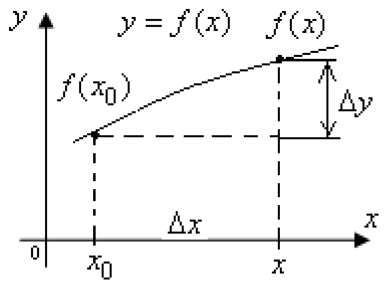
## Дифференциальное исчисление функций одной переменной

## Лекция 1

### Производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале (a, b). Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$. Для любого $x \in (a,b)$ разность $x - x_0$ называется приращением аргумента $x$ в точке $x_0$ и обозначается $\Delta x$ (дельта икс): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$. Разность соответствующих значений функции $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначается $\Delta y$ (или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.




**Определение**. *Производной от функции f(x)* в точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta y$ к приращению аргумента $\Delta x$, когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ или} \qquad (1)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Производную обозначают $y', \quad y'_x, \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}$.

**Определение.** Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием функции.*

Для существования производной от функции *f(x)*в т. x, необходимо, чтобы функция *f(x)*была определена в некоторой окрестности x, в точм числе в самой точке x.

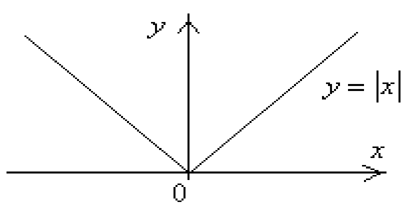
Конечно, не для всякой функции, определенной в окрестности точки, существует предел (2).

**Например.**

$$y = |x| \quad x_0 = 0 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

В т. x=0 функция непрерывна, но не имеет производной.

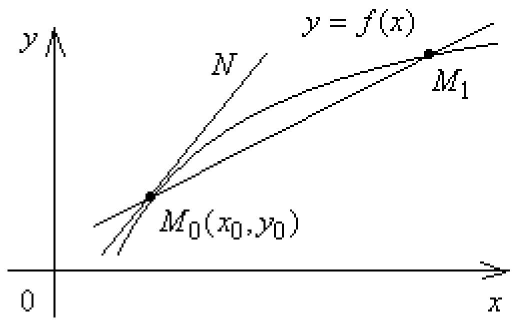
$$\underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \qquad \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$



**Теорема** (О непрерывности функции, имеющей производную). Функция, имеющая конечную производную в точке х, непрерывна в этой точке.

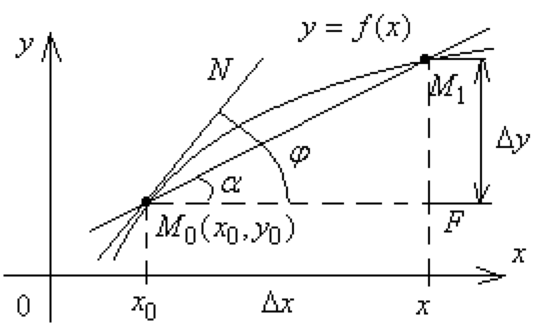
## Геометрический смысл производной

Пусть некоторая непрерывная кривая задана уравнением $y = f(x)$. Необходимо записать уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. **Определение.** Касательной к заданной непрерывной кривой в точке $M_0$ называется предельное положение секущей $M_0M_1$, когда точка $M_1$ неограниченно приближается к точке $M_0$ вдоль кривой.




Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $x_0$, $y_0 = f(x_0)$ - координаты точки, через которую проходит касательная, они известны. Неизвестен угловой коэффициент $k$, который численно равен тангенсу угла наклона прямой относительно положительного направления оси $0x$.

Если точка $M_1$ имеет координаты $(x_0 + \Delta x)$, $(y_0 + \Delta y)$, то из прямоугольного треугольника $M_0FM_1$ определяем угловой коэффициент для секущей $M_0M_1$: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если точка $M_1$ неограниченно приближается к точке $M_0$ вдоль кривой $y = f(x)$, то $\Delta x \to 0$. При этом угол наклона секущей $\alpha \to \varphi$, где $\varphi$ - угол наклона касательной $MN$ (считаем, что касательная не перпендикулярна к оси $0x$, т.е.




$\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$). Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha$, и задача определения уравнения касательной сводится к определению предела

$$\mathrm{k} = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной к кривой в т. $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$$

По определению $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Следовательно, уравнение касательной

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (3)$$

Определение. Нормалью к кривой в ее точке М называется прямая, проходящая через точку М, перпендикулярно касательной к кривой в этой точке.

В силу перпендикулярности двух прямых, уравнение нормали будет иметь вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad (4)$$

## Механический смысл производной

Пусть известен закон движения материальной точки $M$ вдоль некоторой прямой (например, оси $0x$). Если за $x$ принять абсциссу движущейся точки, а за $t$ - время, то закон движения имеет вид $x = f(t)$. Необходимо найти скорость движущейся точки для любого момента времени.

Пусть в некоторый момент времени $t_0$ движущаяся точка занимает положение $M$ (рисунок 2), $0M = x$. В момент времени $t = t_0 + \Delta t$ точка займет положение $M_1$, причем $0M_1 = x + \Delta x$. Согласно уравнению движения $x + \Delta x = f(t_0 + \Delta t)$. Перемещение точки за время $\Delta t$ равно $\Delta x = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Если точка движется в одном направлении, то $\Delta x$ численно пути, пройденному точкой за время $\Delta t$. Отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость движения точки за $\Delta t$, т.е. $V_{сред} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Предел средней скорости при $\Delta t \to 0$ называется скоростью движения в данный момент времени $t_0$ или мгновенной скоростью движения. Таким образом, задача о скорости движения материальной точки сводится к отысканию предела:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{сред} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

**Физический смысл** .Если функция описывает какой либо физический процесс, то ее производная есть скорость протекания этого процесса

## Производные элементарных функций

1)

$$y = c = const \qquad y' = c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

2)

$$y = x \qquad \Delta y = \Delta x \qquad y' = x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

3)

$$y = x^n \qquad \Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$y' = (x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n((1+\frac{\Delta x}{x})^n - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{n-1}((1+\frac{\Delta x}{x})^n - 1)}{\frac{\Delta x}{x}} = nx^{n-1} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

4)

$$y = \cos x \qquad \Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

$$y' = (\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

Аналогично $(\sin x)' = cosx$

5)

$$y = a^x \qquad \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x \quad a > 0 \quad a \neq 1$$

$$y' = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x Lna$$

$$(e^x)' = e^x$$

6)

$$y = Log_a x \qquad x > 0$$

$$y' = (Log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Log_a(x+\Delta x) - Log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Log_a \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{Log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}Log_a e = \frac{1}{xLna}$$

$$(Lnx)' = \frac{1}{x}$$

**7) *Постоянный множитель выносится за знак производной***

$$y = c\cdot U(x) \qquad y' = c\cdot U'(x)$$

8) ***Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций***

$$(U(x)\pm V(x))' = U'(x)\pm V'(x)$$

$$(U\pm V)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(U\pm V)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = U'\pm V'$$

9) ***Производная произведения двух дифференцируемых функций***

$$(U(x)\cdot V(x))' = U'V + UV'$$

$$\Delta y = (U+\Delta U)\cdot(V+\Delta V) - UV = U\Delta V + \Delta UV + \Delta U\Delta V$$

$$(UV)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{U\Delta V+\Delta UV+\Delta U\Delta V}{\Delta x} = U\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} + V\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta U\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} =$$

$$= U'V + UV'$$

10) ***Производная дроби двух функций*** $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

11) $y = tgx \qquad y' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $y = ctgx \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$

14) $y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx$

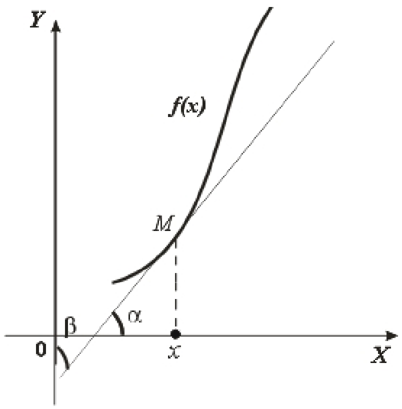
15) $y = thx \qquad y' = (\frac{shx}{chx})' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$

## Производная обратной функции.

Непрерывная дифференцируемая функция $y = f(x)$ в интервале монотонности имеет обратную себе функцию $x = \varphi(y)$. Бесконечно малому приращению $\Delta x$ соответствует бесконечно малое приращение $\Delta y$ и наоборот: $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x/\Delta y}$, или $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Формула имеет простой геометрический смысл. Если $f'(x) = y'_x$ –тангенс угла




$\alpha$ наклона касательной к кривой к оси ох, то $\beta$– тангенс угла наклона той же касательной к оси оу

$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ (если $\alpha$ и $\beta$ острые)

$\alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{2}$ (если $\alpha$ и $\beta$ тупые)

$$tg\alpha = ctg\beta = \frac{1}{tg\beta} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

16) Функция $y = \arcsin x$ имеет себе обратную функцию $x = \sin y$. При этом $D(y) = [-1; 1]$, $E(y) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

По правилу дифференцирования обратных функций $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$ имеем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

17) $(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18) Функция $y = arctgx$ имеет себе обратную функцию $x = tgy$. При этом $D(y) = R$, $E(y) = (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. $(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

По правилу дифференцирования обратных функций $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ имеем:

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

19) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

## Производные основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 0$.

2. $(e^x)' = e^x$.

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

4. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{xLnx}$

8. $(\sin x)' = \cos x$

9. $(\cos x)' = -\sin x$

10. $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.