	UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS **DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA** **Curso: Engenharia de Controle e Automação** Disciplina: GAT127 – Laboratório de Sistemas Dinâmicos Professores: Alessandra Rose e Bruno H G Barbosa Prática 1

INTRODUÇÃO

Este roteiro apresenta alguns comandos básicos em Matlab para manipulação de vetores, matrizes e gráficos na direção sinais e sistemas. Será introduzido brevemente operações com números complexos, gráficos de funções trigonométricas, e escala em gráficos. Também serão abordados raízes de polinômios e o método de decomposição em frações parciais.

<u>Comandos básicos em Matlab</u>

Operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e exponenciação podem ser realizadas usando os símbolos +, -, *, / e ^.

O MATLAB predefine i = j = $\sqrt{-1}$ como uma constante complexa. Por exemplo:

```
>> z =  -3-j*4
z = -3.000 – 4.000i
```

atribui a constante complexa –3–*j*4 à variável z.

Os componentes real e imaginário de z podem ser obtidos usando o operador real e imag. No MATLAB, a entrada para uma função é colocada entre parênteses após o nome da função:

```
>> z_real = real(z);
>> z_imag = imag(z);
```

Quando a linha termina com ponto e vírgula, a afirmação é avaliada, mas o resultado não é mostrado na tela. Isto pode ser útil quando se está calculando resultados intermediários. Embora não seja mostrado, o resultado z_real = -3 e z_imag = -4 são calculados e estão disponíveis para operações adicionais.

Existem várias formas de computar o módulo de uma quantidade complexa. A trigonometria afirma que z = –3 – *j*4, que corresponde ao triângulo -3-4-5, tem módulo |z|= |–3 – *j*4|= $\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$ = 5.

O comando sqrt do MATLAB é uma forma de computar a raiz quadrada:

```
>> z_mag = sqrt (z_real^2 + z_imag^2)
z_mag = 5
```

No MATLAB, a maioria dos comandos com sqrt aceitam entradas de várias formas - incluindo constantes, variáveis e funções. De forma mais simples, o MATLAB computa o valor absoluto de uma variável z através do comando abs:

```
>> z_mag = abs(z)
z_mag = 5
```

Além da magnitude, z_mag, notações polares requerem informação de fase. O comando angle fornece o ângulo em radianos de um número complexo.

```
>> z_rad = angle(z)
z_rad = -2.2143
```

O MATLAB também fornece ângulo em graus:

```
>> z_deg = angle(z)*180/pi
z_deg = 126.8699
```

Note que a variável pi = π é pré-definida.

Também é possível obter o ângulo de z usando a função arco-tangente com dois argumentos, atan2, da seguinte forma:

```
>> z_rad – atan2(z_imag,z-real)
z_rad = -2.2143
```

O MATLAB suporta todos os complementos de funções trigonométricas, por exemplo: cos, sin, tan, sec, csc, cot, acos, asin, atan, asec, asinh, atanh, asech, acsch, acoth. O MATLAB também tem suporte para argumentos complexos para qualquer função trigonométrica. Assim como no comando angle, as funções trigonométricas utilizam a unidade radianos.

Funções trigonométricas com argumentos de valores complexos podem contradizer o que sempre foi ensinado em matemática. Por exemplo, uma afirmação comum é que $|\cos(x)| \leq 1$. Enquanto isso é verdadeiro para x real, não é necessariamente verdadeiro para x complexo. Isto pode ser verificado usando:

```
>> cos (j)
ans = 1.5431
```

Da mesa forma, a afirmação de que é impossível obter o logaritmo de um número negativo é falsa em Matlab. Por exemplo, o valor principal de $ln(-1)$ que é $j\pi$, pode ser verificado pela equação de Euler. Logaritmos de base 10 e base exponencial são computados usando os comandos log10 e log, respectivamente. Por exemplo:

```
>> log(-1)
ans = 0 + 3.1416i
```

Operações com vetores

Considere a criação de vetores linha com elementos reais. Para isto, a notação a:b:c é usada, sendo a o valor inicial, b o passo, e c o valor final. Por exemplo:

```
 >> k = 0:2:11
k = 0 2 4 6 8 10
>> k = 11:-10/3:0
k = 11.0000 7.6667 4.3333 1.0000
```

Se o tamanho do passo não é especificado, assume-se o passo igual a 1.

Para visualizar uma solução particular de um vetor deve-se especificar um índice. Por exemplo, o terceiro elemento de k é obtido a partir de:

```
>> k(3)
ans = 4.3333
```

Similarmente, o segundo e o terceiro elementos de k são obtidos a partir de:

```
>> k(2:3)
ans = 7.6667 4.3333
```

O último elemento pode ser obtido por k(end).

A representação por vetores nos permite criar e explorar rapidamente vários sinais. Por exemplo, considere uma senóide de frequência 10Hz descrita por $f(t) = sen(2\pi\, 10t + \pi 6)$. Dois ciclos da senóide são incluídos no intervalo $0 \leq t \leq 0.2$. Um vetor t é usado para representar 500 pontos deste intervalo, i.e.:

```
>> t = 0:0.2/500:0.2-0.2/500;
```

Logo, a função $f(t)$ pode ser avaliada nesses pontos como segue:

```
>> f = sin(2*pi*10*t+pi/6);
```

<u>Gráficos simples</u>

O comando plot é uma maneira conveniente de visualizar dados. O gráfico da função $f(t)$ pode ser obtido a partir de:

```
>> plot(t,f);
```

Rótulos de eixos podem ser adicionados usando:

```
>> xlabel('t'); ylabel('f(t)');
```

O comando title dá título ao gráfico.

O Matlab conecta pontos em um gráfico usando linhas sólidas como padrão. Se adicionarmos, por exemplo, o argumento 'o', temos cada dado representado por um círculo ao invés de linhas conectando os pontos.

```
>> plot(t,f,'o');
```

Alguns comandos importantes para construção de gráficos tridimensionais são plot3, mesh, surf e contour3. A sintaxe para utilização desses comandos pode ser verificada acessando o *Help* do Matlab a partir dos comandos:

```
>> help plot3
>> help mesh
>> help surf
>> help contour3
```

ou acessando *Help – Product help*.

Os comandos semilogx, semilogy e loglog operam como o comando plot, mas usam escala logarítmica para os eixos das abscissas e ordenadas.

Operações com matrizes

Dados valores inteiros m , n , e o vetor x . A função eye(m) cria uma matriz identidade m x m . As funções zeros(m,n) e ones(m,n) criam matrizes m x n com elementos iguais a 0 e 1, respectivamente. A função diag(x) transforma o vetor x em uma matriz diagonal. Em geral, a criação de vetores e matrizes requer a especificação de cada um dos elementos.

Considere o vetor $r = [\,1\ 0\ 0\,]$ e a matriz A , $\mathbf{3}$ x $\mathbf{2}$, cuja primeira coluna é $[\,2\ 4\ 0\,]^T$, e a segunda coluna é $[\,3\ 5\ 6\,]^T$.

```
>> r = [1 0 0]
r = 1 0 0
>> A = [2 3; 4 5; 0 6]
A = 2 3
    4 5
   0 6
```

Vetores linha podem ser transformados em vetores coluna. O vetor coluna c pode ser obtido a partir do vetor linha r usando a operação de transposição:

```
>> c = r'
c = 1
    0
    0
```

Podemos concatenar o vetor c e a matriz A usando o comando:

```
>> B = [c A]
B = 1 2 3
    0 4 5
    0 0 6
```

O elemento da primeira linha e segunda coluna de B pode ser acessado através de:

```
>> B(1,2)
ans = 2
```

Podemos ainda selecionar a segunda linha inteira de B usando:

```
>> B(2,:)
ans = 0 4 5
```

O determinante e a inversa de uma matriz podem ser obtidos a partir dos comandos det e inv, respectivamente.

Expansão em frações parciais

Existem várias técnicas para computar a expansão em frações parciais de uma função racional $F(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$. Uma situação comum em análise de sistemas dinâmicos em que precisamos expandir uma função racional em frações parciais é quando queremos obter a resposta no domínio do tempo contínuo a partir de uma função de transferência e da tabela de transformadas de Laplace. Em Matlab usamos a função residue, cuja forma básica é:

```
>> [R,P,K] = residue(B,A)
```

Os dois vetores de entrada B e A especificam os coeficientes dos polinômios do numerador e denominador, respectivamente. O vetor R contém os coeficientes de cada fração parcial; o vetor P contém as raízes correspondentes de cada fração parcial. Para uma raiz repetida r vezes, as r frações parciais são ordenadas em potências ascendentes. Quando a função racional não é própria, o vetor K contém os termos diretos que são ordenados em potências descendentes da variável independente.

Considere encontrar a expansão em frações parciais de:

$$F(x) = \frac{x^5 + \pi}{x^4 - \sqrt{8}x^3 + \sqrt{32}x - 4}$$

Note que é complicado obter o resultado desta expansão à mão. Em Matlab, podemos encontrar a solução fazendo:

```
>> [R,P,K] = residue([1 0 0 0 0 pi],[1 –sqrt(8) 0 sqrt(32) -4])
R = 7.8888 5.9713 3.1107 0.1112
P = 1.4142 1.4142 1.4142 -1.4142
K = 1.0000 2.8284
```

Escrito na forma padrão, a expansão em fração parcial de $F(x)$ é:

$$F(x) = x + 2.8284 + \frac{7.8888}{x - \sqrt{2}} + \frac{5.9713}{(x - \sqrt{2})^2} + \frac{3.1107}{(x - \sqrt{2})^3} + \frac{0.1112}{x + \sqrt{2}}$$

Números complexos e conversão de coordenadas

Um número complexo (a, b) ou $a + jb$ pode ser representado graficamente por um ponto cujas coordenadas Cartesianas são (a, b) em um plano complexo. Denotemos este número complexo z de tal forma que:

$$z = a + jb$$

Os números a (abscissa) e b (ordenada) referem-se respectivamente às partes real e imaginária de z. As partes real e imaginária de z podem ser expressas como:

$$Re\ z = a$$
$$Im\ z = b$$

Números complexos podem ser expressos em termos de coordenadas polares. Se (r, θ) são as coordenadas polares de um ponto $z = a + jb$, então:

$$z = a + jb = r\cos\theta + jr\,sen\,\theta = r(\cos\theta + j\,sen\,\theta)$$

A formula de Euler diz que:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsen(\theta)$$

Logo, números complexos podem ser expressos na forma Cartesiana $a + jb$ ou na forma polar usando r e $j\theta$ tal que:

$$a = r\cos\theta;\quad b = r\,\mathrm{sen}\,\theta;\; r = \sqrt{a^2 + b^2};\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Note que r é a distancia do ponto z até a origem. Por esta razão, r é também chamado de magnitude (ou valor absoluto) de z e é denotado $|z|$. Similarmente, θ é chamado de ângulo de z e é denominado de $\measuredangle z$.

<u>Exemplos</u>

1) Expresse o número $2 + j3$ na forma polar.

$$|z| = r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$
$$\measuredangle z = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.3^{o}$$

Podemos escrever $2 + j3 = \sqrt{13}\, e^{j56.3}$.

Em Matlab, podemos converter os sistemas de coordenadas a partir dos comandos cart2pol e pol2cart. Por exemplo:

```
>> [z_rad, z_mag] = cart2pol(2,3);
>> z_deg = z_rad*(180/pi);
>> disp([‘z_mag = ‘, num2str(z_mag),’; z_rad = ‘,num2str(z_rad),’;  z_deg =
‘,num2str(z_deg)]);

z_mag = 3.6056; z_rad = 0.98279; z_deg = 56.3099
```

Logo, $z = 2 + j3 = 3.6056\, e^{j0.98279} = 3.6056\, e^{j56.3099^{o}}$

2) Converta $z = 4e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ para a forma Cartesiana:

```
>> [z_real,z_imag] = pol2cart(-3*pi/4,4);
>> disp([‘z_real = ‘,num2str(z_real),’; z_imag =
‘,num2str(z_imag)]);
z_real = -2.8284; z_imag = -2.8284
```

Logo, $z = 4e^{-j\frac{3\pi}{4}} = -2.8284 - j2.8284$.

.Adição de senóides

Duas senóides de mesma frequência, mas de diferentes fases podem ser adicionadas para formar uma única senóide de mesma frequência. Este fato pode ser constatado a partir da identidade trigonométrica:

$$C\cos(w_0t+\theta) = C\cos\theta\, cos w_0 t - C\,\mathrm{sen}\,\theta\, sen w_0 t = a\cos\ w_0 t + b\ sen\ w_0 t$$

Onde $a = C\cos\theta$; e $b = -C\,\mathrm{sen}\,\theta$. Consequentemente, $C = \sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}$; e $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. A Figura 1 mostra que C e θ são a magnitude e o ângulo, respectivamente, de um número complexo $a - jb$. Em outras palavras $a - jb = Ce^{j\theta}$. Para encontrar C e θ , podemos converter $a - jb$ para a forma polar. A magnitude e o ângulo do número polar resultante são C e θ , respectivamente.

A adição de senóides de mesma frequência pode ser clarificada pelo uso de fasores que representam as senóides. Representamos uma senóide $C\cos[(w]_0 t+\theta)$ por um fasor de comprimento C e ângulo θ com o eixo horizontal. A senóide $a\cos\ w_0 t$ é representada por um fasor horizontal de comprimento a $(\theta = \mathbf{0})$, enquanto $b\ sen\ w_0 t = b\cos[\,(w]_0 t - \frac{\pi}{2})$ é representada por um fasor vertical de comprimento b e um ângulo de $-\frac{\pi}{2}$ com a horizontal. A adição destes dois fasores resulta em um fasor de comprimento C e ângulo θ como mostrado na figura 1.

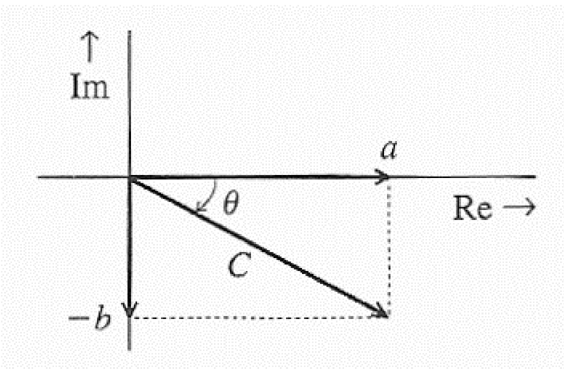

Figura 1 – Adição de fasores de senóides

.Exemplo

Expresse $x(t) = \cos(w_0 t) - \sqrt{3}\ sen(w_0 t)$ como uma senóide única.

Neste caso, $a = \mathbf{1}$, $b = -\sqrt{\mathbf{3}}$ e:

$$C = \sqrt{\mathbf{1^2} + (\sqrt{\mathbf{3}})^{\mathbf{2}}} = \mathbf{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60_{o}$$

Logo, $x(t) = 2\cos(w_0 t + 60)$. A amplitude C e o ângulo θ da senóide resultante são a magnitude e o ângulo do número complexo $1 - j\sqrt{3}$. Em Matlab:

```
>> a = 1; b = sqrt(3);
>> [theta,C] = cart2pol(a,-b);
>> theta_deg = (180/pi)*theta;
>> disp(['C = ', num2str(C), '; theta = ',
num2str(theta), '; theta_deg = ', num2str(theta_deg)]);

C = 2; theta = -1.0472; theta_deg = -60
```

EXERCÍCIOS

1) Dado as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 5 & -2 & 1 \\ -8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$.
   a. Determine se A e B são matrizes quadradas. PS.: O algoritmo deve ser válido para avaliar matrizes de quaisquer dimensões.
   b. Quais elementos contêm o valor 2?
   c. Quais elementos contêm valores negativos?

2) Determine a expressão para uma senóide exponencialmente convergente que oscila 3 vezes por segundo e cuja amplitude decresce com uma função exponencial e^{-2t}. Trace o gráfico do sinal entre -10 ≤ t ≤ 10.

3) Trace o gráfico de $x(t) = \cos(t)sen(20t)$. Escolha uma faixa para t .

4) Decomponha em frações parciais:
   a. $F(s) = \dfrac{6(s+1)}{s\,(s+4.46)(s+0.13)}$
   b. $F(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$

   Mostre as funções decompostas obtidas na janela de comando.

BIBILOGRAFIA

Leite, Daniel F.. Engenharia de Controle e Automação - ELT064 - Oficina de Sistemas Dinâmicos Lineares. Belo Horizonte: UFMG, 2012. Apostila