

## מטלה - חלוקה הוגנת ויעילה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המשומנות בכוכבית (\*) מוצות בnickod כפוף.

### \* שאלה 1: אסטרטגיה בעיות חלוקת משאבים

הגדרה: **התחכਮות** (מניפולציה) היא דיווח (ע"י שחקן כלשהו) על ערכים שונים מהערכים האמיתיים, על-מנת להשיג תוצאה טובה יותר. **התחכמאות בטוחה** היא התחכמאות שאף פעם לא גורמת לשחקן להפסיד.

א. הוכחו, שבחלוקת משאבים **יעילה-אוטיליטרית**, קיימת התחכמאות בטוחה.

ב. הוכחו, שבחלוקת משאבים **יעילה-אוטיליטרית**, אם מנורמלים את הערכים של כל השחקנים כך שסכום הערכים של כל המשאבים עברו כל שחקן חייב להיות בדיקן 100, אז לא קיימת התחכמאות בטוחה.

ג. הוכחו, שבחלוקת משאבים **קסימין-אנגליטרית**, קיימת התחכמאות בטוחה.

ד. הוכחו, שבחלוקת משאבים **קסימין-אנגליטרית**, אם מנורמלים את הערכים של כל השחקנים כך שסכום הערכים של כל המשאבים עברו כל שחקן חייב להיות בדיקן 100, אז לא קיימת התחכמאות בטוחה.

### שאלה 2: מינימום סכום הערכים תחת אילוצי הוגנות

בשאלה זו נראה אלגוריתם נוסף למציאת חלוקה הוגנת ויעילה.

נתונה בעיית אופטימיזציה עבור חלוקת עוגה בין שני שחקנים:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & V_1(X_1) + V_2(X_2) \\ \text{such that} \quad & (X_1, X_2) \text{ is a partition of } C \\ \text{and} \quad & V_1(X_1) \geq V_1(C)/2 \quad \text{and} \quad V_2(X_2) \geq V_2(C)/2 \end{aligned}$$

כאשר  $C$  היא העוגה כולה ו-  $X_i$  הוא החלק שמקבל שחקן  $i$ .

א. הוכחו שהפתרון לבעה הוא תמיד חלוקה פרופורציונלית.

ב. הוכחו שהפתרון לבעה הוא תמיד חלוקה **יעילה-פארטו** [רמז: הניחו בשלילה שיש שיפור פארטו והגיעו לסתירה].

ג. הוכחו שהפתרון לבעה הוא תמיד חלוקה ללא-קנהה.

### שאלה 3: חלוקה אנגליטרית עם פiyiton

**תזכורות:** בעיית החלוקה שלמדנו ביתה, יש  $n$  אנשים ו-  $m$  משאבים, וכל אדם מייחס ערך לכל משאב. ניתן ליצג כל בעיה כזאת כמטריצה עם  $n$  שורות ו-  $m$  עמודות, שבה הערך בשורה  $i$  ועמודה  $j$  הוא הערך שמייחס אדם  $i$  למשאב  $j$ .

א. כתבו פונקציה בפייתון, בעזרת `cvxpy`, המקבלת קלט מטריצה כזאת (כללית), וכותבת למסך תיאור של חלוקה אנגליטרית. לדוגמה, אם הקלט הוא (כמו הדוגמה במצגת):

```
[[81, 19, 1],
 [70, 1, 29]]
```

אז הפלט הוא (בקירוב):

Agent #1 gets 0.47 of resource #1, 1.0 of resource #2, and 0.0 of resource #3.

Agent #2 gets 0.53 of resource #1, 0.0 of resource #2, and 1.0 of resource #3.

\* ב. הרחיבו את הפונקציה כך שתחשב חלוקה לקסימנו-אנגליתריה, בעזרת האלגוריתם שנלמד בשיעור.

בשני הסעיפים, יש לכתוב דוקטסט (doctest) לפונקציה שלכם, כדי להדגים ולבדוק את פועלתה. יש להעלות את הפתרון לגיטהאב שלכם ולהגיש במודול קישור לגיטהאב.

#### שאלה 4: הכפלה בקבוע

רצינו לחלק משאבים בין אנשים, ולשם כך שאלנו אותם מה הערכיהם שלהם לכל משאב. אבל שכחנו להגיד להם באיזה מטבח לדוחות. כתוצאה לכך, חלק מהאנשים דיווחו ערך בשקלים, חלק בדולרים, חלק באגורות וכו'.

א. הראו, שהחלוקת היעילה-אוטיליטרית תלויות במטבע – אם מישחו מדווח על הערכיהם שלו במטבע אחר,חלוקת האוטיליטרית עלולה להשתנות.

ב. הראו, שהחלוקת הלקסימין-אנגליתרת תלויות במטבע – אם מישחו מדווח על הערכיהם שלו במטבע אחר,חלוקת האוטיליטרית עלולה להשתנות.

ג. הוכיחו, שהחלוקת היעילה-נש אינה תלויות במטבע – גם אם מישחו (או אפילו כמו אנשים יחד) מדווח על הערכיהם שלו במטבע אחר כלשהו,חלוקת היעילה-נש לא משתנה.

#### \* שאלה 5: חלוקת יעילה ולא-קנאה עם זכויות שונות

נתונים  $n$  שותפים, שלכל אחד מהם יש חלק אחר ברכוש המשותף: לאדם  $i$  יש חלק  $x_i$ , כאשר הסכום של כל  $i$  הוא 1.

א. תנו הנדרה הגיונית למושג "חלוקת ללא קנאה" במצב זה, בעזרת הפונקציה  $V_i$  (פונקציית הערך של שחוקן  $i$ ), ובעזרה הפרמטרים  $x_i$ .

ב. הוכיחו, שסכום הסכום המשוקל של הלוגריתמים, כאשר המשקלים הם הזכויות  $x_i$ , נותן חלוקה יעילה-פארטו ולא-קנאה בהתאם להגדרה של סעיף א.