

מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

* שאלה 1: אסטרטגיה בבעיות חלוקת משאבים

הגדרה: **התחכמות** (מניפולציה) היא דיווח (ע"י שחקן כלשהו) על ערכים שונים מהערכים האמיתיים, על-מנת להשיג תוצאה טובה יותר. **התחכמות בטוחה** היא התחכמות שאף פעם לא גורמת לשחקן להפסיד.

א. הוכיחו, שבחלוקת משאבים יעילה-אוטיליטרית, קיימת התחכמות בטוחה.

ב. הוכיחו, שבחלוקת משאבים יעילה-אוטיליטרית, אם מנרמלים את הערכים של כל השחקנים כך שסכום הערכים של כל המשאבים עבור כל שחקן חייב להיות בדיוק 100, אז לא קיימת התחכמות בטוחה.

ג. הוכיחו, שבחלוקת משאבים לקסימין-אגליטרית, קיימת התחכמות בטוחה.

ד. הוכיחו, שבחלוקת משאבים לקסימין-אגליטרית, אם מנרמלים את הערכים של כל השחקנים כך שסכום הערכים של כל המשאבים עבור כל שחקן חייב להיות בדיוק 100, אז לא קיימת התחכמות בטוחה.

שאלה 2: מיקסום סכום הערכים תחת אילוצי הוגנות

בשאלה זו נראה אלגוריתם נוסף למציאת חלוקה הוגנת ויעילה.

נתונה בעיית אופטימיזציה עבור חלוקת עוגה בין שני שחקנים:

Maximize $V_1(X_1) + V_2(X_2)$
such that (X_1, X_2) is a partition of C
and $V_1(X_1) \geq V_1(C)/2$ and $V_2(X_2) \geq V_2(C)/2$

כאשר C היא העוגה כולה ו X_i הוא החלק שמקבל שחקן i .

א. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.

ב. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה יעילה-פארטו [רמז: הניחו בשלילה שיש שיפור פארטו והגיעו לסתירה].

ג. הוכיחו שהפתרון לבעיה הוא תמיד חלוקה ללא-קנאה.

שאלה 3: חלוקה אגליטרית עם פייתון

תזכורת: בבעיית החלוקה שלמדנו בכיתה, יש n אנשים ו- m משאבים, וכל אדם מייחס ערך לכל משאב.

ניתן לייצג כל בעיה כזאת כמטריצה עם n שורות ו- m עמודות, שבה הערך בשורה i ועמודה j הוא הערך שמייחס אדם i למשאב j .

א. כיתבו פונקציה בפייתון, בעזרת `cvxpy`, המקבלת כקלט מטריצה כזאת (כללית), וכותבת למסך תיאור של חלוקה אגליטרית. לדוגמה, אם הקלט הוא (כמו הדוגמה במצגת):

```
[[81, 19, 1],
 [70, 1, 29]]
```

אז הפלט הוא (בקירוב):

```
Agent #1 gets 0.47 of resource #1, 1.0 of resource #2, and 0.0 of
resource #3.
```

Agent #2 gets 0.53 of resource #1, 0.0 of resource #2, and 1.0 of resource #3.

* ב. הרחיבו את הפונקציה כך שתחשב חלוקה לקסימין-אגליטרית, בעזרת האלגוריתם שנלמד בשיעור.

בשני הסעיפים, יש לכתוב דוקטסט (doctest) לפונקציה שלכם, כדי להדגים ולבדוק את פעולתה. יש להעלות את הפתרון לגיטהאב שלכם ולהגיש במוודל קישור לגיטהאב.

שאלה 4: הכפלה בקבוע

רצינו לחלק משאבים בין אנשים, ולשם כך שאלנו אותם מה הערכים שלהם לכל משאב. אבל שכחנו להגיד להם באיזה מטבע לדווח. כתוצאה מכך, חלק מהאנשים דיווחו ערך בשקלים, חלק בדולרים, חלק באגורות וכו'.

א. הראו, שהחלוקה היעילה-אוטיליטרית תלויה במטבע – אם מישהו מדווח על הערכים שלו במטבע אחר, החלוקה האוטיליטרית עלולה להשתנות.

ב. הראו, שהחלוקה הלקסימין-אגליטרית תלויה במטבע – אם מישהו מדווח על הערכים שלו במטבע אחר, החלוקה האוטיליטרית עלולה להשתנות.

ג. הוכיחו, שהחלוקה היעילה-נאש **אינה תלויה** במטבע – גם אם מישהו (או אפילו כמה אנשים יחד) מדווח על הערכים שלו במטבע אחר כלשהו, החלוקה היעילה-נאש לא משתנה.

* שאלה 5: חלוקת יעילה וללא-קנאה עם זכויות שונות

נתונים n שותפים, שלכל אחד מהם יש חלק אחר ברכוש המשותף: לאדם i יש חלק t_i , כאשר הסכום של כל ה- t_i הוא 1.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה ללא קנאה" במצב זה, בעזרת הפונקציה V_i (פונקציית הערך של שחקן i), ובעזרת הפרמטרים t_i .

ב. הוכיחו, שמיקסום הסכום המשוקלל של הלוגריתמים, כאשר המשקלים הם הזכויות t_i , נותן חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה בהתאם להגדרה של סעיף א.