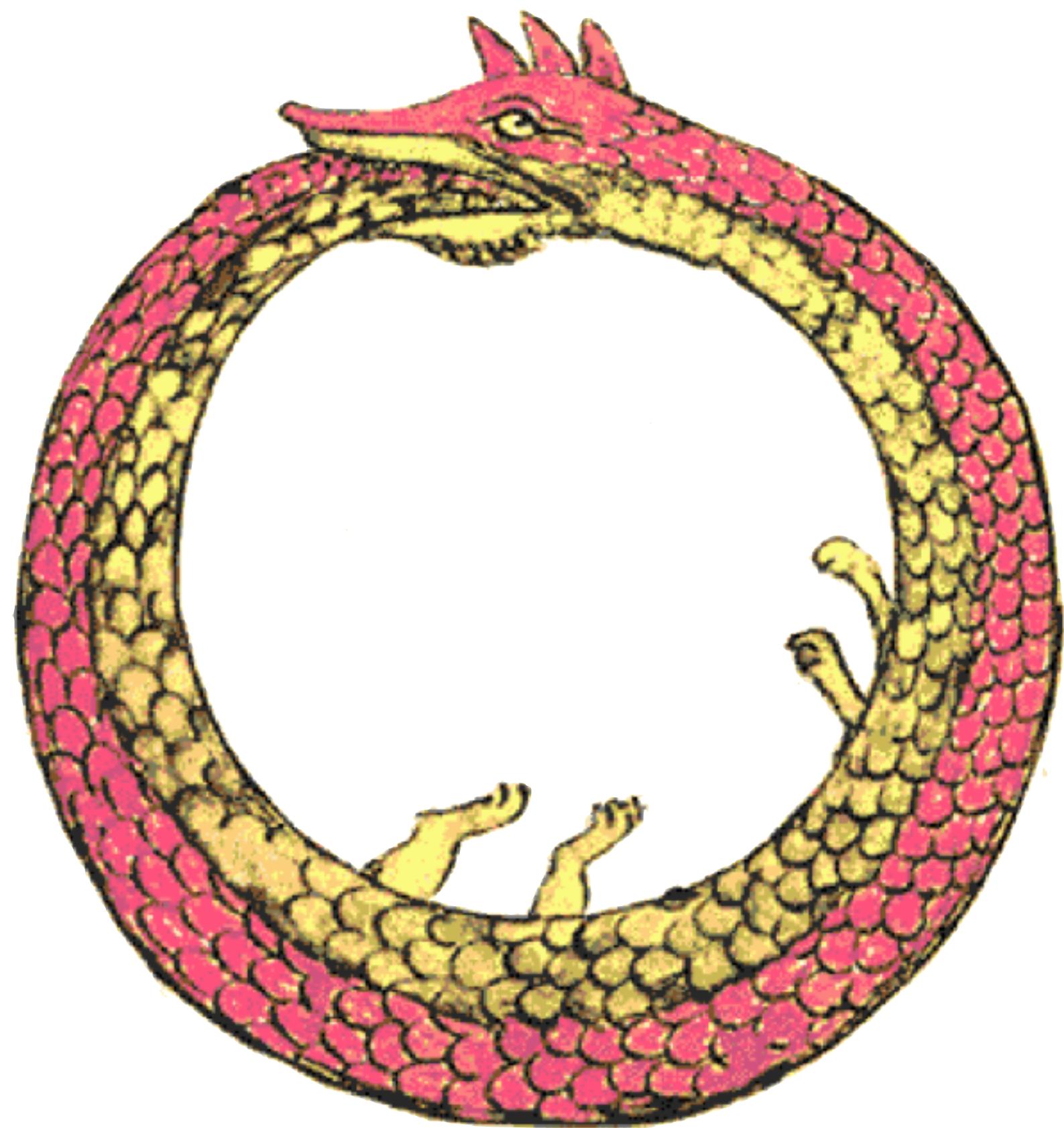
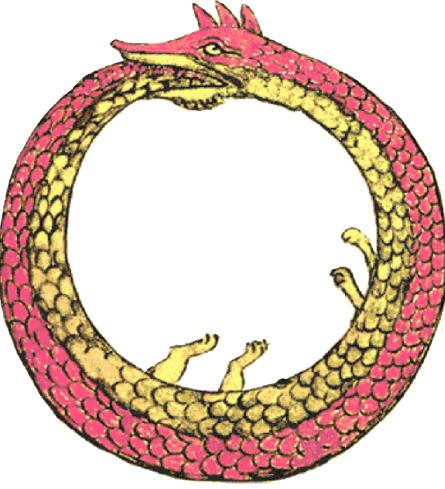


Récursivité

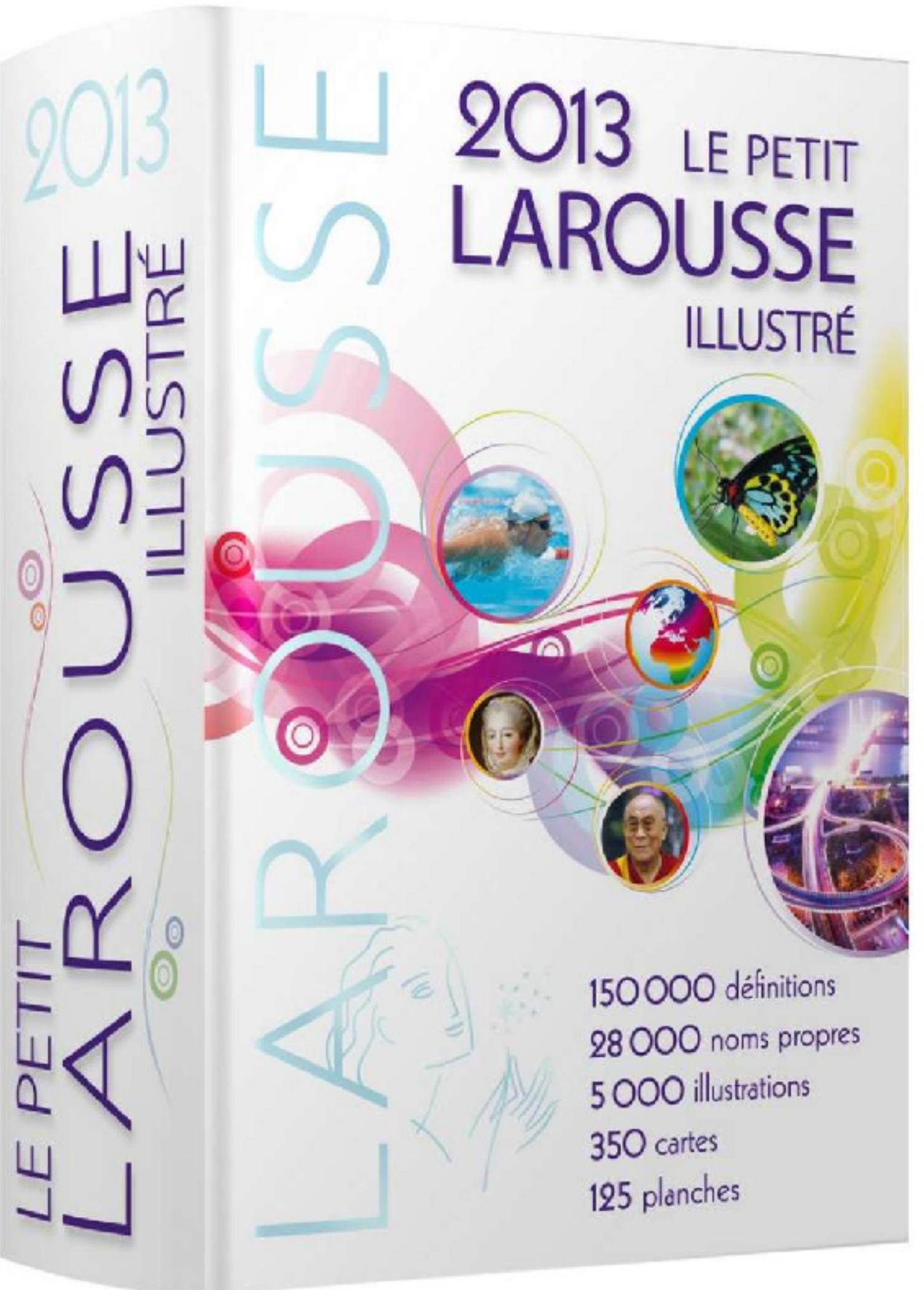


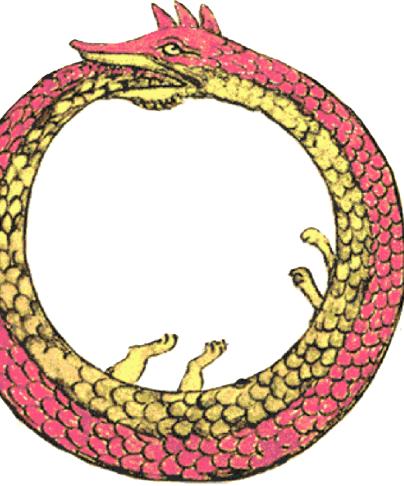
Définition



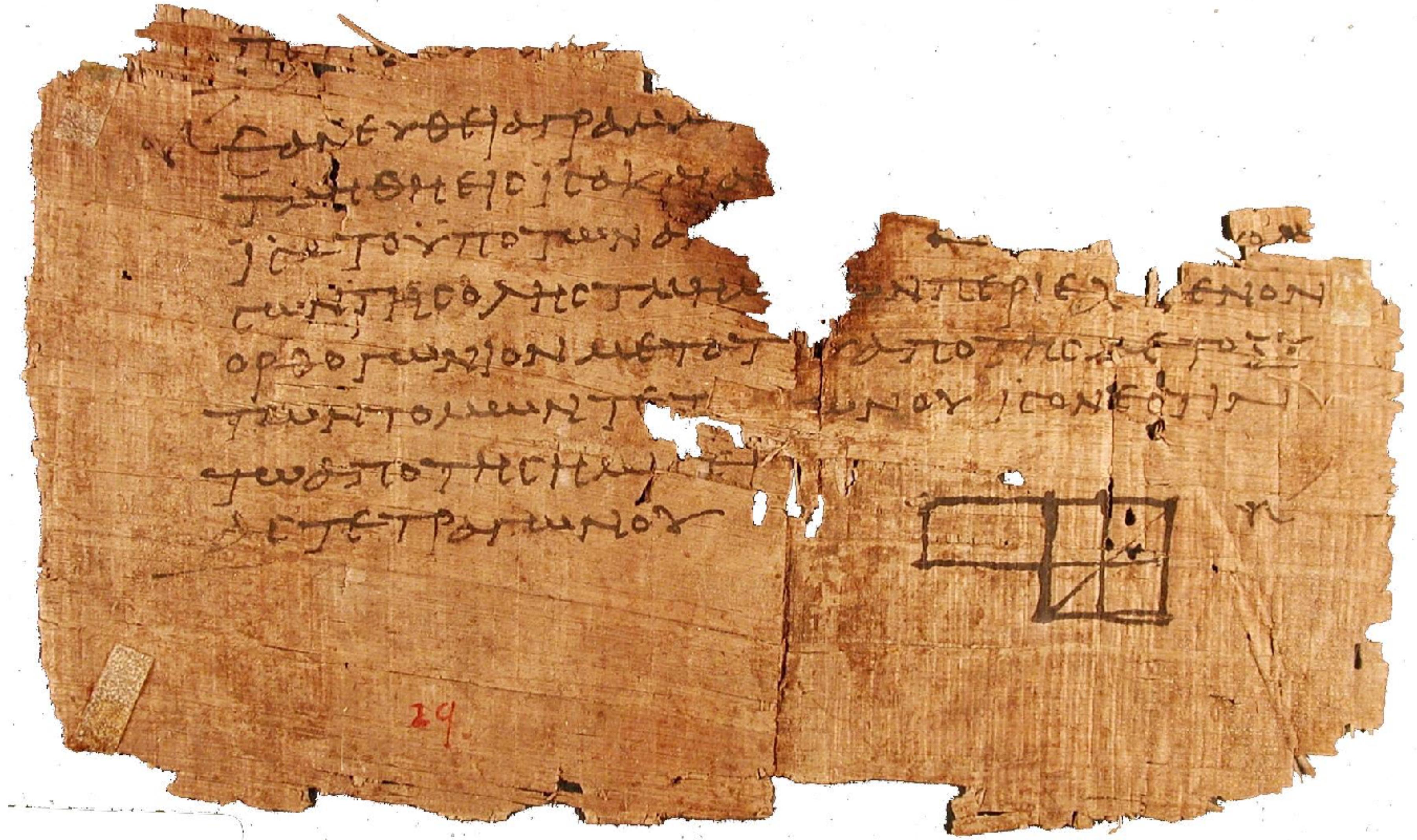
Récursif, récursive, adjetif, (anglais recursive, du latin recursum, de recurrere, revenir en arrière)

- Se dit d'une règle ou d'un élément doués de récursivité (grammaire, mathématique)
- Se dit d'un programme informatique organisé de manière telle qu'il puisse se rappeler lui-même, c'est-à-dire demander sa propre exécution au cours de son déroulement

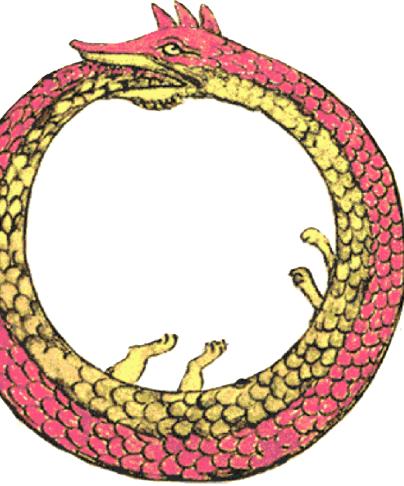




Exemple : Euclide

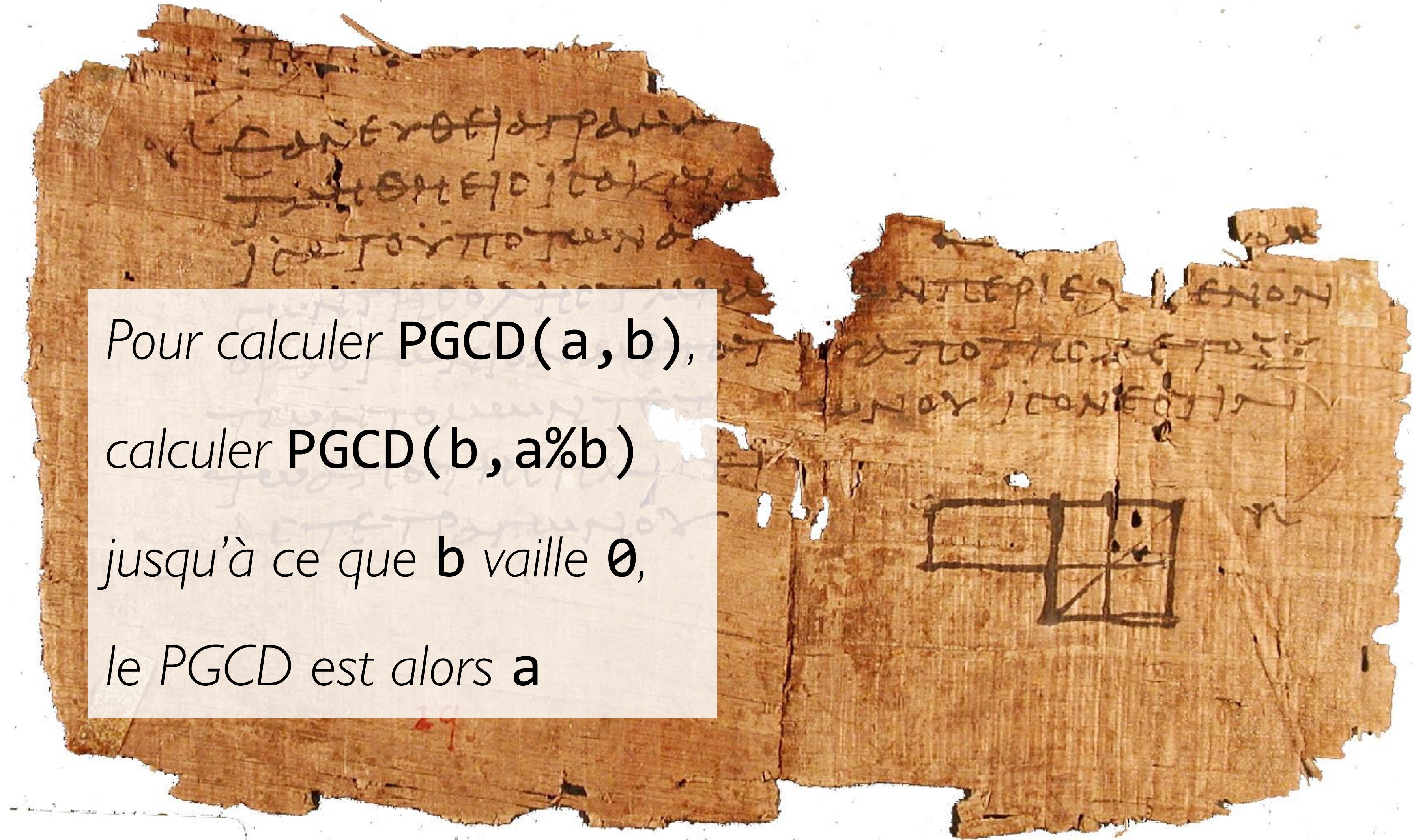


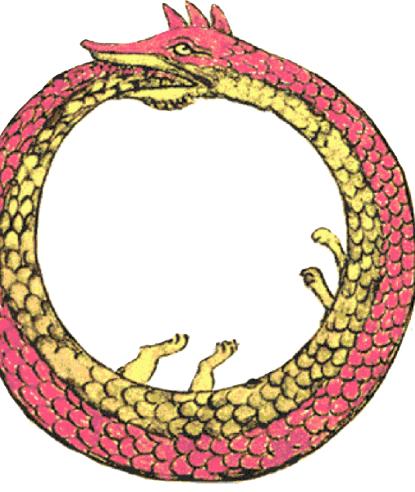
29.



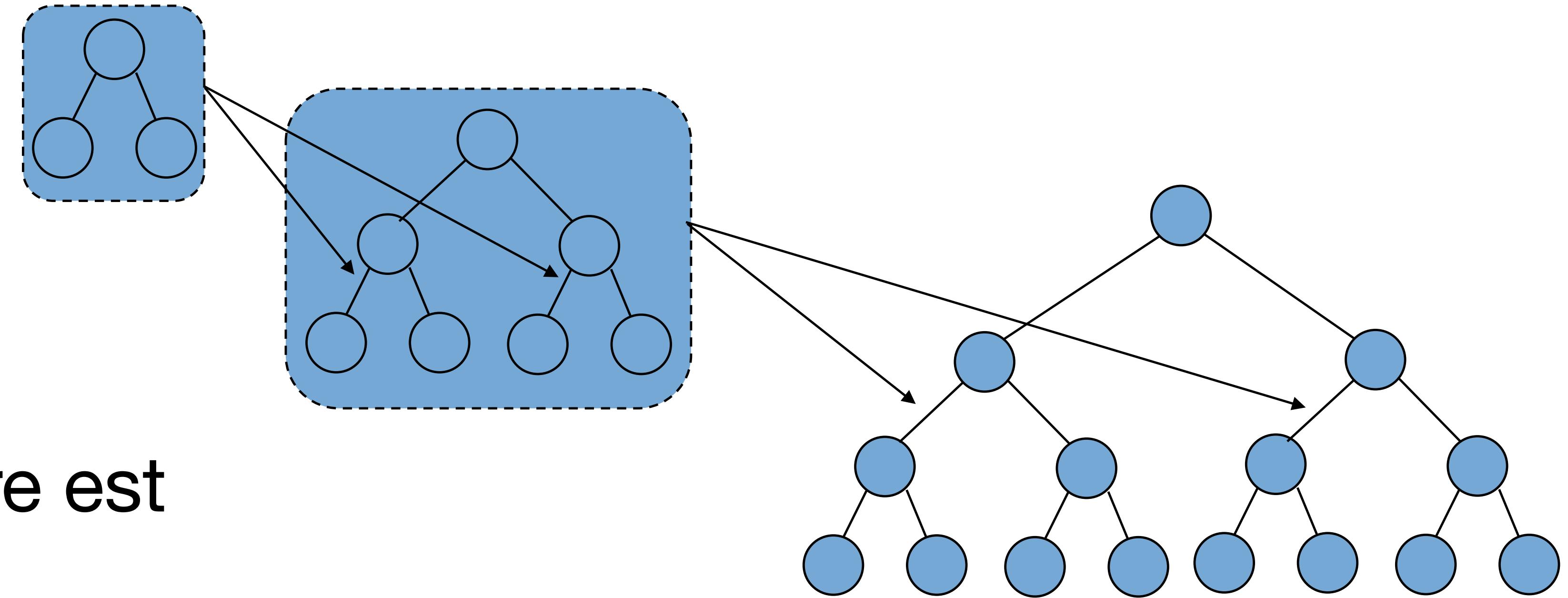
Exemple : Euclide

Pour calculer $\text{PGCD}(a, b)$,
calculer $\text{PGCD}(b, a \% b)$
jusqu'à ce que b vaille 0,
le PGCD est alors a





Structure récursive



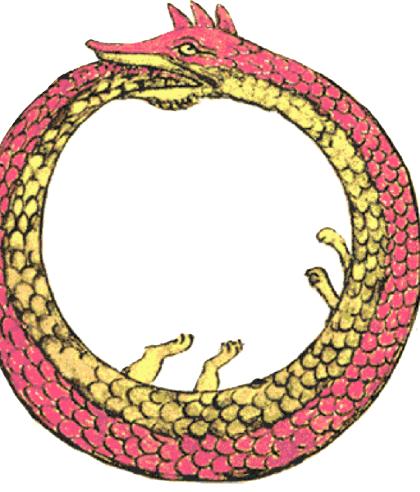
Un arbre binaire est

- soit un arbre vide,
- soit une structure composée d'une racine et de deux enfants qui sont eux-même des arbres binaires.

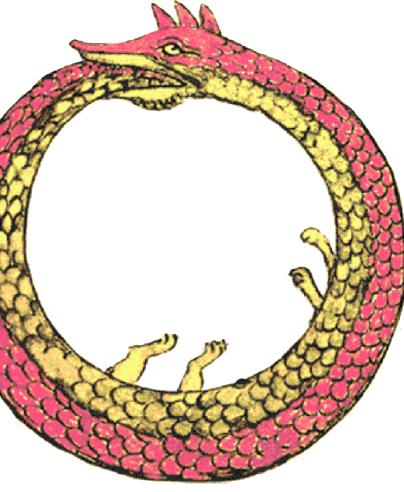
2.1. Factorielle

$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

Factorielle



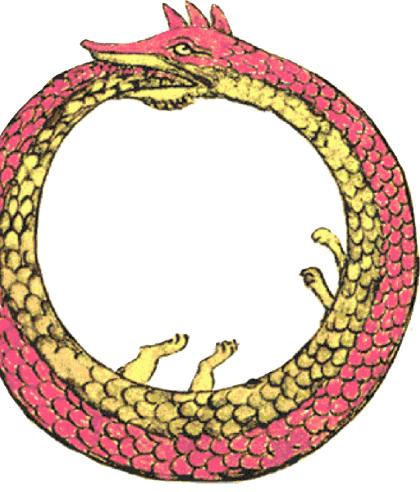
$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-1) \times n$$



Factorielle

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-1) \times n$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \\ n \times (n-1)! & \text{sinon} \end{cases}$$

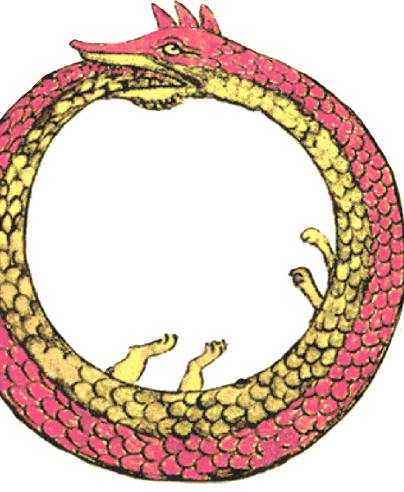


Factorielle

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-1) \times n$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \\ n \times (n-1)! & \text{sinon} \end{cases}$$

```
fonction factorielle(n)
  si n vaut 0 alors
    retourner 1
  sinon
    retourner n x factorielle(n-1)
  fin si
```



Traçons l'exécution ...

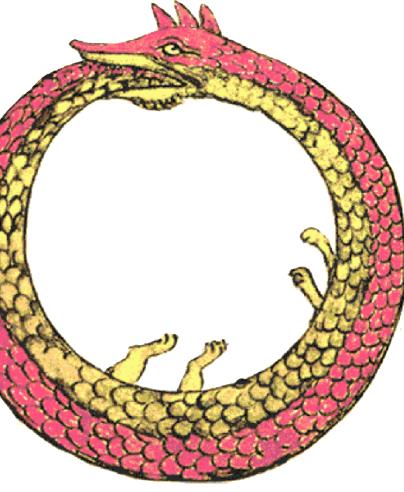
```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```

Calculer 4!

4 != 0

Calculer 3!

retourner 4 x 3!



Traçons l'exécution ...

```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```

Calculer 4!

4 != 0

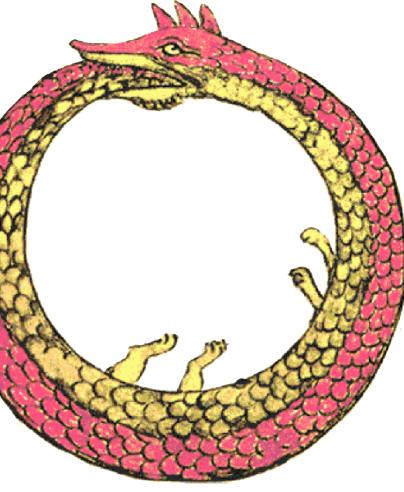
Calculer 3!

3 != 0

Calculer 2!

retourner 3 x 2!

retourner 4 x 3!



Traçons l'exécution ...

```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```

Calculer 4!

4 != 0

Calculer 3!

3 != 0

Calculer 2!

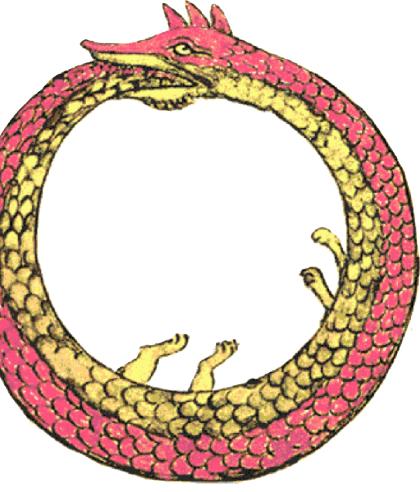
2 != 0

Calculer 1!

retourner 2 x 1!

retourner 3 x 2!

retourner 4 x 3!



Traçons l'exécution ...

```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```

Calculer 4!

4 != 0

Calculer 3!

3 != 0

Calculer 2!

2 != 0

Calculer 1!

1 != 0

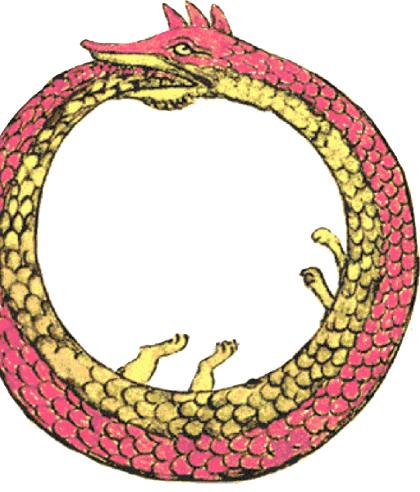
Calculer 0!

retourner 1 x 0!

retourner 2 x 1!

retourner 3 x 2!

retourner 4 x 3!



Traçons l'exécution ...

```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```

Calculer 4!

4 != 0

Calculer 3!

3 != 0

Calculer 2!

2 != 0

Calculer 1!

1 != 0

Calculer 0!

0 == 0

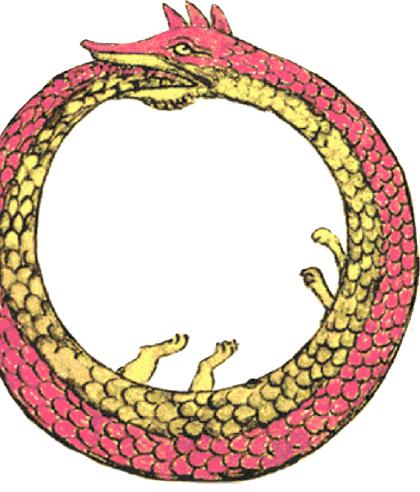
retourner 1

retourner 1 x 0!

retourner 2 x 1!

retourner 3 x 2!

retourner 4 x 3!



Traçons l'exécution ...

```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```

Calculer 4!

4 != 0

Calculer 3!

3 != 0

Calculer 2!

2 != 0

Calculer 1!

1 != 0

Calculer 0!

0 == 0

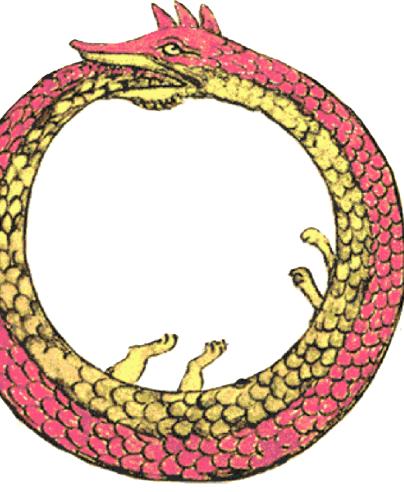
retourner 1

retourner 1 x 0! = 1

retourner 2 x 1! = 2

retourner 3 x 2! = 6

retourner 4 x 3! = 24



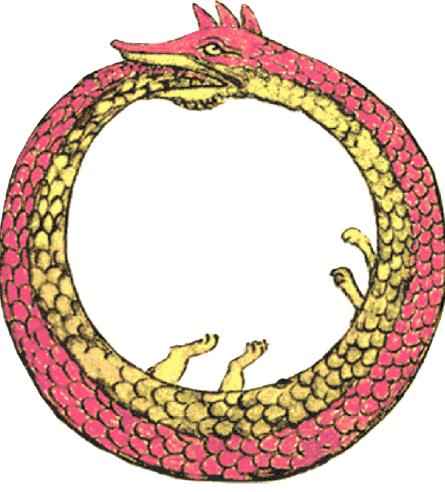
Cas trivial, cas général

fonction factorielle(n)

si n vaut 0 alors
retourner 1

sinon
 retourner n x *factorielle(n-1)*
fin si

Cas trivial, cas général

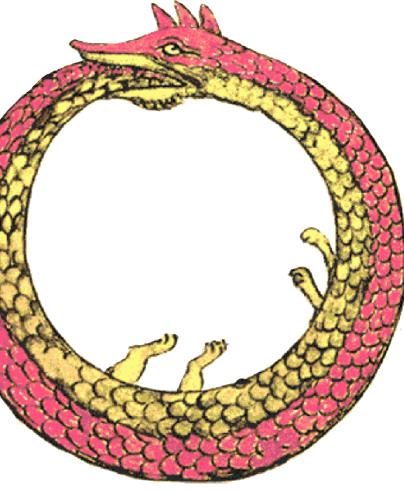


fonction factorielle(n)

Paramètre de
récursivité

si n vaut 0 alors
retourner 1

sinon
 retourner n x *factorielle(n-1)*
fin si



Cas trivial, cas général

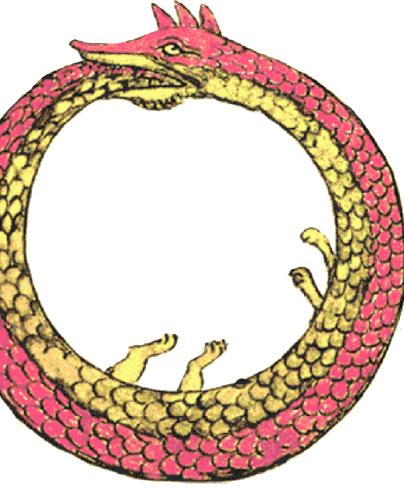
fonction factorielle(n)

Paramètre de
récursivité

```
si n vaut 0 alors
    retourner 1
```

Cas trivial

```
sinon
    retourner n x factorielle(n-1)
fin si
```



Cas trivial, cas général

fonction factorielle(n)

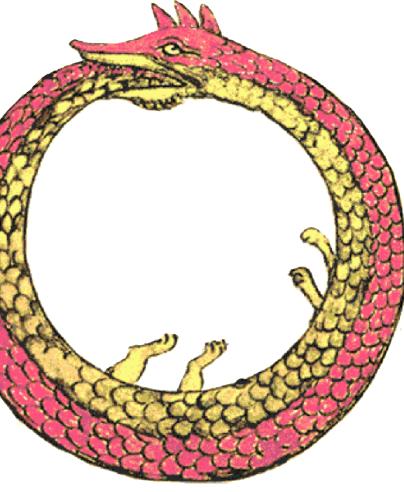
Paramètre de récursivité

```
si n vaut 0 alors  
    retourner 1
```

Cas trivial

```
sinon  
    retourner n x factorielle(n-1)  
fin si
```

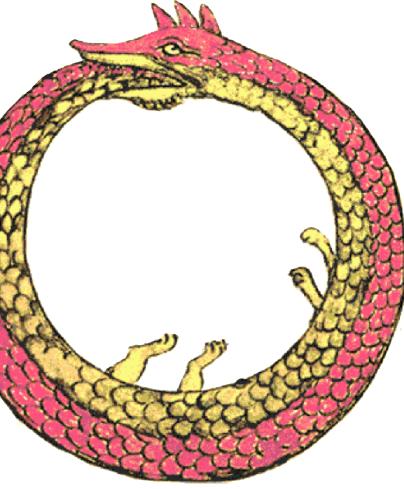
Cas général



Complexité ?

- Combien d'appels récursifs sont effectués ?

```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```



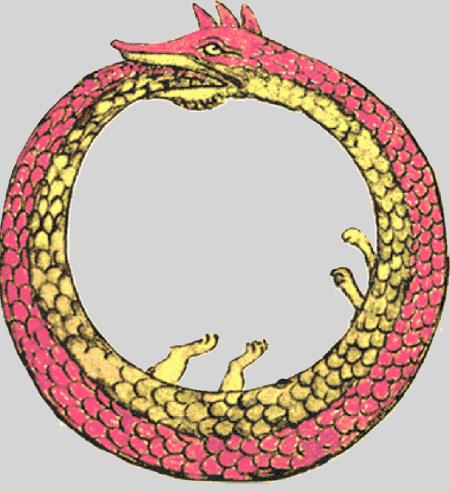
Complexité ?

- Combien d'appels récursifs sont effectués ?

```
fonction factorielle(n)
    si n vaut 0 alors
        retourner 1
    sinon
        retourner n x factorielle(n-1)
    fin si
```

- Complexité linéaire, $O(n)$

Exercices



- Quelles sont les complexités de ces fonctions récursives ?

```
int f1(unsigned n)
{
    if(n == 0)
        return -1;
    else
        return 1 + f1(n/2);
}
```

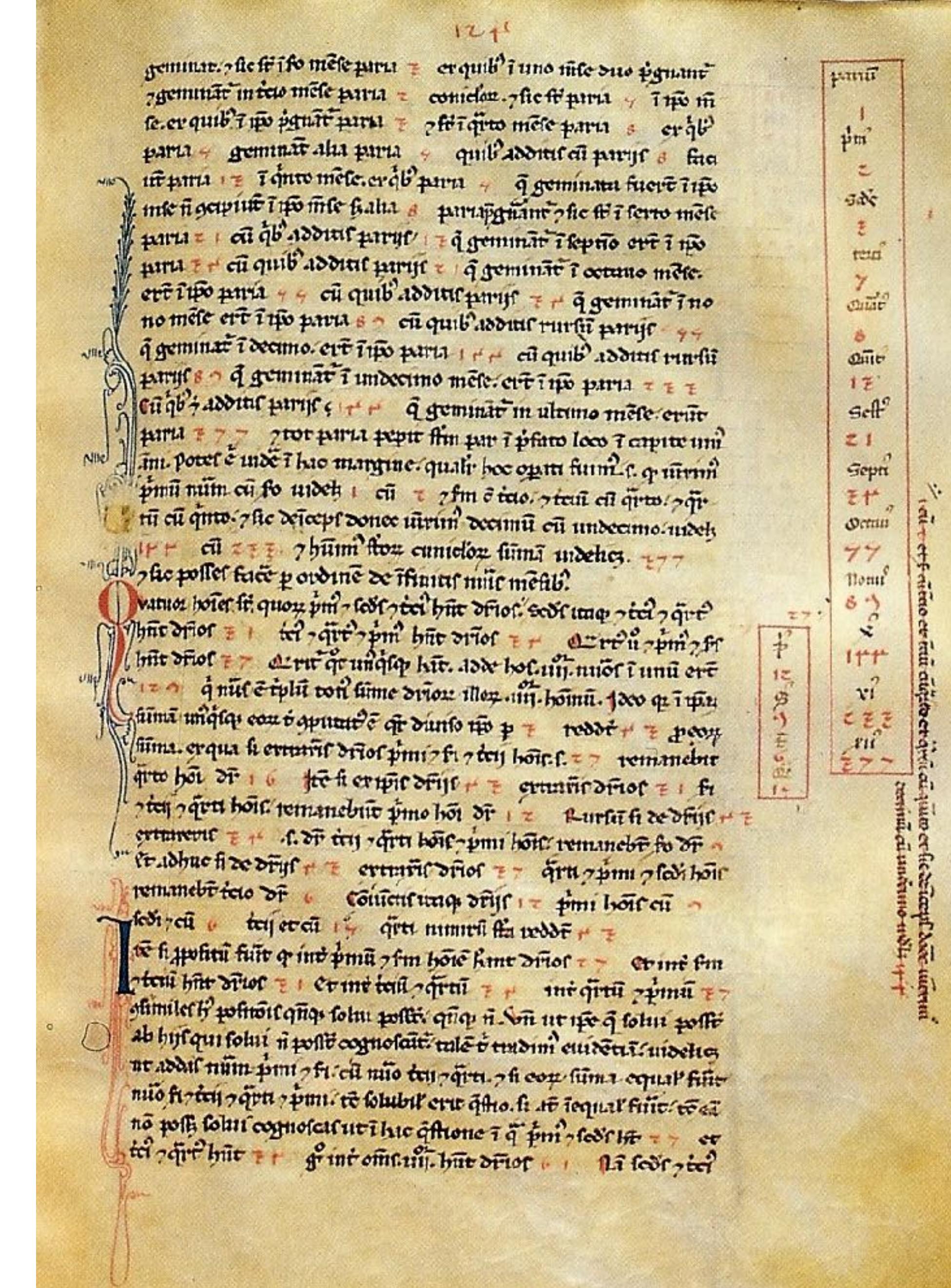
```
int f2(double n) {
    if(n <= 1)
        return 1;
    else
        return 1 + f2(n-2*sqrt(n)+1);
}
```

2.2. Fibonacci

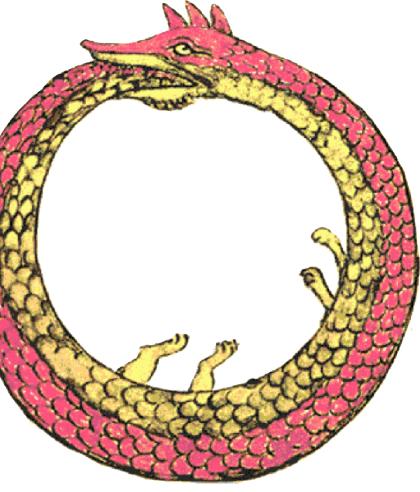


Leonardo Fibonacci

- Il s'intéresse en 1202 à la croissance d'une population de lapins idéalisée.
- On commence avec un couple de lapins nouveaux nés.
- A partir de l'âge de 2 mois, un couple de lapin engendre un couple de lapins tous les mois.
- Combien de couples de lapins obtient-on après n mois? (les lapins sont immortels)

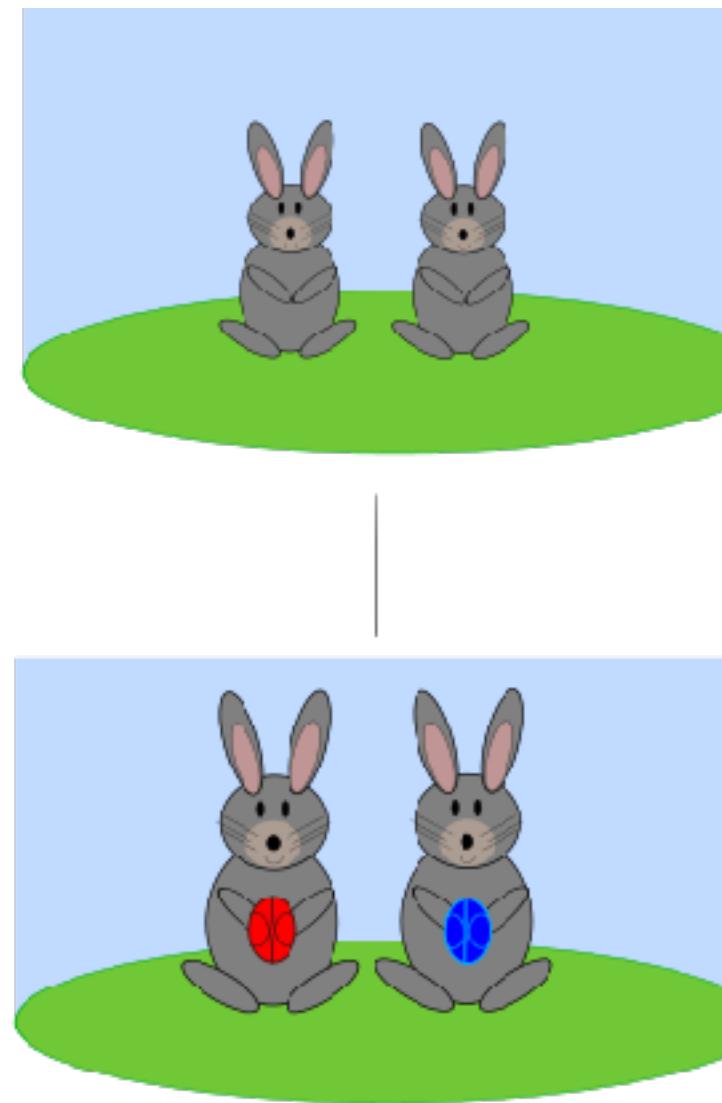


Page 124 du Liber abaci de la bibliothèque nationale de Florence

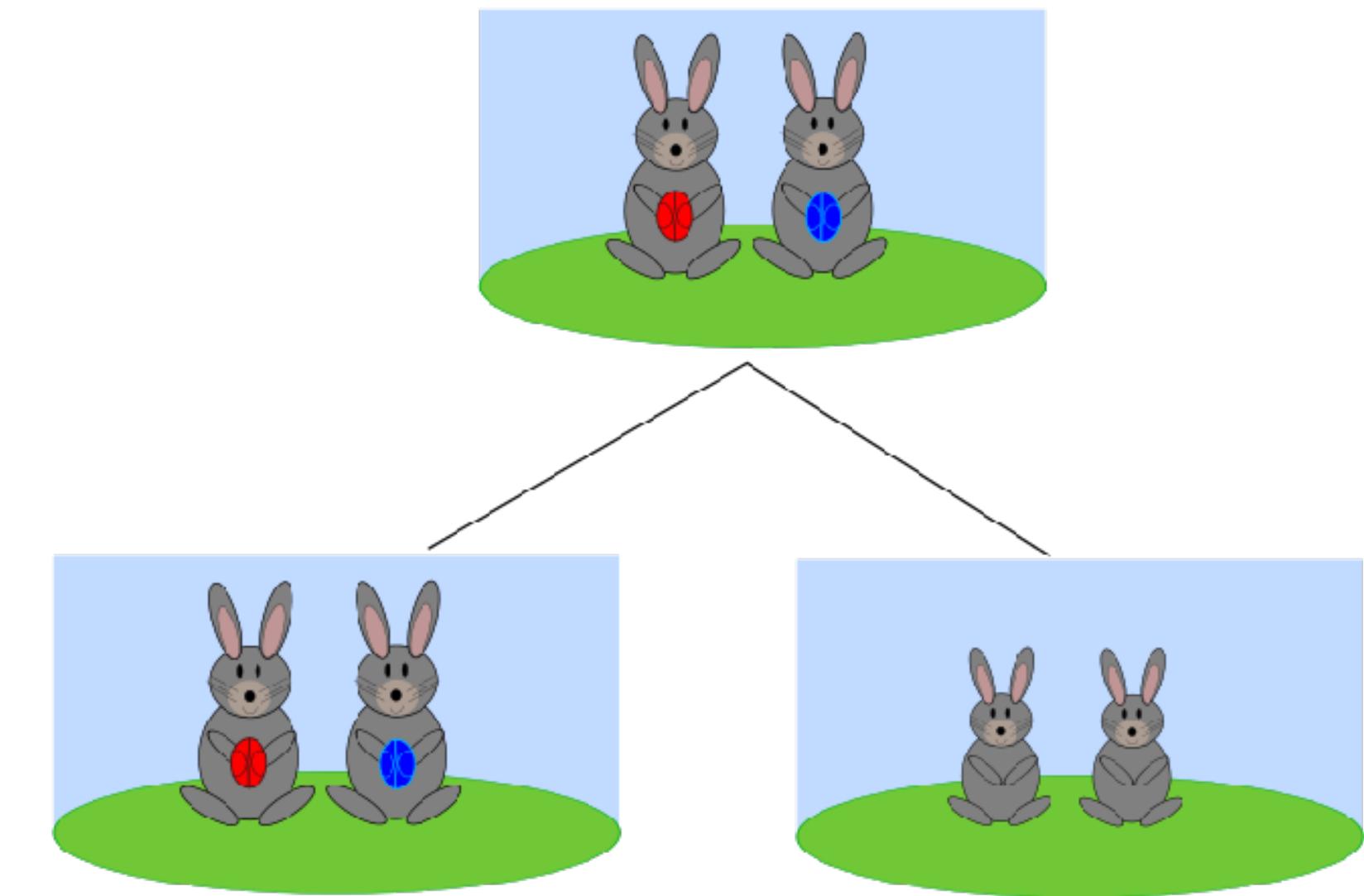


Graphiquement

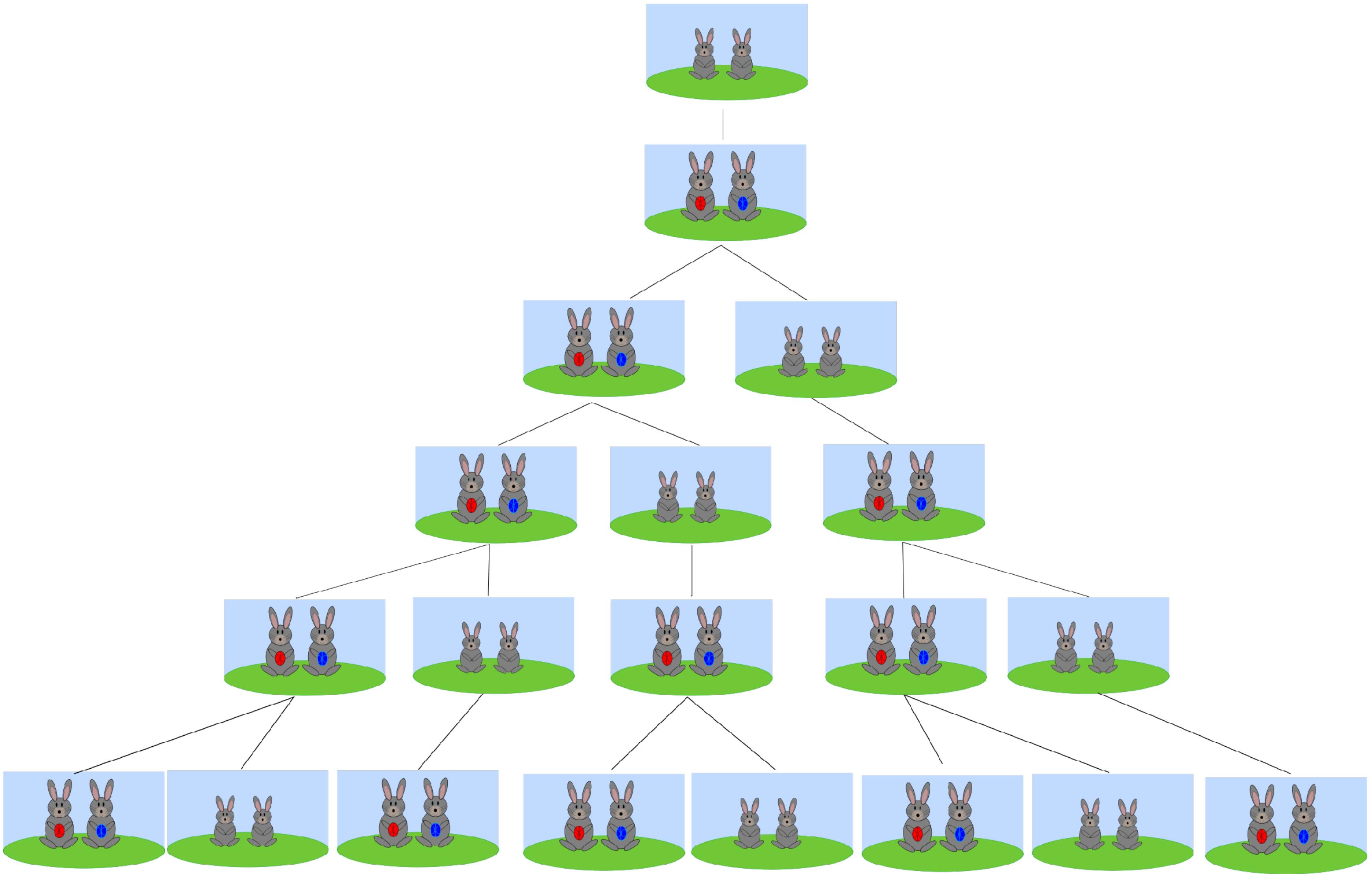
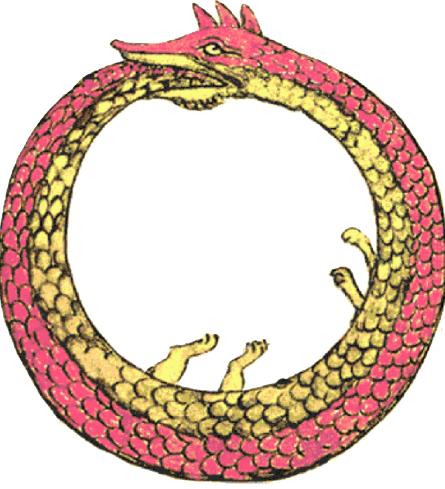
Les enfants deviennent adultes le mois suivant



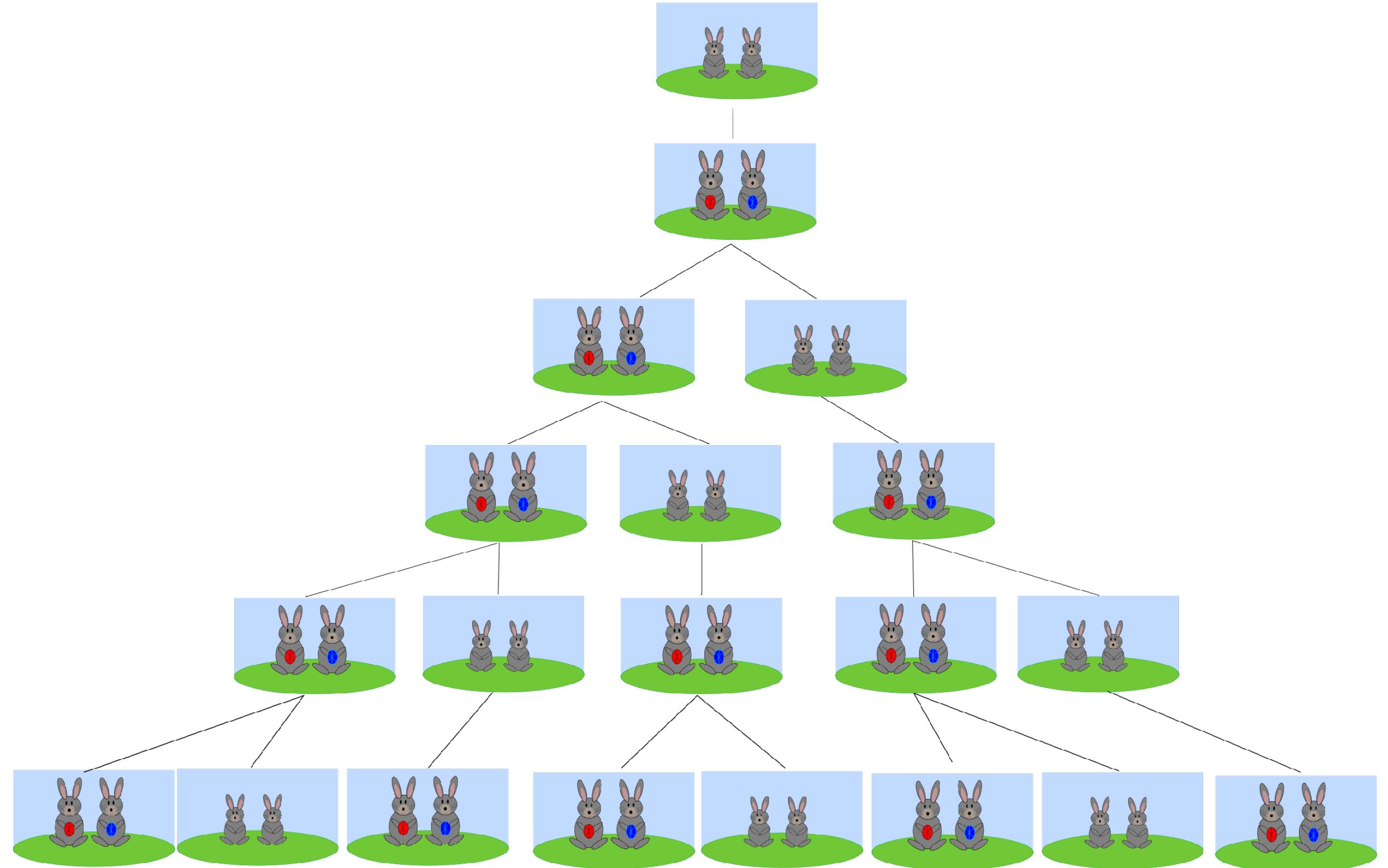
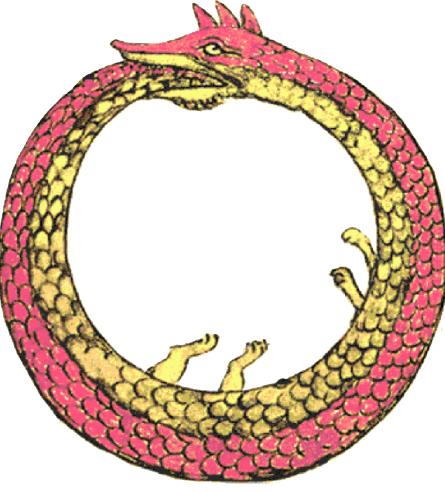
Les adultes font des enfants et survivent tous les mois



Au fil des générations ...



Au fil des générations ...

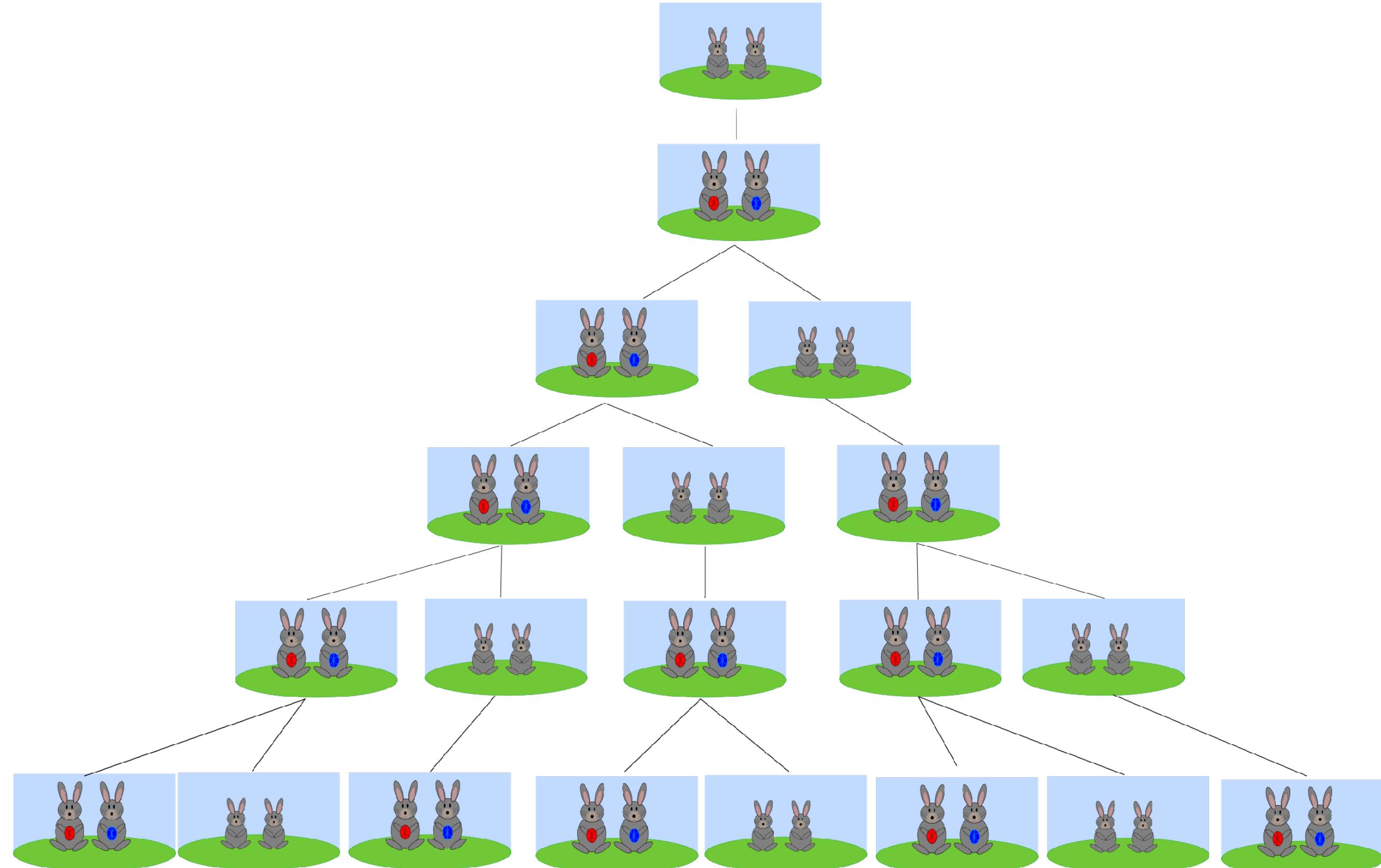
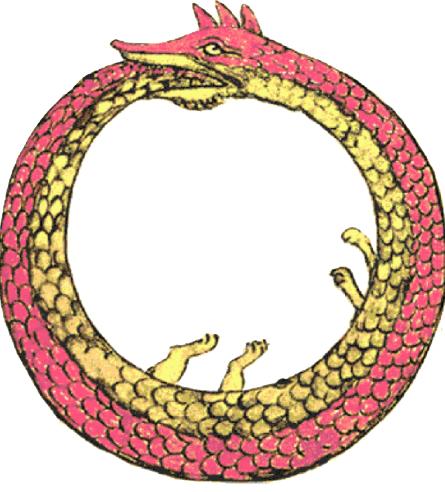


$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Au fil des générations ...

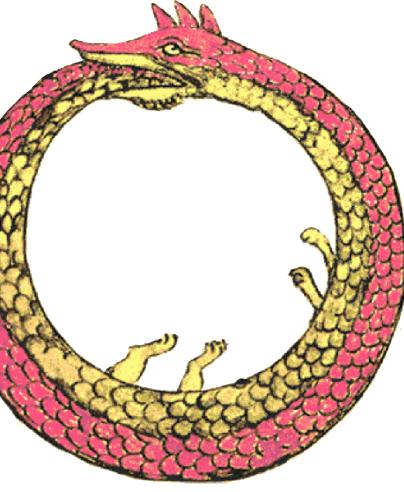


$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

fonction $F(n)$ (version récursive)
si n vaut 0 ou 1 alors
 retourner n
sinon
 retourner $F(n-1) + F(n-2)$
fin si



Traçons l'exécution ...

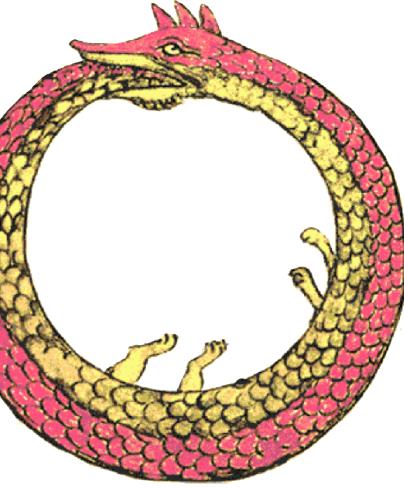
```
fonction F(n) (version récursive)
  si n vaut 0 ou 1 alors
    retourner n
  sinon
    retourner F(n-1) + F(n-2)
  fin si
```

Calculer f(4)

Calculer f(3)

Calculer f(2)

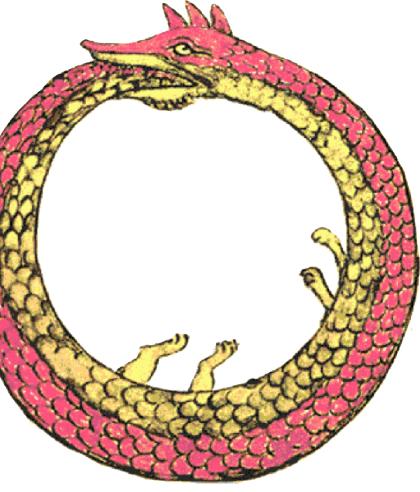
retourner f(3)+f(2)



Traçons l'exécution ...

```
fonction F(n) (version récursive)
  si n vaut 0 ou 1 alors
    retourner n
  sinon
    retourner F(n-1) + F(n-2)
  fin si
```

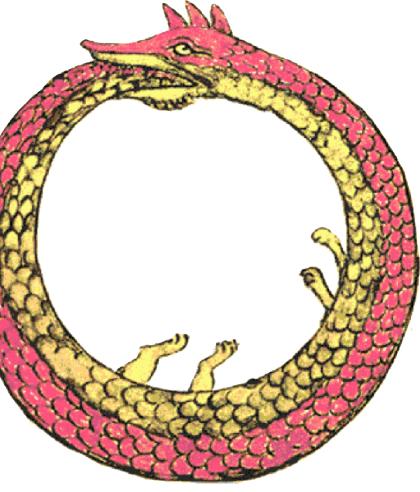
Calculer f(4)
Calculer f(3)
Calculer f(2)
Calculer f(1)
retourner f(2)+f(1)
Calculer f(2)
Calculer f(1)
Calculer f(0)
retourner f(0)+f(1)
retourner f(3)+f(2)



Traçons l'exécution ...

```
fonction F(n) (version récursive)
  si n vaut 0 ou 1 alors
    retourner n
  sinon
    retourner F(n-1) + F(n-2)
  fin si
```

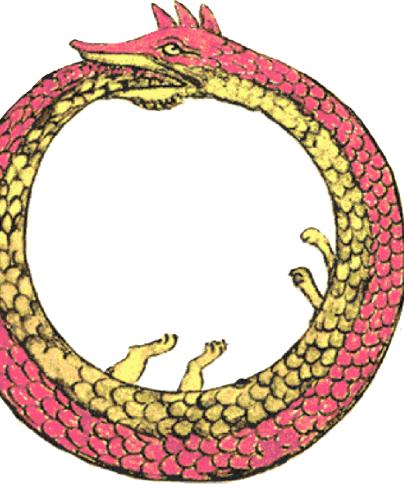
```
Calculer f(4)
  Calculer f(3)
    Calculer f(2)
      Calculer f(1)
        Calculer f(0)
        retourner f(0)+f(1)
      Calculer f(1)
        retourner 1
        retourner f(2)+f(1)
      Calculer f(2)
        Calculer f(1)
          retourner 1
        Calculer f(0)
          retourner 1
          retourner f(0)+f(1)
        retourner f(3)+f(2)
```



Traçons l'exécution ...

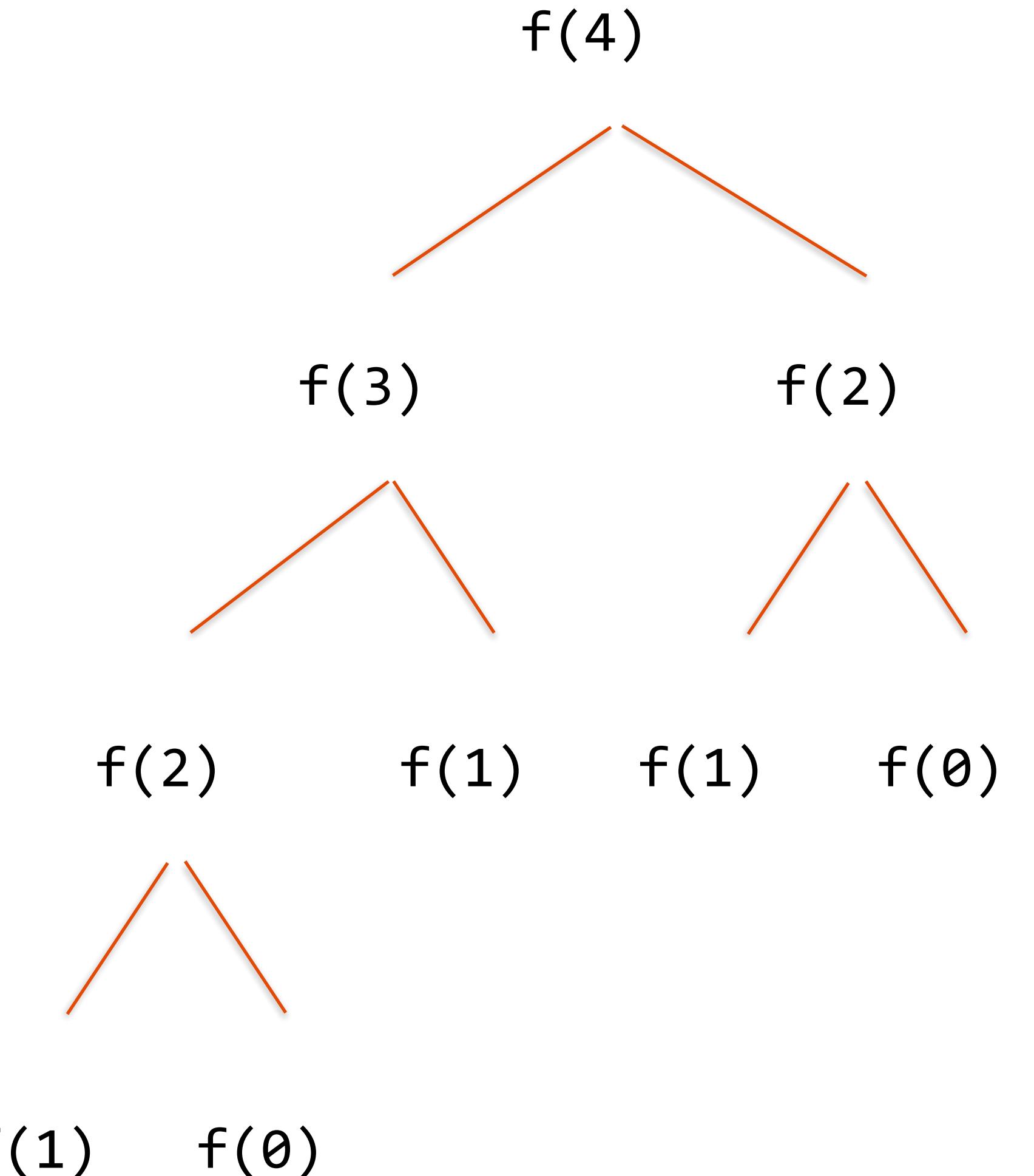
```
fonction F(n) (version récursive)
  si n vaut 0 ou 1 alors
    retourner n
  sinon
    retourner F(n-1) + F(n-2)
  fin si
```

```
Calculer f(4)
  Calculer f(3)
    Calculer f(2)
      Calculer f(1)
        retourner 1
      Calculer f(0)
        retourner 1
        retourner f(0)+f(1) = 2
    Calculer f(1)
      retourner 1
      retourner f(2)+f(1) = 3
    Calculer f(2)
      Calculer f(1)
        retourner 1
      Calculer f(0)
        retourner 1
        retourner f(0)+f(1) = 2
    retourner f(3)+f(2) = 5
```

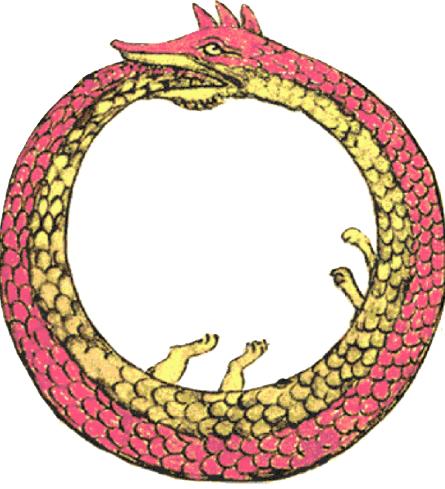


Arbre des appels

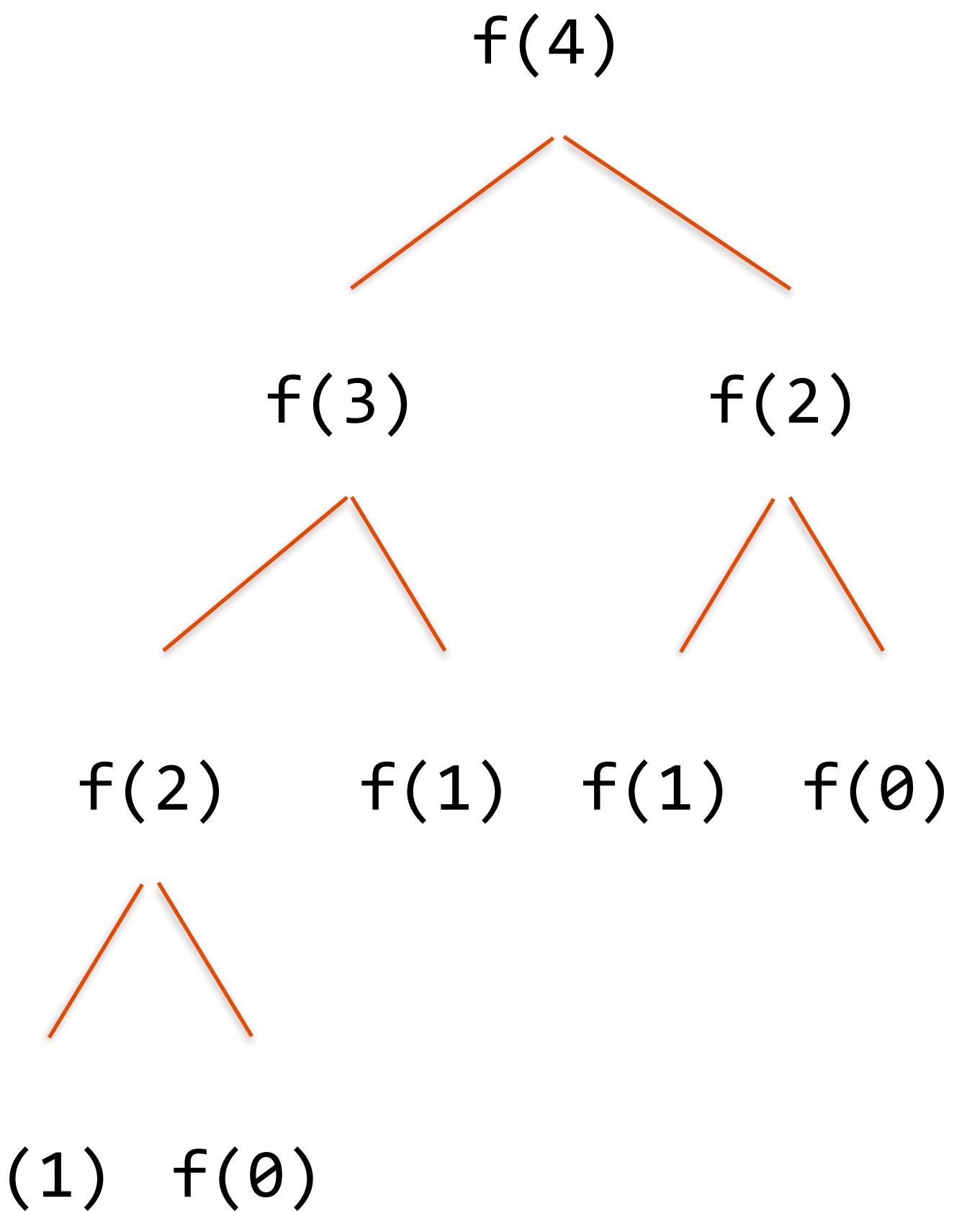
```
fonction F(n) (version récursive)
  si n vaut 0 ou 1 alors
    retourner n
  sinon
    retourner F(n-1) + F(n-2)
  fin si
```



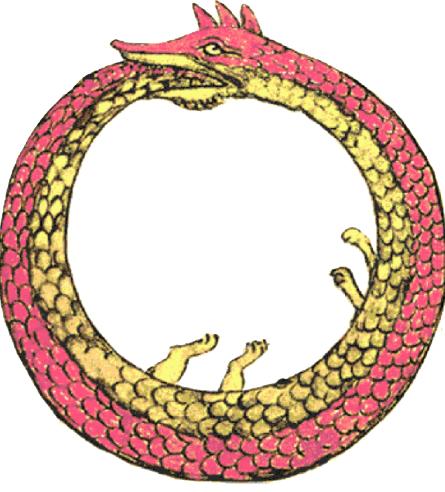
Complexité



- Quel est le nombre $A(n)$ d'appels récursifs effectués pour calculer $F(n)$?

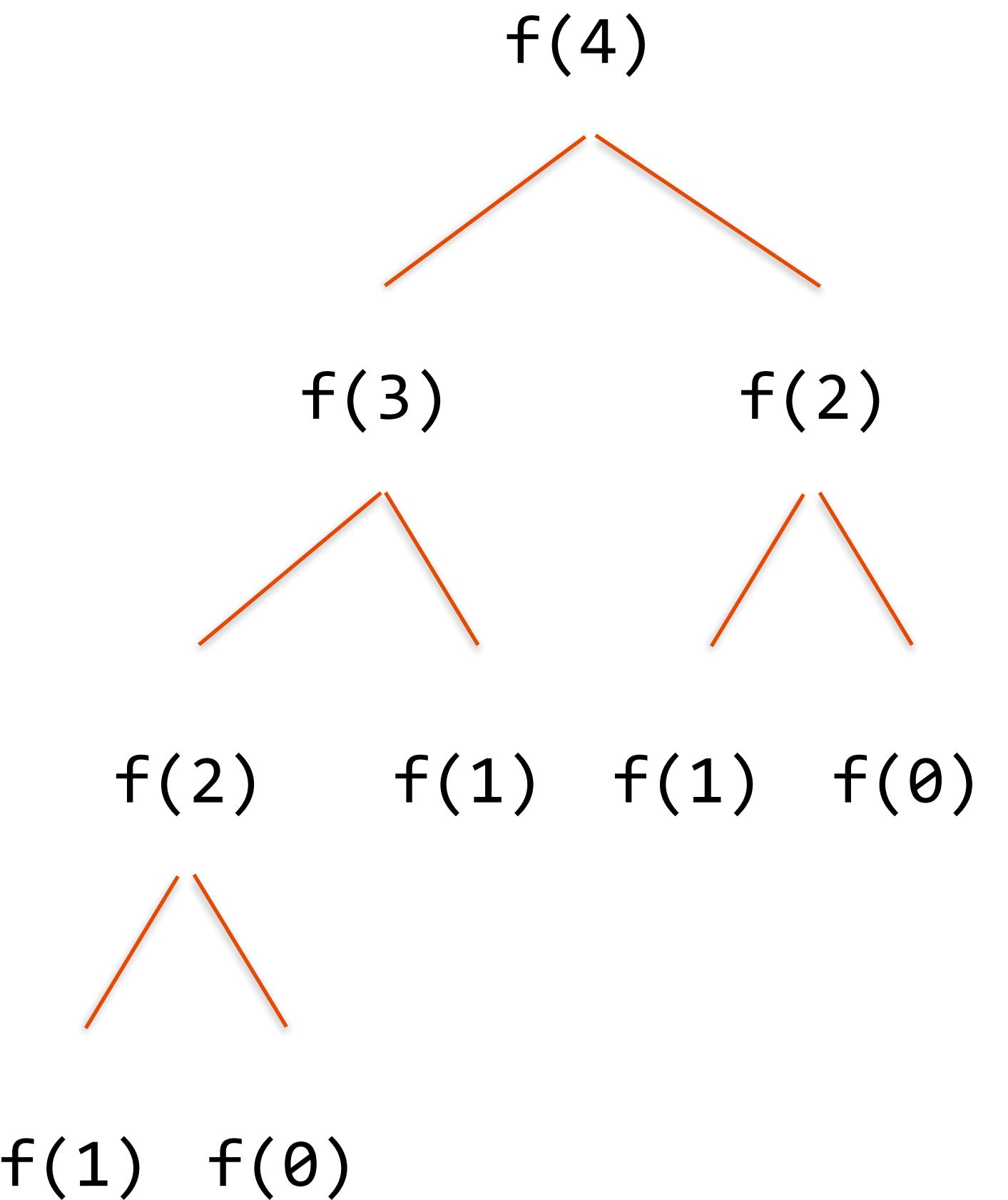


Complexité

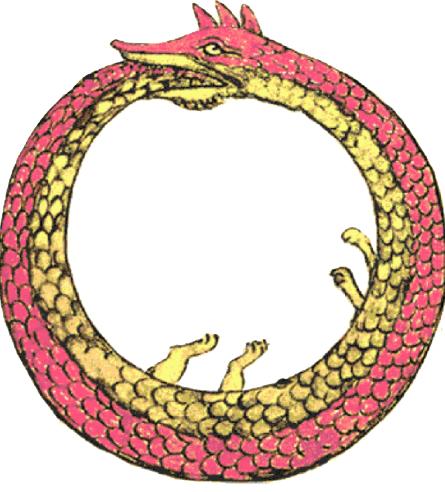


- Quel est le nombre $A(n)$ d'appels récursifs effectués pour calculer $F(n)$?

$$A(0) = 0$$



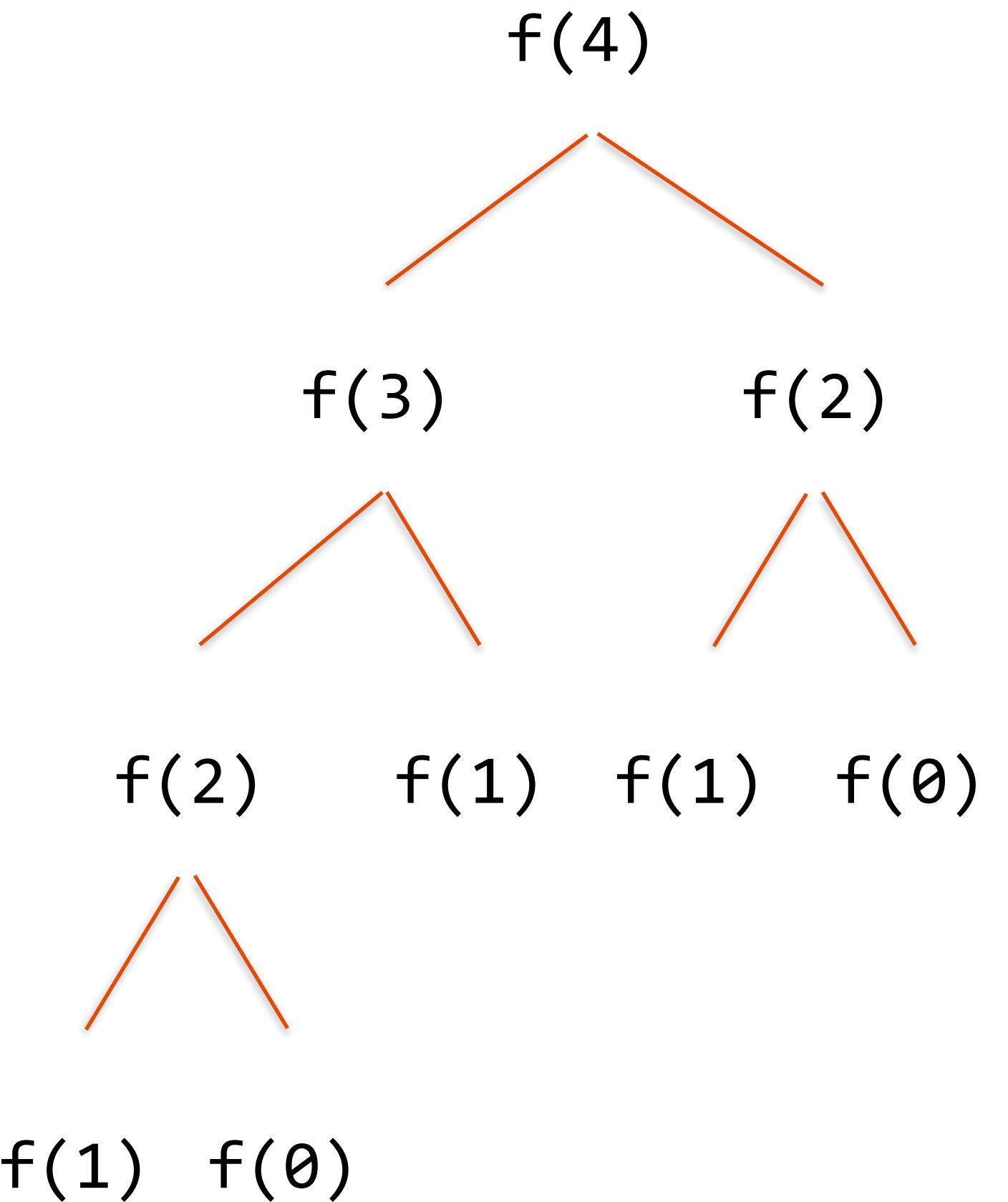
Complexité



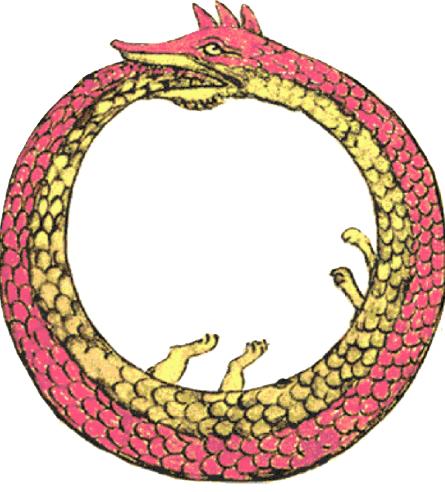
- Quel est le nombre $A(n)$ d'appels récursifs effectués pour calculer $F(n)$?

$$A(0) = 0$$

$$A(1) = 0$$



Complexité

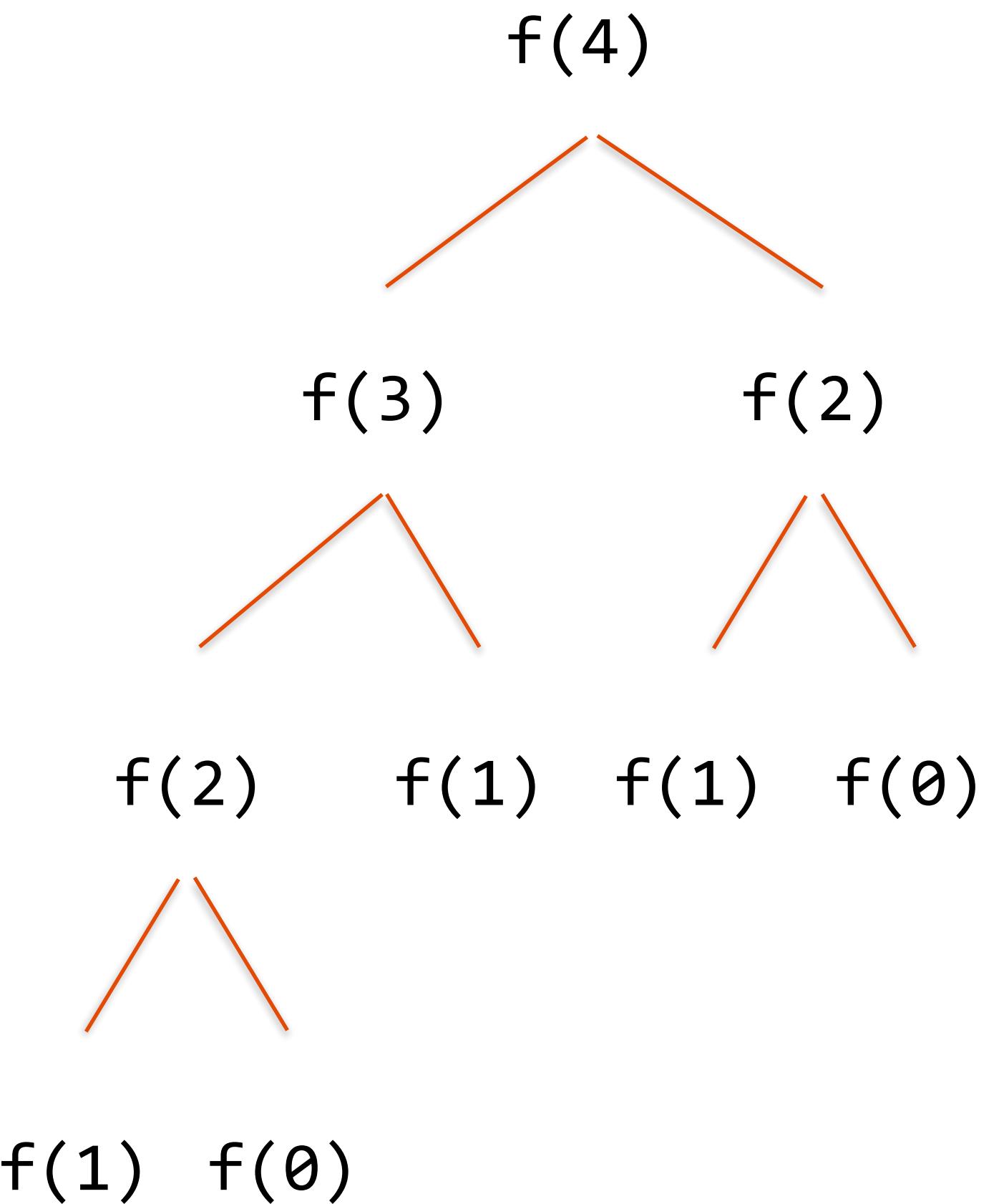


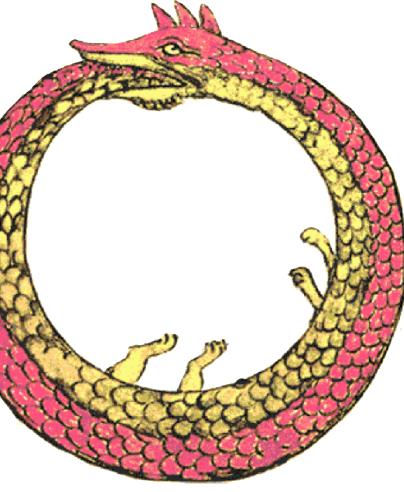
- Quel est le nombre $A(n)$ d'appels récursifs effectués pour calculer $F(n)$?

$$A(0) = 0$$

$$A(1) = 0$$

$$A(2) = 2$$





Complexité

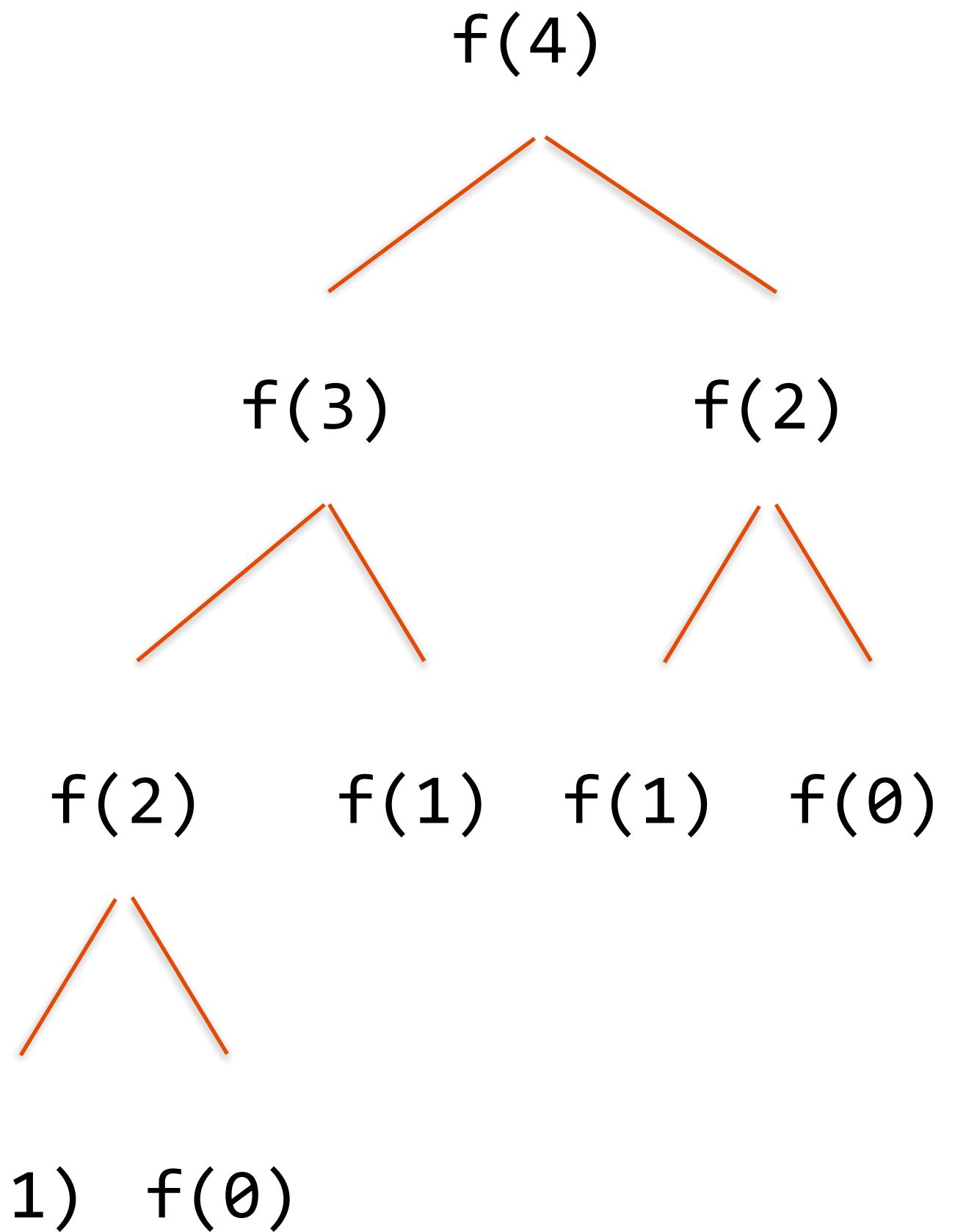
- Quel est le nombre $A(n)$ d'appels récursifs effectués pour calculer $F(n)$?

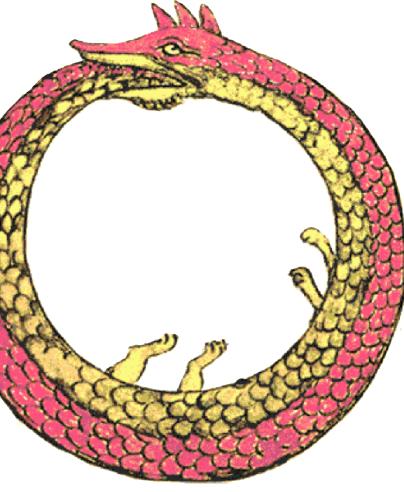
$$A(0) = 0$$

$$A(1) = 0$$

$$A(2) = 2$$

$$A(3) = 2 + A(2) = 4$$





Complexité

- Quel est le nombre $A(n)$ d'appels récursifs effectués pour calculer $F(n)$?

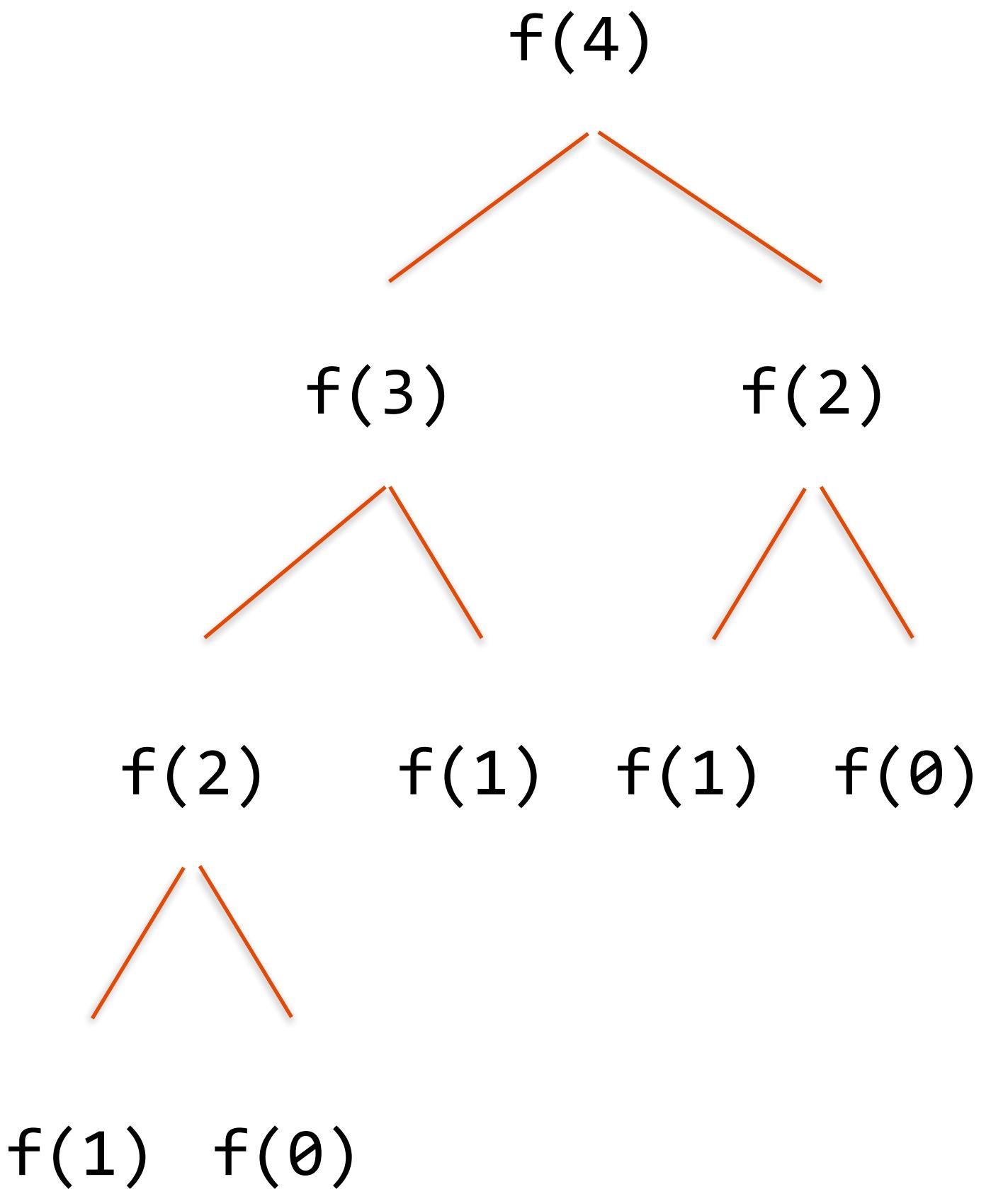
$$A(0) = 0$$

$$A(1) = 0$$

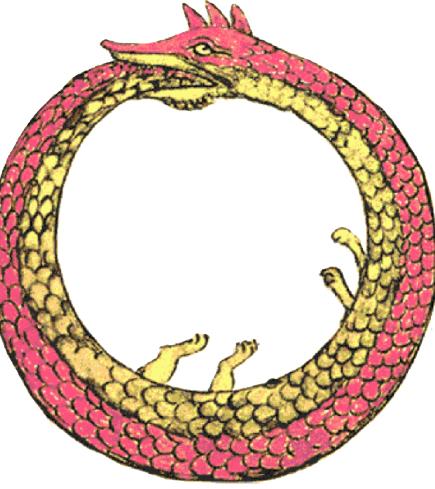
$$A(2) = 2$$

$$A(3) = 2 + A(2) = 4$$

$$A(4) = 2 + A(3) + A(2) = 8$$



Complexité



- Quel est le nombre $A(n)$ d'appels récursifs effectués pour calculer $F(n)$?

$$A(0) = 0$$

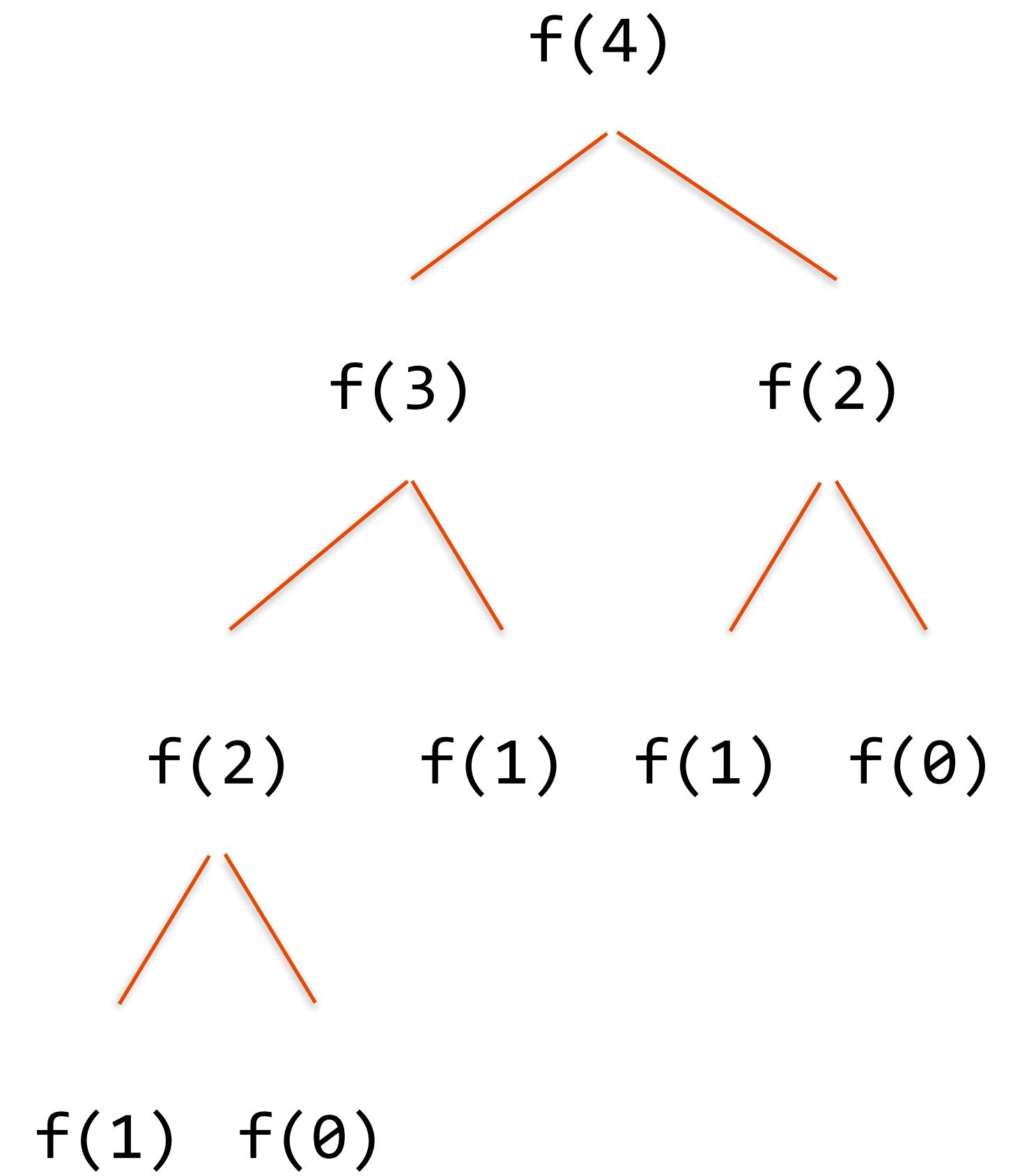
$$A(1) = 0$$

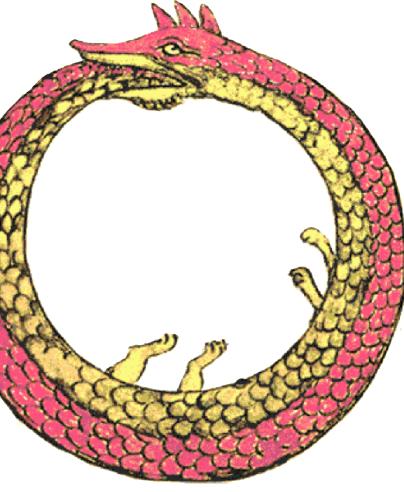
$$A(2) = 2$$

$$A(3) = 2 + A(2) = 4$$

$$A(4) = 2 + A(3) + A(2) = 8$$

$$A(n) = 2 + A(n-1) + A(n-2)$$



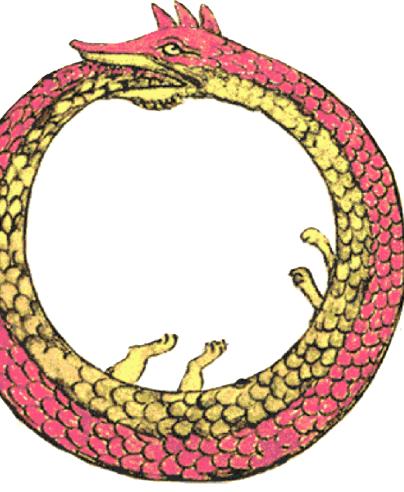


Complexité (2)

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| F(n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |
| A(n) | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 16 | 26 | 42 | 68 |
| A(n) | 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 40 | 66 | 108 |

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$A(n) = 2 + A(n-1) + A(n-2)$$



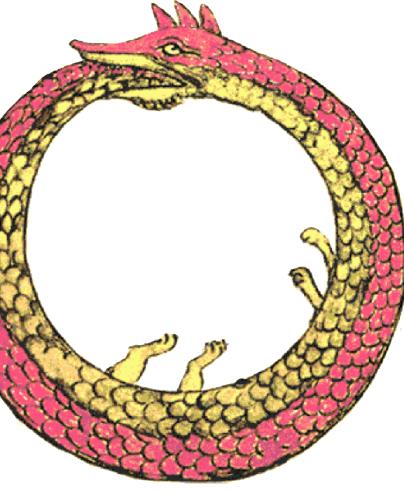
Complexité (2)

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| F(n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |
| A(n) | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 16 | 26 | 42 | 68 |
| A(n) | 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 40 | 66 | 108 |

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$A(n) = 2 + A(n-1) + A(n-2)$$

$$A(n) = 2 \cdot F(n+1) - 2$$



Complexité (2)

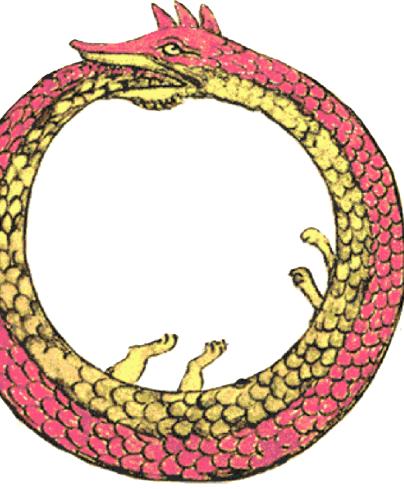
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| F(n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |
| A(n) | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 16 | 26 | 42 | 68 |
| A(n) | 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 40 | 66 | 108 |

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$A(n) = 2 + A(n-1) + A(n-2)$$

$$A(n) = 2 \cdot F(n+1) - 2$$

$$= 2 (F(n) + F(n-1)) - 2$$



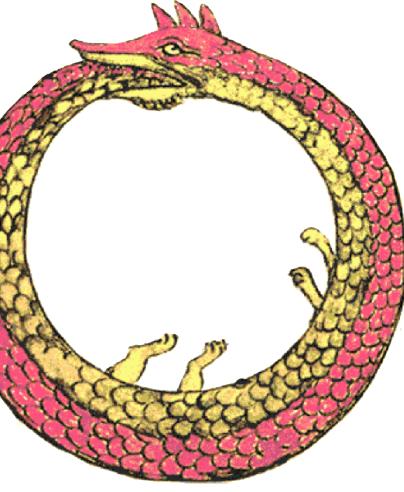
Complexité (2)

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| F(n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |
| A(n) | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 16 | 26 | 42 | 68 |
| A(n) | 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 40 | 66 | 108 |

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$A(n) = 2 + A(n-1) + A(n-2)$$

$$\begin{aligned} A(n) &= 2 \cdot F(n+1) - 2 \\ &= 2 \cdot (F(n) + F(n-1)) - 2 \\ &= 2 + (2 \cdot F(n) - 2) + (2 \cdot F(n-1) - 2) \end{aligned}$$



Complexité (2)

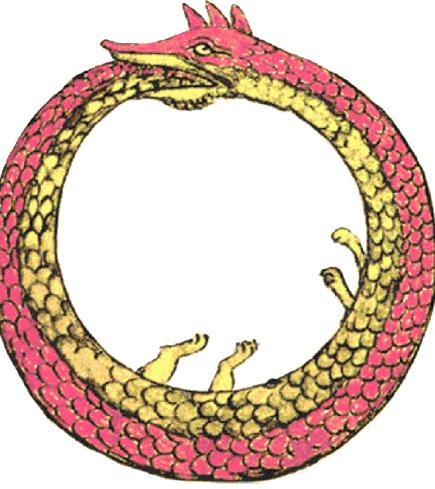
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| F(n) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |
| A(n) | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 16 | 26 | 42 | 68 |
| A(n) | 0 | 0 | 2 | 4 | 8 | 14 | 24 | 40 | 66 | 108 |

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$A(n) = 2 + A(n-1) + A(n-2)$$

$$\begin{aligned} A(n) &= 2 \cdot F(n+1) - 2 \\ &= 2 \cdot (F(n) + F(n-1)) - 2 \\ &= 2 + (2 \cdot F(n) - 2) + (2 \cdot F(n-1) - 2) \\ &= 2 + A(n-1) + A(n-2) \end{aligned}$$

Comment croît $F(n)$?



- Supposons que $F(n)$ croisse comme une exponentielle $\approx x^n$, que vaut x ?
- On sait que $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

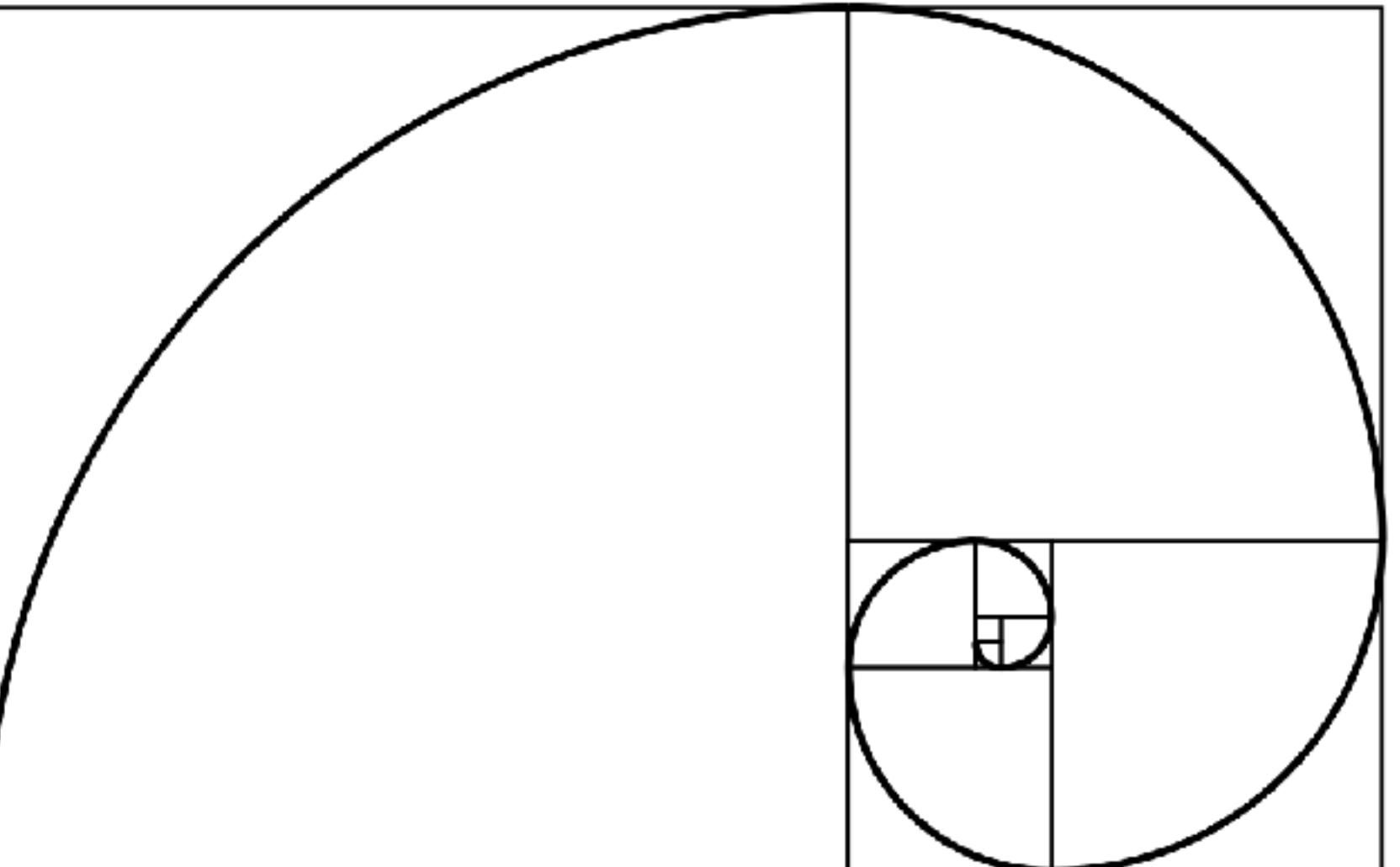
$$x^2 = x + 1$$

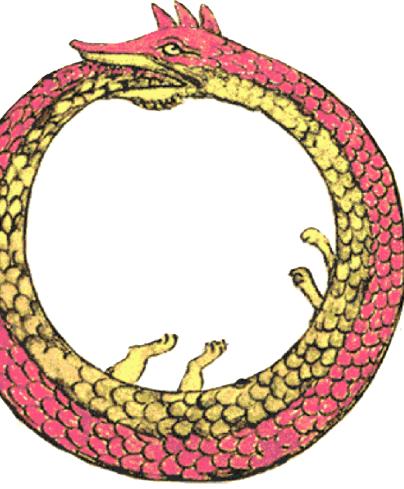
$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = (1 \pm \sqrt{5}) / 2$$

- La suite de Fibonacci croît donc comme les puissances du nombre d'or

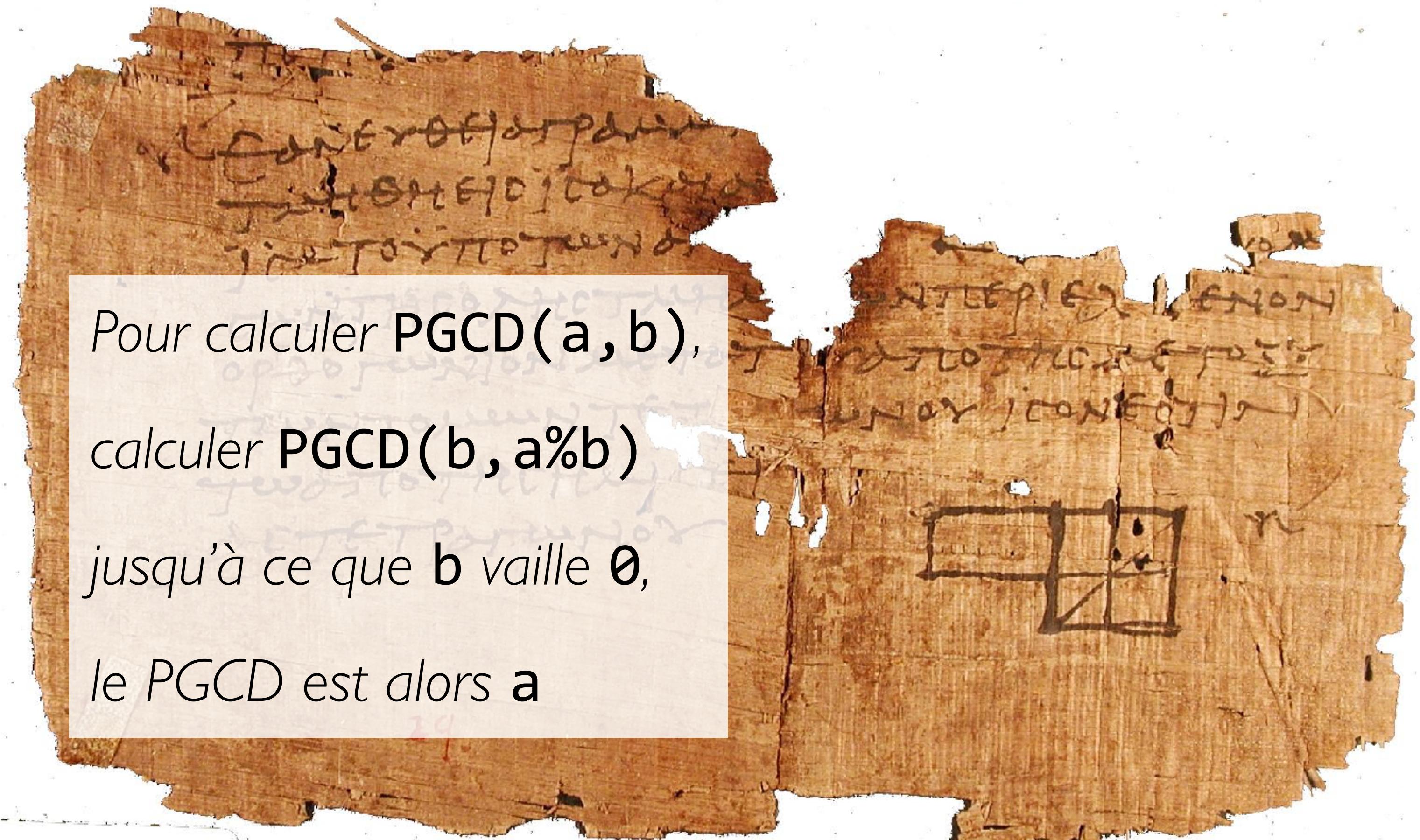
$$\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1.618$$



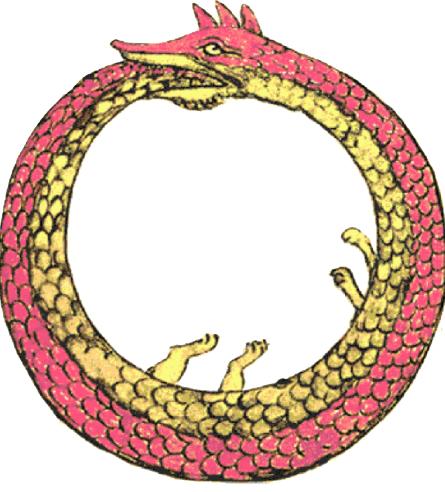


Algorithme d'Euclide

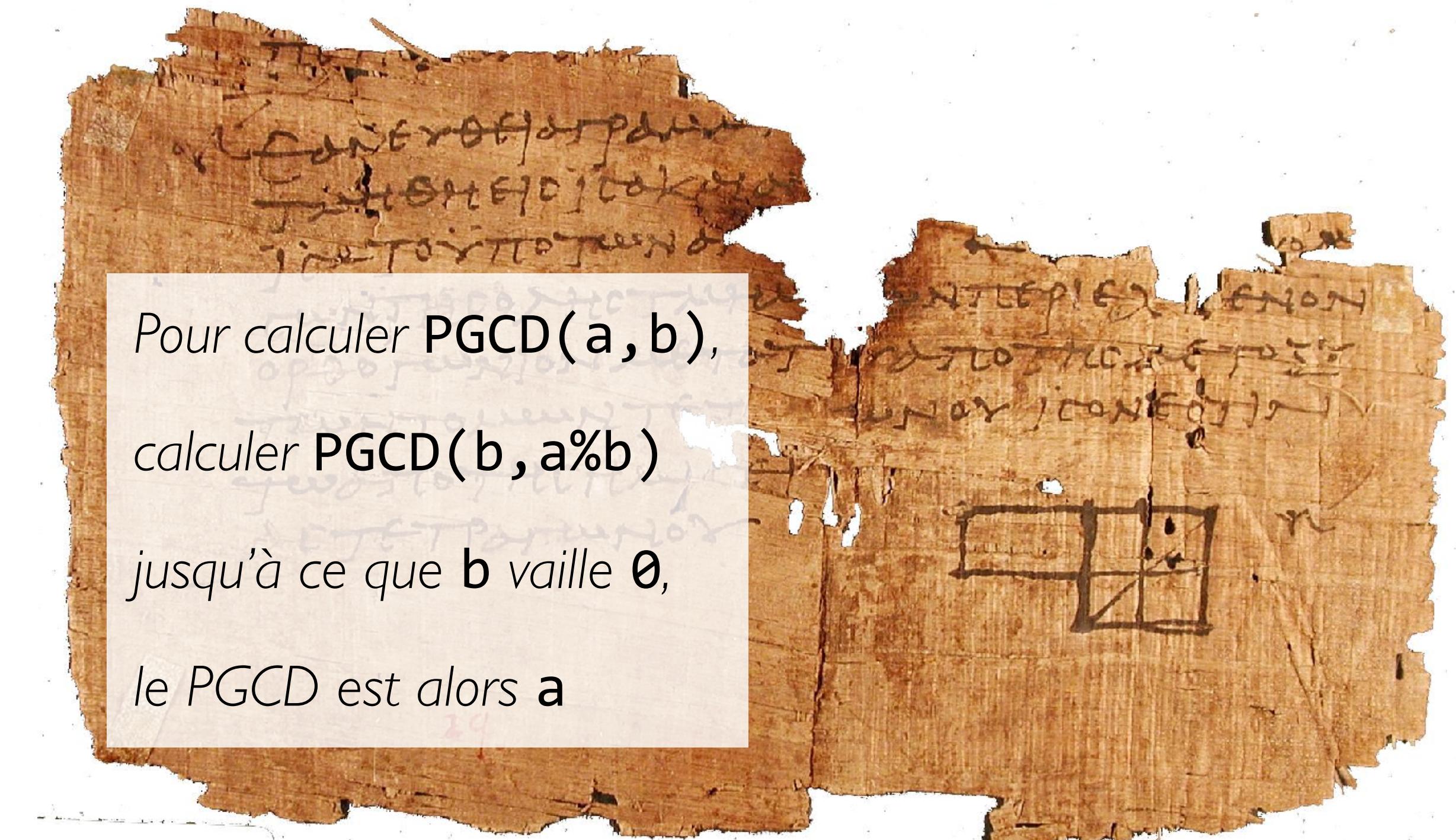
- Quel est le pire cas pour le calcul du PGCD ?



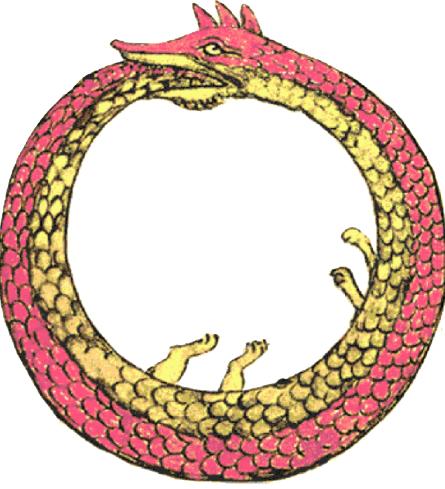
Algorithme d'Euclide



Pour calculer $\text{PGCD}(a, b)$,
calculer $\text{PGCD}(b, a \% b)$
jusqu'à ce que b vaille 0,
le PGCD est alors a

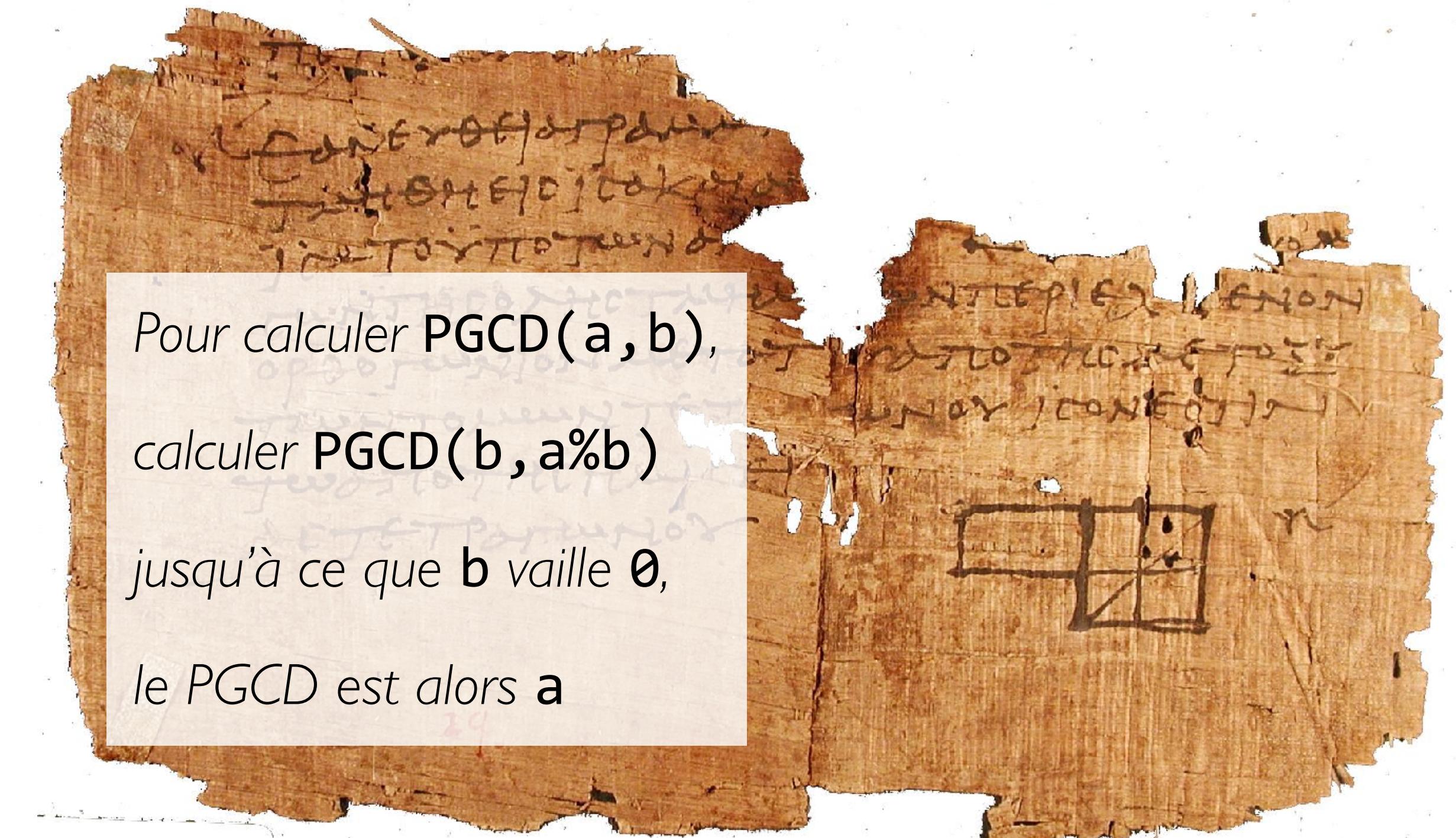


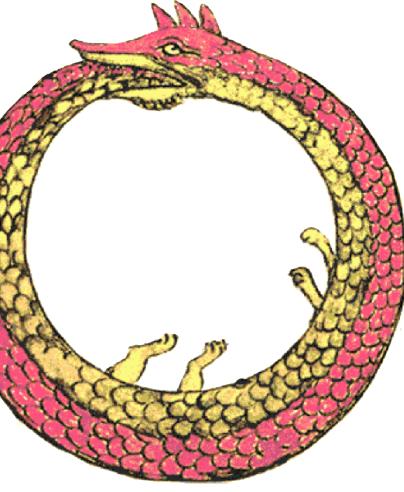
Algorithme d'Euclide



- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$





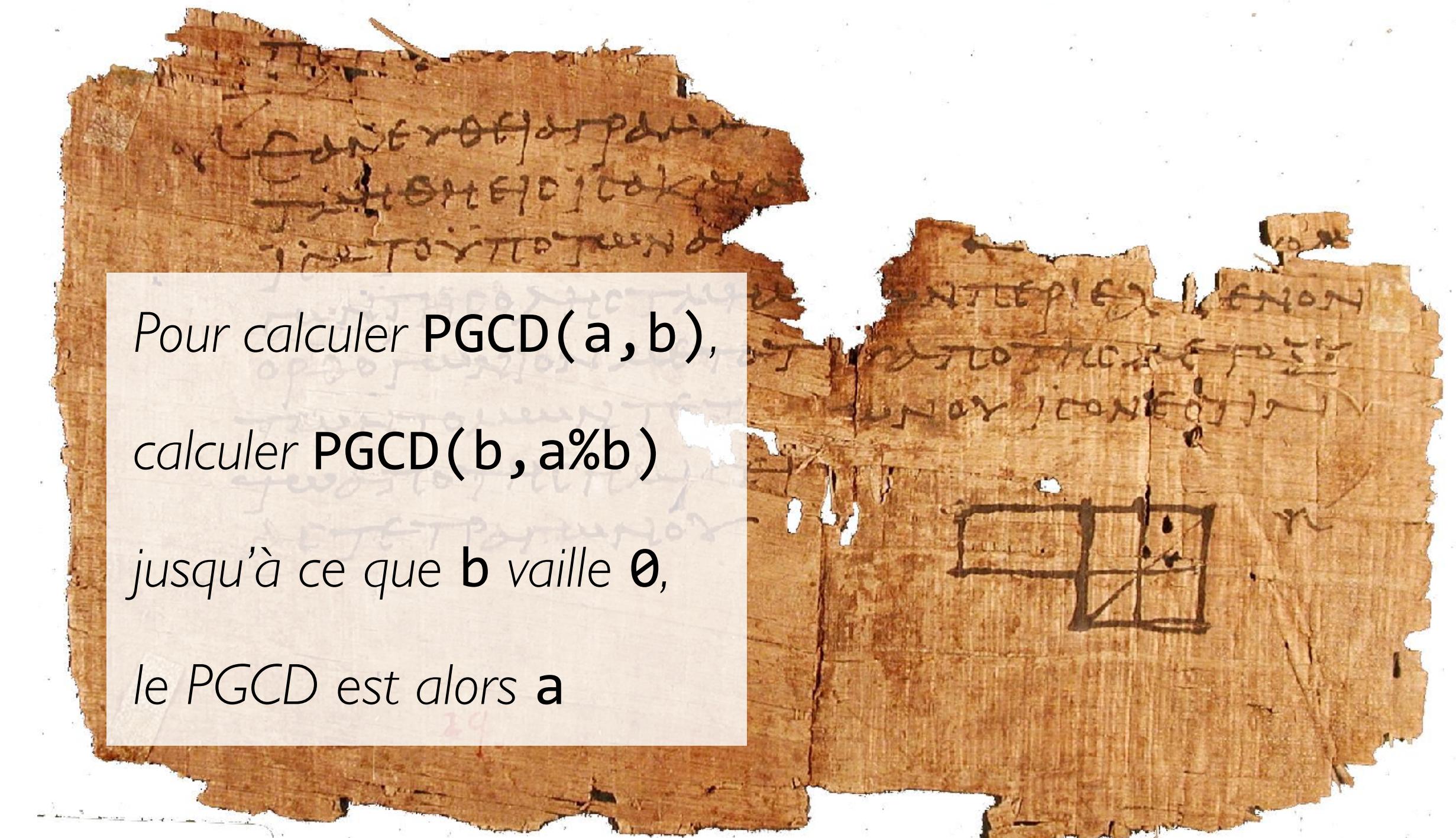
Algorithme d'Euclide

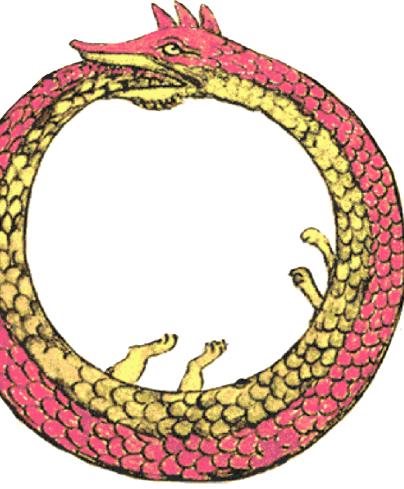
- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n.b, \text{ avec } n \geq 1$$

- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$





Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

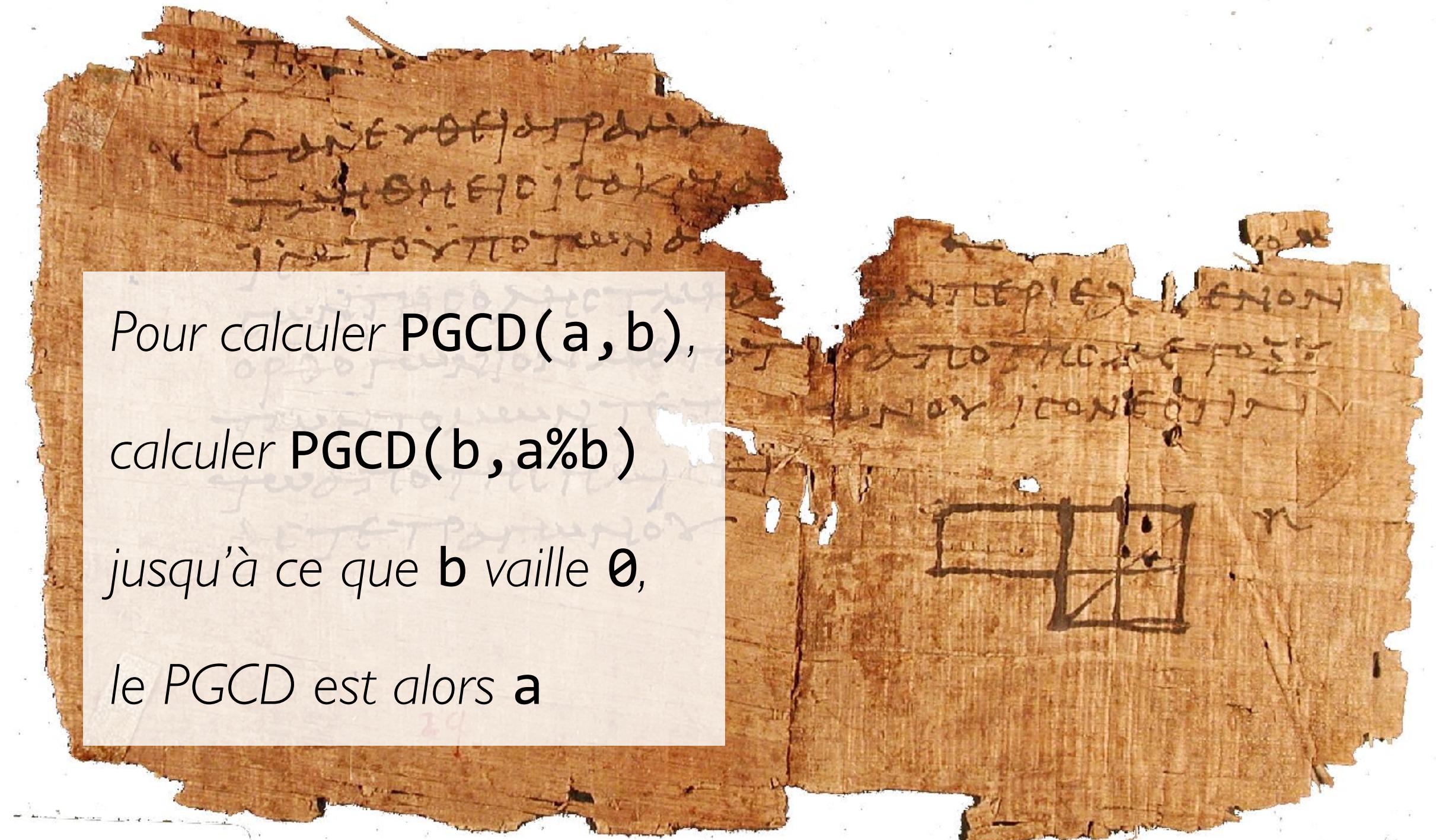
$$a \% b = a - n.b, \text{ avec } n \geq 1$$

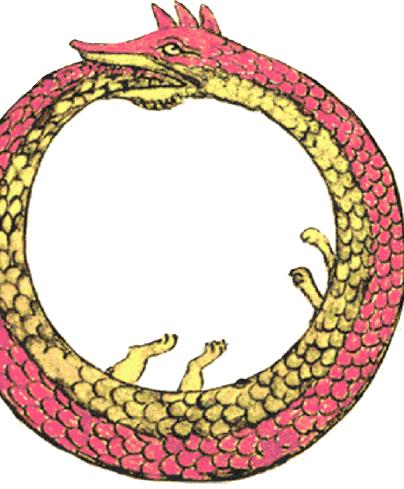
- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$

- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$





Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n.b, \text{ avec } n \geq 1$$

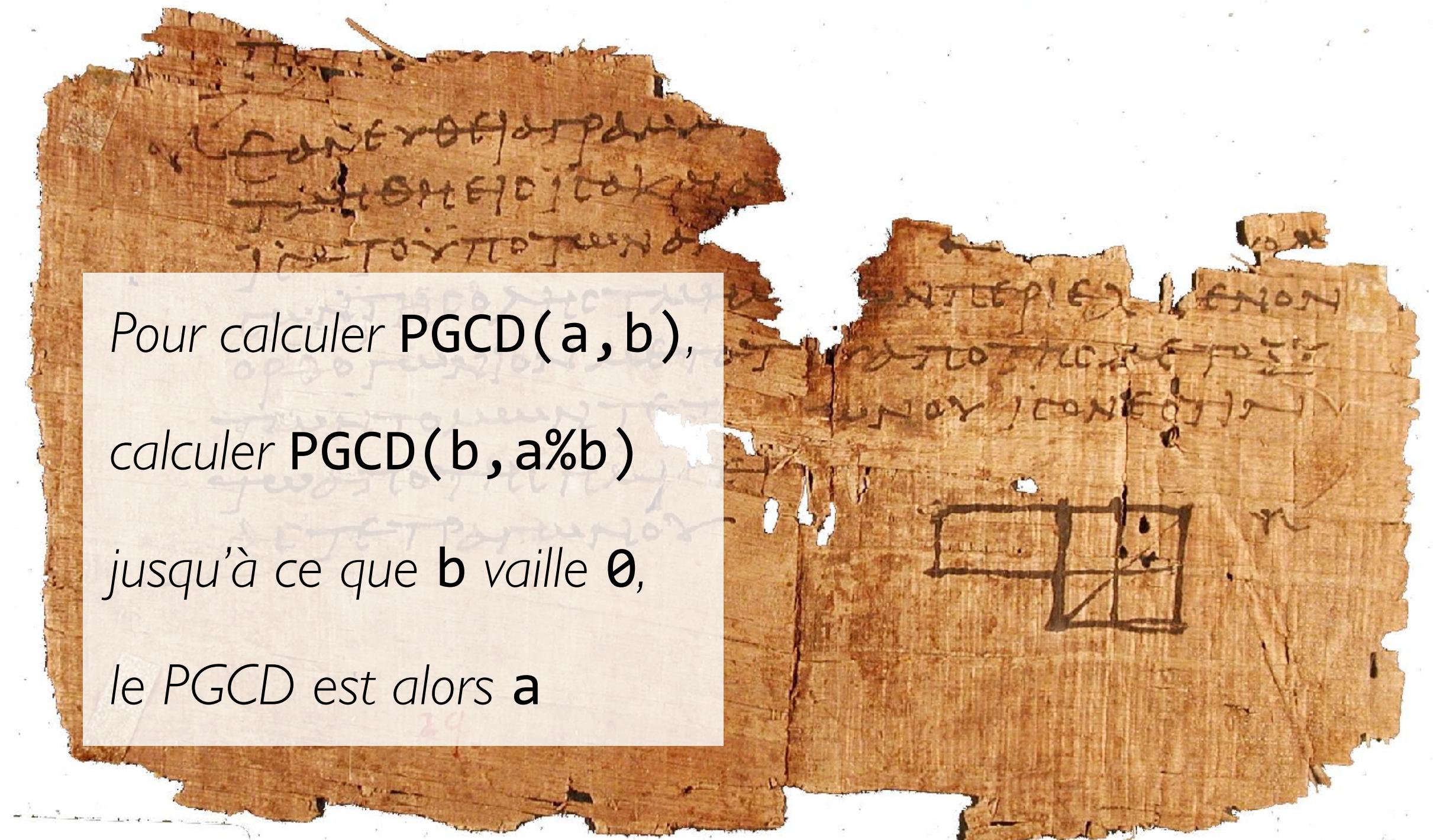
- Dans le pire cas,

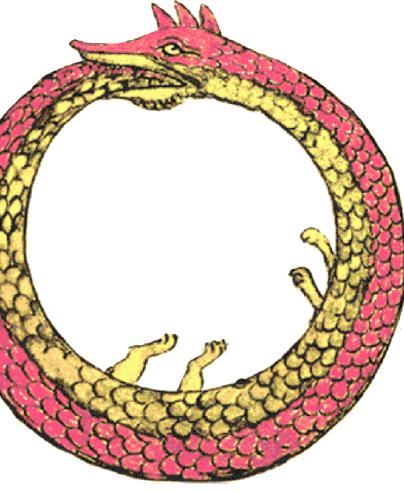
$$a \% b = a - b$$

- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...





Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n.b, \text{ avec } n \geq 1$$

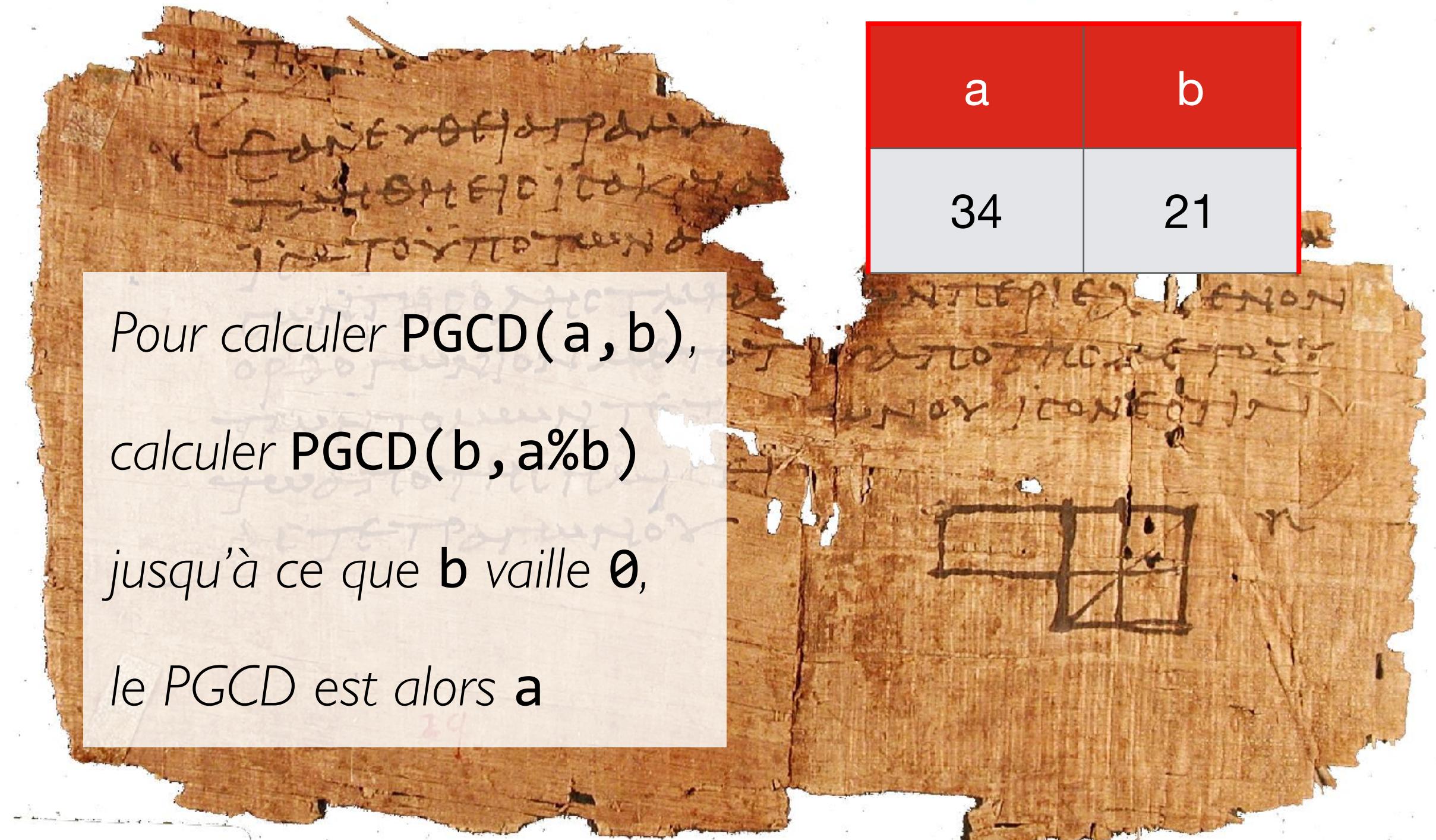
- Dans le pire cas,

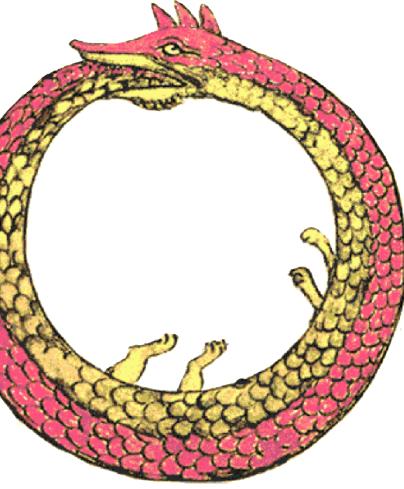
$$a \% b = a - b$$

- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...





Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$

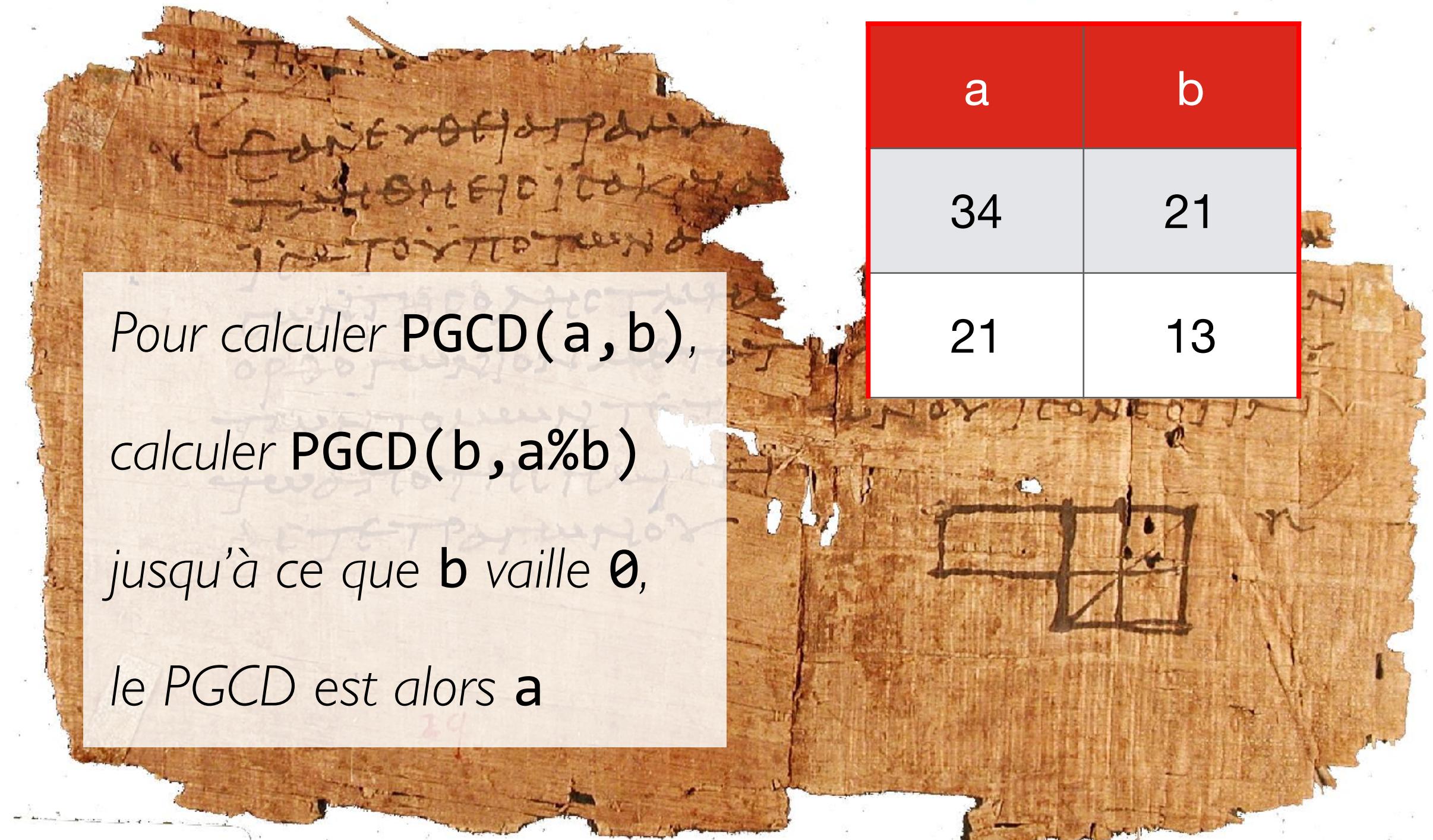
- Dans le pire cas,

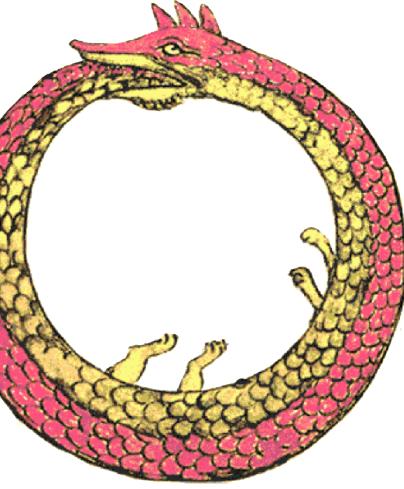
$$a \% b = a - b$$

- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...





Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$

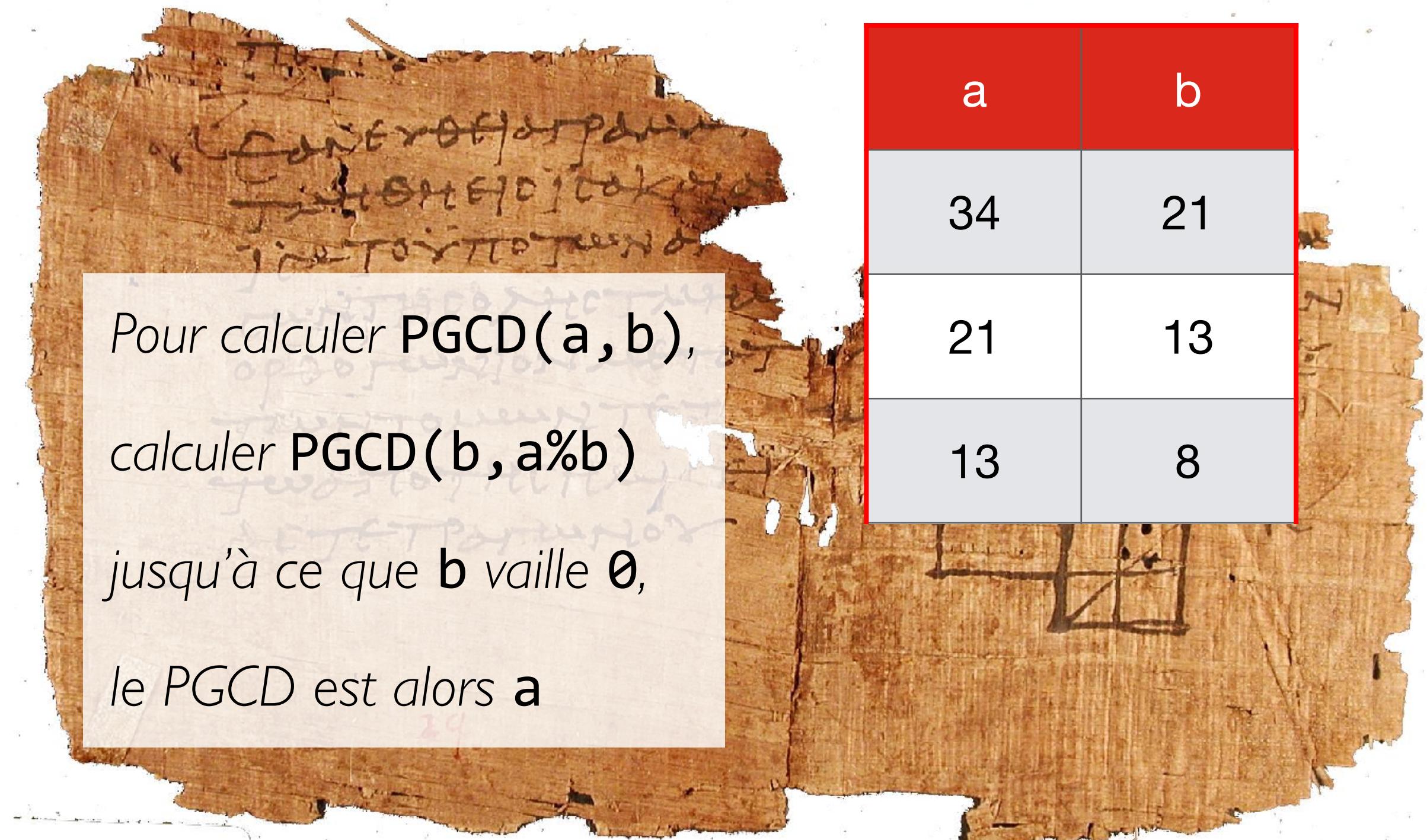
- Dans le pire cas,

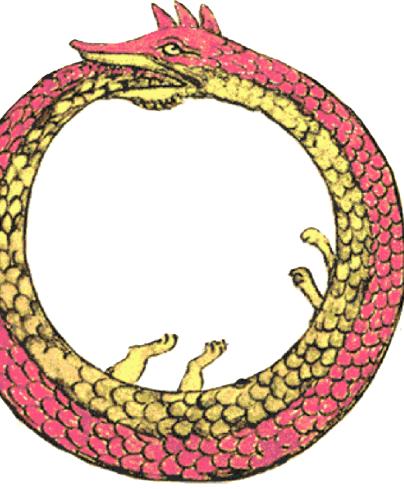
$$a \% b = a - b$$

- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...





Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$

- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$

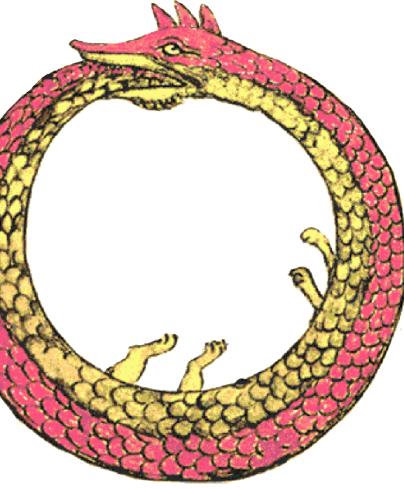
- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...

Pour calculer PGCD(a, b),
calculer PGCD(b, a%b)
jusqu'à ce que b vaille 0,
le PGCD est alors a

| a | b |
|----|----|
| 34 | 21 |
| 21 | 13 |
| 13 | 8 |
| 8 | 5 |



Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$

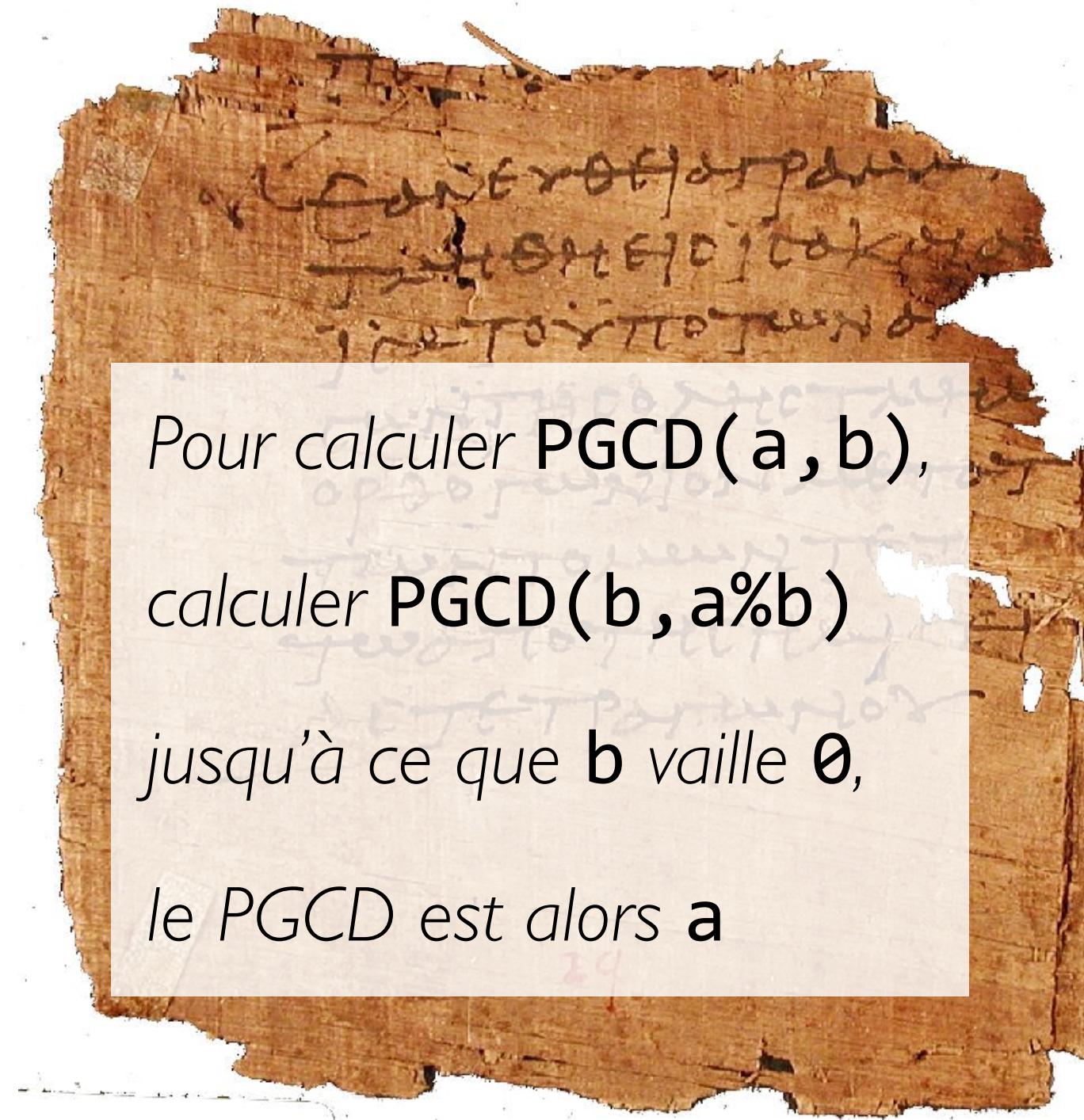
- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$

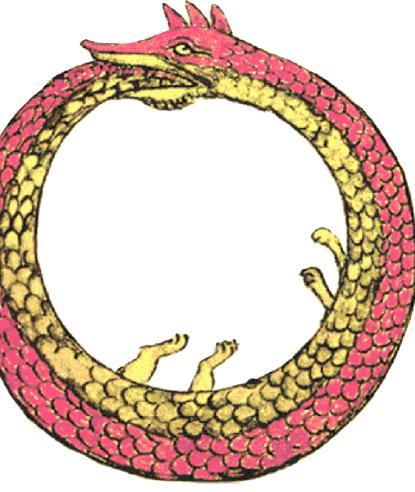
- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...



| a | b |
|----|----|
| 34 | 21 |
| 21 | 13 |
| 13 | 8 |
| 8 | 5 |
| 5 | 3 |



Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$

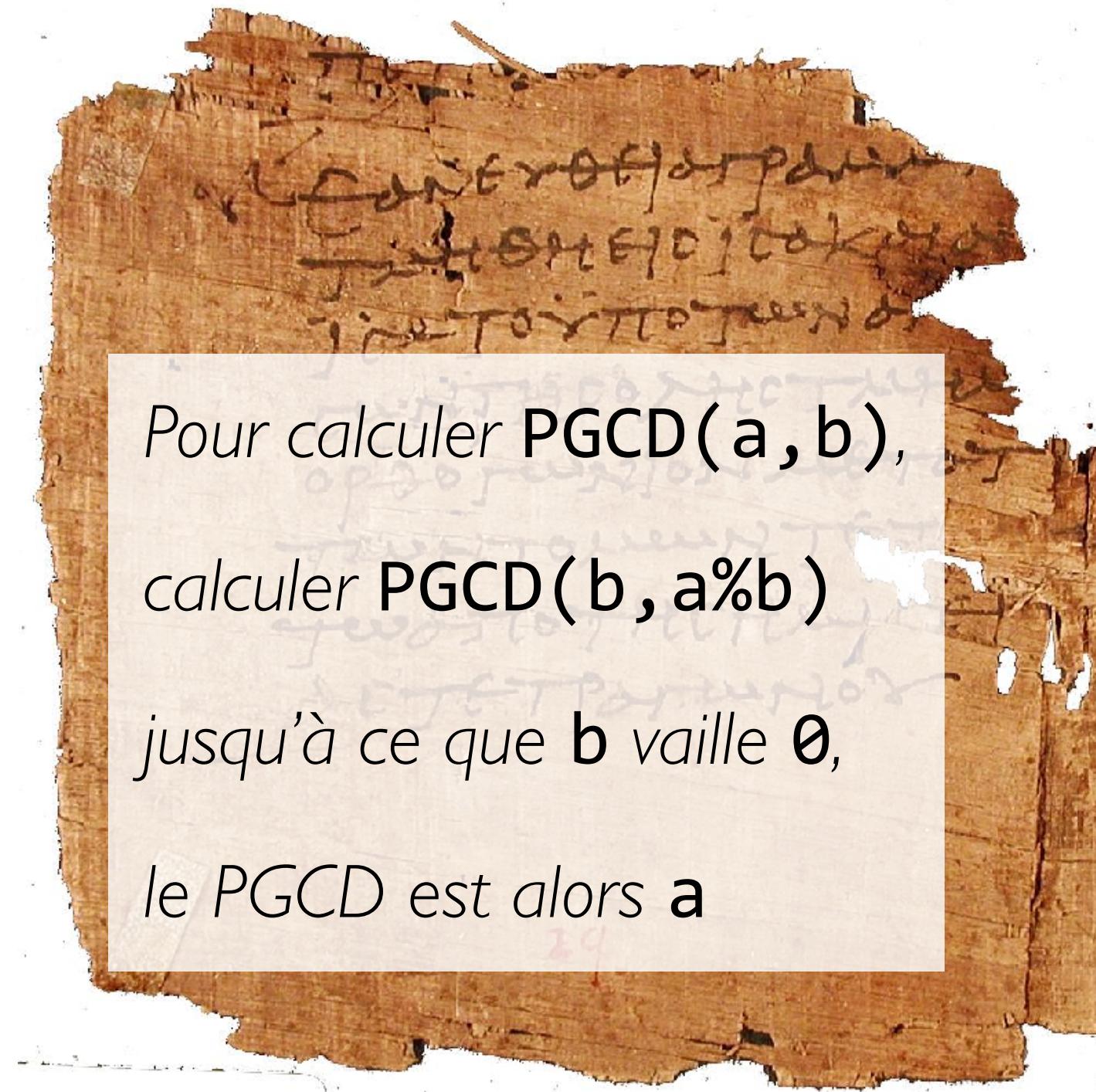
- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$

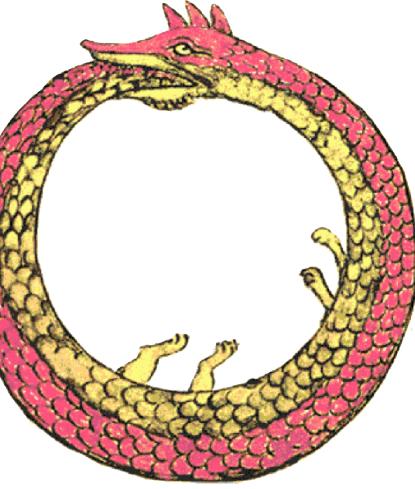
- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...



| a | b |
|----|----|
| 34 | 21 |
| 21 | 13 |
| 13 | 8 |
| 8 | 5 |
| 5 | 3 |
| 3 | 2 |



Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$

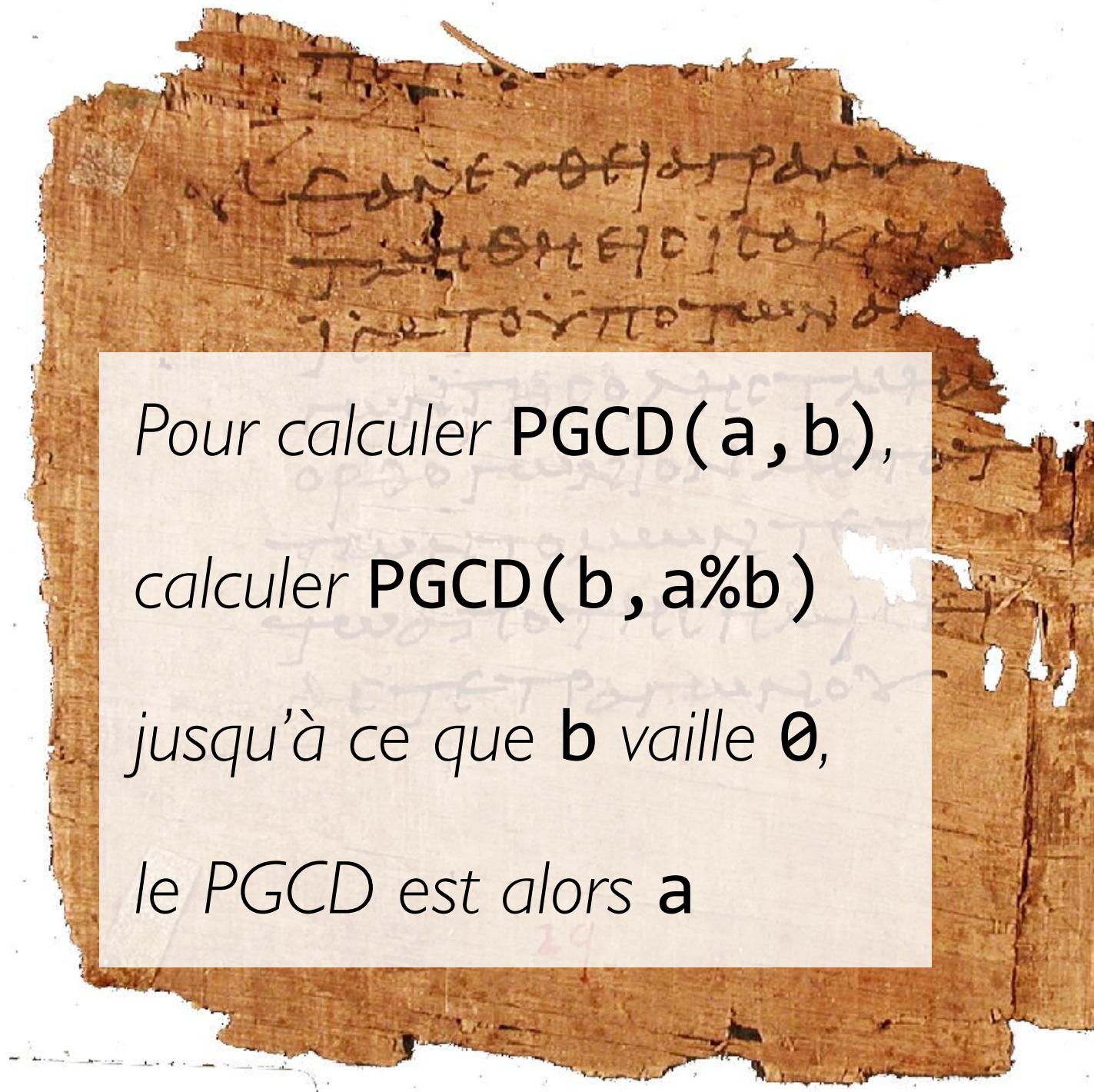
- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$

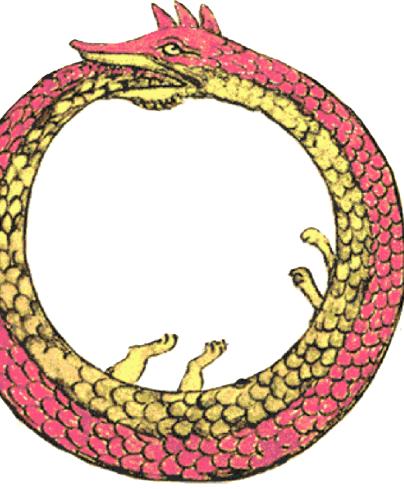
- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...



| a | b |
|----|----|
| 34 | 21 |
| 21 | 13 |
| 13 | 8 |
| 8 | 5 |
| 5 | 3 |
| 3 | 2 |
| 2 | 1 |



Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n.b, \text{ avec } n \geq 1$$

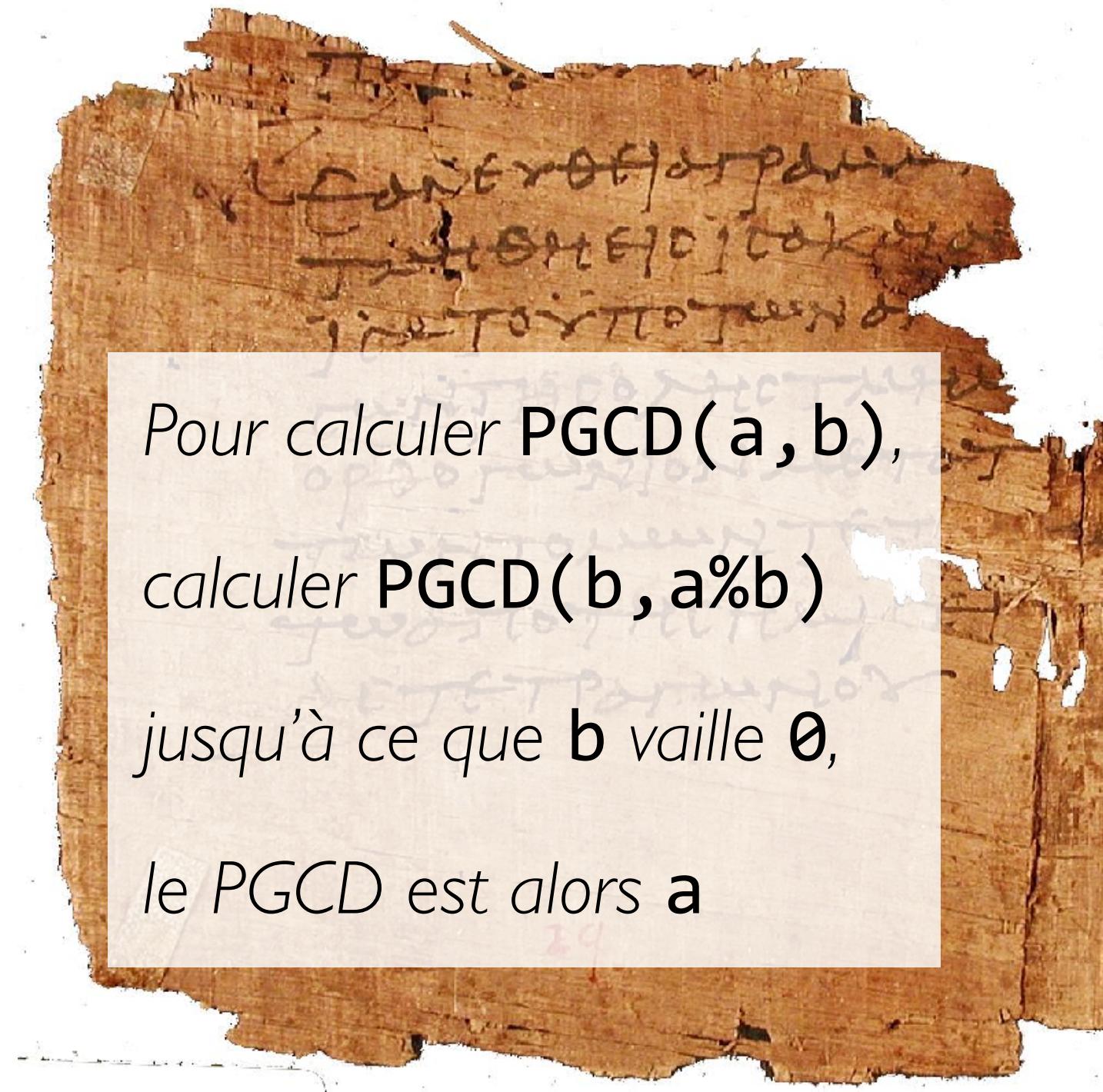
- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$

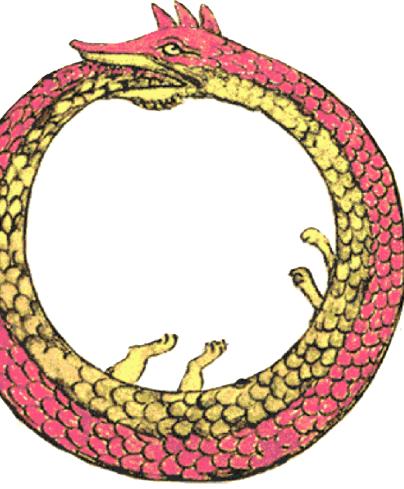
- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...



| a | b |
|----|----|
| 34 | 21 |
| 21 | 13 |
| 13 | 8 |
| 8 | 5 |
| 5 | 3 |
| 3 | 2 |
| 2 | 1 |
| 1 | 1 |



Algorithme d'Euclide

- De manière générale, pour $a > b$,

$$a \% b = a - n \cdot b, \text{ avec } n \geq 1$$

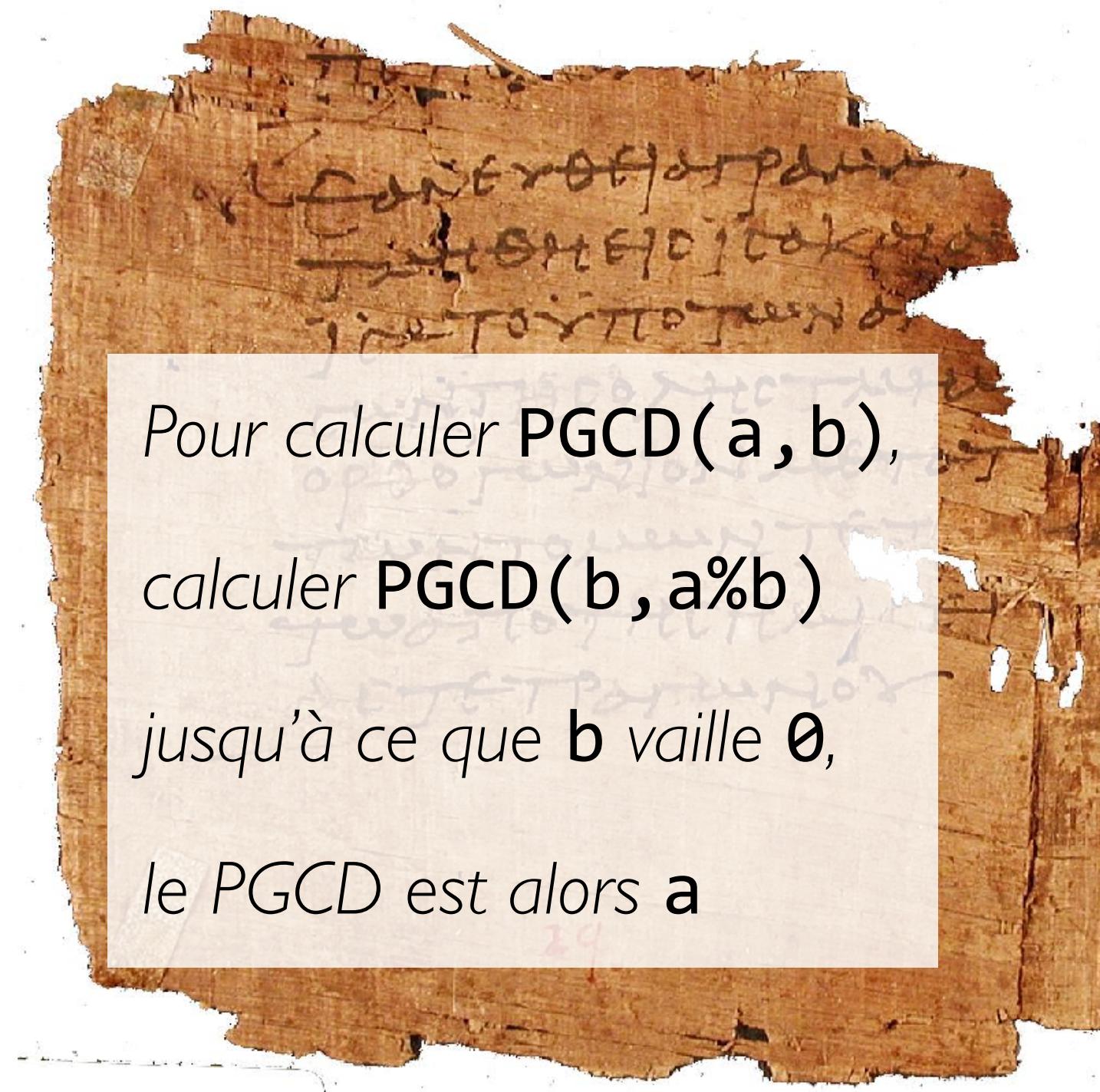
- Dans le pire cas,

$$a \% b = a - b$$

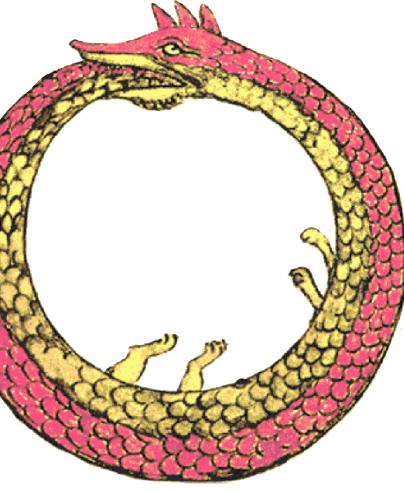
- La pire suite est donc

$$(a,b) \rightarrow (b,a-b) \rightarrow (a-b, 2b-a) \rightarrow \dots$$

- La suite de Fibonacci ...

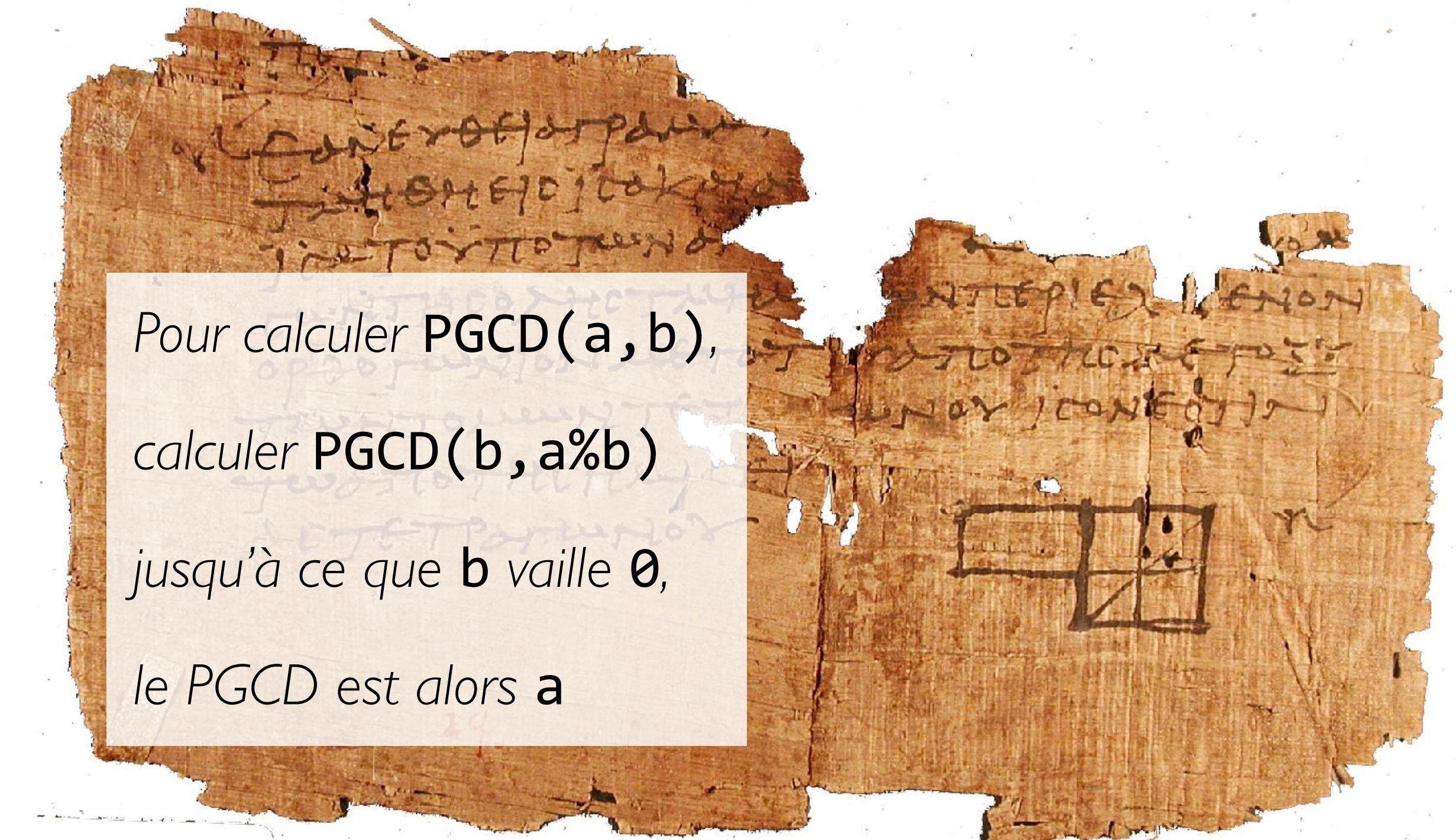


| a | b |
|----|----|
| 34 | 21 |
| 21 | 13 |
| 13 | 8 |
| 8 | 5 |
| 5 | 3 |
| 3 | 2 |
| 2 | 1 |
| 1 | 1 |
| 1 | 0 |



Algorithme d'Euclide

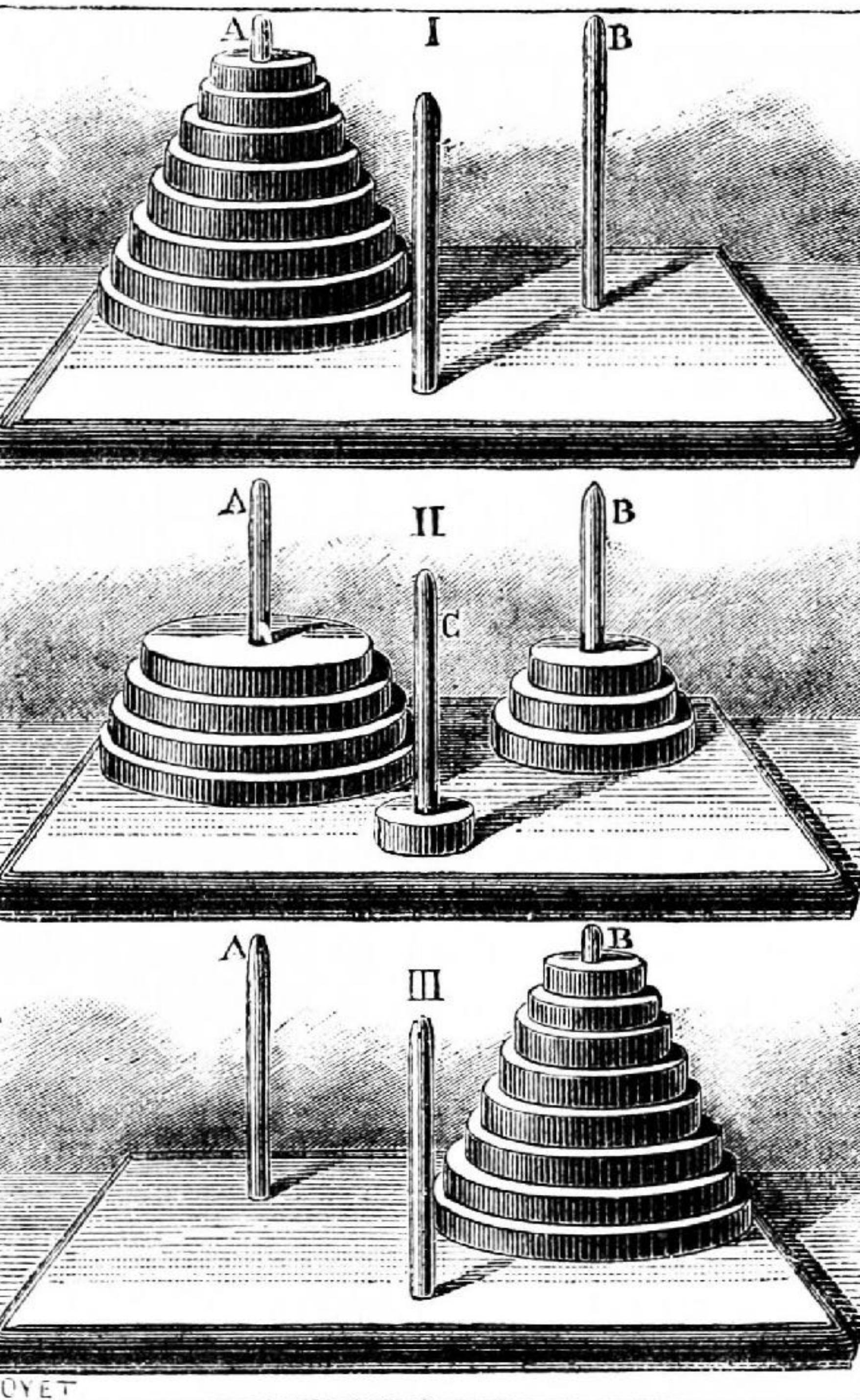
- Il faut n étapes pour calculer $\text{PGCD}(F(n), F(n-1))$
- ... au pire n étapes pour calculer $\text{PGCD}(\phi^n, \dots)$
- ... pire $\log_\phi(n)$ étapes pour calculer $\text{PGCD}(n, \dots)$
- L'algorithme d'Euclide a une complexité logarithmique dans le pire des cas



2.3. Tours de Hanoï



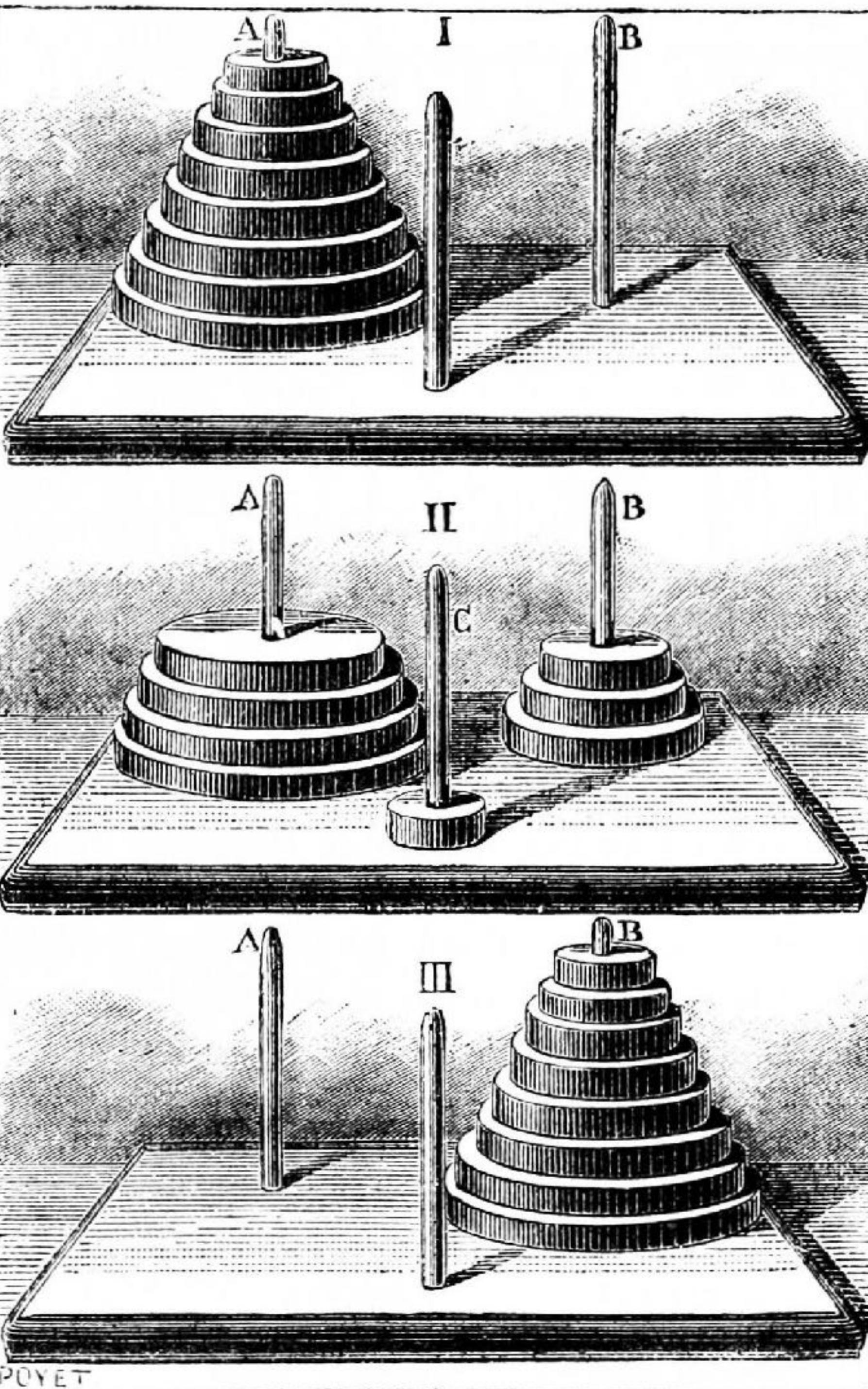
Les tours de Hanoï

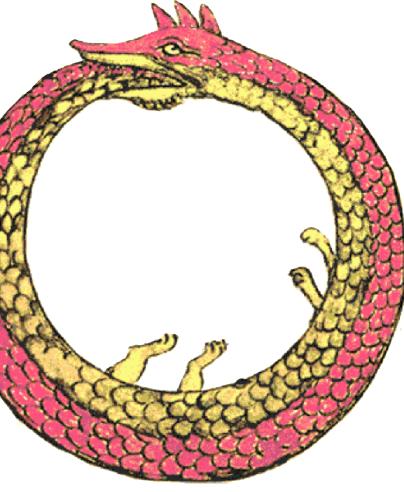


Les tours de Hanoï

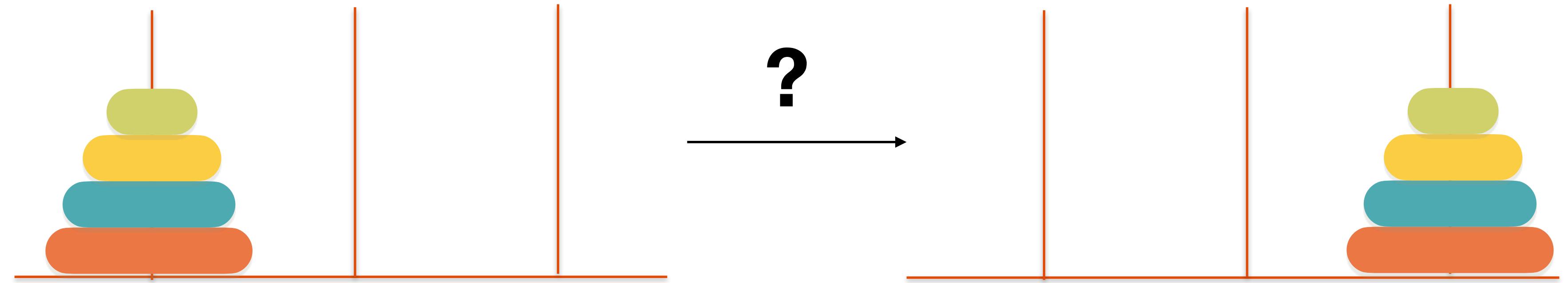
« ... dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille.

Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila au commencement des siècles, 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée du Brahmâ. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille sur la troisième, sans s'écartier des règles fixes que nous venons d'indiquer, et qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin des mondes! »

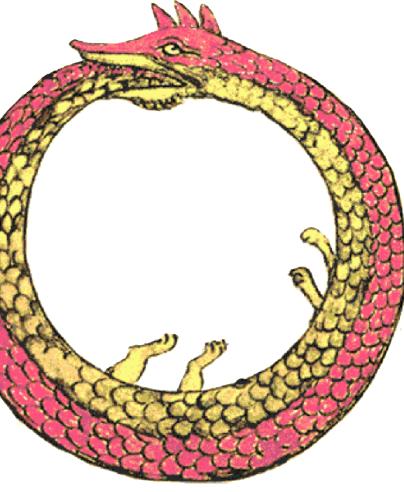




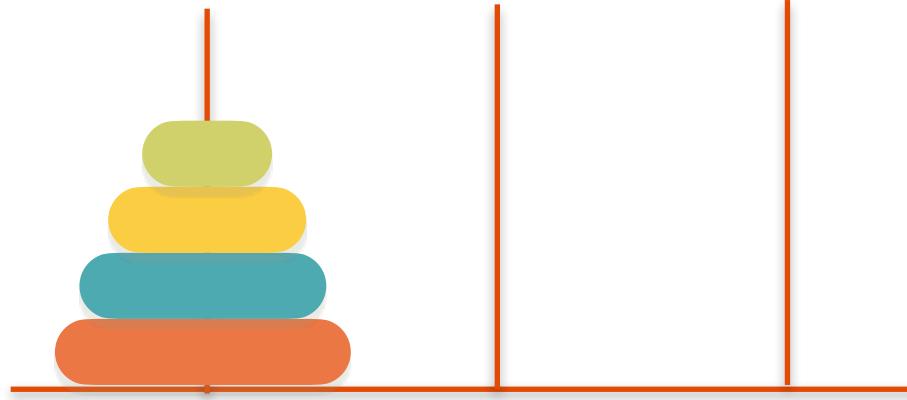
Règles du jeu



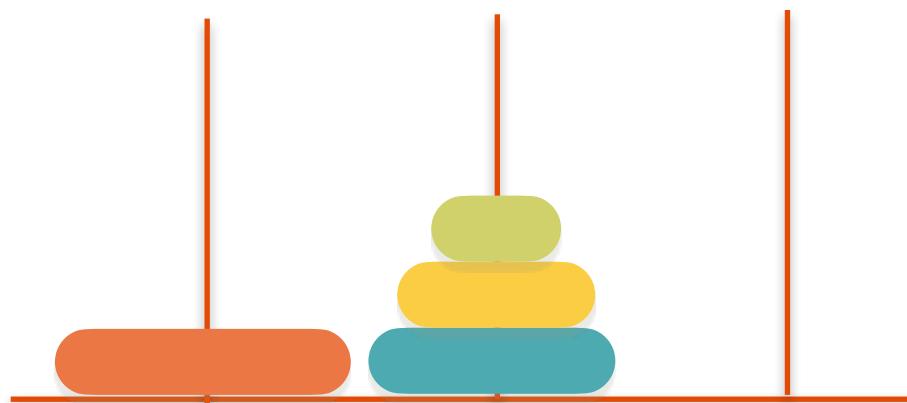
- On déplace un seul disque à la fois.
- On ne peut pas placer un disque plus grand sur un plus petit



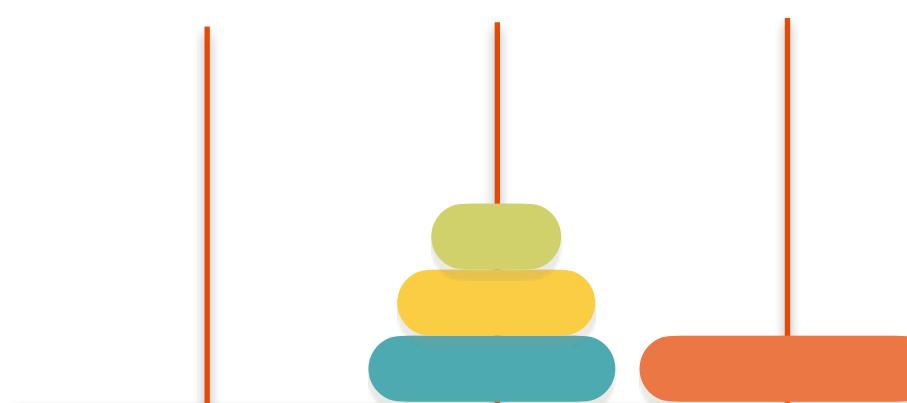
Principe de la solution



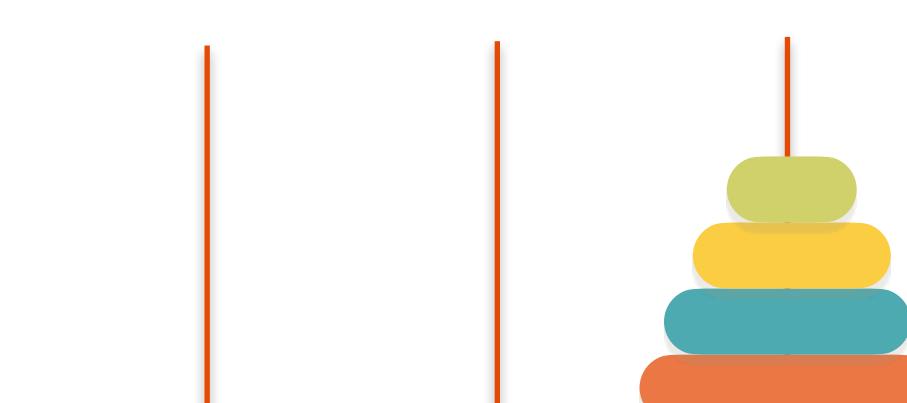
Pour déplacer n disques de gauche à droite



Déplacer n-1 disques de gauche au milieu

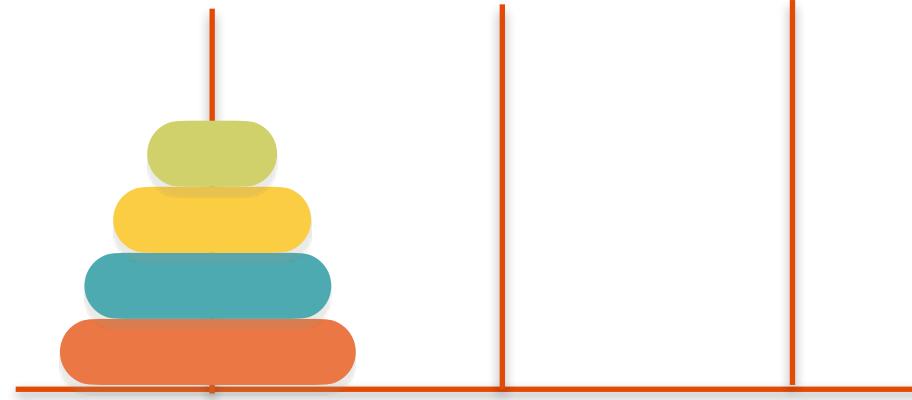
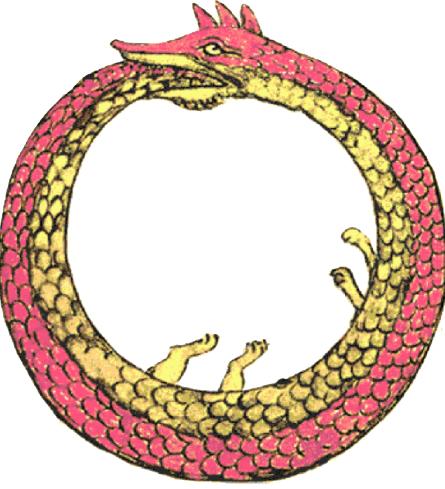


Déplacer le n^{ième} disque de gauche à droite

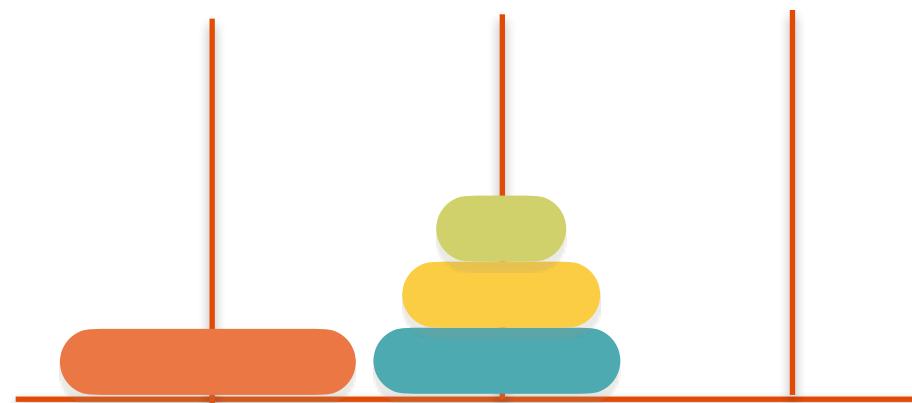


Déplacer n-1 disques du milieu à droite

Principe de la solution

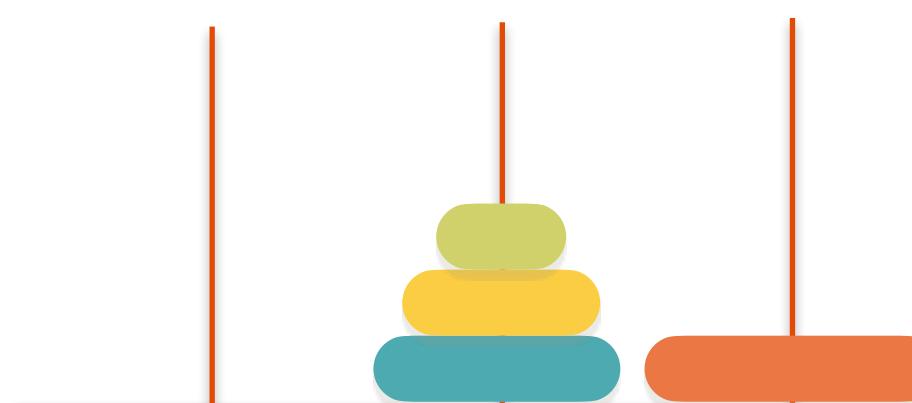


Pour déplacer n disques de gauche à droite



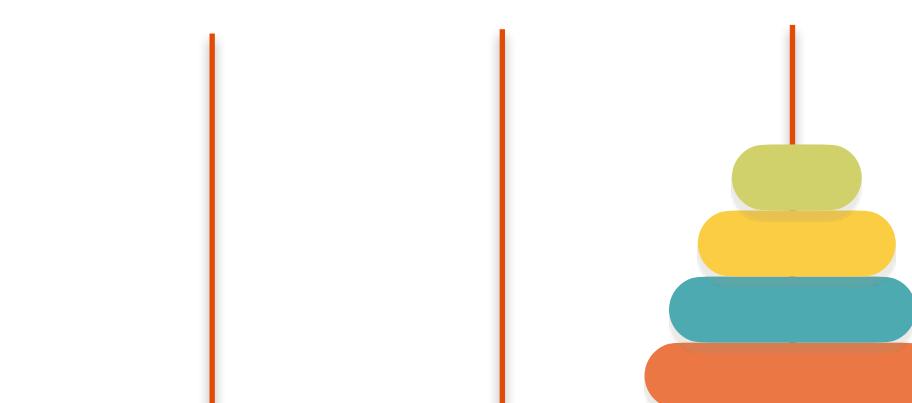
Déplacer $n-1$ disques de gauche au milieu

Cas général



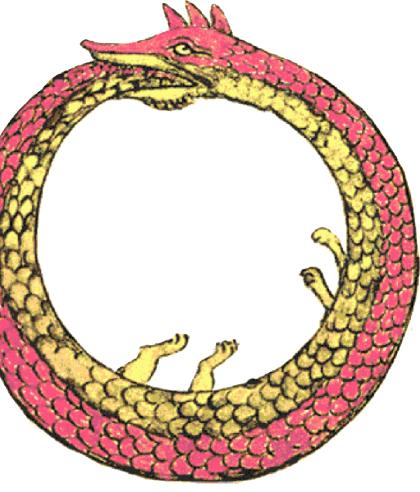
Déplacer le $n^{\text{ième}}$ disque de gauche à droite

Cas trivial

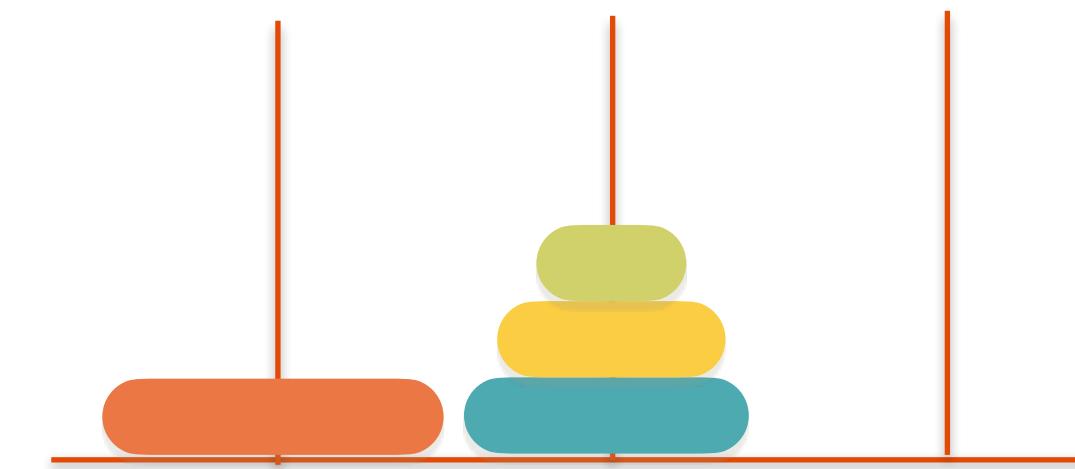
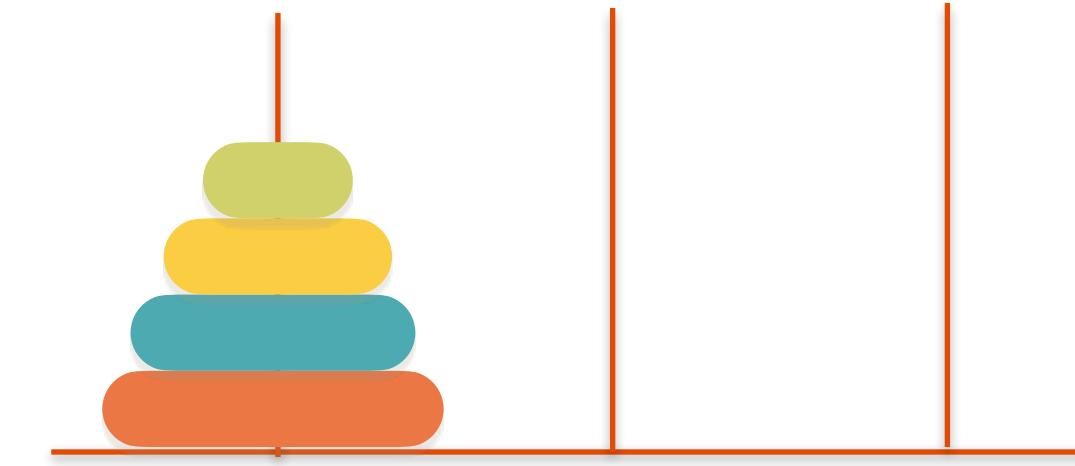


Déplacer $n-1$ disques du milieu à droite

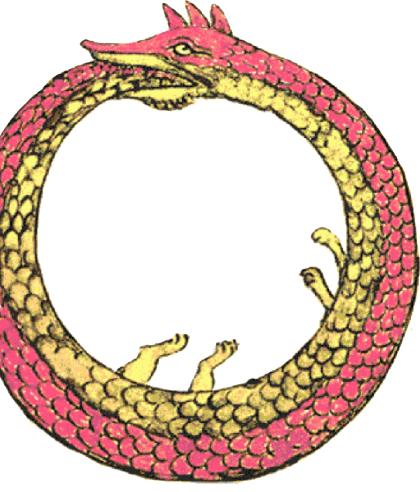
Cas général



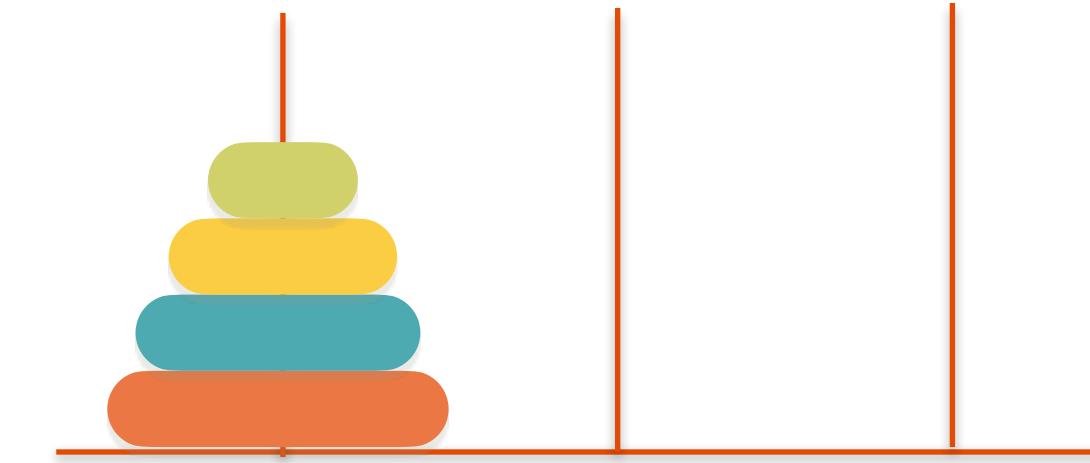
Décomposons la première étape



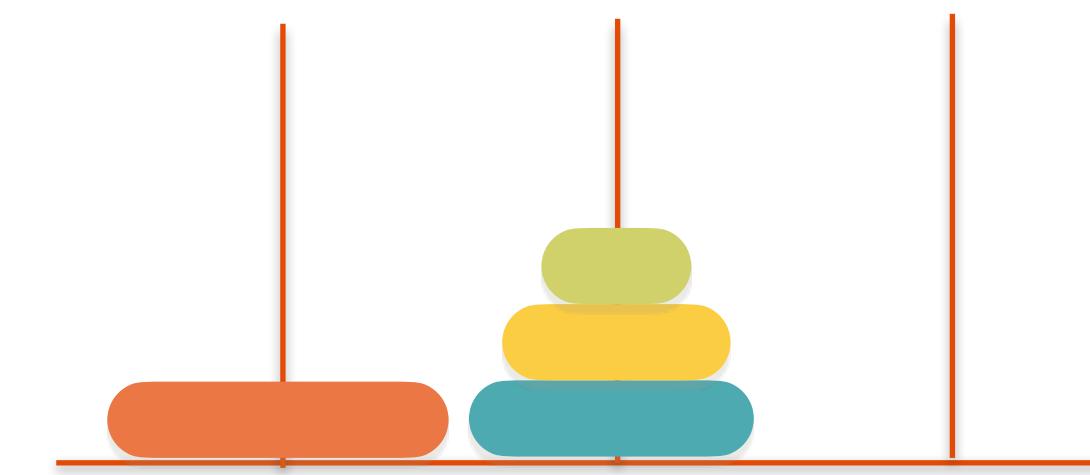
Pour déplacer $n-1$ disques de gauche au milieu

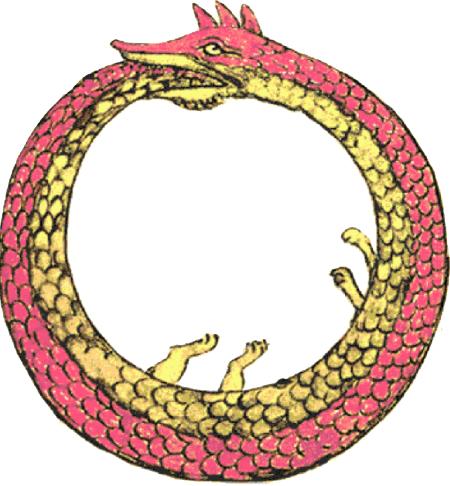


Décomposons la première étape

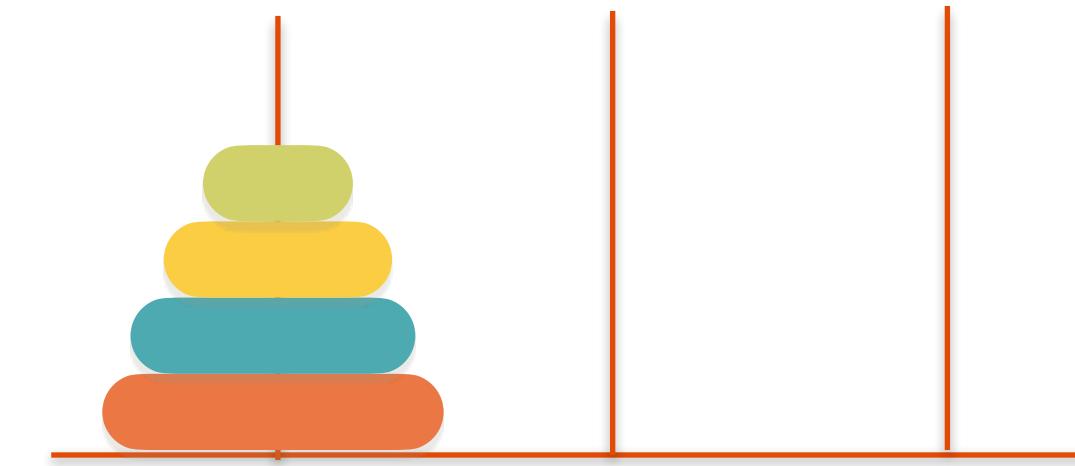


Pour déplacer $n-1$ disques de gauche au milieu

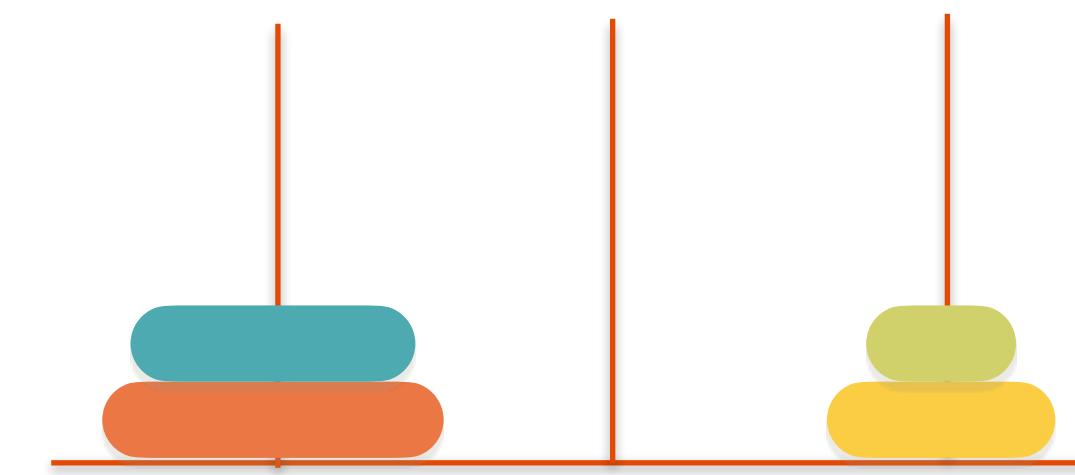




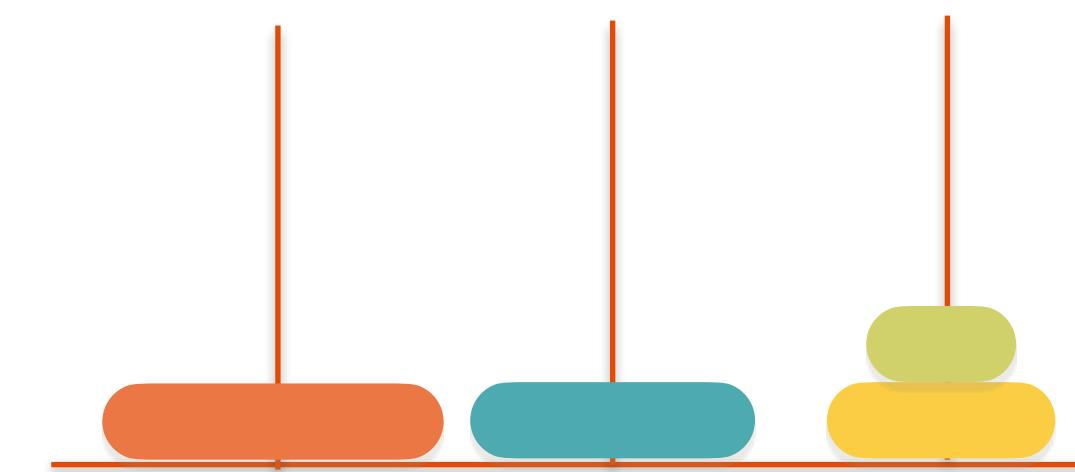
Décomposons la première étape



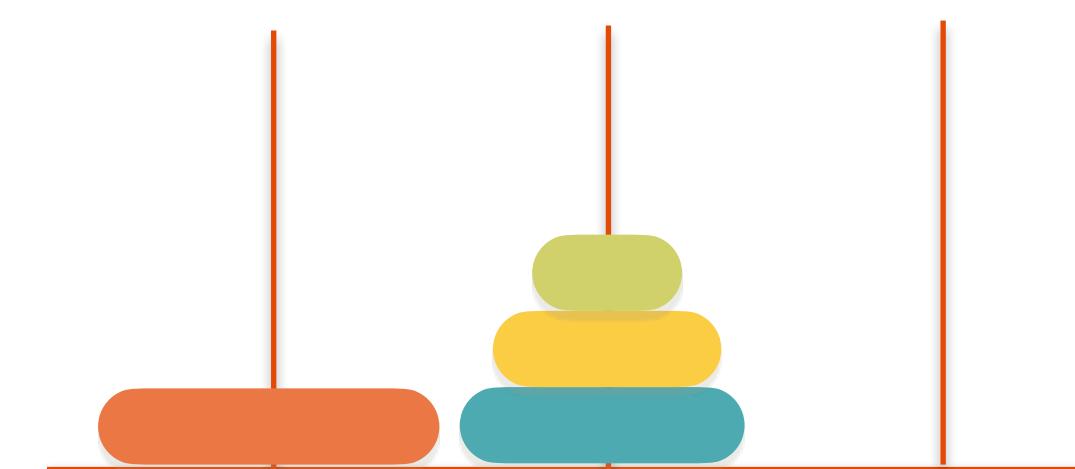
Pour déplacer $n-1$ disques de gauche au milieu



Déplacer $n-2$ disques de gauche à droite

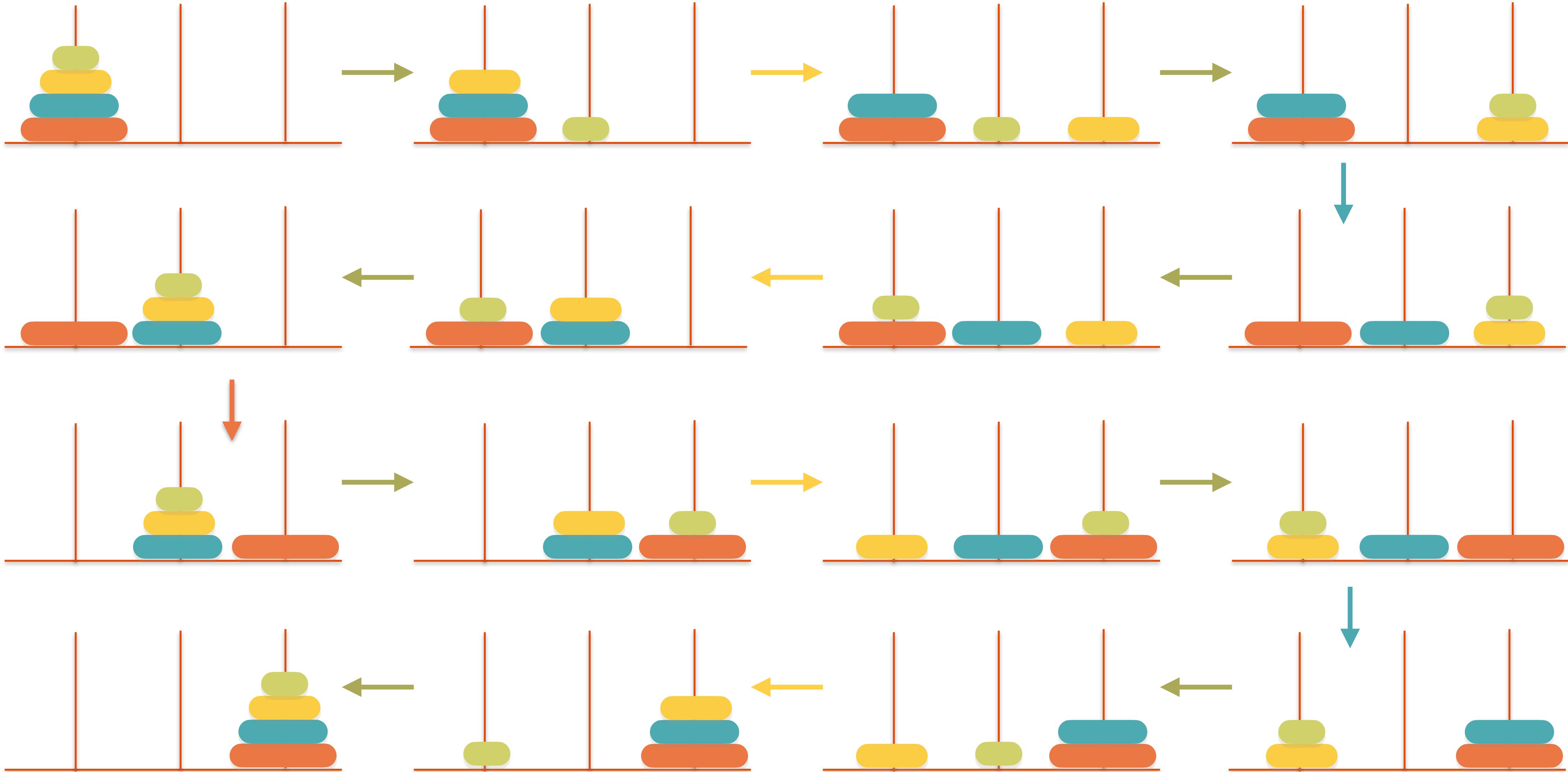
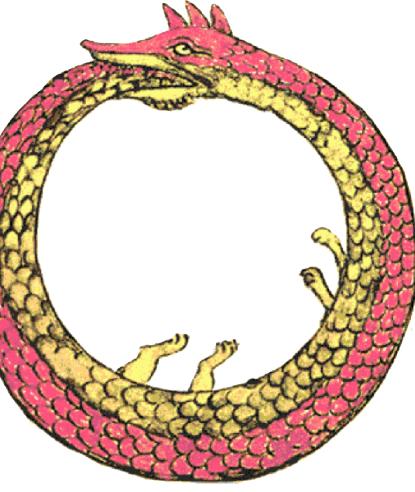


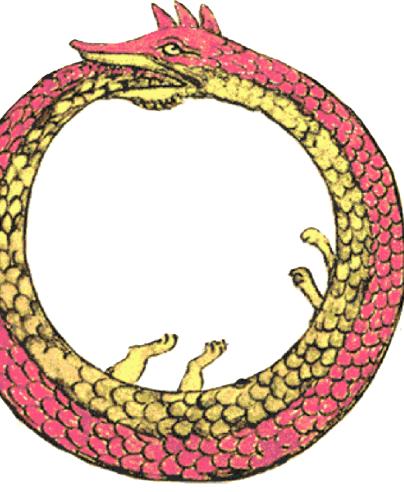
Déplacer le $(n-1)^{\text{ième}}$ disque de gauche au milieu



Déplacer $n-2$ disques de droite au milieu

Toutes les étapes pour 4 disques





CodeCheck it !

```
typedef vector<char> Tour;
vector<Tour> tours(3);

void transfert(Tour& from, Tour& via, Tour& to, int n)
{
    .
    // A COMPLETER

    // transfère n disques de la tour from à la tour to
    // en utilisant la tour via comme intermédiaire
    // appeler display() après chaque mouvement de disque.
}
```

CodeCheck it !

```
typedef vector<char> Tour;
vector<Tour> tours(3);
```

```
void transfert(Tour& from, Tour& via, Tour& to, int n)
```

```
{
```

```
    // A COMPLETER
```

```
    // transfère n disques de la tour from à la tour to
```

```
    // en utilisant la tour via comme intermédiaire
```

```
    // appeler display() après chaque mouvement de disque.
```

```
}
```

T0: A B C

T1:

T2:

T0: A B

T1:

T2: C

T0: A

T1: B

T2: C

T0: A

T1: B C

T2:

T0:

T1: B C

T2: A

T0: C

T1: B

T2: A

T0: C

T1:

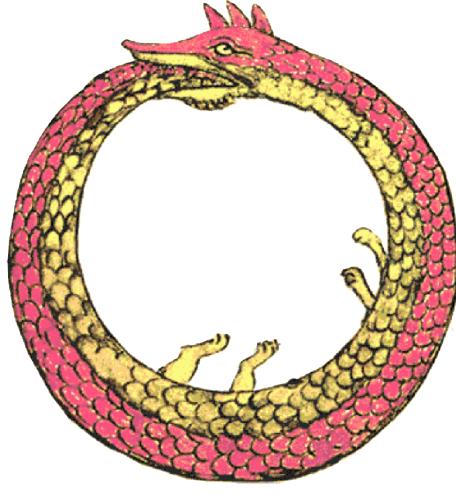
T2: A B

T0:

T1:

T2: A B C

Algorithme et complexité



Algorithme :

Transférer n disques du piquet 0 (origine) vers le piquet D (destination) via le piquet I (intermédiaire) :

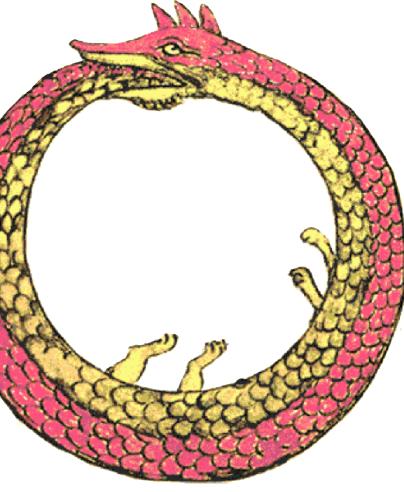
si $n > 0$ **alors**

Transférer $n-1$ disques de 0 vers I via D

transférer le disque restant de 0 vers D

Transférer $n-1$ disques de I vers D via 0

fin si



Algorithme et complexité

Algorithme :

Transférer n disques du piquet 0 (origine) vers le piquet D (destination) via le piquet I (intermédiaire) :

si $n > 0$ **alors**

Transférer $n-1$ disques de 0 vers I via D

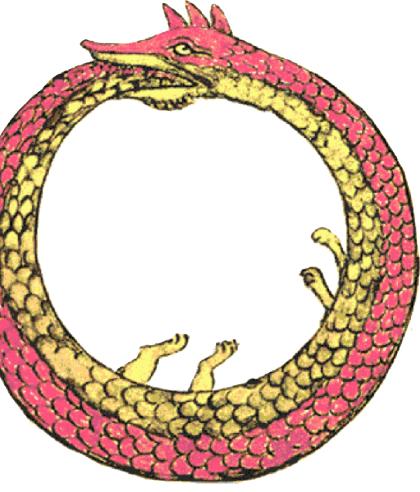
transférer le disque restant de 0 vers D

Transférer $n-1$ disques de I vers D via 0

fin si

Complexité :

Soit $T(n)$ le nombre de transferts pour n disques,



Algorithme et complexité

Algorithme :

Transférer n disques du piquet 0 (origine) vers le piquet D (destination) via le piquet I (intermédiaire) :

si $n > 0$ **alors**

Transférer $n-1$ disques de 0 vers I via D

transférer le disque restant de 0 vers D

Transférer $n-1$ disques de I vers D via 0

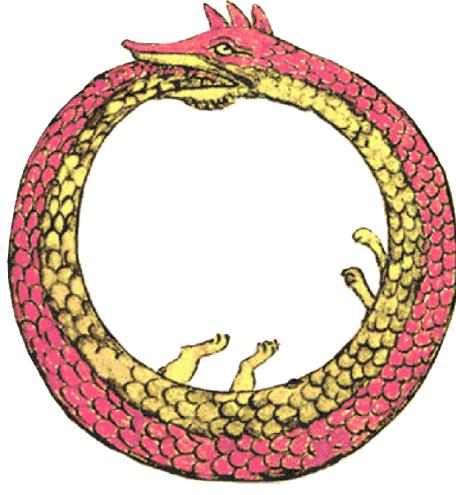
fin si

Complexité :

Soit $T(n)$ le nombre de transferts pour n disques,

$$T(1) = 1$$

Algorithme et complexité



Algorithme :

Transférer n disques du piquet 0 (origine) vers le piquet D (destination) via le piquet I (intermédiaire) :

si $n > 0$ alors

 Transférer $n-1$ disques de 0 vers I via D

 transférer le disque restant de 0 vers D

 Transférer $n-1$ disques de I vers D via 0

fin si

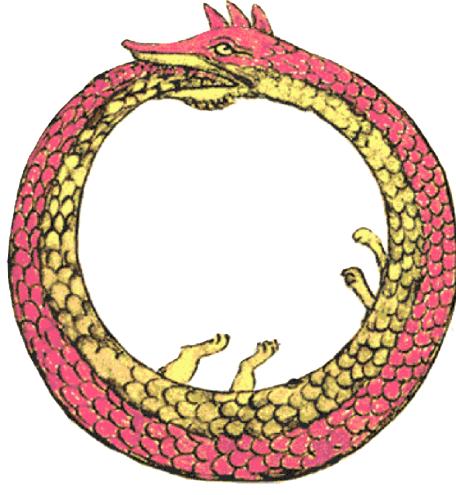
Complexité :

Soit $T(n)$ le nombre de transferts pour n disques,

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 1 + T(1) + T(1)$$

Algorithme et complexité



Algorithme :

Transférer n disques du piquet 0 (origine) vers le piquet D (destination) via le piquet I (intermédiaire) :

si $n > 0$ alors

 Transférer $n-1$ disques de 0 vers I via D

 transférer le disque restant de 0 vers D

 Transférer $n-1$ disques de I vers D via 0

fin si

Complexité :

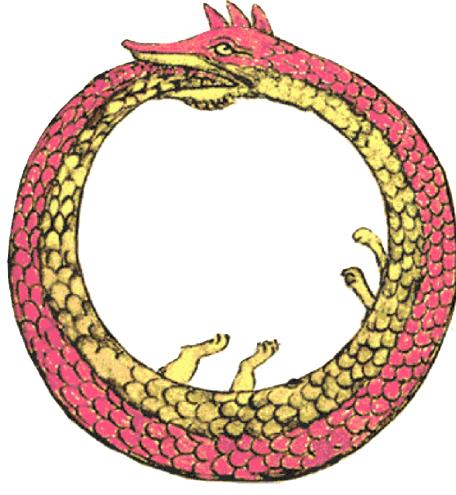
Soit $T(n)$ le nombre de transferts pour n disques,

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 1 + T(1) + T(1)$$

$$T(n) = 1 + 2 T(n-1)$$

Algorithme et complexité



Algorithme :

Transférer n disques du piquet 0 (origine) vers le piquet D (destination) via le piquet I (intermédiaire) :

si $n > 0$ alors

 Transférer $n-1$ disques de 0 vers I via D

 transférer le disque restant de 0 vers D

 Transférer $n-1$ disques de I vers D via 0

fin si

Complexité :

Soit $T(n)$ le nombre de transferts pour n disques,

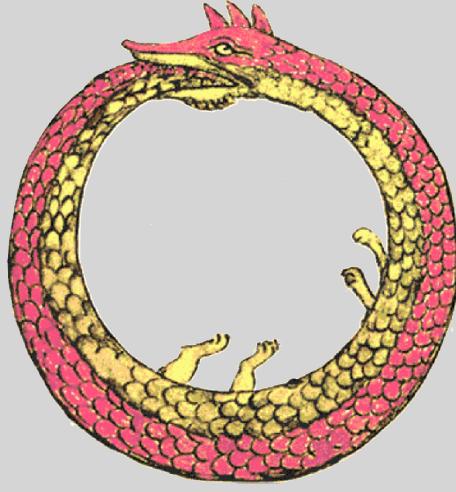
$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 1 + T(1) + T(1)$$

$$T(n) = 1 + 2 T(n-1)$$

$$T(n) = 2^n - 1$$

Exercices



- Quelles sont les complexités des fonctions suivantes ?

```
int f1(unsigned n)
{
    if(n == 0)
        return 1;

    return f1(n-1) +
           f1(n-1) +
           f1(n-1);
}
```

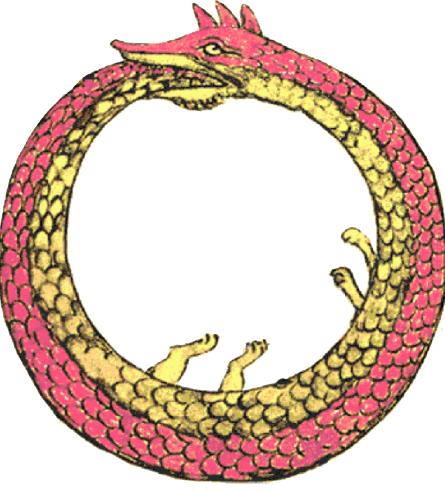
```
int f2(unsigned n)
{
    if(n == 0)
        return 1;

    return f2(n/2) +
           f2(n/2);
}
```

2.4. Permutations



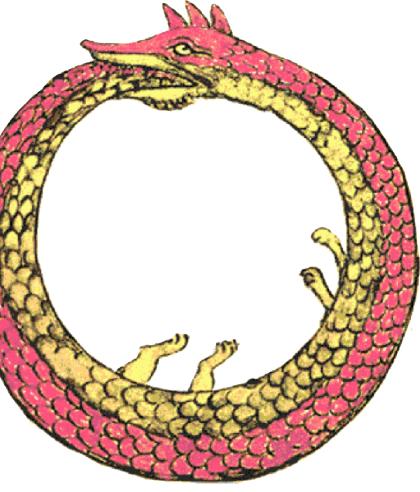
Scrabble



Pour faire jouer un programme au scrabble, il faut ...

- Un dictionnaire
- Un algorithme de recherche efficace dans ce dictionnaire : dichotomique en $O(\log(n))$
- Générer toutes les **permutations** possibles de nos lettres





Approche récursive

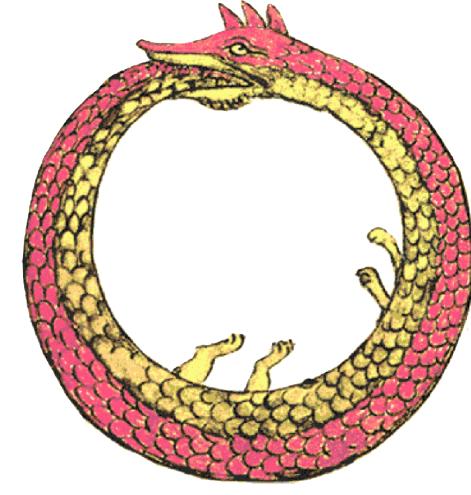
- Générer toutes les **permutations des n premiers caractères** d'une chaîne de caractères S

Entrée: S, par exemple ABCD
n, par exemple 3

Sortie: toutes les permutations des n premiers caractères de S, par exemple
{ ABCD, BACD, ACBD, CABD, BCAD, CBAD }

- **Cas général** : placer chacun des caractères en dernière position, générer toutes les permutations des n-1 caractères restants aux n-1 positions restantes
- **Cas trivial** : 1 seule permutation pour une chaîne de 1 caractère

Permuter les n premiers caractères



Entrée:

S, par exemple ABCD
n, par exemple 3

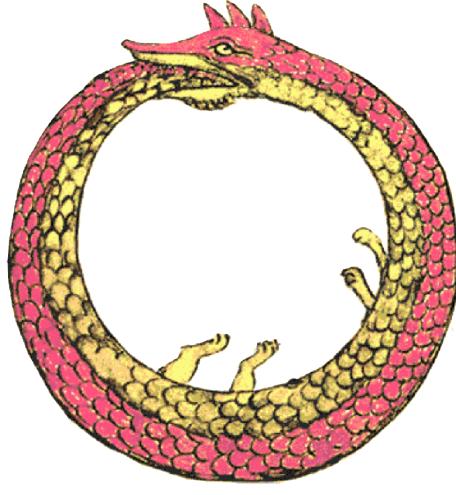
Sortie:

toutes les permutations des n premiers caractères de S, par exemple { ABCD, BACD, ACBD, CABD, BCAD, CBAD }

Algorithme:

```
fonction permuter(S,n)
    si n vaut 1
        S est la seule permutation
    sinon
        pour toutes les lettres c de S, boucler
            Placer c en dernière position
            permuter(S,n-1)
        fin boucler
    fin si
```

Permuter les n premiers caractères



Entrée:

S, par exemple ABCD
n, par exemple 3

Sortie:

toutes les permutations des n premiers caractères de S, par exemple { ABCD, BACD, ACBD, CABD, BCAD, CBAD }

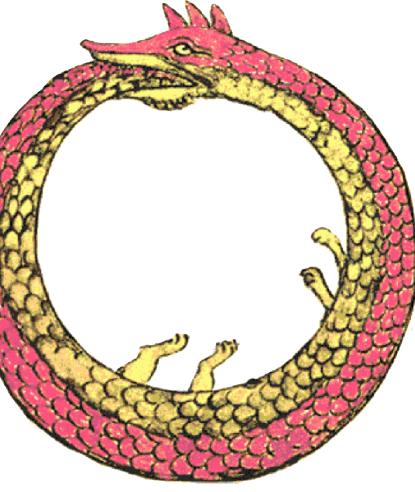
Algorithme:

```
fonction permuter(S,n)
    si n vaut 1
        S est la seule permutation
    sinon
        pour toutes les lettres c de S, boucler
            Placer c en dernière position
            permuter(S,n-1)
        fin boucler
    fin si
```

Paramètre de récursivité: n

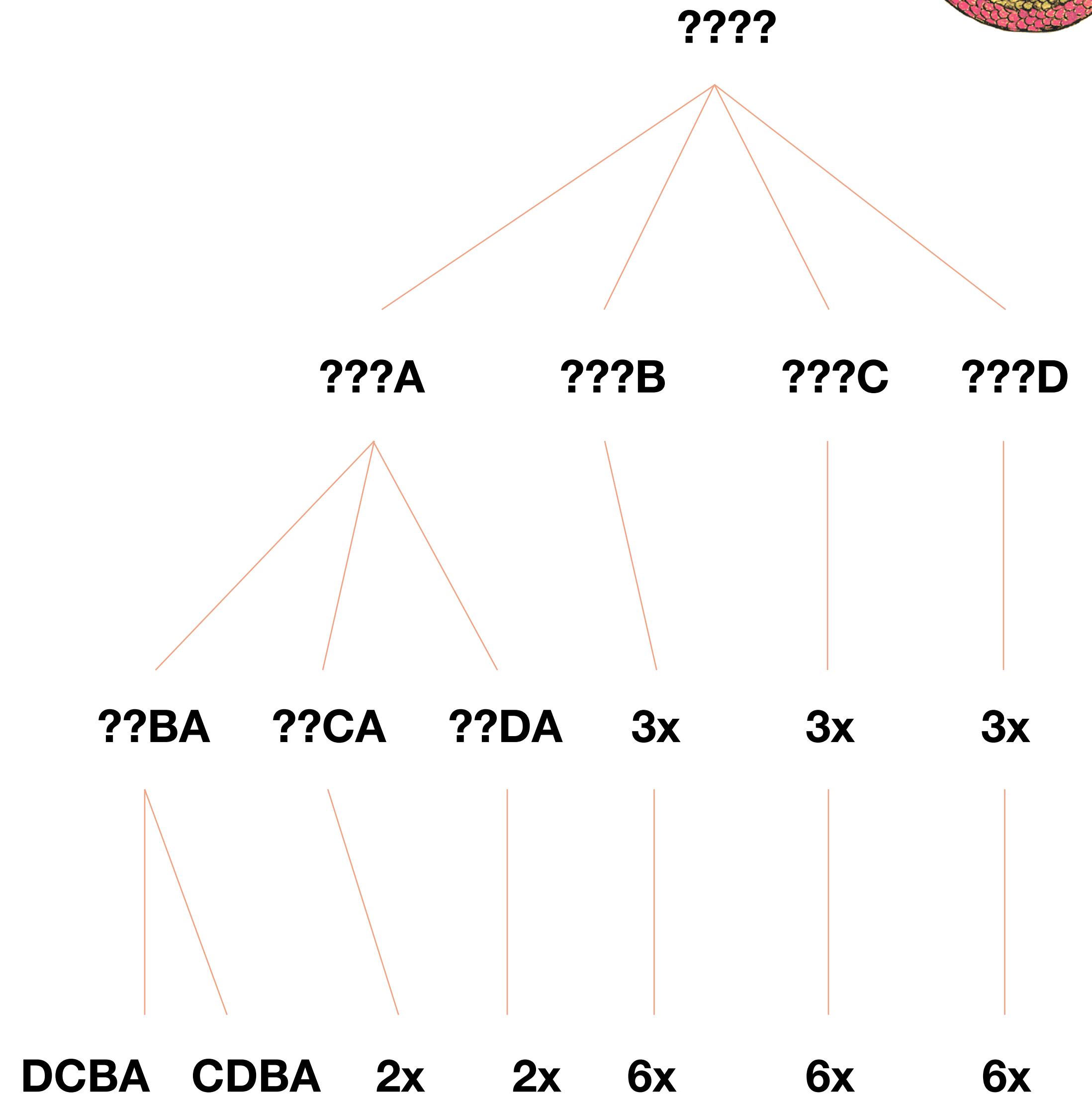
Cas trivial

Cas général

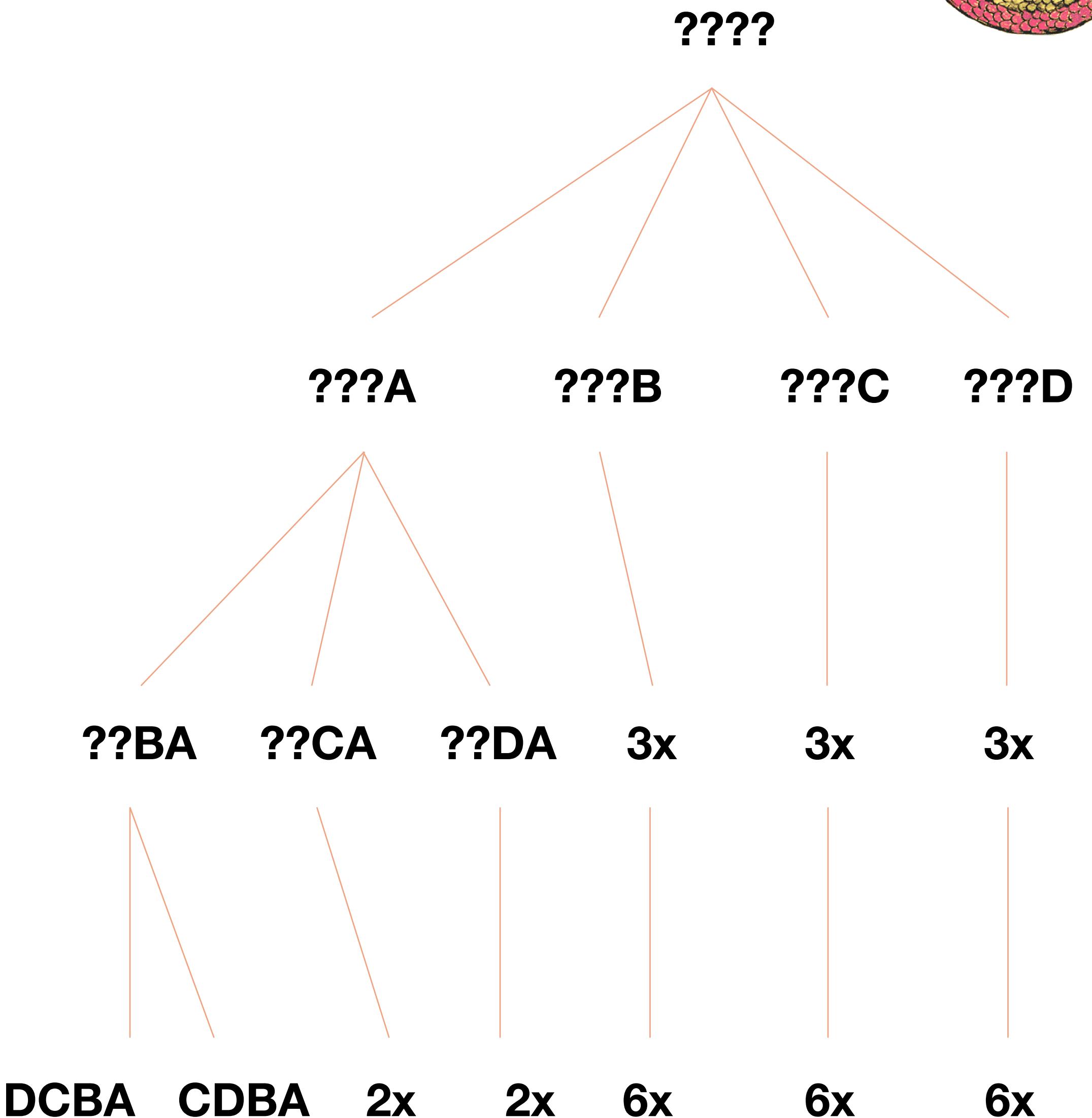
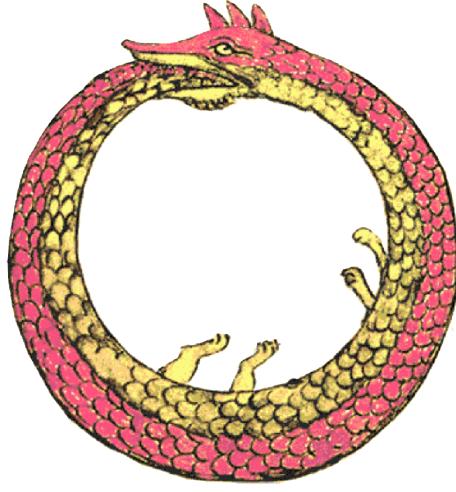


Complexité ?

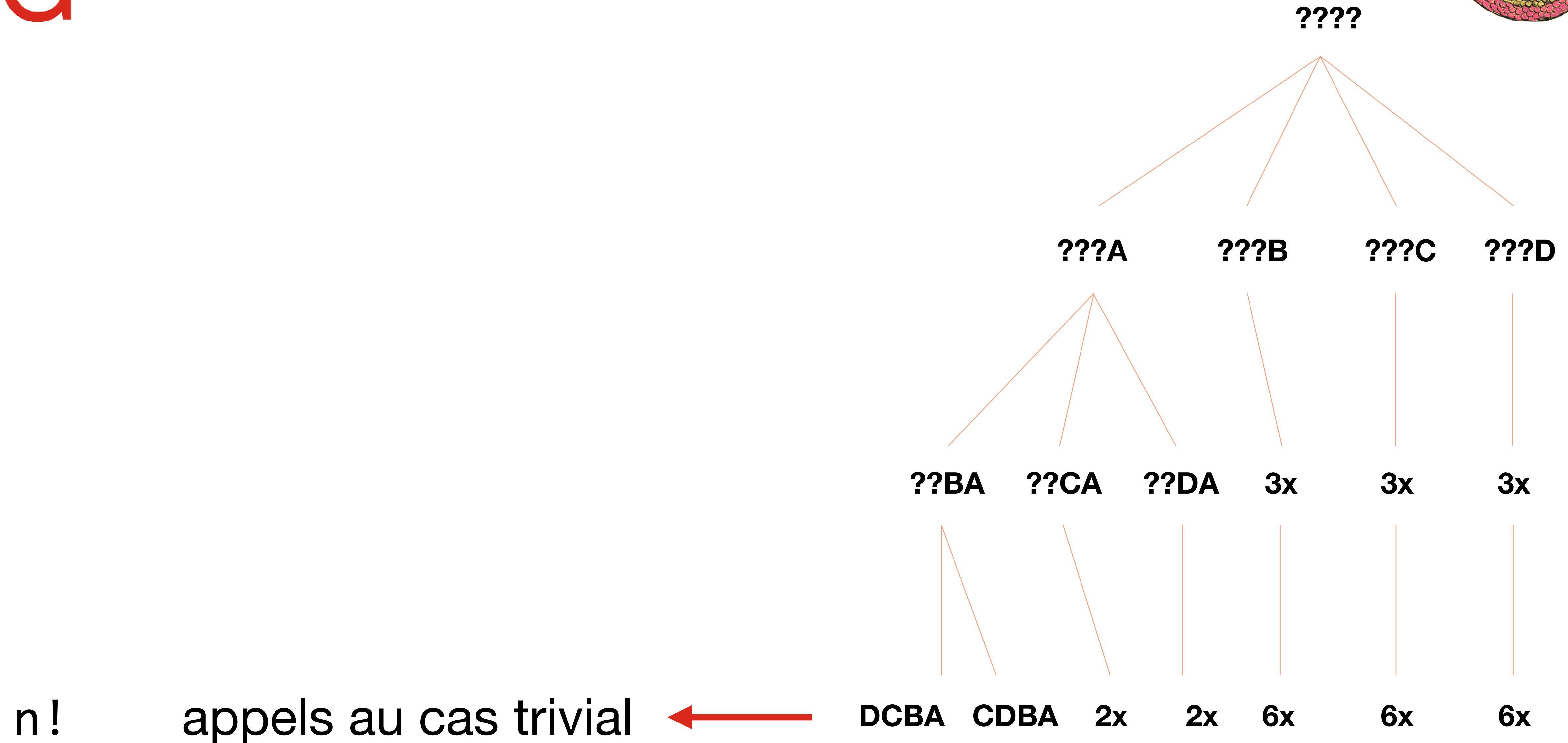
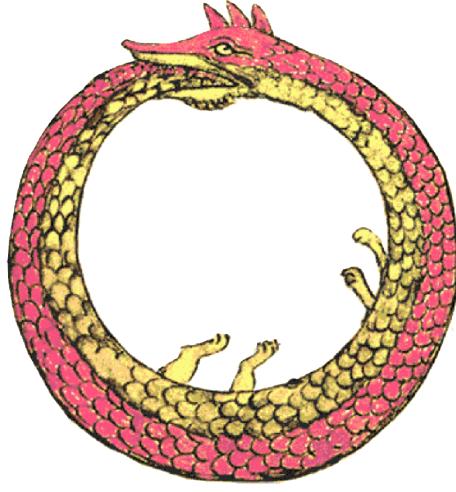
- Il y a $n!$ permutations à générer
- L'algorithme sera donc au minimum $O(n!)$
- Combien d'appels récursifs ?
- Combien d'écritures / d'échange de caractères ?



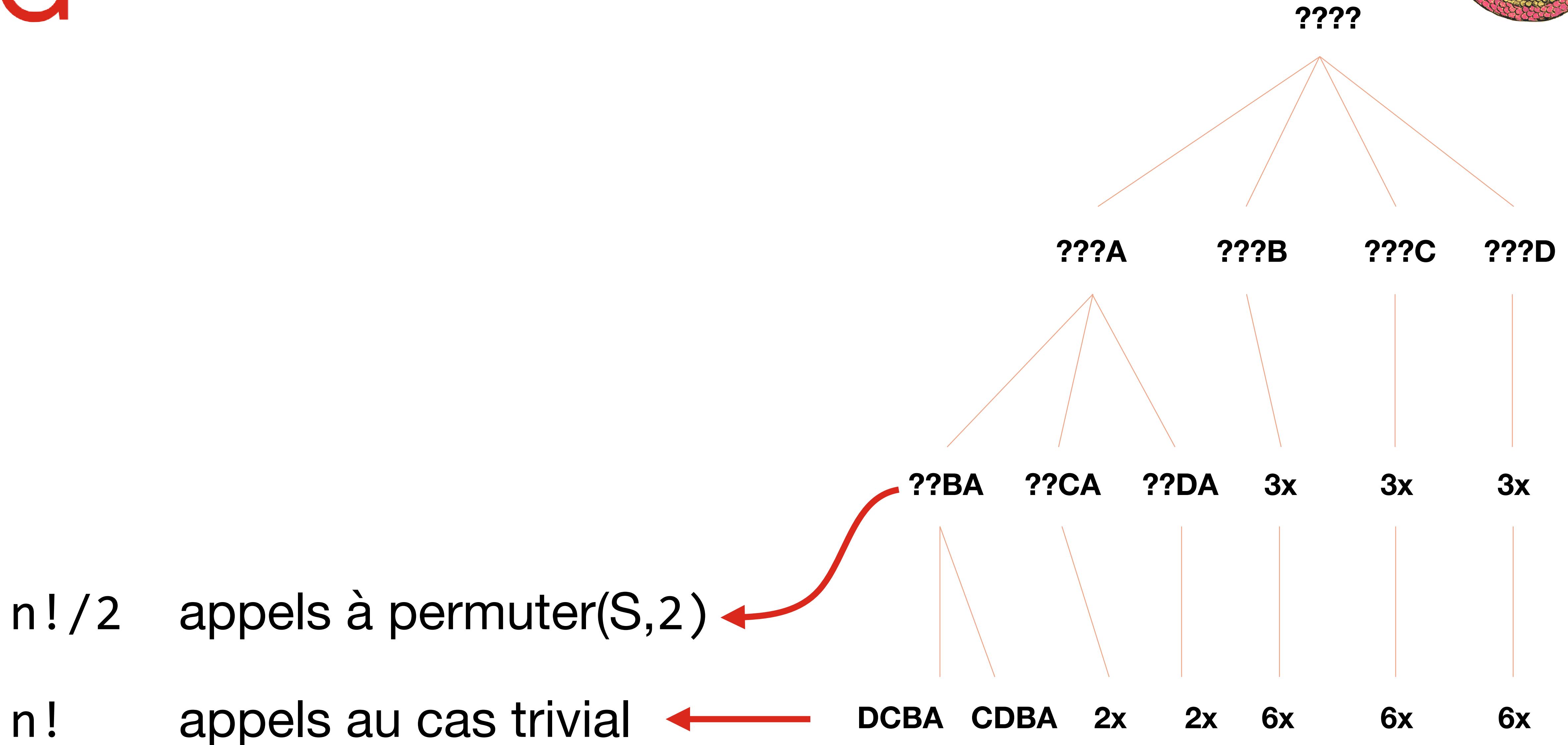
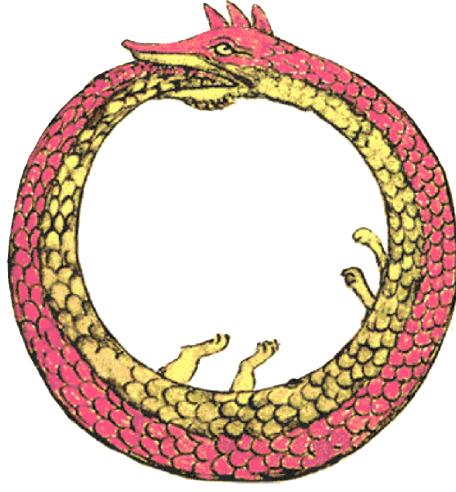
Nombre d'appels récursifs

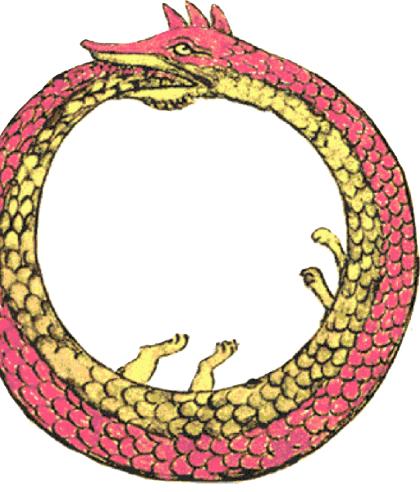


Nombre d'appels récursifs

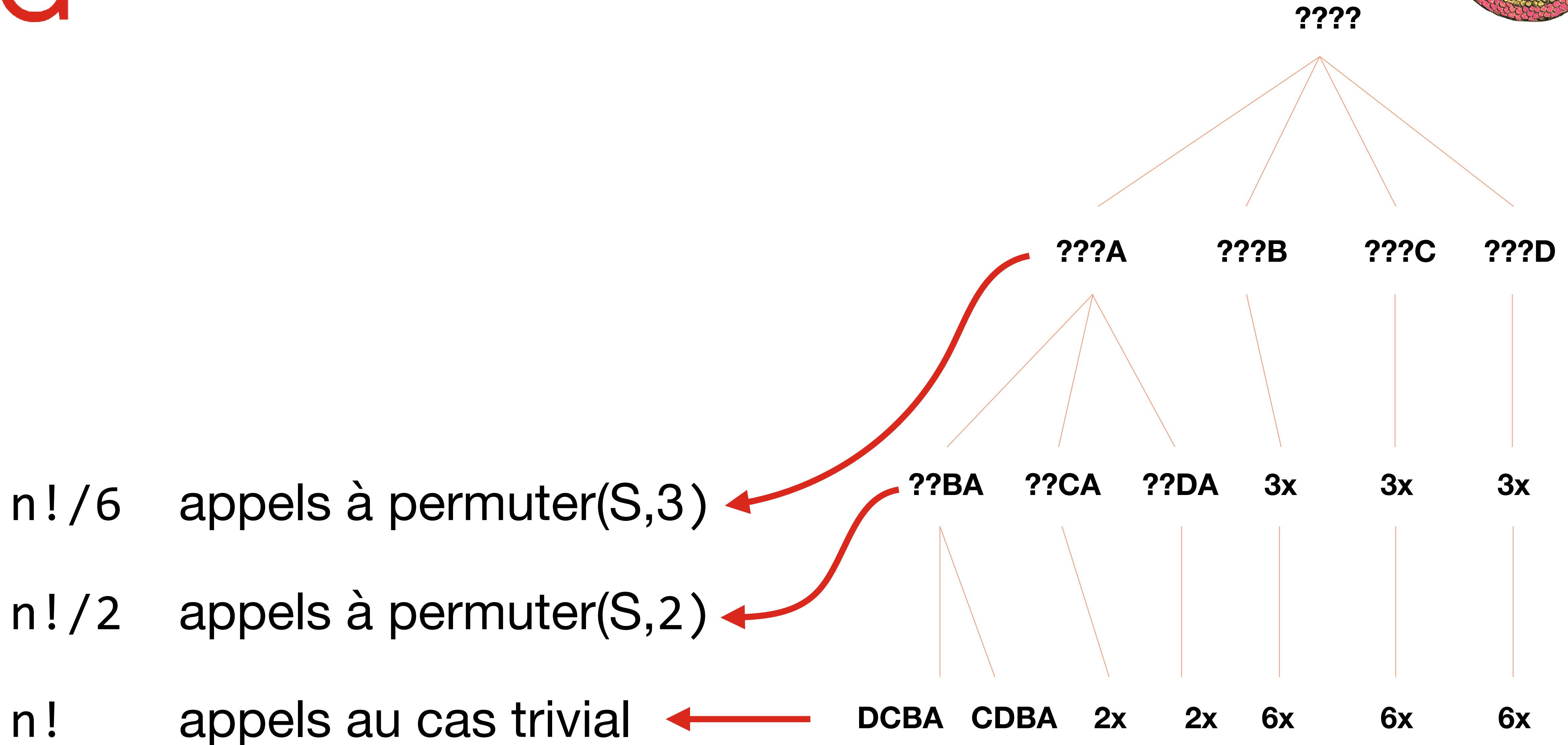


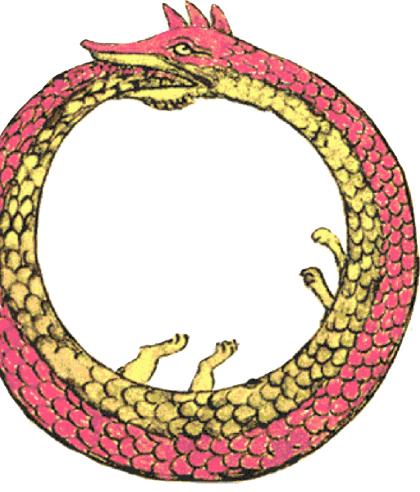
Nombre d'appels récursifs



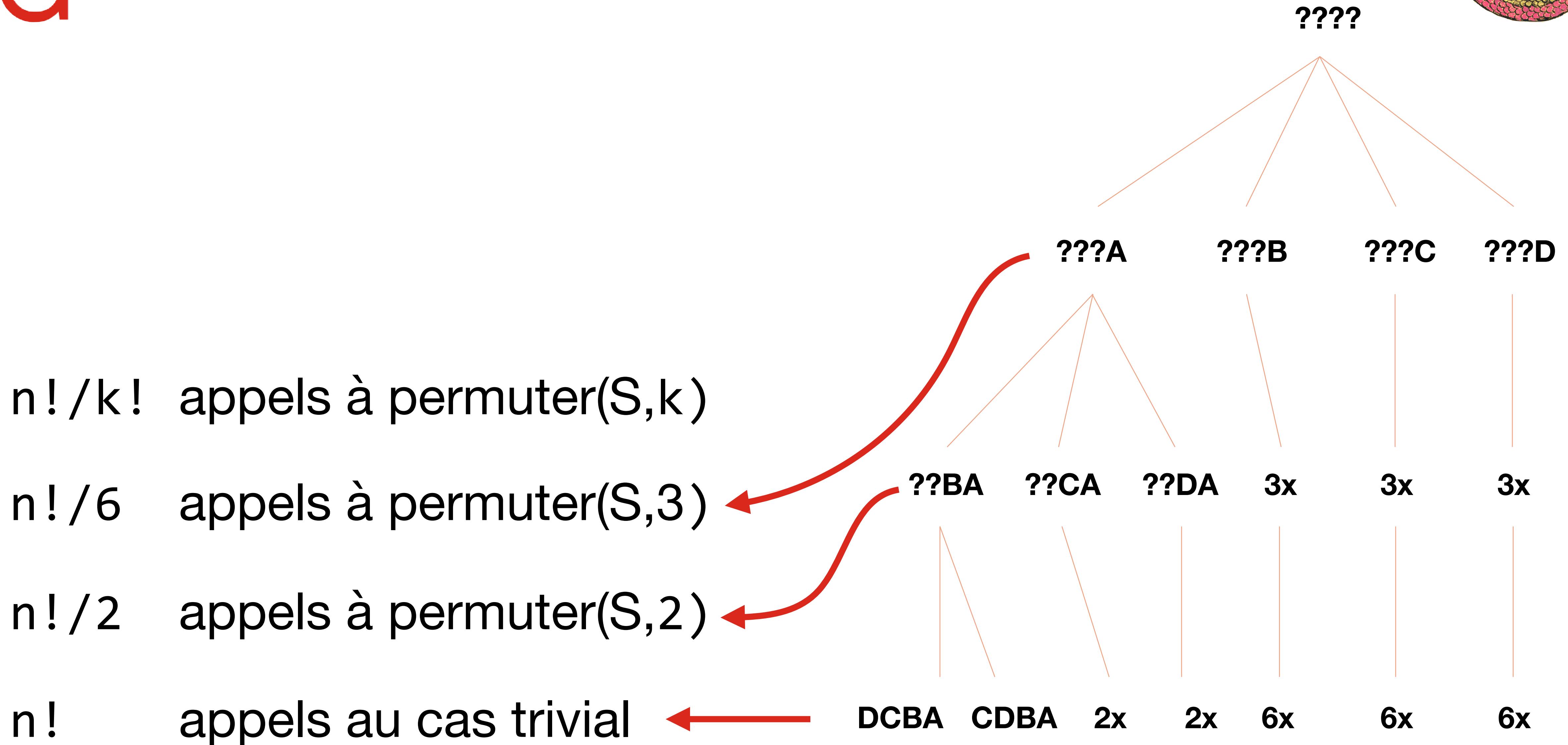


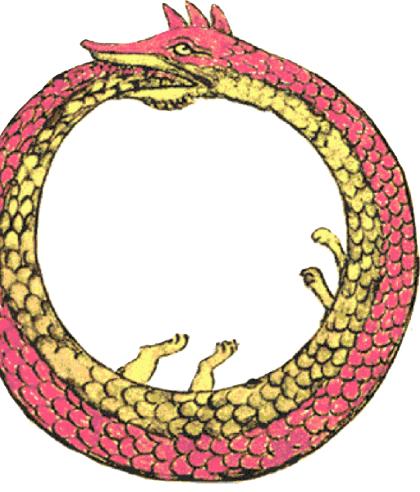
Nombre d'appels récursifs





Nombre d'appels récursifs





Nombre d'appels récursifs

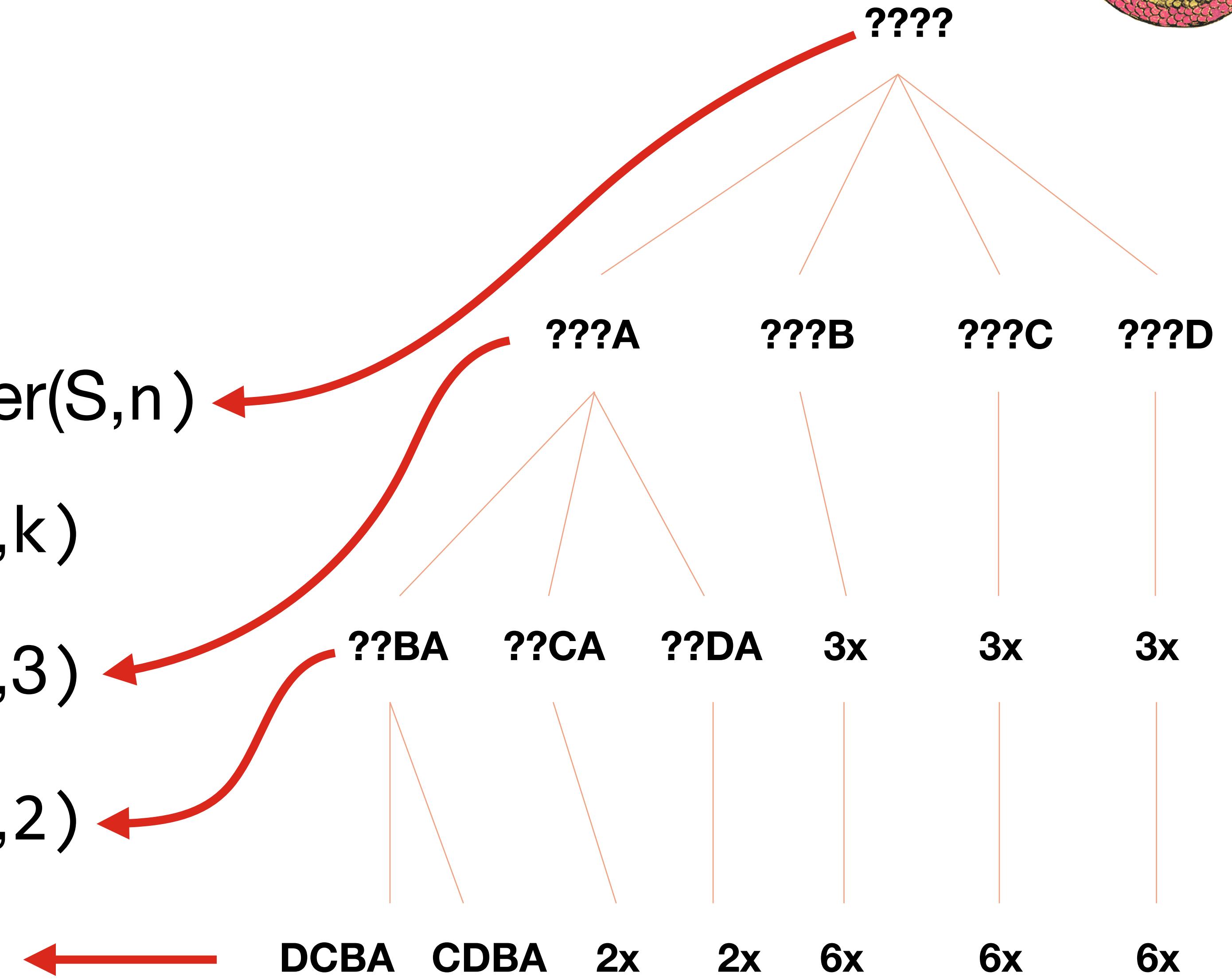
$n!/n!$ = 1 appel à `permute(S,n)`

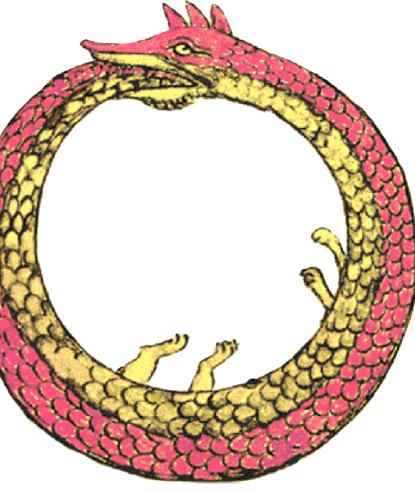
$n!/k!$ appels à `permute(S,k)`

$n!/6$ appels à `permute(S,3)`

$n!/2$ appels à `permute(S,2)`

$n!$ appels au cas trivial





Nombre d'appels récursifs

$$n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \approx (e-1) \cdot n! \approx 1.71 \cdot n! = O(n!)$$

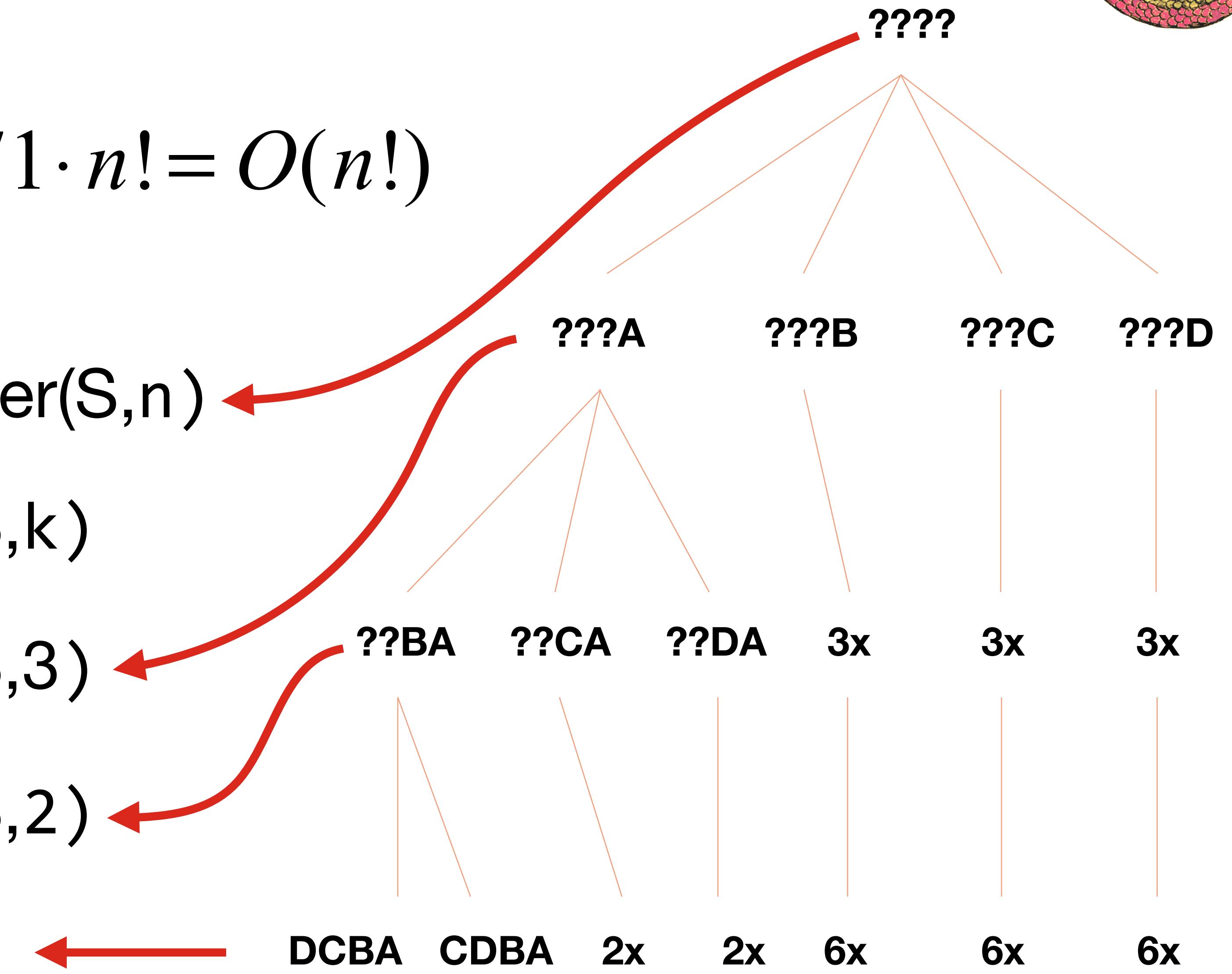
$n!/n!$ = 1 appel à `permute(S,n)`

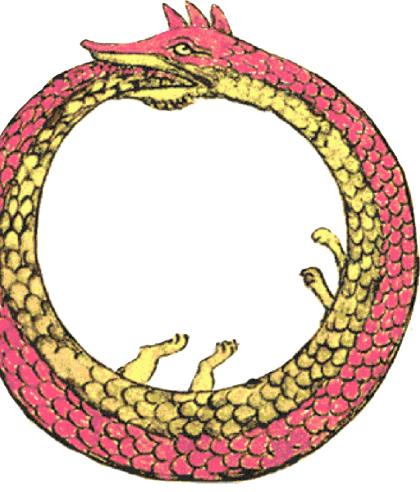
$n!/k!$ appels à `permute(S,k)`

$n!/6$ appels à `permute(S,3)`

$n!/2$ appels à `permute(S,2)`

$n!$ appels au cas trivial





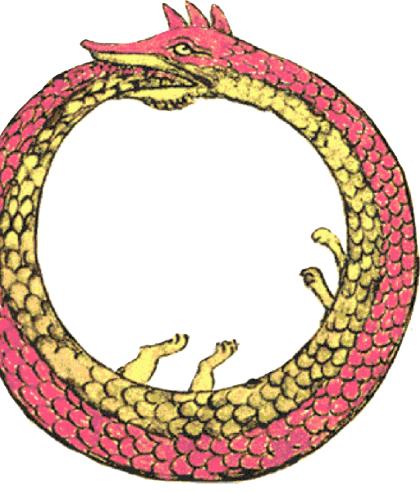
Boucler ? Placer ?

Comment ...

- ... boucler sur les n premières lettres de S ?
- ... placer c en dernière position ?

Algorithme:

```
fonction permuter(S,n)
    si n vaut 1
        S est la seule permutation
    sinon
        pour toutes les lettres c de S, boucler
            Placer c en dernière position
            permuter(S,n-1)
        fin boucler
    fin si
```

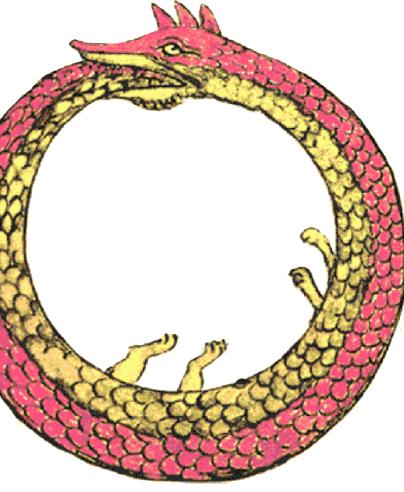


Approche naïve

```
fonction permuter(s,n)
    si n vaut 1
        traiter(s)
    sinon
        pour i allant de 1 à n, boucler
            permuter(s,n-1)
            échanger s(i) et s(n)
        fin boucler
    fin si
```

Comment passer le paramètre S de la fonction ?

- Par valeur ? Complexité $O(n.n!)$
- Par référence ? L'algorithme ne fonctionne pas



Approche naïve

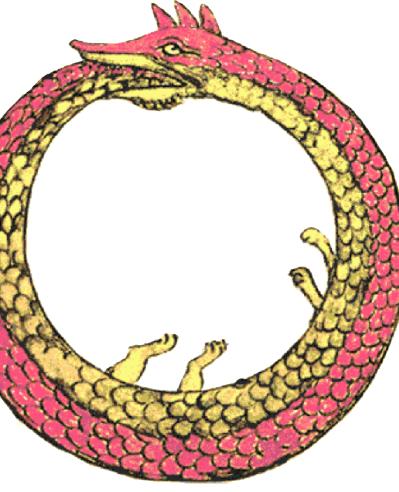
```
fonction permuter(s,n)
    si n vaut 1
        traiter(s)
    sinon
        pour i allant de 1 à n, boucler
            permuter(s,n-1)
            échanger s(i) et s(n)
        fin boucler
    fin si
```

Comment passer le paramètre S de la fonction ?

- Par valeur ? Complexité $O(n.n!)$
- Par référence ? L'algorithme ne fonctionne pas

ABC
BAC
CBA
BCA
CAB
ACB
ABC
BAC

ABC
BAC
CAB
ACB
ABC
BAC



Approche naïve

```
fonction permuter(S,n)
    si n vaut 1
        traiter(S)
    sinon
        pour i allant de 1 à n, boucler
            permuter(S,n-1)
            échanger S(i) et S(n)
        fin boucler
    fin si
```

Comment passer le paramètre S de la fonction ?

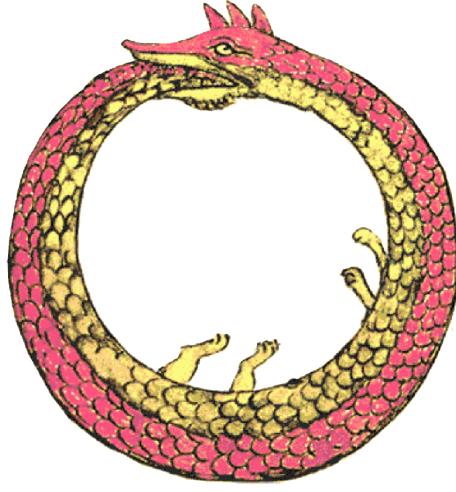
- Par valeur ? Complexité $O(n.n!)$
- Par référence ? L'algorithme ne fonctionne pas

La boucle « pour i allant de 1 à n » n'est pas équivalente à « pour toutes les lettres c de S » si l'ordre des caractères de S change en cours de route

ABC
BAC
CBA
BCA
CAB
ACB

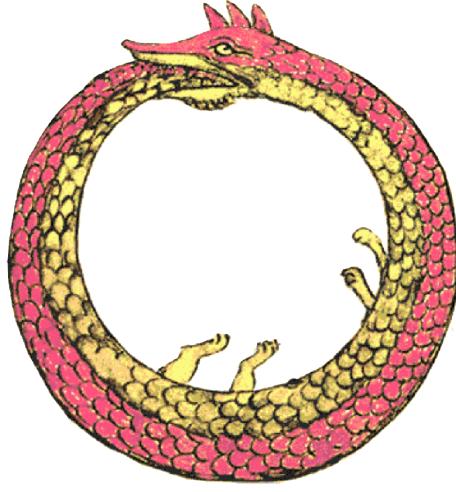
ABC
BAC
CAB
ACB
ABC
BAC

Double échange



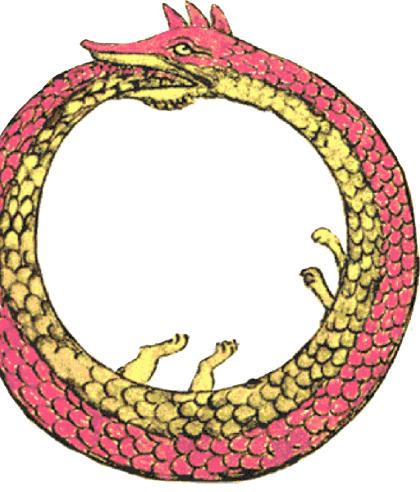
- Pour que la boucle
pour i allant de 1 à n
- soit équivalente à
pour toutes les lettres c de S ,
- On remet la lettre $s(i)$ à sa place
avant de passer à l'itération
suivante
- 2 échanges par appel récursif, donc en tout $3.43 n!$

Double échange



```
fonction permute(S,n)
    si n vaut 1
        traiter(S)
    sinon
        pour i allant de 1 à n, boucler
            échanger S(i) et S(n)
            permute(S,n-1)
            échanger S(i) et S(n)
        fin boucler
    fin si
```

- Pour que la boucle pour i allant de 1 à n soit équivalente à pour toutes les lettres c de S,
 - On remet la lettre $S(i)$ à sa place avant de passer à l'itération suivante
- 2 échanges par appel récursif, donc en tout $3.43 n!$

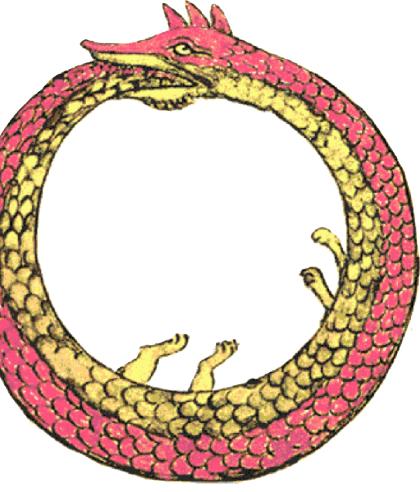


Sans échange inutile

- Echanger $S(i)$ et $S(n)$ est inutile pour $i==n$
- $2(k-1)$ échanges dans $\text{permuter}(S, k)$

```
fonction permuter(S,n)
    si n vaut 1
        traiter(S)
    sinon
        pour i allant de 1 à n-1, boucler
            échanger S(i) et S(n)
            permuter(S,n-1)
            échanger S(i) et S(n)
        fin boucler
        permuter(S,n-1)
    fin si
```

$$\begin{aligned} \text{Echanges}(n) &= 2 \sum_{k=2}^n (k-1) \frac{n!}{k!} \\ &= 2 \left(\sum_{k=2}^n \frac{k \cdot n!}{k!} - \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!} - \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!} \right) \\ &= 2 \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{n!} \right) = 2(n!-1) \end{aligned}$$



Algorithme de Heap

```
fonction permuter(S,n)
    si n vaut 1
        traiter(S)
    sinon
        permuter(S,n-1)
        pour i allant de 1 à n-1, boucler
            si n est pair
                échanger S(i) et S(n)
            sinon
                échanger S(1) et S(n)
            fin si
        permuter(S,n-1)
    fin boucler
fin si
```

- Permutations by interchanges.
B. R. Heap, The Computer Journal, 6(3) (1963), pp. 293-298
- Nombre d'échanges optimal: $n! - 1$