



FACULTAD DE INGENIERIA

Universidad de Buenos Aires

Trabajo Práctico Final - Georradar (GPR)

Electromagnetismo Aplicado - TB069

2º Cuatrimestre 2025

Autores:

Chechko, Víctor Nicolás
Muñoz Iida, Hikary

Padrones:

110.901
105.601

Correos:

vchechko@fi.uba.ar
hmunoz@fi.uba.ar

Profesor titular:

Walter Gustavo Fano

Profesores de las prácticas:

Aníbal Aguirre
Pablo Lannes

Resumen

En este trabajo se presenta una revisión general del método de georradar o radar GPR como parte de un curso introductorio de electromagnetismo aplicado. Se describen los principios físicos que gobiernan la propagación y reflexión de ondas electromagnéticas, y se incluyen simulaciones básicas de incidencia normal de ondas y pulsos sobre distintas interfaces o superficies de separación.

Abstract

In this document, we present an overview of the ground-penetrating radar (GPR) method as part of an introductory course on applied electromagnetism. We describe the physical principles that govern the propagation and reflection of electromagnetic waves, also including basic simulations of normal incidence of waves and pulses on the interfaces between different materials.

Índice

| | |
|--|----|
| Introducción | 2 |
| Marco Teórico | 4 |
| Ondas | 4 |
| Fuente de transmisión isotrópica | 7 |
| Reflexión | 8 |
| Pulsos | 10 |
| Desarrollo y Simulaciones | 13 |
| Planteo del problema | 13 |
| Simulación 1: foco isotrópico puntual/ondas sinusoidales | 15 |
| Simulación 2: transmisión de pulso gaussiano | 17 |
| Presentación y discusión de resultados | 18 |
| Conclusiones | 20 |
| Anexo | 21 |
| Fuentes y Referencias | 24 |

Introducción

El georradar o *Ground Penetrating Radar* (GPR) es un instrumento que permite sondear una sección del suelo a fin de conocer su composición y/o detectar objetos enterrados. Su utilidad reside en la naturaleza poco invasiva del método, que permite estudiar las capas del suelo de forma rápida y sin necesidad de excavar o perturbar el terreno.

Comúnmente, consta de una estructura móvil que posee un transmisor y receptor fijos entre sí. La antena transmisora emite una onda electromagnética de propiedades conocidas, de modo que se detectan cambios en la composición del suelo a través de las características de las ondas reflejadas captadas por la receptora. En este sentido, la tecnología del GPR aprovecha los contrastes en las propiedades dieléctricas y de conductividad del entorno.

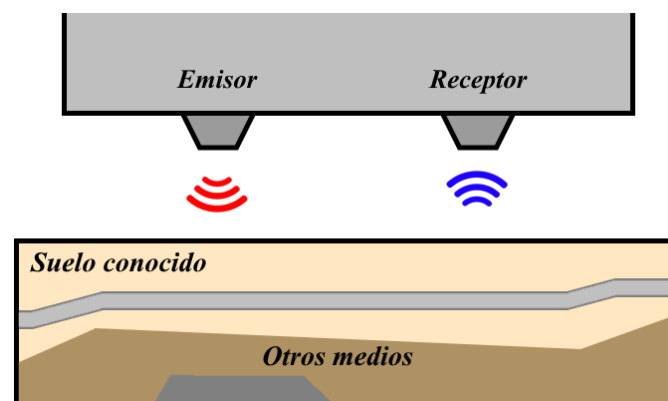


Figura 1: Esquema básico del principio de funcionamiento del georradar.

El planteo y desarrollo del georradar comenzó a principios del siglo XX, cuando se exploró la propagación de ondas de radio en materiales no conductores y se observaron las primeras reflexiones desde estructuras subterráneas. Así, el método presentaría una alternativa no invasiva a estrategias tradicionales como la excavación o el método de pozo cruzado (cross-hole).

La primera patente para un sistema que empleaba ondas sinusoidales continuas para localizar objetos enterrados fue presentada en 1910 por los investigadores alemanes Gotthelf Leimbach y Heinrich Löwy, tan solo 6 años después de la primera patente para el radar en 1904, mientras que el primer uso bien documentado data del año 1929, cuando Walter Stern utilizó ondas electromagnéticas para determinar la profundidad del glaciar Vernagtferner en los alpes austríacos sin necesidad de perforarlo.

Pasarían años sin avances significativos hasta el surgimiento de un nuevo interés para aplicaciones militares a partir de la década de 1970. En los años posteriores también aparecerían los primeros modelos comerciales, pudiéndose destacar un equipo con antenas de 100-500 MHz montado en camioneta desarrollado hacia 1971 por la empresa Geophysical Survey Systems Inc. (GSSI), y un equipo portátil por la misma empresa en 1974. Desde entonces, los avances tecnológicos y en investigación no han hecho más que mejorar y popularizar la técnica^[1].

En la actualidad, GPR se utiliza en una amplia variedad de ámbitos^[2], como lo pueden ser:

- **Geología:** delimitación de estratos, detección de cavidades y estudio general de la composición del subsuelo.
- **Ingeniería civil:** inspección de pavimentos, análisis de fundaciones y control de estructuras enterradas.
- **Servicios urbanos:** localización de tuberías de metal o plástico, cables eléctricos o de telecomunicaciones, tanques subterráneos u otros servicios, con el fin de no dañar instalaciones presentes al realizar obras.
- **Arqueología:** reconocimiento de restos, muros y construcciones subterráneas sin alterar el terreno.
- **Ingeniería ferroviaria:** inspección de balasto ferroviario, inspección de túneles y detección de servicios urbanos.
- **Otros:** aplicaciones militares, en materia de seguridad y operaciones de rescate, glaciología, rovers espaciales para la exploración del subsuelo en la Luna y Marte, etc.



Figura 2: GPR moderno a pulsos, modelo LMX100 de la marca Radiodetection^[3].

Los dispositivos comerciales modernos, como el de la Figura 2, pueden ser portátiles y cuentan con paneles táctiles e interfaces amigables, además de utilidades adicionales como GPS y conectividad, vinculándolos a IoT e IIoT.

Con los avances en machine-learning de la última década, los equipos también adoptan el uso de aprendizaje profundo y redes neuronales para el análisis más eficiente de los datos capturados^[4].

Marco Teórico

Ondas

Como explican Annan et al^[5], una onda electromagnética es un fenómeno físico consistente en una perturbación oscilatoria en los campos eléctrico y magnético que viaja a través del espacio, sin la necesidad de un medio físico para su propagación. El caso más típico es el de una onda sinusoidal de una única frecuencia, aunque la combinación de distintas frecuencias y amplitudes permite producir señales de formas distintas, como pulsos concentrados, que también serán de nuestro interés.

El comportamiento físico de las ondas electromagnéticas puede ser descrito por las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1}$$

donde:

- \vec{E} es el vector de campo eléctrico (V/m).
- \vec{B} es el vector de densidad de flujo magnético (T).
- \vec{D} es el vector de desplazamiento eléctrico (C/m²).
- \vec{H} es la intensidad de campo magnético (A/m).
- \vec{J} es el vector de la densidad de corriente eléctrica (A/m²).
- ρ es la densidad de carga libre (C/m³).

La primer ecuación en el grupo (1) indica que la divergencia de un campo eléctrico a través de una superficie es proporcional a la densidad volumétrica de carga que encierra. Visto de otra forma, la divergencia mide cuánto flujo de campo eléctrico “entra” o “sale” de un punto. Si la divergencia es positiva, la carga neta es positiva y el campo surge de esta. Si la carga es negativa, el campo termina en ella.

Siguiendo con el concepto anterior, la segunda ecuación, conocida como la ley de Gauss para el campo magnético, indica que los campos magnéticos no tienen fuentes ni sumideros. Esto implica que las líneas de campo son caminos cerrados, lo que explica su divergencia nula.

La tercera ecuación, descrita por la ley de Faraday-Lenz, establece que un campo magnético variable en el tiempo induce un campo eléctrico.

Por último, la cuarta ecuación describe la ley de Ampère-Maxwell. Ésta propone que la existencia de una densidad de corriente eléctrica y/o la variación temporal de un campo eléctrico, provocan un campo magnético. El último

término añadido por Maxwell fue importante para explicar ciertos fenómenos e inferir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Por otra parte, las relaciones constitutivas describen la interacción de las ondas electromagnéticas en un medio material.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2)$$

donde:

- La conductividad eléctrica σ (S/m) caracteriza el movimiento de cargas libres en presencia de un campo eléctrico.
- La permitividad eléctrica ε (F/m) caracteriza la tendencia de un material a polarizarse ante un campo eléctrico.
- La permeabilidad magnética μ (H/m) caracteriza la capacidad de un material a magnetizarse ante un campo magnético.

Los parámetros constitutivos, particularmente la conductividad y permitividad eléctrica, tienen un gran impacto en la propagación de las ondas electromagnéticas. Un campo eléctrico no puede existir en el interior de un conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$), ya que las cargas libres se ven desplazadas, creando un campo interno que cancela el externo. En consecuencia, las ondas incidentes son reflejadas casi totalmente en la superficie del material, impidiendo su penetración. En contraste, en un dieléctrico perfecto ($\sigma = 0$) no hay movimiento de cargas libres y, por lo tanto, no hay una corriente de conducción que genere la disipación de energía por efecto Joule. Esto implica que la onda electromagnética se propaga sin atenuación.

En la práctica, la mayoría de los materiales se comportan como dieléctricos con pérdidas ($0 < \sigma < \infty$), de forma que las ondas se atenúan a medida que avanzan. El factor primario en la disipación de energía es la conductividad, que causa pérdidas óhmicas. Adicionalmente, la permitividad eléctrica tiene dos efectos: reducir la velocidad de propagación y contribuir a la atenuación de la onda por el proceso de polarización de las moléculas del material.

Por lo tanto, un georradar (GPR) puede ser mejor aprovechado si se emplea en suelos con una composición de baja conductividad, puesto que permite penetrar a mayor profundidad antes de que su amplitud caiga por debajo del umbral de detección.

Hasta ahora, se abordó de forma intuitiva el concepto de onda y se introdujeron algunas nociones sobre los campos eléctrico y magnético. Por ello, se planea profundizar en el tema a partir de las ecuaciones de Maxwell siguiendo el razonamiento que presenta Balanis^[6].

Para simplificar el análisis, se considera un medio simple libre de fuentes ($\rho = 0$). Además, se emplean las ecuaciones de Maxwell en su forma armónica. Entonces, dada la tercera ecuación del grupo (1), se aplica el rotor a ambos miembros.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Reemplazando por la relación constitutiva $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

Aplicando la cuarta ecuación de Maxwell ($\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega\bar{D}$)

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{J} + \omega^2\mu\bar{D} \quad (3)$$

Reemplazando $\bar{J} = \sigma\bar{E}$ y $\bar{D} = \epsilon\bar{E}$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E} = -j\omega\mu\sigma\bar{E} + \omega^2\mu\epsilon\bar{E} \quad (4)$$

Puesto que el álgebra del operador nabla conduce a la siguiente igualdad:

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) - \bar{\nabla}^2 \bar{E}$$

y considerando que $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0$, la ecuación 4 resulta

$$\bar{\nabla}^2 \bar{E} = \bar{E}(j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon) \quad (5)$$

Análogamente

$$\bar{\nabla}^2 \bar{H} = \bar{H}(j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon) \quad (6)$$

Las expresiones 5 y 6 responden a la ecuación de Helmholtz^[6], cuyas soluciones satisfacen la ecuación de una onda (tema que se abordará más adelante).

Un aspecto interesante de las ecuaciones deducidas es el factor $(-j\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon)$. Este término complejo se llama constante de propagación γ y define las propiedades de propagación en el medio. Suele escribirse compactando las partes real e imaginaria de la siguiente manera:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta \quad (7)$$

donde

- ω es la frecuencia angular (rad/s).
- α es la constante de atenuación (Np/m).
- β es la constante de fase (rad/m).

En un medio con pérdidas, tanto α como β son funciones que dependen de la frecuencia angular. En este caso, α representa la disipación de energía y la consiguiente reducción de la amplitud del campo electromagnético a medida que la onda avanza por el medio. A su vez, este parámetro está relacionado con la profundidad de penetración δ , que describe la distancia a la que la amplitud de la onda se reduce a e^{-1} y se calcula como el inverso de la constante de atenuación:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (8)$$

Por otra parte, β está relacionado con la longitud de onda λ y con la velocidad de fase v_p .

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad \lambda = \frac{v_p}{f} \quad (9)$$

Otro parámetro fundamental que caracteriza la interacción entre la onda electromagnética y el medio es la impedancia intrínseca. Ésta relaciona la magnitud del campo eléctrico \bar{E} y del campo magnético \bar{H} dentro de un mismo medio mediante su cociente:

$$\eta = \frac{|\bar{E}|}{|\bar{H}|} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad (10)$$

A partir de las definiciones planteadas con anterioridad, llegamos a las expresiones generales para una onda electromagnética sinusoidal que viaja en dirección \hat{z} en un determinado medio:

$$\bar{E}(z, t) = E_x(z, t) \hat{x} = \hat{x} \Re \left\{ E_0 e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} \right\} = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (11)$$

$$\bar{H}(z, t) = H_y(z, t) \hat{y} = \hat{y} \Re \left\{ \frac{E_0}{\eta} e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} \right\} = \hat{y} \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos[\omega t - \beta z - \arg(\eta)] \quad (12)$$

Se observa en las mismas que la amplitud de la onda va decayendo según avanza en un factor $e^{-\alpha z}$. A su vez, la amplitud de los campos, particularmente la del campo eléctrico E_0 tendrá una dependencia directa con la distancia entre el frente plano considerado y la fuente que lo produce. Esta cuestión será abordada a continuación cuando hablamos de una fuente isotrópica puntual.

Fuente de transmisión isotrópica

Un foco isotrópico es una fuente puntual teórica que irradia energía electromagnética de igual intensidad y de manera uniforme en todas las direcciones del espacio^[7]. Así, considerando un sistema de coordenadas esféricas, la densidad de potencia $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ se transmite en dirección radial, de modo que la potencia total radiada P se distribuye sobre una superficie esférica imaginaria.

$$\bar{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (13)$$

Esta relación indica que la intensidad de la onda electromagnética decae con el cuadrado de la distancia al punto de origen. Cuando se alcanza una cierta distancia de la fuente, las ondas esféricas pueden considerarse localmente como si se trataran de frentes planos, lo cual permite emplear todas las técnicas electromagnéticas de análisis posteriores. A esto se le llama **aproximación de campo lejano**^[8].

Para comprender el concepto de campo lejano, se aborda el dipolo eléctrico como explican Gottlieb y Pfeiffer^[8]. Se consideran dos cargas puntuales $+q$ y $-q$, alineadas sobre el eje z y separadas por una distancia arbitrariamente corta d , simétrica al origen. Para que dichas cargas generen un campo electromagnético (radiación, en contraposición a un

campo electrostático), su momento dipolar $p = qd$ deberá variar con el tiempo. Por lo tanto, se supone que el dipolo oscila con un movimiento armónico simple:

$$p(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad (14)$$

De esta forma, el campo eléctrico generado depende no solo del gradiente del potencial escalar Φ , sino también de la variación temporal del potencial vectorial magnético \bar{A} .

$$\bar{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t} \quad (15)$$

donde A está determinada por la siguiente expresión:

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 v_p^2} \cdot \frac{\omega p_0 \cos(\omega(t - r/v_p))}{r} \quad (16)$$

En la aproximación de campo lejano, el término dominante es la derivada del potencial vector. Entonces, el campo eléctrico está gobernado por la derivada temporal de esta expresión ($\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$).

$$\bar{E} \approx -\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} = \boxed{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 v_p^2 r} [-\omega^2 p_0 \sin(\omega(t - r/v_p))]} \quad (17)$$

Recordando la relación $\beta = \omega/v_p$ del conjunto de igualdades vistas en 9, se retoma la expresión para ondas planas.

$$\bar{E}_{plana}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos[\omega(t - z/v_p)] \hat{x} \quad (18)$$

Se observa un paralelismo entre las expresiones 17 y 18, que permite interpretar el campo en un punto distante al foco radiador como una onda plana. En resumen, en la región de campo lejano ($r \gg \lambda$), los campos \bar{E} y \bar{H} son ortogonales a la dirección de propagación y, además, sus magnitudes se relacionan mediante la impedancia intrínseca del medio^[6].

En cuanto a la magnitud de su amplitud, en un dieléctrico con pérdidas las ondas emitidas por un foco isotrópico decaen en un factor de $e^{-\alpha z}/z$.

Reflexión

Cuando una onda viajera se encuentra con un cambio de medio, la diferencia abrupta en las propiedades (ϵ, μ, σ) ocasiona que parte de la energía no pueda pasar completamente hacia el nuevo medio y se genere una componente que regresa en sentido contrario. En este caso, a esa fracción que regresa se la llama onda reflejada, mientras que la onda original es la incidente y la porción que atraviesa es la onda transmitida. Este fenómeno que se produce en la frontera o interfaz entre los dos materiales es una consecuencia natural de las condiciones de contorno de los campos^[9].

La proporción entre las amplitudes de la onda reflejada y la incidente, que es función de las impedancias intrínsecas de ambos medios, se conoce como coeficiente de reflexión Γ :

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{H_r}{H_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad (19)$$

donde se identifica como medio 1 a aquel donde habita la onda incidente y la reflejada, y medio 2 donde hallamos la onda transmitida.

Cuando dichos medios presentan pérdidas ($\sigma \neq 0$), sus impedancias intrínsecas resultan complejas, por lo que el coeficiente de reflexión Γ también será complejo. Esto causa un desfase $\Phi = \arg(\Gamma)$ en los campos de la onda reflejada respecto de la incidente. Además, cuando $\eta_1 > \eta_2$, lo cual se traduce en un coeficiente negativo, se produce una inversión o cambio de fase adicional de 180° .

Para una onda sinusoidal incidente se cumple, sin embargo, que la parte reflejada será de igual frecuencia pero de distinta magnitud. Además, cuando la incidencia es normal (a 90° sobre la superficie de separación), las tres ondas se propagan en la misma dirección general \hat{z} . Esto hace que la interferencia entre las dos ondas en el medio 1 produzca lo que se conoce como **onda estacionaria**, un patrón que produce puntos periódicos conocidos como **nodos** (interferencia destructiva, donde la amplitud se hace mínima) y **vientres** (interferencia constructiva, donde la amplitud se maximiza), que siempre se hallan separados por $\lambda/2$, es decir, hay una distancia de $\lambda/4$ entre nodos y vientres.

El coeficiente que relaciona la onda incidente con la transmitida se conoce a su vez como coeficiente de transmisión τ , y también depende de las impedancias de los medios:

$$\tau = \frac{E_t}{E_i} = \frac{H_t}{H_i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad (20)$$

por lo que siempre es positivo.

La contribución total de los campos eléctricos y magnéticos en el medio 1, considerando la parte incidente y reflejada, puede expresarse entonces como:

$$\begin{aligned} \bar{E}(z, t) &= E_x(z, t) \hat{x} = \hat{x} [E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + E_0^- e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \Phi)] \\ \bar{E}(z, t) &= \hat{x} [E_i e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + |\Gamma| E_i e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \arg(\Gamma))] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(z, t) &= H_y(z, t) \hat{y} = \hat{y} \mathbb{R} \left\{ \left[\frac{E_0^+}{\eta} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) - \frac{E_0^-}{\eta} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \Phi) \right] \right\} \\ \bar{H}(z, t) &= \hat{y} \left[\frac{E_i}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \arg(\eta)) - |\Gamma| \frac{E_i}{|\eta|} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z - \arg(\eta) + \arg(\Gamma)) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Cuando hay más de dos medios presentes, la dinámica se vuelve más compleja, en tanto que se producen una serie de reflexiones y transmisiones matemáticamente infinitas, convergiendo a unos coeficientes de reflexión y transmisión totales.

Para el caso particular de 3 medios (**1-2-3**), el coeficiente de reflexión total hacia el medio 1, Γ_{T1} y transmisión total hacia el medio 3, τ_{T3} están bien definidos y tienen por expresión^[9]:

$$\Gamma_{T1} = \Gamma_{12} + \frac{\tau_{12}\tau_{21}\Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d}}{1 - \Gamma_{21}\Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d}} = \frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d}} \quad (23)$$

$$\tau_{T3} = \frac{\tau_{12}\tau_{23} e^{-\gamma_2 d}}{1 - \Gamma_{21}\Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d}} = \frac{(1 + \Gamma_{12})(1 + \Gamma_{23}) e^{-\gamma_2 d}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23} e^{-2\gamma_2 d}} \quad (24)$$

El paso a las expresiones compactas que no dependen de los coeficientes de transmisión hace uso de las relaciones $\tau_{ij} = 1 + \Gamma_{ij}$ y $\Gamma_{ji} = -\Gamma_{ij}$. d representa el espesor en metros de la capa intermedia o medio 2.

Pulsos

Exploramos brevemente el concepto de ondas sinusoidales de una única frecuencia, pero en muchos problemas prácticos los campos no se limitan a ello, sino que pueden describirse como la superposición de múltiples componentes senoidales, cada una con su propia amplitud y fase. Esta descomposición es posible gracias a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y permite representar señales complejas mediante su contenido espectral.

Un caso especialmente importante en electromagnetismo es el de los pulsos gaussianos, cuyo perfil temporal breve y suave se corresponde con un espectro en frecuencia igualmente gaussiano, de modo que conocer las características temporales nos da información directa de la correspondencia en frecuencia.

Siguiendo el modelo matemático presentado en^[10], el pulso gaussiano generalizado se define en el dominio temporal mediante la función:

$$\Omega(t) = \frac{E_0}{1 - \alpha} \left(\exp \left\{ -4\pi \left[\frac{t - t_0}{\Delta T} \right]^2 \right\} - \alpha \exp \left\{ -4\pi \left[\frac{\alpha(t - t_0)}{\Delta T} \right]^2 \right\} \right) \quad (25)$$

donde:

- E_0 es la amplitud pico en $t = t_0$
- ΔT es la duración nominal
- α es el parámetro de escalamiento, con $\alpha \neq 1$

Además, se define la función autocorrelación $\Upsilon(t)$:

$$\Upsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\lambda)\Omega(\lambda + t) d\lambda = E_0^2 \Delta T \sum_{k=0}^2 I_k \exp \left\{ -\alpha_k \left[\frac{(t - t_0)}{\Delta T} \right]^2 \right\} \quad (26)$$

donde:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\sqrt{8}(1 - \alpha)^2} & \alpha_0 &= 2\pi \\ I_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{8}(1 - \alpha)^2} & \alpha_1 &= 2\pi\alpha^2 \\ I_2 &= -\frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2(1 + \alpha^2)^{1/2}} & \alpha_2 &= \frac{4\pi\alpha^2}{(1 + \alpha^2)} \end{aligned} \quad (27)$$

Por último, se define la función densidad de energía espectral $\Psi(f)$ de la señal $\Omega(t)$, definida como la transformada de Fourier de $\Upsilon(t)$.

$$\begin{aligned}\Psi(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(t) \exp\{-j2\pi ft\} dt \\ &= \left(\frac{E_0}{\Delta f}\right)^2 \exp\left\{-j2\pi t_0\left(\frac{f}{\Delta f}\right)\right\} \times \sum_{k=0}^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_k}} I_k \exp\left\{-\frac{\pi^2}{\alpha_k}\left(\frac{f}{\Delta f}\right)^2\right\}\end{aligned}\quad (28)$$

donde $\Delta f = 1/\Delta T$ es el ancho de banda de frecuencia efectiva del pulso gaussiano. En este caso, se emplea $\alpha = 0$, lo que produce un pulso gaussiano ideal^[10].

Cada una de las componentes del pulso se propaga y refleja de acuerdo con las propiedades de los medios a su propia frecuencia, de modo que la forma final del pulso resulta de la combinación coherente de todas ellas. En la Figura 3 a continuación se muestra la señal temporal y el contenido espectral de un pulso gaussiano puro:

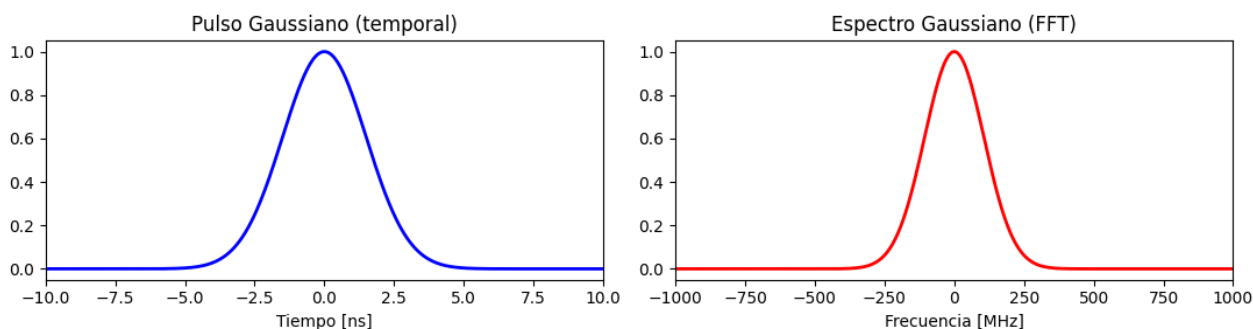


Figura 3: Pulso Gaussiano puro en el tiempo y su espectro en frecuencia.

A menudo, las antenas de GPR no pueden radiar un pulso puro centrado en los 0 Hz, sino que la energía se concentra alrededor de una frecuencia no nula, lo cual supone un desplazamiento en frecuencia equivalente al producto por un coseno en el dominio temporal. Un ejemplo de esto puede verse a continuación en la Figura 4.

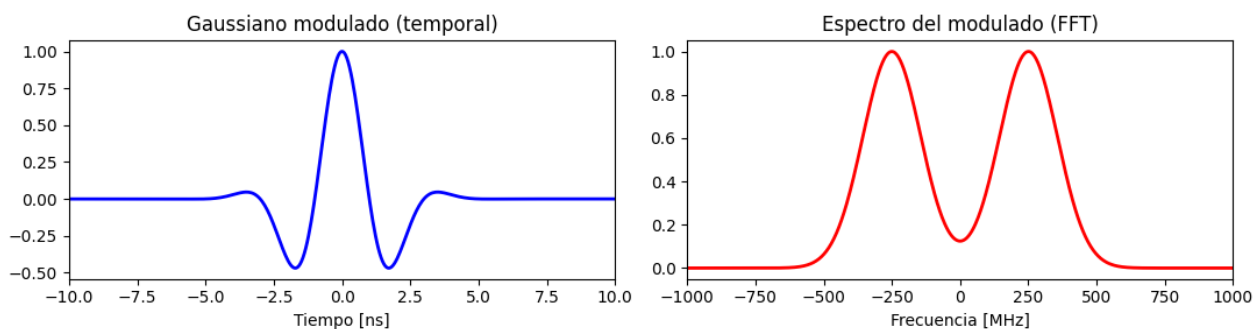


Figura 4: Pulso Gaussiano modulado, centrado en 250 MHz.

Emplear pulsos de este tipo en GPR brinda unas cuantas ventajas respecto de una onda monofrecuencial^{[4], [11]}:

- La respuesta a distintas frecuencias (un ancho de banda grande) brinda más información sobre el medio a identificar que una única frecuencia, sobre todo si el material es dispersivo, caso en que el pulso se recibe distorsionado.
- Ecos bien definidos y fáciles de distinguir para determinar profundidad, comparados con una senoidal que tiene muchos máximos y no tiene “principio” o “fin”.
- Se sabe que las frecuencias más altas brindan mejor resolución a costa de una menor capacidad de penetración en el suelo, mientras que sucede lo contrario con las bajas frecuencias. Al emplear ambas, se combinan las ventajas de los dos rangos.
- Ventajas operativas, permite aprovechar el uso de antenas de banda ultraancha (UWB), mayor resistencia al ruido natural que se presenta en algunas frecuencias.

Desarrollo y Simulaciones

Planteo del problema

Como se mencionó en la introducción, el desafío principal de los instrumentos GPR consiste en identificar la composición del subsuelo, incluyendo el espesor y propiedades de las distintas capas o elementos enterrados.

Lo que se propone en este apartado es el planteo de un problema simplificado que sea viable y sobre el cual se puedan realizar simulaciones que ofrezcan resultados significativos, a fin de demostrar que el uso de ondas electromagnéticas para explorar el subsuelo es una propuesta razonable y factible. Nos valdremos principalmente de las expresiones y conceptos detallados en el marco teórico, que suponen nociones básicas de electromagnetismo y propagación de ondas.

El problema simplificado en cuestión supone la presencia de tres medios:

- **Medio 1:** se trata del aire o espacio libre, con $\sigma_0 = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \mu_1 = \mu_0$, pues suponemos que las antenas emisora y receptora se ubican a cierta distancia del suelo a la hora de enviar y obtener las ondas.
- **Medio 2:** se trata del suelo que suponemos de propiedades conocidas, dentro del cual queremos identificar otros medios, con $\sigma_2 \neq 0, \varepsilon = \varepsilon_2, \mu = \mu_0$. Se halla a una distancia d_1 del dispositivo georradar.
- **Medio 3:** es el medio desconocido a identificar, ubicado a una cierta profundidad d_2 de la interfaz aire-suelo, con $\sigma_3 \neq 0, \varepsilon = \varepsilon_3, \mu = \mu_0$.

Justamente esto es lo que puede verse esquematizado en la Figura 5 a continuación:

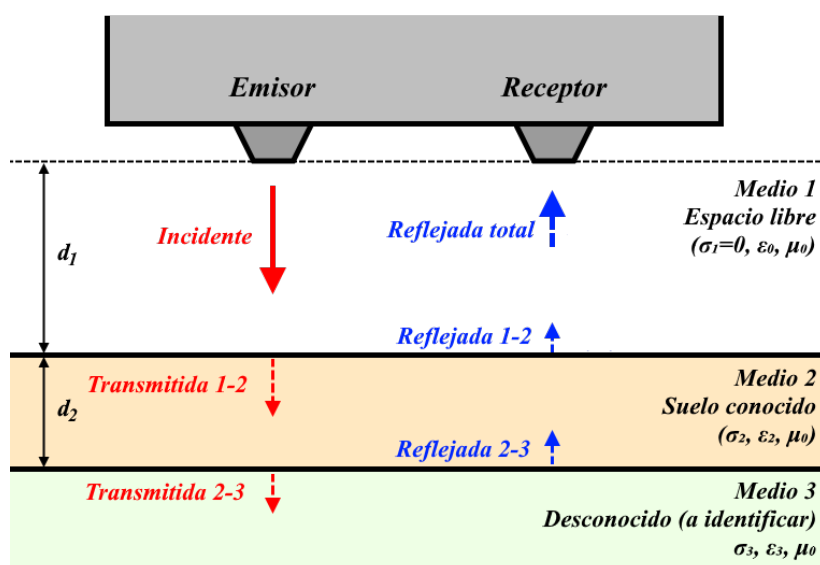


Figura 5: Modelo simplificado a simular.

El objetivo principal de las simulaciones será poder visualizar la propagación de ondas en el espacio y poder identificar el espesor de la capa intermedia (es decir, d_2 o la profundidad del tercer medio), midiendo y empleando para ello el tiempo en que tardan en regresar los frentes de onda reflejados hacia la antenna receptora, ubicada arbitrariamente cerca de la emisora. Posteriormente, también se hallan los parámetros de conductividad y permitividad dieléctrica del material desconocido, demostrando que la onda total captada por el receptor contiene información suficiente para inferir estas propiedades.

En lo que sigue, actuamos bajo estas suposiciones:

- El problema es unidimensional (1D) y supone condiciones ideales de propagación, así como ausencia de ruido.
- Los tres medios son no magnéticos, es decir, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.
- El suelo (al que también nos referimos como medio 2 o capa intermedia) es de propiedades conocidas, ya sea debido a un estudio previo, o porque la determinación de sus parámetros resulta sencilla gracias al propio georradar, a través del análisis de la primer onda reflejada.
- La antenna receptora, a través de un transductor, ofrece información precisa acerca de la magnitud del campo eléctrico en $z = z_0 = 0$.

Aunque las condiciones y propiedades de los medios son completamente configurable en el script, el ejemplo mostrado a continuación será para una frecuencia de 1 GHz y unos parámetros concretos, estos siendo:

- **Medio 1:** $\sigma_1 = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0, \mu_1 = \mu_0$.
- **Medio 2:** $\sigma_2 = 0,01 \text{ S/m}, \varepsilon_2 = 9\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0$, propiedades estándar para tierra medianamente húmeda.
- **Medio 3:** $\sigma_3 = 0,05 \text{ S/m}, \varepsilon_3 = 16\varepsilon_0, \mu_3 = \mu_0$, puede identificarse con el comienzo de una capa de arcilla húmeda.
- Las distancias serán $d_1 = 0,5 \text{ m}$ (distancia georradar-suelo) y $d_2 = 0,5 \text{ m}$ (profundidad del medio 3).

El script fue escrito y debe ser ejecutado en el software de análisis matemático de código abierto **GNU Octave**.

Simulación 1: foco isotrópico puntual/ondas sinusoidales

En la primer fase de la simulación, se implementa la animación espacio-temporal de una onda viajera sinusoidal de amplitud y frecuencia conocidas partiendo de forma constante y continua de un foco isotrópico puntual ubicado en $z = 0$. La animación permitirá observar la reflexión y transmisión de los distintos frentes y los efectos que estos producen en el campo eléctrico a lo largo del espacio:

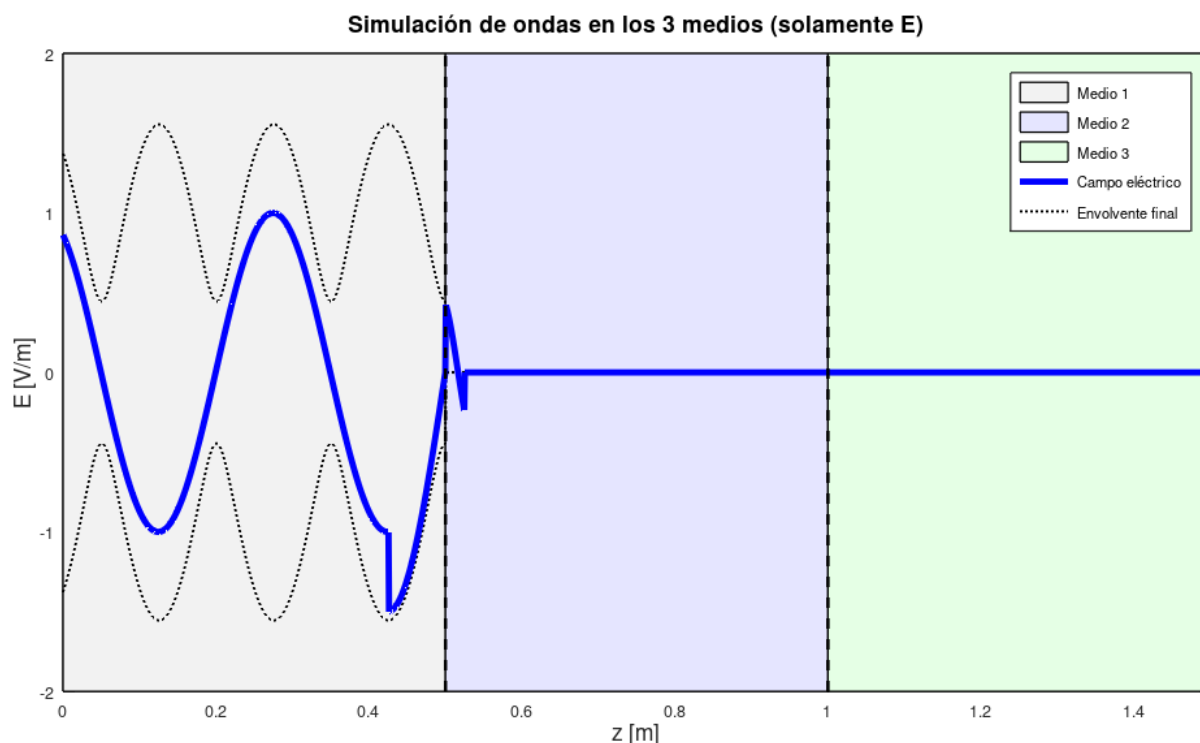


Figura 6: Inicio de la simulación 1.

Durante esta primer etapa, se calculan numéricamente todos los parámetros ($\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \eta_x$ y velocidades de propagación de los medios), y, con las expresiones introducidas en el marco teórico, se continúa hallando los coeficientes de reflexión y transmisión, siendo estos $\Gamma_{12}, \Gamma_{21}, \Gamma_{23}, \Gamma_{32}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{23}, \tau_{32}$. Finalmente, se obtienen los coeficientes de reflexión total hacia el medio 1, Γ_{T1} , y transmisión total hacia el medio 3, τ_{T3} .

Transcurrido un tiempo suficiente, la porción visible en la figura alcanza un estado estacionario, donde en el medio 1 se aprecia claramente la formación de una onda estacionaria producto de la suma entre la onda incidente y la reflejada total por ambas interfaces. Se calcula y muestra también la envolvente de esta onda estacionaria:

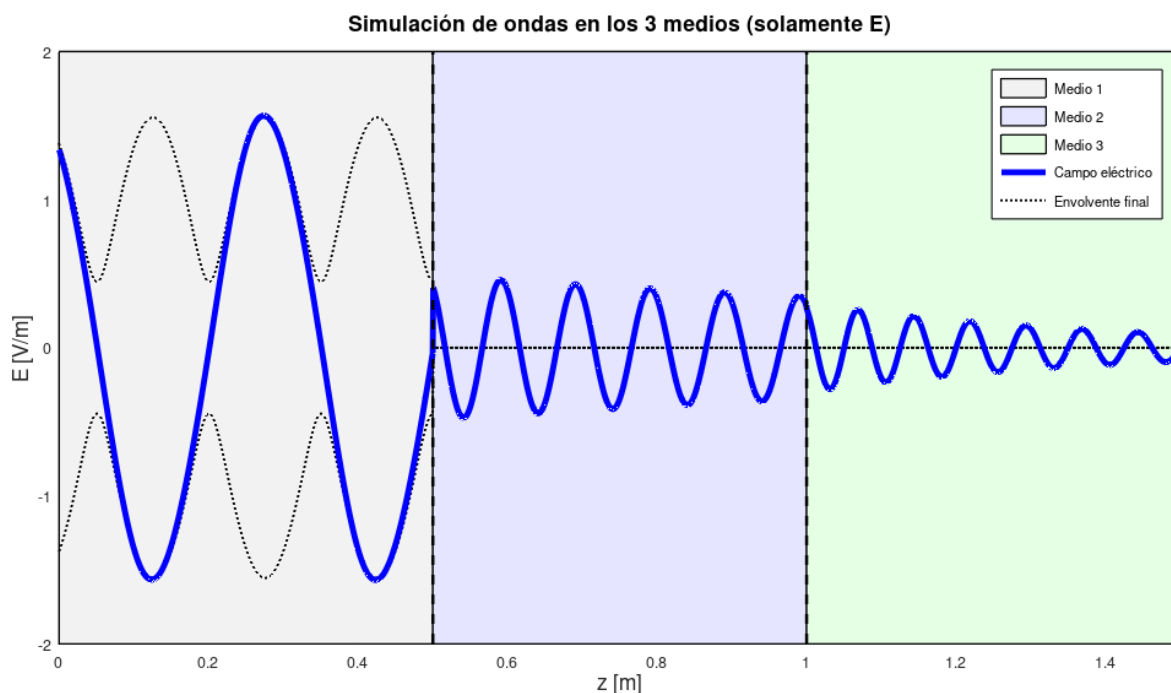


Figura 7: Estado estacionario alcanzado en la simulación 1, junto con la envolvente.

Una vez alcanzado este estado, dado que la onda incidente que emite el foco isotrópico puntual $E_i(z_0, t)$ es conocida, y también lo son la reflejada parcial por el medio 1, $E_{r1}(z_0, t)$ y la total en $z_0 = 0$ (pues esta última es medida por el receptor), es sencillo notar que la onda reflejada debido a la segunda interfaz se obtiene mediante una simple resta, $E_{r2}(z_0, t) = E_T(z_0, t) - E_i(z_0, t) - E_{r1}(z_0, t)$.

Al comparar $E_{r2}(z_0, t)$ con la incidente $E_i(z_0, t)$, es posible revertir las expresiones y hallar Γ_{T1} . En la expresión de Γ_{T1} , todos los coeficientes y parámetros son conocidos a excepción de Γ_{23} , que es lo que deseamos conocer. Luego de despejar Γ_{23} , el resto de parámetros del medio son obtenidos fácilmente en el script mediante los despejes matemáticos relevantes.

Como última observación, la simulación también permite notar el efecto de la atenuación de la onda por pérdidas en los medios que poseen conductividad distinta de cero, siendo esto más notable en el medio 3.

Cabe mencionar que el procedimiento explicado requiere conocer d_2 , es decir el espesor de la capa intermedia o profundidad a la que comienza el medio 3. Si bien es completamente posible estimarla midiendo el tiempo y la variación en amplitud de la onda estacionaria en z_0 , optamos por averiguar esta distancia utilizando un pulso gaussiano, que presenta ecos más fácilmente visualizables.

Simulación 2: transmisión de pulso gaussiano

En esta segunda etapa, la onda transmitida a considerar es ahora un pulso gaussiano puro de características (amplitud y ancho) conocidas. La finalidad sigue siendo la misma, observar la propagación y reflexión con el paso del tiempo, aunque el método empleado para la simulación es distinto y las conclusiones que se pueden obtener son, en parte, más interesantes. En la Figura 8 se puede ver el primer eco y transmisión al medio 2 del pulso:

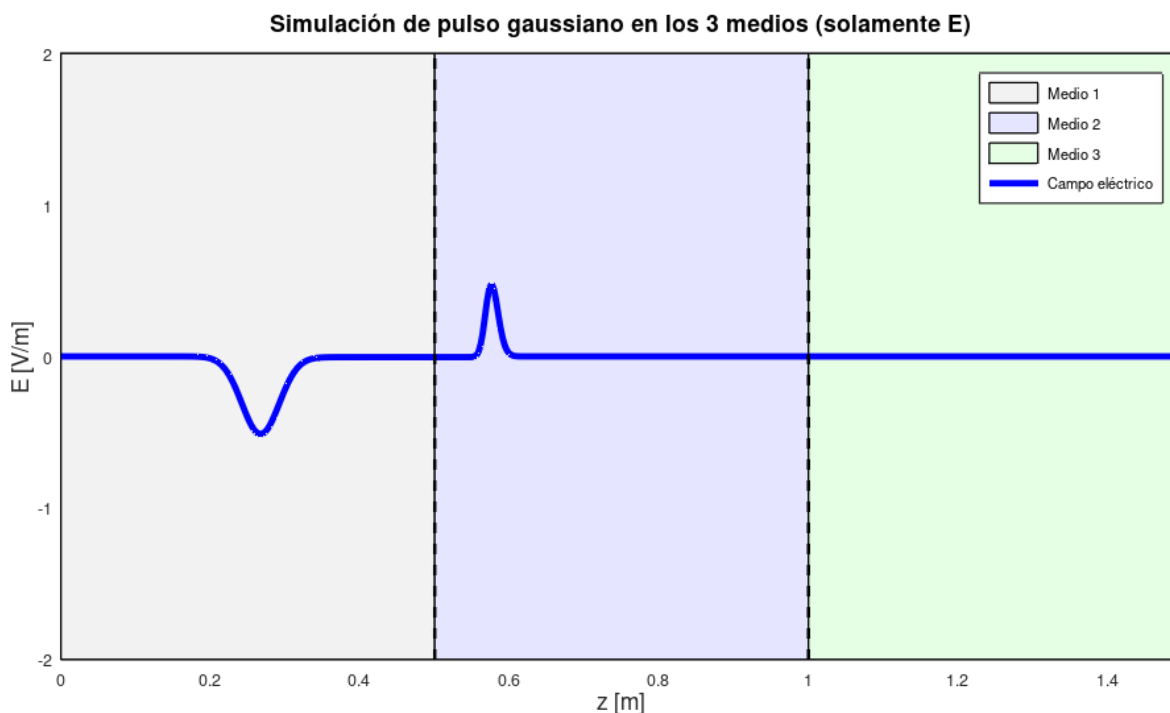


Figura 8: Inicio de la simulación 2, mostrando reflexión y transmisión de un pulso gaussiano

A diferencia de la implementación más manual en el caso de las ondas sinusoidales, aquí se emplea el método **FDTD (Finite Difference Time Domain)**^[12] para un caso unidimensional, un método numérico poderoso que resuelve las ecuaciones de Maxwell a lo largo de una cantidad determinada de pasos temporales y celdas espaciales discretas. De esta forma, no es necesario calcular los coeficientes de transmisión y reflexión, sino que la simulación es directa.

Lo que nos es de interés es medir el tiempo en que tarda en llegar el segundo eco t_2 , correspondiente a la interfaz entre los medios 2 y 3, pues si se conoce la distancia entre el georradar y suelo d_1 y las velocidades de propagación de los medios 1 y 2, cuestión que asumimos, es este tiempo t_2 el que nos permite estimar la distancia d_2 , pues:

$$d_2 = \left(t_2 - 2 \cdot \frac{d_1}{v_1} \right) \cdot \frac{v_2}{2}$$

Determinamos la llegada de un eco cuando el valor absoluto del campo eléctrico \bar{E} presente en $z = 0$ supera un cierto umbral de detección, que deberá ser calibrado para una medida precisa.

El último detalle notable a mencionar como conclusión en esta simulación, que no se apreciaba en el caso anterior, es la distorsión progresiva del pulso, un fenómeno que se produce debido a que los medios 2 y 3, al tener conductividad distinta de cero, son dispersivos, lo cual implica que sus propiedades como la impedancia o constante de propagación dependen de la frecuencia ω , produciendo atenuaciones diferenciadas para cada componente frecuencial de la onda.

Presentación y discusión de resultados

A pesar de que las propiedades de los medios 1 y 2 son conocidas, resulta interesante analizar el comportamiento de la onda en estos. En la Figura 7 se observa que en el vacío la amplitud del campo eléctrico se conserva, mientras que al pasar al medio 2 disminuye drásticamente. Esta reducción es resultado de la reflexión en la interfaz aire/medio 2, que devuelve una fracción de la energía, y del efecto de la constante de atenuación del medio 2, que disipa la energía a medida que la onda avanza por el material. Además, se observa que la longitud de onda es menor en el medio 2. Esto se debe a que la alta permitividad relativa del suelo reduce la velocidad de fase y, por lo tanto, reduce la longitud de onda.

Resultados (parámetros hallados numéricamente) - $f=1000000000$ Hz

| Variable | Valor estimado | Valor real | Error % |
|----------------|--------------------|--------------------|------------|
| t_{eco} | 1.3334e-08 | 1.3343e-08 | 0.063237 % |
| d_2 | 0.49958 | 0.5 | 0.084315 % |
| Γ_{23} | -0.14246+0.016418i | -0.14321+0.008851i | 5.2998 % |
| η_3 | 94.169+4.09882i | 94.0724+2.6401i | 1.5534 % |
| σ_3 | 0.077217 | 0.05 | 54.4335 % |
| μr_3 | 1 | 1 | 0 % |
| ϵr_3 | 15.9143 | 16 | 0.53574 % |
| γ_3 | 3.6426+83.6874i | 2.35366+83.8659i | 1.551 % |

Figura 9: Resultados calculados mediante script.

En cuanto a la composición del medio 3, es posible inferir características del terreno a partir de los parámetros calculados. Los resultados obtenidos mediante las simulaciones se presentan en la Figura 9. Se observa que la mayoría de las propiedades obtenidas mediante medición son cercanas a las reales, manteniendo un error relativo menor al 5.5 %, exceptuando el valor de la conductividad que fue un 54.43 % mayor a la teórica.

Continuando con el análisis de la propagación en los medios, se observa que la parte real del coeficiente de reflexión Γ_{23} es negativo. Esto implica que la onda reflejada tiene su fase invertida respecto a la incidente. De la fórmula del coeficiente de reflexión, se concluye que el medio 3 presenta una menor impedancia que el medio 2.

Esta baja impedancia permite realizar una inferencia acerca de la composición del suelo. La alta permitividad eléctrica relativa (que reduce η), junto con la baja conductividad eléctrica, indica un suelo húmedo y/o arcilloso. Por otro lado, la permeabilidad magnética relativa de 1 nos dice que la capa es no magnética (propiedad esperable en los suelos).

Además, el ε alto del estrato incrementa la constante de atenuación, ya que contribuye a las pérdidas dieléctricas del material. Esto resulta en una menor profundidad de penetración, lo que limita la capacidad de detección de capas más profundas.

Respecto a las propiedades geométricas del suelo, los ecos gaussianos indentificados dan un indicio de que el terreno se encuentra estratificado. De esta manera, se pudo calcular la distancia de la capa más profunda, cuyo valor fue cercano al real (0,49958 m vs. 0,5 m , con un error del 0.06 %).

Conclusiones

Las simulaciones realizadas en el presente trabajo permiten observar con claridad los fenómenos centrales asociados a la propagación de ondas electromagnéticas en distintos medios materiales, como la reflexión, atenuación, distorsión y formación de patrones estacionarios; validan, además, el método del georradar como una técnica no invasiva que permite la caracterización del subsuelo mediante el estudio de dichas ondas. El experimento con ondas sinusoidales y pulsos gaussianos facilitó una interpretación completa del terreno, puesto que permitió calcular los coeficientes de reflexión, impedancias, espesor de las capas y parámetros constitutivos, entre otros.

Tal como se puede notar en la Figura 9, el parámetro determinado con mayor error resultó ser la conductividad σ_3 , siendo el más susceptible a desviarse del valor real con el método utilizado, en tanto que incluso una diferencia muy pequeña en el tiempo t_{eco} , a partir del cual se calcula el resto de valores, afecta notablemente a la precisión esperada en su cálculo. En cuanto al espesor d_2 , constante de fase β_3 , permitividad dieléctrica relativa ϵ_{r3} y parte real de la impedancia intrínseca η_3 , sus estimaciones resultaron cualitativamente muy cercanas a los valores verdaderos.

Por otro lado, las simulaciones también destacan las limitaciones prácticas del GPR. Se observó que los valores de la permitividad dieléctrica y conductividad del medio tienen un impacto considerable en la distancia máxima a la que el georradar logra detectar la señal reflejada; un alto ϵ_r y σ conducen a una mayor constante de atenuación y una menor profundidad de penetración.

Finalmente, como propuesta de mejora a este trabajo, se sugiere el estudio en frecuencias con el fin de observar la influencia de la frecuencia sobre parámetros como α y β , validando la necesidad de pulsos de banda ancha. Además, se propone el modelado de un objeto enterrado con el propósito de simular la detección de un obstáculo de características distintas al medio en el que se encuentra.

Anexo

Esta sección introduce y profundiza brevemente en el código empleado durante el desarrollo de las simulaciones.

El script principal puede hallarse en https://github.com/Victor-Acad/tpf_gpr/blob/main/main_script.m como parte del repositorio Victor-Acad/tpf_gpr/ de GitHub. El mismo no se incluye en este anexo dada su extensión.

Presentamos, sin embargo, la rutina que utiliza el algoritmo numérico de FDTD^[12] a la hora de simular un pulso gaussiano. La forma de la onda simulada puede cambiarse fácilmente en el algoritmo.

El mismo funciona discretizando el espacio y tiempo en una malla, y los campos \vec{E} y \vec{H} se calculan alternadamente en puntos escalonados, permitiendo aproximar las ecuaciones de Maxwell fiablemente por diferencias finitas centradas. Un pulso gaussiano se introduce como fuente, y las interfaces entre medios producen reflexiones y transmisiones que se simulan de manera natural.

```
1 % FDTD 1D (Yee).
2
3 dz = 3e-3; % Paso espacial (resolucion espacial).
4 Nc = round((d_1 + d_2 + 1)/dz); % Numero de celdas.
5 dt = 0.99 * dz/c; % Paso temporal (resolucion temporal).
6 N = 1800; % Numero de frames.
7 t_0 = 40; % Tiempo central del pulso en frames.
8 ancho = 12; % Factor de ancho del pulso.
9 A = 1; % Amplitud del pulso.
10 loc = 2; % Ubicacion de la fuente (primer celda de z != 0).
11
12 gauss = @(k) 2*A*exp(-((k - t_0)/ancho).^2);
13
14 z = (0:Nc-1) * dz; % Vector espacial.
15
16 idx_d_1 = round(d_1/dz); idx_d_2 = round((d_1 + d_2)/dz); % Indices de las interfaces.
17
18 % Vectores de propiedades de los medios.
19 sigma_z = zeros(1, Nc); mu_r_z = zeros(1, Nc); eps_r_z = zeros(1, Nc);
20
21 sigma_z(1:idx_d_1) = sigma_1;
22 sigma_z(idx_d_1+1:idx_d_2) = sigma_2;
23 sigma_z(idx_d_2+1:end) = sigma_3;
24
25 mu_r_z(1:idx_d_1) = mu_r_1;
26 mu_r_z(idx_d_1+1:idx_d_2) = mu_r_2;
```

```

27 mu_r_z(idx_d_2+1:end) = mu_r_3;
28
29 eps_r_z(1:idx_d_1) = eps_r_1;
30 eps_r_z(idx_d_1+1:idx_d_2) = eps_r_2;
31 eps_r_z(idx_d_2+1:end) = eps_r_3;
32
33 % Campos y coeficientes de actualizacion.
34 E = zeros(1, Nc); CE_E = zeros(1, Nc); CE_H = zeros(1, Nc);
35 H = zeros(1, Nc);
36
37 CE_E = (1 - sigma_z .* dt ./ (2 .* eps_0 .* eps_r_z)) ./ ((1 + sigma_z .* dt ./ (2 .*
    eps_0 .* eps_r_z)));
38 CE_H = (dt ./ (eps_0 .* eps_r_z .* dz)) ./ (1 + sigma_z .* dt ./ (2 .* eps_0 .* eps_r_z));
39 CH_H = ones(1, Nc-1);
40 CH_E = dt ./ ((mu_0 .* mu_r_z)(1:end - 1) .* dz);
41
42 % Variable auxiliar que guarda el estado inmediatamente anterior del campo electrico.
43 E_left_prev = 0; E_right_prev = 0;
44
45 % Configuracion de la figura.
46 figure();
47
48 med_1 = fill([0 d_1 d_1 0], [-2 -2 2 2], [0.95 0.95 0.95]); hold on;
49 med_2 = fill([d_1 d_1+d_2 d_1+d_2 d_1], [-2 -2 2 2], [0.9 0.9 1]);
50 med_3 = fill([d_1+d_2 d_1+d_2+0.5 d_1+d_2+0.5 d_1+d_2], [-2 -2 2 2], [0.9 1 0.9]);
51
52 E_T = plot(z, zeros(size(z)), 'b', 'linewidth', 2);
53 plot([d_1 d_1], [-2, 2], '--k');
54 plot([d_1+d_2 d_1+d_2], [-2, 2], '--k'); hold off;
55
56 xlim([0, d_1 + d_2 + 0.5]); ylim([-2, 2]);
57
58 legend([med_1 med_2 med_3 E_T], {"Medio 1", "Medio 2", "Medio 3", "Campo electrico"});
59
60 xlabel('z [m]', 'fontsize', 14);
61 ylabel('E [V/m]', 'fontsize', 14);
62
63 title("Simulacion de pulso gaussiano en los 3 medios (solamente E)", 'fontsize', 14);
64
65 threshold = 0.0035 * A; % Umbral de deteccion de ecos, calibrado.
66
67 % Variables de deteccion de ecos.
68 over_threshold_prev = false;
69 t_eco = 0;

```

```

70 eco_count = 0;
71
72 for k = 1:N % Animacion temporal.
73     % Paso 1 - actualizar H.
74     for i = 1:Nc-1
75         H(i) = H(i) + CH_E(i) * (E(i+1) - E(i));
76     endfor
77
78     % Paso 2 - actualizar E.
79     for i=2:Nc-1
80         E(i) = CE_E(i) * E(i) + CE_H(i) * (H(i) - H(i-1));
81     endfor
82
83     % Paso 3 - sumar el efecto del pulso gaussiano.
84     E(loc) = E(loc) + gauss(k);
85
86     % Paso 4 - Aplicar las condiciones de contorno.
87     E(1) = E_left_prev + ((c*dt - dz) / (c*dt + dz) * (E(2) - E(1)));
88     E_left_prev = E(2);
89     E(end) = E_right_prev + ((c*dt - dz) / (c*dt + dz) * (E(end-1) - E(end)));
90     E_right_prev = E(end-1);
91     over_threshold = abs(E(2)) > threshold;
92
93     % Medimos solo hasta el segundo eco, que es el relevante.
94     if over_threshold && ~over_threshold_prev && eco_count < 3
95         t_eco = k * dt; % Guardar el tiempo del eco.
96         eco_count++;
97     endif
98
99     over_threshold_prev = over_threshold;
100
101     % Actualizacion.
102     set(E_T, 'YData', E);
103     drawnow;
104 endfor

```

Al proveer t_{eco} , este bloque sirve como base para los cálculos posteriores, en donde se utiliza conjuntamente la información de la onda sinusoidal de la primer simulación y se crea una nueva figura que muestra todos los resultados junto con sus respectivos errores relativos porcentuales.

Fuentes y Referencias

- [1] E. Engineering. «A Brief History of Ground Penetrating Radar. »dirección: <https://www.eximiuseng.com/articles/2019/4/4/a-brief-history-of-ground-penetrating-radar>
 - [2] S. Wang, G. Liu, G. Jing et al., «State-of-the-Art Review of Ground Penetrating Radar (GPR) Applications for Railway Ballast Inspection,» *Sensors*, 2022. DOI: 10.3390/s22072450 dirección: <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/7/2450>
 - [3] Radiodetection. «LMX100 GPR. »dirección: <https://www.radiodetection.com/es/products/lmx100tm-gpr>
 - [4] H. Ali et al., «Ground penetrating radar for buried utilities detection and mapping: a review,» págs. 3, 6, 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/2107/1/012056 dirección: https://www.researchgate.net/publication/356702483_Ground_penetrating_radar_for_buried_utilities_detection_and_mapping_a_review
 - [5] P. Annan, H. Jol et al., *Ground Penetrating Radar theory and applications*. Elsevier Science, 2009, ISBN: 978-0-444-53348-7. dirección: <https://es.z-library.sk/book/688163/d9cd3d/ground-penetrating-radar-theory-and-applications.html>
 - [6] C. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley y Sons, Inc, 2005, pág. 155, Sección 3.6 Far-field radiation.
 - [7] A. Bole, B. Dineley y A. Wall, *Radar and ARPA Manual* (Radar and target tracking for professional mariners, yachtsmen and users of marine radar). Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005, ISBN: 0-7506-6434-7. dirección: https://library.bsma.edu.ge/BOOKS/Radar_and_ARPA_Manual_Second_Edition.pdf
 - [8] M. Gottlieb y R. Pfeiffer, *The Feynmann Lectures on Physics*. Basic Books, 2010, ISBN: 978-0-465-07998-8.
 - [9] G. Morozov, R. Maev y G. Drake, «Multiple reflection methods for electromagnetic waves in layered dielectric structures,» *Kvantovaya Elektronika*, vol. 31, 2001. DOI: 10.1070/QE2001v031n09ABEH002042 dirección: <https://quantum-electronics.ru/wp-content/uploads/2001/en/2042.pdf>
 - [10] M. Hussain, «Principles of High-Resolution Radar Based on Nonsinusoidal Waves - Part I: Signal Representation and Pulse Compression,» *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 31, n.º 4, pág. 360, 1989. DOI: 10.1109/15.43630 dirección: <https://sci-hub.st/10.1109/15.43630>
 - [11] M. Hussain. «Wave form Design and Generalized Ambiguity Function for Ultrawideband Nonsinusoidal Signals. »dirección: <https://web.archive.org/web/20091229062216/http://www.emph.com.ua:80/18/pdf/hussain.pdf>
 - [12] K. Yee. «Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. »dirección: <http://home.cc.umanitoba.ca/~lovetrij/cECE7810/Papers/Yee%201966%20HiRes.pdf>
- Repositorio con el presente informe y código utilizado: https://github.com/Victor-Acad/tpf_gpr
 - Software utilizado: *GNU Octave*. <https://octave.org/>