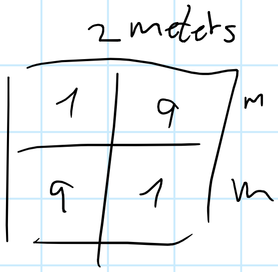
א

הראשון מסמן על העוגה חלק שהוא 1/n לדעתו. הוא חייב לסמן פס ישר ומקביל לצלע על העוגה, באופן שמשאיר מלבן של עוגה. עוברים על כל שאר האנשים אחד אחד, מי שלא מסכים שהחלק הזה הוגן מקטין אותו, והאחרון בסיבוב שהקטין מקבל את החלק. מתחילים סיבוב נוסף עם אדם אחד פחות (ועוגה מעט קטנה יותר).
כשנשאר רק אחד בסיבוב הוא מקבל את השאר.

ב

נניח שהחלקה אחידה ואיש לא מעוניין בחלק אחר על פני האחר. אם ניתן לכל אחד ריבוע, לא ייתכן ששני הריבועים גדולים יותר מרבע. נוכיח.
נניח שאורך הצלע הוא X. ערך העוגה לדעת כולם הוא 1 למטר רבוע - X^2 סך הכל. כדי לקבל יותר מרבע מערך החלקה, $1/4x^2$, צריך ריבוע שאורך צלעו 1/2x.
אם נצייר על ריבוע החלקה שני ריבועים שאורך צלעם גדול מ-1/2x, לא משנה איך נמקם אותם, תמיד יהיה להם חפיפה, כי שני הריבועים תופסים יותר מחצי הגובה וגם יותר מחצי הרוחב וסך הכל זה יותר מהמקום האפשרי (שובך היונים...).
אם כך, לפחות אחד מהשניים קיבל מקסימום רבע משטח החלקה. כיוון שהחלקה אחידה בעיניו, הוא קיבל פחות מ - "Vi(C)/2", כלומר פחות מחצי משווי החלקה בעיניו. לכן אין חלוקה פרופורציונלית עבור חלקה מרובעת אחידה.

ג

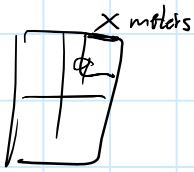


נניח שיש לנו ריבוע, שכולם מעריכים באותו אופן:

תמיד יקחו את הפינות האלה.

אפשר להניח שתמיד יהיה מי שייקח את הפינות של ה-9. כי אם לא, נוכל לקחת את הריבוע שהכי קרוב לפינה ואו לייעל אותו או לא לשנות בכלל על ידי הצמדתו לפינה. לא ייתכן שכל הריבועים חסומים מלהיצמד לפינה, לא ייתכן שריבוע אחד חוסם אחר והוא חוסם אותו חזרה, אלה ריבועים.
אם נניח שיש שני ריבועים שצמודים לפינה, אם החלוקה היתה פרופורציונלית שמרנו על הפרופורציונליות שלה בוודאות.

ניתן להניח ששני הריבועים שצמודים לפינות של התשע הם המינימלים האפשריים, כי מספיק לנו שכל הריבועים יהיו 1/4 מהערך הכולל, ואין עניין שכל ריבוע יהיה היעיל ביותר שאפשר. אם אין חלוקה פרופורציונלית כשהם מינימלים, אין חלוקה פרופורציונלית בכלל.
בשביל שהריבועים יהיו מינימלים, הם צריכים להיות כל אחד בערך של 5, כי הערך הכולל של הריבוע (לדעת כולם) הוא 1+9+1+9=20.

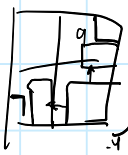


כל משבצת ברבוע הגדול שווה ל-9.

$$x^2m^2 = 9x^2$$

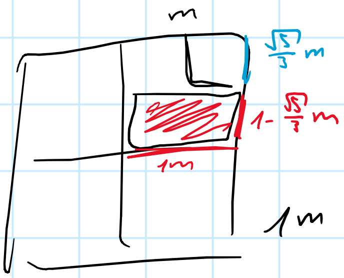
$$9x^2 = 5 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745\ m$$

אורך צלע הריבוע המינימלי הוא 0.745.
אם נרצה לייעל ככל הניתן את הריבועים של שאר האנשים, נרצה שכל אחד יקבל כמה שיותר מהשטח ששווה 9. אם למישהו יהיה שטח שאינו מנצל כראוי את השטח של 9, נוכל להזיז אותו ולייעל אותו.



לא ייתכן ששתי האפשרויות חסומות ע"י חלוקה של שחקן 4.

החלק המקסימלי ששני האנשים הנותרים יכולים לקבל מהשטח שערכו 9, הוא:



$$1m \cdot \left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)m = \left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)m^2$$

$$m^2 - 9$$

$$\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)m^2 = 9\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 2.29$$

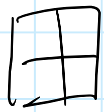
אפילו אם נחלק את כל השטח הנותר בין שני השחקנים, כל אחד יקבל סך הכל ערך של

$$2.29+1=3.29<5$$

וזה לא רבע מהערך הכולל, כך שהחלוקה לא פרופורציונלית.

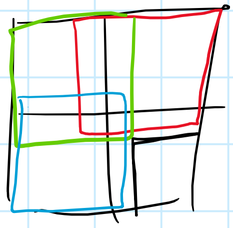
מסקנה: אין חלוקה פרופורציונלית תחת התנאים האלו. מש"ל.

ד



מחלקים את העוגה לארבעה ריבועים שווי שטח.
נותנים לשני האנשים לבחור את הרבע המוצלח לדעתם. אם כל אחד בחר אחר, סיימנו! אם לא:
אחד מסמן על הרבע הנבחר ריבוע שהוא מותח מפינת העוגה, שהוא רבע מהעוגה לדעתו. השני יכול להכריז על שביעות רצון, ואז הראשון מקבל את הריבוע; או להקטין את הריבוע ולקבל אותו בעצמו.
מי שלא קיבל את הריבוע, מסמן ריבוע על חלק משלושת הרבעים הנותרים ומקבל אותו.

נכונות:
בשלב הראשון בוודאות שניהם בחרו רבע ששווין רבע לפחות, אחרת ארבעת הרבעים היו שווים פחות מרבע וסך העוגה היה שווה פחות מאחד, סתירה.
אם שניהם בחרו אותו דבר וסימנו ריבוע:
זה שקיבל את הריבוע קיבל חלק פרופורציונלי בוודאות.
מי שלא, כנראה חושב שהריבוע הוא לכל היותר רבע מהערך הכולל. אחרת היה מסמן חלק קטן יותר. לכן, שאר העוגה מכילה 3/4 מהערך לפחות.
נסמן 3 ריבועים שונים:



לא ייתכן ששלושתם ערכם פחות מרבע, כי אז סך כל העוגה כולה - כולל שלושת הריבועים והריבוע הראשון - הוא פחות מאחד. לכן בהכרח לפחות אחד מהריבועים המסומנים שווין לפחות רבע, ומי שלא קיבל את הריבוע הראשון יקבל גם הוא חלק חצי פרופורציונלי. קמ"ל.

דיווח עזרה

יום חמישי 30 אוקטובר 2025 21:12

בסעיף ד' אחרי שהבנתי שעלי לחלק את הריבוע לארבעה רבעים, נתקעתי ונעזרתי בצ'אט ג'יפיטי. להלן השיחה:

יש לך עוגה מרובעת. שני אנשים. כל אחד מקבל ריבוע (דווקא ריבוע) מהעוגה.
כל אחד עשוי להעדיף חלק אחר מהעוגה. האם אתה יכול להוכיח שאפשר לחלק את העוגה כך שכל אחד יקבל רבע מערך העוגה לפחות, **לדעתו**?

Thought for 42s ›

שאלה נהדרת!

תקצרה — כן, תמיד אפשר. הנה הוכחה אינטואיטיבית וקצרה שמבוססת על רציפות.

1. נניח שהעוגה היא הריבוע C. ננרמל כל שיפוט כך שסך הערך של C לפי כל שחקן הוא 1. לכל שחקן יש פונקציית ערך על תת־האזורים של C שהיא מותרת וסתמית (הערך של איזור קטן משתנה ברציפות כשמעבירים/משנים את האזור).
2. חלקו את C ל־4 ריבועים שווים (ריבועי רבע — כל צד חצי מהמקורי). כל השחקן חייב להעריך לפחות אחד מהריבועים האלה בערך $\geq 1/4$ (כי ארבעת הריבועים יחד שווים ערך 1, לפי חלוקה לארבע חלקים לפחות אחד לא פחות מ־1/4). נסמן עבור כל שחקן את הריבוע המועדף מבין הארבע — יש לו לפחות אחד כזה.
3. אם שני השחקנים מעדיפים ריבועים שונים מתוך הארבע — סיימנו: אלה שני ריבועים בלתי־חופפים וכל אחד מקבל $\geq 1/4$ על־פי דעתו.
4. אם שניהם מצביעים על אותו ריבוע R (כלומר שניהם מוצאים אותו כ"ריבוע עם ערך $\geq 1/4$"), נעשה טריק של רציפות: הזיזו את המערכת של קווי החתך (הגריד 2 ↓ 2) מעט בתוך C — כלומר קבעו משפחה פרמטרית של חלוקות ל־4 ריבועים שווים המשתנות בהזזה קטנה של הגריד. עבור כל מיקום של הגריד כל שחקן יוצָג על־ידי

יש המשך לשיחה, רק שאני לא יודעת מה כתוב בה; כאן הפסקתי לקרוא כי הבנתי שאני יכולה להכריח את השחקנים לסמן ריבוע שמתחיל בפינת העוגה ולא באמצע. (משהו שהייתי אמורה להבין מסעיף א.) כל הקונספט הזה שהעוגה רציפה, בעיקרון.

זו כל העזרה שקיבלתי (אלא אם להסביר את החומר ואת השאלה לאנשים נחשב גם).