МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Севастопольский государственный университет»

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания и контрольные задания
для самостоятельной работы по дисциплинам
«Высшая математика», «Математика» студентов
технических и экономических специальностей

Севастополь
СевГУ
2015

УДК 517 (076)
ББК 22.161.1
П28

Неопределенный интеграл. Методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы по дисциплинам «Высшая математика», «Математика» студентов технических и экономических специальностей / Сост. А.И. Песчанский, Л.Н. Григорюк. — Севастополь: СевГУ, 2015. — 44 с.

Целью настоящих методических указаний является оказание помощи студентам дневной формы обучения инженерных и экономических специальностей при изучении темы «Неопределенный интеграл». В них приведены теоретические сведения, рассмотрены примеры решения типовых задач. Представлены 30 вариантов индивидуальных заданий для самостоятельного решения.

Методические указания рассмотрены и утверждены к переизданию на заседании кафедры «Высшая математика», протокол № 3 от 25.05.2015 г.

Допущено учебно-методическим центром СевГУ в качестве методических указаний.

Рецензент: Ольшанская И.В., канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика» СевГУ.

Содержание

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Если функция $F(x)$ является первообразной от $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ $(C = const)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Итак, $\int f(x)dx = F(x)+C$, если $\left(F(x)\right)' = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, где $A = const$;

2) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$;

3) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C,\ a \neq 0$;

4) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

5) $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

6) $\int df(x) = f(x)+C$.

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

2) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3) $\int e^{u}\,du = e^{u} + C;$

4) $\int a^{u}\,du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$

5) $\int \cos u\,du = \sin u + C;$

6) $\int \sin u\,du = -\cos u + C;$

7) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

8) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

9) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C;$

10) $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C;$

11) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$

12) $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C;$

13) $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{u-a}{u+a} \right| + C;$

14) $\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C;$

15) $\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$

16) $\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДВЕДЕНИЕМ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Если подынтегральная функция имеет вид: $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$, тогда справедлива формула

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \begin{bmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int f(u)\,du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \tag{1}$$

Вычисление интеграла с помощью этой формулы называется интегрированием подведением под знак дифференциала. В этом случае говорят, что функция $u=\varphi(x)$ подводится под знак дифференциала.

Отметим также, что формулу интегрирования (1) бывает целесообразнее использовать и в обратном порядке, т.е. справа налево. Именно, иногда удобнее вычисление интеграла

$$\int f(x)\,dx\,,$$

с помощью соответствующей замены переменной $x=\varphi(t)$, свести к вычислению интеграла

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\,,$$

т.е. использовать формулу (1) в виде

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\,\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \qquad (2)$$

Формула (2) обычно называется формулой интегрирования заменой переменной.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x\cdot\sqrt[7]{5x^2+4}x\,dx$.

Решение. Интеграл вычислим с помощью подведения функции $u=5x^2+4$ под знак дифференциала:

$$\int x\cdot\sqrt[7]{5x^2+4}dx=\begin{bmatrix} u=5x^2+4 \\ du=10xdx \\ xdx=\dfrac{1}{10}du \end{bmatrix}=\frac{1}{10}\int u^{\frac{1}{7}}du=\frac{1}{10}\cdot\frac{u^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}}+C=$$

$$=\frac{7}{80}(5x^2+4)^{\frac{8}{7}}+C\,.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\dfrac{x^2dx}{25x^6-49}$.

Решение. Вычисление данного интеграла сведем к табличному интегралу

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$$

подведением под знак дифференциала функции $u=5x^3$. Имеем

$$\int\frac{x^2dx}{25x^6-49}=\int\frac{x^2dx}{\left(5x^3\right)^2-7^2}=\left[\begin{array}{c}u=5x^3\\ du=15x^2dx\\ x^2dx=\dfrac{1}{15}du\end{array}\right]=\frac{1}{15}\int\frac{du}{u^2-7^2}=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2\cdot 7}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{1}{210}\ln\left|\frac{5x^3-7}{5x^3+7}\right|+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin\frac{2}{x}}{x^2}dx$.

Решение. Подводя под знак дифференциала функцию $u=\frac{2}{x}$, получаем

$$\int\frac{\sin\frac{2}{x}}{x^2}dx=\left[\begin{array}{c}u=\dfrac{2}{x},\quad du=-\dfrac{2}{x^2}dx\\ \dfrac{dx}{x^2}=-\dfrac{1}{2}du\end{array}\right]=\int\sin u\left(-\frac{1}{2}\right)du=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sin u\,du=\frac{1}{2}\cos u+C=\frac{1}{2}\cos\frac{2}{x}+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\frac{\ln^5(x-1)}{x-1}dx.$

Решение. Подынтегральная функция содержит логарифм $\ln(x-1)$. Выясним, есть ли в подынтегральном выражении производная от этой логарифмической функции. Так как $\left(\ln(x-1)\right)'=\frac{1}{x-1}$, тогда

$$\int\frac{\ln^5(x-1)}{x-1}dx=\left[\begin{array}{l}u=\ln(x-1)\\ du=\dfrac{dx}{x-1}\end{array}\right]=\int u^5du=\frac{u^6}{6}+C=\frac{\left(\ln(x-1)\right)^6}{6}+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

Решение. С помощью почленного деления подынтегральной функции разобьем данный интеграл на два интеграла:

$$\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}} + \int \frac{(\arccos 3x)^2\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Для первого интеграла используем формулу $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

при $\alpha = -\dfrac{1}{2}$: $\quad \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

Подводя под знак дифференциала функцию $u = 1-9x^2$, получаем

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}} = \left[\begin{array}{c} u = 1-9x^2 \\ du = -18xdx \\ xdx = -\dfrac{1}{18}du \end{array}\right] = -\frac{1}{18}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{9}\sqrt{u} + C =$$

$$= -\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} + C.$$

Во втором интеграле подынтегральная функция содержит производную $\arccos 3x$ с точностью до постоянного множителя, поэтому

$$\int \frac{(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx = \left[\begin{array}{l|l} u = \arccos 3x & \dfrac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\dfrac{1}{3}du \\ du = -\dfrac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} & \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\int u^2 du = -\frac{u^3}{9} + C = C - \frac{1}{9}(\arccos 3x)^3.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx = C - \frac{1}{9}(\arccos 3x)^3 - \frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}.$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Для отыскания интегралов вида

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

можно вначале выделить полный квадрат в знаменателе, а затем вычислить интеграл, используя метод интегрирования подведением под знак дифференциала.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+5x+7}$.

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегрального выражения:

$$x^2+5x+7=\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Имеем

$$\int\frac{dx}{x^2+5x+7}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\begin{bmatrix} u=x+\frac{5}{2} \\ du=dx \end{bmatrix}=\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$.

Решение. Для удобства выделения полного квадрата в знаменателе выносим минус за скобку

$$4-6x-9x^2=-(9x^2+6x-4)=-(\underbrace{(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 1+1}-1-4)=$$

$$=-\left((3x+1)^2-5\right)=5-(3x+1)^2.$$

Подводя функцию $3x+1$ под знак дифференциала, получаем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5-(3x+1)^2}}=\begin{bmatrix} u=3x+1 \\ du=3dx \\ dx=\frac{1}{3}du \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{5-u^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{u}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

При вычислении интегралов

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \text{ и } \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

можно применять следующий алгоритм:

1) выделить полный квадрат в знаменателе дроби;
2) сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$;
3) разбить интеграл на два интеграла;
4) проинтегрировать и сделать обратную замену.

Пример 8. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int\frac{(x+6)dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}\text{ ; б) } \int\frac{(4x-1)dx}{\sqrt{x^2+3x-6}}\ .$$

Решение. а) Выделим полный квадрат в знаменателе:
$x^2+4x+13=\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)-4+13=(x+2)^2+9$.
Имеем

$$\int\frac{(x+6)dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\int\frac{(x+6)dx}{\sqrt{(x+2)^2+9}}=\begin{bmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{(t-2+6)dt}{\sqrt{t^2+9}}=\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+9}}+4\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+9}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+9)}{\sqrt{t^2+9}}+4\ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right|=\sqrt{t^2+9}+4\ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+4x+13}+4\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right|+C.$$

При вычислении использовали табличные интегралы

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C \text{ и } \int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+C.$$

б) Интегралы вида

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+C}dx \quad \text{и} \quad \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}}dx$$

также можно вычислять с помощью подстановки $t=\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)' \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}(2ax+b)$. Действительно,

$$\int\frac{(4x-1)dx}{\sqrt{x^2+3x-6}}=\left[\begin{array}{c} t=\frac{1}{2}\left(x^2+3x-6\right)' \\ t=x+\frac{3}{2} \\ x=t-\frac{3}{2},\ dx=dt \end{array}\right]=\int\frac{\left(4\left(t-\frac{3}{2}\right)-1\right)dt}{\sqrt{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(t-\frac{3}{2}\right)-6}}=$$

$$=\int\frac{4t-7}{t^2-\frac{33}{4}}dt=\int\frac{4t}{t^2-\frac{33}{4}}dt-7\int\frac{dt}{t^2-\frac{33}{4}}=2\int\frac{d\left(t^2-\frac{33}{4}\right)}{t^2-\frac{33}{4}}-$$

$$-7\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2}=2\ln\left|t^2-\frac{33}{4}\right|-7\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{33}}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{33}}{2}}{t+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right|+C=$$

$$=2\ln\left|x^2+3x-6\right|-\frac{7}{\sqrt{33}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right|+C.$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции от x, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du \ . \tag{3}$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v du$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл. Важно установить, какая функция принимается за u и что относится к dv, т.к. первый множитель дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части. Отметим некоторые классы функций, которые интегрируются с применением этой формулы.

I класс интегралов	
$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx,$ $\int P_n(x)\sin(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\cos(ax+b)dx,$	$u = P_n(x)$, а оставшееся выражение относим к dv.
II класс интегралов	
$\int P_n(x)\ln(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\arcsin(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\arccos(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)\mathrm{arctg}(ax+b)dx,$ $\int P_n(x)arcctg(ax+b)dx$	$dv = P_n(x)dx$, а оставшееся выражение относим к u.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int (x-5)e^{4x}dx$.

Решение. Этот интеграл относится к I классу, потому за u принимаем $x-5$:

$$\int (x-5)e^{4x}dx = \begin{bmatrix} u = x-5, \ du = dx \\ dv = e^{4x}dx, \ v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(x-5)e^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx =$$

$$= \frac{1}{4}(x-5)e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln(1+x)dx$.

Решение. Этот интеграл относится ко II классу, за dv примем x^2dx, тогда $u = \ln(1+x)$. Применяя формулу (3), получаем

$$\int x^2 \ln(1+x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(1+x), du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = x^2dx, \quad v = \dfrac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x+1}dx = I$$

Дробь $\dfrac{x^3}{x+1}$ — неправильная, выделим целую часть:

$$\frac{x^3}{x+1} = \frac{(x^3+1)-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1} =$$

$$= (x^2-x+1) - \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{x^3}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{3}\left(\int (x^2-x+1)dx - \int \frac{dx}{x+1}\right) = \frac{x^3}{3}\ln(1+x) -$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) + \frac{1}{3}\ln|x+1| + C = \frac{x^3}{3}\ln(1+x) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} +$$

$$+\frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int (x^2+2x+4)\sin 5x dx$.

Решение. Не следует разбивать такой интеграл на сумму интегралов, это не упростит решение, а приведет к более громоздким выкладкам. Интеграл относится к I классу, за u принимаем x^2+2x+4. Применяя формулу (3), получаем

$$\int (x^2+2x+4)\sin 5x dx = \begin{bmatrix} u = x^2+2x+4, & du = (2x+2)dx \\ dv = \sin 5x dx, & x = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(x^2+2x+4\right)\cos 5x + \frac{2}{5}\int \left(x+1\right)\cos 5x dx = I.$$

К стоящему в правой части интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причем к u относим многочлен $x+1$. Окончательно получаем:

$$I = -\frac{1}{5}\left(x^2+2x+4\right)\cos 5x dx + \frac{2}{5}\int \left(x+1\right)\cos 5x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x+1, & du = dx \\ dv = \cos 5x dx, & v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\left(x^2+2x+4\right)\cos 5x dx +$$

$$+ \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}(x+1)\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx\right) = -\frac{1}{5}\left(x^2+2x+4\right)\cos 5x dx +$$

$$+ \frac{2}{25}(x+1)\sin 5x + \frac{2}{125}\cos 5x + C.$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Рациональной дробью называется функция, которая представляет собой отношение двух многочленов. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, то дробь называется правильной. В противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби. Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильних рациональных дробей.

Интегрирование правильной рациональной дроби производится разложением этой дроби на сумму простейших дробей с последующим интегрированием.

Пример.12. Вычислить интеграл $\int \frac{(x^2+2x+3)}{(x^2-2x+1)(x+2)}dx$.

Решение. Подынтегральная функция — правильная дробь (степень числителя меньше степени знаменателя). Разложим ее на простейшие дроби, учитывая что $x^2-2x+1=(x-1)^2$:

$$\frac{x^2+2x+3}{(x^2-2x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} \qquad (4)$$

Подынтегральная функция представлена в виде суммы простейших дробей I и II типа. Умножив обе части равенства (4) на знаменатель левой части, получаем

$$x^2+2x+3=A(x-1)\big(x+2\big)+B(x+2)+C(x-1)^2 \qquad (5)$$

Для определения коэффициентов A, B, C вначале будем давать частные значения переменной x. Удобно взять $x=1$ и $x=-2$. Подставляем эти значения в левую и правую части тождества (5) и получаем

$x=1$ | $6=3B \Rightarrow B=2$,

$x=-2$ | $3=9C \Rightarrow C=\frac{1}{3}$.

В правой части тождества (5) старшая степень — вторая. Приравняем коэффициенты при x^2 в левой и правой частях тождества

x^2 | $1=A+C \Rightarrow A=1-C \Rightarrow A=\frac{2}{3}$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - 2\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$$

Пример 13. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{3x+2x}{(x-1)(x^2+1)}dx; \quad \text{б) } \int \frac{3x^2+4}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx.$$

Решение. а) В знаменателе правильной рациональной дроби, которую надо проинтегрировать, есть комплексные различные корни: $x^2+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm i$. Поэтому в разложении этой дроби на простейшие появляется дробь III типа:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Умножим обе части тождества на знаменатель левой части

$$3x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Приравняем значения обеих частей этого тождества при $x=1$:

$$x=1 \;\Big|\; 5=2A \Rightarrow A=\frac{5}{2}.$$

Дальше будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, предварительно преобразовав его к виду:

$$3x+2 = A(x^2+1) + B(x^2-x) + C(x-1);$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \Rightarrow B = -\dfrac{5}{2}, \\ x & 3 = -B+C, \quad C = 3+B \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

б) Квадратный трехчлен x^2+2x+5 в знаменателе правильной рациональной дроби $\dfrac{3x^2+4}{(x-1)(x^2+2x+5)}$ не имеет действительных корней. Поэтому эта дробь раскладывается на простейшие следующим образом:

$$\frac{3x^2+4}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}\,.$$

После умножения обеих частей на знаменатель левой части получаем тождество

$$3x^2+4 = A\left(x^2+2x+5\right) + (Bx+C)\left(x-1\right),$$

или

$$3x^2+4 = A\left(x^2+2x+5\right) + B(x^2-x) + C\left(x-1\right).$$

Для определения коэффициентов A, B, C удобно приравнять значения левой и правой частей этих тождеств при $x=1$ и коэффициенты при x^2 и x:

$$\begin{array}{l|l}
x=1 & 7 = 8A \Rightarrow A = \dfrac{7}{8}, \\[2ex]
x^2 & 3 = A + B \Rightarrow B = \dfrac{17}{8}, \\[2ex]
x & 0 = 2A - B + C \Rightarrow C = \dfrac{3}{8}.
\end{array}$$

Следовательно,

$$\int\frac{(3x^2+4)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{7}{8}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{8}\int\frac{17x+3}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$=\begin{bmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{bmatrix}=\frac{7}{8}\ln|x-1|+\frac{17}{16}\int\frac{2t}{t^2+4}dt-\frac{7}{4}\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{7}{8}\ln|x-1|+\frac{7}{16}\ln|t^2+4|-\frac{7}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\frac{7}{8}\ln|x-1|+\frac{17}{16}\ln|x^2+2x+5|-\frac{7}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int\frac{x^4+x^3+8}{x^2-4x}dx$.

Решение. Подынтегральная функция — дробь неправильная. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель уголком, и представим дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4+x^3+8 & x^2-4x \\ \cline{2-2}
\underline{x^4-4x^3} & x^2+5x+20 \\
-\,5x^3+8 & \\
\underline{5x^3-20x^2} & \\
-\,20x^2+8 & \\
\underline{20x^2-80x} & \\
80x+8 & \text{(остаток).}
\end{array}$$

Следовательно, $\frac{x^4+x^3+8}{x^2-4x}=x^2+5x+20+\frac{80x+8}{x^2-4x}$. Тогда

$$\int\frac{x^4+x^3+8}{x^2-4x}dx=\int\left(x^2+5x+20+\frac{80x+8}{x^2-4x}\right)dx=\int\left(x^2+5x+20\right)dx+$$

$$+8\int\frac{10x+1}{x^2-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+20x+8\int\frac{10x+1}{x^2-4x}dx.$$

Разложим правильную рациональную дробь под знаком последнего интеграла на простейшие:

$$\frac{10x+1}{x(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}\Rightarrow 10x+1=A(x-4)+Bx.$$

Приравнивая значения левой и правой частей последнего тождества при $x=0$ и $x=4$, получаем

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ \\ x=4 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 1=-4A \Rightarrow A=-\dfrac{1}{4}, \\ \\ 41=4B \Rightarrow B=\dfrac{41}{4}. \end{array}$$

Следовательно

$$\int\frac{10x+1}{x^2-4x}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{41}{4}\int\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{41}{4}\ln|x-4|+C.$$

Окончательно имеем

$$\int\frac{x^4+x^3+8}{x^2-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+20x-2\ln|x|+82\ln|x-4|+C.$$

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Действительно,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\begin{bmatrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\ x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}=$$

$$=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}$.

Решение. Полагаем $tg\frac{x}{2}=t$. Тогда

$$\int \frac{dx}{4\cos x-3\sin x-5}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)-6\frac{t}{1+t^2}-5}=-2\int \frac{dt}{9t^2+6t+1}=$$

$$=-2\int \frac{dt}{(3t+1)^2}=-2\int (3t+1)^{-2}dt==\frac{2}{3}\frac{1}{3t+1}+C=\frac{2}{9\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3}+C.$$

Наряду с универсальной тригонометрической подстановкой полезно использовать и другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели. Также полезными при интегрировании тригонометрических выражений являются следующие формулы тригонометрии:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int 32\sin^4\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию, используя приведенные выше тригонометрические формулы. Имеем:

$$32\sin^4\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=4\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}\cdot 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=4(1-\cos x)\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2=$$

$$=4(1-\cos x)\sin^2 x=4\sin^2 x-4\cos x\cdot\sin^2 x=2(1-\cos 2x)-4\cos x\cdot\sin^2 x.$$

Тогда

$$32\int\sin^4\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx=2\int(1-\cos 2x)dx-4\int\cos x\cdot\sin^2 x dx=$$

$$=2\int dx-2\int\cos 2x dx-4\int\sin^2 x d(\sin x)=2x-\sin 2x-4\cdot\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^{11} x}}dx$.

Решение. В числителе $\sin^3 x$ представим в виде:

$$\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x.$$

Тогда интеграл можно вычислить подведением функции $\cos x$ под знак интеграла:

$$\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^{11} x}}dx=\int(\cos)^{-\frac{11}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x dx=\begin{bmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x dx\end{bmatrix}=$$

$$=-\int u^{-\frac{11}{2}}(1-u^2)du=-\frac{2}{5}u^{-\frac{5}{2}}+\frac{2}{9}u^{-\frac{9}{2}}+C=\frac{2}{9}\frac{1}{(\cos x)^{\frac{9}{2}}}+\frac{2}{5}\frac{1}{(\cos x)^{\frac{5}{2}}}+C.$$

7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\ x^{\frac{m_1}{n_1}},\ x^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$$

где R — рациональная функция своих аргументов, $m_1, n_1, m_2, n_2,\ldots,$ — целые числа, вычисляется с помощью подстановки $x=t^s$, где s — общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$.

Пример 18. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[5]{x^3}}dx$.

В подынтегральную функцию входят радикалы с разными показателями: $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}}$. Для дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$ наименьшим общим знаменателем будет 10. Поэтому сделаем замену $x=t^{10}$, тогда $\sqrt{x}=t^5$, $\sqrt[5]{x^3}=t^6$, и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[5]{x^3}}dx=\begin{bmatrix} x=t^{10}, \quad dx=10t^9dt \\ t=\sqrt[10]{x} \end{bmatrix}=\int \frac{10t^9dt}{t^5-t^6}=-10\int \frac{\left(t^4-1\right)+1}{t-1}dt=$$

$$=-10\int\left(t^3+t^2+t+1\right)dt-10\int\frac{dt}{t-1}=-10\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right)-10\ln|t-1|+$$

$$+C=-10\left(\frac{\left(\sqrt[10]{x}\right)^4}{4}+\frac{\left(\sqrt[10]{x}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt[10]{x}\right)^2}{2}+\sqrt[10]{x}\right)-10\ln\left|\sqrt[10]{x}-1\right|+C.$$

Вычисление интегралов вида

$$\int R\left(x,\sqrt{l^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-l^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2+l^2}\right)dx$$

производится с помощью соответствующих тригонометрических подстановок:

$$x=l\sin t, \qquad x=\frac{l}{\cos t}, \qquad x=l\operatorname{tg} t.$$

Пример 19. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int \sqrt{64-x^2}\,dx, \qquad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx.$$

Решение. а) Сделаем замену $x = 8\sin t$. Тогда

$$\int \sqrt{64-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = 8\sin t \\ dx = 8\cos dt \end{bmatrix} = \int \sqrt{64-64\sin^2 t}\; 8\cos t\,dt =$$

$$= 64\int \sqrt{1-\sin^2 t}\;\cos t\,dt = 64\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 32\int (1+\cos 2t)dt = 32\,t + 16\sin 2t + C =$$

$$= 32\,t + 32\sin t\cos t + C = 32t + 32\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C =$$

$$= 32\arcsin\frac{x}{8} + \frac{x}{2}\sqrt{64-x^2} + C.$$

б) Произведем замену $x = \dfrac{\sqrt{8}}{\cos t}$, получаем

$$\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx = \begin{bmatrix} x = \dfrac{\sqrt{8}}{\cos t}, \;\; \cos t = \dfrac{\sqrt{8}}{x} \\ dx = \dfrac{\sqrt{8}\sin t\,dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{\dfrac{8}{\cos^2 t} - 8}}{\dfrac{64}{\cos^4 t}} \frac{\sqrt{8}\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{8}{64}\int \frac{\sin^2 t\cos^4 t}{\cos t\cos^2 t}dt = \frac{1}{8}\int \sin^2 t\cos t\,dt = \frac{1}{8}\int \sin^2 t\,d(\sin t) =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{\sin^3 t}{3} + C = \frac{1}{24}\sin^2 t\sin t + C = \frac{1}{24}\left(1-\cos^2 t\right)\sqrt{\left(1-\cos^2 t\right)} + C =$$

$$= \frac{1}{24}\left(1-\frac{8}{x^2}\right)\sqrt{1-\frac{8}{x^2}} + C = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{x^3}(x^2-8)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 20. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+81)\sqrt{x^2+81}}$.

Решение. Выполним подстановку $x = 9\operatorname{tg} t$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2+81)\sqrt{x^2+81}} = \begin{bmatrix} x = 9\operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{9\,dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix} = 9\int \frac{dt}{\cos^2 t\ (81\operatorname{tg}^2 t+81)\sqrt{81\operatorname{tg}^2 t+81}} =$$

$$= \frac{1}{81}\int \frac{dt}{\cos^2 t \dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot\dfrac{1}{\cos t}} = \frac{1}{81}\int \cos t\,dt = \frac{1}{81}\sin t + C = \frac{1}{81}\operatorname{tg} t\cdot\cos t + C =$$

$$= \frac{1}{81}\operatorname{tg} t\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{81+x^2}} + C.$$

8. ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. $\int xe^{3x^2}dx;$ 2. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx;$ 3. $\int \frac{(\ln x)^2+1}{x}dx;$

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx;$ 5. $\int \frac{(\arccos x)^3+1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ 6. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5};$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+3x}};$ 8. $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+4x+5};$ 9. $\int (3x+4)e^{3x}dx;$

10. $\int \ln^2 x dx;$ 11. $\int (x^2+2x+4)\sin x dx;$

12. $\int \frac{4x+1}{(x+2)^3(x-4)}dx;$ 13. $\int \frac{5x^2-2x+1}{(x-1)^2(x^2+4)}dx;$ 14. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx;$

15. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)};$ 16. $\int \sin^4\frac{x}{8}\cos^4\frac{x}{8}dx;$ 17. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx;$

18. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx;$ 19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-9}};$ 20. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

Вариант 2.

1. $\int x(5x^2+1)^{10}dx;$ 2. $\int \frac{xdx}{9x^4+1};$ 3. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx;$

4. $\int \frac{e^x}{3+4e^x}dx;$ 5. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}};$ 6. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+3};$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}};$ 8. $\int \frac{4x-3}{x^2+3x+4}dx;$ 9. $\int (5x-2)e^{3x}dx;$

10. $\int x\ln^2 x dx$; 11. $\int (x^2+4x+3)\cos x dx$; 12. $\int \frac{(3x-1)dx}{(x-1)^3(x+2)}$;

13. $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$; 14. $\int \frac{x^3+2}{x^2-3x}dx$; 15. $\int \frac{\cos x}{2+\cos x}dx$;

16. $\int 2^4 \sin^6 x\cos^2 x dx$; 17. $\int \cos^5 x dx$;

18. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}dx$; 19. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$.

Вариант 3.

1. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$; 2. $\int x\sin(4-x^2)dx$; 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-9}}$;

4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^6}}$; 5. $\int e^x \sin\left(e^x\right)dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$; 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$; 9. $\int (4-16x)\sin 4x dx$;

10. $\int \arcsin 2x dx$; 11. $\int (2x^2-1)e^{2x}dx$;

12. $\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x+2)^2}dx$; 13. $\int \frac{(x^3+6x^2+9x+6)}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$;

14. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx$; 15. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$;

16. $\int 2^8 \sin^8 x dx$; 17. $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$;

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$; 19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 20. $\int \sqrt{256-x^2}dx$.

Вариант 4.

1. $\int x^2(4x^3+1)^{20}dx;$ 2. $\int \frac{\ln^4 x dx}{x};$ 3. $\int \frac{(\arcsin x)^5-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

4. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;.$ 5. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx;$ 6. $\int \frac{dx}{x^2+x+1};$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}};$ 8. $\int \frac{(5x+3)dx}{x^2+10x+23};$ 9. $\int (x+1)\cos x\,dx;$

10. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx;$ 11. $\int (2x^2-1)\sin 2x dx;$

12. $\int \frac{4x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx;$ 13. $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+2)^2(x^2+3)}dx;$

14. $\int \frac{(3x^3+2x^2+1)dx}{(x+2)(x-2)(x-1)};$ 15. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx;$

16. $\int 2^8\sin^6\frac{x}{8}\cos^2\frac{x}{8}dx;$ 17. $\int \cos^4 x\sin^3 x dx;$

18. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[6]{x^5}}dx;$ 19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}};$ 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$

Вариант 5.

1. $\int \frac{2xdx}{1+x^4}$ 2. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+5};$ 3. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x-3}}{\cos^2 x}dx;$

4. $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx;.$ 5. $\int \frac{(1-\cos x)}{(x-\sin x)^2}dx;$ 6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+8};$

7. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}};$ 8. $\int \frac{(4x+8)dx}{3x^2+12x+5};$ 9. $\int (x+6)\sin 2x dx;$

10. $\int x\ln(x-1)dx;$ 11. $\int (2x^2-1)\cos 2x dx;$

12. $\int \frac{(x^2+x-1)}{x^3+x^2-6x}dx$; 13. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$;

14. $\int \frac{(3x^3+1)dx}{x^2-1}$; 15. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

16. $\int 2^4\cos^8\left(\frac{x}{2}\right)dx$; 17. $\int \sin^{10}x\cos^3 x dx$;

18. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x}+1)}dx$; 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$; 20. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.

Вариант 6.

1. $\int x\sqrt{5-x^2}dx$ 2. $\int \sin^3 6x\cos 6x dx$; 3. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

4. $\int e^{x^3+x+1}(3x^2+1)dx$; 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x}$; 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

7. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$; 8. $\int \frac{xdx}{x^2+7x+13}$; 9. $\int (x+3)e^{2x}dx$;

10. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 11. $\int (x^2-4)\cos 3x dx$; 12. $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$;

13. $\int \frac{(3x+2)}{x(x+1)^3}dx$; 14. $\int \frac{x^4+5}{x^2-4x}dx$; 15. $\int \frac{dx}{5+\sin x-3\cos x}$;

16. $\int \sin^4\frac{x}{4}dx$; 17. $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}dx$;

18. $\int \frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[4]{x^3}}dx$; 19. $\int \sqrt{9-x^2}dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$.

Вариант 7.

1. $\int \frac{x^2dx}{4x^3+1}$; 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln^2 x}}$; 3. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3dx}{1+x^2}$;

4. $\int \sin(e^x)\, e^x dx;$ 5. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+4x-8}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x^2-4x}}$; 8. $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx$; 9. $\int (x+2)e^{4x}dx;$

10. $\int \arcsin 3x dx;$ 11. $\int (1-8x^2)\cos 4x dx$;

12. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2-1)(x+2)};$ 13. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx;$

14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x^2+5x}dx;$ 15. $\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$;

16. $\int \sin^6 x\, dx$; 17. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^5 x}}$;

18. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$; 19. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$.

Вариант 8.

1. $\int x\sqrt{4-3x^2}dx;$ 2. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; 3. $\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$;

4. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+5}}dx$;. 5. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

7. $\int \frac{dx}{x^2-3x+3};$ 8. $\int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$;

9. $\int (5-4x)\sin 2x\, dx;$ 10. $\int (2x^2-15)\ln x\, dx;$ 11. $\int (x^2+1)e^x dx$;

12. $\int \frac{5x+3}{x^2(x-2)}dx$; 13. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+1)^2(x^2+4)}dx$; 14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x^2-7x+12}dx$;

15. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$; 16. $\int \cos^8\left(\frac{x}{4}\right)dx;$ 17. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^7 x}};$

18. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}}dx$; 19. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$; 20. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

Вариант 9.

1. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-4x^6}}$; 2. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$; 3. $\int \frac{(x+\cos x)}{x^2+2\sin x}dx$;

4. $\int \left(e^{3x}+1\right)^2 e^{3x}dx$; 5. $\int \frac{2+\ln xdx}{x\sqrt{\ln x}}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$; 8. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$; 9. $\int (4-3x)e^{-3x}dx$;

10. $\int \arcsin xdx$; 11. $\int (x^2+5x+6)cos2xdx$;

12. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x+3)^2(x-1)}$; 13. $\int \frac{(x^2+x+1)}{x(x^2-4x+13)}dx$;

14. $\int \frac{4x^3+5}{x^2+6x}dx$;. 15. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}dx$;

16. $\int 2^4\sin^6\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx$; 17. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^7 x}}$;

18. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$; 19. $\int \frac{x^2}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}}dx$; 20. $\int \sqrt{20-x^2}dx$.

Вариант 10.

1. $\int \left(5x^3+4\right)^{10}x^2dx$; 2. $\int \frac{xdx}{9x^4+1}$; 3. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$;

4. $\int \frac{dx}{\arcsin^5 x\sqrt{1-x^2}}$; 5. $\int \frac{\sqrt[4]{ctgx}}{\sin^2 x}dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$; 8. $\int \frac{(4x-3)}{x^2+3x+4}dx$; 9. $\int (5x-2)e^{3x}dx$;

10. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$; 11. $\int (x^2+4x+5)\cos x\,dx$; 12. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^2(x+4)}$;

13 $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$; 14. $\int \frac{3(x^4+1)}{x^2+5x}dx$; 15. $\int \frac{\sin x}{2+\sin x}dx$;

16. $\int \cos^6 3x\,dx$; 17. $\int \cos^5 x\sqrt[3]{\sin x}\,dx$;

18. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; 19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 20. $\int \sqrt{10+x^2}\,dx$

Вариант 11.

1. $\int \frac{x\,dx}{5+7x^4}$;. 2. $\int \frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$; 3. $\int \sqrt{1-e^x}\,e^x dx$;

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; 5. $\int \frac{x\,dx}{x+4}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-7x+13}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$; 8. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$; 9. $\int (4x+1)\sin x\,dx$;

10. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; 11. $\int (2x-2x^2+1)e^{-\frac{x}{2}}dx$;

12. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x-3)^2}$; 13. $\int \frac{(3x+4)dx;}{(x-1)(x^2+2x+5)}$;

14. $\int \frac{4x^3+7}{x^2+2x}dx$; 15. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$;

16. $\int 2^8\sin^2\frac{x}{4}\cos^6\frac{x}{4}dx$; 17. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^8 x}}$;

18. $\int \frac{(1-\sqrt{x})dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; 19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 20. $\int \sqrt{x^2+25}\,dx$.

Вариант 12.

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+5}}$; 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{\arcsin^3 x \cdot (1-x^2)}}$; 3. $\int \frac{(\ln x+9)^{20}}{x}dx$;

4. $\int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$; 5. $\int e^{x^2+x+1}(2x+1)dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+5x+9}$;

7. $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}$; 8. $\int \frac{xdx}{x^2+4x+10}$; 9. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}dx$;

10. $\int (1-6x)e^{2x}dx$; 11. $\int (3-7x^2)\cos 2x dx$;

12. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$; 13. $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+4x+13)}$;

14. $\int \frac{(4x^3+1)dx}{x^2+8x}$; 15. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$;

16. $\int \cos^6 x dx$; 17. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$;

18. $\int \frac{(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}$; 19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$; 20. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$.

Вариант 13.

1. $\int xe^{-3x^2}dx$; 2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; 3. $\int \frac{(2x-3)}{x^2-3x+8}dx$;

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{25-x^4}}$; 5. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x+x}{1+x^2}dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

7. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$; 8. $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$; 9. $\int \ln(4x^2+1)dx$;

10. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$ 11. $\int (2x^2+4x+1)\sin x dx$; 12. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)(x+2)}$;

13. $\int \frac{(4x+3)dx}{(x+4)^2(x^2+9)}$; 14. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$; 15. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;

16. $\int 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$; 17. $\int \sin^5 x dx$;

18. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}+1}dx$; 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$; 20. $\int \sqrt{16+x^2}dx$.

Вариант 14.

1. $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+1)}$; 2. $\int \left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$; 3. $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$;

4. $\int \frac{xdx}{x^4+9}$; 5. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-3x-13}$;

7. $\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$; 8. $\int \frac{3x+4}{x^2+5}dx$; 9. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$;

10. $\int (2-3)\sin 2x dx$; 11. $\int (3x^2-2x+1)e^x dx$;

12. $\int \frac{x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}dx$; 13. $\int \frac{(3x+1)}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx$;

14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x^2-2x)}dx$; 15. $\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x+1}$;

16. $\int 2^4 \sin^2 \frac{x}{2}\cos^6 \frac{x}{2}dx$; 17. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$;

18. $\int \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)dx}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}$; 19. $\int x^2\sqrt{25-x^2}dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}dx$.

Вариант 15.

1. $\int x\cos x^2 dx$; 2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$; 3. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$;

4. $\int \sin\left(e^x+5\right)e^x dx$; 5. $\int \frac{\left(\ln^6 x+1\right)}{x}dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$; 8. $\int \frac{(1-4x)dx}{2x^2-3x+1}$; 9. $\int (4x+3)\sin 5x dx$;

10. $\int (x-1)^3 \ln^2(x-1)dx$; 11. $\int x^2 e^{3x}dx$; 12. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}$;

13. $\int \frac{(x^2+4)dx}{(x+1)(x^2+x+1)}$; 14. $\int \frac{2x^3+1}{x^2-3x}dx$; 15. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x-1}$;

16. $\int \sin^4 x dx$; 17. $\int \sin^5 2x\cos 2x dx$;

18. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$; 19. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Вариант 16.

1. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$; 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}\cos^2 x}$; 3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}dx$;

4. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$; 5. $\int e^{\operatorname{arctg} x}\frac{dx}{1+x^2}$; 6. $\int \frac{dx}{4x-1-4x^2}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; 8. $\int \frac{(1-3x)dx}{5x^2+6x+18}$; 9. $\int e^{-2x}(4x-3)dx$;

10. $\int (x^3+1)\ln x dx$; 11. $\int \left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx$;

12. $\int \frac{(6x+1)dx}{(x-2)(x+3)^2}$; 13. $\int \frac{(4x^2+5)dx}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$;

14. $\int \frac{3x^3+x+6}{x^2+5x}dx$; 15. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$;

16. $\int \cos^8 x dx$; 17. $\int \cos^6 3x\sin 3x dx$;

18. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$; 19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 20. $\int x^2\sqrt{9+x^2}\,dx$.

Вариант 17.

1. $\int \frac{2x}{\sqrt{9x^2-4}}dx$; 2. $\int e^{-(x^2+1)}x\,dx$; 3. $\int \frac{\ln^7 x}{x}dx$;

4. $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x}$; 5. $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; 8. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+7}$; 9. $\int e^{-3x}(2-9x)dx$;

10. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\,dx$; 11. $\int (x^2+5)\sin x\,dx$;

12. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$; 13. $\int \frac{(4x+5)}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$;

14. $\int \frac{3x^3+3x^2+2}{x^2+x-2}dx$; 15. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

16. $\int 2^8\cos^8 x\frac{x}{4}dx$; 17. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$;

18. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}dx$; 19. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(8-x^2\right)^3}}$; 20. $\int \sqrt{25+x^2}\,dx$.

Вариант 18.

1. $\int (3x^4+5)^{20}x^3dx$; 2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^4}}$; 3. $\int \frac{\operatorname{arctg}x+2x}{1+x^2}dx$;

4. $\int \frac{1+\ln x}{3x\sqrt{\ln x}}dx$; 5. $\int \frac{2\cos x-3\sin x}{(2\sin x+3\cos x)^3}dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-7x+6}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$; 8. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$; 9. $\int (4x+7)\cos 3x\,dx$;

10. $\int \ln(x^2+x)dx$; 11. $\int (x^2+5)e^{2x}dx$; 12. $\int \frac{(3x^2+1)dx}{(x+3)^2(x-4)}$;

13. $\int \frac{(3x^2+x+4)dx}{(x-1)^2(x^2+9)}$; 14. $\int \frac{2x^3+8x+3}{x^2-2x}dx$; 15. $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$;

16. $\int \sin^8 \frac{x}{4}dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[5]{\cos^7 x}}$; 18. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$;

19. $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$; 20. $\int \sqrt{36+x^2}dx$.

Вариант 19.

1. $\int (5x^2+1)^{20}xdx$; 2. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$; 3. $\int \frac{\operatorname{ctg} xdx}{\ln \sin x}$;

4. $\int \left(e^{5x}+1\right)^4 e^{5x}dx$; 5. $\int \frac{\cos 2xdx}{(2+3\sin 2x)^3}$; 6. $\int \frac{dx}{4x^2-4x+37}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$; 8. $\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}dx$;

9. $\int (5x+6)\cos 3xdx$; 10. $\int x\operatorname{arctg} 2xdx$;

11. $\int (x^2+5x+1)e^{-x}dx$; 12. $\int \frac{(5x^2+6)dx}{(x+4)^2(x-2)}$;

13. $\int \frac{(x^3+2x^2+10x)dx}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$; 14. $\int \frac{x^3+4}{x^2+7x}dx$; 15. $\int \frac{\sin xdx}{1+\cos x+\sin x}$;

16. $\int 2^8\sin^4 x\cos^4 xdx$; 17. $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin^8 x}}$; 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}$;

19. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$; 20. $\int \sqrt{49+x^2}dx$.

Вариант 20.

1. $\int \frac{2x}{\sqrt{9x^2-16}}dx$; 2. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3. $\int \frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$;

4. $\int x^2\cos(4-x^3)dx$; 5 . $\int \frac{2x-\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}dx$; 6. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+2}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+2x}}$; 8. $\int \frac{x+3}{x^2+4x+9}dx$; 9. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$;

10. $\int (8-3x)\cos 5x dx$; 11. $\int (x^2+4)e^{-2x}dx$; 12. $\int \frac{(2x^3+3)dx}{x^3+6x^2+8x}$;

13. $\int \frac{(6x+1)dx}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}$; 14. $\int \frac{x^3+4x^2+5}{x^2+6x}dx$; 15. $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$;

16. $\int \sin^4\frac{x}{4}dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^8 x}}$; 18. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}$;

19. $\int \sqrt{5-x^2}dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}$.

Вариант 21.

1. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sin^2(x^2+x)}$; 2. $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x}$; 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$;

4. $\int \frac{x dx}{x^4+3}$; 5. $\int \left(e^{2x}+6\right)^7 e^{2x}dx$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+17}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x+2}}$; 8. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$; 9. $\int (x+5)\sin 3x dx$;

10. $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; 11. $\int (x^2+3x+1)e^{-4x}dx$; 12. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$;

13. $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^2(x^2+2x+5)}$; 14. $\int \frac{2x^3+4x+1}{(x-1)(x-5)}dx$; 15. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

16. $\int 8\sin^6\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$; 17. $\int\sqrt{\sin^7 x}\cos^3 x dx$;

18. $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x+\sqrt{x}}$; 19. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$; 20. $\int\sqrt{8+x^2}dx$.

Вариант 22.

1. $\int\frac{xdx}{9x^4-25}$; 2. $\int e^{\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$; 3. $\int\frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}$;

4. $\int\frac{\ln xdx}{x(1-\ln^2 x)}$; 5. $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; 6. $\int\frac{dx}{x^2+4x-21}$;

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; 8. $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2-2x+2}$; 9. $\int(2x-5)\cos 4xdx$;

10. $\int\frac{x\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 11. $\int\left(x^2+5x-1\right)e^{2x}dx$; 12. $\int\frac{(x^2+x+2)dx}{(x-1)^2(x+3)^2}$;

13. $\int\frac{(x^2+2x+4)dx}{(x+1)(x^2+3x+5)}$; 14. $\int\frac{(x^4+5x^2+1)}{x^2+4x}dx$;

15. $\int\frac{\sin xdx}{1+\sin x}$; 16. $\int\cos^4 xdx$; 17. $\int\sin^5 x\cdot\sqrt[3]{\cos x}dx$;

18. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$; 19. $\int\sqrt{x^2-9}dx$; 20. $\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx$.

Вариант 23.

1. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$; 2. $\int\frac{(\arcsin x)^2+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3. $\int\frac{\sin tgx}{\cos^2 x}dx$;

4. $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; 5. $\int\frac{\sqrt[5]{4+\ln x}}{x}dx$; 6. $\int\frac{dx}{8x^2-10x-3}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}}$; 8. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2x+5}$; 9. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$;

10. $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$; 11. $\int (x^2+4x)e^{\frac{x}{2}}dx$; 12. $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+2)(x-2)(x-1)}$;

13. $\int \frac{(6x^2+x+2)dx}{(x+4)(x^2-x+1)}$; 14. $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x^2+2x+1)(x-2)}dx$; 15. $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x+\sin x}$;

16. $\int \cos^4 \frac{x}{2}dx$; 17. $\int (\sin x)^{\frac{5}{9}}\cos^3 x dx$; 18. $\int \frac{\left(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}\right)dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$;

19. $\int \sqrt{\left(x^2-9\right)^5}dx$; 20. $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{(4+x^2)}}$.

Вариант 24.

1. $\int \sqrt[3]{4x^2+1}xdx$; 2. $\int \left(1+e^{3x}\right)^4 e^{3x}dx$; 3. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}x}dx}{\cos^2 x}$;

4. $\int \frac{x^2+\ln x}{x}dx$ 5. $\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\cos x+\sin x)^2}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$;

7. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; 8. $\int \frac{(3x+4)}{3-2x-x^2}dx$; 9. $\int (x+5)\sin 3xdx$;

10. $\int (x^2+6x+9)\ln 2xdx$; 11. $\int (x^2-3x)e^{-2x}dx$;

12. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)(x-3)(x-2)}$;

13. $\int \frac{(3x^2+5)dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$; 14. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{x^2-5x}dx$; 15. $\int \frac{dx}{5+3\sin x}$;

16. $\int 8\sin^4 \frac{x}{4}\cos^4 \frac{x}{4}dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[5]{\cos^9 x}}$; 18. $\int \frac{\left(6-\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)dx}{\sqrt[3]{x}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}$;

19. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}$; 20. $\int \sqrt{81+x^2}dx$.

Вариант 25.

1. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx;$ 2. $\int (x+2)\cos(x^2+4x+1)dx$; 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-\ln^2 x}}$;

4. $\int \frac{e^x dx}{3-4e^x}$ 5. $\int \frac{(x^2+2)dx}{\sin^2(x^3+6x)}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2+2x}}$; 8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$; 9. $\int (x+4)e^{-x}dx;$

10. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx$; 11. $\int (x^2-3x+2)\sin 2xdx$;

12. $\int \frac{(2x+5)dx}{(x+4)(x-3)^2}$; 13. $\int \frac{x^3dx}{(x+2)^2(x^2+1)}$; 14. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$;

15. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$; 16. $\int 2^4\sin^6 xdx;$ 17. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$;

18. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$; 19. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$.

Вариант 26.

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$; 2. $\int e^{-4x^3}x^2dx$; 3. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$;

4. $\int \frac{\cos(\ln x)dx}{x}$; 5. $\int \frac{\sqrt{2\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}dx;$ 6. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

7. $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-2x+5}$; 8. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$; 9. $\int (2x^2+x)\ln xdx;$

10. $\int (x-1)e^{5x}dx$; 11. $\int (x^2-3x)\sin 2xdx$; 12. $\int \frac{(4x+1)dx}{(x+3)(x-1)^2}$;

13. $\int \frac{(2x+5)dx}{(x-2)(x^2+4)}$; 14. $\int \frac{(x^3+2x+1)dx}{x^2-4x}$; 15. $\int \frac{dx}{3\sin x+2\cos x}$;

16. $\int 2^4 \sin^6 2x dx$; 17. $\int \sqrt[7]{\sin^5 x} \cos^5 x dx$; 18. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{x}}$;

19. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$; 20. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}$.

Вариант 27.

1. $\int \frac{2x+5dx}{\sqrt{7x^2+1}}$; 2. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)dx}{\cos^2(x+1)}$; 3. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$;

4. $\int \frac{e^{2x}}{3+e^{4x}} dx$; 5. $\int 7^{x^3+1} \cdot x^2 dx$; ; 6. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$; 8. $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2-2x+6}$; 9. $\int (2x^2+1)\sin 4x dx$;

10. $\int (x+1)\ln^2(x+1)dx$; 11. $\int (x^2+x-1)e^{2x} dx$; 12. $\int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2-9)}$;

13. $\int \frac{(4x+1)dx}{(x-2)(x^2+3x+6)}$; 14. $\int \frac{3x^3+4x+1}{x^2-2x} dx$; 15. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x}$;

16. $\int 4\cos^4 \frac{x}{4} dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^5 x}} dx$; 18. $\int \frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[4]{x^3}} dx$;

19. $\int \frac{dx}{(49+x^2)\sqrt{49+x^2}}$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(64-x^2\right)^3}}$.

Вариант 28.

1. $\int x\sin(1-x^2)dx$; 2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; 3. $\int \frac{\left(\operatorname{arctg}(3x)\right)^4}{1+9x^2} dx$;

4. $\int \sqrt[3]{1+4\sin x} \cos x dx$; 5. $\int \frac{(\sin x+\cos x)dx}{(\sin x-\cos x)^5}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$; 8. $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$; 9. $\int (1+3x)e^{-2x}dx$;

10. $\int x\ln 2x dx$ 11. $\int (2x^2+4x+7)\cos 2x dx$;

12. $\int \frac{(4x+3)dx}{x^3-5x+6}$; 13. $\int \frac{(3x+5)dx}{(x+2)(x^2+1)}$ 14. $\int \frac{x^4+6x^2+5}{(x+1)(x^2+1)}dx$;

15. $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}$ 16. $\int \sin^6 \frac{x}{2} dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^9 x}} dx$;

18. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$; 19. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$; 20. $\int \sqrt{x^2+4}dx$.

Вариант 29.

1. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$; 2. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; 3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$;

4. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; 5. $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$; 6. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$; 8. $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2-x+1}$; 9. $\int (4x+1)e^{-x}dx$;

10. $\int \arccos x dx$; 11. $\int (x^2-5x+6)\sin 3x dx$;

12. $\int \frac{(4x+5)dx}{x(x-1)(x-2)}$; 13. $\int \frac{2x^2+6x+3}{(x-2)(x^2+4õ+5)}dx$;

14. $\int \frac{x^4+5x+4}{x^2+6x}dx$; 15. $\int \frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$;

16. $\int 16\sin^4 \frac{x}{2}\cos^4 \frac{x}{2} dx$; 17. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[7]{\sin^5 x}}$;

18 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$; 19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$; 20. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx$.

Вариант 30.

1. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+1}}$; 2. $\int \frac{e^{2x}dx}{3+e^{2x}}$; 3. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$;

4. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; 5. $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$; 6. $\int \frac{dx}{4-x^2-4x}$;

7. $\int \frac{(4-3x)dx}{x^2+6x+18}$; 8. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}$; 9. $\int x\sin 2x\,dx$;

10. $\int \ln(x^2+4)dx$; 11. $\int (x^2-x+1)e^{3x}dx$;

12. $\int \frac{(2x^2+3)dx}{x(x+4)(x-2)}$;

13. $\int \frac{(5x+1)dx}{(x-1)(x^2+9)}$; 14. $\int \frac{(x^4+6x^2+1)dx}{x^2+5x}$; 15. $\int \frac{dx}{4+\sin x+\cos x}$;

16. $\int 16\sin^6\frac{x}{8}\cos^2\frac{x}{8}dx$; 17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$; 18. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx$;

19. $\int \sqrt{16-x^2}dx$; 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

Библиографический список использованной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов.- М.: Наука, 2003 - Т.1. - 416 с.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Астрель, 2003. – 472 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с.
4. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для студентов втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. - М.: Высш. школа, 2003 - ч.3 - 304 с.