

מגיש: איוון גורבצ'וב

שאלה 5:

*בחרתי לפתור את השאלה בעזרת DeepSeek והשתמשתי באפשרות ה-DeepThink בשביל לגרום לה לחשוב לעומק על פתרון הבעיה.

הדגשתי לב"מ שקרקע היא משאב רציף ושניתן לחתוך גם בתוך האזורים.

I have a 1-D cake partition problem. The cake is split into adjacent regions. Each player gives a nonnegative numeric value to each region. I want you to find a contiguous allocation that is fair. Note that each region is a continuous resources so you may slice within regions as well as slice between them. For example: You may place a slice in the middle of region number 2 and divide it between players such that each receives half of the value of that region based on the numeric value each has given it.

קישור לשיחה:

<https://chat.deepseek.com/share/v6syhnibv7fggxdxi>

(א) עבור הנתונים:

Ami: [5,5,5,5,5,5]

Tami: [2,2,3,3,10,10]

Rami: [10,10,3,3,2,2]

תוצאה (חשב במשך 84 שניות):

- **Rami** receives region 1. Rami values this region at 10, which is at least one-third of their total value ($30/3 = 10$).
- **Ami** receives regions 2, 3, 4, and 5. Ami values each region at 5, so this piece has a total value of 20, which is at least 10.
- **Tami** receives region 6. Tami values this region at 10, which is at least 10.

*הדגשתי לב"מ שאפשר לחתוך גם בתוך אזורים והיא הבינה את זה אך בחרה לא להשתמש באפשרות הזאת. לכן בדוגמאות הנוספות אנסה לגרום לב"מ כן לחתוך בתוך אזורים.

"But let me confirm if this is acceptable. The problem says "you may slice within regions as well", but in this case, we didn't need to slice within regions, so it's fine."

(ב)

דוגמא 1: בעיית חלוקה גדולה יותר (10 שחקנים, 20 אזורים)

player1: [1, 1, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 10, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 10, 10]
player2: [10, 10, 10, 10, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 10, 10, 1, 1, 1, 1, 1]
player3: [2, 2, 2, 8, 8, 2, 2, 2, 8, 8, 2, 2, 2, 8, 8, 2, 2, 2, 8, 8]
player4: [8, 8, 2, 2, 2, 8, 8, 2, 2, 2, 8, 8, 2, 2, 2, 8, 8, 2, 2, 2]
player5: [1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5]
player6: [5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1]
player7: [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]
player8: [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]
player9: [3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7]
player10: [7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3]

תוצאה (חשב במשך 589 שניות):

- **Player2** receives regions 1-2 with a value of 20 (fair share: 11).
- **Player3** receives regions 3-4 with a value of 10 (fair share: 8.8).
- **Player1** receives regions 5-6 with a value of 11 (fair share: 11).
- **Player4** receives regions 7-8 with a value of 10 (fair share: 8.8).
- **Player8** receives regions 9-10 with a value of 12 (fair share: 10).
- **Player7** receives regions 11-12 with a value of 12 (fair share: 10).
- **Player5** receives regions 13-14 with a value of 6 (fair share: 6).
- **Player6** receives regions 15-16 with a value of 6 (fair share: 6).
- **Player9** receives regions 17-18 with a value of 10 (fair share: 10).
- **Player10** receives regions 19-20 with a value of 10 (fair share: 10).

דוגמא 2: בעיית חלוקה בה מספר שחקנים והשטחים שווה (5 שחקנים, 5 אזורים)

player1: [10, 10, 1, 1, 1]
player2: [1, 1, 10, 10, 1]
player3: [1, 1, 1, 1, 10]
player4: [5, 5, 5, 5, 5]
player5: [1, 10, 1, 10, 1]

תוצאה (חשב במשך 50 שניות):

- **Player1** receives region 1 with a value of 10 (fair share: 4.6).
- **Player2** receives region 3 with a value of 10 (fair share: 4.6).
- **Player3** receives region 5 with a value of 10 (fair share: 2.8).
- **Player4** receives region 2 with a value of 5 (fair share: 5).
- **Player5** receives region 4 with a value of 10 (fair share: 4.6).

*משני הדוגמאות הראשונות נראה כי ה"מ מודעת לאפשרות לחתוך בתוך אזורים אך אינה משתמשת בה אלא אם כן יש בכך צורך. לכן בדוגמאות הבאות נכריח אותה לבצע חתכים בתוך אזורים.

דוגמא 3: בעיית חלוקה הדורשת חתך בתוך אזור (6 שחקנים, 5 אזורים)

player1: [8, 8, 2, 2, 2]

player2: [2, 2, 8, 8, 2]

player3: [2, 2, 2, 2, 8]

player4: [4, 4, 4, 4, 4]

player5: [6, 6, 6, 1, 1]

player6: [1, 1, 6, 6, 6]

*הבעיה דורשת חתך בתוך אזור מכיוון שיש לנו יותר שחקנים מאזורים במקרה הזה.
תוצאה (חשב במשך 497 שניות):

The cake is represented as a continuous line from 0 to 5, where each region has length 1 (region 1: 0-1, region 2: 1-2, region 3: 2-3, region 4: 3-4, region 5: 4-5). The allocation is as follows:

- **Player1** receives the interval [0, 0.458375]. This piece consists of the first 45.8375% of region 1. Value: 3.667 (fair share: 3.667).
- **Player5** receives the interval [0.458375, 1.013875]. This piece consists of the last 54.1625% of region 1 and the first 1.3875% of region 2. Value: 3.333 (fair share: 3.333).
- **Player4** receives the interval [1.013875, 1.847125]. This piece consists of the last 98.6125% of region 2 and the first 84.7125% of region 3? Wait, no: since region 2 ends at 2, and 1.847125 is in region 2, so this piece is entirely within region 2, from 1.013875 to 1.847125, which is 83.325% of region 2. Value: 3.333 (fair share: 3.333).
- **Player2** receives the interval [1.847125, 2.42]. This piece consists of the last 15.2875% of region 2 and the first 42% of region 3. Value: 3.667 (fair share: 3.667).
- **Player6** receives the interval [2.42, 2.98]. This piece consists of part of region 3, from 42% to 98% of region 3? Actually, from 2.42 to 2.98, which is 56% of region 3. Value: 3.333 (fair share: 3.333).
- **Player3** receives the interval [2.98, 5]. This piece consists of the last 2% of region 3, all of region 4, and all of region 5. Value: 10.04 (fair share: 2.667).

דוגמא 4: בעיית חלוקה הדורשת חתך בתוך אזור (5 שחקנים, 5 אזורים):

player1: [10, 10, 1, 1, 1]

player2: [1, 1, 10, 10, 1]

player3: [0, 0, 0, 0, 10]

player4: [0, 0, 0, 0, 10]

player5: [1, 10, 1, 10, 1]

*הבעיה דורשת חלוקה מכיוון שיש שני שחקנים המעוניינים רק באזור יחיד באותה המידה.
תוצאה (חשב במשך 125 שניות):

- **Player1** receives regions 1 and 2. Player1 values these at $10 + 10 = 20$, which is greater than their fair share of 4.6.
- **Player2** receives region 3. Player2 values this at 10, which is greater than their fair share of 4.6.
- **Player5** receives region 4. Player5 values this at 10, which is greater than their fair share of 4.6.
- **Player3** receives the first 0.2 of region 5. Player3 values this at $0.2 \times 10 = 2$, which is equal to their fair share of 2.
- **Player4** receives the last 0.8 of region 5. Player4 values this at $0.8 \times 10 = 8$, which is greater than their fair share of 2.

* החלוקה היא אכן פרופורציונלית, אולם קיימת קנאה ברורה בין שחקן 3 ושחקן 4 מכיוון ששחקן 3 מקבל בדיוק את הערך 2 שזה בדיוק הערך הפרופורציונלי עבורו ($10/5=2$) בעוד ששחקן 4 מקבל 8 שזה הרבה יותר מהערך הפרופורציונלי שלו ושל שחקן 3 ($10/5=2$).

לכן אפשר להסיק כי הב"מ מגדירה חלוקה הוגנת כחלוקה פרופורציונלית אך לא דורשת חלוקה ללא קנאה.

ג) מתוך הדוגמאות ניתן לראות כי הב"מ מגדירה חלוקה הוגנת כחלוקה פרופורציונלית (חלוקה בה כל שחקן מקבל את הערך הפרופורציונלי עבורו, כלומר הערך הכולל של העוגה עבור השחקן חלקי מספר השחקנים) אך אינה דורשת חלוקה ללא קנאה. ניתן לראות זאת מתוך הפלטים עבור הדוגמאות:

מתוך הדוגמא בסעיף א':

"Ami values all regions equally at 5 each, so total value 30. Tami has values [2,2,3,3,10,10], total 30. Rami has values [10,10,3,3,2,2], total 30. Since all players have the same total value, 30, I think "fair" means that each player should get a piece they value at least 10, which is one-third of their total value."

- **Rami** receives region 1. Rami values this region at 10, which is at least one-third of their total value ($30/3 = 10$).
- **Ami** receives regions 2, 3, 4, and 5. Ami values each region at 5, so this piece has a total value of 20, which is at least 10.
- **Tami** receives region 6. Tami values this region at 10, which is at least 10.

מתוך הדוגמא בסעיף ב' דוגמא 4:

- **Player1** receives regions 1 and 2. Player1 values these at $10 + 10 = 20$, which is greater than their fair share of 4.6.
- **Player2** receives region 3. Player2 values this at 10, which is greater than their fair share of 4.6.
- **Player5** receives region 4. Player5 values this at 10, which is greater than their fair share of 4.6.
- **Player3** receives the first 0.2 of region 5. Player3 values this at $0.2 \times 10 = 2$, which is equal to their fair share of 2.
- **Player4** receives the last 0.8 of region 5. Player4 values this at $0.8 \times 10 = 8$, which is greater than their fair share of 2.

החלוקה היא אכן פרופורציונלית, אולם קיימת קנאה ברורה בין שחקן 3 ושחקן 4 מכיוון ששחקן 3 מקבל בדיוק את הערך 2 שזה בדיוק הערך הפרופורציונלי עבורו ($10/5=2$) בעוד ששחקן 4 מקבל 8 שזה הרבה יותר מהערך הפרופורציונלי שלו ושל שחקן 3 ($10/5=2$).

ולכן ניתן להסיק כי הב"מ מגדירה חלוקה הוגנת כחלוקה פרופורציונלית אך אינה דורשת חלוקה ללא קנאה.

ועכשיו נעבור לצורת העבודה שבה הב"מ מוצאת חלוקה הוגנת ונראה כיצד היא באה לידי ביטוי בפלטים עבור הדוגמאות השונות:

רשאית הב"מ מחשבת את הערך שכל שחקן צריך לקבל על מנת לקבל חלוקה הוגנת כפי שהיא הגדירה. נראה זאת בפלט עבור הדוגמא בסעיף א':

"Ami values all regions equally at 5 each, so total value 30. Tami has values [2,2,3,3,10,10], total 30. Rami has values [10,10,3,3,2,2], total 30. Since all players have the same total value, 30, I think "fair" means that each player should get a piece they value at least 10, which is one-third of their total value."

לאחר מכן היא מחשבת את הערך המצטבר שכל שחקן צובר לאורך כל אזור שלם. נראה זאת בפלט עבור הדוגמא בסעיף א':

"Let me compute the cumulative values for each player.

First, for Ami, since all values are 5, cumulative from left: after region 1:5, after 2:10, after 3:15, after 4:20, after 5:25, after 6:30."

אחרי זה היא עוברת על כל שחקן, סורקת את האזורים משאל לימין ומזהה את האזורים השלמים הערכיים ביותר עבור כל שחקן ומקצה אותם בצורה חמדנית עבור כל שחקן כך שכל שחקן מקבל את הערך הפרופורציונלי עבורו בדיוק וגם שאין אזור המתחלק בין מספר שחקנים. בנוסף לכך לאחר ששאר השחקנים מקבלים את החלקים שלהם, השחקן האחרון מקבל את שאר האזורים כלל האזור שהערכי ביותר עבורו.

נראה זאת בפלט עבור הדוגמא בסעיף א':

"Let me see what Rami values the left regions. Rami values region 1 at 10, region 2 at 10, so if Rami gets regions 1 and 2, that's 20, which is more than 10, so that's fine. But we might give only part of region 2 if needed, but since 10 is already achieved with region 1 alone, but region 1 is only one region, and since we need contiguous piece, if we give only region 1 to Rami, that's 10, which is exactly 10, so that works. But then we have to assign the rest to others.

Similarly, Tami values region 5 and 6 at 10 each, so if Tami gets region 5 and 6, that's 20, or even just region 5 or 6 alone, but region 5 is 10, so that's enough.

But Ami needs at least two regions to get 10, since each region is 5.

Now, if Rami takes region 1, that's 10 for Rami, but region 1 is only one region, and we have regions 2,3,4,5,6 left. If we give region 6 to Tami, that's 10 for Tami, but then we have regions 2,3,4,5 for Ami, but Ami values those at 5 each, so 4 regions would be 20, which is more than 10, so that seems fine. But we need to assign contiguous pieces, so if Rami gets region 1, Tami gets region 6, and Ami gets regions 2,3,4,5, that seems to work.

But is that contiguous? The cake is contiguous, so if Rami gets region 1, Ami gets 2,3,4,5, and Tami gets region 6, yes, that's three contiguous pieces.

And each player values their piece at least 10: Rami has region 1:10, Ami has four regions:20, Tami has region 6:10. So yes, this works."

****אפשר לראות שבזמן שהשאר קיבלו את הערך הפרופורציונלי עבורם, עמי (Ami) קיבל את שאר החלקים.**

אבל במקרה ומספר האזורים קטן ממספר השחקנים או שקיימים מספר שחקנים שצריכים לקבל אזור מסוים על מנת להגיע לערך הפרופורציונלי שלהם בדיוק (כפי שראינו בדוגמאות 3 ו-4 בסעיף ב'), הב"מ סורקת את האזורים משאל לימין ומזהה את האזורים השלמים הערכיים ביותר עבור כל שחקן ומקצה אותם בצורה חמדנית עבור כל שחקן כך שכל שחקן מקבל את הערך הפרופורציונלי עבורו ובמידה ויש אזור משותף למספר שחקנים, הב"מ מבצעת חתכים באותו האזור ומחלקת אותו לאינטרוולים בין השחקנים בצורה חמדנית כך שכל שחקן יגיע לערך הפרופורציונלי עבורו ואז ממשיכה לאזורים הבאים ולבסוף נותנת את השארית עבור השחקן האחרון.

ניתן לראות זאת בפלט עבור דוגמא 4 בסעיף ב':

"Since P3 and P4 only value region 5, I can give each a small segment from region 5. For example, if I give P3 the piece [4.0, 4.2] and P4 the piece [4.2, 5.0], but then P3 gets 2 from region 5 (since $0.2 * 10 = 2$) which is exactly fair share, and P4 gets 8 from region 5 ($0.8 * 10 = 8$) which is more than 2, so good. But P4 gets more than needed, but that's fine."

בפלט עבור דוגמא 4 בסעיף ב' ניתן לראות שהב"מ בחרה בנקודת החיתוך כך ששחקן 3 בדיוק יקבל את הערך הפרופורציונלי עבורו (2) ואת השארית העבירה לשחקן 4.

וניתן לראות זאת בפלט עבור דוגמא 3 בסעיף ב':

"So, let's list the players who value left regions: Player1, Player5 value left regions highly.

Player1 values region 1 and 2 highly, Player5 values region 1,2,3 highly."

...

" So, for the leftmost interval, I should assign Player1 or Player5."

...

"Interval [0,c1] for Player1 has value ≥ 3.667

Interval [c1,c2] for Player5 has value ≥ 3.333 "

...

" First, Player1 gets [0,c1]. Player1 values region 1 at 8, region 2 at 8, etc. Since c1 is likely in region 1 or region 2, because if c1 is beyond region 2, then Player1 gets more value, but they need only 3.667, so they can get only part of region 1."

...

"So if $c1 \geq 0.458375$, Player1 is satisfied.

But c1 is the first cut, so it can be at least 0.458375.

Now, after c1, we have [c1,c2] for Player5.

Player5 values region 1 at 6, region 2 at 6, region 3 at 6, etc.

Player5 needs 3.333 from [c1,c2]."

...

בפלט עבור דוגמא 3 בסעיף ב' ניתן לראות שהב"מ עוברת על כל שחקן לפי הסדר ומיקום האזורים הערכיים ביותר עבורם משמאל לימין ומכניסה את החתך בדיוק במיקום בו השחקן יקבל בדיוק לפחות את הערך הפרופורציונלי עבורו. בנוסף לכך ניתן לראות בפלט הסופי עבור הדוגמא כי שחקן 3 קיבל את שאר האזורים אחרי החתך האחרון.

"**Player3** receives the interval [2.98, 5]. This piece consists of the last 2% of region 3, all of region 4, and all of region 5. Value: 10.04 (fair share: 2.667)."

ולבסוף היא מבצעת בדיקות חוזרות על החלוקה על מנת לוודא שהיא אכן הוגנת לפי הגדרתה.

לסיכום, ניתן לראות כי הב"מ מגדירה חלוקה הוגנת כחלוקה פרופורציונלית אך אינה דורשת חלוקה ללא קנאה ומשיגה את החלוקה על ידי סריקת האזורים משמאל לימין וזיהוי האזורים השלמים הערכיים ביותר עבור כל שחקן והקצאתם בשיטה חמדנית. אבל במקרה בו אין אפשרות להקצות אזור שלם לשחקן יחיד ויש מספר שחקנים באותו אזור, הב"מ תחלק את האזור בצורה חמדנית כך שכל שחקן יקבל את הערך הנדרש בשביל שהוא יגיע לערכו הפרופורציונלי. אפשר להגדיר את שיטת החלוקה כאלגוריתם חמדני (greedy) יחד עם אפשרות לתיקון מקומי על ידי חיתוך אזורים בין שחקנים.

****את הדוגמאות עבור סעיף ב' יצרתי גם בעזרת DeepSeek**
קישור לשיחה (לא אותו הקישור של השיחה בעמוד הראשון):

<https://chat.deepseek.com/share/dn790cwqik8bu6gt2f>