Calculs de positionnements à partir d'anciennes données topographiques à Gabian (Hérault)

François Baleux, Victor Baleux

Calculs de positionnements à partir d'anciennes données topographiques à Gabian (Hérault)

François Baleux[1] - Victor Baleux[2] - Mai 2025

1 - CNRS Laboratoire TRACES UMR5608.
2 - Faculté des sciences Montpellier

1. Introduction

Afin de retrouver un ancien secteur de fouilles sur la commune de Gabian dans l'hérault, Claire Manen, DR CNRS au laboratoire TRACES nous a fourni une série de schémas et dessins de la zone. Un des schémas décrit un ensemble de distances avec des angles à partir d'un point central. Nous avons considéré cela comme un levé topographique, le point central étant la station totale et les distances et angles des mesures d'azimuths.

Dans ce rapport, nous allons décrire comment à partir de ces données partielles et approximatives nous avons procédé pour déterminer la position de la station totale utilisée (que nous appellerons point C dans ce rapport) et ensuite comment nous avons calculé les points visés sur le dessin.

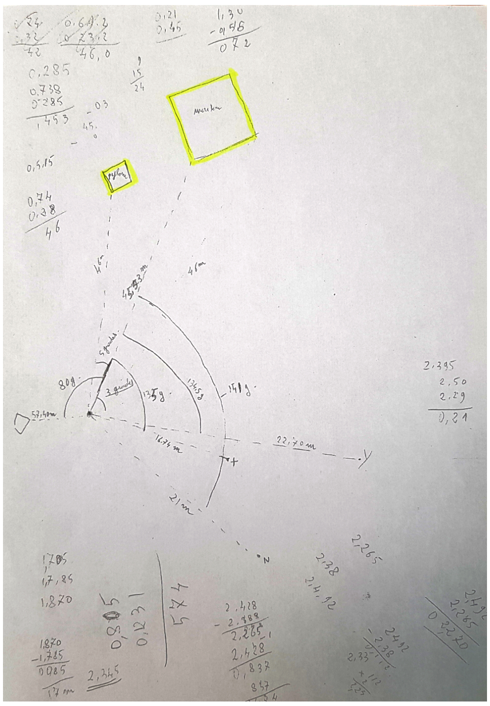

Figure 1 – Schéma de description d'un ancien levé topographique de fouilles à Gabian

2. Objectif

2 points de référence étaient représentés sur le dessin. Un angle de pylone (appelé A dans ce rapport) et un angle de maison (noté B). Ces deux points avec les distances par rapport à la station nous ont servi de références et de bases de calcul.

L'objectif est de retrouver la position d'une station topographique C à partir d'un croquis ancien représentant un levé. Ce croquis indique que le point C était relié à deux points de repère : le coin d'un pylône (point A) et l'angle d'une maison (point B). Les distances CA et CB sont connues ainsi que la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$. Le but est donc de calculer les coordonnées de C à partir des coordonnées approximatives de A et B (fournies par géoportail) et des distances mesurées sur le terrain.

Ce problème est un classique de la topographie : on parle de station libre, **relèvement** ou **résection**, c'est-à-dire la détermination d'un point inconnu en fonction de plusieurs points connus et mesurés.

Calculer la position de la station revient à trouver l'intersection entre les deux cercles définis par leurs centres, les deux points de référence et de rayons les distances par rapport à la station. Dans le cas qui nous intéresse Les deux cercles se croisent en deux points, il faudra arbitrer entre les deux pour obtenir la position de la station totale.

Les coordonnées en Lambert 93 des points A et B ont été estimées à partir du Géoportail de l'IGN. De ce fait, ces coordonnées sont donc approximatives et vont engendrer de l'imprécision dans les valeurs obtenues dans ce rapport.

Les angles et les distances ont été lus sur le dessin principal. Nous n'avons aucun moyen de connaître la précision des valeurs.

3. Formulation géométrique du problème

Nous avons :
- deux points connus : $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, donnés en Lambert93,
- deux distances connues : $r_1 = AC$, $r_2 = BC$,
- un point inconnu : $C(x_C, y_C)$.

La station C est située à une distance r_1 du point A et à une distance r_2 du point B.
Géométriquement, cela signifie que C appartient à **deux cercles** :
- un cercle de centre A et de rayon r_1,
- un cercle de centre B et de rayon r_2.

Formule du cercle : tout point (x, y) situé à une distance r d'un centre (x_0, y_0) vérifie :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

4. Mise en place d'un repère local

Les coordonnées des points A et B ont été estimées sur le géoportail en affichant l'orthoimage de la zone. Comme indiqué il y a une incertitude sur le pointage exact des angles de la maison et du pylône mais le problème principal pour la résolution numérique est la grandeur des nombres. Les coordonnées Lambert 93 sont très grandes en valeur absolue (X > 700 000 et Y > 6 200 000 dans cette zone), elles sont issues d'un système de projection non-euclidien avec des déformations faibles mais réelles et non adaptées à des calculs angulaires précis quand on manipule de très petites longueurs de quelques mètres par rapport aux très grandes coordonnées. En effet, les écarts relatifs deviennent minuscules et les calculs de trigonométrie perdent en précision car des erreurs numériques apparaissent dans les formules du type atan2, acos, etc., à cause des arrondis. Pour simplifier les calculs et limiter les erreurs d'arrondis sur les grands nombres, on ramène le problème à un repère local où A est à l'origine.

$$x_{A_{\text{loc}}} = x_A - x_A = 0 \quad ; \quad y_{A_{\text{loc}}} = y_A - y_A = 0$$

$$x_{B_{\text{loc}}} = x_B - x_A \quad ; \quad y_{B_{\text{loc}}} = y_B - y_A$$

On note $C_{\text{loc}} = (x_{C_{\text{loc}}}, y_{C_{\text{loc}}})$ les coordonnées de C dans ce repère.

Une fois trouvées les coordonnées du point C_{loc}, les coorodonnées du point C dans le référentiel Lambert93 seront calculées par :

$$x_C = x_{C_{\text{loc}}} + x_A \quad ; \quad y_C = y_{C_{\text{loc}}} + y_A$$

5. Équation des deux cercles

Dans ce repère local :

$$① \quad \text{Cercle autour de } A : x^2 + y^2 = r_1^2$$

$$② \quad \text{Cercle autour de } B_{\text{loc}} : (x - x_{B_{\text{loc}}})^2 + (y - y_{B_{\text{loc}}})^2 = r_2^2$$

6. Équation de la droite d'intersection des deux cercles

En soustrayant les deux équations (① - ②), on obtient une équation de droite :

$$2x_{B_{\text{loc}}}x + 2y_{B_{\text{loc}}}y = r_1^2 - r_2^2 + x_{B_{\text{loc}}}^2 + y_{B_{\text{loc}}}^2$$

En notant :

$$a = 2x_{B_{\text{loc}}}, \quad b = 2y_{B_{\text{loc}}}, \quad c = r_1^2 - r_2^2 + x_{B_{\text{loc}}}^2 + y_{B_{\text{loc}}}^2$$

On décrit l'équation d'une droite :

$$ax + by = c$$

7. Substitution dans le cercle

On exprime $x = \frac{c-by}{a}$ et on le remplace dans $x^2 + y^2 = r_1^2$:

$$\left(\frac{c - by}{a}\right)^2 + y^2 = r_1^2$$

En développant le premier terme et en regroupant, cela donne une équation quadratique de la forme :

$$Ay^2 + By + C = 0$$

Avec :

$$A = 1 + \frac{b^2}{a^2}, \quad B = -2 \cdot \frac{bc}{a^2}, \quad C = \frac{c^2}{a^2} - r_1^2$$

8. Résolution et points C_1, C_2

Le discréminant Δ étant strictement positif, l'équation donne deux solutions :

$$y_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad x_{1,2} = \frac{c - by_{1,2}}{a}$$

On obtient ainsi les deux points C_1 et C_2 d'intersection entre les deux cercles.

9. Sélection via l'angle $\widehat{BCA}$

Comment savoir quel est le "bon" point C ? On peut dessiner les positions des 3 points A, B et C et comparer avec le schéma pour choisir visuellement. Mais une autre façon est de passer par le déterminant et arbitrer en fonction du signe de l'angle orienté de $\vec{CB}$ vers $\vec{CA}$

$$\vec{CA} = (x_A - x_C, y_A - y_C), \quad \vec{CB} = (x_B - x_C, y_B - y_C)$$

On calcule d'abord le produit scalaire (dot en anglo-saxon). Ce produit scalaire nous fournit la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$ en notant que le produit scalaire de deux vecteurs et le produit des normes multiplié par ce cosinus de l'angle :

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = ||\vec{CA}|| * ||\vec{CB}|| * \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{||\vec{CA}|| * ||\vec{CB}||}$$

On peut définir le déterminant de deux angles dans une base orthonormée par la formule :

$$\det_{(\vec{CA},\vec{CB})} = (x_{CA} * y_{CB}) - (y_{CA} * x_{CB})$$

Dans le plan, le signe du déterminant s'interprète comme le signe de l'angle orienté. Le bon point C est celui pour lequel l'angle $\widehat{BCA} \approx 5$ grades, avec un déterminant positif (sens trigonométrique) qui correspond bien au schéma fourni.

10. Calcul des points visés

Une fois la position de la station totale connue, il est possible de calculer les positions des points levés à partir de la station en utilisant les distances et les angles orientés dessinés sur le schéma.

Pour faire cela, nous allons utiliser le gisement, terme utilisé en topographie pour décrire l'angle entre l'axe Y qui correspond au Nord "Lambert" dans notre cas de coordonnées en Lambert93 et le vecteur (origine - point visé).

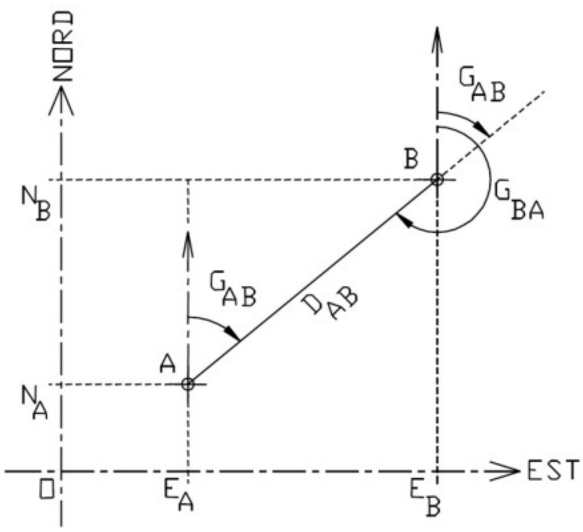

FIGURE 2 – Gisements pour les vecteurs $\vec{AB}$ *et* $\vec{BA}$

Pour chaque point visé P depuis la station C , on connaît :

— la distance d_P,
— l'angle horizontal mesuré par rapport à la direction CB et donné en grades α_P.
Calcul du gisement de CB :

$$g_{CB} = \operatorname{atan2}(x_B - x_C, y_B - y_C) \cdot \frac{200}{\pi}$$

Pour le gisement vers P on a :

$$g_{CP} = g_{CB} \pm \alpha_P$$

On peut alors calculer les coordonnées du point visé :

$$x_P = x_C + d_P \cdot \sin\left(g_{CP} \cdot \frac{\pi}{200}\right), \quad y_P = y_C + d_P \cdot \cos\left(g_{CP} \cdot \frac{\pi}{200}\right)$$

11. Résolution numérique et calculs des points visés

11.1 Résolution numérique du système

Pour éviter les erreurs d'arrondis, la résolution du système d'équations défini par l'intersection de deux cercles est réalisée dans un repère local centré en A.

Le script R associé au présent travail :
— prend en entrée les coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B),
— applique le changement de repère $(x_{B_{\text{loc}}}, y_{B_{\text{loc}}}) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$,
— résout numériquement l'équation quadratique obtenue par substitution de la droite dans le cercle,
— calcule les deux solutions C_1 et C_2,
— choisit automatiquement la bonne solution en comparant l'angle $\widehat{ACB}$ à 5 grades dans le sens trigonométrique.

11.2 Résultat numérique

Résolution exacte de l'intersection des cercles

Données d'entrée
— Coordonnées de A : $x_A = 721215.23$, $y_A = 6268492.37$
— Coordonnées de B : $x_B = 721212.10$, $y_B = 6268494.43$
— Distances : $r_1 = AC = 46.00$ m, $r_2 = BC = 45.53$ m

Étape 1 — Repère local centré en A

$$x_{B_{\text{loc}}} = x_B - x_A = -3.13, \quad y_{B_{\text{loc}}} = y_B - y_A = 2.06$$

Étape 2 — Équation de la droite

$$a = 2x_{B_{\text{loc}}} = -6.26, \quad b = 2y_{B_{\text{loc}}} = 4.12$$

$$c = r_1^2 - r_2^2 + x_{B_{\text{loc}}}^2 + y_{B_{\text{loc}}}^2 = 57.0596$$

Étape 3 — Substitution dans le cercle

$$x = \frac{c - by}{a} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r_1^2 \quad \Rightarrow \quad Ay^2 + By + C = 0$$

avec :

$$A = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1.4336, \quad B = -11.9709, \quad C = -2033.35$$

Étape 4 — Discriminant et racines

$$\Delta = B^2 - 4AC = 11797.9151 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 108.578$$

$$y_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = 42.0806, \quad y_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = -33.7089$$

Étape 5 — Calcul des x correspondants

$$x_1 = \frac{c - by_1}{a} = 18.5802, \quad x_2 = \frac{c - by_2}{a} = -31.3003$$

Étape 6 — Coordonnées finales en Lambert93

$$C_1 = (x_A + x_1,\ y_A + y_1) = (721233.81,\ 6268534.45)$$

$$C_2 = (x_A + x_2,\ y_A + y_2) = (721183.93,\ 6268458.66)$$

Ces deux points correspondent aux deux solutions géométriques possibles. Ils sont ensuite vérifiés en distance et en angle dans la section suivante.

Arbitrage final par le produit scalaire et le produit vectoriel

L'angle au sommet $\widehat{BCA}$ est mesuré dans le croquis à partir de la visée initiale CB vers la visée CA. Il faut donc calculer :

- le produit scalaire $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$ (avec origine en C),
- le produit vectoriel $\vec{CB} \times \vec{CA}$,
- l'angle entre les deux vecteurs,
- le sens de rotation associé (trigonométrique ou horaire).

Résultats pour $C_1 = (721233.81,\ 6268534.45)$

$$\vec{C_1B} \cdot \vec{C_1A} = 2087.47 \ \ et \ \ \vec{C_1B} \times \vec{C_1A} = +169.99 \quad \Rightarrow \text{sens trigonométrique} \widehat{BCA}_1 = 5.173 \text{ grades}$$

Résultats pour $C_2 = (721183.93,\ 6268458.66)$

$$\vec{C_2B} \cdot \vec{C_2A} = 2087.47 \ \ et \ \ \vec{C_2B} \times \vec{C_2A} = -169.99 \quad \Rightarrow \text{sens horaire} \widehat{BCA}_2 = 5.173 \text{ grades}$$

Interprétation Les deux points donnent un angle identique très proche de 5 grades. Cependant :

- le croquis indique un angle dans le sens **trigonométrique**,
- seul le point C_1 vérifie cette condition.

Coordonnées finales de la station C (solution retenue) :

$$\boxed{\mathbf{x_C = 721233.81} \quad ; \quad \mathbf{y_C = 6268534.45} \quad \text{(Lambert93)}}$$

11.3 Calcul des points visés

À partir de C, les points visés P_2, X, Y, N et D sont calculés à l'aide :

— de leur distance à C,

— de leur angle mesuré par rapport à l'axe CB,

— de l'interprétation du sens de l'angle (horaire ou trigo),

— de la transformation trigonométrique via :

$$x_P = x_C + d \cdot \sin(\theta_P), \quad y_P = y_C + d \cdot \cos(\theta_P)$$

avec $\theta_P = (g_{CB} \pm \alpha_P) \cdot \frac{\pi}{200}$

Chaque point est calculé individuellement à partir des valeurs fournies dans le relevé initial. Un tableau de synthèse présente les résultats dans la prochaine section.

Tableau récapitulatif des points visés et points de référence

Point	Distance (m)	Angle (g)	Sens	x (Lambert93)	y (Lambert93)
C	–	–	–	721233.810	6268534.450
A	46.00	5.00	trigo	721215.230	6268492.370
B	45.53	0.00	origine	721212.100	6268494.430
P2	57.40	80.00	trigo	721273.337	6268492.829
X	16.74	135.00	horaire	721225.435	6268548.945
Y	22.70	134.50	horaire	721222.299	6268554.015
N	21.00	141.00	horaire	721225.061	6268553.541
D	46.00	3.00	horaire	721209.996	6268495.095

Les coordonnées des points visés sont calculées automatiquement à partir de la position de C et des valeurs d'angle et de distance fournies dans le relevé initial. Les colonnes seront complétées à partir des résultats produits par le script R.

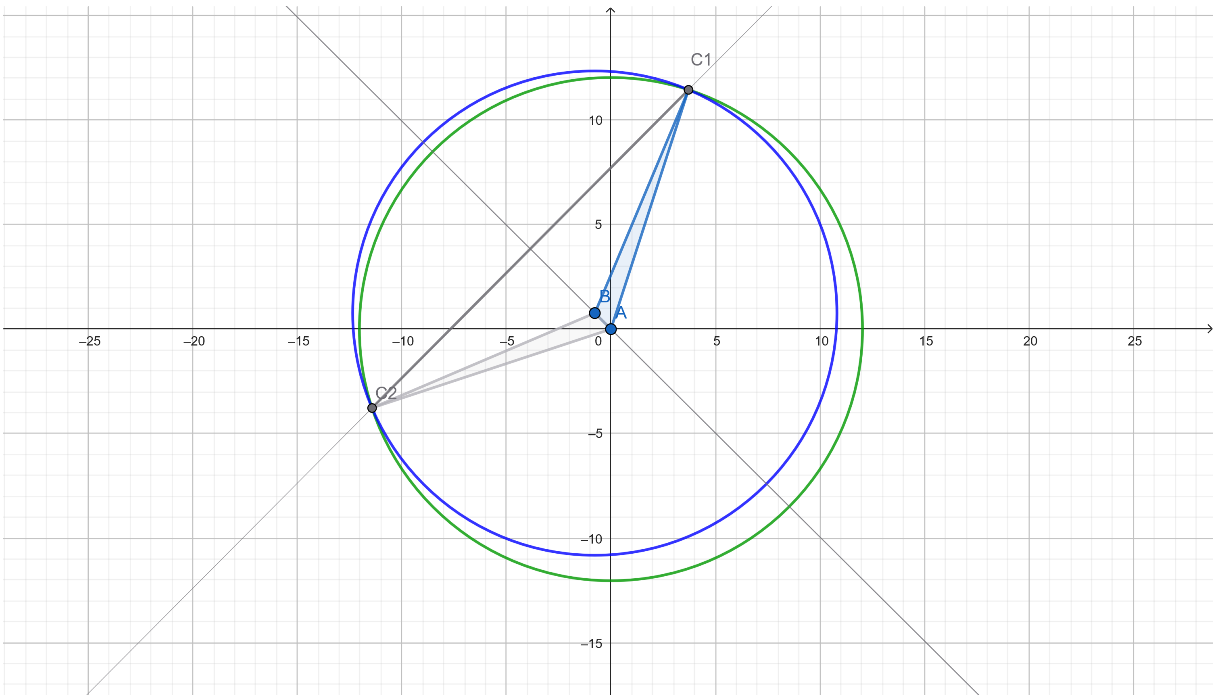

FIGURE 3 – Schéma descriptif des différents points. Le repère est local avec A comme origine et les points B et C sont bien positionnés par rapport à A. Les angles et les distances sont indicatifs

12. Conclusion

Le présent travail avait pour objectif de retrouver les coordonnées d'une station topographique ancienne à partir d'un croquis de chantier décrivant les visées effectuées depuis ce point. Deux repères connus (les points A et B) ainsi que l'angle mesuré au point C entre les directions CB et CA ont permis de reconstruire la position de la station en utilisant l'intersection de deux cercles et une équation de droite.

Les deux solutions obtenues ont été comparées en s'appuyant sur le produit scalaire et le déterminant, permettant de sélectionner la seule compatible avec l'angle mesuré dans le sens trigonométrique. La position de la station a ensuite permis de calculer les coordonnées Lambert93 de l'ensemble des points visés (références de fouille, repères fixes, etc.).

Cette méthode offre une reconstruction fiable à partir d'informations incomplètes ou anciennes. Néanmoins, la précision finale dépend fortement des coordonnées initiales des points A et B, qui ont ici été extraites approximativement via le Géoportail. Une amélioration significative de ces deux points pourrait être obtenue en effectuant un levé à l'aide d'une station totale mise en station grâce aux points de références implantés l'an dernier sur le terrain. Une fois cette base recalée, le script R mis en œuvre ici permettrait de recalculer automatiquement l'ensemble des visées avec une précision compatible avec le volume de terre à déplacer pour retrouver l'ancien site de fouilles.