》》 **1.** 设有 **10** 个二维模式样本，如图 **2.13** 所示。若 $\theta = 1/2$，试用最大最小距离算法对他们进行聚类分析。

解：① 取 $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{X}_1 = [0,0]^T$。

② 选离 $\mathbf{Z}_1$ 最远的样本作为第二聚类中心 $\mathbf{Z}_2$。

$$D_{21} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2},\quad D_{31} = \sqrt{8},\quad D_{41} = \sqrt{58},\quad D_{51} = \sqrt{45}$$

$$D_{61} = \sqrt{52},\quad D_{71} = \sqrt{74},\quad D_{81} = \sqrt{45},\quad D_{91} = \sqrt{58},\quad D_{10,1} = \sqrt{65}$$

∵ 最大者为 $D_{71}$，∴ $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{X}_7 = [5,7]^T$

$$T = \theta\left|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2\right| = \frac{1}{2}\sqrt{74}$$

③ 计算各样本与 $\{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2\}$ 间距离，选出其中的最小距离。

$$D_{12} = \sqrt{74},\quad D_{22} = \sqrt{52},\quad D_{32} = \sqrt{34},\quad \cdots,\quad D_{10,2} = \sqrt{13}$$

$$\min(D_{i1}, D_{i2}) = \{0, \sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, 0, \sqrt{17}, \sqrt{20}, \sqrt{13}\}$$

④ $\because \max\{\min(D_{i1}, D_{i2})\} = \sqrt{20} = D_{92} > T = \frac{1}{2}\sqrt{74}$，$\therefore$ $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{X}_9 = [7,3]^T$

⑤ 继续判断是否有新的聚类中心出现：

$$\begin{cases} D_{11} = 0 \\ D_{12} = \sqrt{74} \\ D_{13} = \sqrt{58} \end{cases},\quad \begin{cases} D_{21} = \sqrt{2} \\ D_{22} = \sqrt{52} \\ D_{23} = \sqrt{40} \end{cases},\quad \cdots \begin{cases} D_{10,1} = \sqrt{65} \\ D_{10,2} = \sqrt{13} \\ D_{10,3} = \sqrt{1} \end{cases}$$

$$\min(D_{i1}, D_{i2}, D_{i3}) = \{0, \sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, 0, 1, 0, 1\}$$

$$\max\{\min(D_{i1}, D_{i2}, D_{i3})\} = \sqrt{8} = D_{31} < T = \frac{1}{2}\sqrt{74}$$

寻找聚类中心的步骤结束。

⑥ 按最近距离分到三个聚类中心对应的类别中：

$$\omega_1 : \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\ ;\ \omega_2 : \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6, \mathbf{X}_7\ ;\ \omega_3 : \mathbf{X}_8, \mathbf{X}_9, \mathbf{X}_{10}$$

》》**4.1** 分别写出以下两种情况下，最小错误率贝叶斯决策规则：

（1）两类情况，且 $p(\mathbf{X}|\omega_1)=p(\mathbf{X}|\omega_2)$。

（2）两类情况，且 $P(\omega_1)=P(\omega_2)$。

解：最小错误率贝叶斯决策规则为：

$$\text{若 } p(\mathbf{X}|\omega_i)P(\omega_i)=\max\{p(\mathbf{X}|\omega_j)P(\omega_j),\ j=1,2,\cdots,M\}，\text{则 } \mathbf{X}\in\omega_i$$

两类情况时为：

$$\text{若 } p(\mathbf{X}|\omega_1)P(\omega_1)>p(\mathbf{X}|\omega_2)P(\omega_2)，\text{则 } \mathbf{X}\in\omega_1$$

$$\text{若 } p(\mathbf{X}|\omega_1)P(\omega_1)<p(\mathbf{X}|\omega_2)P(\omega_2)，\text{则 } \mathbf{X}\in\omega_2$$

(1) 当 $p(\mathbf{X}|\omega_1)=p(\mathbf{X}|\omega_2)$，变为：

$$\text{若 } P(\omega_1)>P(\omega_2)，\text{则 } \mathbf{X}\in\omega_1$$

$$\text{若 } P(\omega_1)<P(\omega_2)，\text{则 } \mathbf{X}\in\omega_2$$

(2) 当 $P(\omega_1)=P(\omega_2)$ 时，变为：

$$\text{若 } p(\mathbf{X}|\omega_1)>p(\mathbf{X}|\omega_2)，\text{则 } \mathbf{X}\in\omega_1$$

$$\text{若 } p(\mathbf{X}|\omega_1)<p(\mathbf{X}|\omega_2)，\text{则 } \mathbf{X}\in\omega_2$$

》》**4.3** 设以下模式类具有正态概率密度函数：

$$\omega_1:\ \mathbf{X}_1=[0,0]^T，\ \mathbf{X}_2=[2,0]^T，\ \mathbf{X}_3=[2,2]^T，\ \mathbf{X}_4=[0,2]^T$$

$$\omega_2:\ \mathbf{X}_5=[4,4]^T，\ \mathbf{X}_6=[6,4]^T，\ \mathbf{X}_7=[6,6]^T，\ \mathbf{X}_8=[4,6]^T$$

（1）设 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=0.5$，求两类模式之间贝叶斯判别界面的方程式。

（2）绘出判别界面。

解：(1)由

$$\mathbf{M}_i=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}\mathbf{X}_{ij}，\quad \mathbf{C}_i=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}\mathbf{X}_{ij}\mathbf{X}_{ij}^T-\mathbf{M}_i\mathbf{M}_i^T$$

得均值向量和协方差矩阵分别为：

$$\mathbf{M}_1=\frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right\}=[1,\ \ 1]^T$$

$$\mathbf{M}_2=\frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right\}=[5,\ \ 5]^T$$

$$\mathbf{C}_1=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(0\ \ 0)+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}(2\ \ 0)+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}(2\ \ 2)+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}(0\ \ 2)\right]-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1\ \ 1)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}(4\ \ 4)+\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}(6\ \ 4)+\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}(6\ \ 6)+\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}(4\ \ 6)\right]-\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}(5\ \ 5)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}16&16\\16&16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}36&24\\24&16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}36&36\\36&36\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16&24\\24&36\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}25&25\\25&25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

即 $\mathbf{C}_1=\mathbf{C}_2=\mathbf{I}$，可求得 $\mathbf{C}_1^{-1}=\mathbf{C}_2^{-1}=\mathbf{I}$。又由于 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=0.5$，有

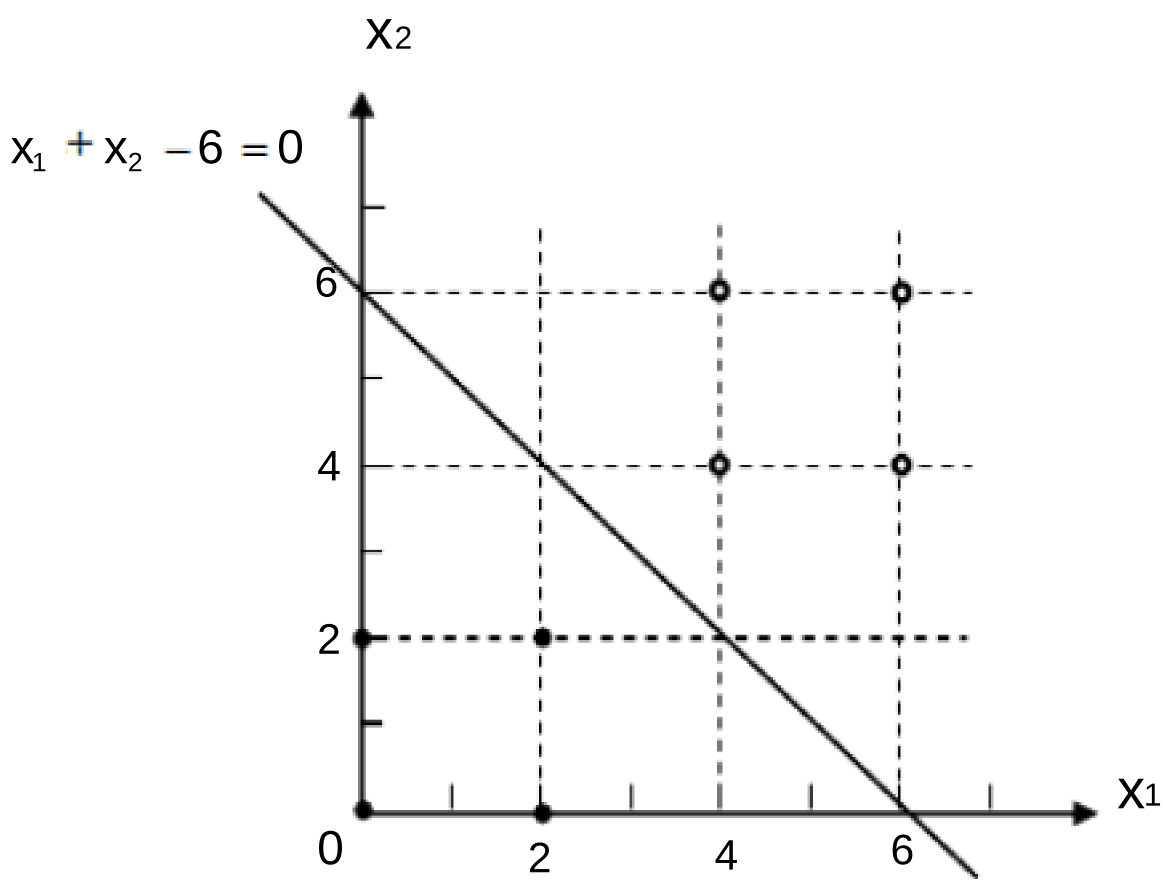
$$d_1(\mathbf{X})-d_2(\mathbf{X})=(\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2)^T\mathbf{X}-\frac{1}{2}(\mathbf{M}_1^T\mathbf{M}_1-\mathbf{M}_2^T\mathbf{M}_2)$$

$$=[1-5,\quad 1-5]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\left([1,\quad 1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-[5,\quad 5]\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}\right)$$

$$=-4x_1-4x_2+24$$

由 $d_1(\mathbf{X})-d_2(\mathbf{X})=0$ 得判别界面为： $x_1+x_2-6=0$

(2)判别界面如解图 4.1 所示：




》》**5.1** 假定 $\omega_i$ 类的样本集为 $\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4\}$，它们分别为

$$\mathbf{X}_1=[2,2]^T,\quad \mathbf{X}_2=[3,2]^T,\quad \mathbf{X}_3=[3,3]^T,\quad \mathbf{X}_4=[4,2]^T$$

（1） 求类内散布矩阵；

（2） 求类内散布矩阵的特征值和对应的特征向量；

（3） 求变换矩阵 A，将二维模式变换为一维模式。

解：（1） $\mathbf{M}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\mathbf{X}_i=\frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}3\\9/4\end{bmatrix}$

类内散布矩阵：

$$\mathbf{C}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i^T-\mathbf{M}\mathbf{M}^T=\frac{1}{4}\left\{\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}[2,\quad 2]+\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}[3,\quad 2]+\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}[3,\quad 3]+\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}[4,\quad 2]\right\}-\begin{bmatrix}3\\9/4\end{bmatrix}[3,\quad 9/4]$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}38 & 27\\27 & 21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 27/4\\27/4 & 81/16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 3/16\end{bmatrix}$$

（2）①由 $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{C}|=0$ 求特征值。

$$\begin{vmatrix}\lambda-1/2 & 0\\0 & \lambda-3/16\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda - 1/2)(\lambda - 3/16) = 0$$

$$\lambda_1 = 1/2,\quad \lambda_2 = 3/16$$

②由 $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{u_1} = 0$ 解得 $\lambda_1$ 对应的特征向量 $\mathbf{u_1}$ 为 $\mathbf{u_1} = [1,\quad 0]^T$。

由 $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{u_2} = 0$ 解得 $\lambda_2$ 对应的特征向量 $\mathbf{u_2}$ 为 $\mathbf{u_2} = [0,\quad 1]^T$。

（3）①选择较小特征值 $\lambda_2 = 3/16$ 对应的特征向量 $\mathbf{u_2} = [0,\quad 1]^T$ 构成变换矩阵。

$\mathbf{u_2}$ 已为归一化特征向量，直接构成变换矩阵：

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}_2^T] = [0,\quad 1]$$

②变换：

$$\mathbf{X}_1^* = \mathbf{AX}_1 = [0,\quad 1]\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = 2$$

$$\mathbf{X}_2^* = \mathbf{AX}_2 = [0,\quad 1]\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = 2$$

$$\mathbf{X}_3^* = \mathbf{AX}_3 = [0,\quad 1]\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 3$$

$$\mathbf{X}_4^* = \mathbf{AX}_4 = [0,\quad 1]\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 2$$

# 作业六

根据第一次作业自己所举的例子，回答下列三个问题：

**1.** 此分类识别问题中可以选择哪些特征？其中最有效的一个或几个特征是什么？

**2.** 如果该分类问题用非监督分类法，如何进行分类？即简述分类思想及主要过程，以及其中涉及到的重要细节。

**3.** 如果该分类问题用监督分类法，试根据情况选择几何分类法或概率分类法中的一种（如该问题不适宜用以上方法，请按照适宜的方法处理），简述分类思想及主要过程，以及其中涉及到的重要细节。