

Alexandre Verzura Victor Vannobel

COMPTE RENDU TP3 ANAC 2

Décembre 2022



Introduction

Ce document traite de la résolution du problème de diffusion thermique dans un four. Le but de ce projet est de modéliser numériquement le problème discréditer par différences finies puis de résoudre le problème linéaire $Ax = b$ qui en découle.

Modélisation du problème

Le four étudié sera représenté par un domaine $\Omega =]0, 1[^2$ avec $\partial\Omega_D$ et $\partial\Omega_N$ les bords de Ω .

On représente l'objet dans le four par le domaine $S = [0.25, 0.75] \times [0.4, 0.6]$

On pose n le vecteur normale extérieur unitaire.

La solution $T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ du problème doit vérifier le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} -div(\rho \nabla T(x)) = 0 & \forall x \in \Omega & (1) \\ T = T_D & \forall x \in \Omega_D & (2) \\ \nabla T \cdot n = 0 & \forall x \in \Omega_N & (3) \end{cases}$$

I) Discrétisation par différences finies

Dans un premier temps, nous allons transformer le problème initial en un problème au différences finies. Dans cette partie nous allons donc reformuler le problème initial. Pour ce faire, on pose une discrétisation de l'espace Ω en un maillage de $(N+1)^2$ points distant d'un pas $h = \frac{1}{N+1}$.

A) Modélisation du problème

Pour simplifier l'étude, on pose $\forall (x_1, x_2) \in \Omega; \rho(x_1, x_2) = 1$.

D'après le maillage et les conditions de Neumann et Dirichlet sur les bords $\partial\Omega_N$ et $\partial\Omega_D$ les équations (2) et (3) deviennent :

$$\begin{cases} T_{i,0} = 100, T_{i,N+1} = 50, & \forall i = 0, \dots, N+1 & (2) \\ T_{-1,j} = T_{1,j}, T_{N+2,j} = T_{N,j}, & \forall j = 1, \dots, N & (3) \end{cases}$$

Pour l'équation (1) on a, $-div(\rho \nabla T) = 0$ avec $\rho = 1$ et $\nabla T = (\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2})^T$

On sait que dans la direction de la première composante de la solution T ,

$$T(x+h) \simeq T(x) + \nabla T(x) \cdot h \Rightarrow \nabla T(x) \simeq \frac{T(x+h) - T(x)}{h} \text{ Avec } h = (h, 0)^T$$

On veut calculer $\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}$. La dérivée seconde étant la dérivée de la dérivée, On applique la formule ci-dessus au point $\nabla T(x)$ et $\nabla T(x-h)$. Sachant qu'on applique la formule selon la direction de sa première composante on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = \frac{\nabla T(x) - \nabla T(x-h)}{h} = \frac{\frac{T(x+h) - T(x)}{h} - \frac{T(x) - T(x-h)}{h}}{h} = \frac{T(x+h) + T(x-h) - 2T(x)}{h^2}$$

Finalement, en reprenant l'indicage de notre discrétisation de l'espace,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{h^2}$$

De la même manière, on montre que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{h^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } -div(\nabla T) = 0 &\leftrightarrow -\left(\frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{h^2} + \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{h^2}\right) = 0 \\ &\leftrightarrow \frac{4T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{h^2} = 0 \end{aligned}$$

On considère maintenant que le coefficient $\rho(x_1, x_2)$ n'est plus constant en tout point de Ω . On va donc l'estimer lui aussi par la méthode des différences finies.

On sait que :

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) = \frac{[\rho(x_1 + \frac{h}{2}, x_2) + \rho(x_1 - \frac{h}{2}, x_2)]T(x_1, x_2) - \rho(x_1 + \frac{h}{2}, x_2)T(x_1 + h, x_2) - \rho(x_1 - \frac{h}{2}, x_2)T(x_1 - h, x_2)}{h^2}$$

Par symétrie des variables, on déduit la formule de $\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)$ et donc de $div(\rho \nabla T)$. En utilisant les notations du maillage, $x_1 = i, x_2 = j$, il vient :

$$-div(\rho \nabla T) = 0 = \frac{\rho_{i,j} T_{i,j} - \rho_{i+\frac{1}{2},j} T_{i+1,j} - \rho_{i-\frac{1}{2},j} T_{i-1,j} - \rho_{i,j+\frac{1}{2}} T_{i,j+1} - \rho_{i,j-\frac{1}{2}} T_{i,j-1}}{h^2} \quad (1)$$

Avec $\rho_{i,j} = \rho_{i+\frac{1}{2},j} + \rho_{i-\frac{1}{2},j} + \rho_{i,j+\frac{1}{2}} + \rho_{i,j-\frac{1}{2}}$

B) Construction du système linéaire $Ax=b$

On veut maintenant définir la matrice A et le vecteur b du problème linéaire $Ax = b$ modélisant ce problème. On considère dans un premier temps l'équation n°(i, j) avec $(i, j) \in int(\Omega)$.

$$\frac{4T_{i,j} - T_{i+1,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

On va calculer la matrice A' tel que $A = \frac{1}{h^2} A'$.

Sachant que le vecteur inconnu x est rangé selon le changement de variable $(i, j) \rightarrow k$ avec $k = (N+2)j + (i+1)$, on en déduit que la $k_{ième}$ ligne de A' aura le facteur 4 en $k_{ième}$ indice de la ligne et le facteur -1 en $(N+2)(j \pm 1) + (i \pm 1) + 1$ positions de la ligne k. De cette manière on peut construire les lignes $k_{i,j}$ de la matrice A' ainsi que le second membre b sur ces lignes, qui vaut 0.

On construit avec la condition au bord de Dirichlet, les lignes suivantes qui ont un second membre non nul.

Les lignes n° k avec $k = \{i + 1 | 0 \leq i \leq N + 1\}$ ont le coefficient 1 sur $k_{i\text{ème}}$ élément et le second membre b_k vaut 100.

Les lignes n° k avec $k = \{i + 1 + (N + 1)(N + 2) | 0 \leq i \leq N + 1\}$ ont le coefficient 1 sur $k_{i\text{ème}}$ élément de la ligne et le second membre b_k vaut 50.

Ainsi, d'après le changement de variable $k = (N + 2)j + i + 1$ on en déduit que les éléments non nuls de b sont les $(N+2)$ premiers et $(N+2)$ derniers éléments. On a finalement une matrice A' carré par bloc de taille $N \times (N + 2)$.

La matrice A est donc symétrique.

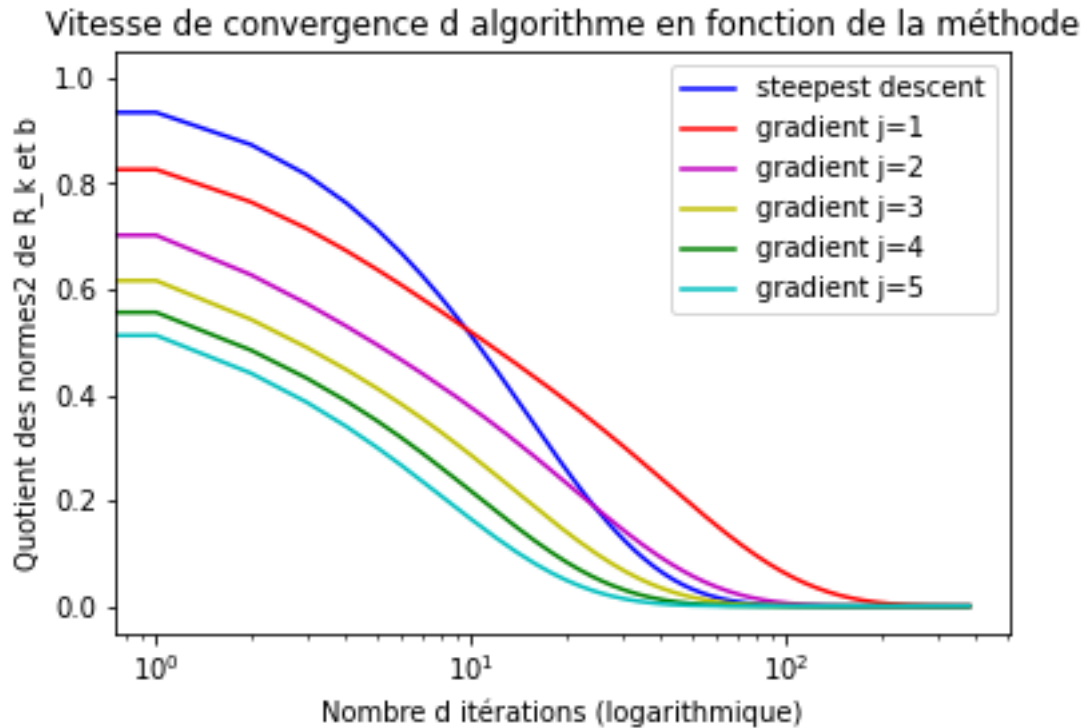
On a pour $N=3$, $A \in M_{15}(\mathbf{R})$, et $\frac{1}{h^2} = 4^2 = 16$

$$A = \begin{bmatrix} 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & 64 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 64 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -16 & 64 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & -16 & 32 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 25 \end{bmatrix}$$

II) Algorithme du gradient à pas fixe

Dans cette partie nous allons comparer les vitesses de convergence de deux algorithmes, l'algorithme de steepest descent et l'algorithme du gradient à pas fixe, pour divers pas positif inférieur à un pas optimal théorique $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$. On trace donc ci-dessous les vitesses de convergence des algorithmes pour des pas $\alpha_j = \frac{j\alpha}{5}$.



On observe que l'algorithme de steepest descent converge moins rapidement que la méthode du gradient lorsque le coefficient $3 \leq j \leq 5$. Le nombre d'itérations pour atteindre la condition d'arrêt pour chaque algorithme est contenu dans le tableau ci-dessous :

| Algorithme | Steepest descent | gradient à pas fixe | | | | |
|---------------------|------------------|---------------------|-----|-----|-----|-----|
| | | j=1 | j=2 | j=3 | j=4 | j=5 |
| Nombre d'itérations | 134 | 150 | 150 | 124 | 92 | 73 |

On notera que lorsque $\alpha > \alpha_{opt}$, l'algorithme du gradient à pas fixe diverge. Pour des pas proches de α_{opt} l'algorithme du gradient à pas fixe converge plus rapidement que l'algorithme de steepest descent.