1． 根据贝叶斯决策理论，1 维特征空间中的平均误差概率可以表示为：

$$P(error)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(error,x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}P(error|x)\,p(x)\,dx \tag{1}$$

而对于特定的观察特征 x 两类问题的错误率为：

$$P(error|x)=\min\left[P(w_1|x),P(w_2|x)\right]$$

a) 对于两类问题有：

$$P(w_1|x)+P(w_2|x)=1$$

以及：

$$p(error|x)=\min\left[p(w_1|x),p(w_2|x)\right]\le\frac{1}{2}$$

因此我们可以得到：

$$p(error|x)-2\left[p(error|x)\right]^2\ge0$$

$$\Rightarrow p(error|x)\le p(error|x)+p(error|x)-2\left[p(error|x)\right]^2$$

$$=2p(error|x)\left[1-p(error|x)\right]$$

$$=2\min\left[p(w_1|x),p(w_2|x)\right]\max\left[p(w_1|x),p(w_2|x)\right]$$

$$=2p(w_1|x)\,p(w_2|x)$$

即对 $\forall x$ 有： $p(error|x)=\min\left[p(w_1|x),p(w_2|x)\right]\le2p(w_1|x)\,p(w_2|x)$

因此：

$$p(error)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(error|x)\,p(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\left[p(w_1|x),p(w_2|x)\right]p(x)\,dx$$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}2p(w_1|x)\,p(w_2|x)\,p(x)\,dx$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}2p(w_1|x)\,p(w_1|x)\,p(x)\,dx$给出了总误差率的上界。

b) 取一个特殊的概率分布： $p(w_1|x)\equiv p(w_2|x)\equiv\frac{1}{2}$， $\forall x$，则有：

$$p_a(error)=\int_{-\infty}^{+\infty}a\,p(w_1|x)\,p(w_2|x)\,p(x)\,dx=\frac{a}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx<\frac{1}{2}\text{（因为}a<2\text{）}$$

$$p(error)=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\left[p(w_1|x),p(w_2|x)\right]p(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

显而易见： $p_a(error)<p(error)$，因此当 $a<2$ 时，无法得到误差率的上界。

c) 因为：

$$p(error|x) \geq p(error|x) - \left[p(error|x)\right]^2$$

$$= p(error|x)\left[1 - p(error|x)\right]$$

$$= \min\left[p(w_1|x), p(w_2|x)\right]\max\left[p(w_1|x), p(w_2|x)\right]$$

$$= p(w_1|x)\,p(w_2|x)$$

即 $\forall x$ 有： $p(error|x) = \min\left[p(w_1|x), p(w_2|x)\right] > p(w_1|x)\,p(w_2|x)$

所以：

$$p(error) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(error|x)\,p(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \min\left[p(w_1|x), p(w_2|x)\right] p(x)\,dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{+\infty} p(w_1|x)\,p(w_2|x)\,p(x)\,dx$$

因此，$\int_{-\infty}^{+\infty} p(w_1|x)\,p(w_2|x)\,p(x)\,dx$ 能够给出总误差率的下界。

d) 当 $b \geq 2$ 时，由 a)的结论，显然 $\min\left[p(w_1|x), p(w_2|x)\right] \leq b\,p(w_1|x)\,p(w_2|x)$，因此无法给出误差率的下界。

当 $2 > b > 1$ 时，取一个特殊的概率分布，$1 \geq P(w_1|x) > \frac{1}{b}$，因此：

$$0 \leq P(w_2|x) < \left(1 - \frac{1}{b}\right)。$$

同时：

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{2} > \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

所以： $p(w_1|x) > p(w_2|x)$

而：

$$b\,P(w_1|x)\,P(w_2|x) > b\,\frac{1}{b}\,P(w_2|x) = P(w_2|x) = \min\left[p(w_1|x), p(w_2|x)\right]$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} b\,p(w_1|x)\,p(w_2|x)\,p(x)\,dx$，当 $b > 1$ 时无法给出总误差率的下界。