一、（15 分）设有两类正态分布的样本集，第一类均值为 $\mu_1=(2,0)^T$，方差

$\Sigma_1=\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}$，第二类均值为 $\mu_2=(2,2)^T$，方差 $\Sigma_2=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}$，先验概率

$p(\omega_1)=p(\omega_2)$，试求基于最小错误率的贝叶斯决策分界面。

解 根据后验概率公式 $p(\omega_i|x)=\dfrac{p(x|\omega_i)p(\omega_i)}{p(x)}$，（2’）

及正态密度函数 $p(x|\omega_i)=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2\pi}\,|\Sigma_i|^{1/2}}\exp[-(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)/2]$ ，$i=1,2$。（2’）

基于最小错误率的分界面为 $p(x|\omega_1)p(\omega_1)=p(x|\omega_2)p(\omega_2)$，（2’）

两边去对数，并代入密度函数，得

$$-(x-\mu_1)^T\Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)/2-\ln|\Sigma_1|=-(x-\mu_2)^T\Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)/2-\ln|\Sigma_2| \quad (1) \quad (2’)$$

由已知条件可得 $|\Sigma_1|=|\Sigma_2|$，$\Sigma_1^{-1}=\begin{bmatrix}4/3 & -2/3\\ -2/3 & 4/3\end{bmatrix}$，$\Sigma_2^{-1}=\begin{bmatrix}4/3 & 2/3\\ 2/3 & 4/3\end{bmatrix}$，（2’）

设 $x=(x_1,x_2)^T$，把已知条件代入式（1），经整理得

$x_1x_2-4x_2-x_1+4=0$，（5’）

二、（15 分）设两类样本的类内离散矩阵分别为 $S_1=\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}$，

$S_2=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}$，各类样本均值分别为 $\mu_1=(1,0)^T$，$\mu_2=(3,2)^T$，试用 fisher 准

则求其决策面方程，并判断样本 $x=(2,2)^T$ 的类别。

解：$S=S_1+S_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ （2’）

投影方向为 $w^*=S^{-1}(\mu_1-\mu_2)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}$ （6’）

阈值为 $y_0=w^{*T}(\mu_1+\mu_2)/2=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=-3$ （4’）

给定样本的投影为 $y = w^{*T} x = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -4 < y_0$， 属于第二类 **(3 ’)**

三、 （**15** 分）给定如下的训练样例

实例	x0	x1	x2	t(真实输出)
1	1	1	1	1
2	1	2	0	1
3	1	0	1	-1
4	1	1	2	-1

用感知器训练法则求感知器的权值，设初始化权值为 $w_0 = w_1 = w_2 = 0$ ；

1 第 1 次迭代

w			$x^{(p)}$			$t^{(p)}$	$y^{(p)}$	Δw		
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	2	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	-1	1	-1	0	-1
-1	0	-1	1	1	2	-1	-1	0	0	0

（4 ）

2 第 2 次迭代

-1	0	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1
0	1	0	1	2	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	-1	1	-1	0	-1
-1	1	-1	1	1	2	-1	-1	0	0	0

（2 ）

3 第 3 和 4 次迭代

-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1
0	2	0	1	2	0	1	1	0	0	0
0	2	0	1	0	1	-1	1	-1	0	-1
-1	2	-1	1	1	2	-1	-1	0	0	0
-1	2	-1	1	1	1	1	1	0	0	0
-1	2	-1	1	2	0	1	1	0	0	0
-1	2	-1	1	0	1	-1	-1	0	0	0

四、 （**15** 分）

i. 推导正态分布下的最大似然估计；

ii. 根据上步的结论，假设给出如下正态分布下的样本 {1，1.1，1.01，0.9，0.99}，估计该部分的均值和方差两个参数。

1 设样本为 K= { x1, x2， ⋯xN} ，

正态密度函数 $p(x|\omega_i)=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2\pi}\,|\Sigma_i|^{1/2}}\exp[-(x-\mu_i)^T\Sigma_i^{-1}(x-\mu_i)/2]$ **(2’)**

则似然函数为

$$
\begin{aligned}
l(\theta)&=p(K\mid\theta)=p(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_N\mid\theta)\\
&=\prod_{k=1}^{N}p(\mathbf{x}_k\mid\theta)
\end{aligned}
$$
(2’)

对数似然函数 $H(\theta)=\sum_{k=1}^{N}\ln p(\mathbf{x}_k\mid\theta)$ **(2’)**

最大似然估计

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{ML}&=\arg\max_{\theta} l(\theta)\\
&=\arg\max_{\theta}\sum_{k=1}^{n}\ln p(\mathbf{x}_k\mid\theta)
\end{aligned}
$$
(2’)

对于正态分布 $\hat{\mu}_{ML}=\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k$，$\hat{\sigma}^2_{ML}=\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\hat{\mu})^2$ **(2’)**

2 根据 1 中的结果 $\hat{\mu}_{ML}=\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k=1$，$\hat{\sigma}^2_{ML}=\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\hat{\mu})^2=0.00404$ **(5’)**

五、 （**15** 分） 给定样本数据如下： $(-6,-6)^T$，$(6,6)^T$

（1） 对其进行 PCA 变换

（2） 用（1）的结果对样本数据做一维数据压缩

解（1）PCA 变换

1 求样本总体均值向量 $\mu=(-6,-6)^T+(6,6)^T=(0,0)^T$

2 求协方差矩阵 $R=[(-6,-6)^T(-6,-6)+(6,6)^T(6,6)]/2=\begin{bmatrix}36 & 36\\ 36 & 36\end{bmatrix}$ **(2’)**

3 求特征根，令 $\begin{vmatrix}36-\lambda & 36\\ 36 & 36-\lambda\end{vmatrix}=0$，得 $\lambda_1=72$，$\lambda_2=0$。 **(1’)**

由 $R\varphi_i=\lambda_i\varphi_i$，得特征向量 $\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}/\sqrt{2}$，$\varphi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}/\sqrt{2}$ **(2’)**

则 PCA 为 $[\varphi_1,\varphi_2]\begin{bmatrix}-6\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\sqrt{2}\\-6\sqrt{2}\end{bmatrix}$，$[\varphi_1,\varphi_2]\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\sqrt{2}\\6\sqrt{2}\end{bmatrix}$ **(5’)**

（2）要做一维压缩，就是向最大特征根对应的特征向量做投影，得

$-6\sqrt{2}$ ，$6\sqrt{2}$ **(5** ' ）

六、（**10** 分）已知 4 个二维样本：$x_1=(0,0)^T$，$x_2=(0,1)^T$，$x_3=(1,2)^T$，$x_4=(4,3)^T$。试用层次聚类把样本分成 2 类。

解：1 初始将每一个样本视为一类，得 $G_1^0=\{x_1\}$，$G_2^0=\{x_2\}$，$G_3^0=\{x_3\}$，$G_4^0=\{x_4\}$

计算各类间的距离，得到距离矩阵 D^0，**(2** ' ）

D^0	$G_1^0=\{x_1\}$	$G_2^0=\{x_2\}$	$G_3^0=\{x_3\}$	$G_4^0=\{x_4\}$
$G_1^0=\{x_1\}$	0	1	$\sqrt{5}$	5
$G_2^0=\{x_2\}$	1	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$
$G_3^0=\{x_3\}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{10}$
$G_4^0=\{x_4\}$	5	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	0

2 将最短距离 1 对应的类 $G_1^0=\{x_1\}$，$G_2^0=\{x_2\}$ 合并为一类，得到新的分类： **(4** ' ）

$G_{12}^1=\{G_1^0,G_2^0\}$，$G_3^1=\{G_3^0\}$，$G_4^1=\{G_4^0\}$

计算各类间的欧式距离，得到距离矩阵 D^1 **(2)**'

D^1	$G_{12}^1=\{G_1^0,G_2^0\}$	$G_3^1=\{G_3^0\}$	$G_4^1=\{G_4^0\}$
$G_{12}^1=\{G_1^0,G_2^0\}$	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$
$G_3^1=\{G_3^0\}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{10}$
$G_4^1=\{G_4^0\}$	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	0

3 将距离最小两类 $G_{12}^1=\{G_1^0,G_2^0\}$ 和 $G_3^1=\{G_3^0\}$ 合并为一类，得到新的分类

$G_{123}^2=\{G_1^0,G_2^0,G_3^0\}$，$G_4^2=\{G_4^0\}$

聚类结束，结果为

$\omega_1=\{x_1,x_2,x_3\}$，$\omega_2=\{x_4\}$ **(2** ' ）

七、 （**10** 分） 已知 4 个二维样本： $x_1=(0,0)^T$， $x_2=(1,0)^T$， $x_3=(6,4)^T$， $x_4=(7,5)^T$， $x_5=(10,9)^T$。取 K=3，用 K 均值算法做聚类

解：

1 K=3， 初始化聚类中心， $z_1(1)=x_1=(0,0)^T$， $z_2(1)=x_3=(6,4)^T$， $z_3(1)=x_5=(10,9)^T$ **(2** ’）

2 根据中心进行分类，得 $\omega_1=\{x_1,x_2\}$， $\omega_2=\{x_3,x_4\}$， $\omega_3=\{x_5\}$ **(2** ’）

3 更新聚类中心， $z_1(2)=(x_1+x_2)/2=(1/2,0)^T$， $z_2(2)=(x_3+x_4)/2=(6,4)^T+(7,5)^T=(13/2,9/2)^T$， $z_3(2)=x_5=(10,9)^T$ **(4** ’）

4 根据新的中心进行分类，得 $\omega_1=\{x_1,x_2\}$， $\omega_2=\{x_3,x_4\}$， $\omega_3=\{x_5\}$，分类已经不再变化， 因此最后的分类结果为 $\omega_1=\{x_1,x_2\}$， $\omega_2=\{x_3,x_4\}$， $\omega_3=\{x_5\}$ **(2** ’）

八、 （**10** 分） 设论域 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，给定 X 上的一个模糊关系 $\tilde{R}$，其模糊矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.8 & 0.2\\ 0.8 & 1 & 0.85 & 0.2\\ 0.8 & 0.85 & 1 & 0.2\\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1\end{bmatrix}$$

（1） 判断该模糊矩阵式模糊相似矩阵还是模糊等价矩阵

（2） 按不同的置信水平 $\lambda=0.9,0.8$ 给出分类结果

解：（1）因为 $R\circ R=R$ （计算过程 ），是模糊等价矩阵 **(6** ’）

（2） $R_{0.9}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，聚类结果为 $\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\}$ **(2** ’）

$R_{0.8}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，聚类结果为 $\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4\}$ **(2** ’）