PROGETTO DE CORSO

CONTROLLO DEI ROBOT

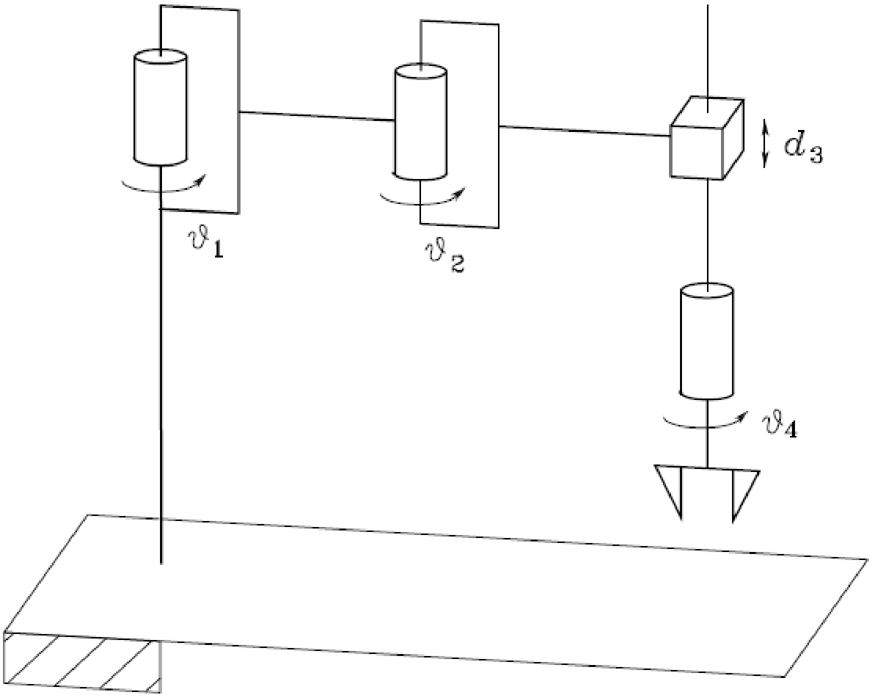
David Romero Pastor

Víctor Borrero López

Contenuto

0. Introduzione all' elaborato del robot

Prima di tutto, si deve fare un modello del robot mediante il algoritmo Denavit-Hartenberg. Poi è possibile vedere il robot, con gli seguenti assi:



Che, usando questo algoritmo, si ottiene la seguente matrice di parametri:

	$\boldsymbol{\vartheta_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$
1	ϑ_1	0	0.5	0
2	ϑ_2	0	0.5	π
3	0	d_3+0.25	0	0
4	ϑ_4	0.25	0	0

Ottenendo la seguente matrice de transformazione:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2-q_4) & \sin(q_1+q_2-q_4) & 0 & a_2 * \cos(q_1+q_2) + a_1 * \cos(q_1) \\ \sin(q_1+q_2-q_4) & -\cos(q_1+q_2-q_4) & 0 & a_2 * \sin(q_1+q_2) + a_1 * \sin(q_1) \\ 0 & 0 & -1 & d0 - l_1 - l_2 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dove $q_1, q_2, q_3 e q_4$ sono i valori delle articolazioni.

Con questa matrice è possibile stabilire il modello cinematico diretto, dove si collega la posizione e l'orientamiento del effettore finale con i valori delle articolazioni.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_2} * \mathbf{cos}(\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2}) + \boldsymbol{a_1} * \mathbf{cos}(\boldsymbol{q_1})$$
$$(Posizione\ nello\ asse\ x)$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a_2} * \mathbf{sin}(\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2}) + \boldsymbol{a_1} * \mathbf{sin}(\boldsymbol{q_1})$$
$$(Posizione\ nello\ asse\ y)$$

$$\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{l_1} - \boldsymbol{l_2} - \boldsymbol{q_3}$$
$$(Posizione\ nello\ asse\ z)$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{cos}(\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{q_4}) & \mathbf{sin}(\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{q_4}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{sin}(\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{q_4}) & -\mathbf{cos}(\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{q_4}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$(Matrice\ de\ rotazione, orientamiento)$$

1. <u>Ellissoidi di manipolabilità</u>

Prima di tutto, cos' è un ellissoide de manipolabilità? Non è altro che un modo di studiare la capacità del cambio di posizione e orientamiento del effettore finale di un sistema robotico in una configurazione data.

Così, l'asse maggiore dell'ellissoide significa che c'è maggiore capacità di manipolabilità in quella direzione e che nella direzione del asse minore c'è meno capacità.

In questo caso, si è fatta l'analisi in velocità e forza di diversi punti nello spazio di lavoro, nelmodo che si può vedere come cambiano i diversi ellissoidi per i differenti punti.

Per fare questo, prima si deve sapere il jacobiano. Partendo dal modello cinematico diretto, che si può esprimere così:

$$T_e(q) = \begin{bmatrix} R_e(q) & p_e(q) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Questo modello permette di stabilire la collegazione tra la velocità delle articolazioni e la diretta e angolare del effettore finale.

$$\dot{p_e} = J_P(q)\dot{q}$$

$$\omega_e = J_O(q)\dot{q}$$

Essendo il jacobiano:

$$J = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix}$$

Otteniamo il parametro J_P e J_O nella seguente maniera:

$$\boldsymbol{J_{P_i}} = \boldsymbol{z_{i-1}} \times (\boldsymbol{p_e} - \boldsymbol{p_{i-1}}) \quad \boldsymbol{J_{O_i}} = \boldsymbol{z_{i-1}} \qquad \text{se l'articolazione è rotatoria}$$

$$\boldsymbol{J_{P_i}} = \boldsymbol{z_{i-1}} \quad \boldsymbol{J_{O_i}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{se l'articolazione è prismatica}$$

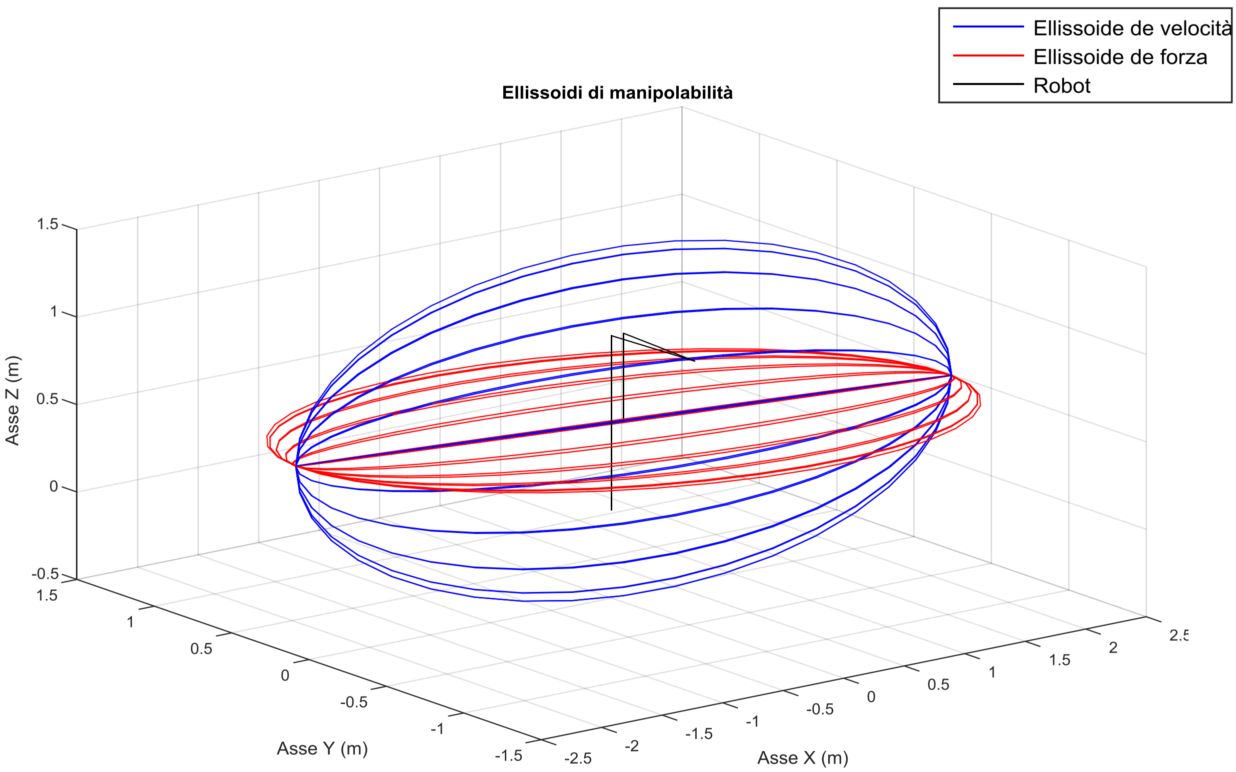
Ottenendo il seguente jacobiano:

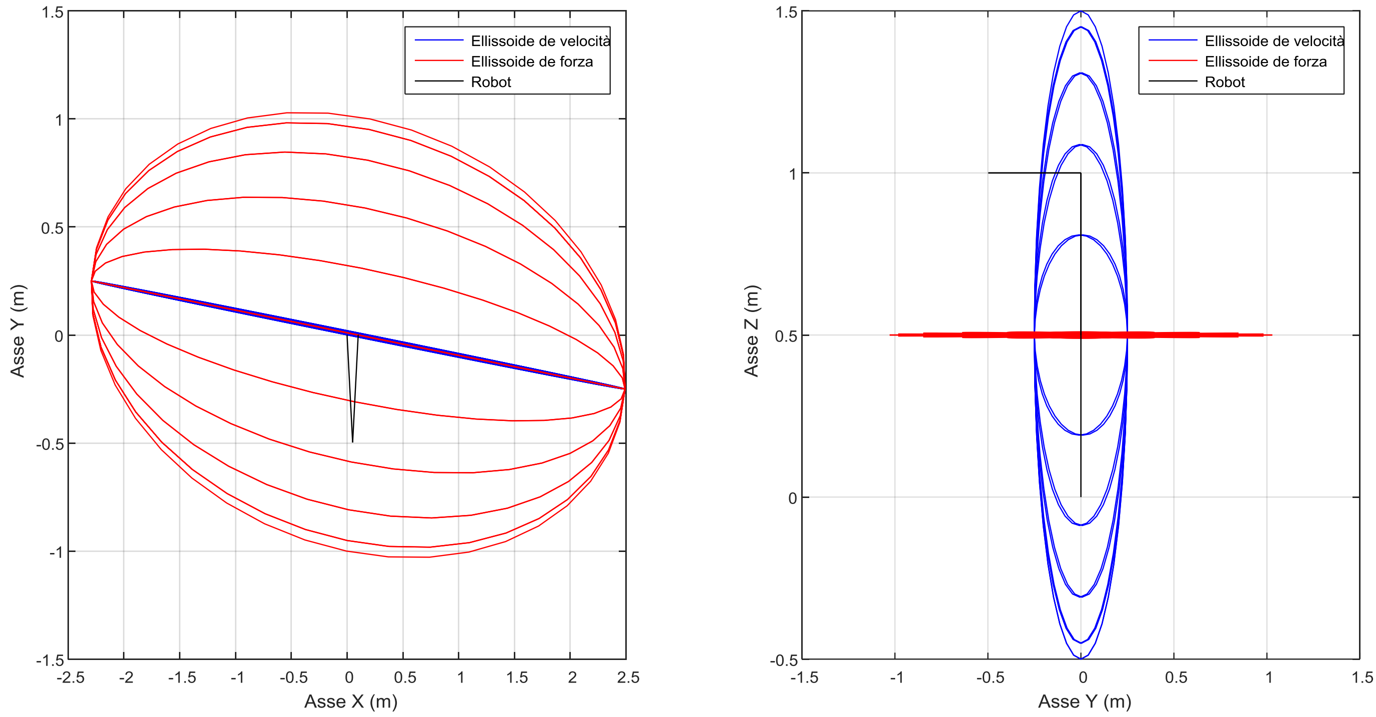
$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\sin(q_1+q_2)}{2} - \frac{\sin(q_1)}{2} & -\frac{\sin(q_1+q_2)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(q_1+q_2)}{2} + \frac{\cos(q_1)}{2} & \frac{\cos(q_1+q_2)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

E alla fine, per ottenere gli assi degli ellissoidi di manipolabilità, si devi trovare gli autovalori e autovettori del prodotto tra il jacobiano e la sua trasposta. In questo modo, gli autovalori di questa matrice costituiscono gli assi degli ellissoidi, e la matrice di autovettori costituiscono la matrice di rotazione.

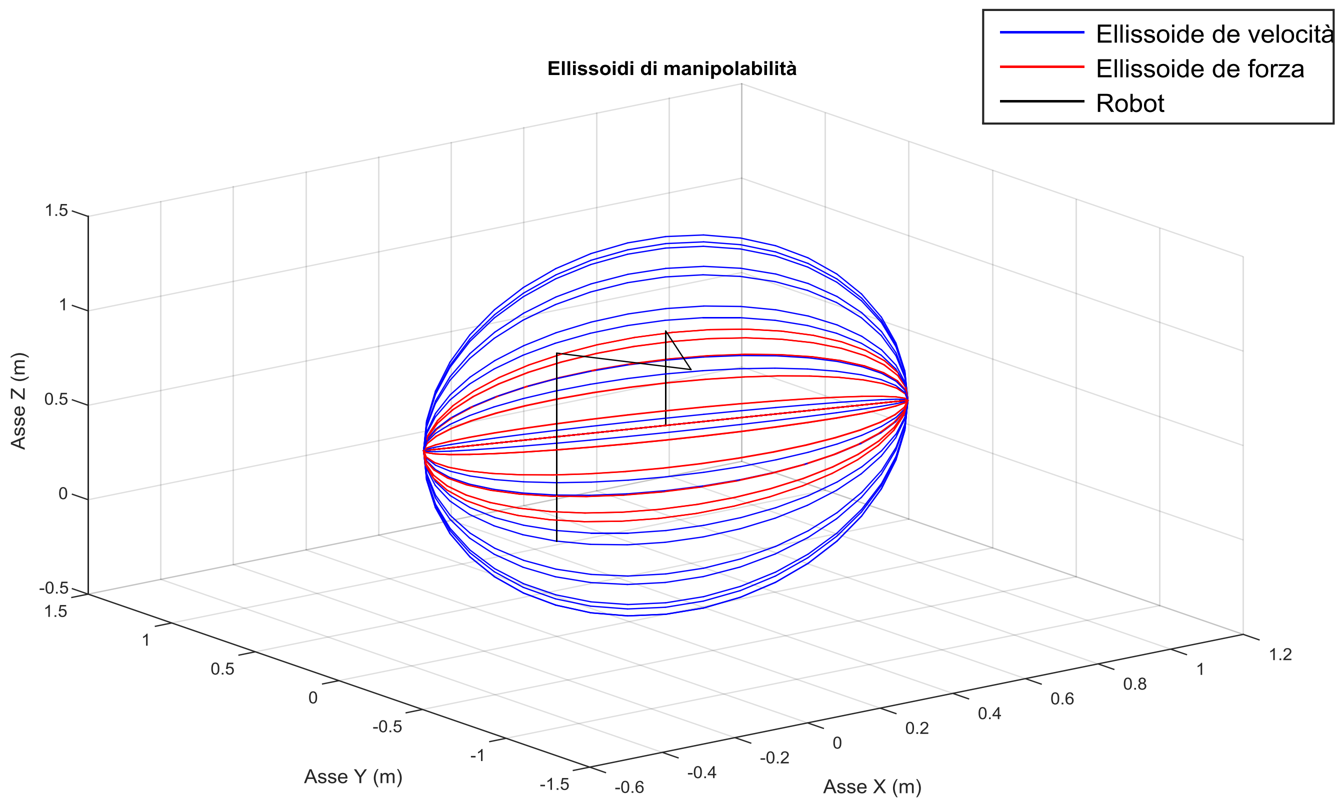
Sono stati fatti diversi punti, che si può vedere poi:

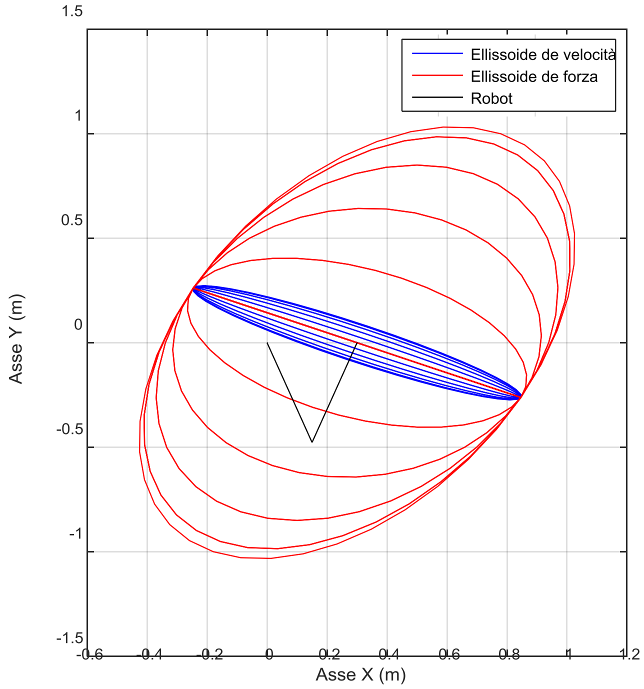
- **Punto (0.1, 0, 0.5):**



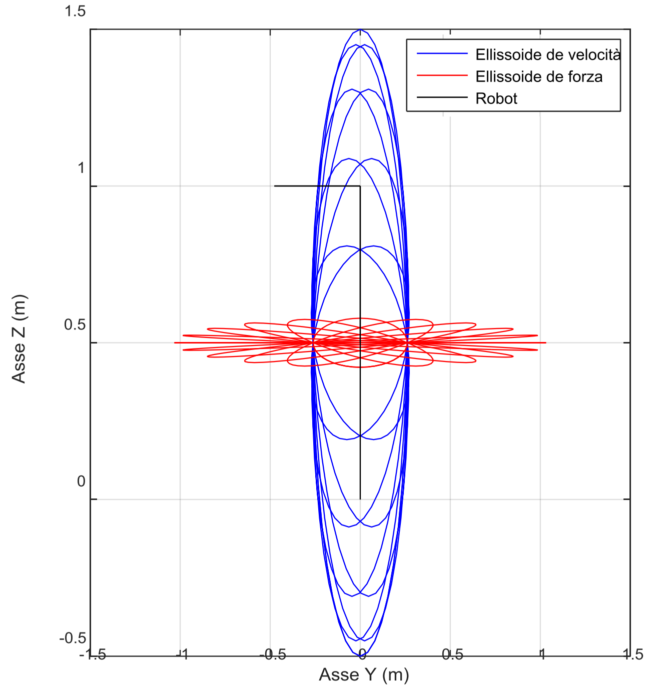

Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse X (m)
Asse Y (m)
Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse Y (m)
Asse Z (m)

- **Punto (0.3, 0, 0.5):**


Ellissoidi di manipolabilità
Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse Z (m)
Asse Y (m)
Asse X (m)

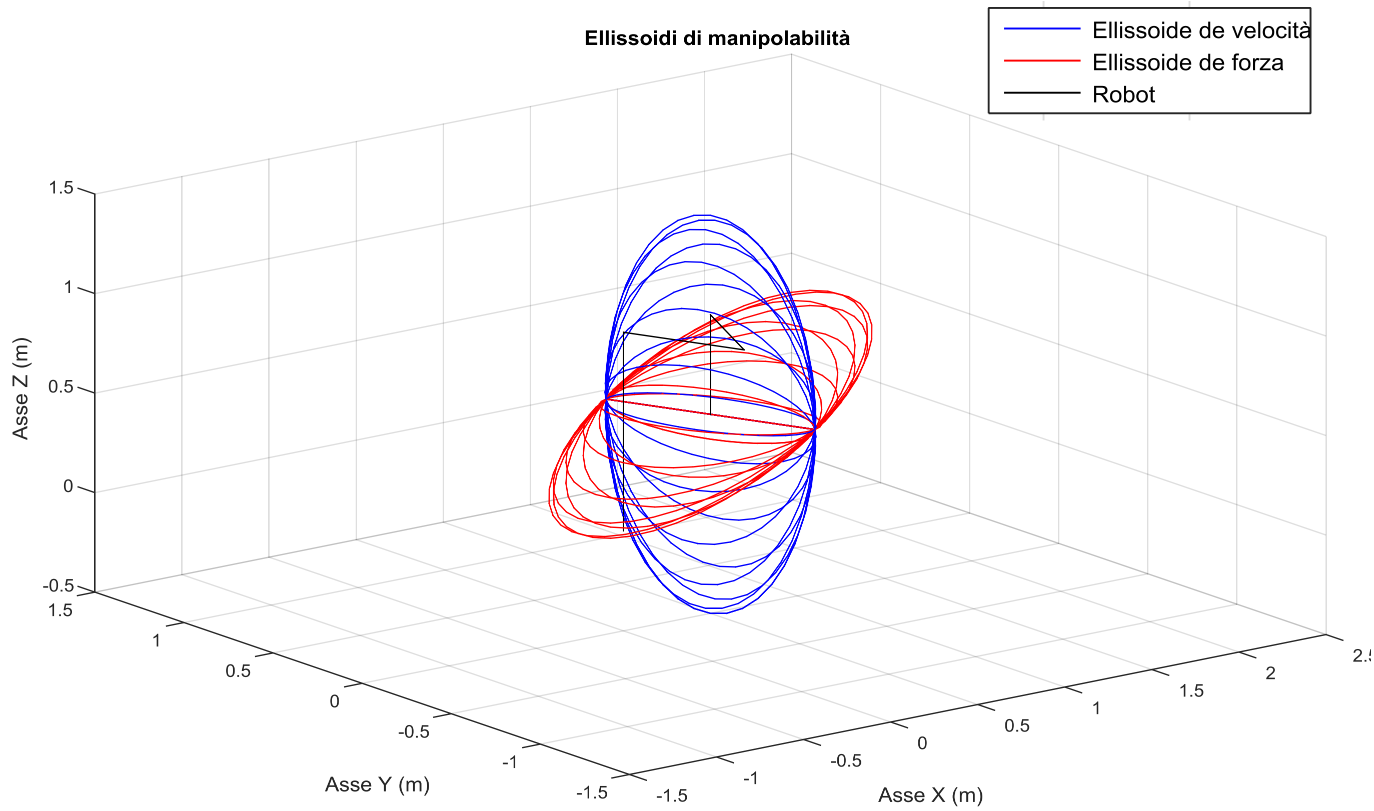


Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse X (m)
Asse Y (m)

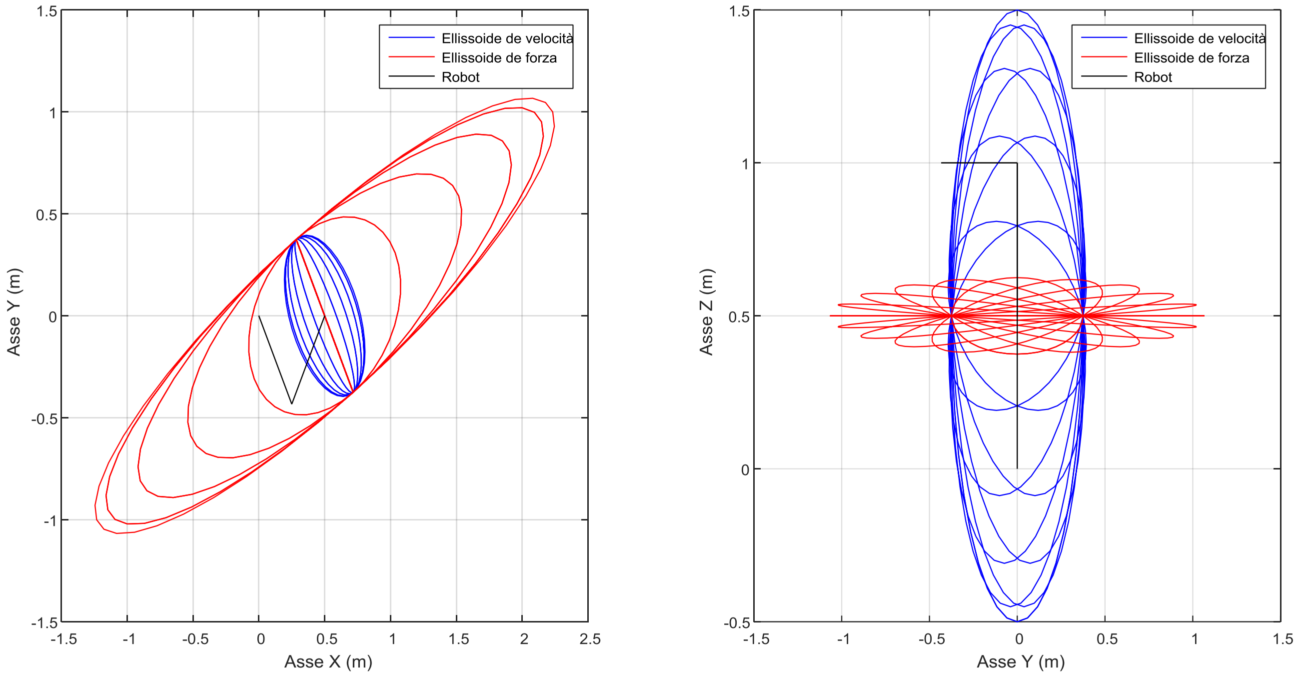


Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse Y (m)
Asse Z (m)

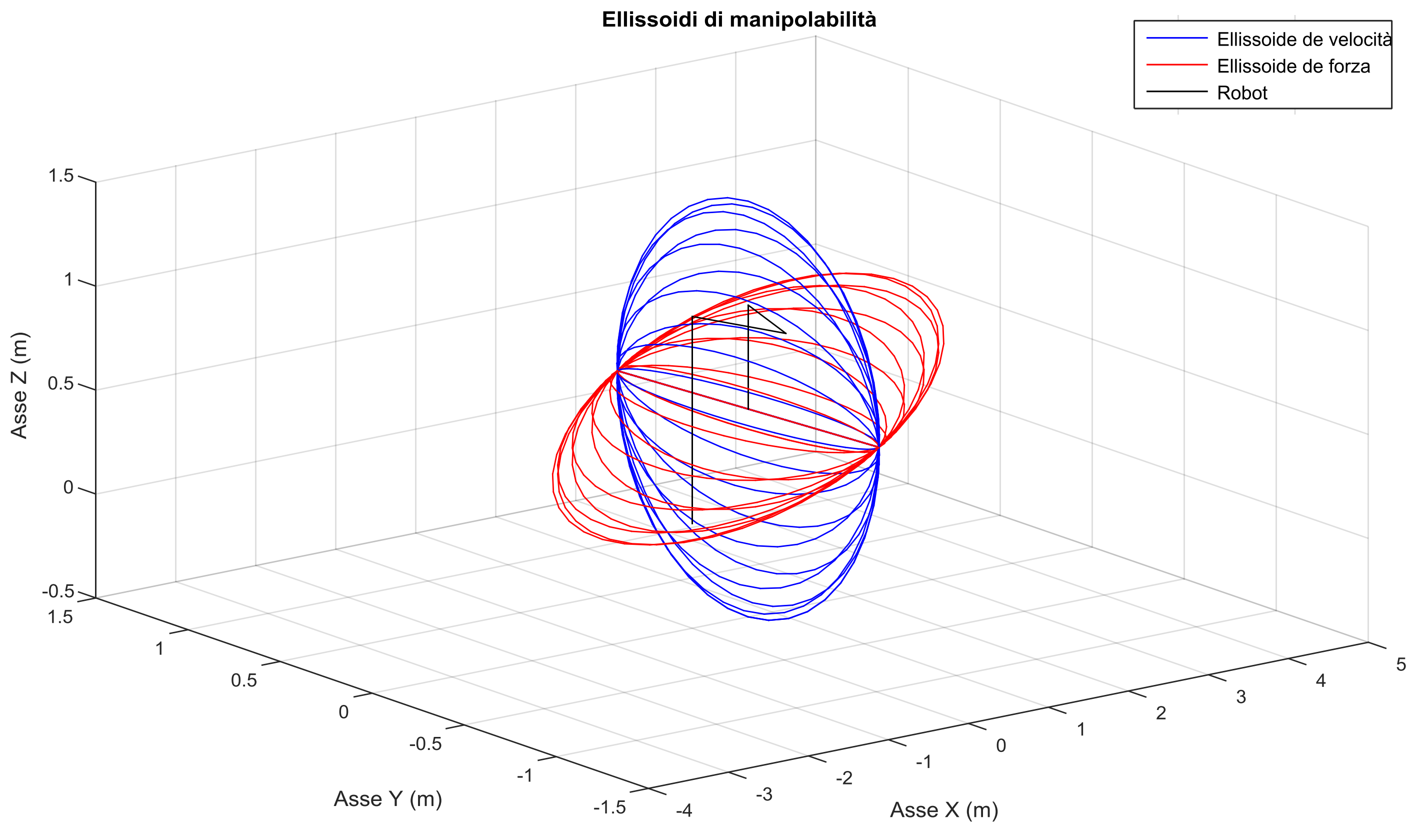
- **Punto (0, 0.5, 0.5):**

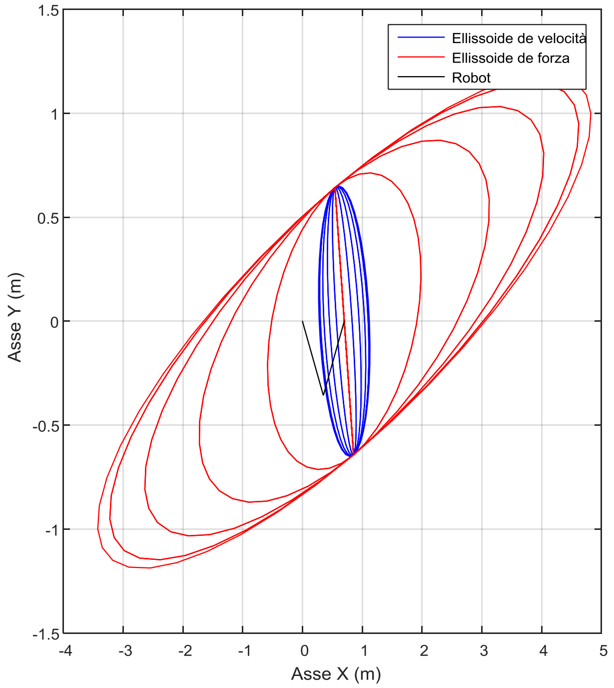


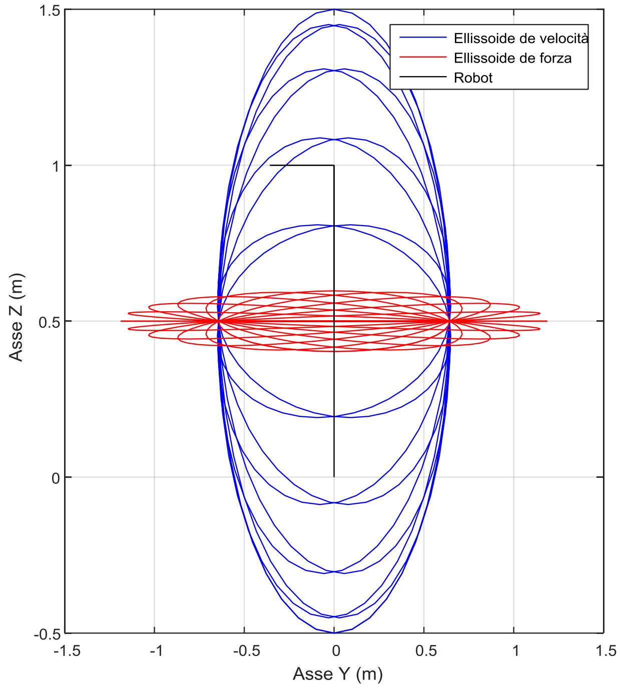
Ellissoidi di manipolabilità
Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse Z (m)
Asse Y (m)
Asse X (m)


Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse X (m)
Asse Y (m)
Asse Z (m)

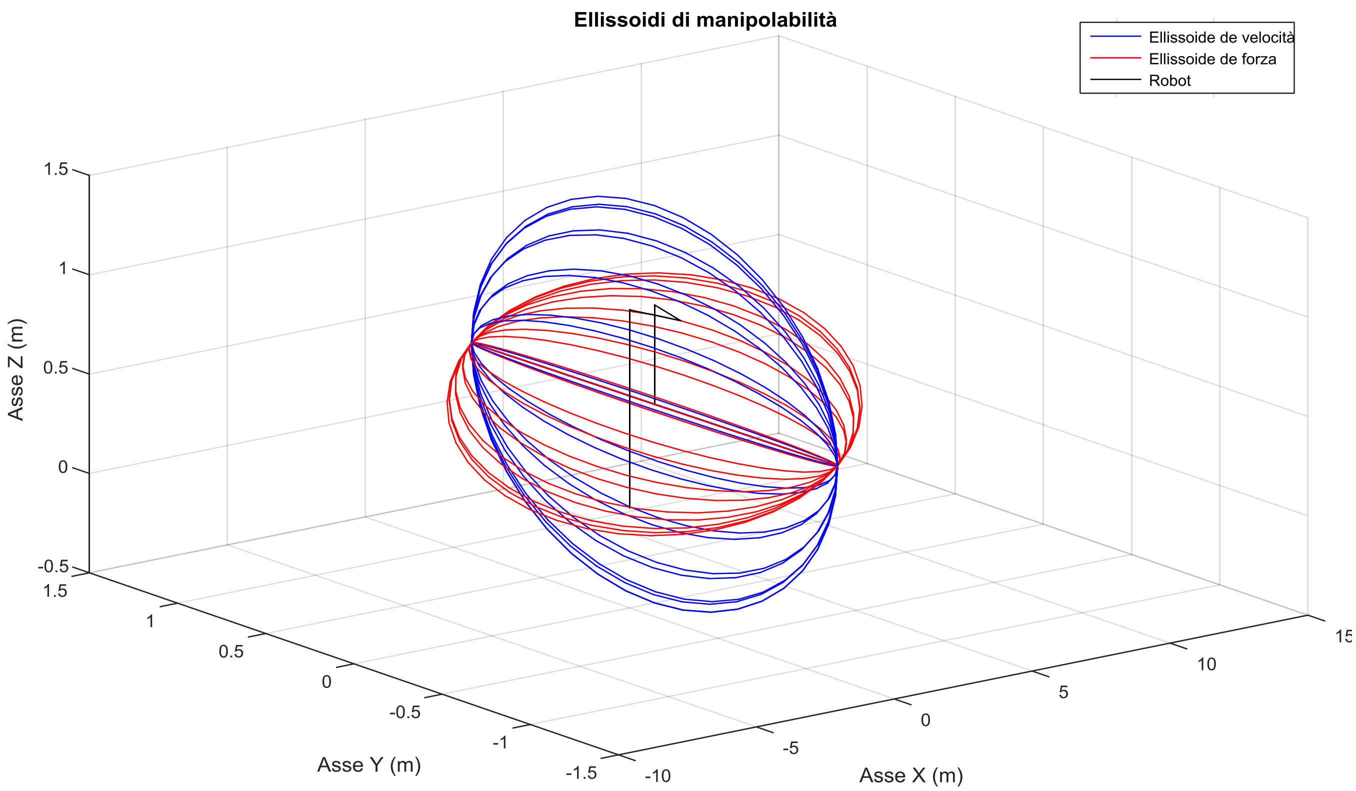
- **Punto (0, 0.7, 0.5):**

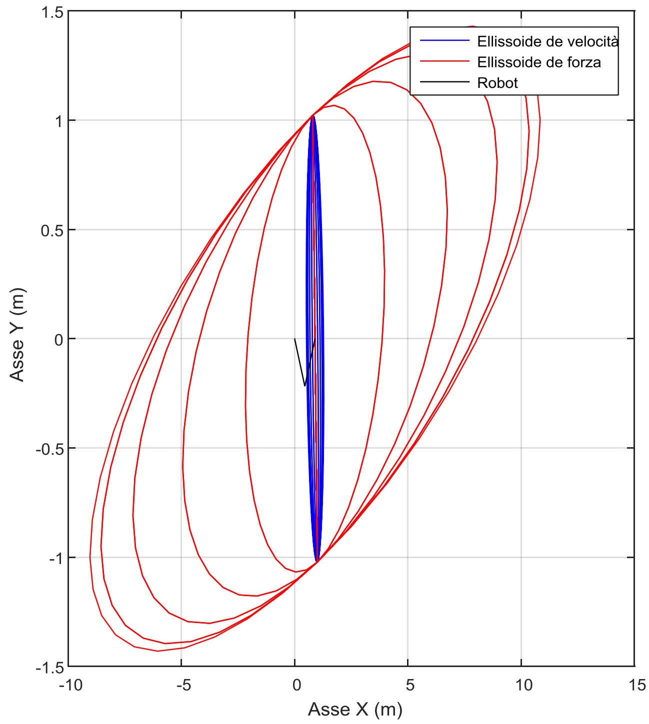

Ellissoidi di manipolabilità
Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse X (m)
Asse Y (m)
Asse Z (m)

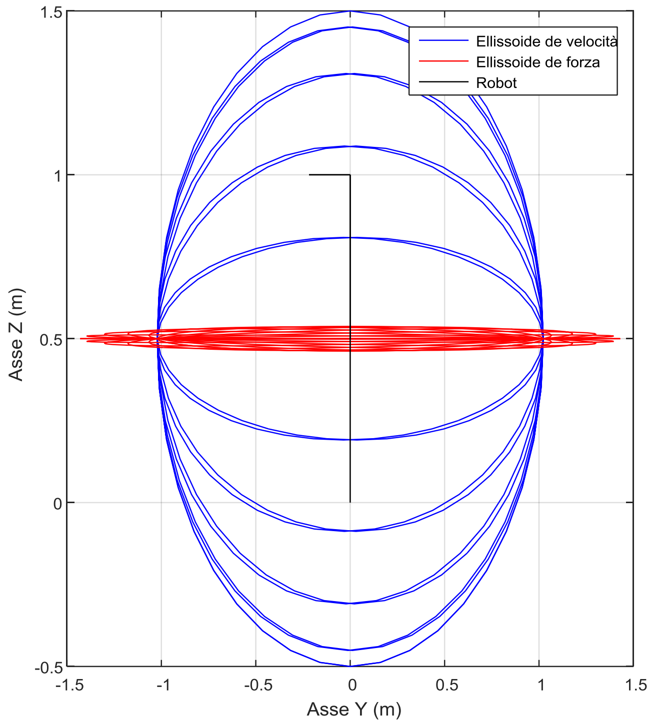

Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse X (m)
Asse Y (m)


Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse Y (m)
Asse Z (m)

- **Punto (0, 0.9, 0.5):**


Ellissoidi di manipolabilità
Ellissoide de velocità
Ellissoide de forza
Robot
Asse Z (m)
Asse Y (m)
Asse X (m)





2. Traiettoriarettilinea/circolare

Per la traiettoria si è scelto due tratti diversi, uno rettilineo e uno circolare, ognuno con 8 punti di percorso.

Per eseguire il tratto rettilineo la procedura è la seguente:

- Scegliere la posizione iniziale e finale dell'efettore finale.
- Trovare l'equazione della linea che passa attraverso i due punti.
- Dividire il segmento che va dalla posizione iniziale alla finale in 9 sezioni, ottenendo 8 punti intermedi.
- Calcolare le variabili articolare per ogni punto con le equazioni della cinematica inversa, ottenendo 10 valori d'ogni variabile (8 punti intermedi più il punto iniziale e il finale).

```
cos2=(posx ^2+posy^2-a1^2-a2^2)/(2*a1*a2);
sin2=sqrt(1-cos2^2);
q2=atan2(sin2,cos2);

sin1=(a1+a2*cos2)*posy-a2*sin2*posx)/(posx^2+posy^2);
cos1=((a1+a2*cos2)*posx+a2*sin2*posy)/(posx^2+posy^2);
q1=atan2(sin1,cos1);

q3=d0-l1-l2-pos_z;

q4(a scelta)
```

- Calcolare 4 curve cubiche (una per ogni variabile articolare) con velocità calcolate nei punti di percorso per ogni sezione, che uniscono i valori delle variabili articolare.

```
a0=qi;
a1=qi_der;

vk=(qk-qi)/T;
vk1=(qf-qk)/T;

if(sign(vk)~=sign(vk1) | k==N+1)
     qk_der=zeros(length(qi),1);
else
     qk_der=(vk+vk1)/2;
end

a3=(qk_der*T-2*qk+a1*T+2*a0)/(T^3);
a2=(qk-a3*T^3-a1*T-a0)/(T^2);

qk=a3*t^3+a2*t^2+a1*t+a0;
```

- Calcolare la curva della posizione dell'efettore finale con le equazioni della cinematica diretta.

```
x=a2*cos(q1+q2)+a1*cos(q1);
y=a2*sin(q1+q2)+a1*sin(q1);
z=d0-l1-l2-q3;
```

Per eseguire il tratto circolare la procedura è similare:

- Scegliere la posizione iniziale, una posizione intermedia e la posizione finale dell'efettore finale.
- Trovare l'equazione della circonferenza che passa attraverso i tre punti.
- Dividire l'arco che va dalla posizione iniziale alla finale in 9 sezione, ottenendo 8 punti intermedi.
- Calcolare le variabili articolare per ogni punto con le equazioni della cinematica inversa, ottenendo 10 valori d'ogni variabile (8 punti intermedi più il punto iniziale e il finale).

```
cos2=(posx ^2+posy^2-a1^2-a2^2)/(2*a1*a2);
sin2=sqrt(1-cos2^2);
q2=atan2(sin2,cos2);

sin1=(a1+a2*cos2)*posy-a2*sin2*posx)/(posx^2+posy^2);
cos1=((a1+a2*cos2)*posx+a2*sin2*posy)/(posx^2+posy^2);
q1=atan2(sin1,cos1);

q3=d0-l1-l2-pos_z;
```

```
q4(a scelta)
```

- Calcolare 4 curve cubiche (una per ogni variabile articolare) con velocità calcolate nei punti di percorso per ogni sezione, che uniscono i valori delle variabili articolare.

```
a0=qi;
a1=qi_der;

vk=(qk-qi)/T;
vk1=(qf-qk)/T;

if(sign(vk)~=sign(vk1) | k==N+1)
     qk_der=zeros(length(qi),1);
else
     qk_der=(vk+vk1)/2;
end

a3=(qk_der*T-2*qk+a1*T+2*a0)/(T^3);
a2=(qk-a3*T^3-a1*T-a0)/(T^2);

qk=a3*t^3+a2*t^2+a1*t+a0;
```

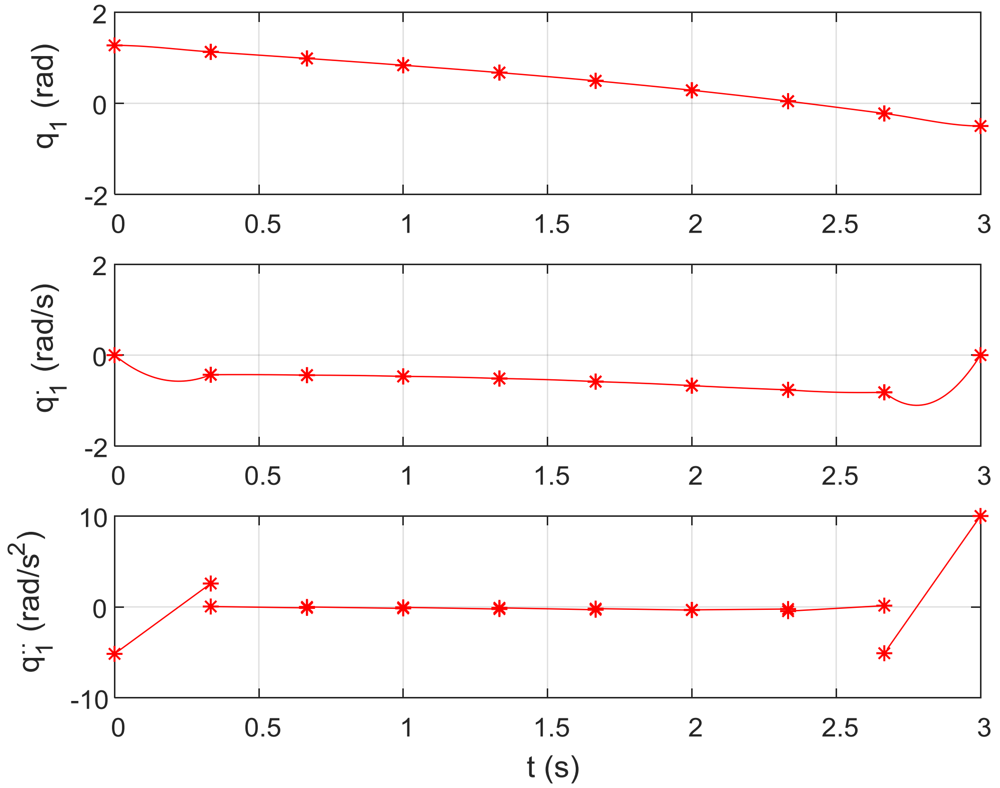
- Calcolare la curva della posizione dell'efettore finale con le equazioni della cinematica diretta.

```
x=a2*cos(q1+q2)+a1*cos(q1);
y=a2*sin(q1+q2)+a1*sin(q1);
z=d0-l1-l2-q3;
```

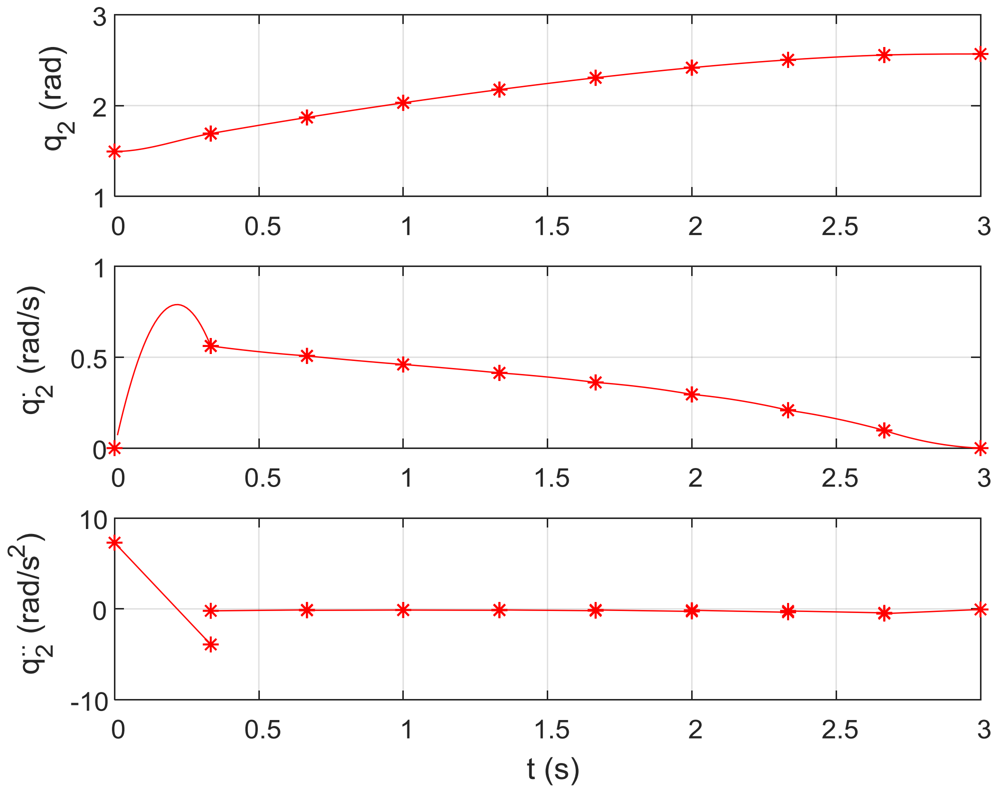
I punti caratteristici per le traiettorie sono stati scelti casualmente. Per il tratto rettilineo:

- Posizione iniziale: (-0.32, 0.66, 0.1)
- Posizione finale: (0.2, 0.2, 0.5)

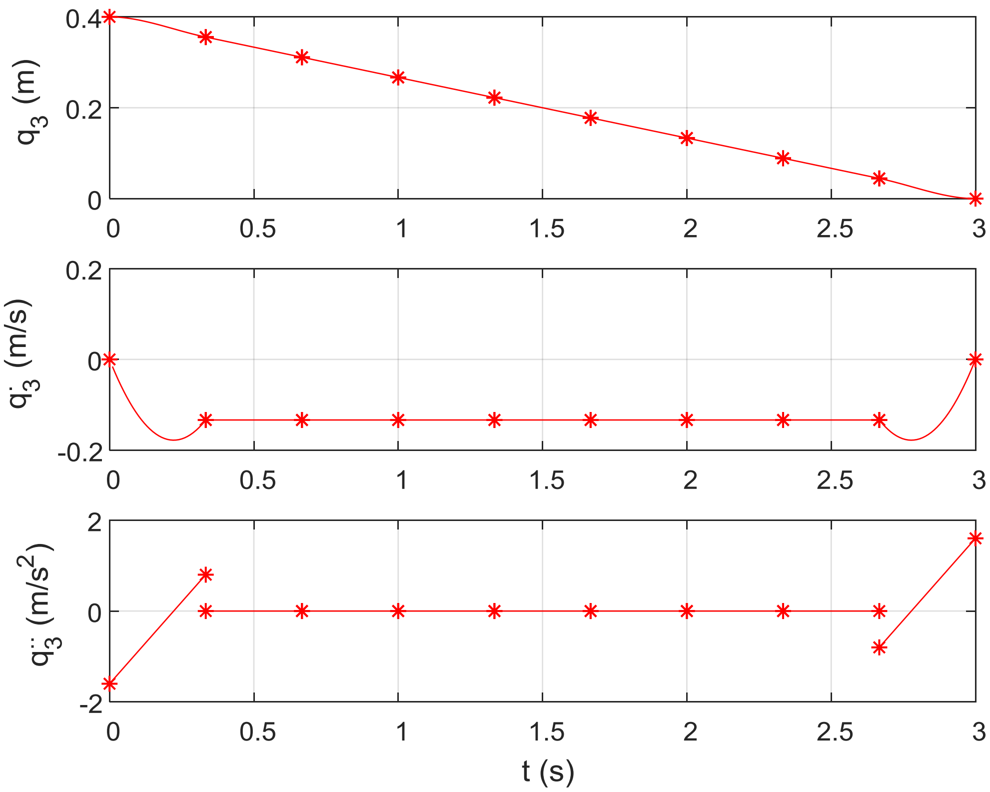
Seguendo la procedura e mantenendo la quarta articolazione fissa, si ottengono i seguenti risultati per le variabile articolare:

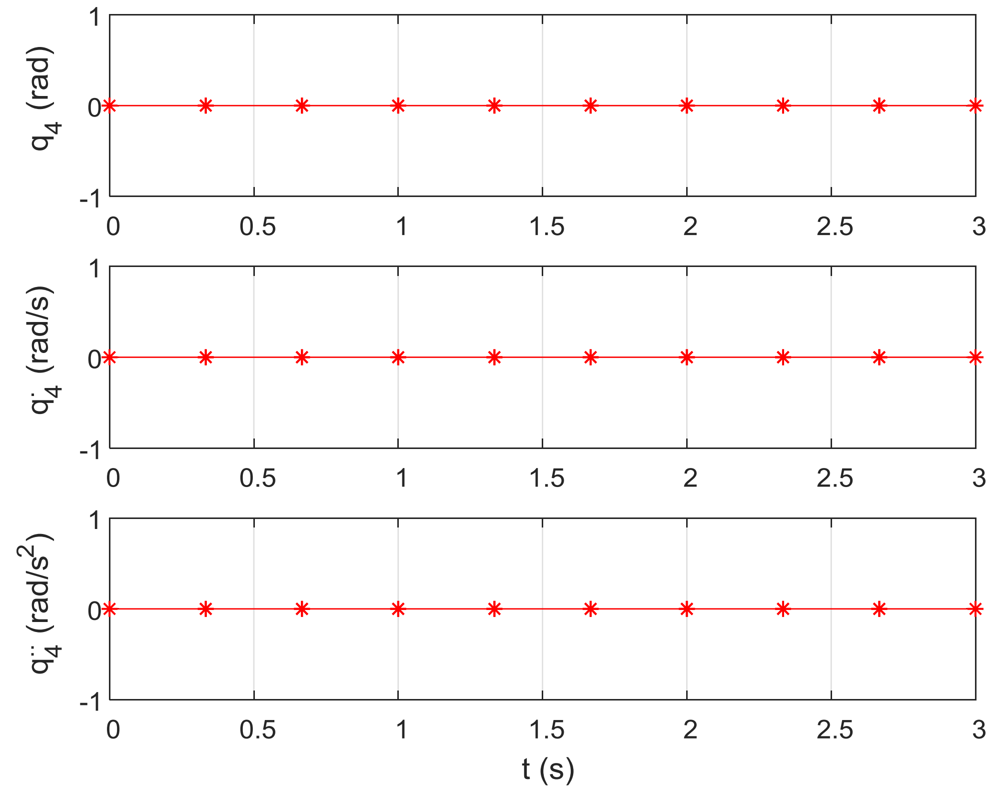


q_1 (rad)
q̇_1 (rad/s)
q̈_1 (rad/s^2)
t (s)

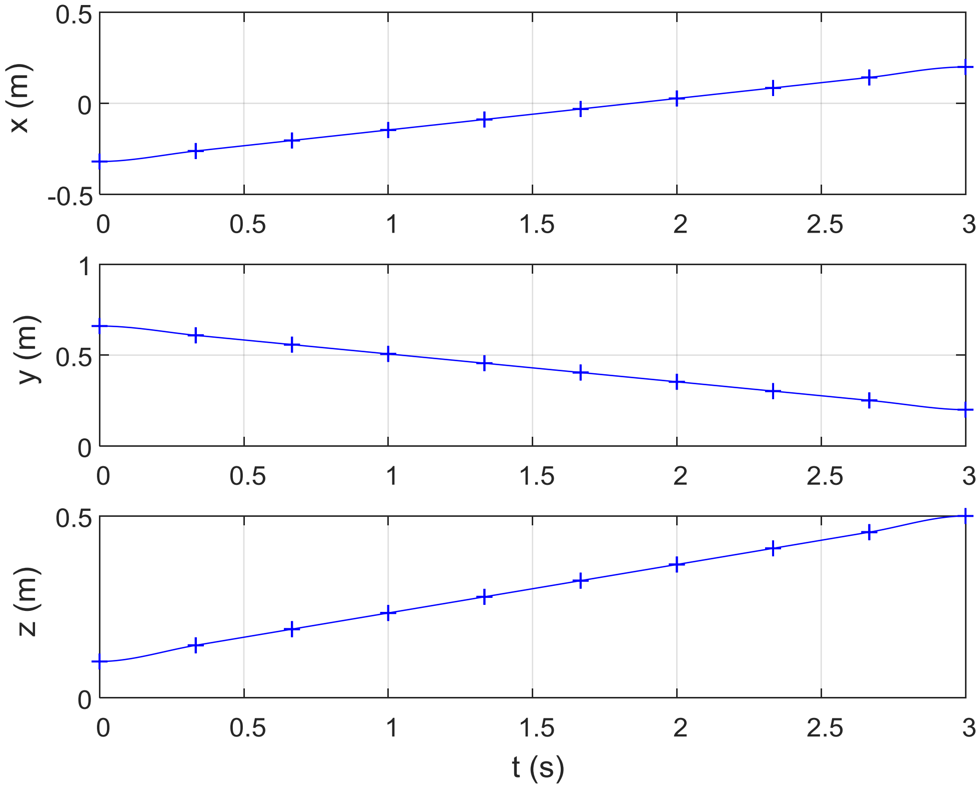


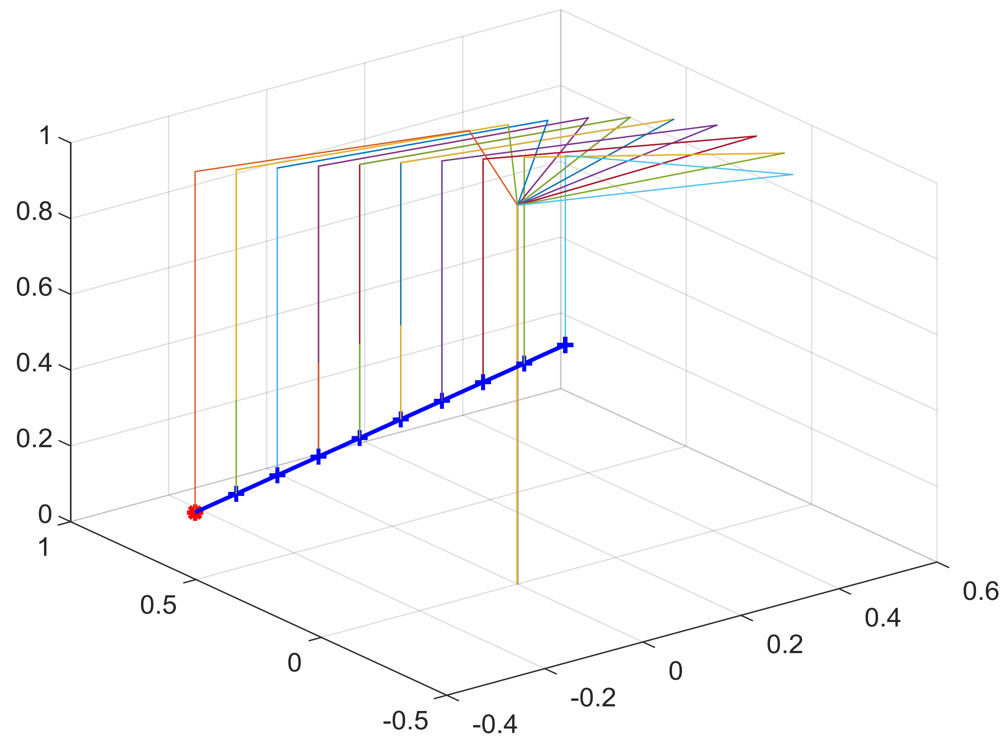
q_2 (rad)
q̇_2 (rad/s)
q̈_2 (rad/s^2)
t (s)





Questi valori resultano nella seguente evoluzione dell'efettor finale:

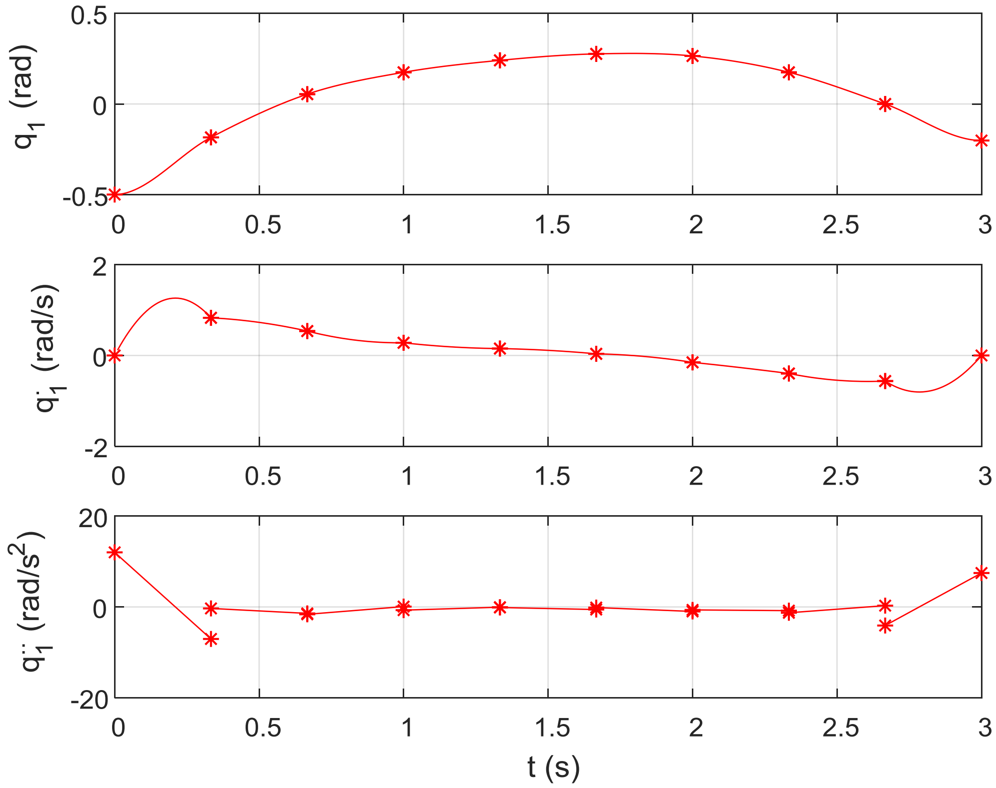

0.5
0
-0.5
x (m)
1
0.5
0
y (m)
0.5
0
z (m)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t (s)

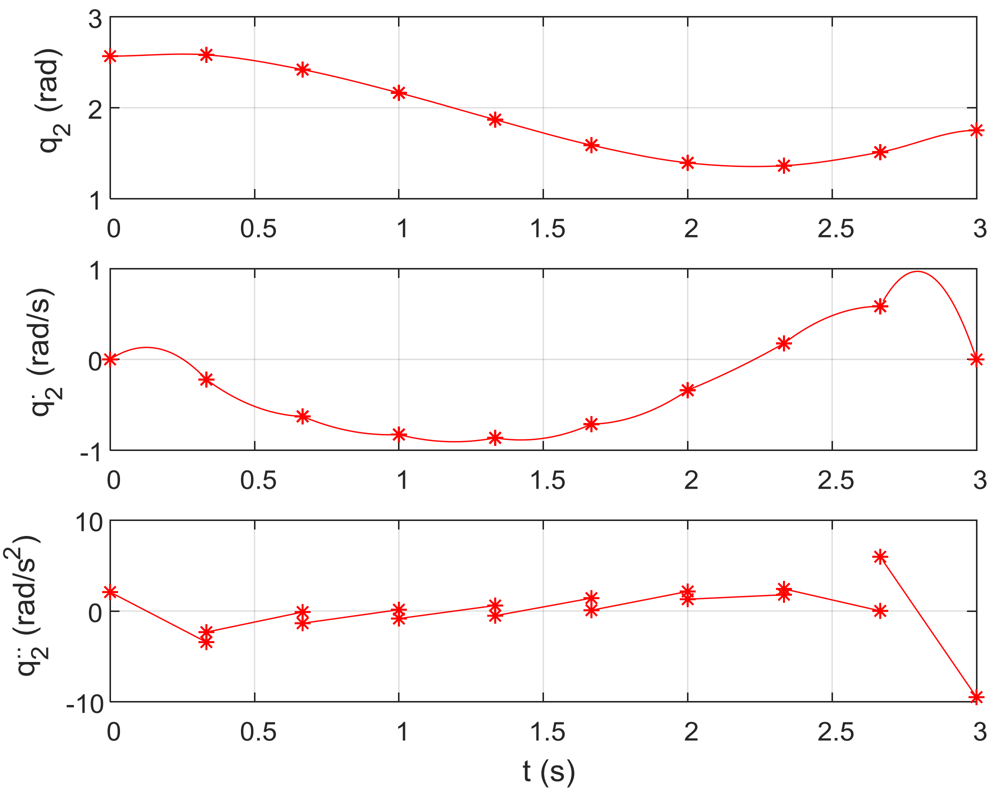

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.5
0
-0.5
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

Per il tratto circolare si hanno scelto:

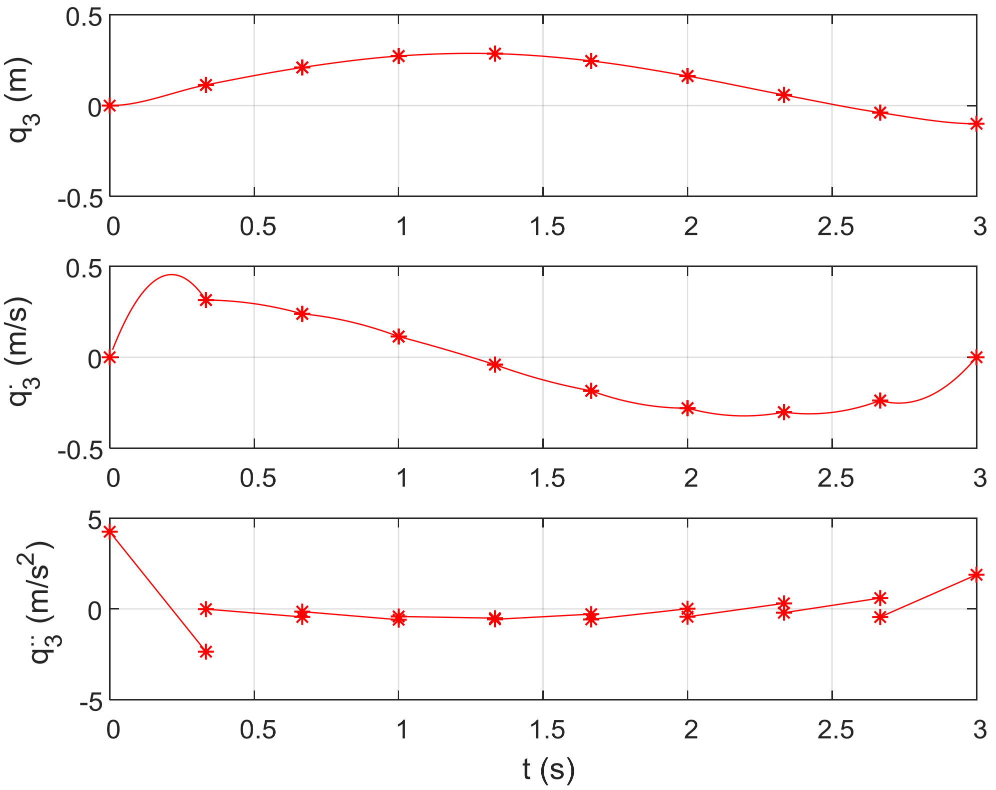
- Posizione iniziale: (0.2, 0.2, 0.5)
- Posizione intermedia: (0.4, 0.63, 0.3)
- Posizione finale: (0.5, 0.4, 0.6)

Seguendo la procedura e mantenendo la quarta articolazione fissa, si ottengono i seguenti risultati per le variabile articolare:

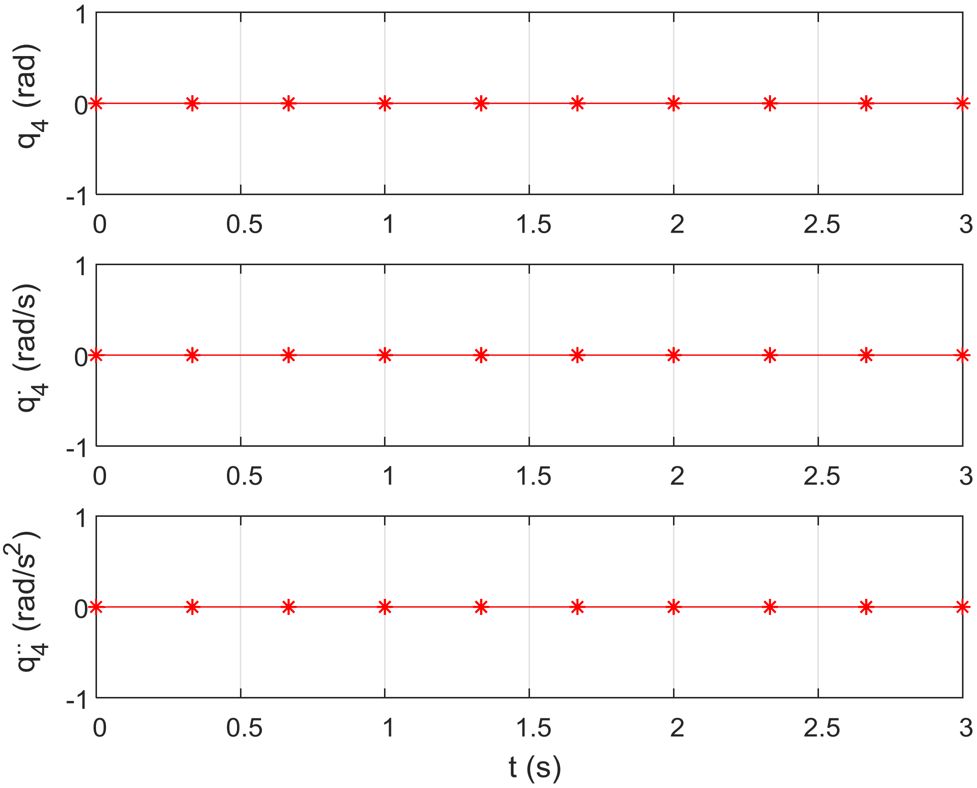




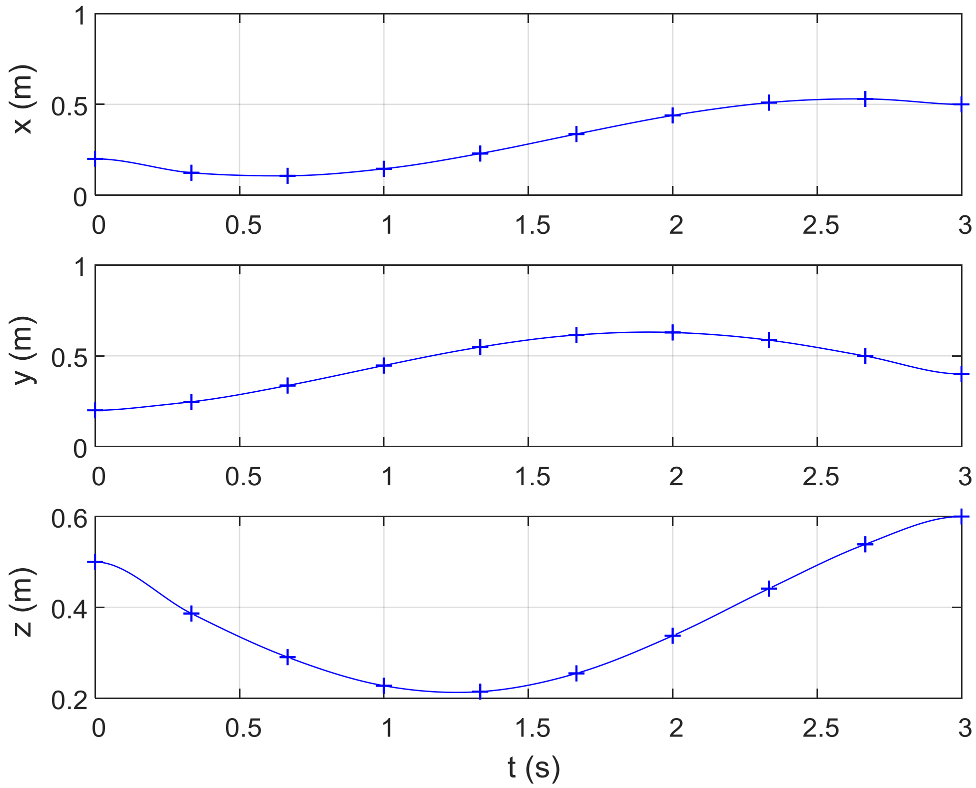
q2 (rad)
q̇2 (rad/s)
q̈2 (rad/s2)
3
2
1
-1
10
0
-10
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t (s)

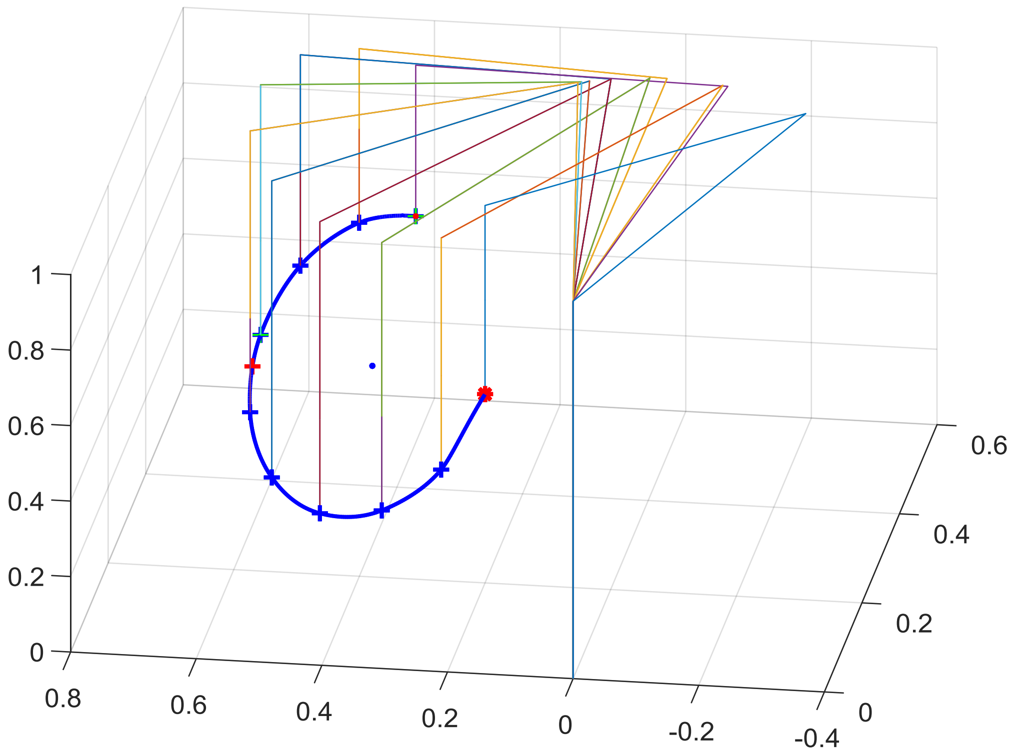


q3 (m)
q̇3 (m/s)
q̈3 (m/s2)
0.5
0
-0.5
5
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t (s)

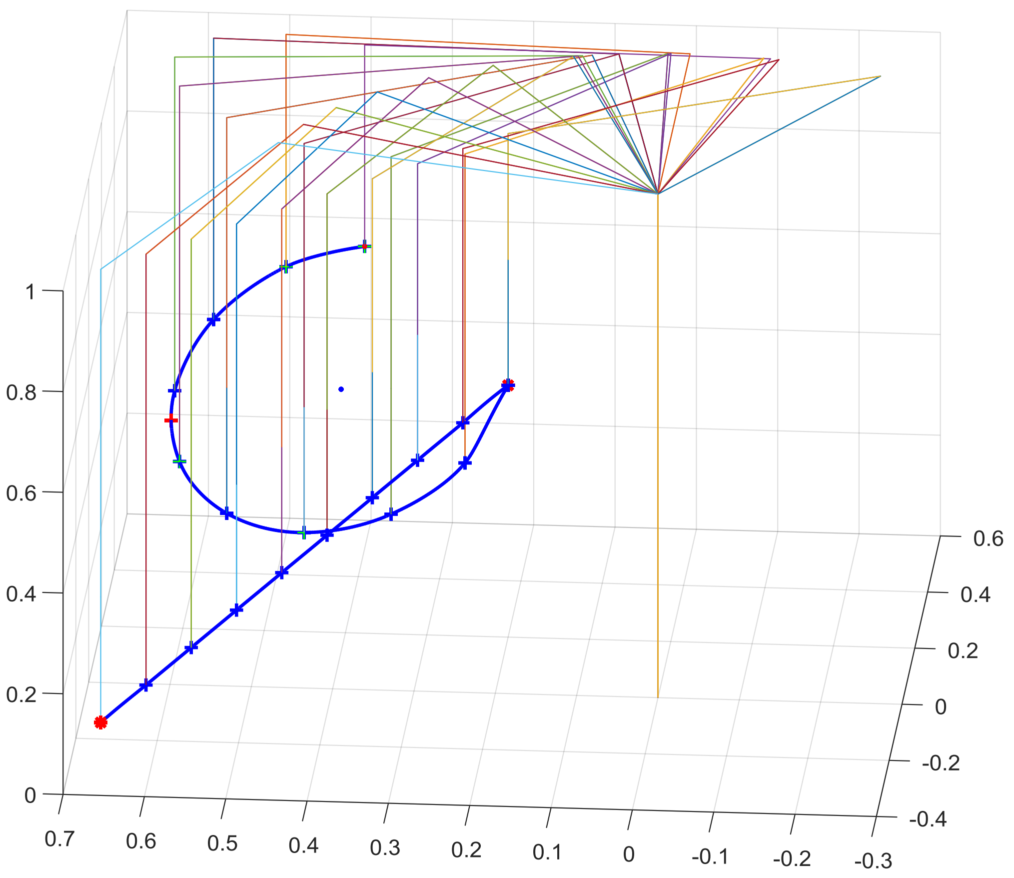


Questi valori resultano nella seguente evoluzione dell'efettor finale:





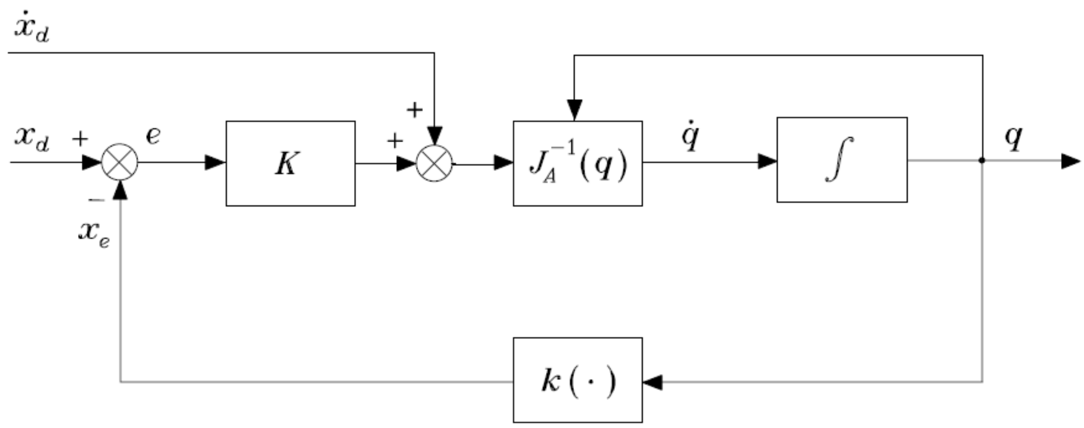
Finalmente, è mostrata la traiettoria completa in tre dimensioni (la posizione finale del tratto rettilineo è la iniziale del tratto circolare):



3. Cinematica Inversa con Jacobiana Inversa e Trasposta

3.1. Mediante Jacobiana Inversa

Osservando il libro, per il metodo con jacobiana inversa si userà il seguente schema:



Adottando, come dice l'enunciato, la regola di integrazione numerica di Euler con tempo di integrazione di 1ms. Questo è riassunto alla seguente equazione:

$$q_{k+1} = q_k + \dot{q_k} * \Delta t$$

Inoltre, come ci sono due file di zero nel jacobiano (come visto al punto 2), vengono eliminati. Questo succede perche l'orientamento solo dipende dalla articolazione q_4. Il jacobiano analitico allora sarebbe così:

$$J_A = \begin{bmatrix} -\frac{\sin(q_1+q_2)}{2} - \frac{\sin(q_1)}{2} & -\frac{\sin(q_1+q_2)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(q_1+q_2)}{2} + \frac{\cos(q_1)}{2} & \frac{\cos(q_1+q_2)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e il jacobiano analitico inverso:

$$J_A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2 * \cos(q_1 + q_2)}{\sin(q_2)} & \frac{2 * \sin(q_1 + q_2)}{\sin(q_2)} & 0 & 0 \\ \frac{-(2 * \cos(q_1 + q_2) + \cos(q_1))}{\sin(q_2)} & \frac{-(2 * \sin(q_1 + q_2) + \sin(q_1))}{\sin(q_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{2 * \cos(q_1)}{\sin(q_2)} & -\frac{2 * \sin(q_1)}{\sin(q_2)} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

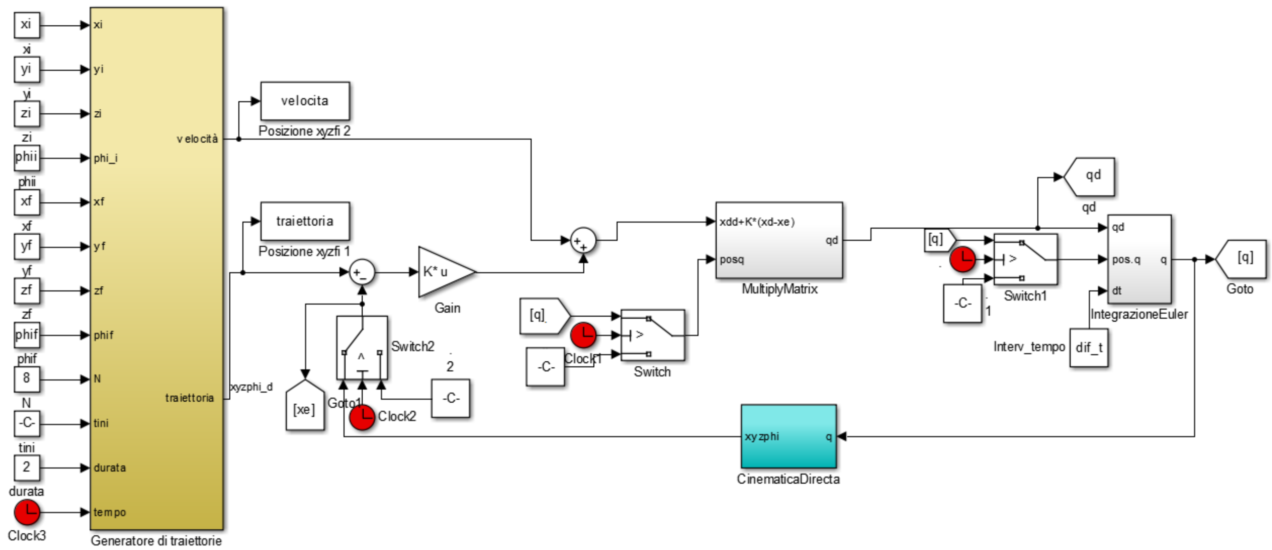
Per simulare il circuito è stato implementato il generatore di traiettorie, dove vengono scelti i punti di partenza e di arrivo, il numero di punti, la durata del movimento e l'ora di inizio.

Inoltre, K è una matrice diagonale che funziona come un guadagno. Il valore utilizzato è:

$$K = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

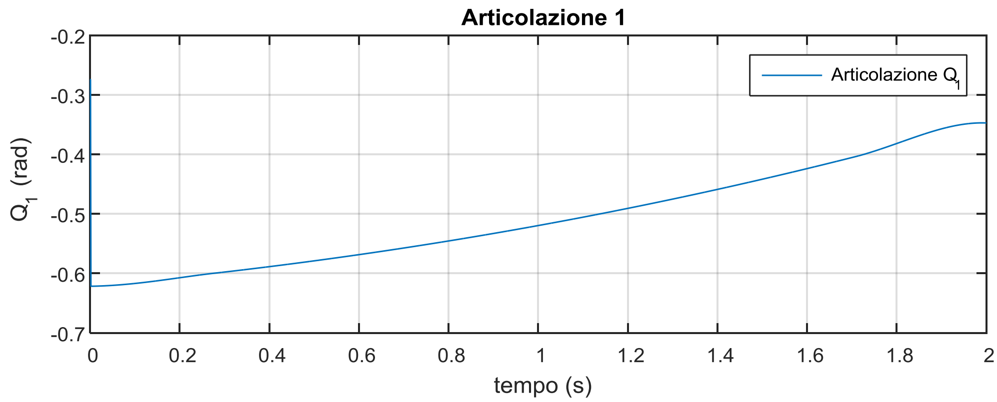
Ultimo, il blocco $k(\cdot)$ è il modelo cinematico diretto.

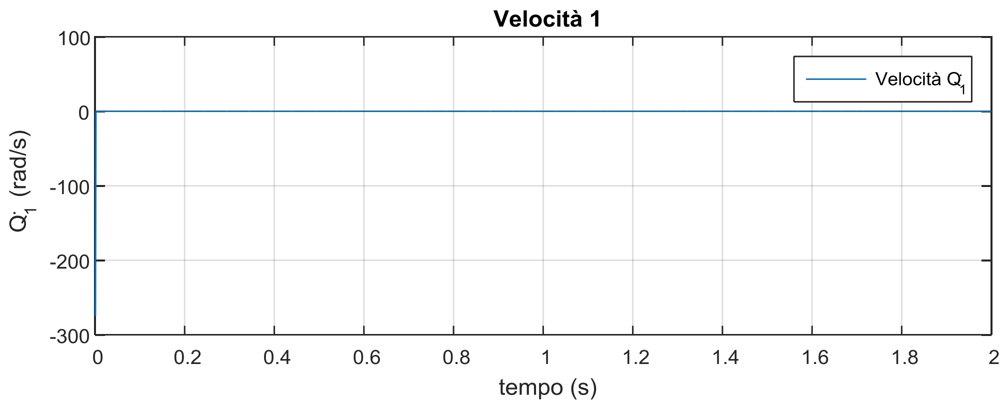
Infine, il schema implementato in Simulink è il seguente:

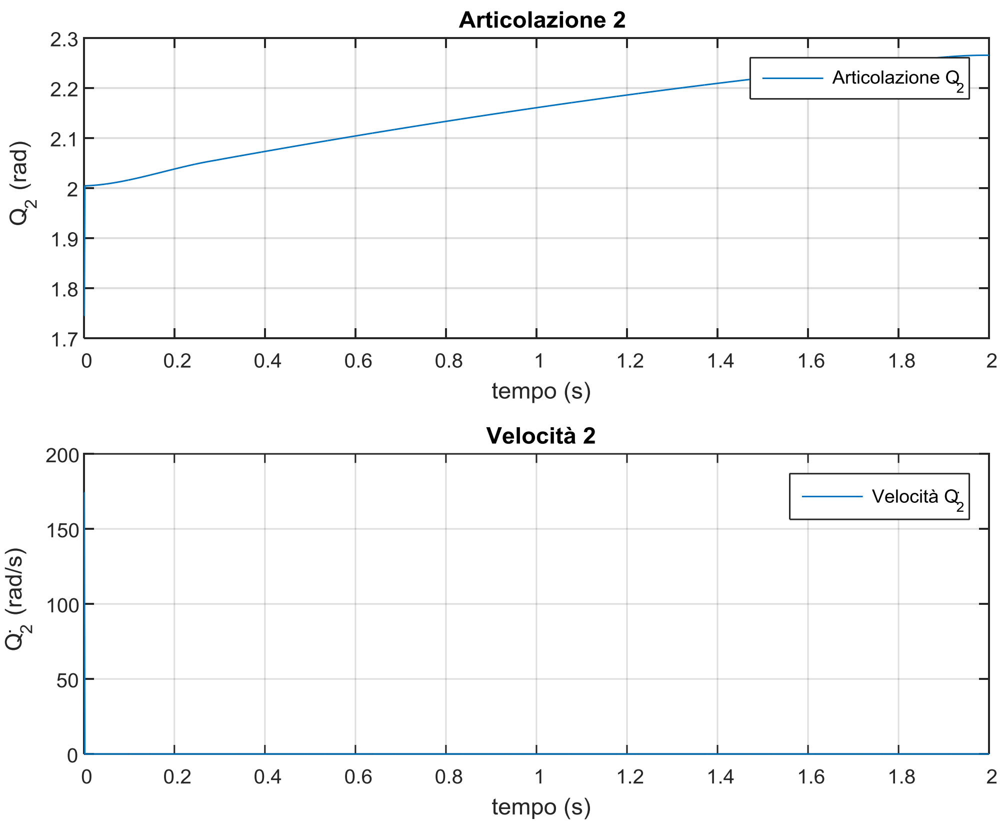


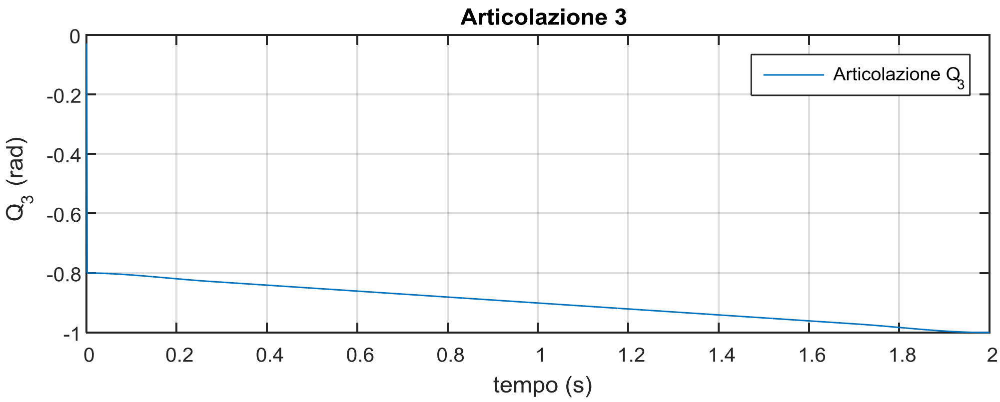
Poi si presenta una serie di traiettorie per vedere il funzionamiento dell'algoritmo, con 8 punti, una durata di 2s e una ora di inizio de 0s.

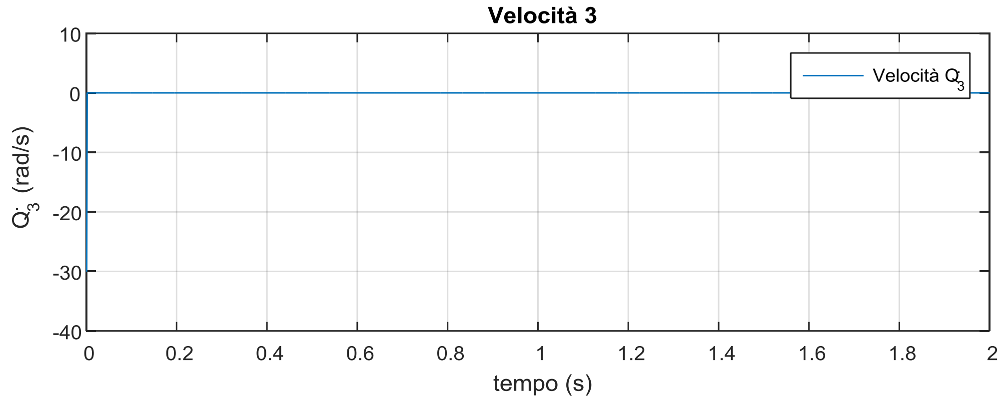
- **Dal punto (0.5,0.2,0.3, 0) al punto (0.3,0.3,0.5,1.7):**

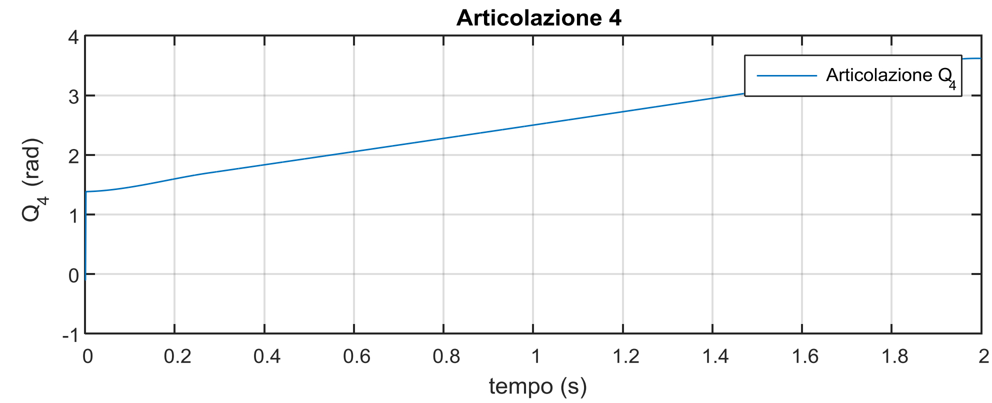


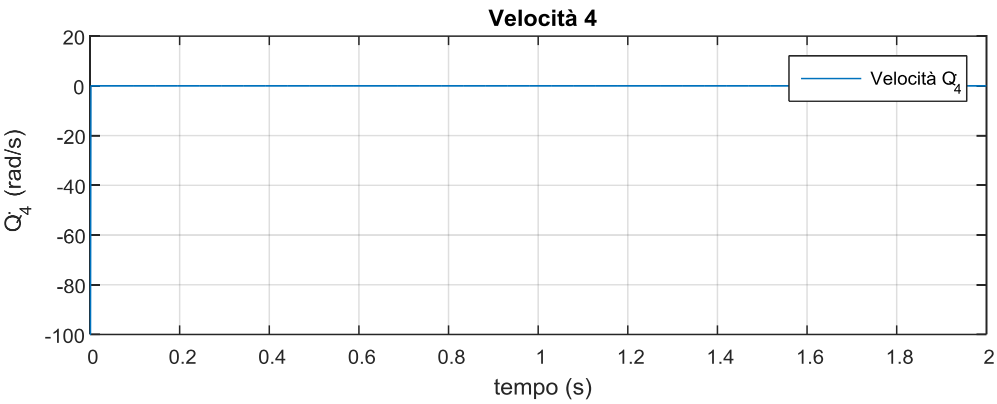


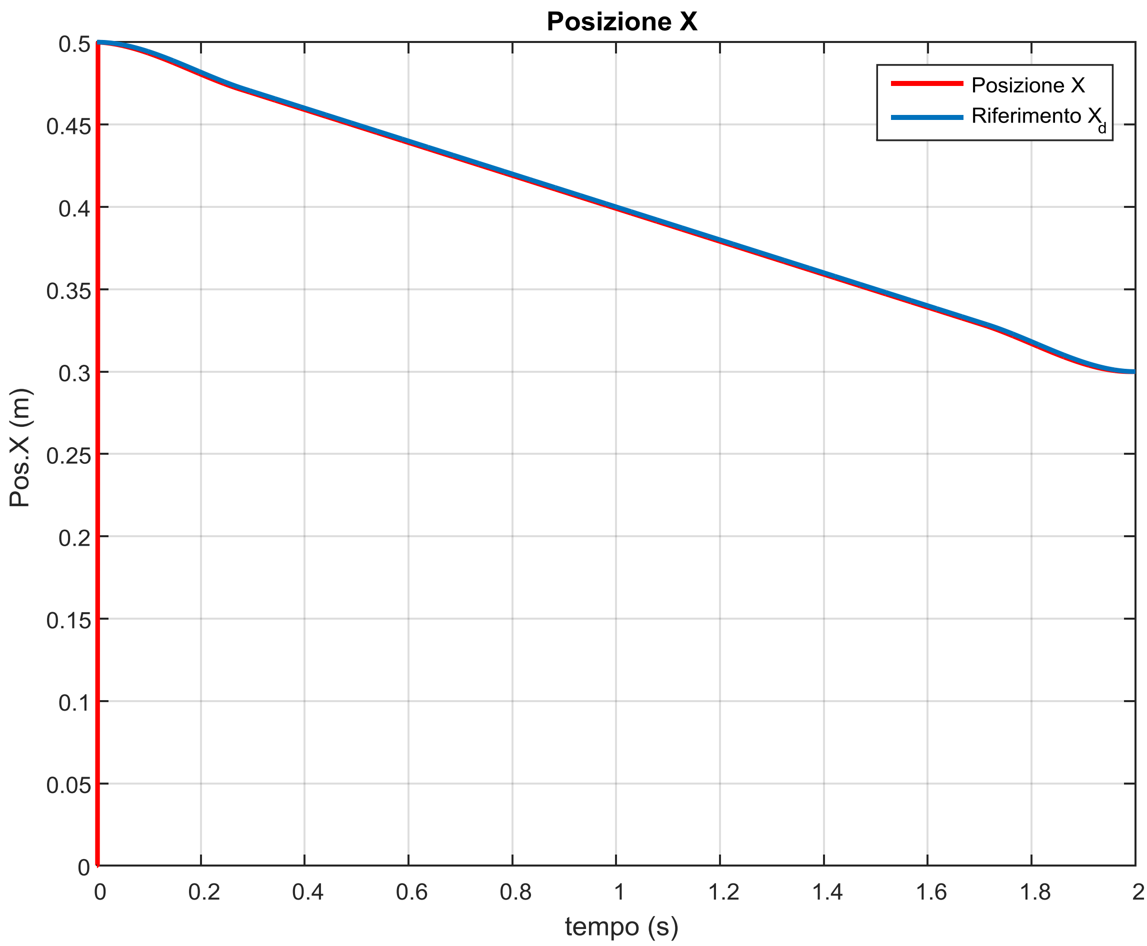

Articolazione 2
Articolazione Q2
Q2 (rad)
tempo (s)
Velocità 2
Velocità Q2
Q2 (rad/s)
tempo (s)

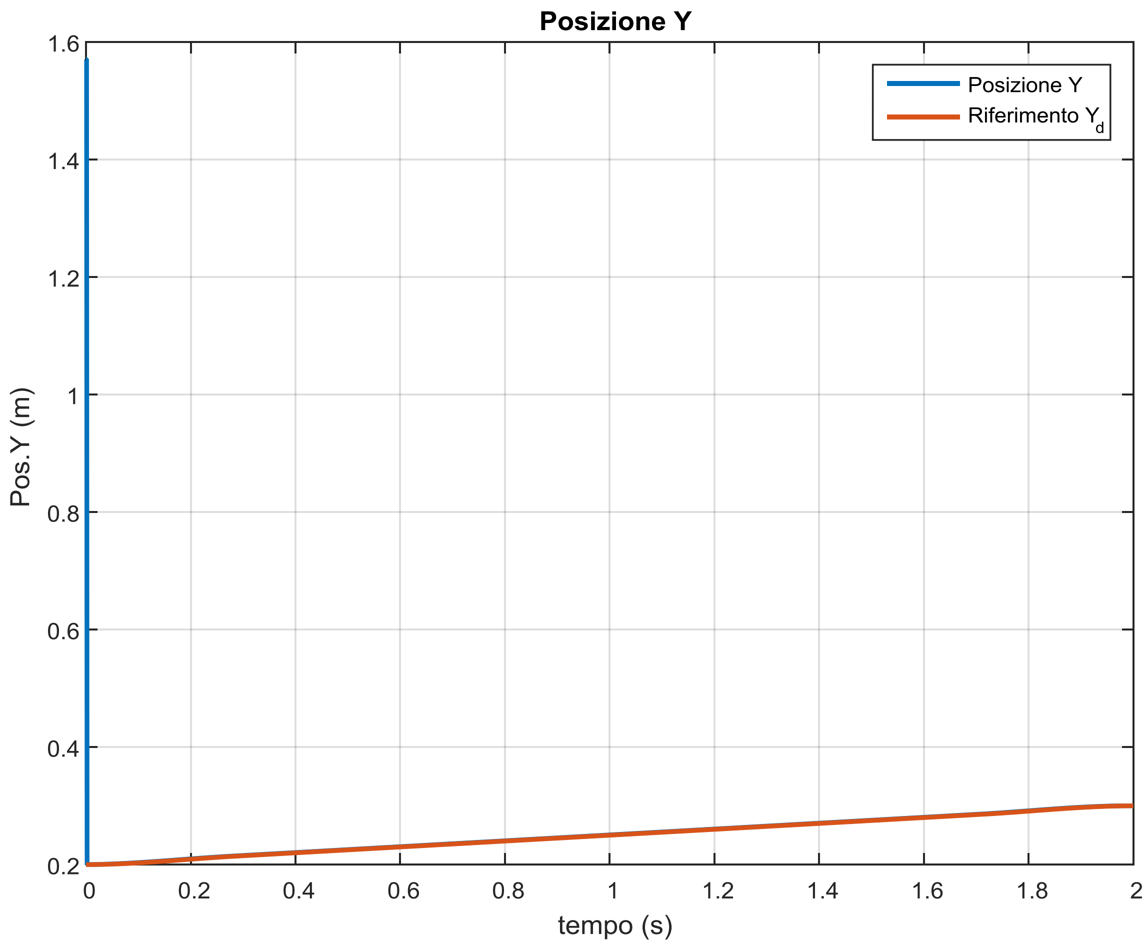

Articolazione 3
Articolazione Q3
Q3 (rad)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)

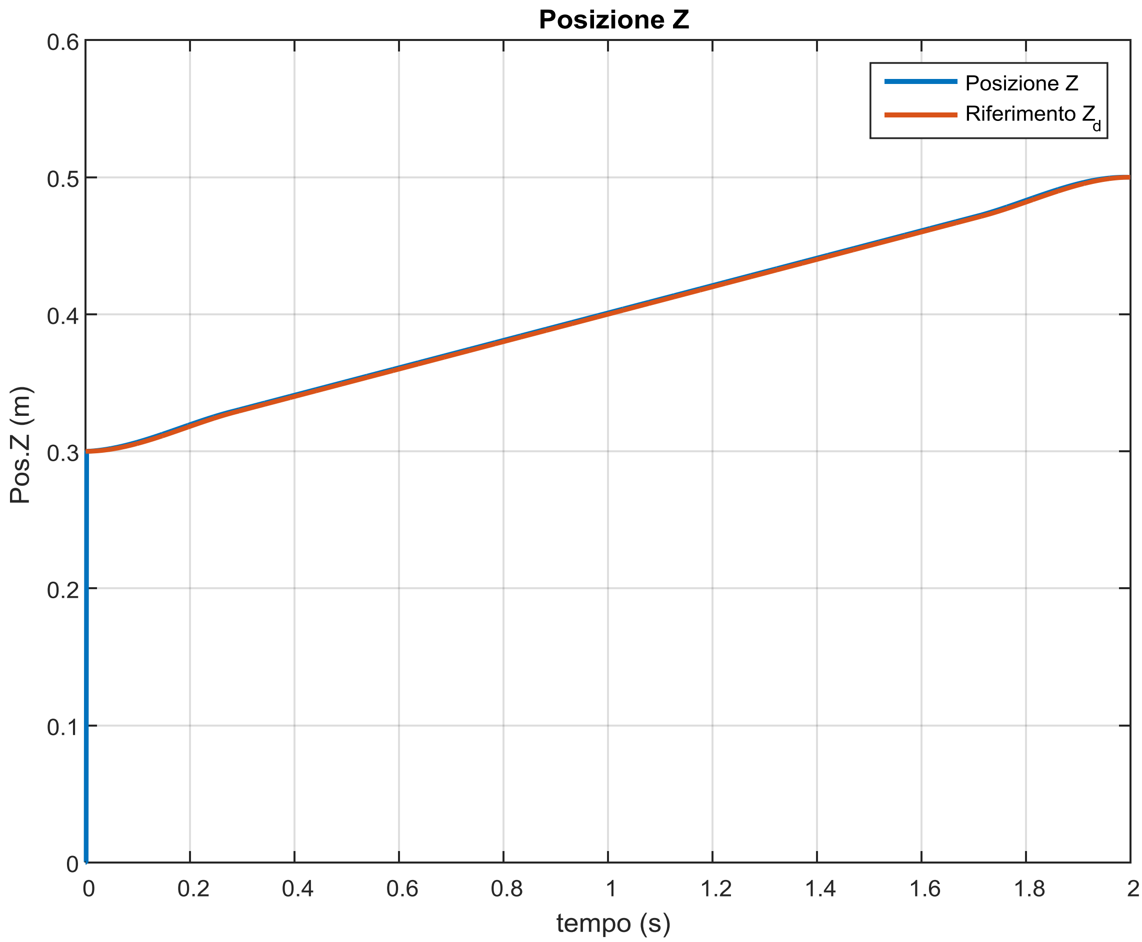

Velocità 3
Velocità Q3
Q̇3 (rad/s)
10
0
-10
-20
-30
-40
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)

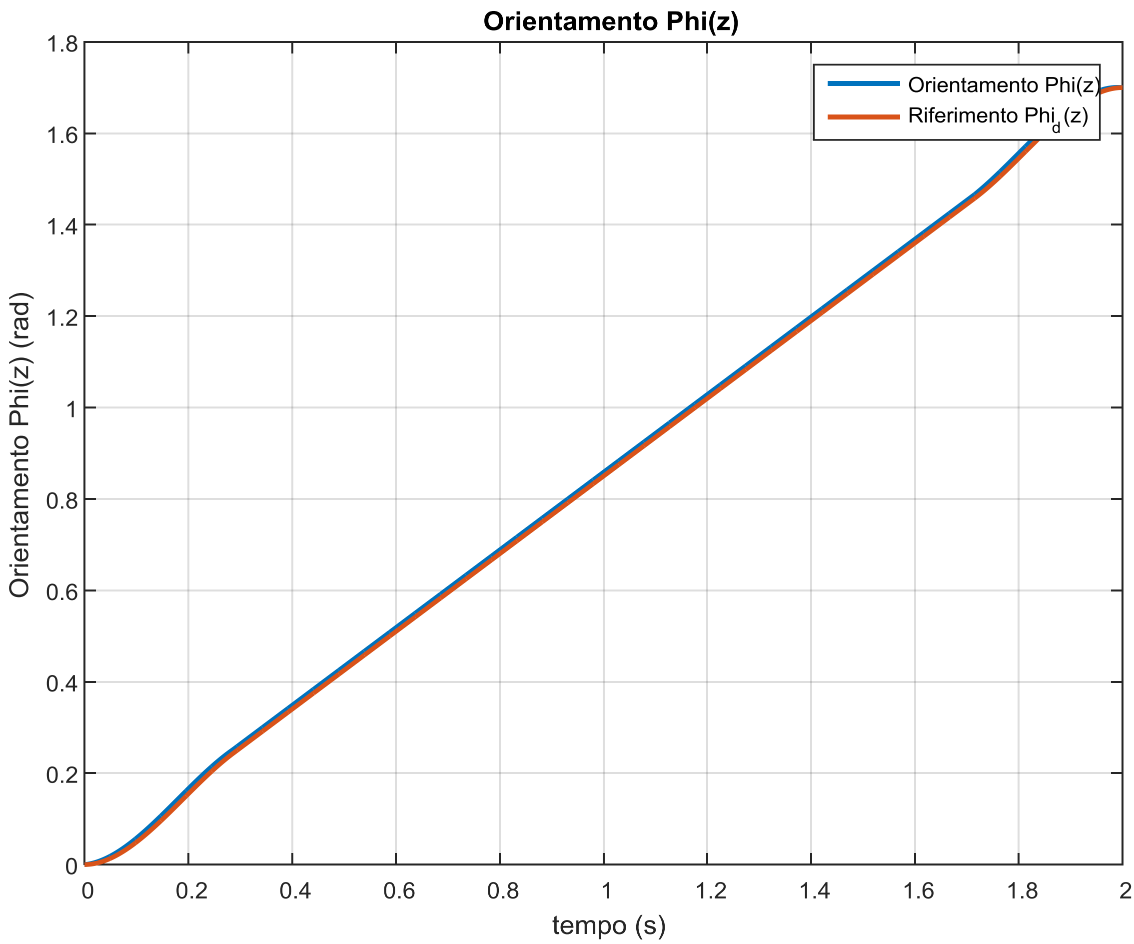

Articolazione 4
Articolazione Q4
Q4 (rad)
4
3
2
1
0
-1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)


Velocità 4
Velocità Q4
Q̇4 (rad/s)
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)

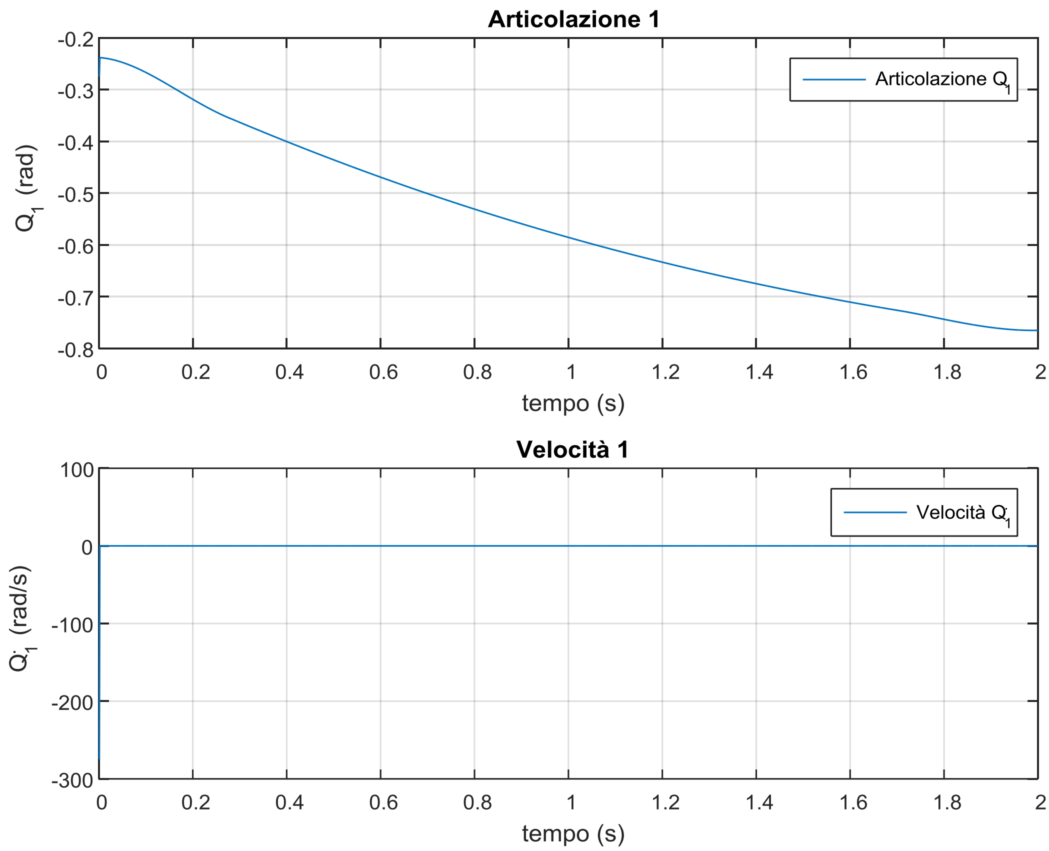

Posizione X
Posizione X
Riferimento X_d
Pos.X (m)
tempo (s)
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

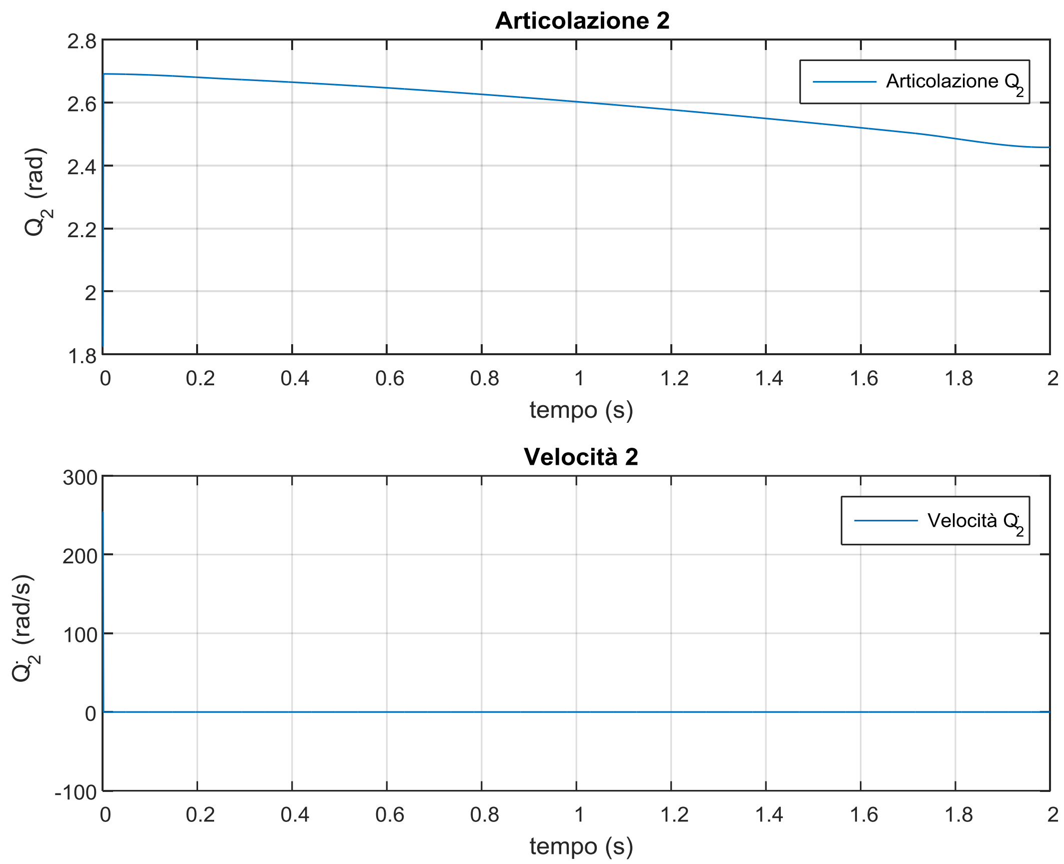

Posizione Y
Posizione Y
Riferimento Y_d
Pos.Y (m)
tempo (s)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

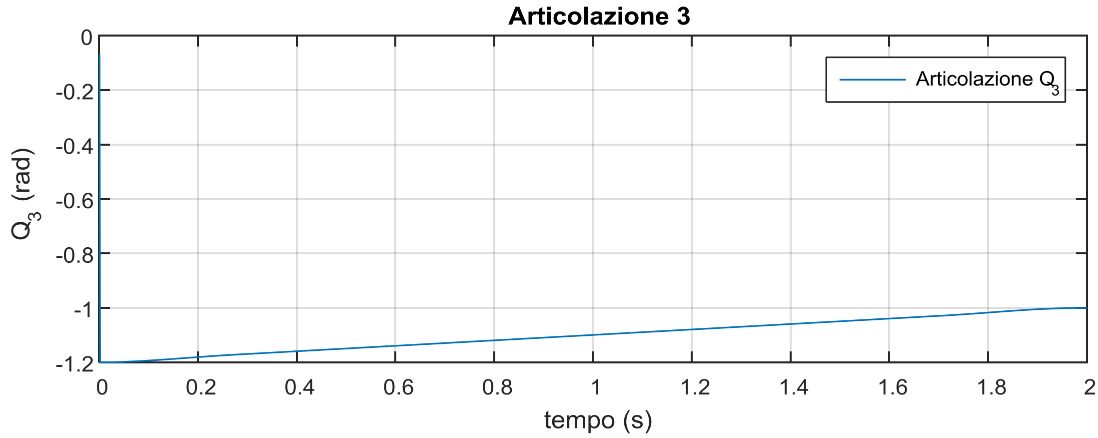

Posizione Z
Posizione Z
Riferimento Z_d
Pos.Z (m)
tempo (s)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

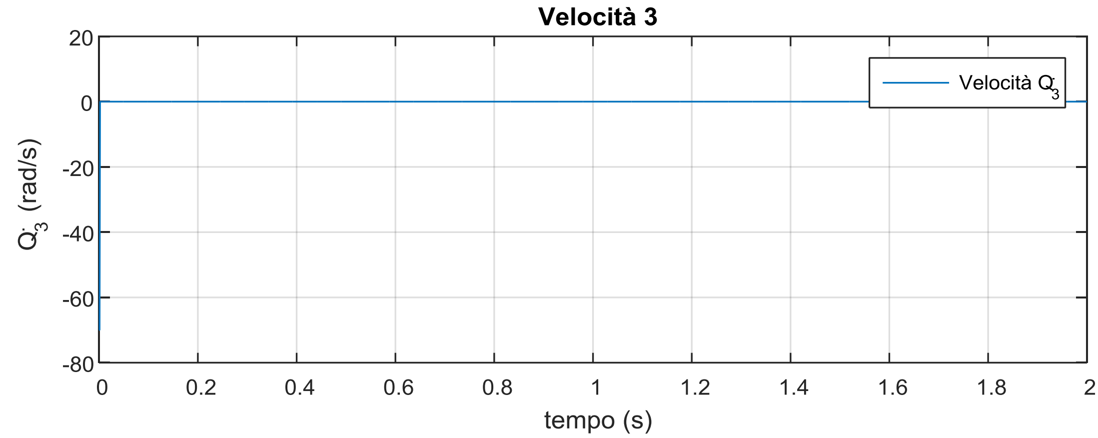

Orientamento Phi(z)
Orientamento Phi(z)
Riferimento $Phi_d(z)$
Orientamento Phi(z) (rad)
tempo (s)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

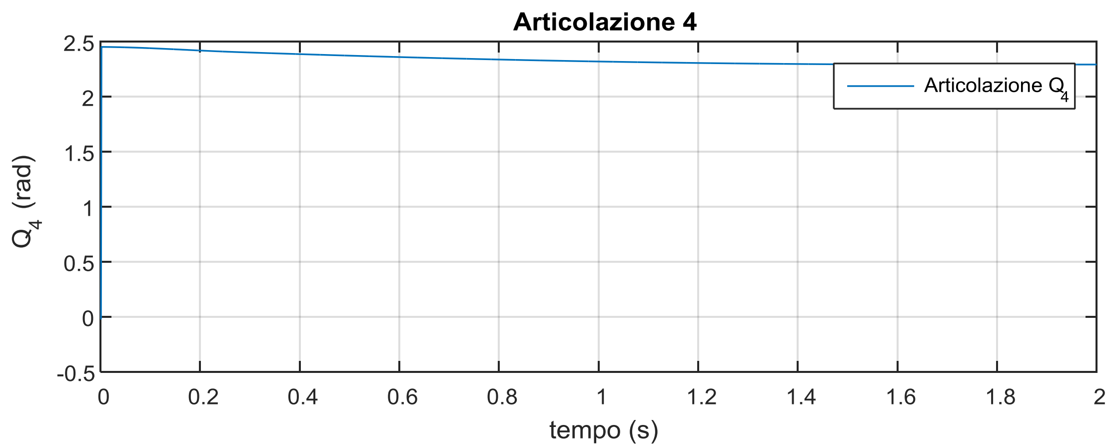
- **Dal punto (0.1,0.2,0.7, 0) al punto (0.3,0.15,0.5,0.6):**

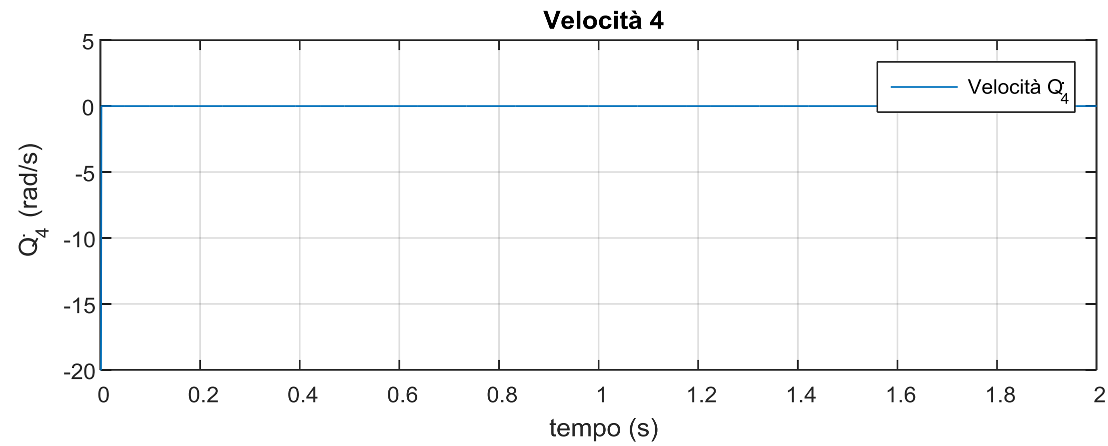


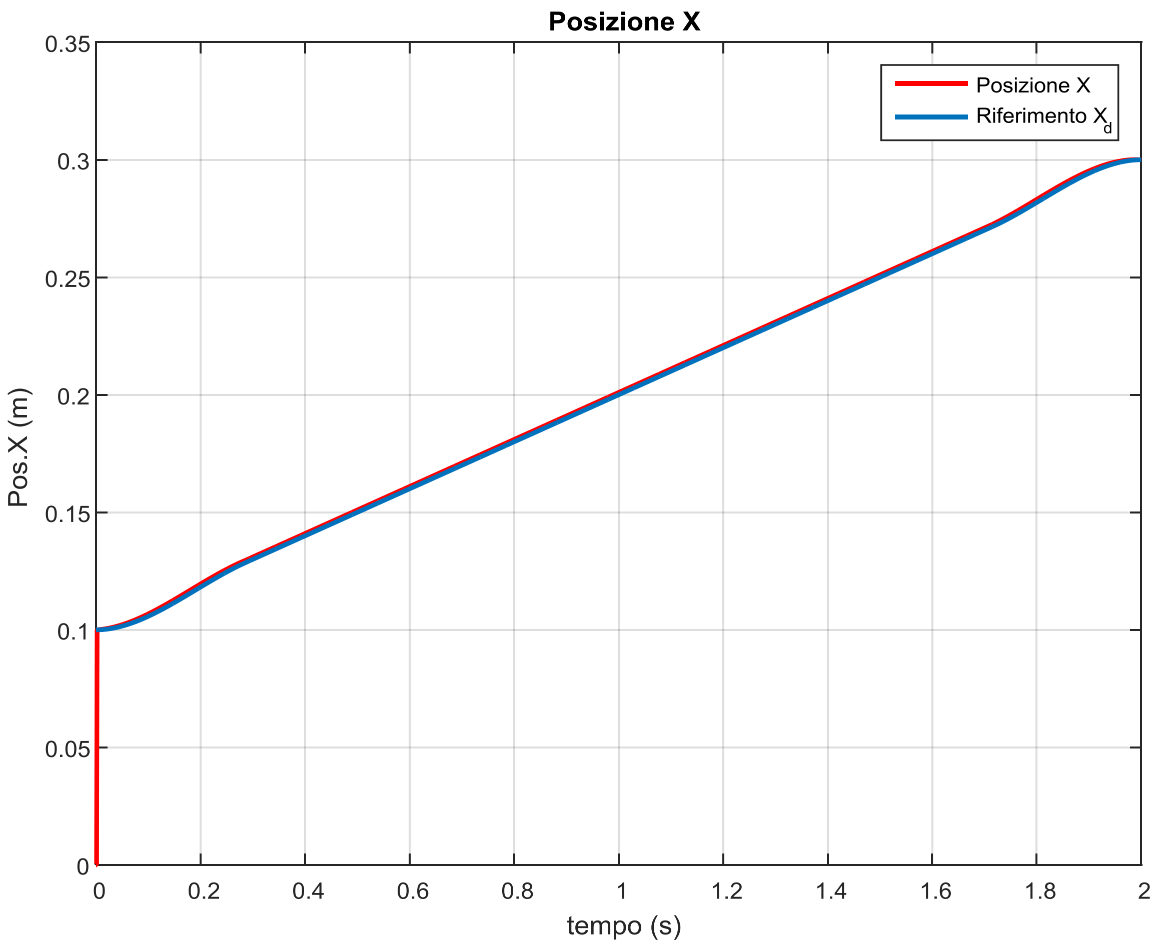



Articolazione 3
Articolazione Q3
Q3 (rad)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)

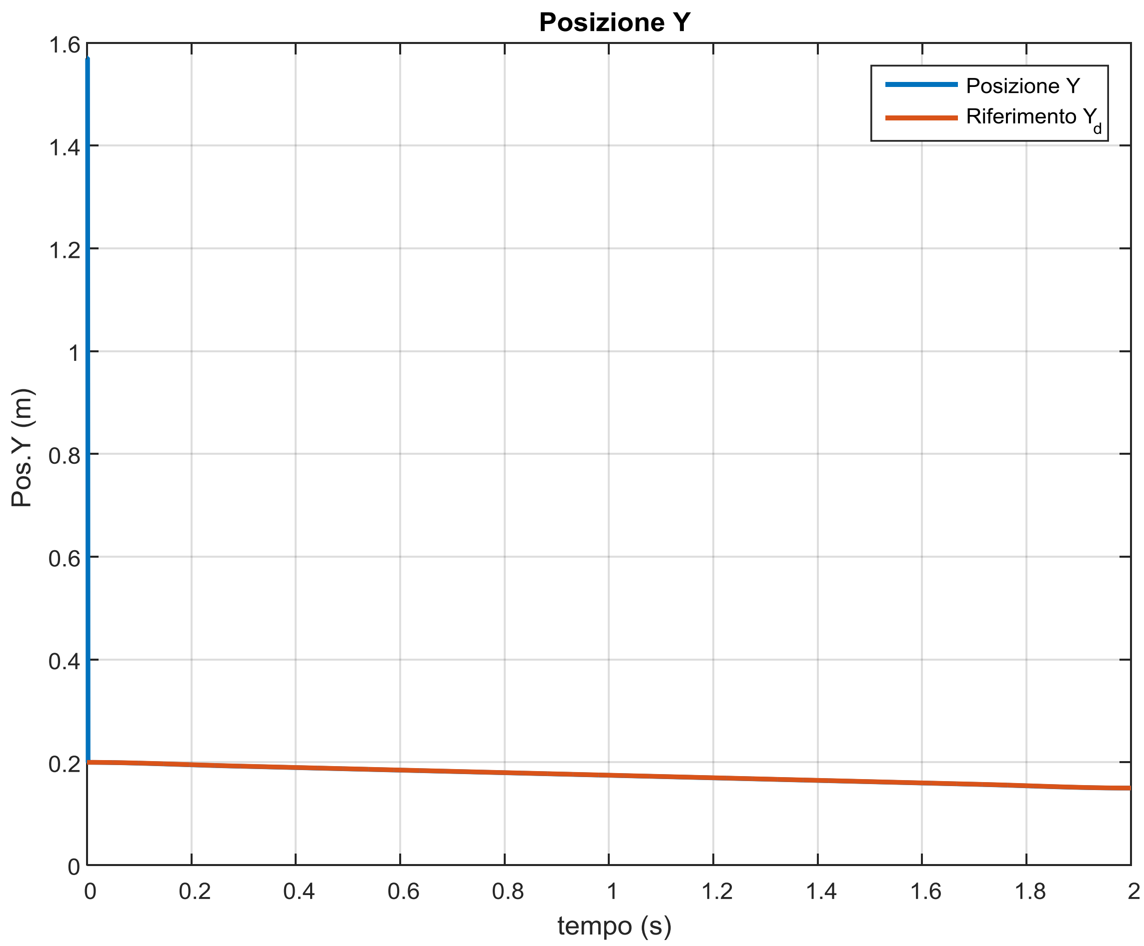

Velocità 3
Velocità Q3
Q̇3 (rad/s)
20
0
-20
-40
-60
-80
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)


Articolazione 4
Articolazione Q4
Q4 (rad)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)

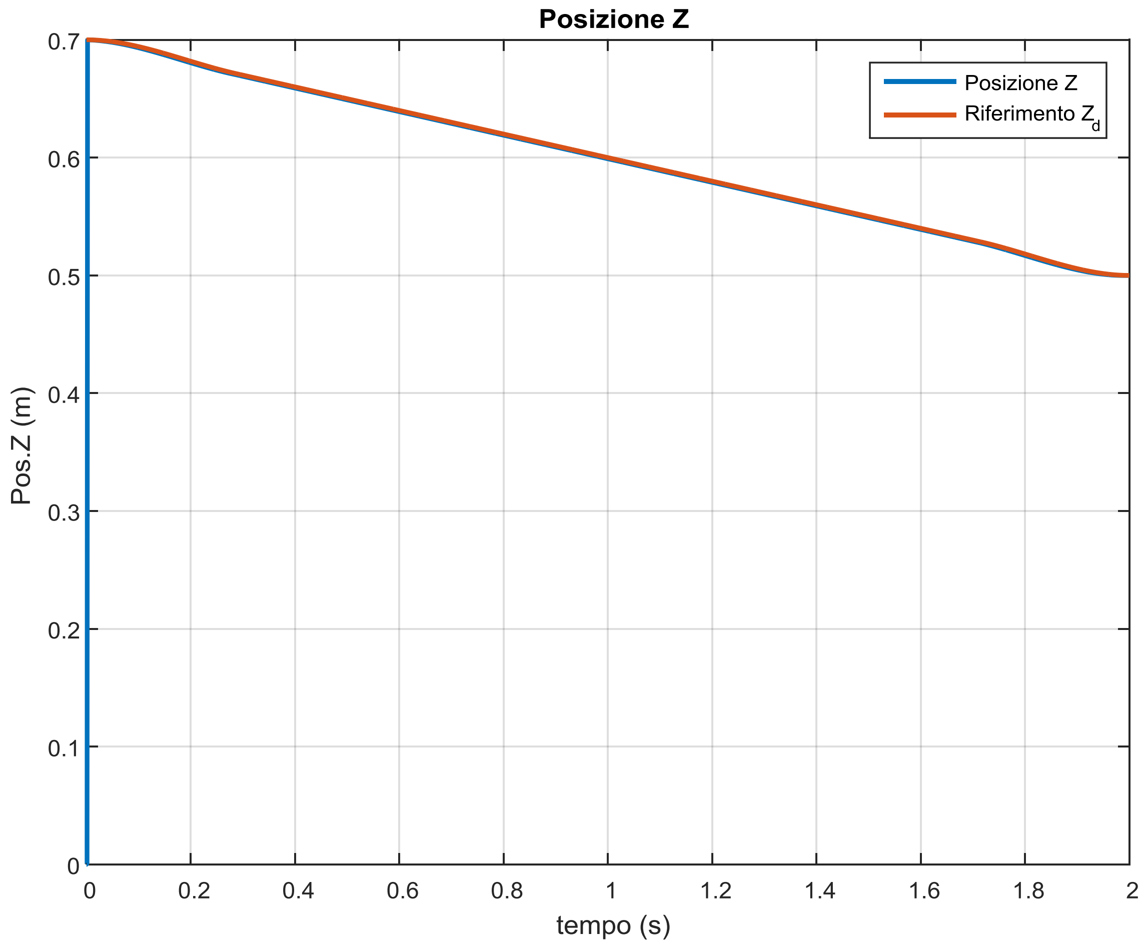

Velocità 4
Velocità Q4
Q̇4 (rad/s)
5
0
-5
-10
-15
-20
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)

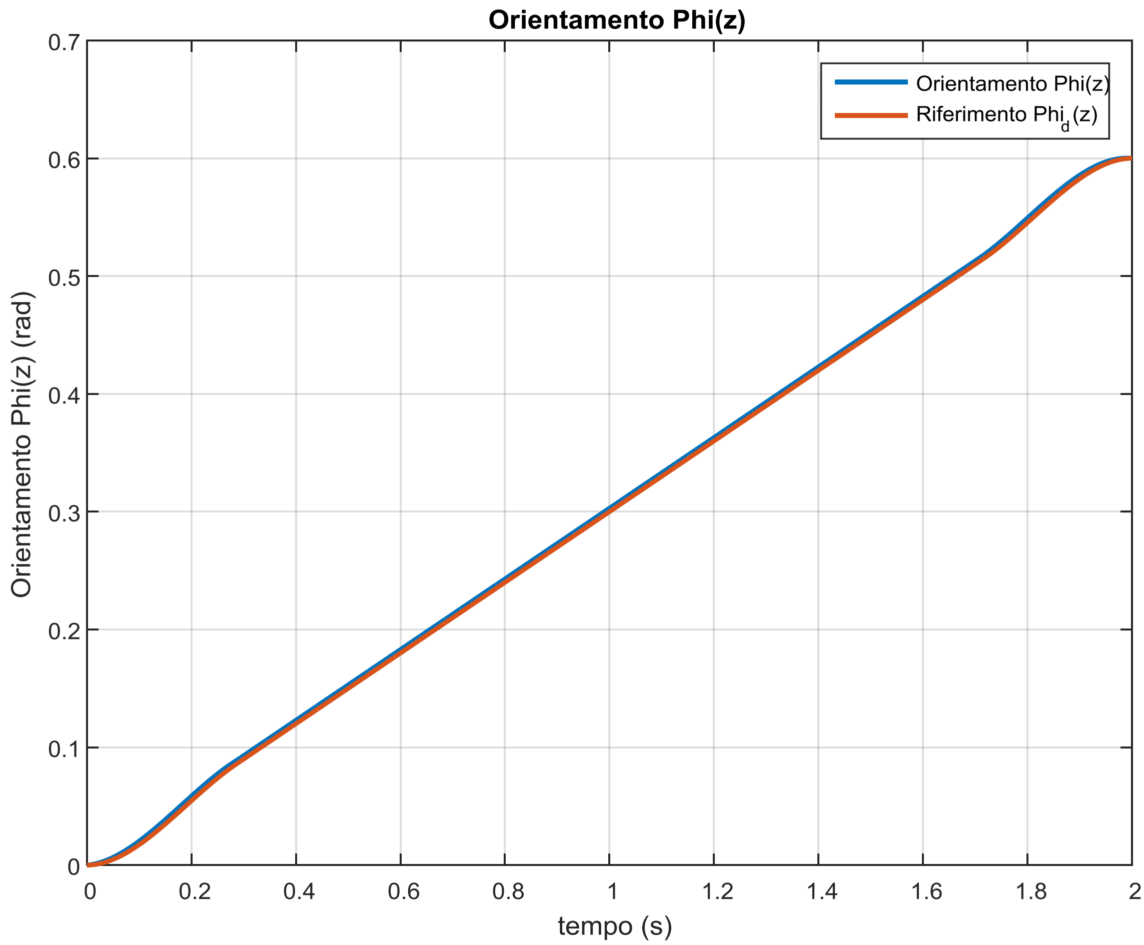


Posizione X
Posizione X
Riferimento X_d
Pos.X (m)
tempo (s)
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2



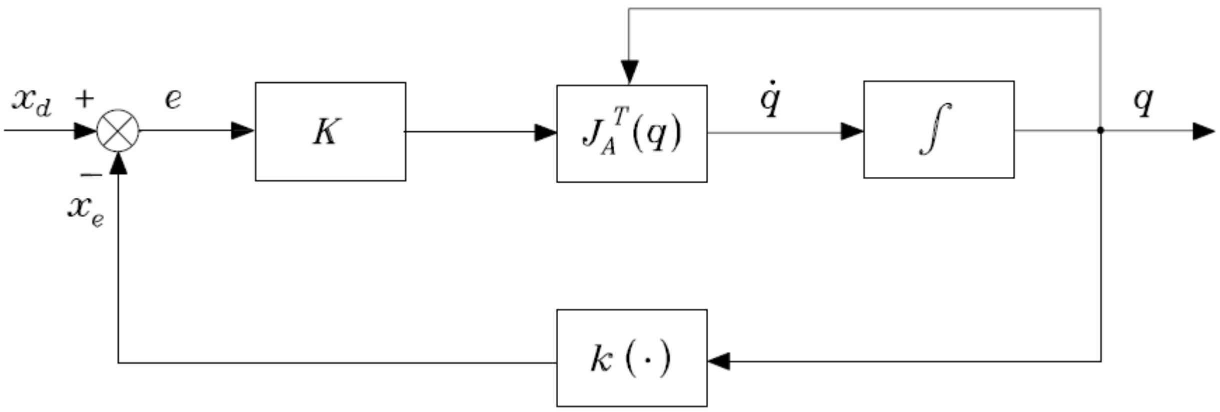
Posizione Y
Posizione Y
Riferimento Y_d
Pos.Y (m)
tempo (s)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Posizione Z
Posizione Z
Riferimento Z_d
Pos.Z (m)
tempo (s)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Orientamento Phi(z)
Orientamento Phi(z)
Riferimento $Phi_d(z)$
Orientamento Phi(z) (rad)
tempo (s)
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

3.2. Mediante Jacobiana Trasposta

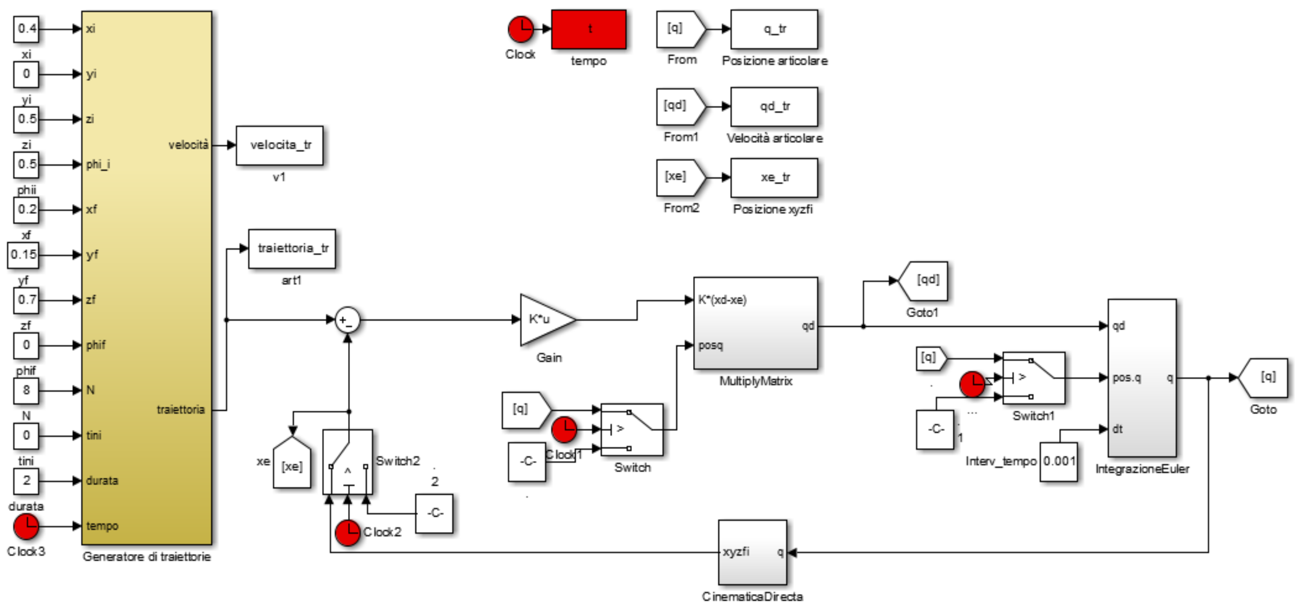
Utilizzando la jacobiana trasposta, il schema è il seguente:



In questo caso, si deve ottenere la jacobiana trasposta. Si può vedere poi:

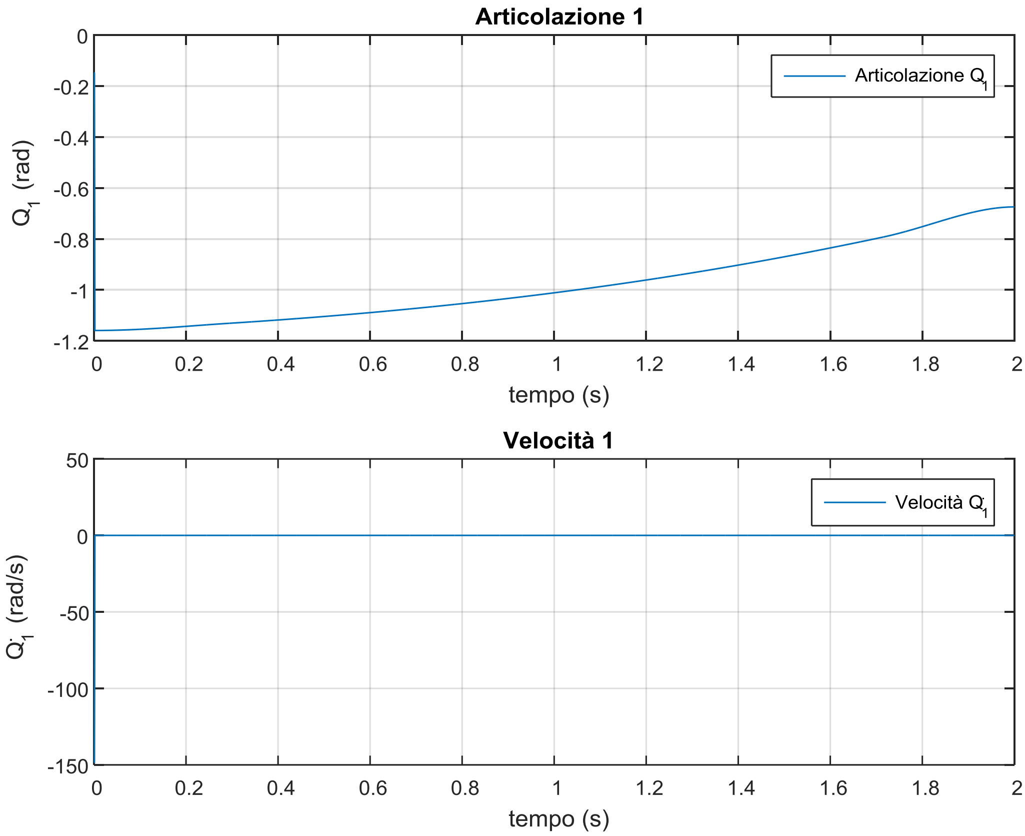
$$J_A^T = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin(q_1+q_2)}{2} - \dfrac{\sin(q_1)}{2} & \dfrac{\cos(q_1+q_2)}{2} + \dfrac{\cos(q_1)}{2} & 0 & -1 \\ -\dfrac{\sin(q_1+q_2)}{2} & \dfrac{\cos(q_1+q_2)}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

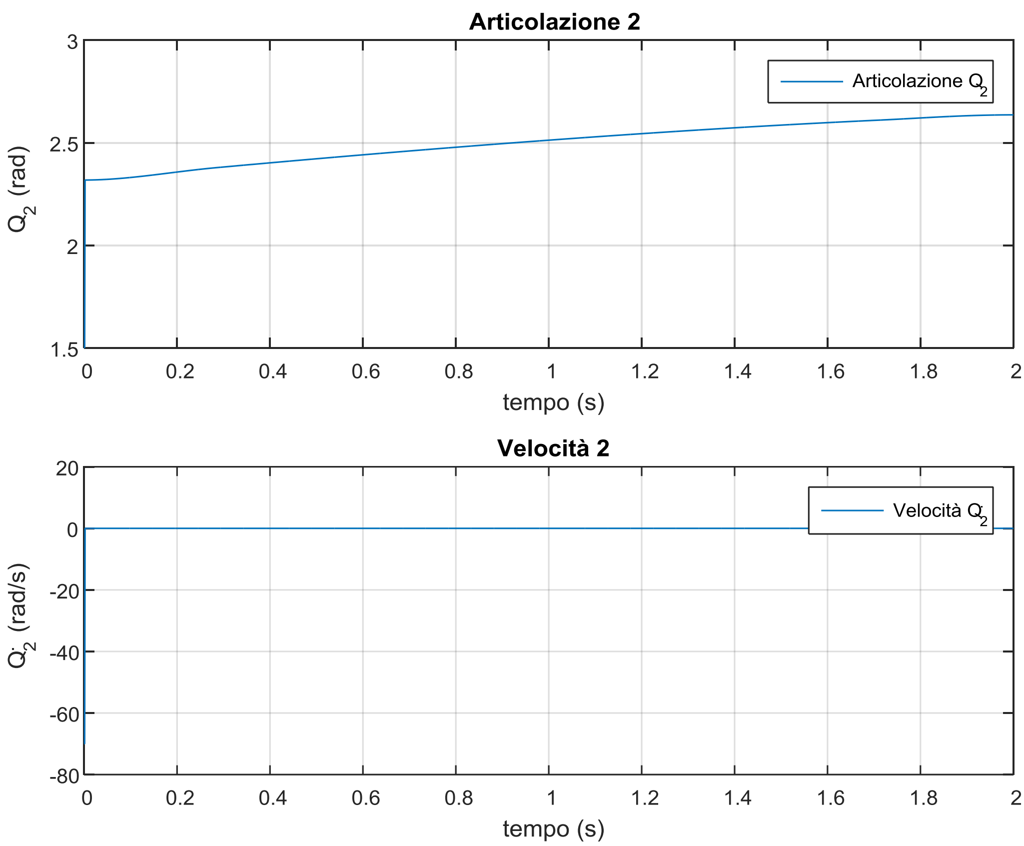
Il schema in Simulink è il seguente:

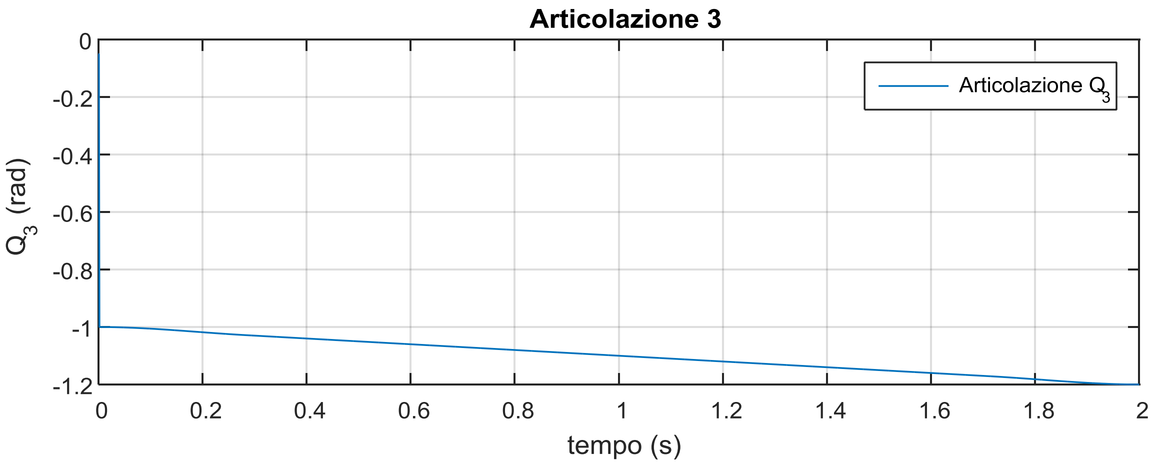


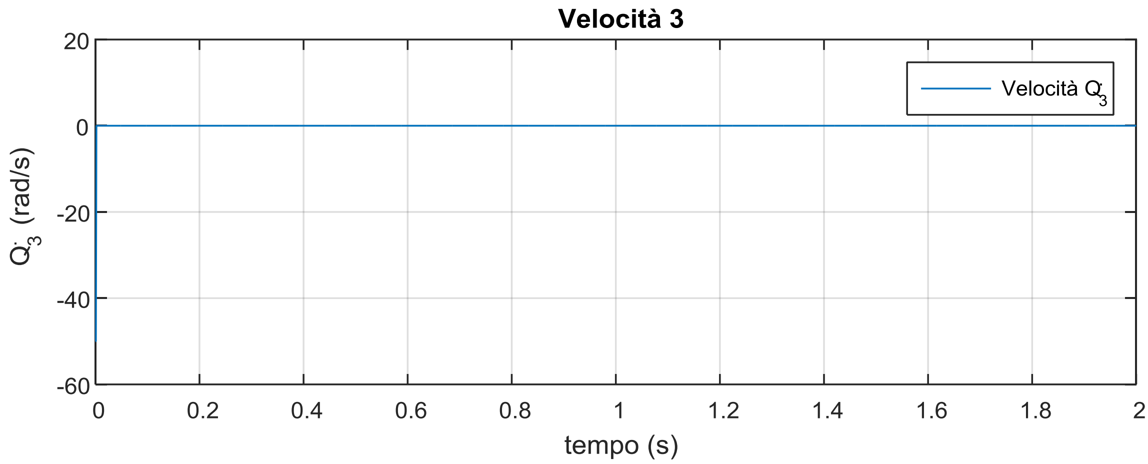
Si fa lo stesso che nell'altro modello, con jacobiana inversa. Si osserva i seguenti punti:

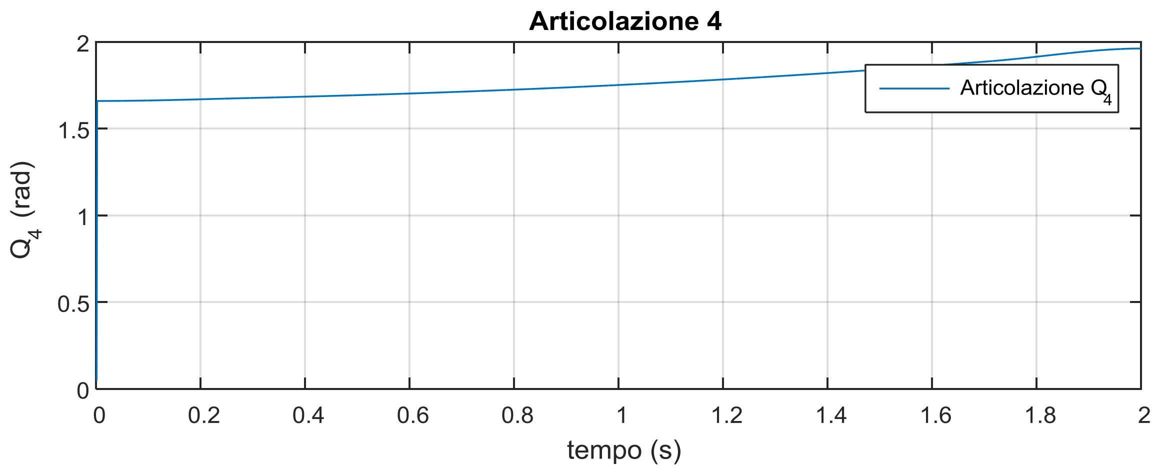
- **Dal punto (0.4,0,0.5,0.5) al punto (0.2,0.15,0.7,0):**

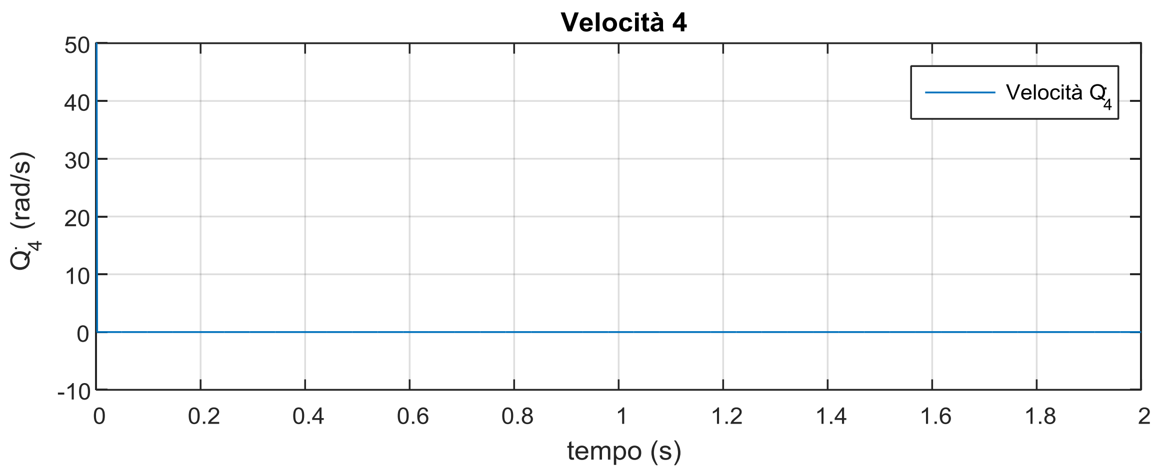


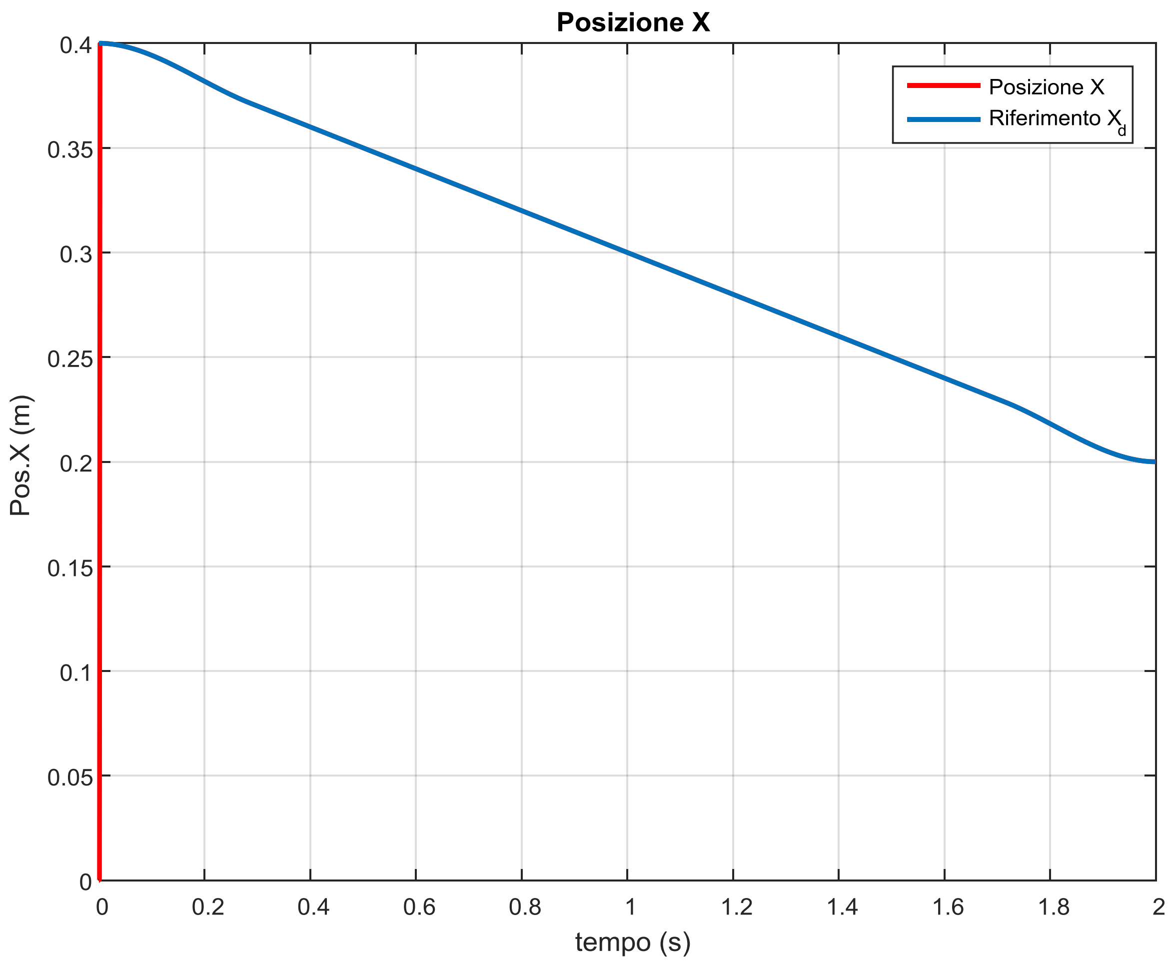


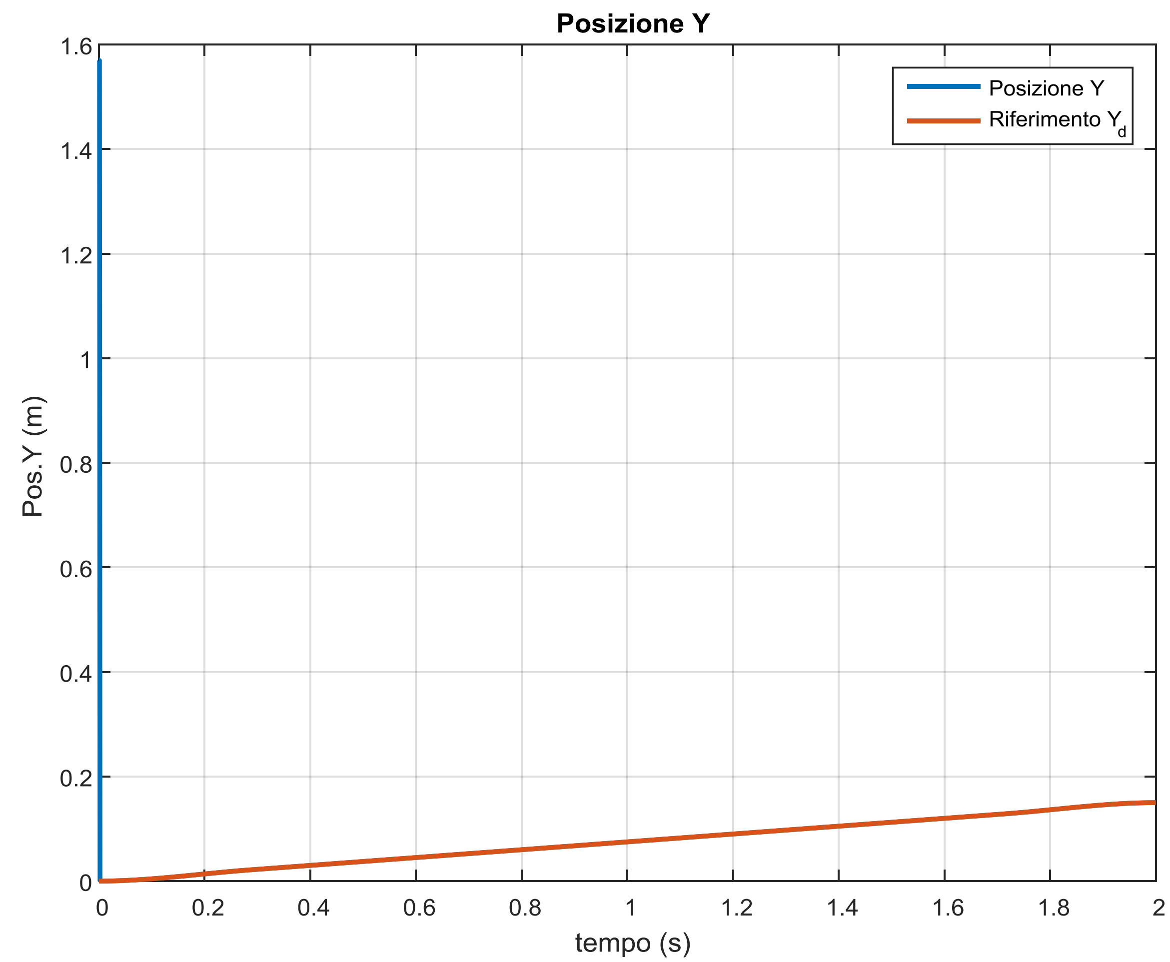

Articolazione 3
Articolazione Q_3
Q_3 (rad)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)

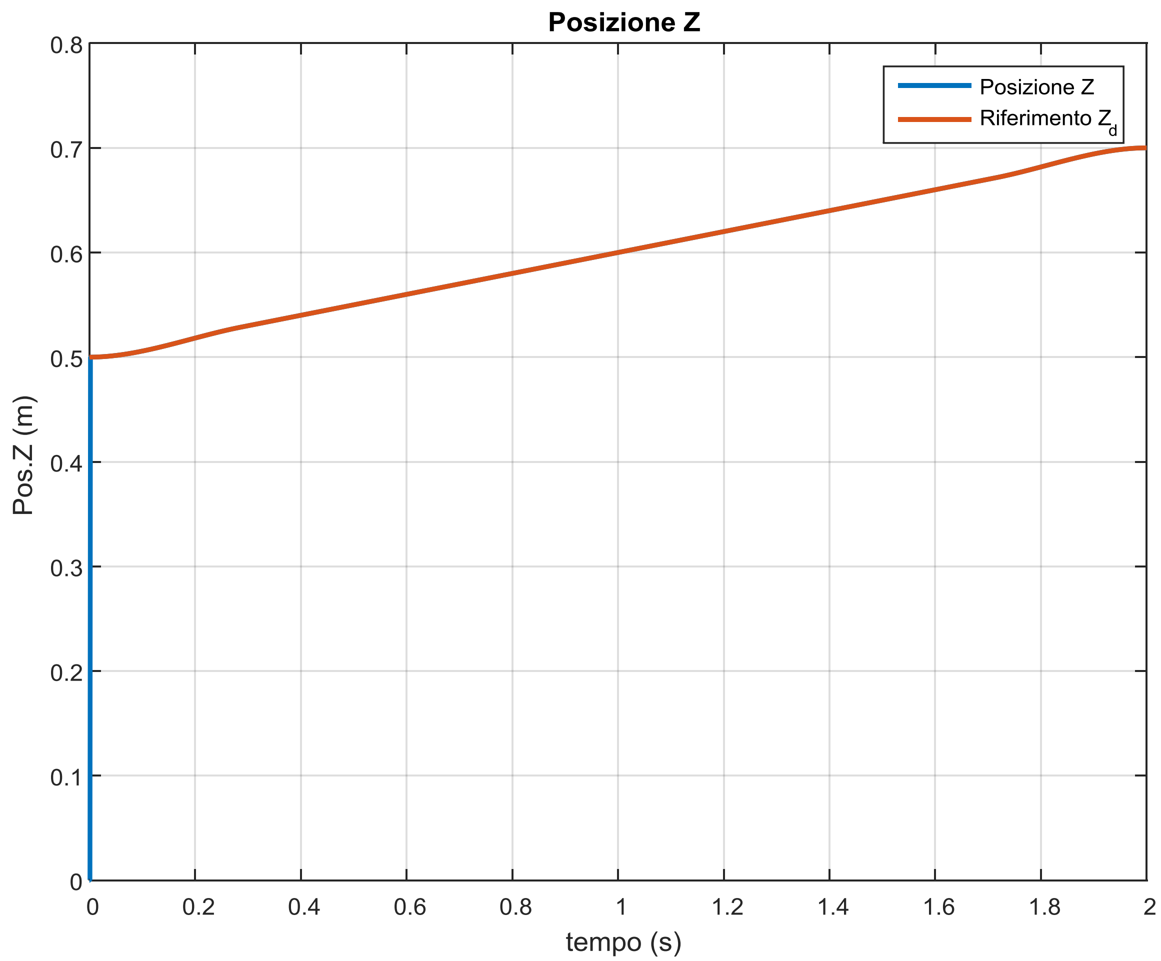

Velocità 3
Velocità Q_3
$\dot{Q}_3$ (rad/s)
20
0
-20
-40
-60
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)

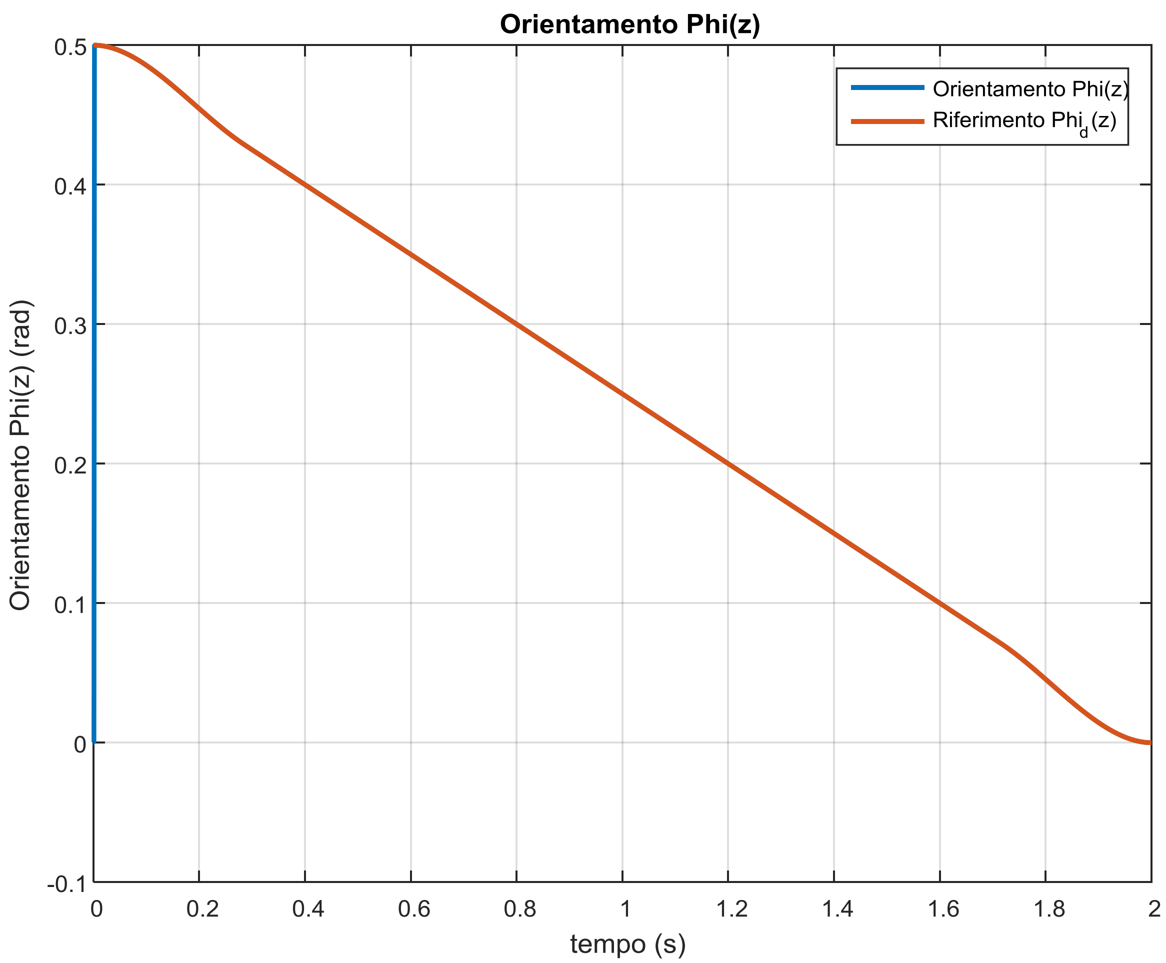

Articolazione 4
Articolazione Q_4
Q_4 (rad)
2
1.5
1
0.5
0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)


Velocità 4
Velocità Q_4
$\dot{Q}_4$ (rad/s)
50
40
30
20
10
0
-10
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
tempo (s)

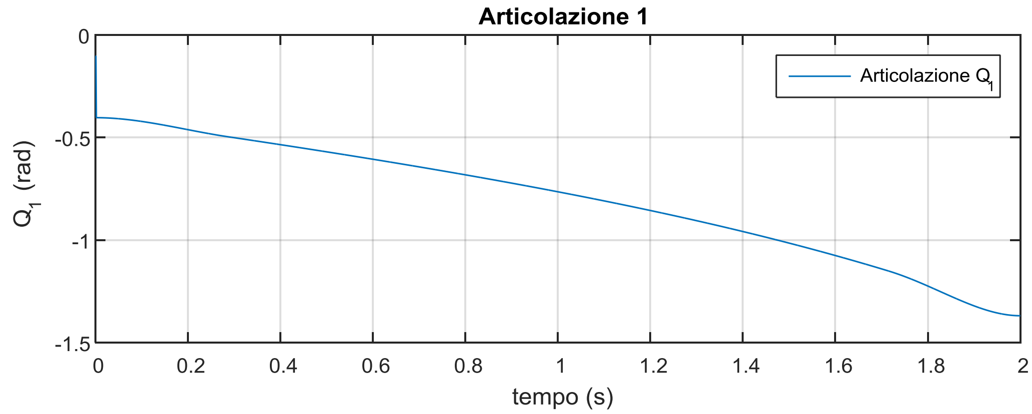

Posizione X
Posizione X
Riferimento X_d
Pos.X (m)
tempo (s)
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

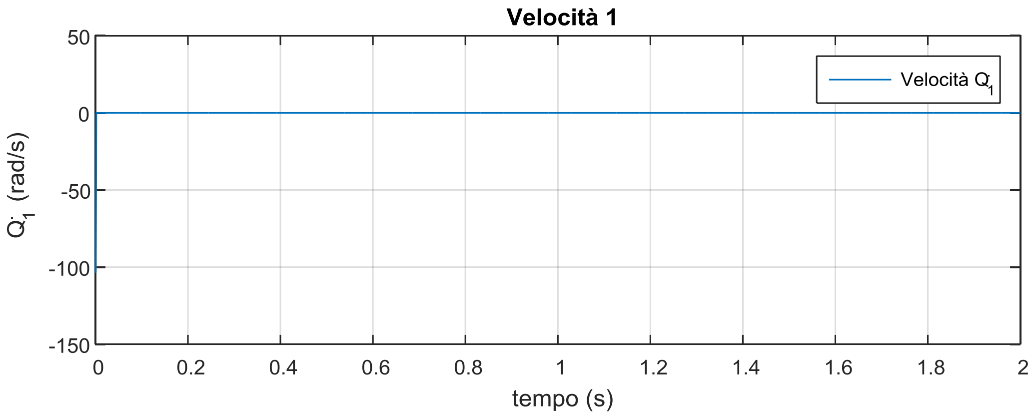

Posizione Y
Posizione Y
Riferimento Y_d
Pos.Y (m)
tempo (s)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

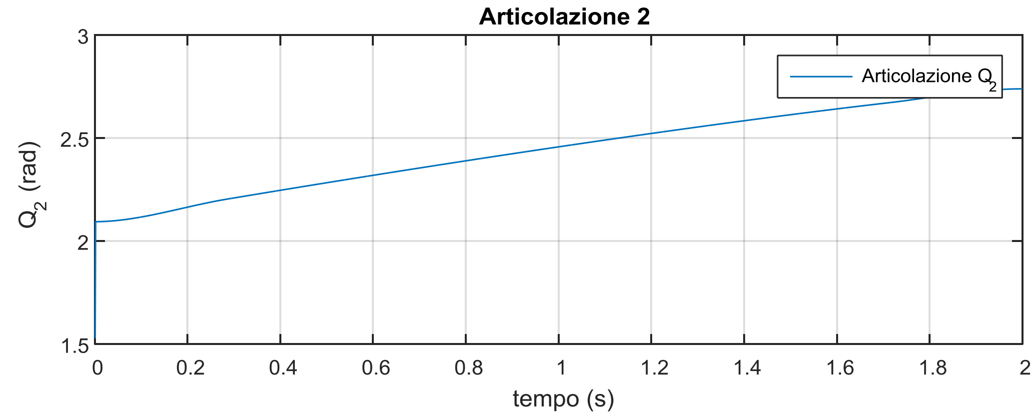

Posizione Z
Posizione Z
Riferimento Z_d
Pos.Z (m)
tempo (s)
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2

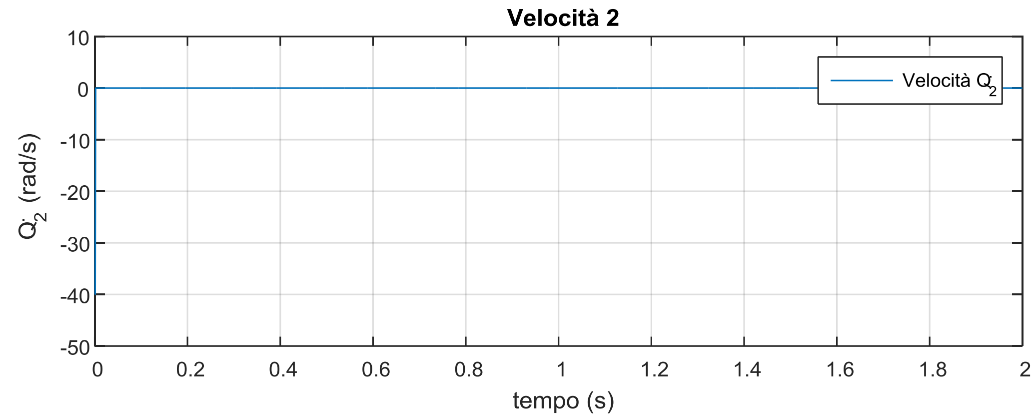

Orientamento Phi(z)
Orientamento Phi(z)
Riferimento Phi_d(z)
Orientamento Phi(z) (rad)
tempo (s)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2

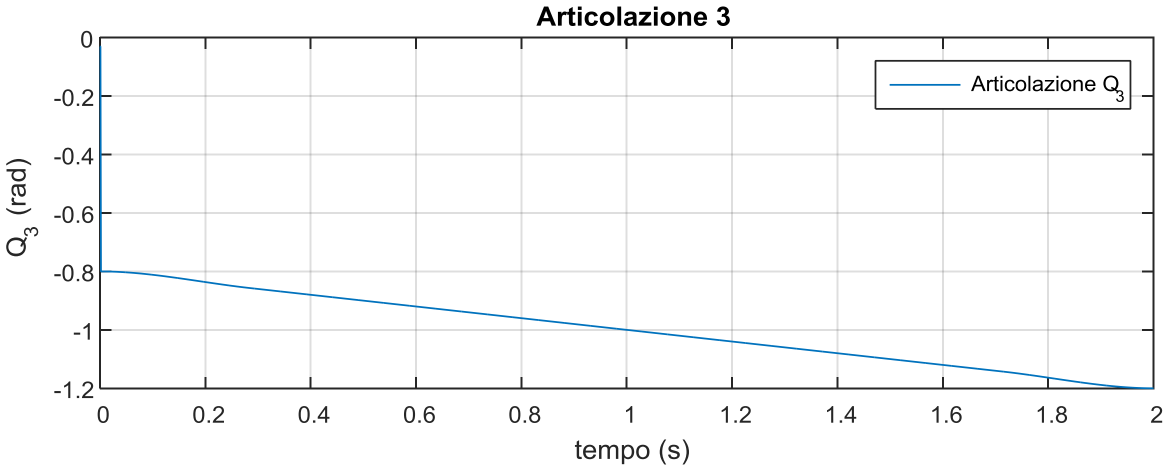
- **Dal punto (0.4,0.3,0.3,0.2) a (0.2,0,0.7,0.4):**

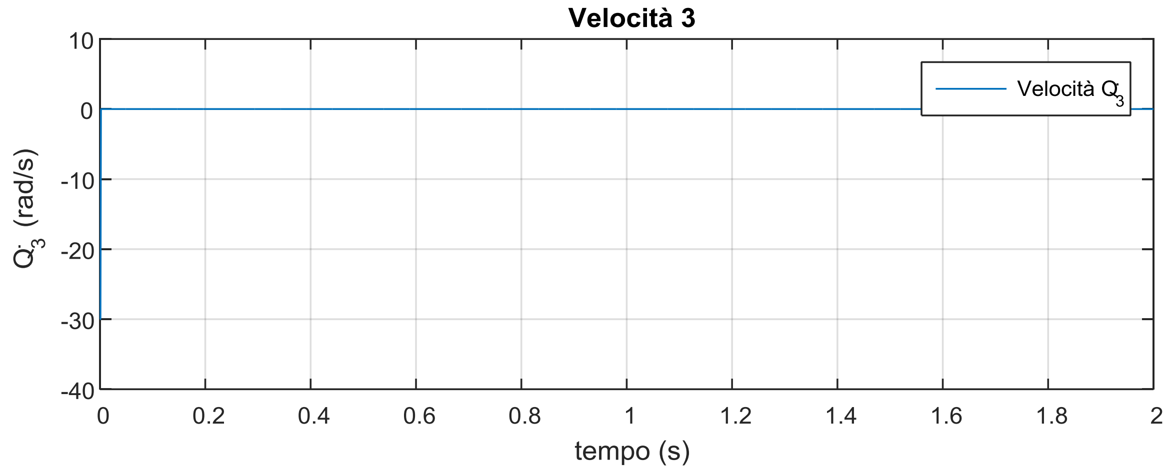


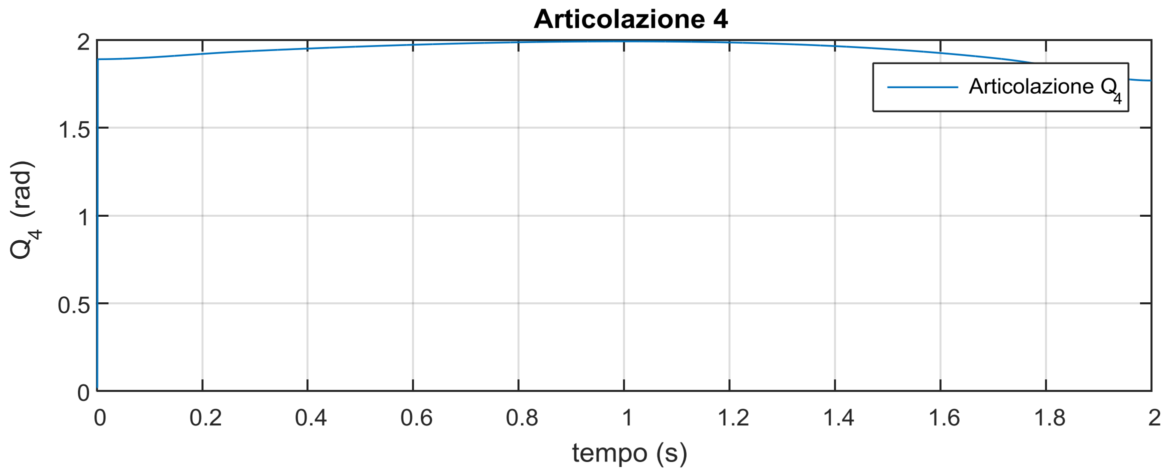


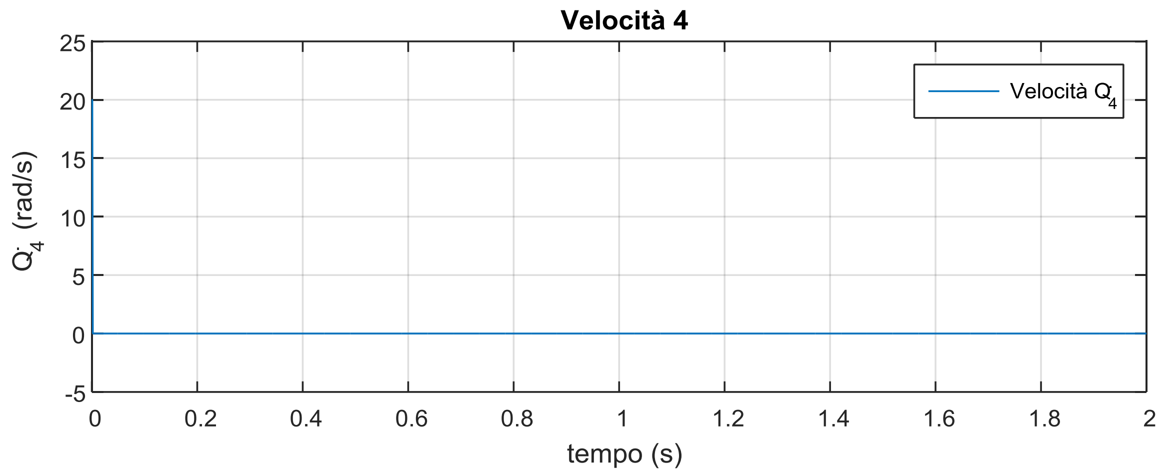


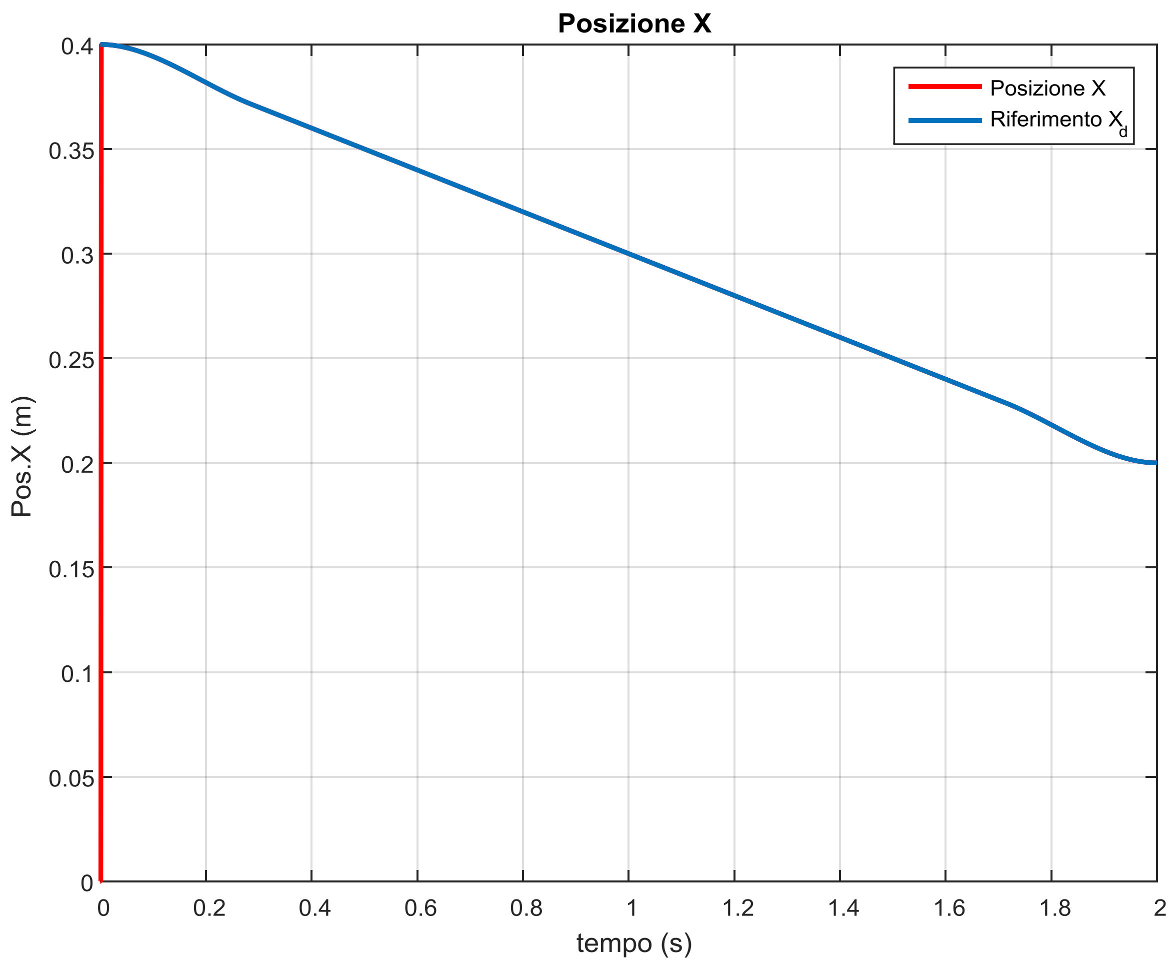


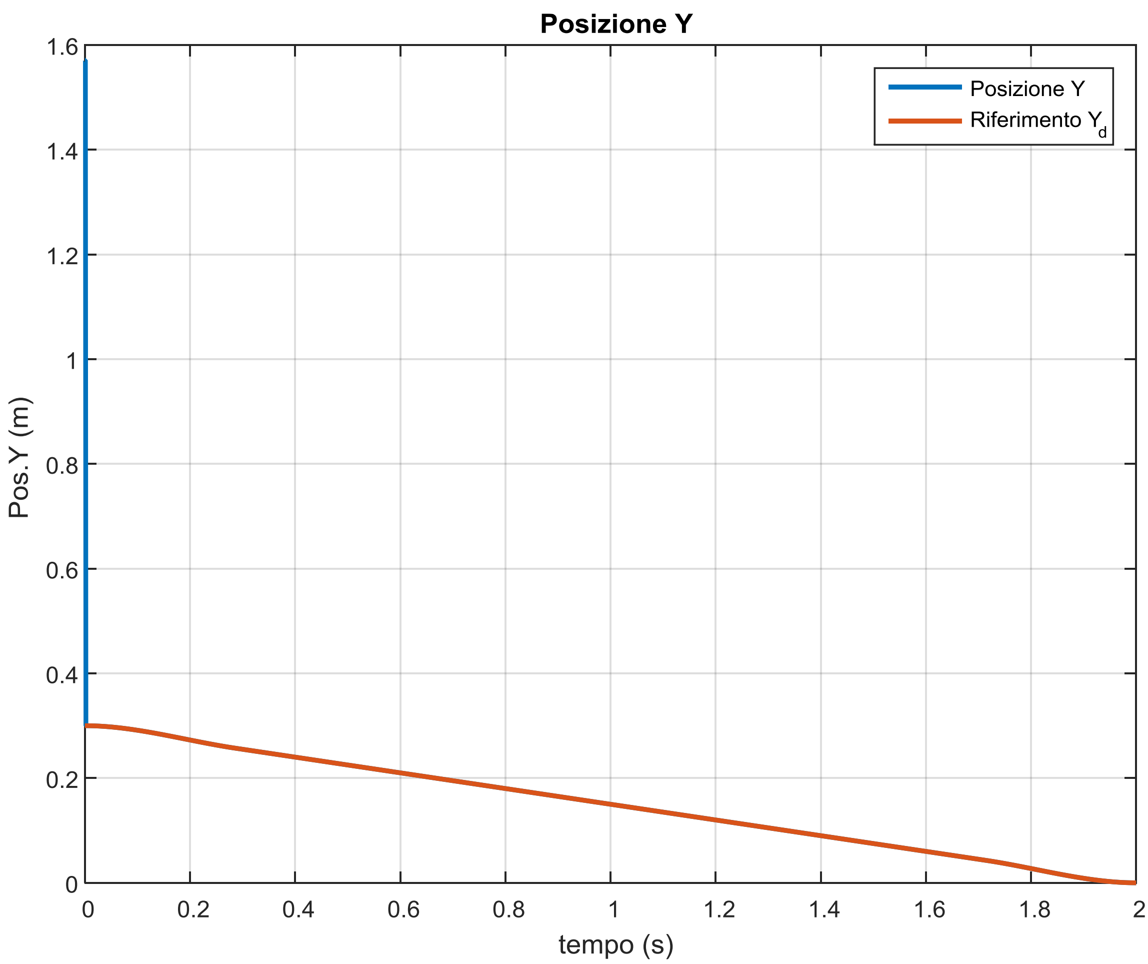

Articolazione 3
Articolazione Q3
Q3 (rad)
tempo (s)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

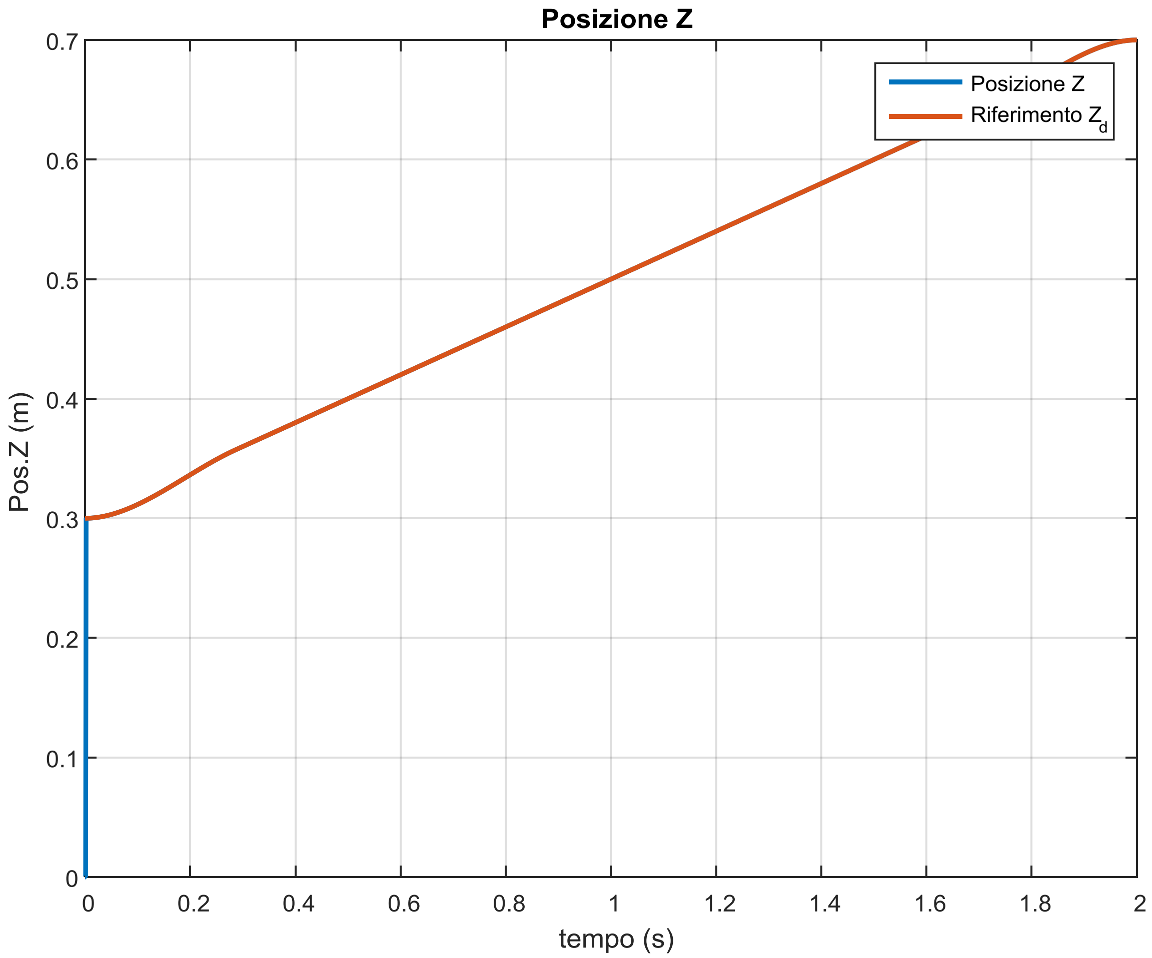

Velocità 3
Velocità Q3
Q̇3 (rad/s)
tempo (s)
10
0
-10
-20
-30
-40
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

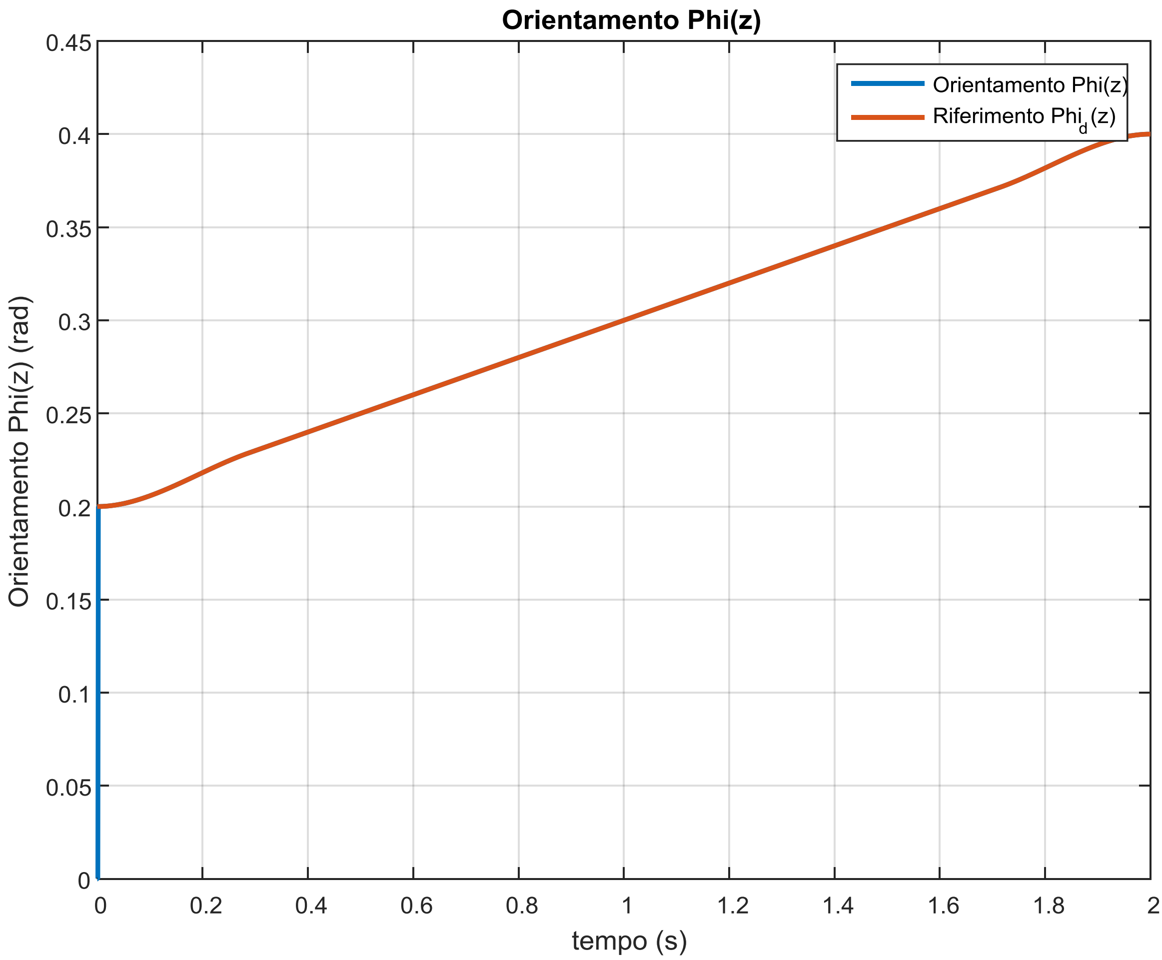

Articolazione 4
Articolazione Q4
Q4 (rad)
tempo (s)
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Velocità 4
Velocità Q4
Q̇4 (rad/s)
tempo (s)
25
20
15
10
5
0
-5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Posizione X
Posizione X
Riferimento X_d
Pos.X (m)
tempo (s)
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Posizione Y
Posizione Y
Riferimento Y_d
Pos.Y (m)
tempo (s)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Posizione Z
Posizione Z
Riferimento Z_d
Pos.Z (m)
tempo (s)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Orientamento Phi(z)
Orientamento Phi(z)
Riferimento $Phi_d(z)$
Orientamento Phi(z) (rad)
tempo (s)
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

4. Inversione cinematica con pseudo-inversa

In questo caso, si rilassa una componente di spazio operattivo, in modo che nell'entrata dell'algoritmo per l'inversione cinematica c'è una variabile in meno. Questo converte il robot in un sistema ridondante (il numero di GDL è superiore del numero de variabili utilizzate per definire il moto) econverte il Jacobiano in una matrice 3x4.

Con la variabile z come scelta di componente à rilassare, il Jacobiano risultante è il seguente:

$$J_A = \begin{bmatrix} -\frac{\sin(q_1+q_2)}{2} - \frac{\sin(q_1)}{2} & -\frac{\sin(q_1+q_2)}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(q_1+q_2)}{2} + \frac{\cos(q_1)}{2} & \frac{\cos(q_1+q_2)}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Non essendo una matrice quadrata, l'inversione normale della matrice necessaria per l'inversione cinematica non è possibile, e è necessario realizzare la pseudo-inversa, in questo caso la pseudo-inversa destra perché il numero di righe è inferiore al numero di colonne (m<n):

$$J_r^{\dagger} = J^T (J\,J^T)$$

Una soluzione fattibile avendo un robot ridondante è formulare il problema dell'inversione cinematica come un problema d'ottimizzazione lineare con un vincolo secondario. Secondo questo, $\dot{q}$ è la seguente:

$$\dot{q} = J_r^{\dagger} v_e + (I_n - J_r^{\dagger} J)\dot{q}_0$$

Il primo temine è relativo alla minima norma delle velocità dei giunti (obiettivo primario), il secondo termine è la soluzione omogenea e serve per soddisfare il vincolo secondario mediante $\dot{q}_0$. Una soluzione tipica de $\dot{q}_0$ è:

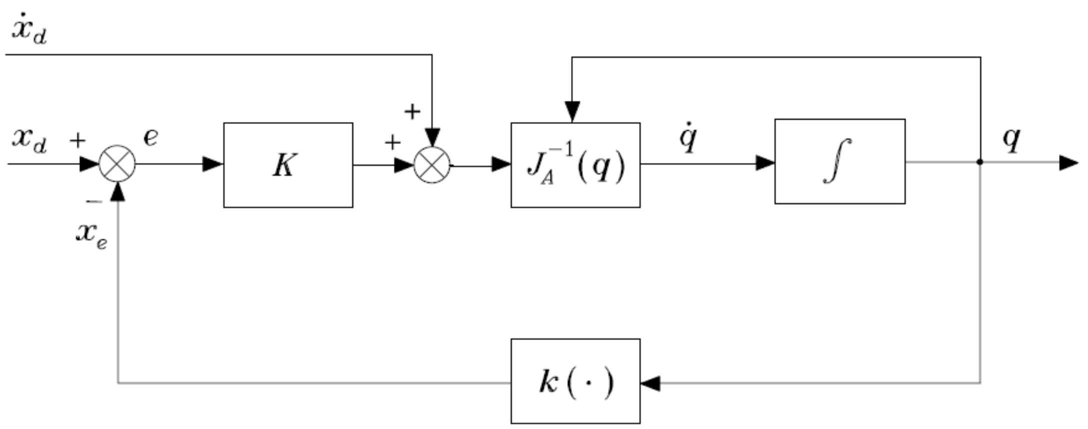
$$\dot{q}_0 = k_0 \left(\frac{\partial w(q)}{\partial q}\right)^T$$

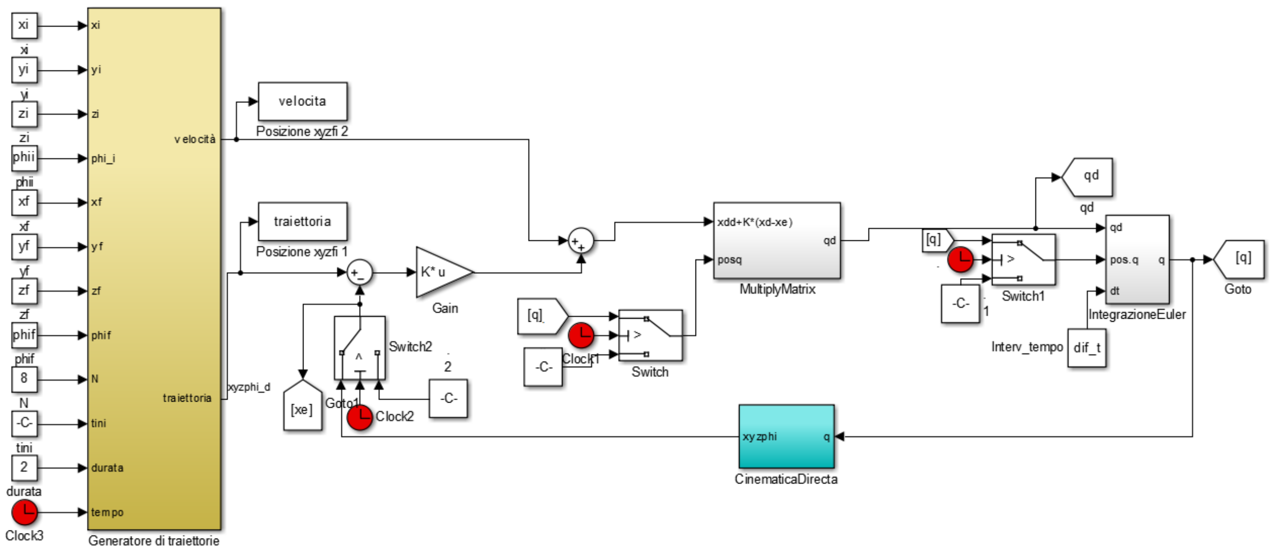
Essendo w la funzione à ottimizare compatibile con l'obiettivo primario (cinematico). Si è scelto w per massimizzare la distanza dai limiti meccanici dei giunti:

$$w(q) = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}}\right)^2$$

Con $\bar{q}_i = [0,0,0,0]$, $q_{iM} = [\pi - \frac{\pi}{8}, \pi - \frac{\pi}{8}, 0.4, \pi - \pi/8]$ e $q_{im} = -q_{iM}$.

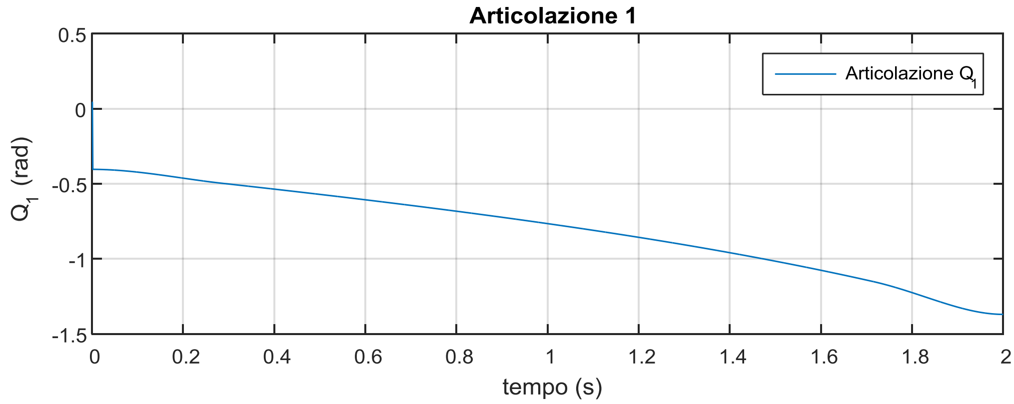
Definito l'algoritmo, si modificano le funzioni convenienti di Simulink per eliminare la componente z del generatore di traiettoria e si introduce il nuovo algoritmo per l'inversione cinematica. Lo schema è lo stesso che per l'inversione cinematica con inversa.

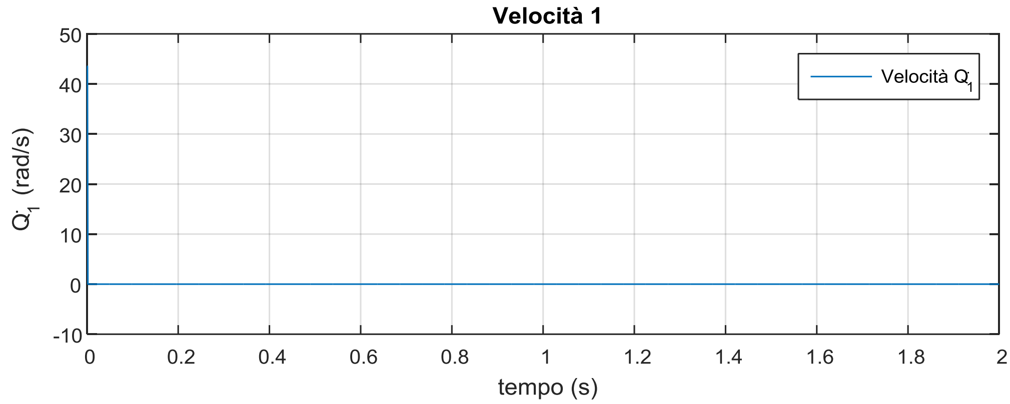


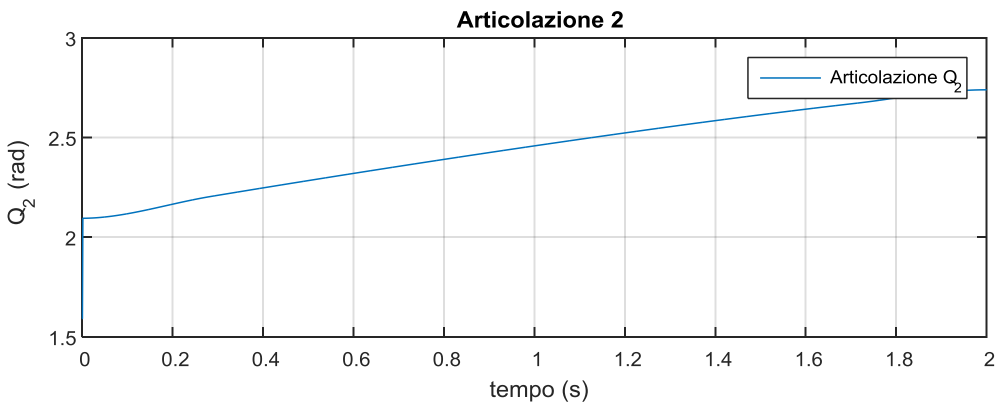


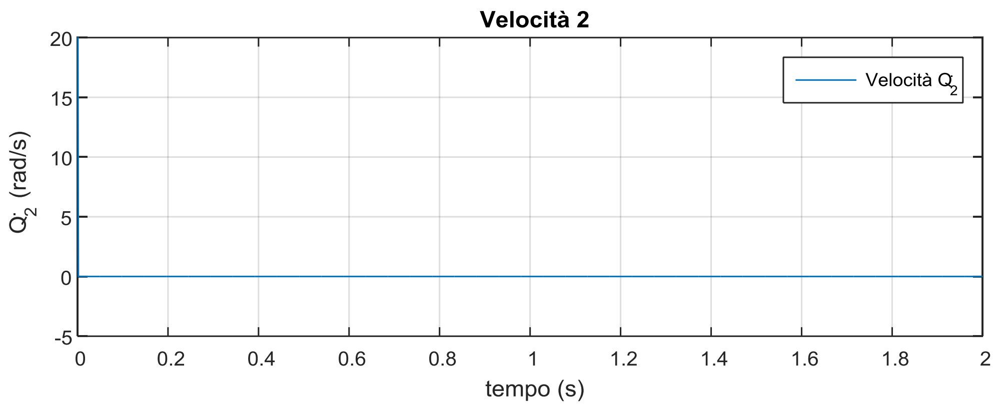
E si rappresentano le seguente traiettorie generate:

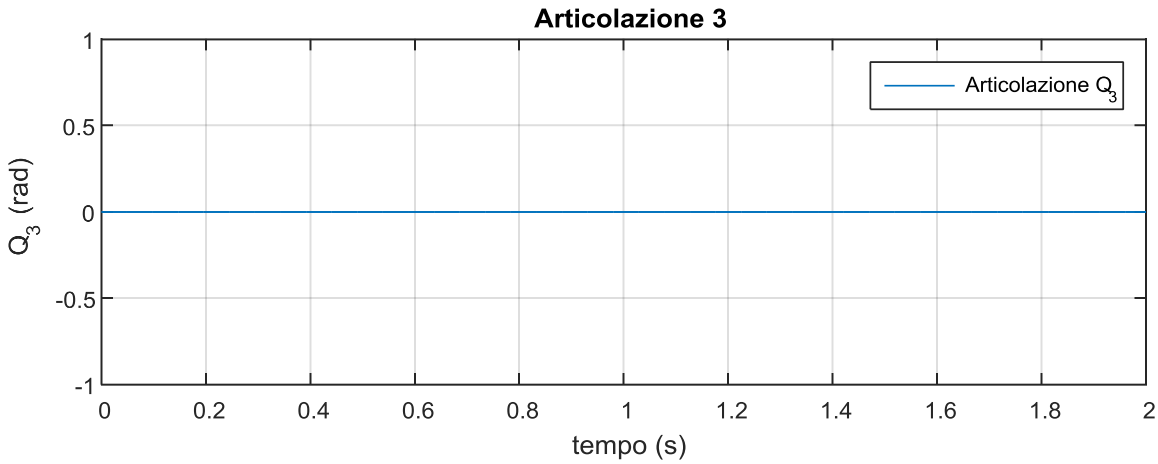
- **Dal punto (0.4,0.3,0.2) al punto (0.2,0, 0.4):**

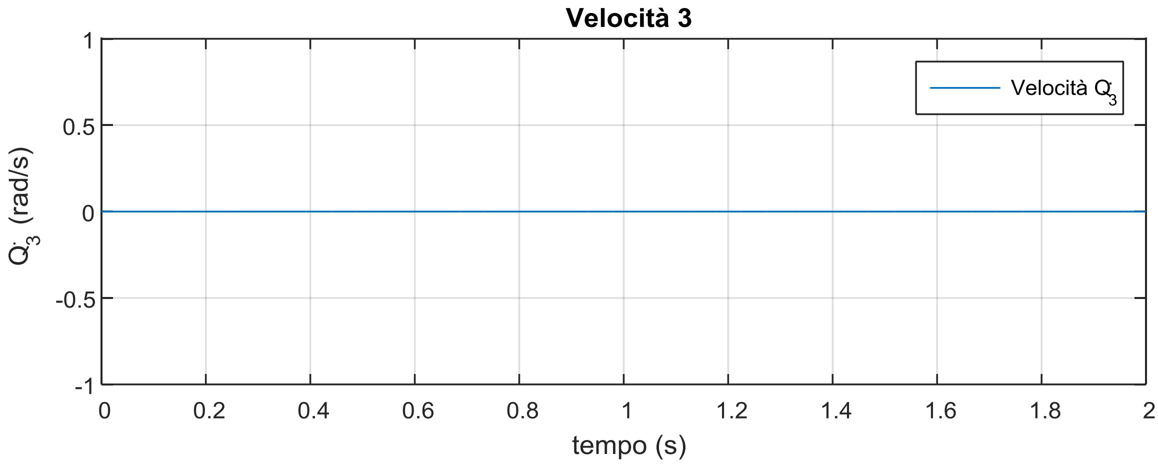


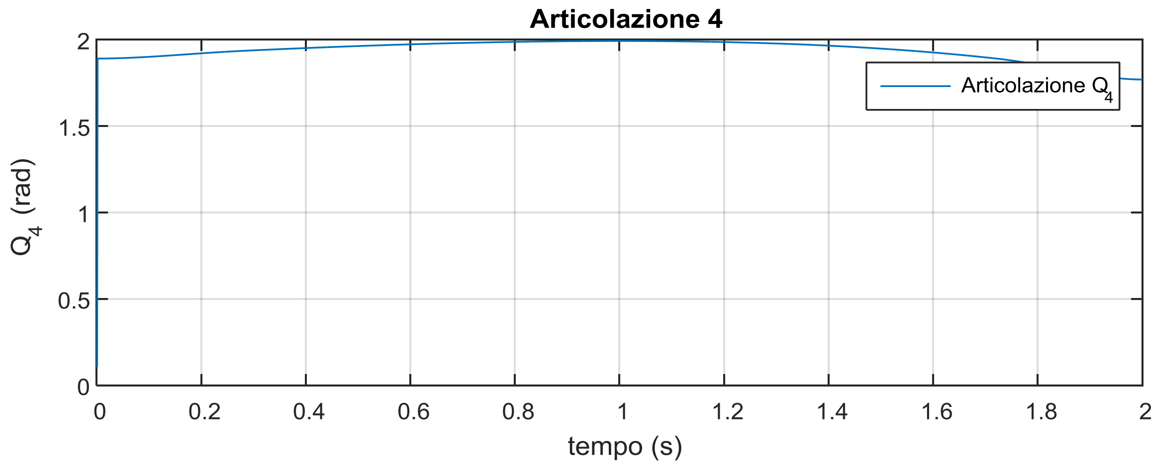


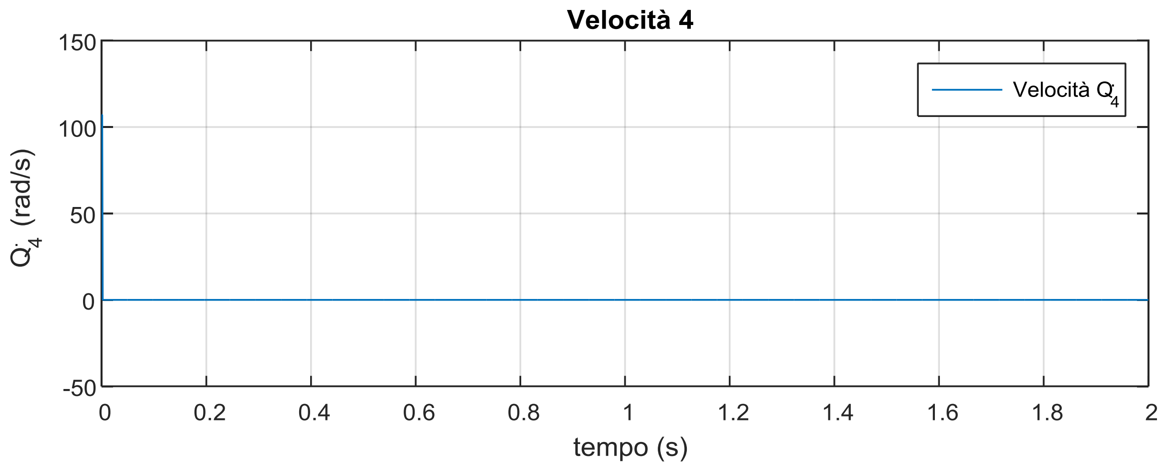


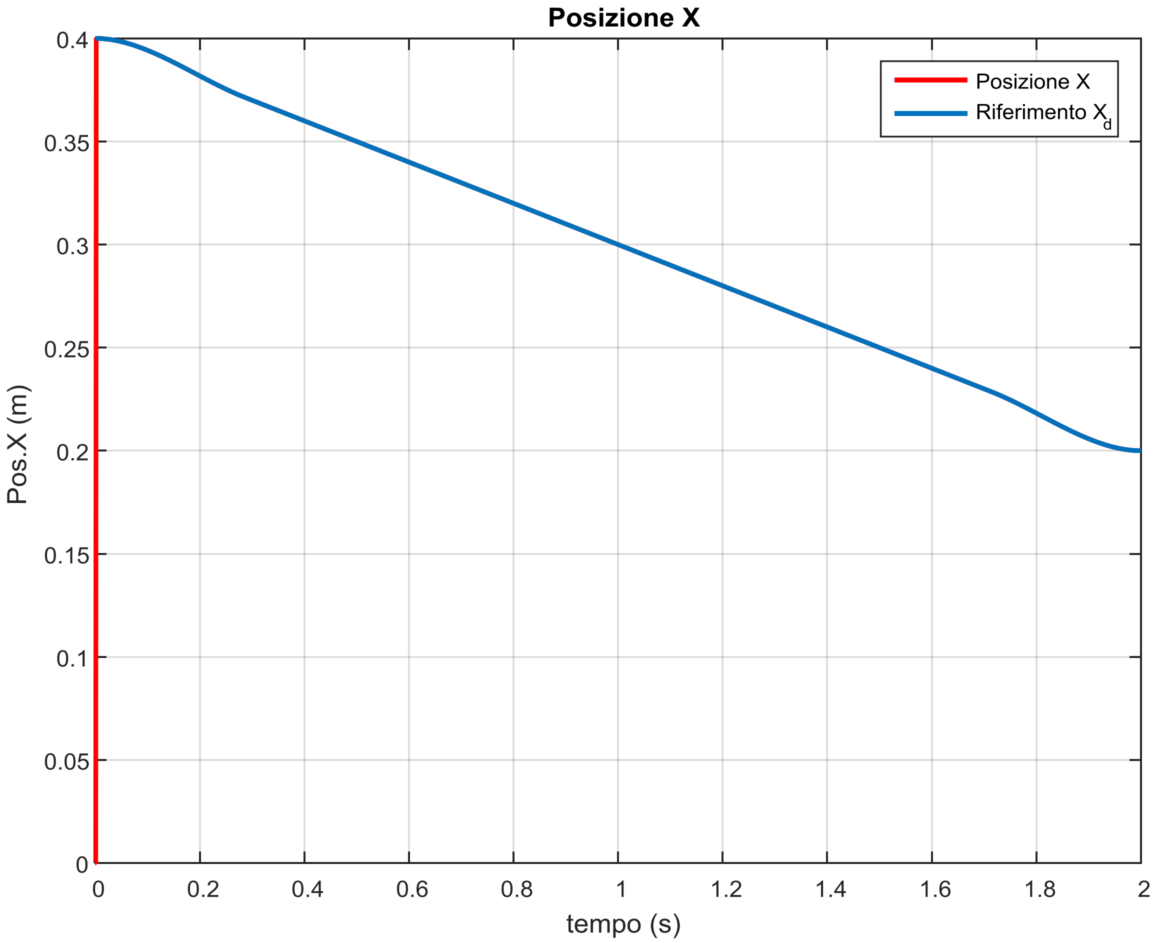


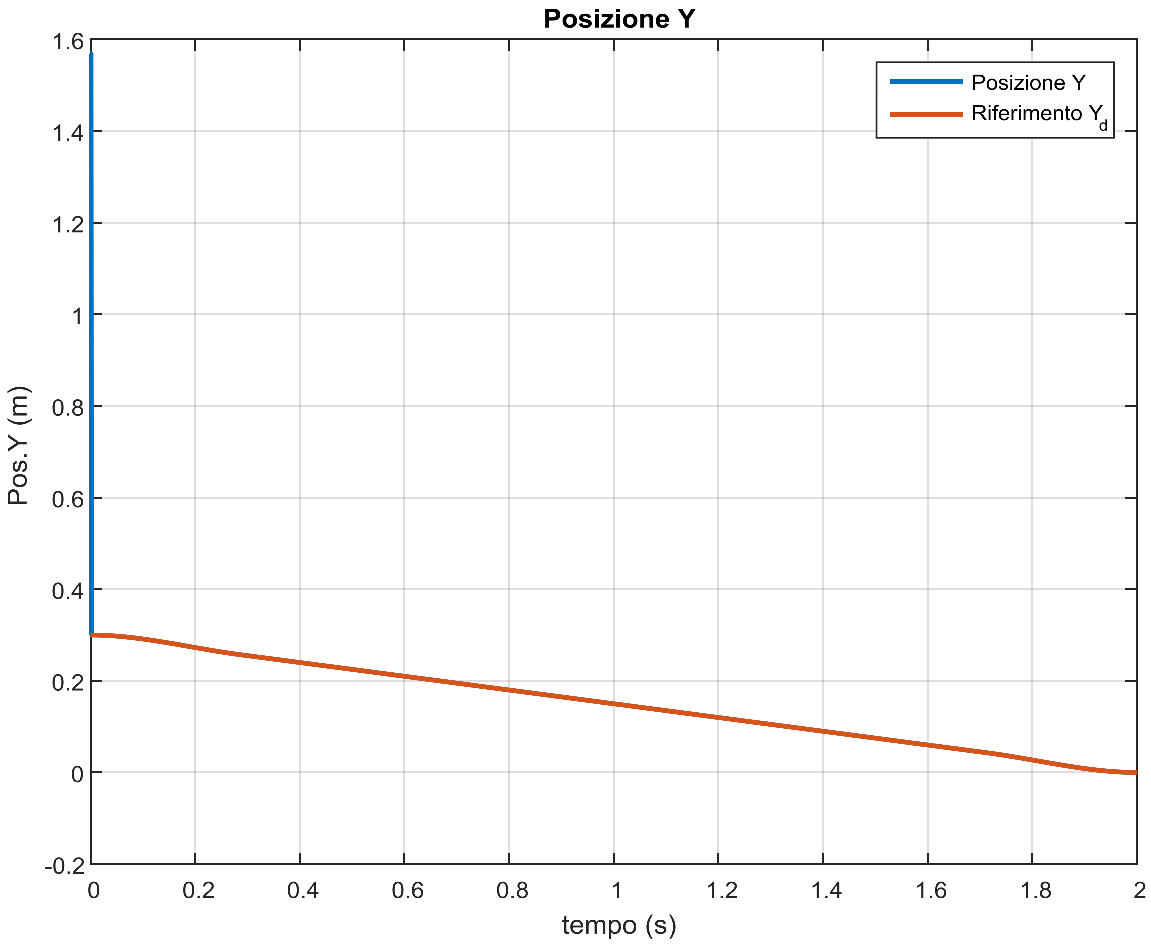

Articolazione 3
Articolazione Q_3
Q_3 (rad)
tempo (s)

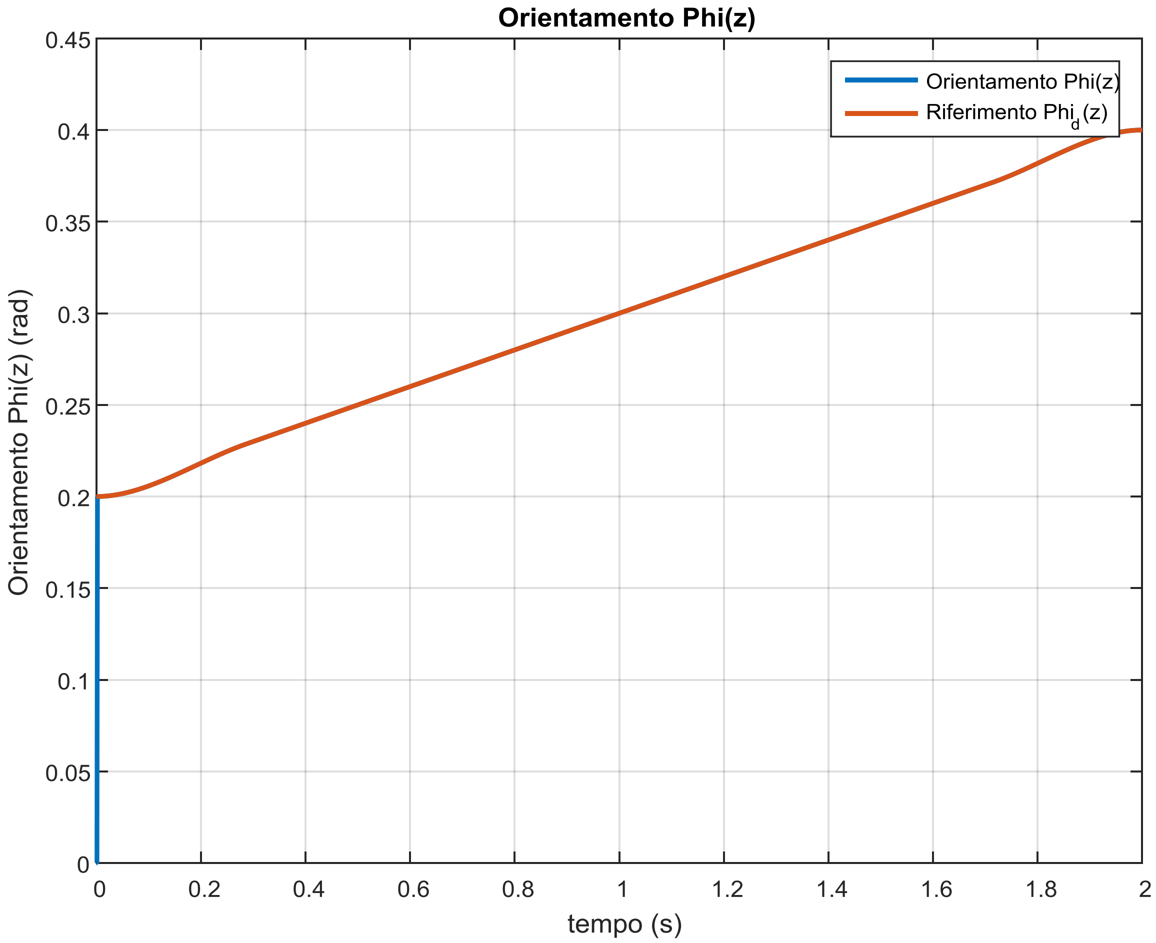

Velocità 3
Velocità $\dot{Q}_3$
$\dot{Q}_3$ (rad/s)
tempo (s)


Articolazione 4
Articolazione Q_4
Q_4 (rad)
tempo (s)

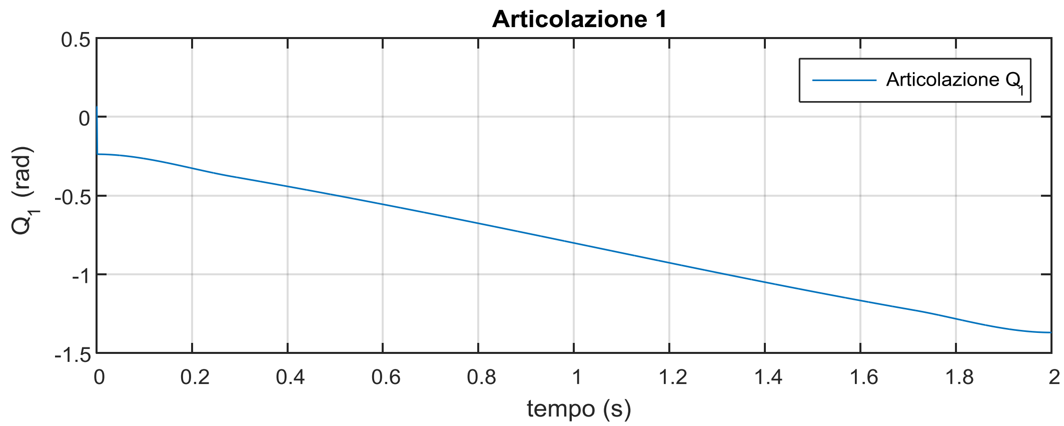

Velocità 4
Velocità $\dot{Q}_4$
$\dot{Q}_4$ (rad/s)
tempo (s)

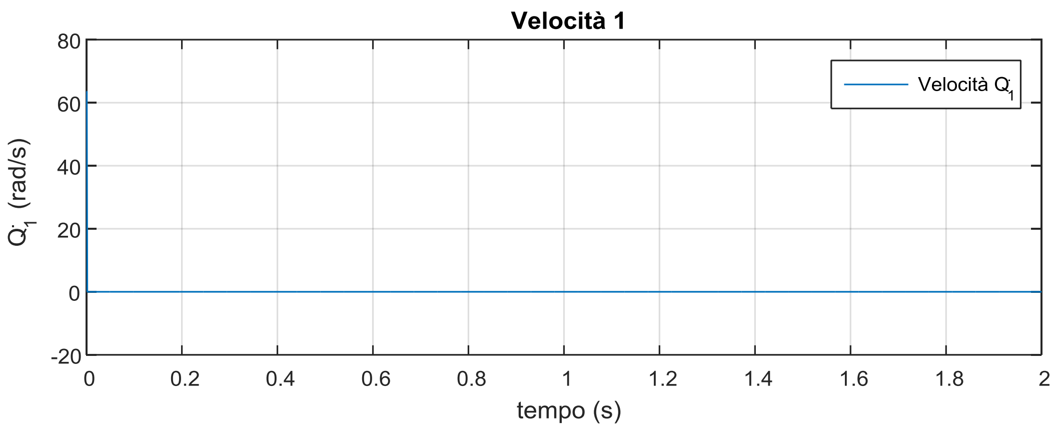

Posizione X
Posizione X
Riferimento X_d
Pos.X (m)
tempo (s)
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

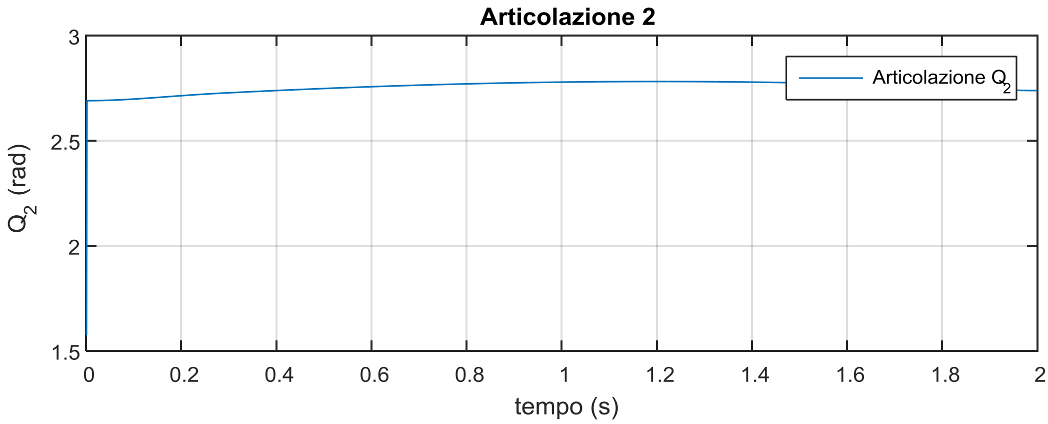

Posizione Y
Posizione Y
Riferimento Y_d
Pos.Y (m)
tempo (s)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

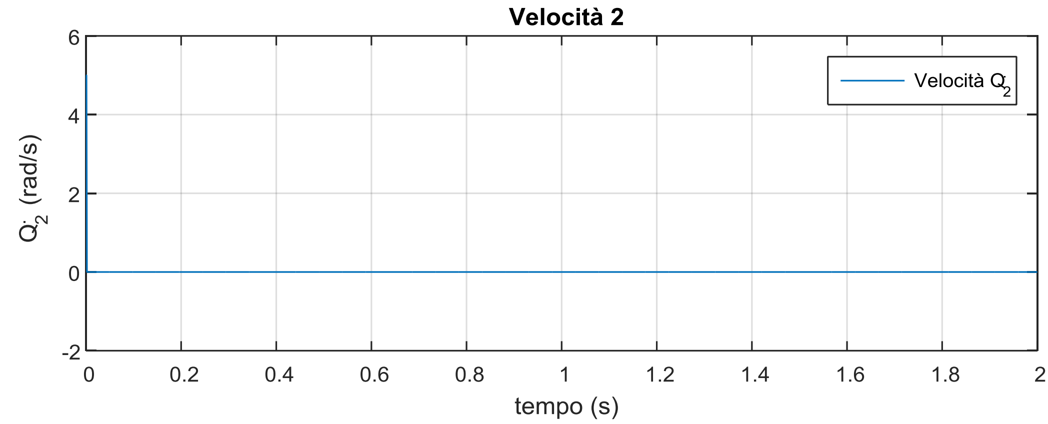


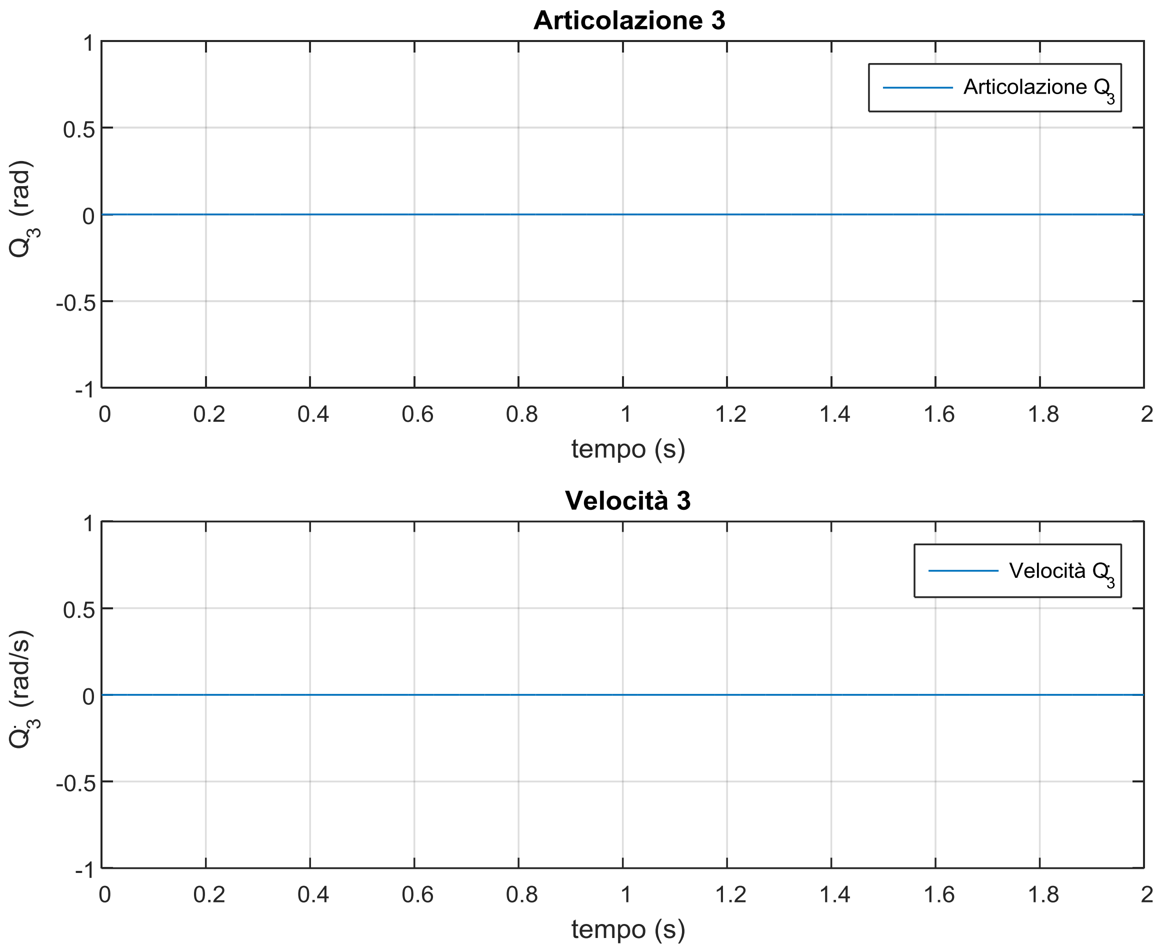
- **Dal punto (0.1,0.2,0) al punto (0.2,0,0.6):**

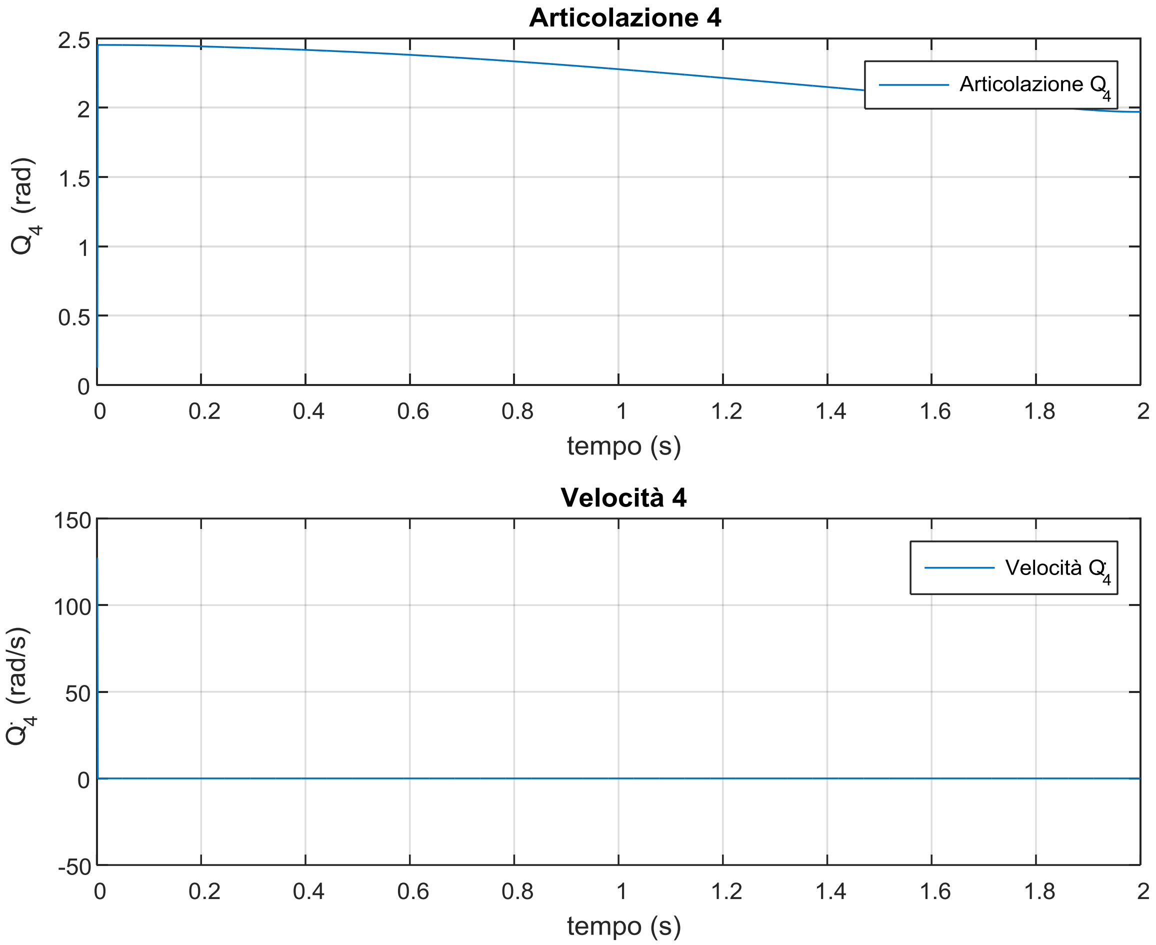


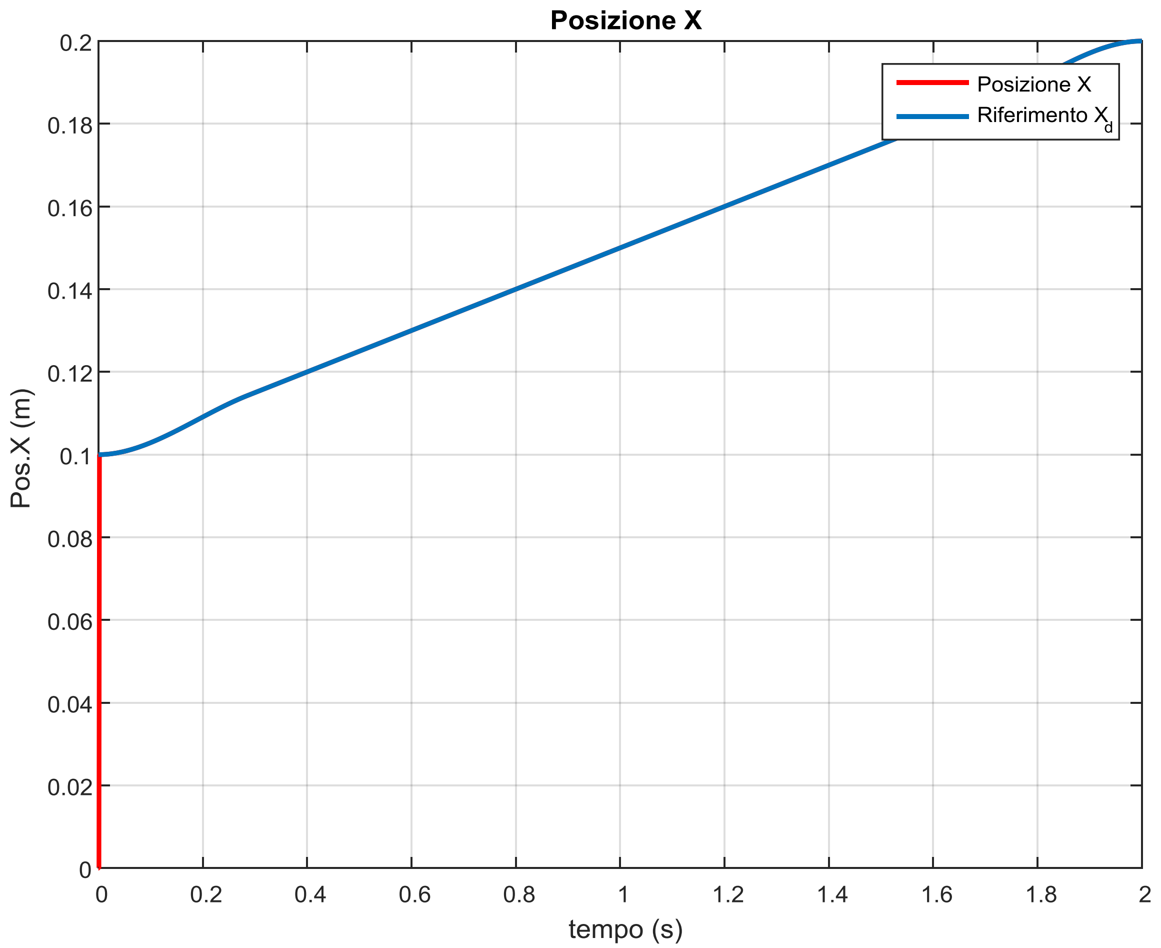


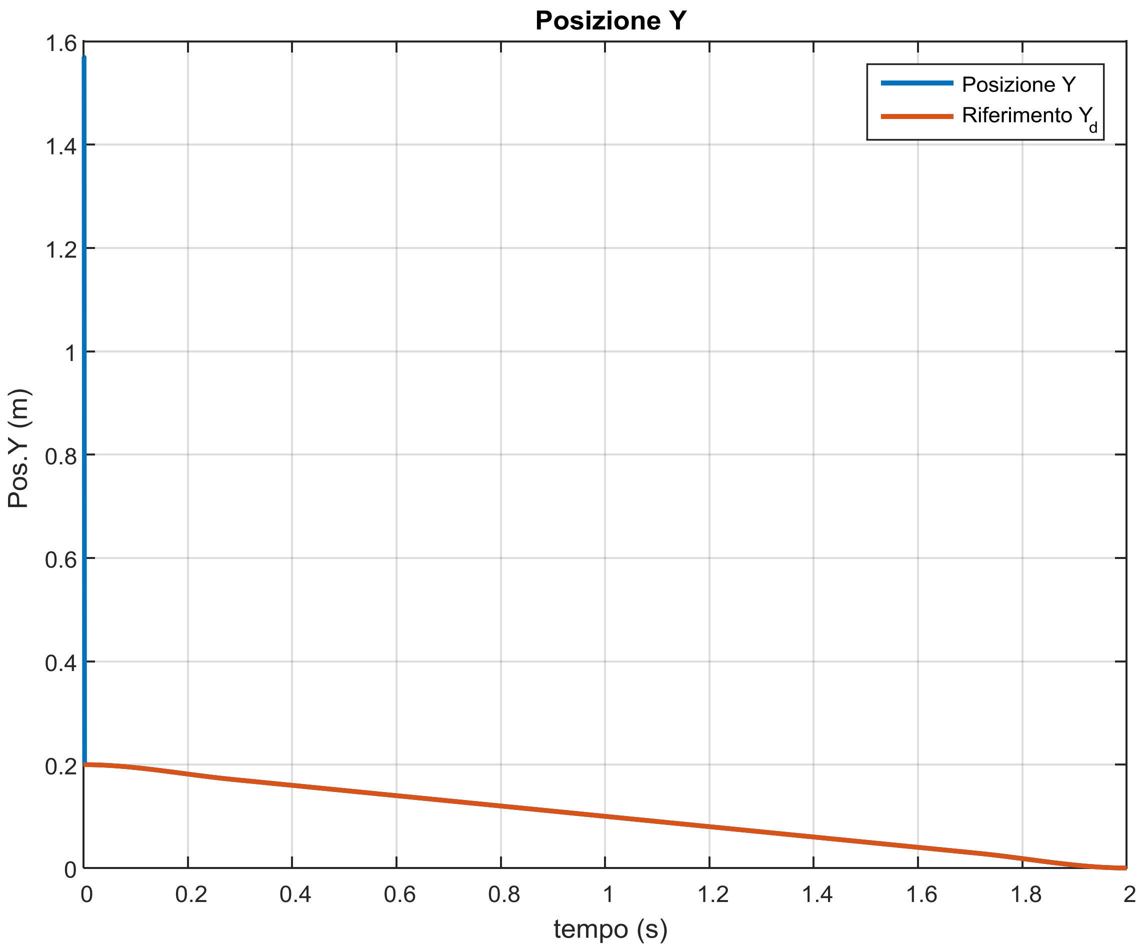

Articolazione 2
Articolazione Q2
Q2 (rad)
tempo (s)


Velocità 2
Velocità Q2
Q2 (rad/s)
tempo (s)


Articolazione 3
Articolazione Q3
Q3 (rad)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)
Velocità 3
Velocità Q̇3
Q̇3 (rad/s)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)


Articolazione 4
Articolazione Q4
Q4 (rad)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)
Velocità 4
Velocità Q̇4
Q̇4 (rad/s)
150
100
50
0
-50
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
tempo (s)


Posizione X
Posizione X
Riferimento X_d
Pos.X (m)
tempo (s)
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Posizione Y
Posizione Y
Riferimento Y_d
Pos.Y (m)
tempo (s)
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

5. Controllo dinamico

Per realizzare i controlli è necessario ottenere il modello dinamico del robot, che secondo la formulazione di Lagrange è lo seguente:

$$B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s sgn(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q)h_e$$

Dove $B(q)$ è la matrice di inerzia del manipolatore, $C(q,\dot{q})$ tiene conto dell'effetto centrifugo e dell'effetto di Coriolis, F_v è la matrice dei coefficienti di attriro viscoso, F_s contiene i coefficienti di attrito di Coulomb (in questo caso si disprezza), $g(q)$ tiene conto dell'efetto della gravità τ è il vettore delle coppie generate agli assi dei giunti, $J^T(q)$ è il Jacobiano trasposto e h_e è il vettore delle coppie generate per l'efettore finale nell'ambiente (si suppone come zero).Di seguito si calcolano le differenti matrici.

$$B(q) = \begin{bmatrix} B(1,1) & B(1,2) & B(1,3) & B(1,4) \\ B(2,1) & B(2,2) & B(2,3) & B(2,4) \\ B(3,1) & B(3,2) & B(3,3) & B(3,4) \\ B(4,1) & B(4,2) & B(4,3) & B(4,4) \end{bmatrix}$$

$B(1,1) = 3.19\cos(q_2) - 0.78\cos^2(q_1) + 18.20$

$B(1,2) = 1.28\sin\left(q_2 + \frac{\pi}{4}\right) - 1.28\cos\left(2q1 + q2 + \frac{\pi}{4}\right) - 0.85\cos\left(2q_1 + 2q_2 + \frac{\pi}{4}\right) - 8.23$

$B(1,3) = -0.25$

$B(1,4) = -1.07$

$B(2,1) = 1.28\sin(q_2) - 1.28\cos\left(2q_1 + q_2 + \frac{\pi}{4}\right) - 0.85\cos\left(2q_1 + 2q_2 + \frac{\pi}{4}\right) + 8.23$

$B(2,2) = 2.41\sin^2(q1 + q2) + 7.63$

$B(2,3) = 12.75$

$B(2,4) = -1.07$

$B(3,1) = -0.25$

$B(3,2) = -0.25$

$B(3,3) = 12.5$

$B(3,4) = 0$

$B(4,1) = -1.07$

$B(4,2) = -1.07$

$B(4,3) = 0$

$B(4,4) = 1.45$

$$C = \begin{bmatrix} C(1,1) & C(1,2) & C(1,3) & C(1,4) \\ C(2,1) & C(2,2) & C(2,3) & C(2,4) \\ C(3,1) & C(3,2) & C(3,3) & C(3,4) \\ C(4,1) & C(4,2) & C(4,3) & C(4,4) \end{bmatrix}$$

$$C(1,1) = 25\dot{q}_1 \frac{sin(2 * q_1)}{64} - 51\dot{q}_2 \frac{sin(q_2)}{32}$$

$$C(1,2) = \frac{77\dot{q}_2 \cos(2q_1 + 2q_2)}{64} - \frac{51\dot{q}_1 \sin(q_2)}{32} + \frac{77\sqrt{2}\dot{q}_2 cos\left(\frac{\pi}{4} + q_2\right)}{64} + \frac{51\sqrt{2} * \dot{q}_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2q_1 + q_2\right)}{64}$$

$$C(1,3) = 0$$

$$C(1,4) = 0$$

$$C(2,1) = \frac{77\dot{q}_2 \sin(2q_1 + 2q_2)}{64} + \frac{51\dot{q}_1 \sin(q_2)}{32} + \frac{77\sqrt{2}\dot{q}_1 \sin\left(\frac{\mathrm{pi}}{4} + 2q_1 + 2q_2\right)}{64} + \frac{51\sqrt{2}\dot{q}_1 \sin\left(\frac{\mathrm{pi}}{4} + 2q_1 + q_2\right)}{32}$$

$$C(2,2) = \frac{77\dot{q}_1 \sin(2q_1 + 2q_2)}{64} + \frac{77\dot{q}_2 \sin(2q_1 + 2q_2)}{64}$$

$$C(2,3) = 0$$

$$C(2,4) = 0$$

$$C(3,1) = 0$$

$$C(3,2) = 0$$

$$C(3,3) = 0$$

$$C(3,4) = 0$$

$$C(4,1) = 0$$

$$C(4,2) = 0$$

$$C(4,3) = 0$$

$$C(4,4) = 0$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

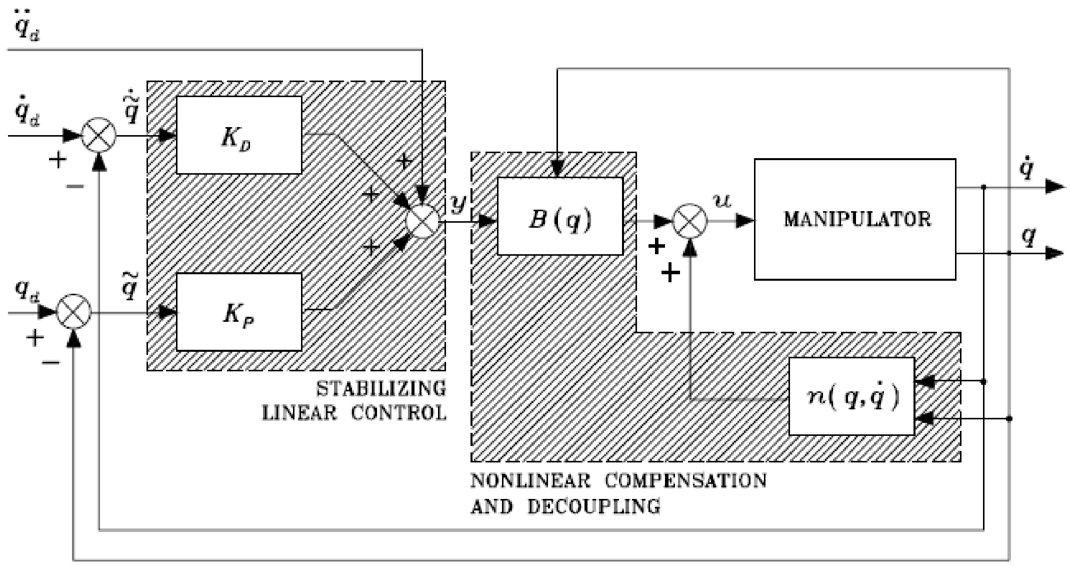
$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 127.53 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per il controllo dinamico inverso, l' espressione del modello dinamico può scriversi nella seguente forma:

$$B(q)y + n(q, \dot{q}) = u$$

Essendo u il segnale di controllo d'entrata al modello dinamico del manipulatore e y il segnale proveniente dal loop di controllo delle variabili aticolare. Con $n(q, \dot{q})$:

$$n(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$$



Per tenere in conto le imperfezioni del modello e correggerli si usano i controlli robusto e adattativo.

5.1. Controllo robusto

Per il controllo robusto si usa la seguente equazione:

$$\hat{B}(q)y + \hat{n}(q, \dot{q}) = u$$

Dove $\hat{B}(q)$ e $\hat{n}(q, \dot{q})$ sono le matrici stimate del modello e y è definita come:

$$y = \ddot{q}_d + K_D\dot{\tilde{q}} + K_P\tilde{q} + w$$

Dove il termine PD assicura la stabilizzazione dell'errore dinamico, $\ddot{q}_d$ è il termine feedforward e w proporziona robusteza. Per definire w si usa il metodo diretto di Lyapunov, e à la fine si ottiene come risultato:

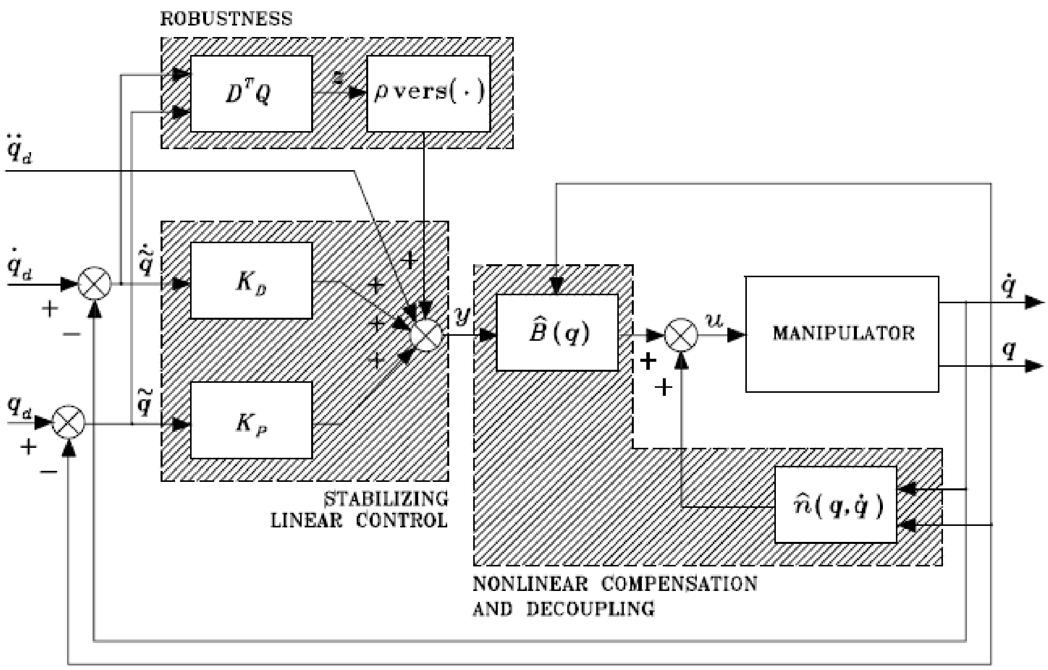
$$w = \frac{\rho}{||z||} z$$

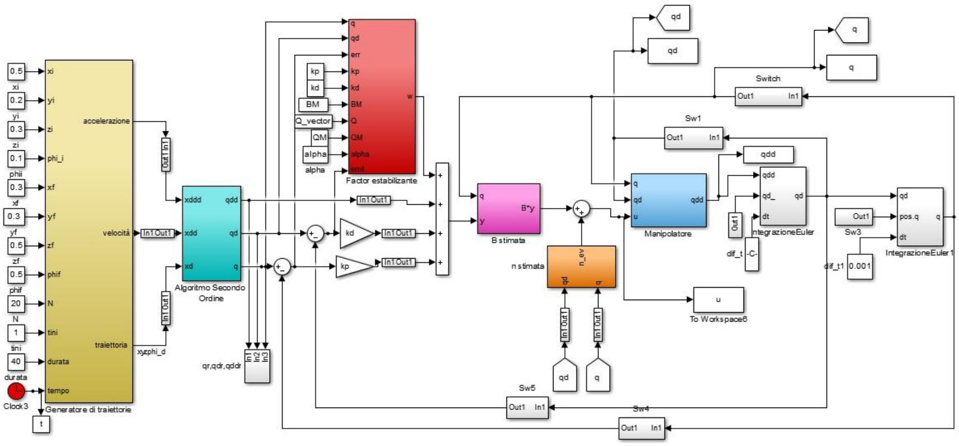
Doveρ ez sono:

$$\rho \geq \frac{1}{1-\alpha}\left(\alpha Q_M + \alpha\left|\left|K\right|\right|\left|\left|\xi\right|\right|B_M \phi\right) \quad , \qquad \alpha = 0.0148$$

$$z = D^T Q \xi \quad , \qquad Q = \begin{bmatrix} O & -0.1I \\ -0.1I & 0.005I \end{bmatrix}$$

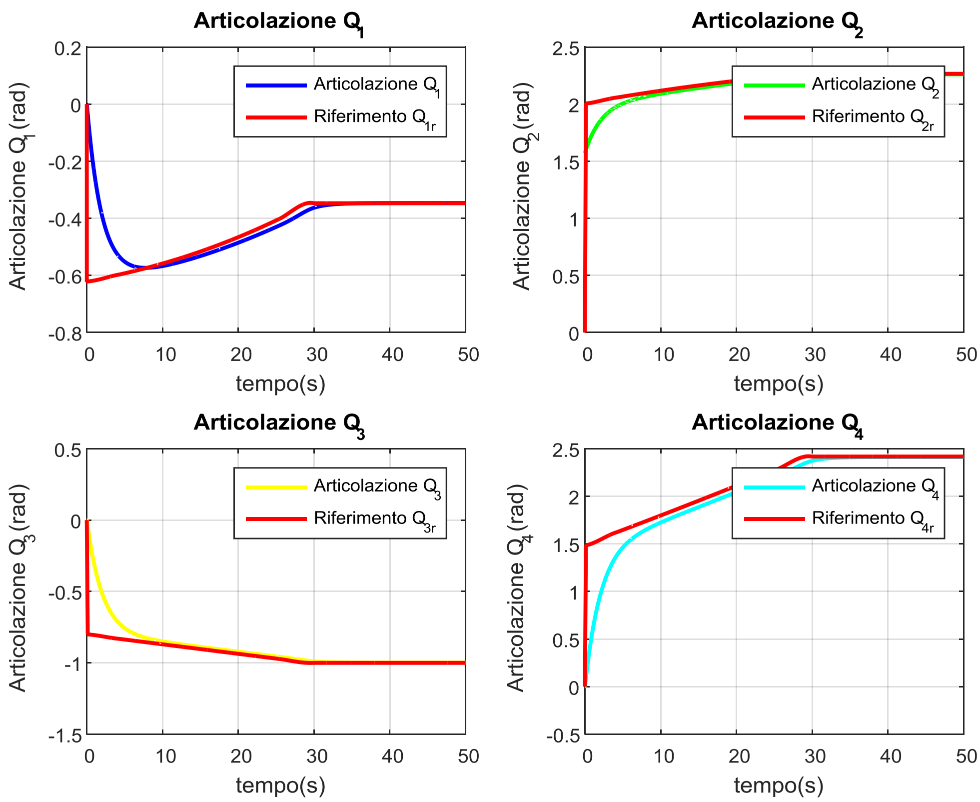
Lo schema di controllo realizzato è il seguente:

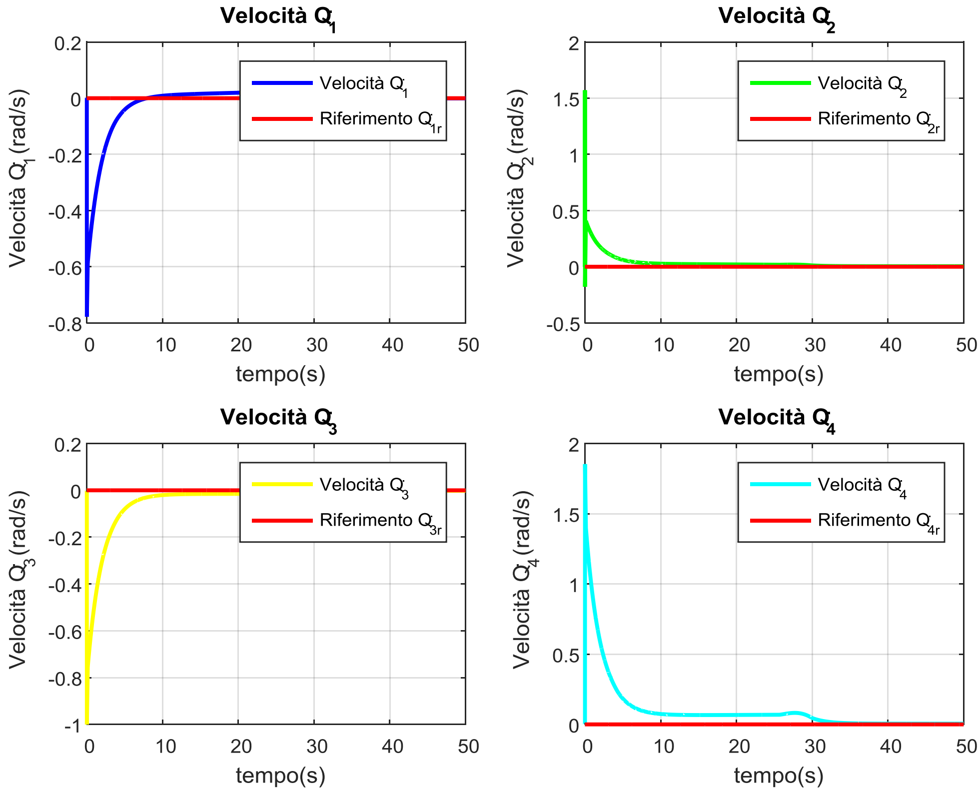


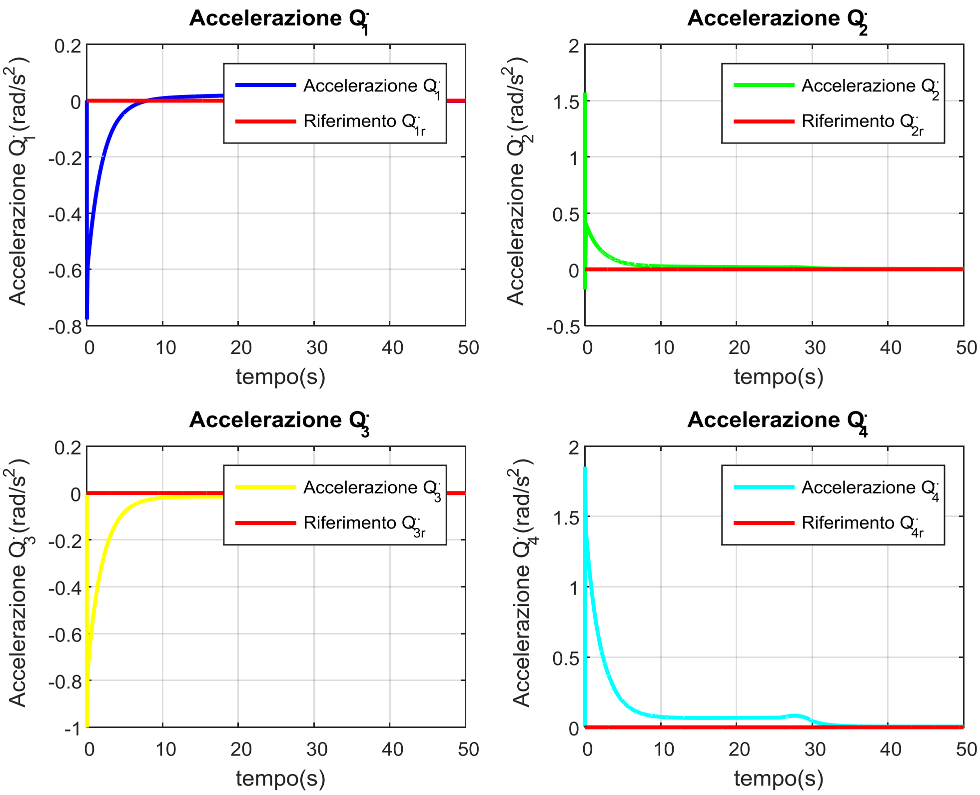


Di seguito se mostrano le grafiche dal punto (0.5,0.2,0.3, 0) al (0.3,0.3,0.5,1.7)ottenuti con le seguentiK_D e K_P:

$$K_P = 500 \quad , \qquad\qquad K_D = 100$$




Velocità Q1
Velocità Q1 (rad/s)
Velocità Q1
Riferimento Q1r
tempo(s)
Velocità Q2
Velocità Q2 (rad/s)
Velocità Q2
Riferimento Q2r
tempo(s)
Velocità Q3
Velocità Q3 (rad/s)
Velocità Q3
Riferimento Q3r
tempo(s)
Velocità Q4
Velocità Q4 (rad/s)
Velocità Q4
Riferimento Q4r
tempo(s)


Accelerazione Q1
Accelerazione Q1 (rad/s2)
Accelerazione Q1
Riferimento Q1r
tempo(s)
Accelerazione Q2
Accelerazione Q2 (rad/s2)
Accelerazione Q2
Riferimento Q2r
tempo(s)
Accelerazione Q3
Accelerazione Q3 (rad/s2)
Accelerazione Q3
Riferimento Q3r
tempo(s)
Accelerazione Q4
Accelerazione Q4 (rad/s2)
Accelerazione Q4
Riferimento Q4r
tempo(s)

5.2. Controllo adattativo

Si finge di dare una soluzione che consente un adattamento in linea del modello computazionale al modello dinamico.

Questo è possibile per la proprietà di linearità nei parametri dinamici del manipolatore. In effetti, sempre si può esprimere le equazioni non lineari di movimento in forma lineare. L'equazione può essere scritta così:

$$B(q) * \ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\pi = u$$

dove π è un vettore (p x 1) di parametri costanti e Y è una matrice (n x p) che è funzione di posizioni, velocità e accelerazioni congiunte.

La legge di controllo adattativa è la seguente:

$$u = Y(q, \dot{q}, \dot{q_r}, \ddot{q}_r)\hat{\pi} + K_D(\dot{\tilde{q}} + \Lambda * \tilde{q})$$

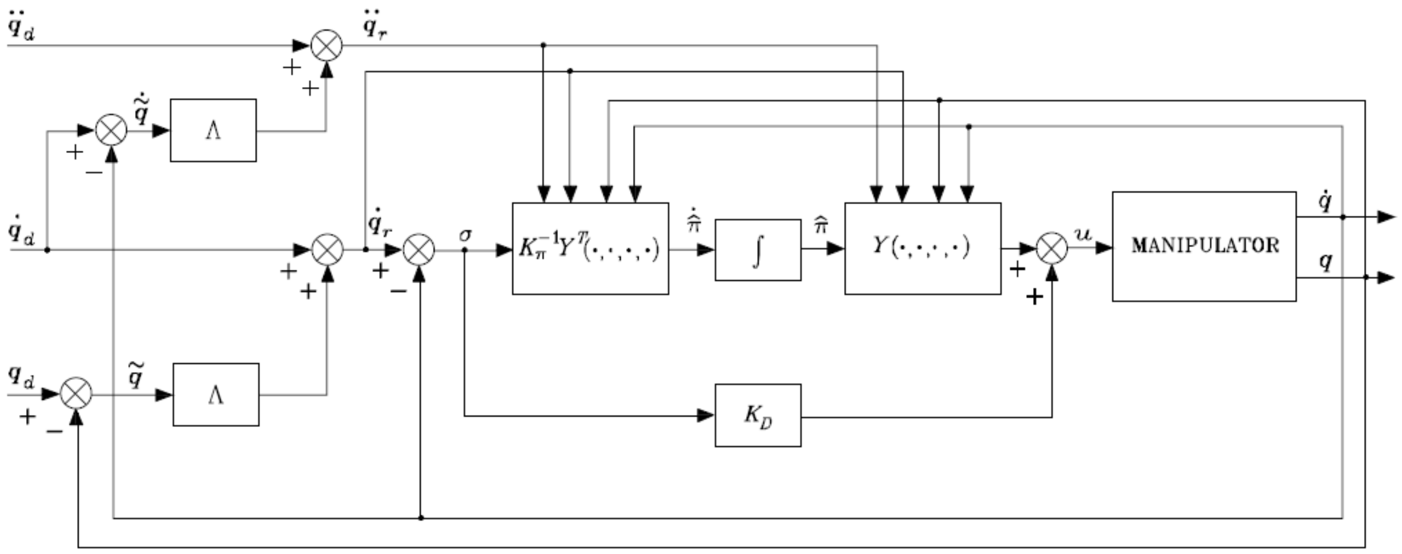
E la legge di adattamento dei parametri è:

$$\hat{\pi} = K_\pi^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \dot{q_r}, \ddot{q}_r)(\dot{\tilde{q}} + \Lambda * \tilde{q})$$

Con

$$\begin{aligned} \dot{q_r} &= \dot{q_d} + \Lambda * \tilde{q} \\ \ddot{q}_r &= \ddot{q}_d + \Lambda * \dot{\tilde{q}} \end{aligned}$$

Con tutto questo, per implementare il controllo adattativo si utilizza il seguente schema:

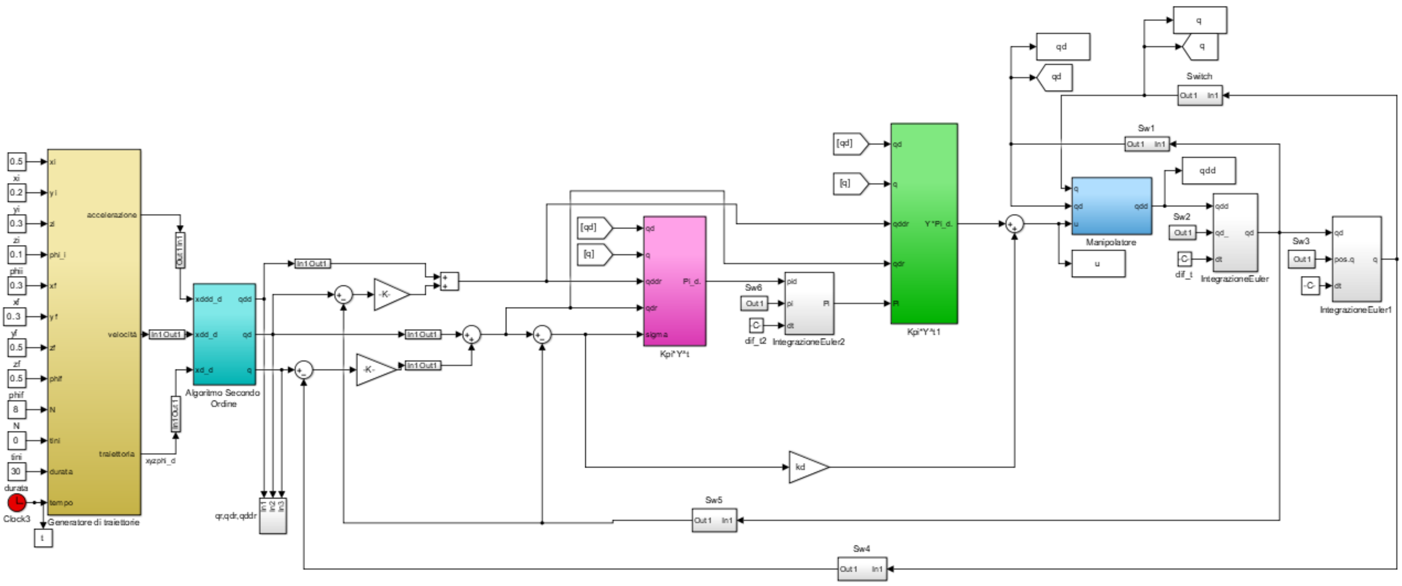


Nel caso del manipolatore SCARA, si ottene questa matrice:

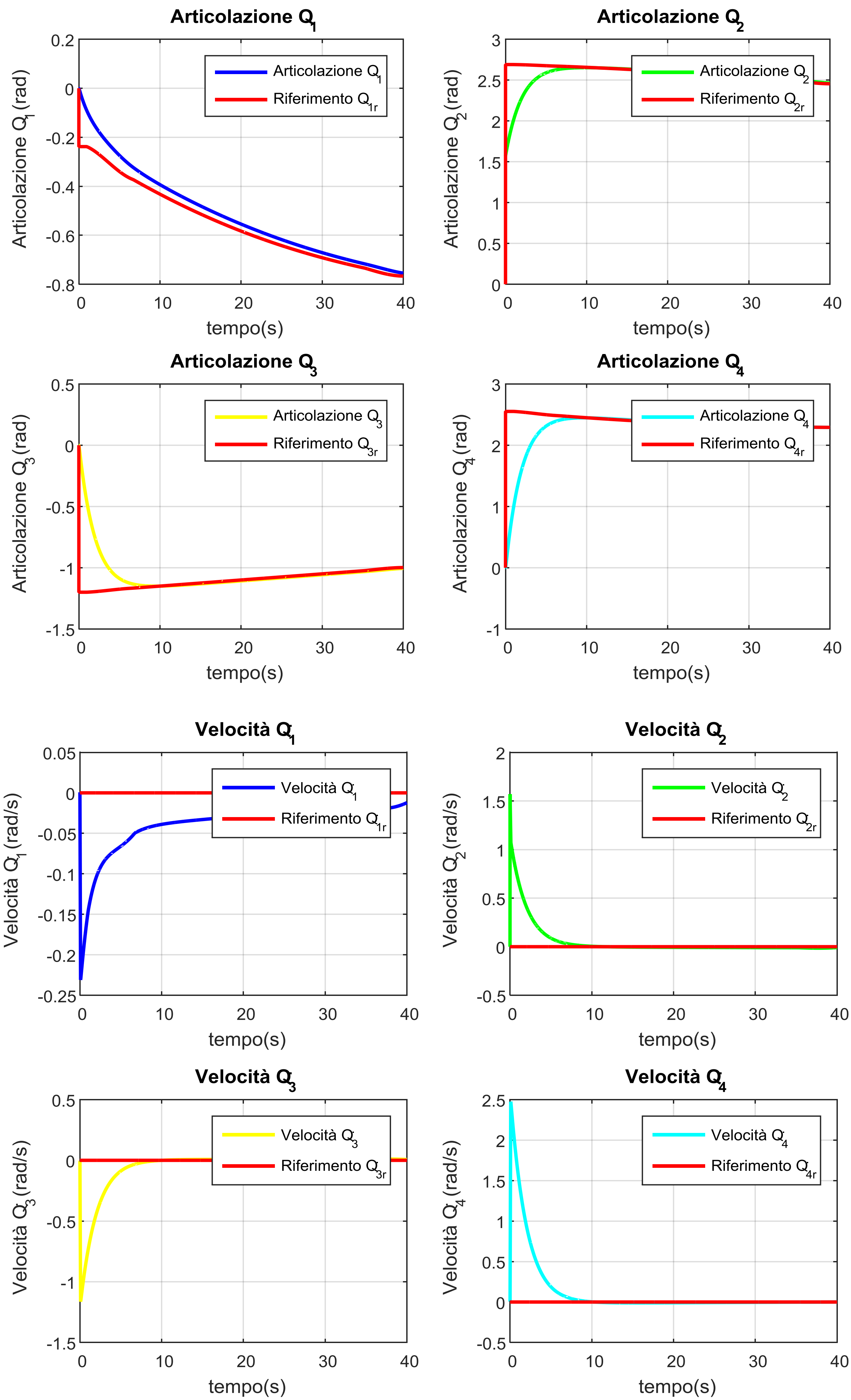
$$\pi = [m_{l1}\ I_{l1} I_{m1} F_{m1} m_{l2} I_{l2} I_{m2} m_{l3} I_{l3} I_{m3} F_{m3} m_l I_{l4} I_{m4} F_{m4}\ ], \text{ mentre:}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 800 \end{bmatrix} \text{ e } K_\pi = 10 * I_{16}.$$

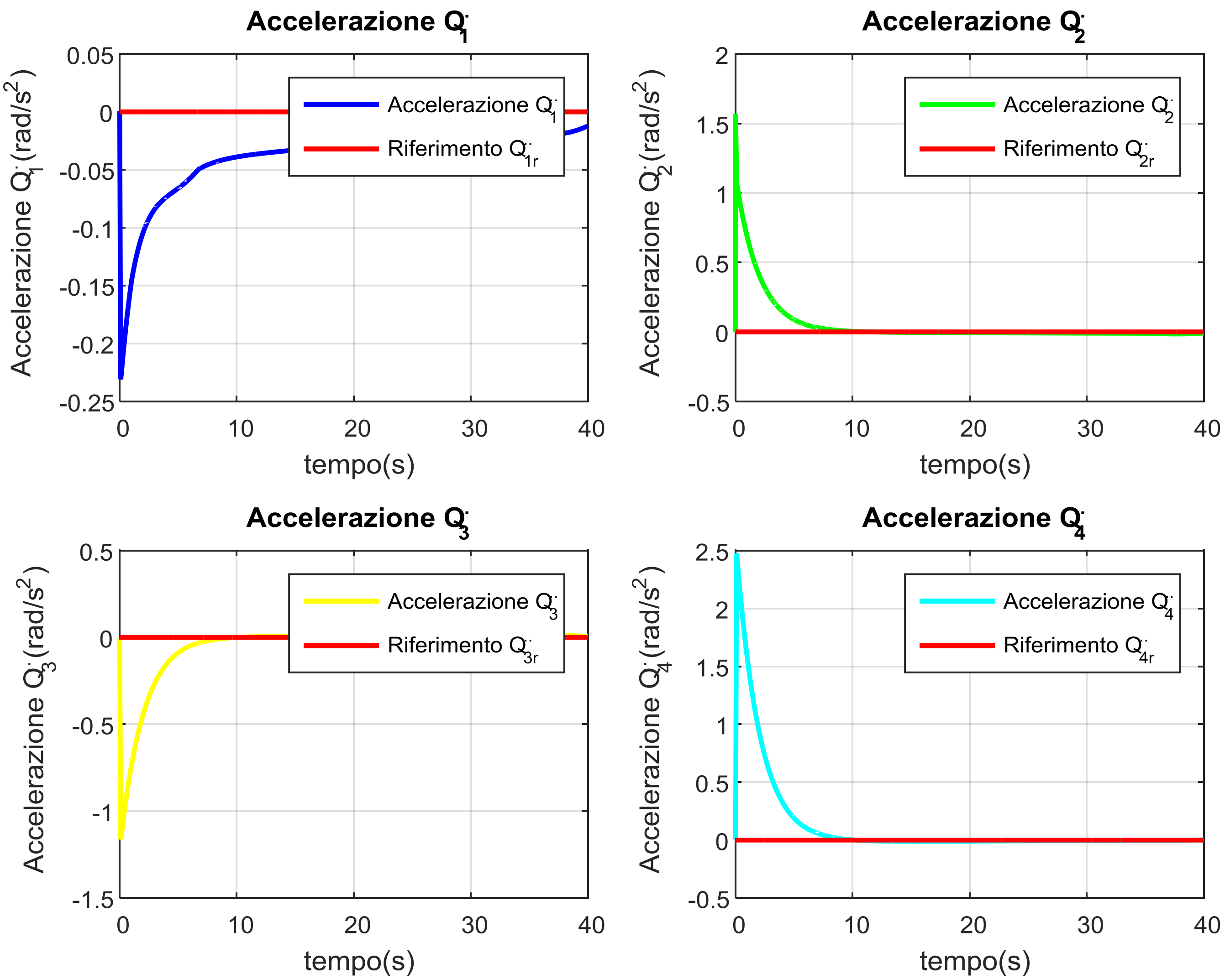
Infine, il schema in Simulink sarebbe il seguente:



Per la traiettoria dal punto (0.1,0.2,0.7,0.1) al punto (0.3,0.15,0.5,0.6), con 8 punti e una durata di 40 secondi si ottengono i seguenti grafici:



Articolazione Q1
Articolazione Q1 (rad)
tempo(s)
Articolazione Q1
Riferimento Q1r
Articolazione Q2
Articolazione Q2 (rad)
tempo(s)
Articolazione Q2
Riferimento Q2r
Articolazione Q3
Articolazione Q3 (rad)
tempo(s)
Articolazione Q3
Riferimento Q3r
Articolazione Q4
Articolazione Q4 (rad)
tempo(s)
Articolazione Q4
Riferimento Q4r
Velocità Q1
Velocità Q1 (rad/s)
tempo(s)
Velocità Q1
Riferimento Q1r
Velocità Q2
Velocità Q2 (rad/s)
tempo(s)
Velocità Q2
Riferimento Q2r
Velocità Q3
Velocità Q3 (rad/s)
tempo(s)
Velocità Q3
Riferimento Q3r
Velocità Q4
Velocità Q4 (rad/s)
tempo(s)
Velocità Q4
Riferimento Q4r



Accelerazione $\ddot{Q}_1$
Accelerazione $\ddot{Q}_1$ (rad/s^2)
tempo(s)
Accelerazione $\ddot{Q}_1$
Riferimento $\ddot{Q}_{1r}$
Accelerazione $\ddot{Q}_2$
Accelerazione $\ddot{Q}_2$ (rad/s^2)
tempo(s)
Accelerazione $\ddot{Q}_2$
Riferimento $\ddot{Q}_{2r}$
Accelerazione $\ddot{Q}_3$
Accelerazione $\ddot{Q}_3$ (rad/s^2)
tempo(s)
Accelerazione $\ddot{Q}_3$
Riferimento $\ddot{Q}_{3r}$
Accelerazione $\ddot{Q}_4$
Accelerazione $\ddot{Q}_4$ (rad/s^2)
tempo(s)
Accelerazione $\ddot{Q}_4$
Riferimento $\ddot{Q}_{4r}$