אלגוריתמים כלכליים – מטלה 1

ידידיה אבן-חן

שאלה 3 – חלוקה עם זכויות לא-שוות

סעיף א:

ניזכר בהגדרה הרגילה של חלוקה פרופורציונלית:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: V_i(X_i) \geq V_i(C)/n$$

בחלוקה כזאת, אנחנו בעצם פועלים תחת ההנחה שלכל שחקן יש זכות לחלק שווה בקרקע: לכל אחד מגיע $t_i = 1/n$. אנחנו בעצם דורשים:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: V_i(X_i) \geq V_i(C) \cdot t_i$$

חלוקה כזאת נקראת t-פרופורציונלית.

סעיף ב:

נשתמש בגרסה של אלגוריתם אבן-פז עם *agent cloning*. הפתרון מבוסס על המאמר:

Cseh, Ágnes, and Tamás Fleiner. "The complexity of cake cutting with unequal shares." ACM Transactions on Algorithms (TALG) 16.3 (2020): 1-21.

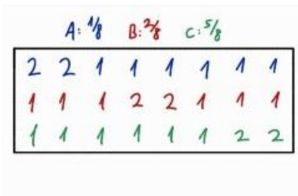
ניתן למצוא את המאמר בקישור:

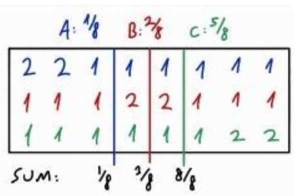
`https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/3380742#page=5.72`

בשביל לקבל חלוקה t-פרופורציונלית, נבצע משהו דומה לאלגוריתם אבן-פז:

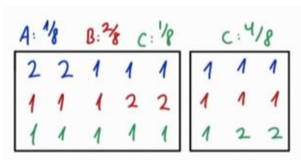
1. כל שחקן מציע חלוקה של $\lfloor D/2 \rfloor, \lceil D/2 \rceil$, בעיניו.
2. מסדרים את הקווים לפי הסדר, מהנמוך לגבוה (משמאל לימין).
3. נעבור על הקווים משמאל לימין, ונסכום את השברים של השחקנים. נעצור ברגע שנעבור את החצי.
4. מחלקים את השטח לפי החלוקה של השחקן האחרון שסכמנו.
   אם השבר שלו גרם לנו להגיע ליותר מחצי, זה אומר שהוא צריך לקבל שטח משני הצדדים של החלוקה. נפצל את השחקן לשניים ונשלח אחד לכל צד, כך שבכל צד יש בדיוק חצי מהדרישה. לשני נחלקים של השחקן המפוצל יש ביחד את אותה דרישה שהיה לשחקן המקורי.
5. כל שחקן נשלח לחלק שהקו שלו נמצא בו, וחוזרים ברקורסיה על התהליך.

לדוגמה:

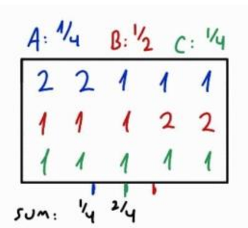




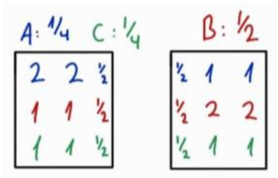
בשלב הראשון: כל שחקן מסמן חצי בעיניו. סוכמים את החלקים שכל אחד זכאי להם לפי הסדר, ועוצרים בחצי (או מיד אחרי שעוברים). במקרה שלנו עוברים את החצי רק עם שחקן C. לצד שמאל נשלח את A, B וכמה מ-C שצריך כדי שיהיה חצי:



בצד השני נשאר רק C, אז הצד הזה כולו שלו. נמשיך עם הרקורסיה על צד שמאל:



נסמן חצי לפי כל אחד. הפעם, החצי לפי שחקן B הוא הקיצוני יותר. אבל בגלל שבצד הזה שחקן C דורש רק רבע, יחד עם שחקן A זה מגיע לחצי. אז נחלק לפי ההצעה של C. הפעם הסכום של הדרישות של A ו-C מגיע בדיוק לחצי, אז לא צריך לפצל את B:



B מקבל את כל החלק הימני, ו-A ו-C מחלקים ביניהם את החלק השמאלי. ברגע שיש רק שני שחקנים, אפשר לעשות "חתוך ובחר" משוכלל – שחקן A מחלק ל-D חלקים שווים בעיניו, ושחקן B בוחר חלקים לפי השבר שמגיע לו.

הוכחת הנכונות דומה להוכחה של אלגוריתם אבן-פז, באינדוקציה על n: בכל שלב, לפי החלוקה (בחירת החציון), כל שחקן נמצא בחלק ששווה בעיניו לפחות k, והשבר הכולל שהשחקנים דורשים בחלק הזה הוא k (עבור $k \in \{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil\}$). אז תמיד אפשר לחלק את החלק הזה בין כולם.

הוכחת זמן הריצה נובעת מכך שהסכום הכולל שמחלקים הוא D, ובכל שלב, מפצלים את D ל-2. בסה"כ עד $\log D$ שלבים. השחקן המפוצל (אם יש) משתתף פעמיים בשלב, אז נחשיב את זה $2 \log D$. בכל שלב, נשאלים $O(n)$ שאילתות (מיקום החלוקה של כל שחקן). בסה"כ $O(2n \log D)$, כנדרש.