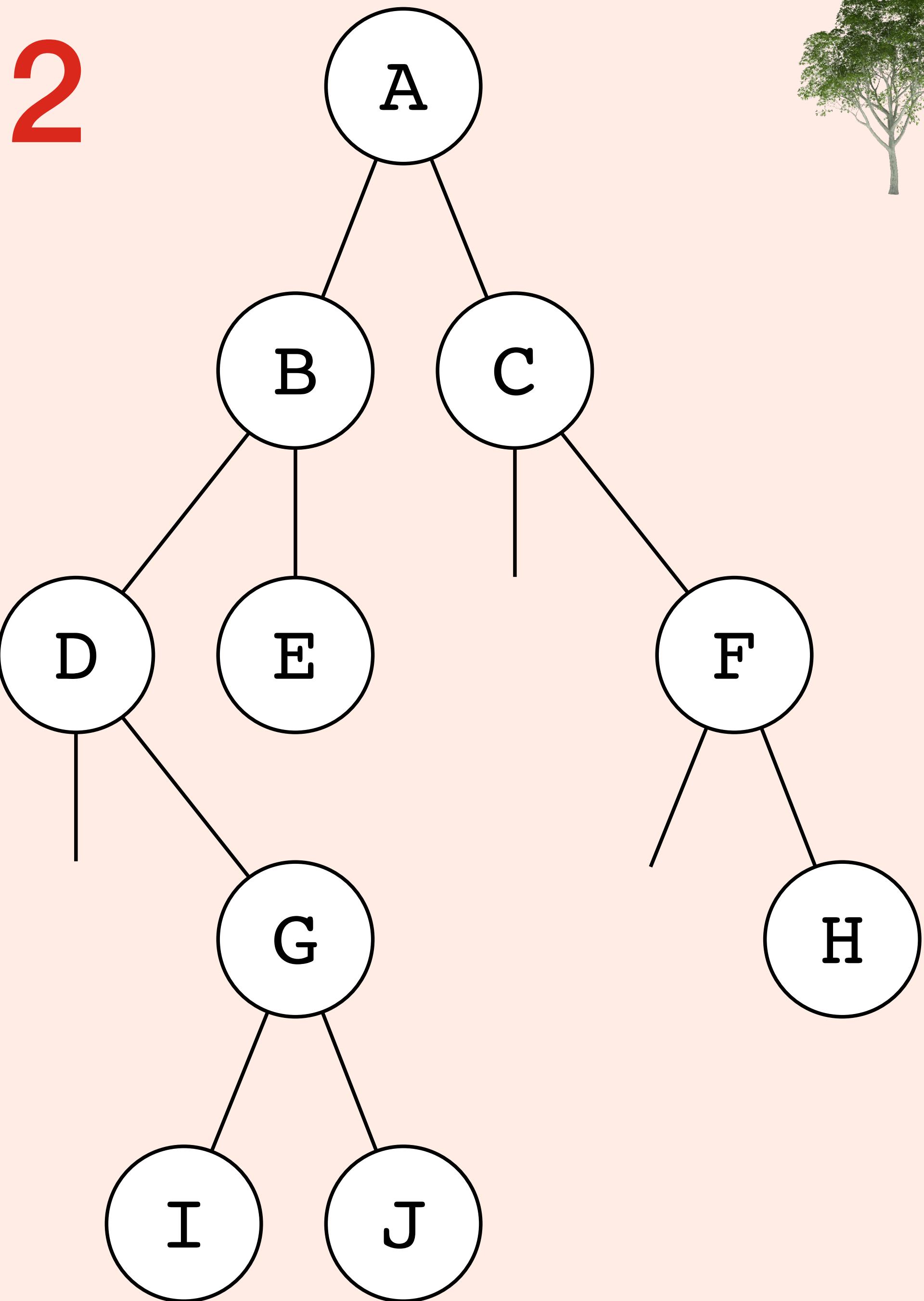
A-B-D-G-I-J-E-C-F-H

- Symétrique

D-I-G-J-B-E-A-C-F-H

- Post-ordonné

I-J-G-D-E-B-H-F-C-A





Arbre à partir de 2 parcours

- Pré-ordonné:

A-B-D-E-C-F-G

- Symétrique:

D-B-E-A-G-F-C



Arbre à partir de 2 parcours

- Pré-ordonné:
- Le parcours pré- ou post-ordonné permet de connaître la racine

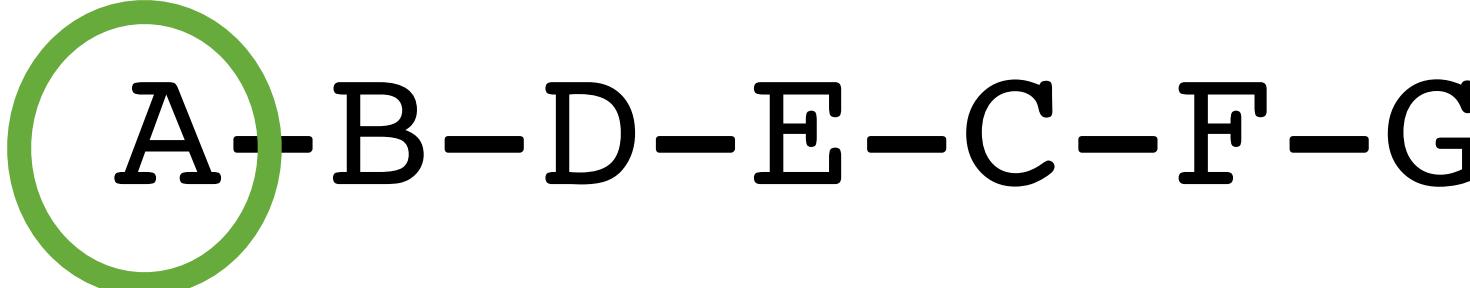
A-B-D-E-C-F-G

- Symétrique:

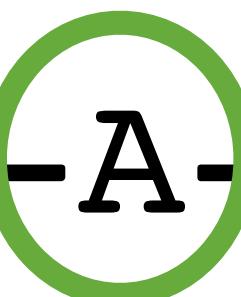
D-B-E-A-G-F-C



Arbre à partir de 2 parcours

- Pré-ordonné:

A-B-D-E-C-F-G
- Le parcours pré- ou post-ordonné permet de connaître la racine
- Connaissant la racine A,

- Symétrique:

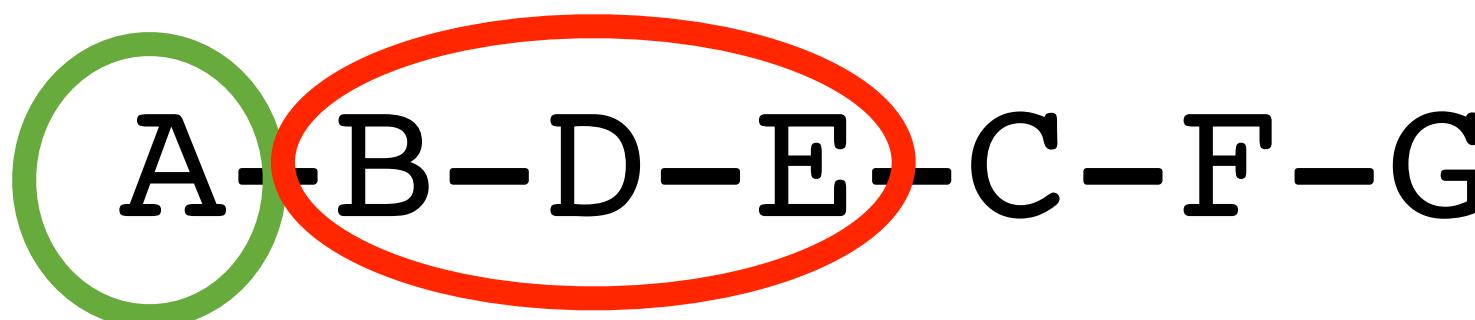


D-B-E-A-G-F-C

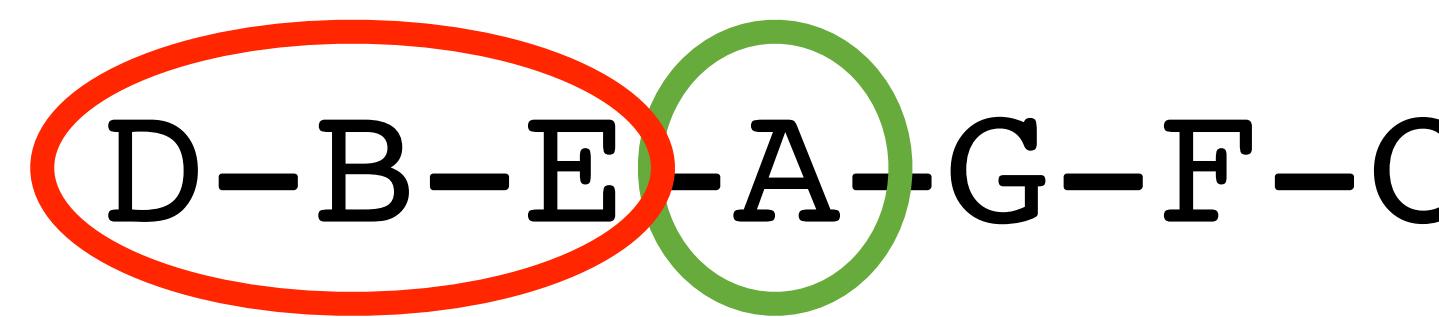


Arbre à partir de 2 parcours

- Pré-ordonné:



- Symétrique:

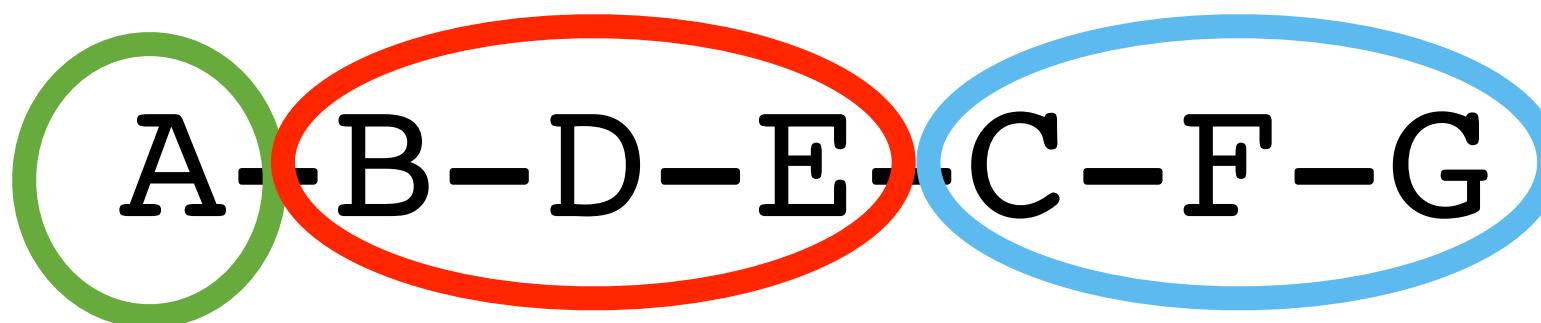


- Le parcours pré- ou post-ordonné permet de connaître la racine
- Connaissant la racine A,
- ... le parcours symétrique définit les sous-arbres gauche

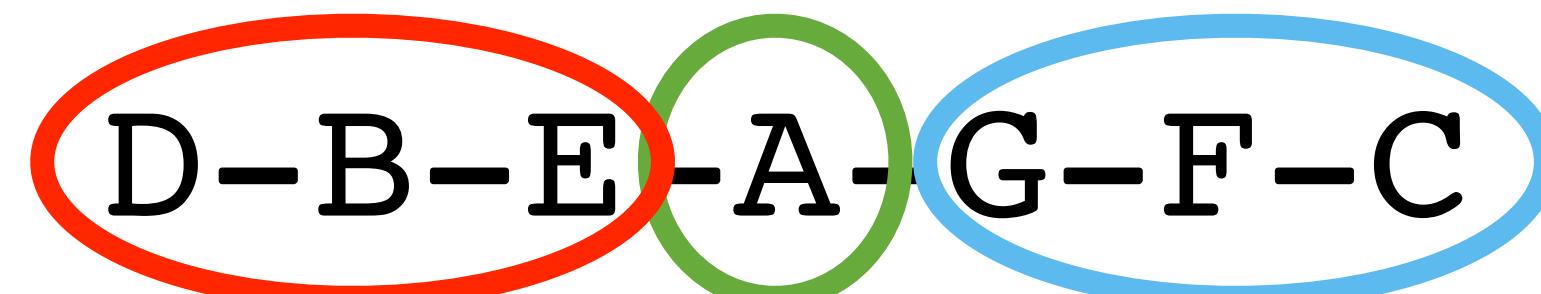


Arbre à partir de 2 parcours

- Pré-ordonné:



- Symétrique:

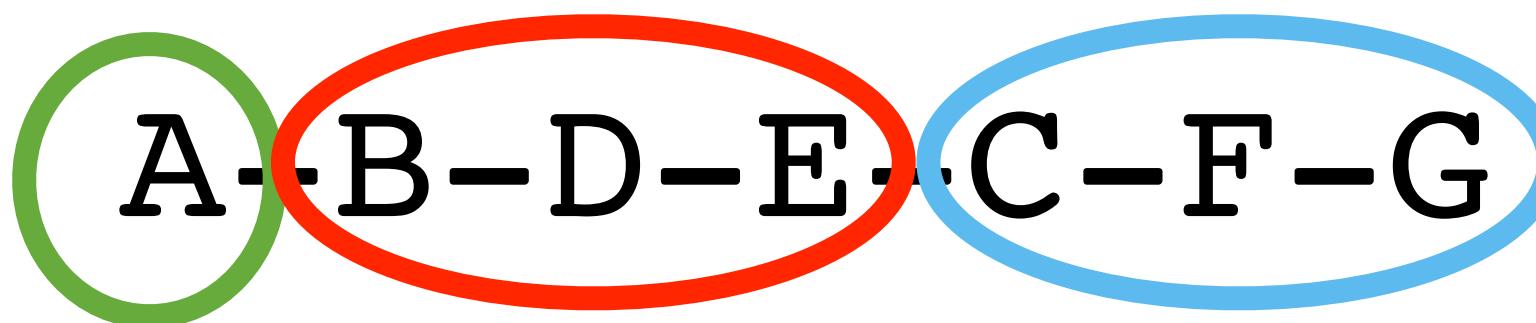


- Le parcours pré- ou post-ordonné permet de connaître la racine
- Connaissant la racine A,
 - ... le parcours symétrique définit les sous-arbres gauche
 - ... et droit

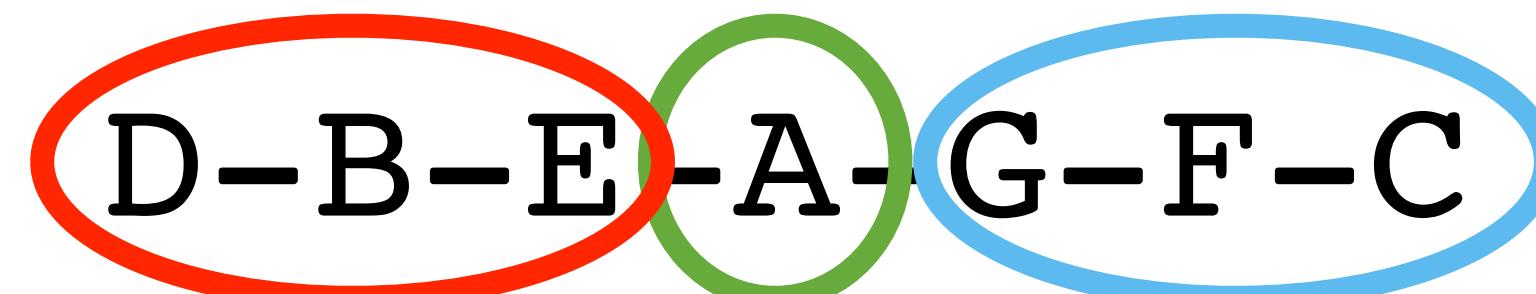


Arbre à partir de 2 parcours

- Pré-ordonné:



- Symétrique:



- Le parcours pré- ou post-ordonné permet de connaître la racine
- Connaissant la racine A,
 - ... le parcours symétrique définit les sous-arbres gauche
 - ... et droit
 - Et récursivement



Exercices 3 & 4

- Dessiner l'arbre binaire dont on connaît les parcours pré-ordonné et symétrique

Pré-ordonné: A-B-D-C-F-G-E

Symétrique: D-B-G-F-C-E-A

- Dessiner l'arbre binaire dont on connaît les parcours symétrique et post-ordonné

Symétrique: E-B-D-A-F-G-C

Post-ordonné: E-D-B-G-F-C-A



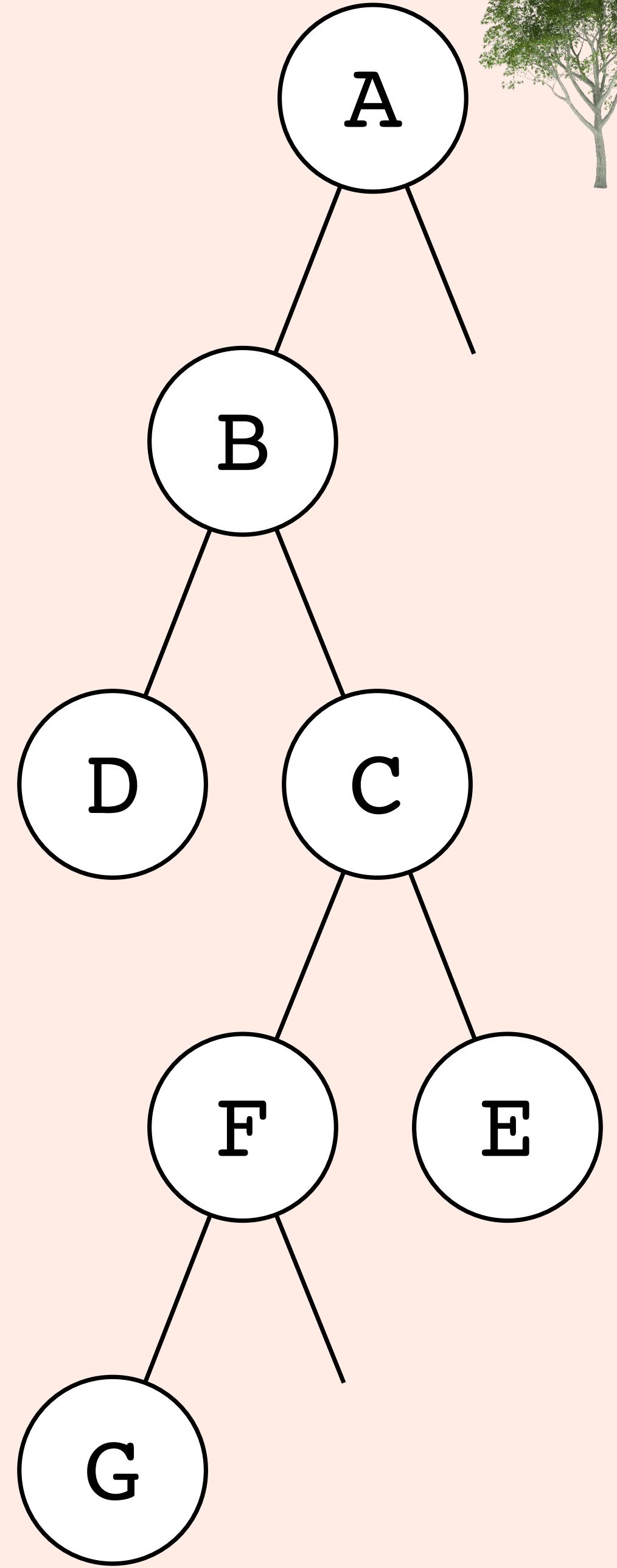
Solution 3

Pré-ordonné: A-B-D-C-F-G-E

Symétrique: D-B-G-F-C-E-A

Méthode :

- Le parcours pré-ordonné nous donne la racine : A
- Le parcours symétrique nous indique que le sous-arbre gauche est DBGFCE et que le droit est vide
- Pour le sous-arbre DBGFCE, le pré-ordonné nous donne la racine B et puis le symétrique les sous-arbre gauche (D) et droit (GFCE).
- Pour le sous-arbre GFCE, le pré-ordonné nous donne la racine C et puis le symétrique les sous-arbre gauche (GF) et droit (E)
- Pour le sous-arbre GF, le pré-ordonné nous donne la racine F et puis le symétrique nous indique que G est à sa gauche





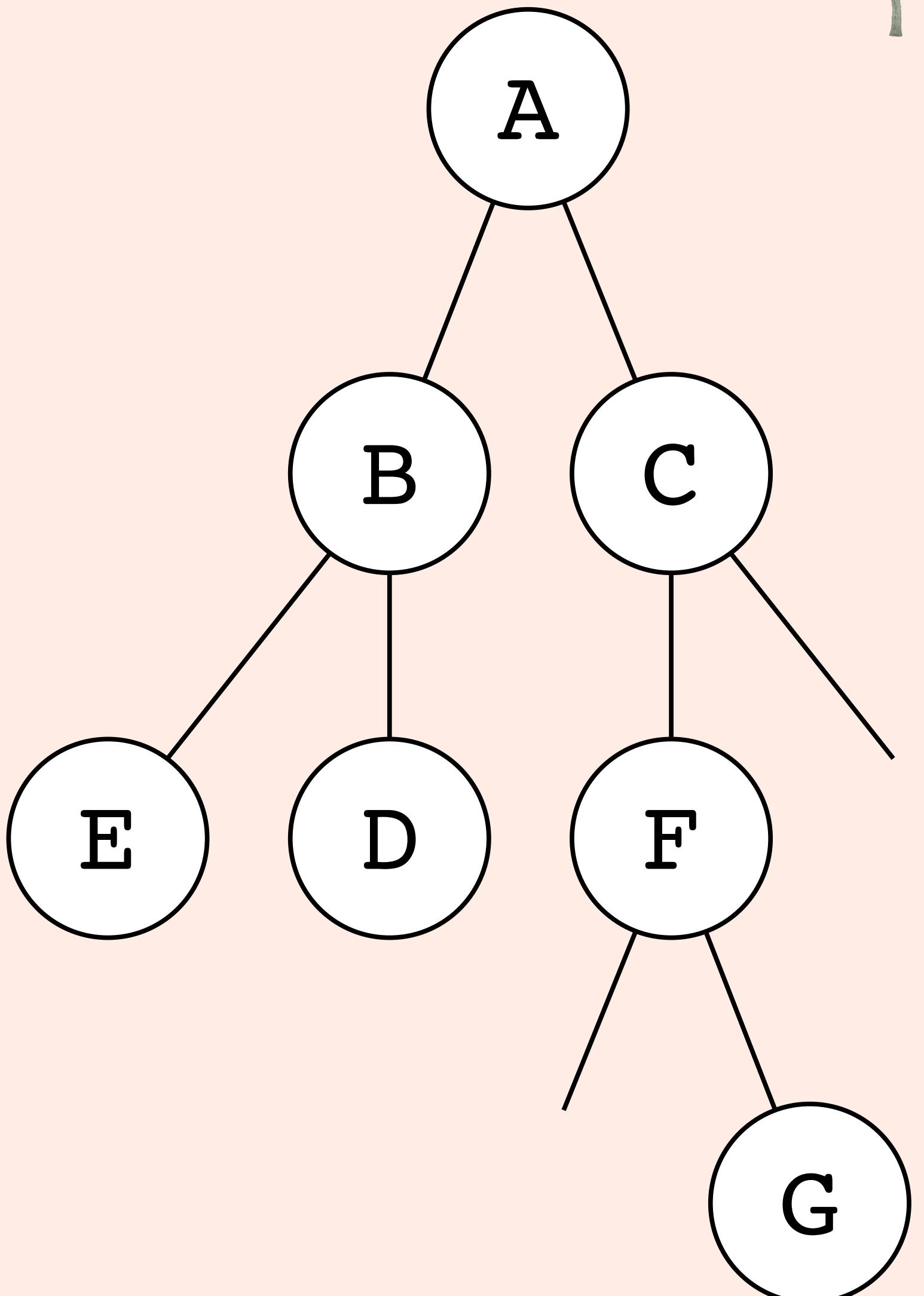
Solution 4

Symétrique : E-B-D-A-F-G-C

Post-ordonné : E-D-B-G-F-C-A

Méthode :

- Le parcours post-ordonné nous donne la racine : A
- Le parcours symétrique nous donne les sous-arbres gauche (EBD) et droit (FGC)
- Pour le sous-arbre EBD, le post-ordonné nous donne la racine B, puis le symétrique nous dit que E est à gauche et D à droite
- Pour le sous-arbre FGC, le post-ordonné nous donne la racine C, puis le symétrique que FC sont à gauche et que le sous-arbre droit est vide
- Pour le sous-arbre FC, le post-ordonné nous dit que F est la racine. Le symétrique nous dit que G est à sa droite



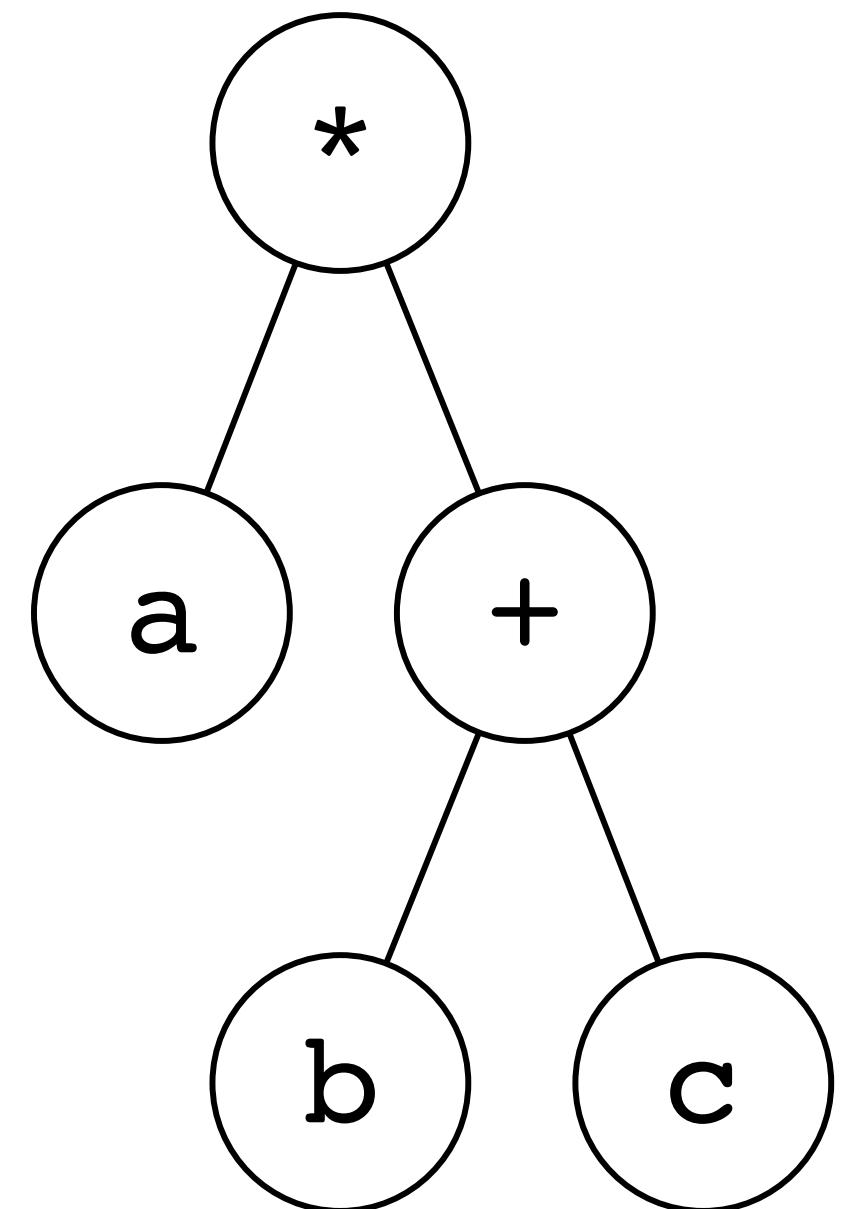
8. Expressions arithmétiques





Expressions arithmétiques

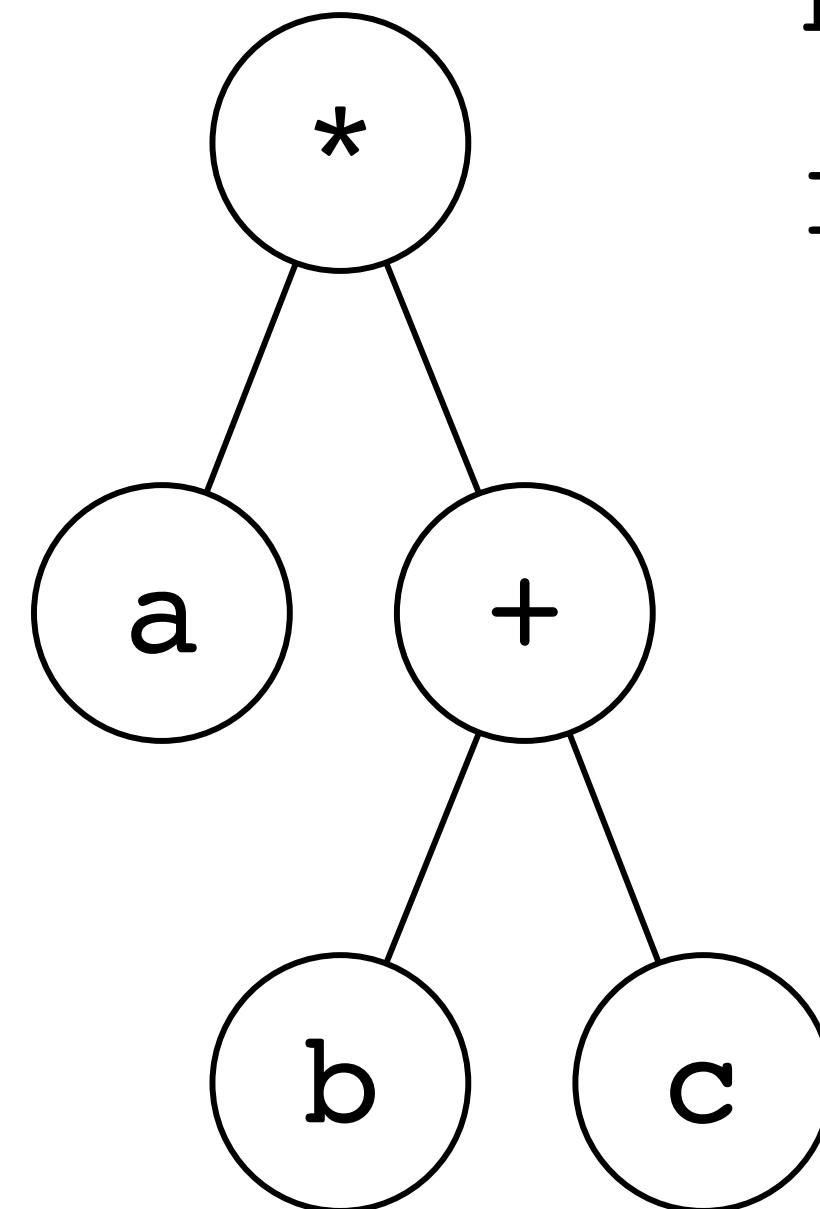
- Arbre binaire avec 2 types de noeuds
 - Feuille = valeurs
 - Noeuds interne = opérateurs binaires tels que +, -, *, /
- Pas de noeud de degré 1





Expressions arithmétiques

- Arbre binaire avec 2 types de noeuds
 - Feuille = valeurs
 - Noeuds interne = opérateurs binaires tels que +, -, *, /
- Pas de noeud de degré 1



Préfixe: * a + b c
Postfixe: a b c + *
Infixe: (a*(b+c))



Notation préfixe

- Parcours pré-ordonné de l'arbre

```
fonction préfixe (r)
    si r != Ø
        afficher r.etiquette
        préfixe(r.gauche)
        préfixe(r.droit)
```



Notation préfixe

- Parcours pré-ordonné de l'arbre
- Pas besoin de parenthèses si l'étiquette permet de connaître le degré du noeud

```
fonction préfixe (r)
    si r != Ø
        afficher r.etiquette
        préfixe(r.gauche)
        préfixe(r.droit)
```



Notation préfixe

- Parcours pré-ordonné de l'arbre
- Pas besoin de parenthèses si l'étiquette permet de connaître le degré du noeud
- Utiliser des listes imbriquées sinon, comme dans le langage lisp

```
fonction préfixe (r)
    si r != Ø
        afficher r.etiquette
        préfixe(r.gauche)
        préfixe(r.droit)
```



Notation préfixe

- Parcours pré-ordonné de l'arbre
- Pas besoin de parenthèses si l'étiquette permet de connaître le degré du noeud
- Utiliser des listes imbriquées sinon, comme dans le langage lisp
- La fonction inverse a la même structure

```
fonction préfixe (r)
    si r != Ø
        afficher r.etiquette
        préfixe(r.gauche)
        préfixe(r.droit)
```

```
fonction arbre_depuis_préfixe (flux)
    e ← lire(flux)
    r ← nouveau noeud d'étiquette e
    si e est un opérateur
        r.gauche ← arbre_depuis_préfixe (flux)
        r.droit ← arbre_depuis_préfixe (flux)
    retourner r
```



Notation postfixe

- Parcours post-ordonné de l'arbre

```
fonction postfixe (r)
    si r != Ø
        postfixe(r.gauche)
        postfixe(r.droit)
        afficher r.etiquette
```



Notation postfixe

- Parcours post-ordonné de l'arbre
- Permet d'évaluer l'expression, les opérandes étant connues avant l'opérateur

```
fonction postfixe (r)
    si r != ø
        postfixe(r.gauche)
        postfixe(r.droit)
        afficher r.etiquette
```



Notation postfixe

- Parcours post-ordonné de l'arbre
- Permet d'évaluer l'expression, les opérandes étant connues avant l'opérateur
- Notation utilisées dans la calculatrices  sous le nom de RPN

```
fonction postfixe (r)
    si r != ø
        postfixe(r.gauche)
        postfixe(r.droit)
        afficher r.etiquette
```



Notation postfixe

- Parcours post-ordonné de l'arbre
- Permet d'évaluer l'expression, les opérandes étant connues avant l'opérateur
- Notation utilisées dans la calculatrices sous le nom de RPN
- Pour la fonction inverse, le plus simple consiste à lire le flux à l'envers

```
fonction postfixe (r)
    si r != ø
        postfixe(r.gauche)
        postfixe(r.droit)
        afficher r.etiquette
```

```
fonction arbre_depuis_postfixe (flux)
    e ← lire(flux inversé)
    r ← nouveau noeud d'étiquette e
    si e est un opérateur
        r.droit ← arbre_depuis_postfixe (flux)
        r.gauche ← arbre_depuis_postfixe (flux)
    retourner r
```



Notation infixe

- Parcours symétrique de l'arbre

```
fonction infixe (r)
    si r est un noeud interne
        afficher parenthèse ouvrante (
            infixe(r.gauche)
        afficher r.etiquette
        infixe(r.droit)
        afficher parenthèse fermante )
    sinon (r est une feuille)
        afficher r.etiquette
```



Notation infixe

- Parcours symétrique de l'arbre
- Besoin de parenthèses pour lever les ambiguïtés

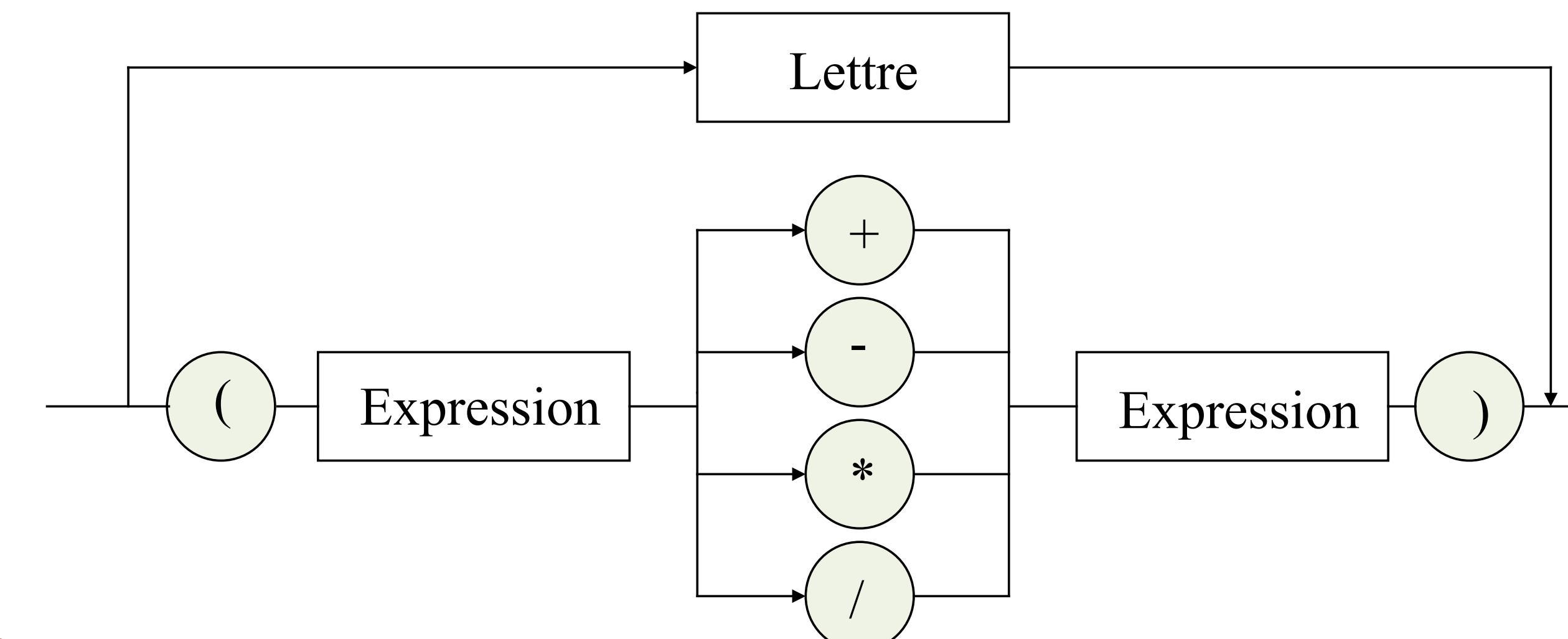
```
fonction infixe (r)
    si r est un noeud interne
        afficher parenthèse ouvrante (
            infixe(r.gauche)
            afficher r.etiquette
            infixe(r.droit)
            afficher parenthèse fermante )
    sinon (r est une feuille)
        afficher r.etiquette
```



Notation infixe

- Parcours symétrique de l'arbre
- Besoin de parenthèses pour lever les ambiguïtés
- Diagramme syntaxique

```
fonction infixe (r)
    si r est un noeud interne
        afficher parenthèse ouvrante (
            infixe(r.gauche)
            afficher r.etiquette
            infixe(r.droit)
            afficher parenthèse fermante )
    sinon (r est une feuille)
        afficher r.etiquette
```





Arbre depuis expression infixe

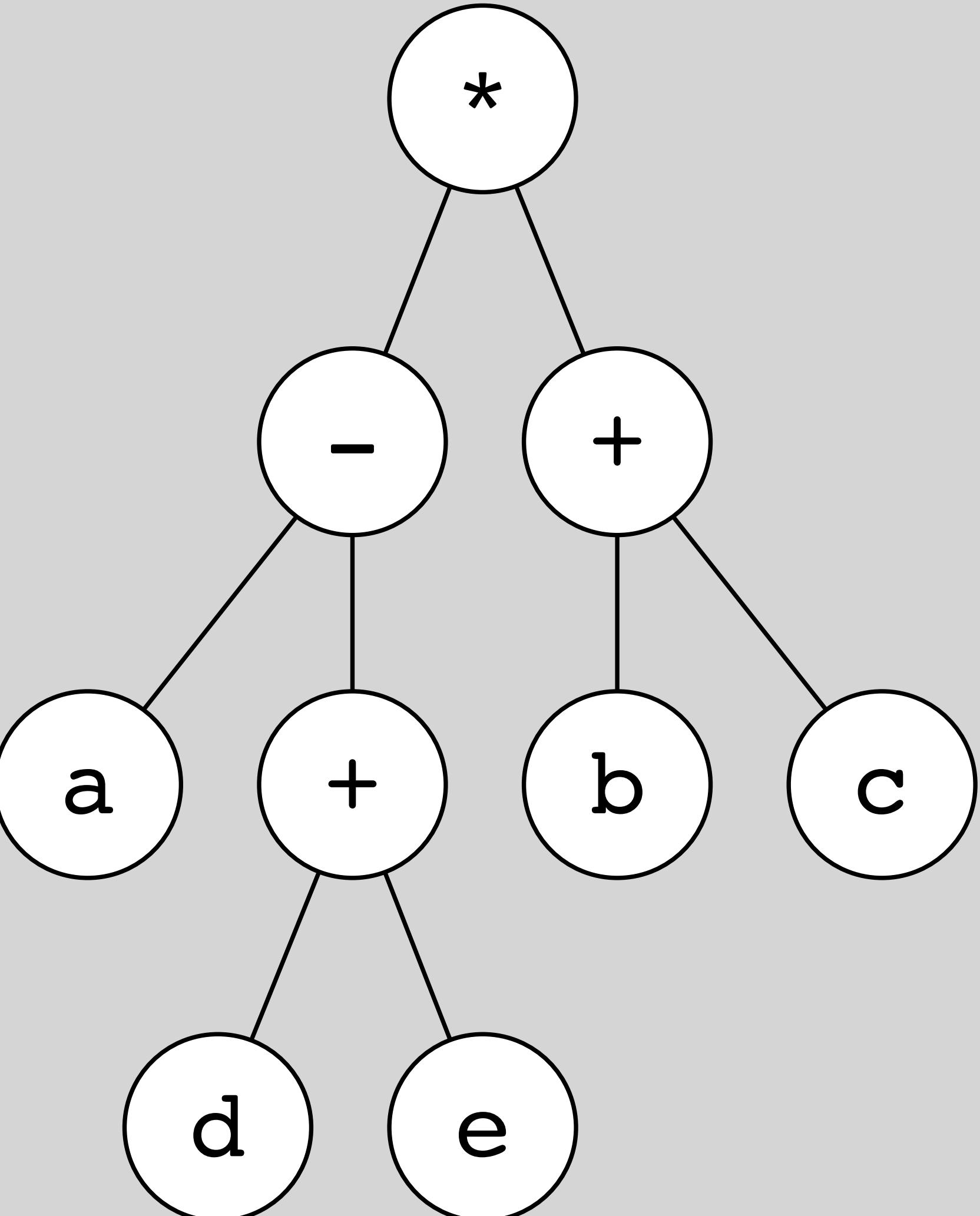
- Même structure de code que la fonction inverse
- Les parenthèses ouvrantes distinguent noeuds internes et feuilles
- Les parenthèses fermantes sont inutiles.

```
fonction arbre_depuis_infixe (flux)
    e ← lire(flux)
    si e est une parenthèse ouvrante (
        rg ← arbre_depuis_infixe(flux)
        e ← lire(flux) (e est un opérateur)
        r ← nouveau noeud d'étiquette e
        r.gauche ← rg
        r.droite ← arbre_depuis_infixe(flux)
        lire(flux) (parenthèse fermante)
    sinon (r est une feuille)
        r ← nouveau noeud d'étiquette e
    retourner r
```



Exercice 1

- Soit l'expression mathématique modélisée par l'arbre ci-contre.
Donnez-en les notations
 - préfixe
 - post-fixe
 - et infixe





Solutions 1

- Notation préfixe :

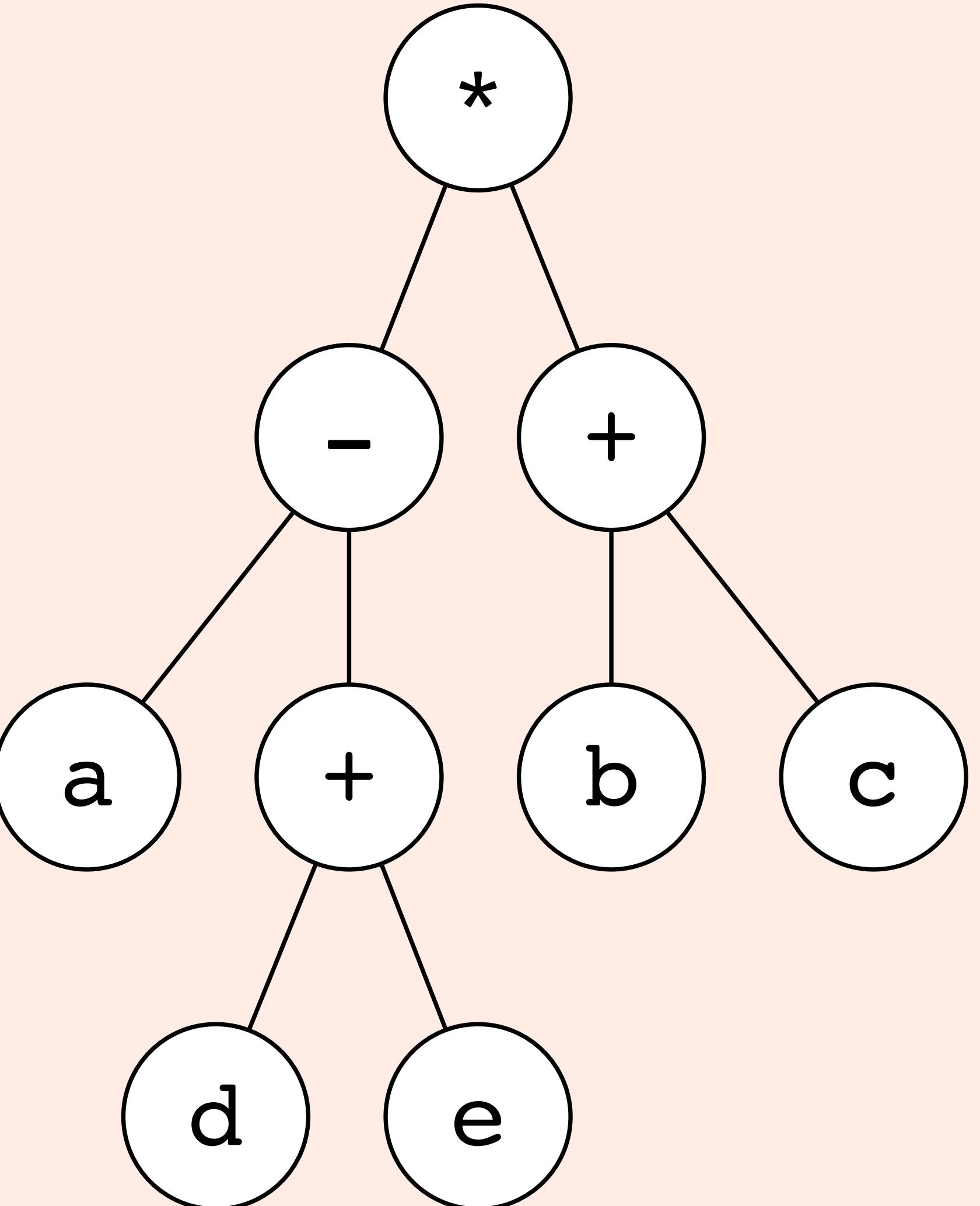
* - a + d e + b c

- Notation postfixe :

a d e + - b c + *

- Notation infixe :

((a - (d + e)) * (b + c))





Exercice 2

- Ecrire la version post fixe de l'expression infixé

$$(((a+b)*(c-d)) / (a-b))$$

- Ecrire la version infixé de l'expression préfixé

$$+ \ a \ - \ + \ b \ c \ * \ d \ e$$

- Ecrire la version préfixé de l'expression postfixe

$$a \ b \ + \ c \ d \ e \ - \ * \ /$$



Solutions 2

1. Infixe: $(((a+b)*(c-d))/(a-b))$

Postfixe: a b + c d - * a b - /

2. Préfixe: + a - + b c * d e

Infixe: $(a+((b+c)-(d*e)))$

3. Postfixe: a b + c d e - * /

Préfixe: / + a b * c - d e