4 月机器学习算法班：矩阵分析与应用(4月终稿)

程博士

julyedu.com

本次课件主要参考书目

1. 本人矩阵理论学习笔记
2. 张贤达，矩阵分析与应用
3. Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, 英文原版
4. Roger A. Horn, Matrix Analysis，英文原版
5. Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, Matrix Computations, 英文原版

向2-5的原著作者致谢！

部分使用的数学符号表

$\mathbb{R}^n$	n维实空间
$\mathbb{R}^{m\times n}$	$m\times n$的实矩阵集合
T	转置
$\det(\mathbf{A})$	行列式
$C(\mathbf{A})$	列空间
$N(\mathbf{A})$	零空间
$\mathbf{A}^{-1}$	逆
$\operatorname{diag}(\mathbf{a})$	将向量转化为对角矩阵
Tr	迹(trace)
rank	秩

示例表

红色框表示非常重要的定理或内容

定理或内容，仔细弄明白

绿色框表示具体的例子

举例，会举一反三

1. 序言
2. 线性代数基本知识(新视角)
3. 特征分解(凸优化中的重要技术)
4. Singular Value Decomposition(SVD)分解与应用(万能矩阵分解)

重新看待矩阵和$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- 矩阵绝不是把一堆数用括号括起来！本课件中，假设$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$。

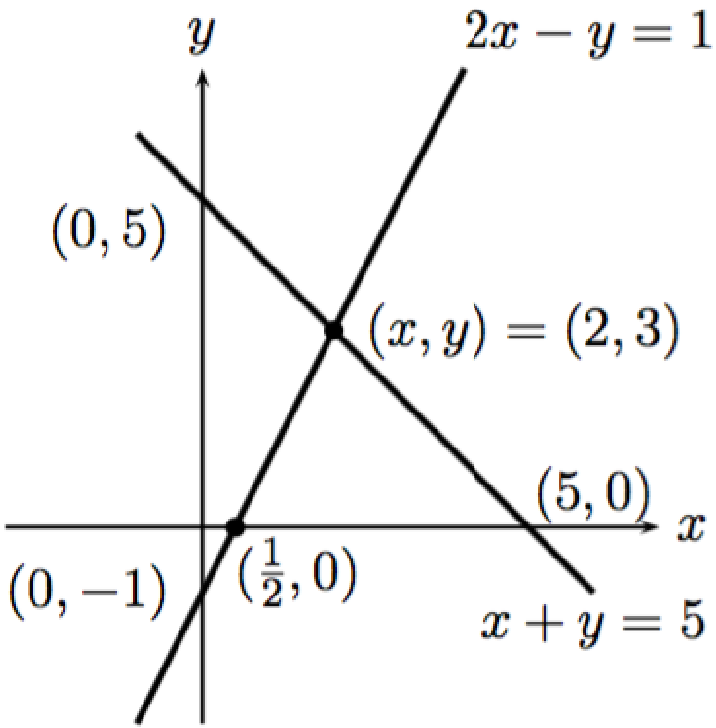
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^{2}} \tag{1}$$

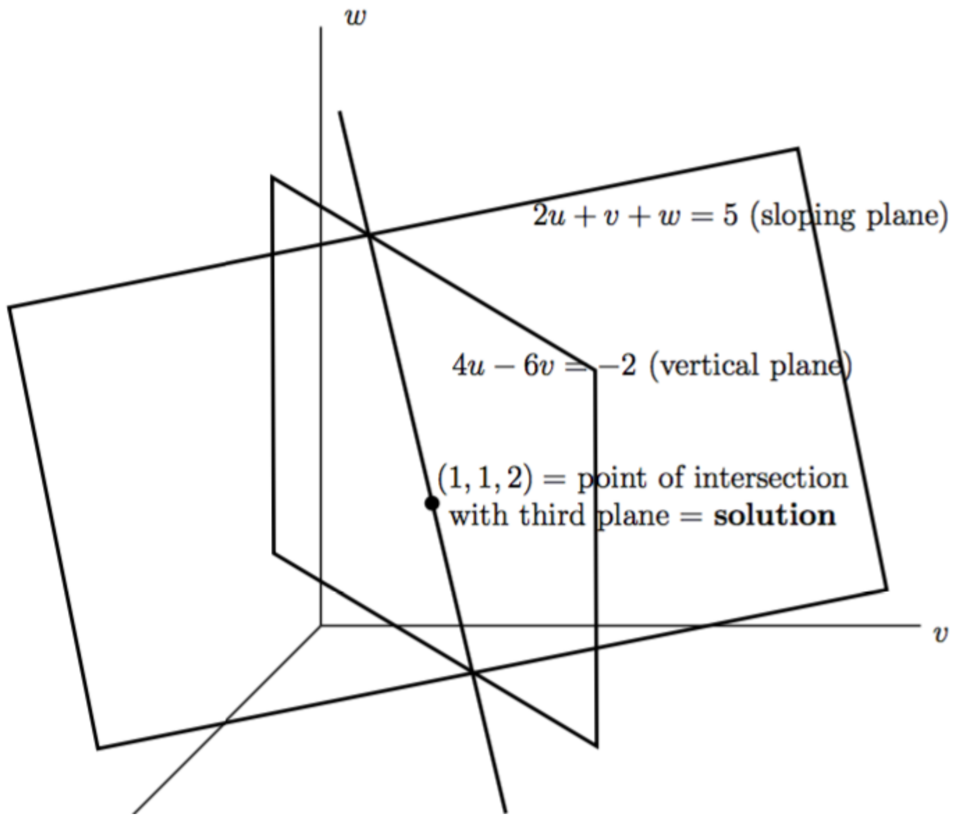
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{3}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^{3}} \tag{2}$$

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的行视图

- 行视图—凸优化中的超平面

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned} \tag{3}$$

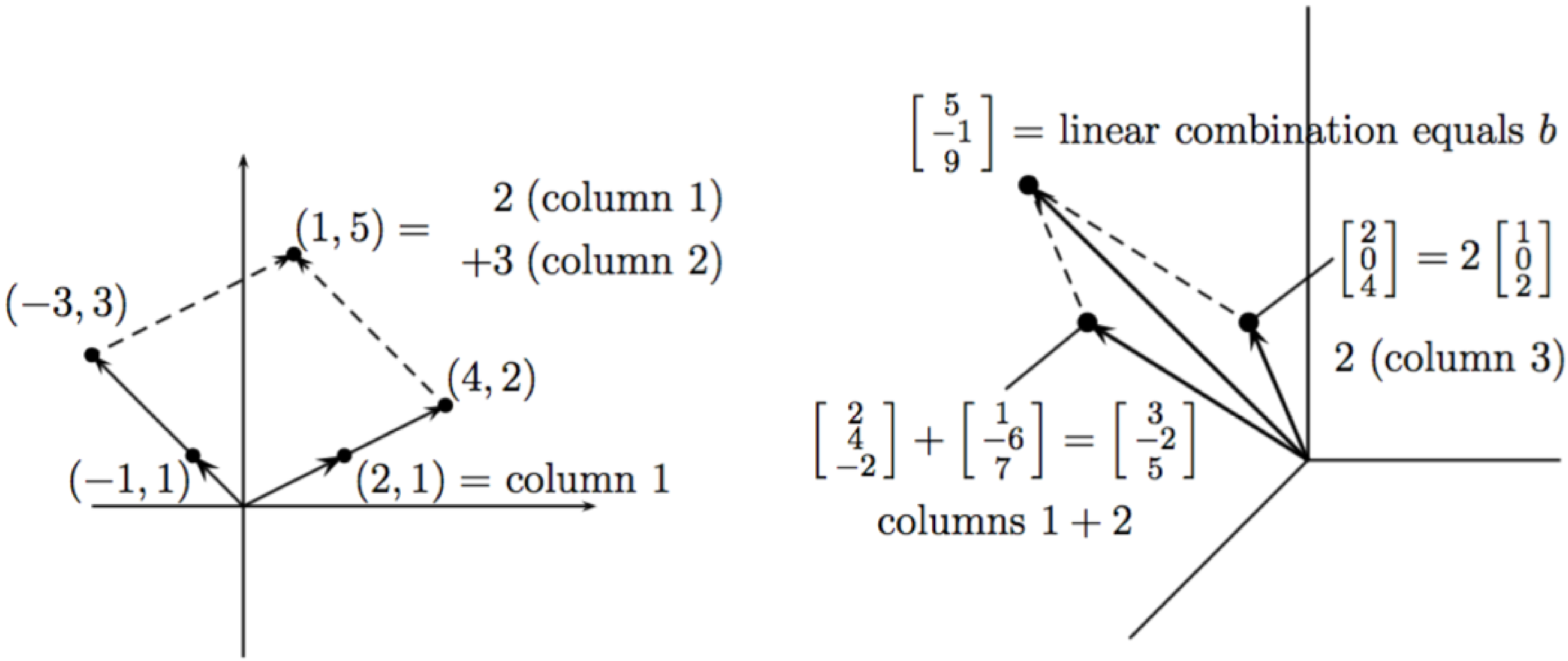




$\mathbf{Ax = b}$ 的列视图

- 列视图—矩阵列的线性组合。思考：所有的线性组合是?

$$x\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} \tag{4}$$



线性相关和线性无关

- 线性相关(Linear dependence)：矢量集$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ 是线性相关的，如果$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$，当且仅当$c_1, c_2, \ldots, c_n \neq 0$。即，至少有一个向量，$\mathbf{a}_l$可以由其它向量线性表出：

$$\mathbf{a}_l = -\frac{1}{c_l} \sum_{k=1, k \neq l}^{n} c_k \mathbf{a}_k \tag{5}$$

- 线性无关(Linear independence)：矢量集$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ 是线性无关的(即不是线性相关的)，如果$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$，当且仅当$c_1, c_2, \ldots, c_n = 0$

- 定义$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$，则$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有$\mathbf{x} = \mathbf{0}$，没有其它的线性组合能产生$\mathbf{0}$。此时矩阵$\mathbf{A}$可逆。

线性相关和线性无关(举例)

举例

- $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 线性无关， why?
- $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 线性相关， why?

Span、基和子空间(Subspace)

- Span：

$$\text{span}\left[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\right] = \left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m \mid \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{a}_k\right\} = S$$

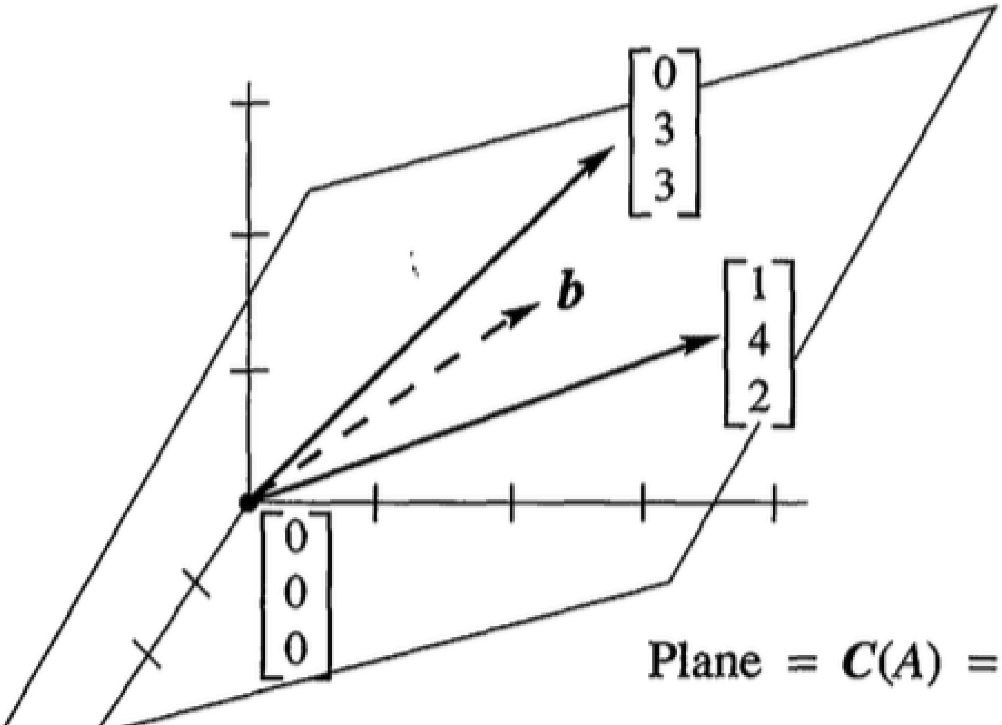
  - $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]$的所有线性组合。此时，如果$[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]$线性无关的，则它们是$S$的一组基(basis)。正交基是指$\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$。
  - S可以有不同的一组基，但是基里向量的个数是相同的，被称为S的维数(dimension)，等于$\text{rank}\left(\mathbf{A}\right)$。一个子空间用一组基就可以表示了！

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \text{span}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$，思考还有其它基吗?

四个基本的子空间(1)

1. 列空间(Column space)（值域、Span）：$C(\mathbf{A})$是$\mathbb{R}^m$(not $\mathbb{R}^n$) 的子空间
   - 定义：包含所有列的线性组合，即$C(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C(\mathbf{A}) = \text{span}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right]$，构成了一个$\mathbf{R}^3$的子空间



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Plane $= C(A) =$ all vectors Ax

四个基本的子空间(2)

- 零空间(Null space)：$N(\mathbf{A})$是$\mathbf{R}^n$(not $\mathbf{R}^m$) 的子空间
  - 定义：$N(\mathbf{A})$ 包含$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$的所有的解的集合
  - 注意：$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的解并不形成一个子空间

求A的零空间的基

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

即$\mathbf{Ux}=\mathbf{0}$，于是有$s_1=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ $s_2=\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$

因此$N(\mathbf{A})=C\left(\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$，是$\mathbf{R}^4$的子空间。

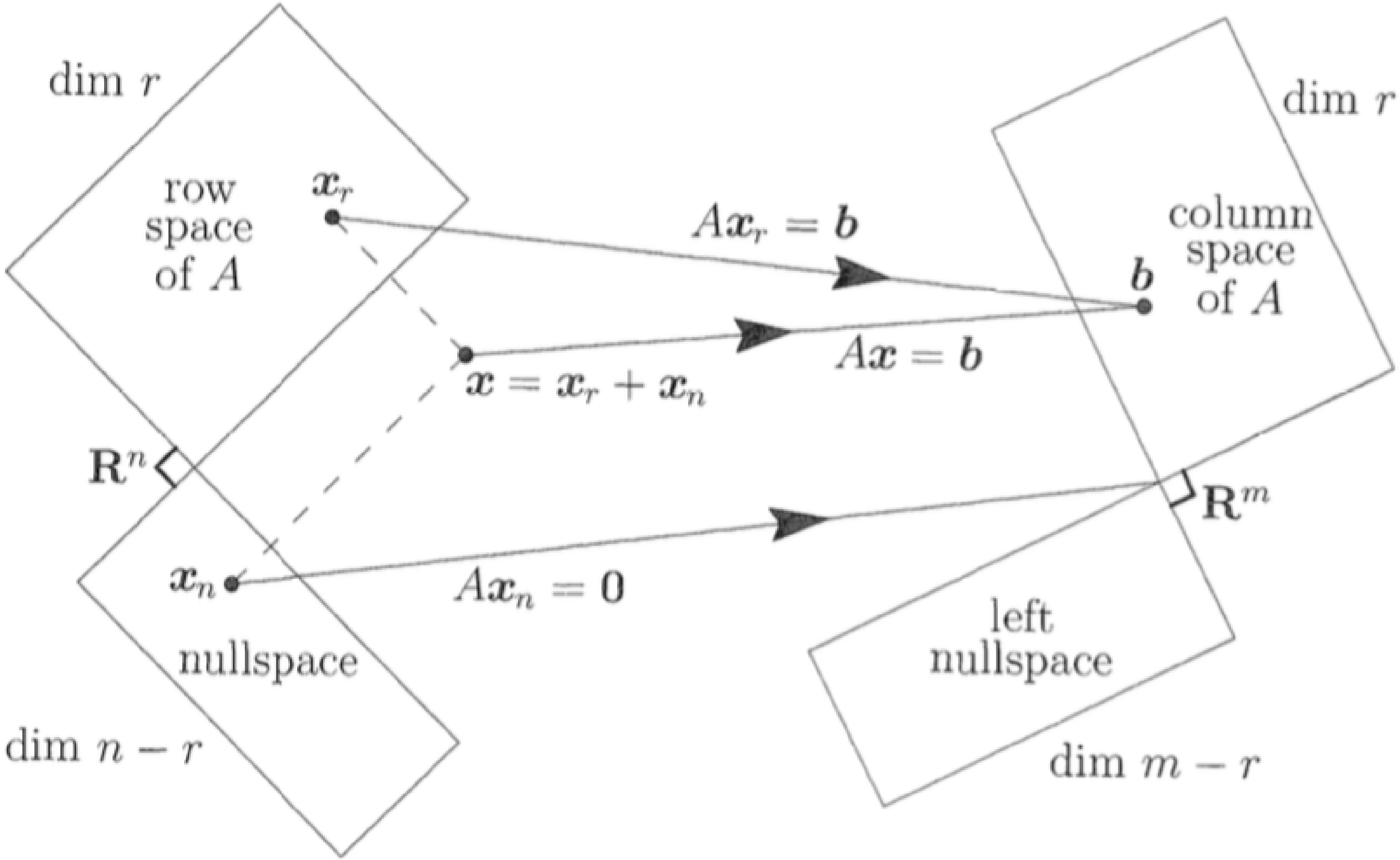
四个基本的子空间(3-4)

- 行空间(Row space)：$C\left(\mathbf{A}^T\right)$是$\mathbf{R}^n$ 的子空间
  - 定义：包含所有行的线性组合

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix}，则 C\left(\mathbf{A}^T\right)=C\left(\begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\8\\6\\16\end{bmatrix}\right)$$

- 左零空间(left null space)：$N\left(\mathbf{A}^T\right)=\left\{\mathbf{A}^T\mathbf{y}=\mathbf{0}\right\}$的解集合，是$\mathbf{R}^m$ 的子空间

四个基本的子空间的关系和特殊情况



利用子空间重新看待线性方程组的解

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$方程的解

- 只有唯一解，则$\mathbf{b} \in C(\mathbf{A})$，$N(\mathbf{A})$的维数是0。
- 有无穷多个解，$\mathbf{b} \in C(\mathbf{A})$，$N(\mathbf{A})$的维数大于0。
- 无解，则$\mathbf{b} \notin C(\mathbf{A})$
- 如果有解，解的形式$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$

1 序言

2 线性代数基本知识(新视角)

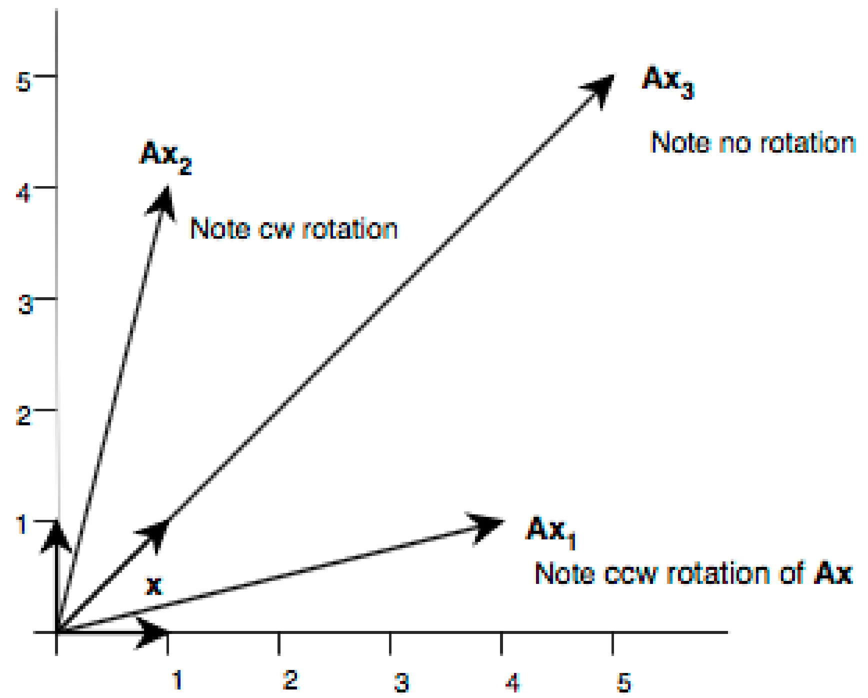
3 特征分解(凸优化中的重要技术)

4 Singular Value Decomposition(SVD)分解与应用(万能矩阵分解)

方阵的特征值(Eigenvalues)与特征向量(Eigenvectors)

$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$几何意义，并思考如何计算$\mathbf{A}^{1000}$

给定一个矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$，对于$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$,则有$\mathbf{Ax}_1=\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$；对于$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，则有$\mathbf{Ax}_3=5\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$



特征分解的性质

特征分解的一般性质

- 对于$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda \mathbf{x}_i$，如果所有的特征值都不相同，则相应的所有的特征向量线性无关。此时，$\mathbf{A}$可以被对角化为

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}. \tag{6}$$

  其中$\mathbf{V} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$，$\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$。思考$\mathbf{A}^{1000}$。

- 思考：所有的方阵都可以对角化吗?

对称矩阵的特征分解(1/2)

- 如果一个对称矩阵的特征值不同，则其相应的所有的特征向量正交($\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T && (7)\\
&= [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} && (8)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T && (9)
\end{aligned}
$$

对称矩阵的特征分解(2/2)

- 对称矩阵的特征值是实数
- 如果$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$是一对称矩阵且rank $r \leq n$，则有

$$\underbrace{|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_r|}_{r} > \underbrace{\lambda_{r+1} = \ldots \lambda_n}_{n-r} = 0 \tag{10}$$

- $\text{Rank}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = \text{Rank}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) = \text{Rank}\left(\mathbf{A}\right) = \text{Rank}\left(\Lambda\right)$
- 思考对于任意矩阵，能否找到一个类似的分解?

二次型(Quadratic Form)

- 给定矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，函数

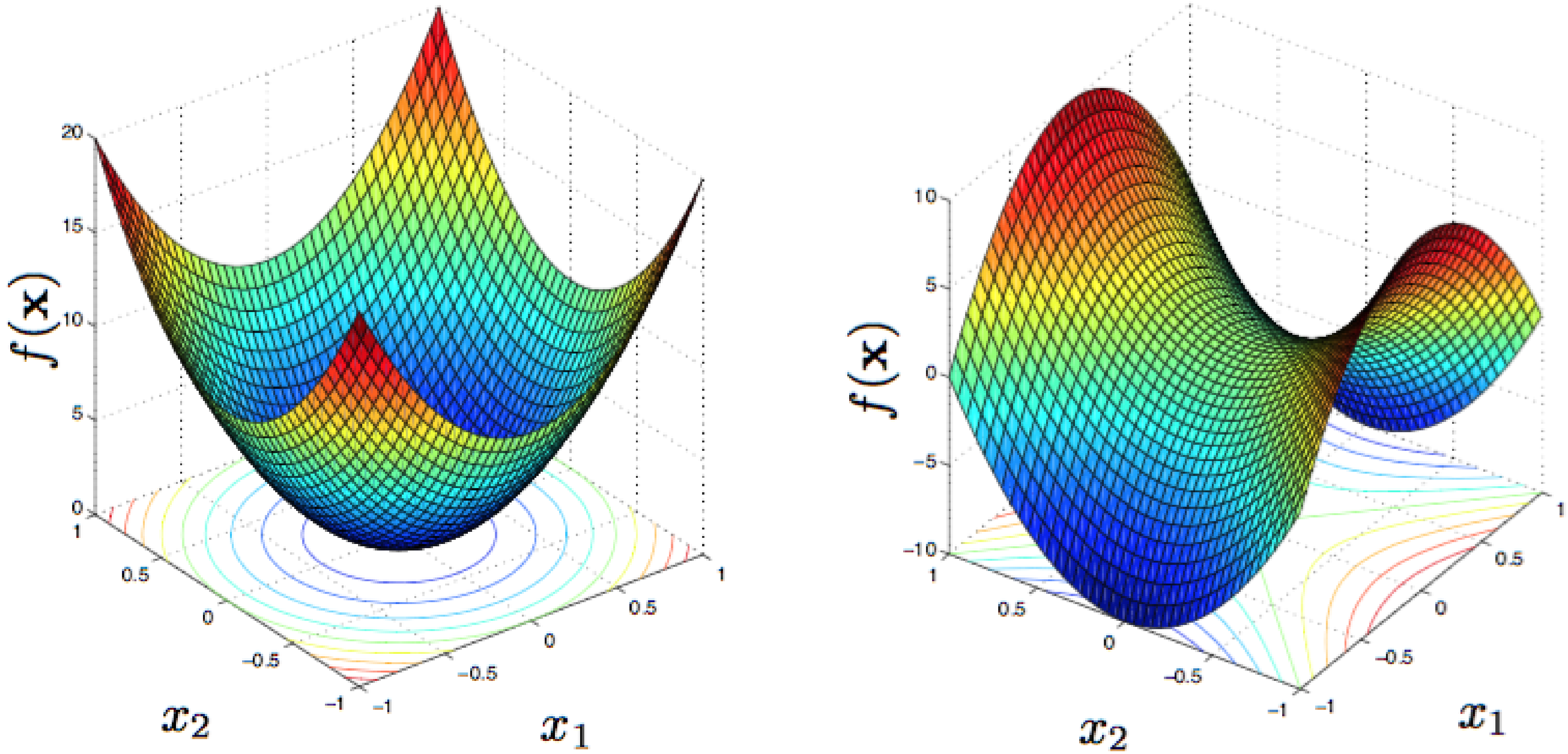
$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum \sum x_i x_j a_{ij} \tag{11}$$

被称为二次型。

- 如果对于所有$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，有$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$，则为半正定矩阵(positive semidefinite)，此时$\lambda(\mathbf{A}) \geq 0$。
- 如果对于所有$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，有$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$，则为正定矩阵(positive definite)。
- 负定矩阵
- 不定矩阵(indefinite)

二次型图形

- 二次函数$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$
- $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x} + 2\mathbf{b}$，$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}$



(a) PSD A.　　(b) indefinite A.

特征分解的应用—PCA本质讲述(1/3)

PCA的本质

- 给定一个矩阵$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，例如

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

选择$k < m$个正交基进行降维的同时又尽量保留原始的信息。即，使得$\mathbf{A}$变换到这组基后，使得行向量间的协方差为0，而每个行向量的方差尽可能大。

- 协方差矩阵(对称半正定)为

$$\mathbf{C}_X = \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i^2 \end{bmatrix}$$

特征分解的应用—PCA本质讲述(2/3)

PCA的本质

- 问题：假设变换矩阵为$\mathbf{Y}=\mathbf{QX}$，并先假设$\mathbf{Q}$是方阵(先不降维)，则有
$$\mathbf{C}_Y=\frac{1}{n}\mathbf{YY}^T=\mathbf{QC}_X\mathbf{Q}^T$$
如何使得$\mathbf{C}_Y$是一个对角矩阵？回忆$\mathbf{C}_X=\mathbf{U\Lambda U}^T\Rightarrow\mathbf{\Lambda}=\mathbf{U}^T\mathbf{C}_X\mathbf{U}$. 如果$\mathbf{Q}=\mathbf{U}^T$？
- 思考如何降维？

特征分解的应用—PCA本质讲述(3/3)

PCA降维举例

1. $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_X=\begin{bmatrix}\frac{6}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{6}{5}\end{bmatrix}$
2. 计算$\mathbf{C}_X$特征值为：$\lambda_1=2$, $\lambda_2=2/5$, 特征值特征向量为$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$, 可验证$\Lambda=\mathbf{U}^T\mathbf{C}_X\mathbf{U}$
3. 降维：$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$
4. 可验证此时$\mathbf{C}_Y=\lambda_1$

SVD分解：特征分解的广义化

任何秩为r的矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，可以被分解为

$$\mathbf{A} = \underbrace{[\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2]}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T} \tag{12}$$

$$= \mathbf{U\Sigma V}^T \tag{13}$$

$$= \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T \tag{14}$$

$$= \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \tag{15}$$

其中$\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$和$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$是正交矩阵。$\sum_1 = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$且有$\sigma_r > 0$。
(13)便于分析，但并不计算有效；(14)计算有效，但有时不方便分析；(15)方便展开，用于低秩矩阵计算。

SVD和特征分解的关系(1/3)

- 已知$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T$，可得

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\Lambda_L\mathbf{U}^T \tag{16}$$

$$\Lambda_L = \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- 结论：$\mathbf{U}$是$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$的特征向量，$\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0 \ldots 0$特征值，即

$$\sigma_k = \sqrt{\lambda_k\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)} = \sqrt{\lambda_k\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)}$$

- 思考：正定矩阵的奇异值分解？

SVD和子空间的关系(1/3)

- 列空间：$C(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= [\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{x} \\
&= [\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \\
&= [\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{U}_1 (\Sigma_1 \mathbf{c}_1)
\end{aligned}
$$

- $C(\mathbf{A}) = C(\mathbf{U}_1)$

SVD和子空间的关系(2/3)

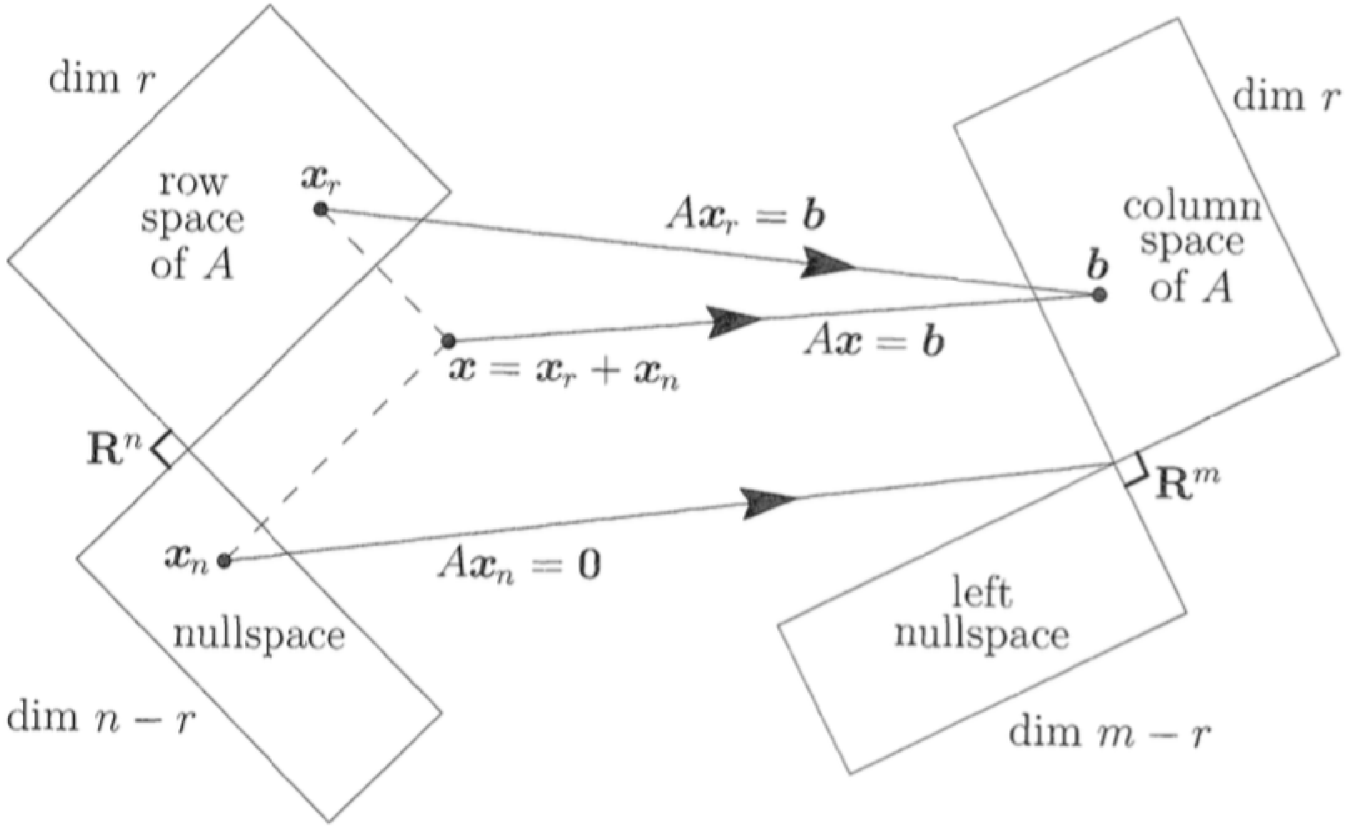
- 零空间： $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \neq \mathbf{0} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
- 设$\mathbf{x} = \mathbf{V}_2\mathbf{c}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= [\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{V}_2$是$N(\mathbf{A})$的正交基
- 思考： $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$的解?

SVD和子空间的关系(3/3)

- $C\left(\mathbf{A}^T\right) = C\left(\mathbf{V}_1\right)$
- $N\left(\mathbf{A}^T\right) = C\left(\mathbf{U}_2\right)$
- SVD提供了计算四个子空间正交基的一种快速方法



低秩矩阵近似(降维)

- 给定矩阵$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$，其秩为$r$，需找一个矩阵$\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m\times n}$，其秩为$k < r$，使其能够最接近$\mathbf{A}$。
- 若$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$，定义

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \tag{17}$$

则有

$$\min_{\mathrm{Rank}(\mathbf{B})=k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1} \tag{18}$$

- 应用：Principal Component Analysis(PCA)，维数减少，数据压缩等等

低秩矩阵近似应用—图像压缩(1/3)

- 给定一副图像，$256 \times 512 = 2^{17}$矩阵
- CT MR 需要图像压缩，希望尽可能无损
- 傅里叶变换(jpeg)，小波(jpeg2000)。
- 考虑用低秩矩阵近似方式：存储$\{\sigma_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i\}_{i=1}^{k}$，$k = 1$时，压缩比大致是$256 \times 512/(256+512) = 170$

低秩矩阵近似应用—图像压缩(2/3)

1 10 80 PCA类似。

低秩矩阵近似应用—图像压缩(3/3)

Example

```
clear all; close all; clc;
a=imread('lena.jpg');
imshow(mat2gray(a))
[m n]=size(a); a=double(a); r=rank(a);
[s v d]=svd(a);
%re=s*v*d';
re=s(:,:)*v(:,1:1)*d(:,1:1)'; figure; imshow(mat2gray(re));
imwrite(mat2gray(re),'1.jpg')
re=s(:,:)*v(:,1:20)*d(:,1:20)'; figure; imshow(mat2gray(re));
imwrite(mat2gray(re),'2.jpg')
re=s(:,:)*v(:,1:80)*d(:,1:80)'; figure; imshow(mat2gray(re));
imwrite(mat2gray(re),'3.jpg')
```

本节课总结和复习(跟着我思考)

谢谢！恳请大家批评指正！