

Ecuación de Schrödinger no Lineal en Fibras Ópticas

Víctor Bartolomé Redondo

December 23, 2025

Abstract

La propagación de pulsos ópticos en fibras monomodo está gobernada por una combinación de efectos lineales y no lineales que modifican la forma temporal y espectral de la señal a lo largo de la distancia [4]. Entre los efectos lineales más relevantes se encuentran la atenuación y la dispersión cromática [5], responsables del ensanchamiento y distorsión temporal del pulso. Por otro lado, la respuesta no lineal del material, dominada por el efecto Kerr [2], induce fenómenos como la automodulación de fase (SPM), la modulación cruzada de fase (XPM) y la mezcla de cuatro ondas (FWM), que modifican la frecuencia instantánea y pueden generar nuevas componentes espectrales. La interacción simultánea de estos procesos conduce a la formulación de la Ecuación de Schrödinger No Lineal (NLSE), obtenida a partir de las ecuaciones de Maxwell mediante la Aproximación de Envolvente Lentamente Variable y una proyección modal sobre el modo fundamental de la fibra. Se discutirá el significado físico de cada uno de sus términos. Se analizan además las soluciones analíticas disponibles en regímenes ideales, tales como los solitones [6] de la NLSE integrable, y se muestra un caso particular con condiciones físicas más realistas donde la ecuación deja de ser integrable y se requieren métodos numéricos. La estructura será la siguiente: Comenzaré por presentar toda la teoría y efectos ópticos para dar un contexto sobre el problema físico. Luego, haré una pequeña deducción de la NLSE usando los argumentos previos de la primera sección. Presentaré la solución analítica de ciertos casos simples, y por último, mostraré la solución de otro tipo de ecuación mediante el método numérico Split-Step Fourier (SSFM) [7].

Palabras clave: Dispersión, Efectos no lineales, Efecto Kerr, Automodulación de Fase (SPM), Ecuación de Schrödinger no Lineal (NLSE), Envolvente Lentamente Variable (SVEA), Split-Step Fourier (SSFM).

Contents

1	Fibras Ópticas	3
1.1	Dispersión en fibras ópticas	4
1.2	Pérdidas en una fibra	6
1.3	Interacción luz-materia: Efectos no lineales	6
1.3.1	Efectos de segundo orden (generación de segundo armónico)	6
1.3.2	Efectos de tercer orden: Mezcla de cuatro ondas $\chi^{(3)}(\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2)$	7
1.3.3	Efectos de tercer orden: Efecto Kerr óptico $\chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)$	8
1.4	Mapa completo de efectos en la fibra	8
2	Análisis ondulatorio. NLSE	10
2.1	Explicación término a término	10
2.1.1	Ecuación de ondas	10
2.1.2	Representación del campo: Separación modal	10
2.1.3	Aproximación de envolvente lentamente variable (SVEA)	11
2.1.4	Contribución no lineal Kerr (γ)	11
2.1.5	Contribución por pérdidas	11
2.1.6	Respuesta Raman retardada	12
2.2	NLSE generalizada	12
2.2.1	Hipótesis empleadas	12
3	Casos particulares con solución analítica	13
3.1	Caso 1: Propagación sin dispersión y sin no linealidad	13
3.2	Caso 2: Efecto dispersión segundo orden	14
3.2.1	Ejemplo: Haz Gaussiano	14
3.3	Caso 3: No linealidad solamente	15
3.3.1	Ejemplo: Haz Gaussiano	15
3.4	Caso 4: Soliton fundamental	16
3.4.1	Forma normalizada de la NLSE	16
3.4.2	Resolución paso a paso	16
3.5	Caso 5: Solitones de orden superior	18
4	Resolución numérica	19
4.1	Método Split-Step Fourier (SSFM) con esquema de Strang para la NLSE	19
4.2	Gráficas generadas	21
5	Anexo	22
5.1	Código en Python	22

1 Fibras Ópticas

Se trata de una estructura cilíndrica compuesta por dos materiales concéntricos. El núcleo o core es la parte interior, hecho de un material cuyo índice de refracción es algo mayor que el del anillo exterior, también llamado revestimiento. Además, se encuentra finalmente protegida del exterior por una cubierta plástica. [2]

$$\Delta = \frac{n_{core} - n_{clad}}{n_{core}} \approx 0.02/0.001 \quad (1)$$

Existen dos aproximaciones para entender el funcionamiento de las fibras, y este dependerá de las dimensiones del núcleo, puesto que en función de dicho tamaño con la longitud de onda podremos enfocar el problema mediante la óptica de rayos u ondulatoria.

Desde el punto de vista de la óptica de rayos, el campo guiado por la fibra óptica corresponde a la distribución de rayos cuyos ángulos de incidencia sobre la superficie de separación entre el núcleo y revestimiento son superiores al valor crítico para la reflexión total:

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_{clad}}{n_{core}} \quad (2)$$

Para que el rayo no abandone la fibra a lo largo de la propagación, su plano de incidencia debe contener el eje de la fibra. Por otro lado, existe un ángulo de aceptación que define un cono de luz incidente que puede propagarse por la fibra:

$$\theta_a = \arcsin(n_{core} \cos \theta_c) = \arcsin \left(\sqrt{n_{core}^2 - n_{clad}^2} \right) = \arcsin(NA) \quad (3)$$

Donde NA se denomina apertura numérica de la fibra.

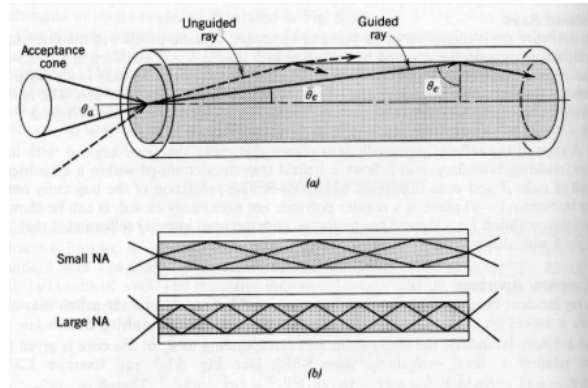


Figure 1: (a) La fibra actúa como guía para los rayos que inciden dentro del cono de aceptación- (b) Propagación de los rayos en función de NA .

El segundo parámetro relevante al hablar de fibras ópticas es el parámetro - V :

$$V = k_0 a NA = k_0 a \left(\sqrt{n_{core}^2 - n_{clad}^2} \right) \quad (4)$$

Este determina el número de modos que soporta una fibra, es decir, las posibles soluciones de la ecuación de Helmholtz aplicando las condiciones de contorno correspondientes [4]. La fibra será multimodo cuando este parámetro supere un valor umbral de $V \geq 2.405$

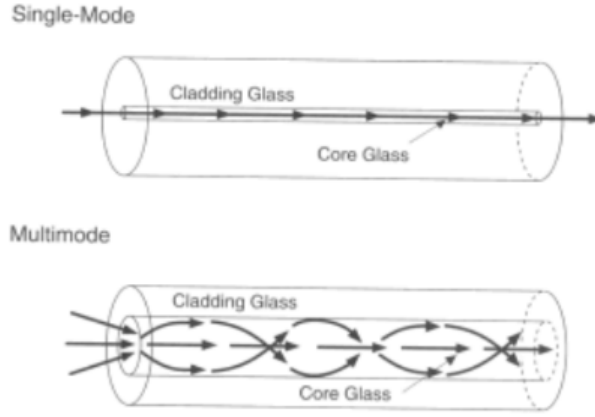


Figure 2: Una fibra multimodo es un tipo de fibra óptica en la que la luz puede propagarse a través de múltiples trayectorias, llamadas modos. Cada modo es una solución diferente de las ecuaciones de Maxwell bajo las condiciones de guiado de la fibra, y corresponde a un camino óptico distinto

1.1 Dispersión en fibras ópticas

Hay varios términos que contribuyen a la dispersión total en la propagación de un pulso por una fibra óptica. Simplemente por el hecho de que un pulso esté compuesto de varias frecuencias, da lugar a la llamada dispersión cromática. El índice de refracción del vidrio es dispersivo. Es decir, es un parámetro que depende de la longitud de onda, $n = n(\omega)$ [5].

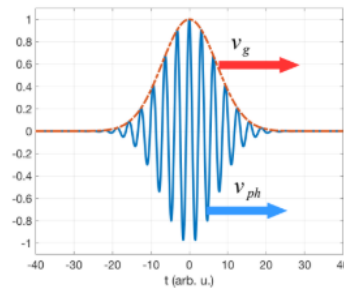
$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (5)$$

Este desarrollo en serie es válido siempre y cuando la envolvente de nuestro campo sea lentamente variable.

Cuando hablamos de primer orden hacemos referencia a la llamada **velocidad de grupo**:

$$\left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} = \frac{1}{v_g} \quad (6)$$

Que no es más que la velocidad de desplazamiento de nuestra envolvente. En dibujo ilustrativo es [2]:



Si hablamos ya de segundo orden damos con el **coeficiente de dispersion** o **dispersión de la velocidad de grupo**:

$$\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0} = D(\omega_0) \quad (7)$$

Las zonas en las que el coeficiente es positivo se denominan de dispersión normal, y anómalo en las que es negativo. La consecuencia de este término es que si un pulso es Gaussiano sufrirá un estiramiento, pero seguirá siendo Gaussiano a lo largo del tiempo. En dispersión normal ocurre lo que se denomina **chirp positivo** (las frecuencias rojas se adelantan y miden antes) y viceversa para el **chirp negativo**.

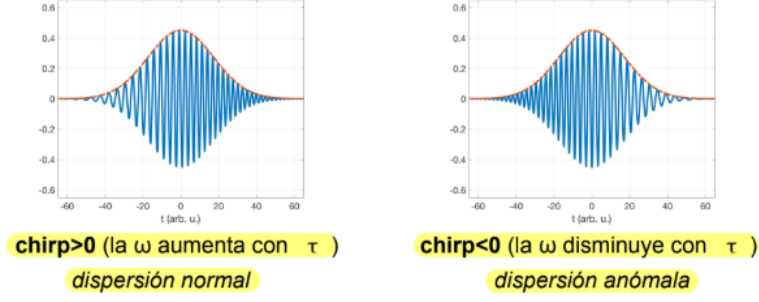
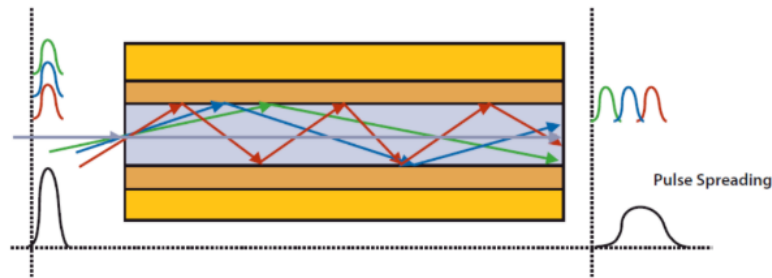


Figure 3: Dispersión normal y dispersión anómala

El resto de términos son causantes de asimetrías en nuestro pulso. Al final del contexto físico haré una tabla exponiendo todos los efectos que iremos viendo y las consecuencias de los mismos.

Si hablamos de dispersión cromática hay que incluir la dispersión de guía de ondas. Estas aparecen a pesar de tener un medio cuyo índice de refracción sea independiente de la frecuencia, y es fruto de las condiciones de contorno que imponemos en la fibra. Esto se debe a que la constante de propagación de los modos depende de la apertura numérica a/λ . Son propias de las fibras de un solo modo. En resumen: **El mismo modo pero para distintas λ penetra de manera diferente en el revestimiento, lo que hace que se propaguen a distintas velocidades.**

Por último hablaré de la dispersión modal para fibras multimodo. Cuando un pulso penetra en una fibra se reparte entre los distintos modos de propagación, cada uno con una velocidad de grupo propia, provocando una extensión longitudinal del pulso. Este fenómeno puede controlarse usando fibras de gradiente de índice.



1.2 Pérdidas en una fibra

Sea P_0 la potencia de entrada en una fibra de longitud L [4]. La potencia transmitida tras la propagación por esta es:

$$P_T = P_0 \exp(-\alpha L) \quad (8)$$

Donde α es un número real positivo que cuantifica todas las pérdidas posibles durante el guido de la onda. Destacar que este parámetro será distinto para cada frecuencia incidente.

1.3 Interacción luz-materia: Efectos no lineales

Para medios no lineales las relaciones constitutivas entre $P(E, \omega) = \chi \omega E$ y $J(E, \omega) = \sigma \omega E$ dejan de ser válidas. La fenomenología lineal básica es válida en el régimen de luz poco intensa. La aparición de términos anármonicos en el modelo clásico de Lorentz para la ligadura de los electrones lo vuelve algo más complicado. Sin meterme en los cálculos que lo prueban, comentar brevemente que consecuencia de esto es que las susceptibilidades ahora serán descritas mediante un tensor. **Dicho de otra forma, ahora la polarización no tiene por qué ser proporcional al campo eléctrico, sino que será la suma de términos de varias contribuciones de distinto orden.** Esto deriva en la generación de efectos no lineales más allá de la dispersión lineal de siempre. A continuación mostraré una tabla con los principales efectos que aparecen a órdenes bajos, simplemente por introducirlos de alguna manera [2].

Principales efectos ópticos no lineales de orden bajo			
Frecuencia campos incidentes	Frecuencia de los campos generados	Susceptibilidad	Proceso
ω_1	ω_1	$\chi^{(1)}(\omega_1)$	Dispersión lineal
ω_1	0 (DC)	$\chi^{(2)}(0 = \omega_1 - \omega_1)$	Rectificación óptica
ω_1	$2\omega_1$	$\chi^{(2)}(2\omega_1 = \omega_1 + \omega_1)$	Generación de segundo armónico
ω_1, ω_2	$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$	$\chi^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)$	Suma de frecuencias
ω_1, ω_2	$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$	$\chi^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 - \omega_2)$	Diferencia de frecuencias (oscilación paramétrica)
$\omega_1, 0$ (DC)	$\omega_1 = \omega_1 + 0$	$\chi^{(2)}(\omega_1 = \omega_1 + 0)$	Efecto Pockels
ω_1	$3\omega_1$	$\chi^{(3)}(3\omega_1 = \omega_1 + \omega_1 + \omega_1)$	Generación de tercer armónico
ω_1, ω_2	ω_3, ω_4 $\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2$	$\chi^{(3)}(\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3)$	Mezcla de cuatro ondas
ω_1	ω_1	$\chi^{(3)}(\omega_1 = \omega_1 - \omega_1 + \omega_1)$	Efecto Kerr óptico
$\omega_1, 0$ (DC)	$\omega_1 = \omega_1 + 0 + 0$	$\chi^{(3)}(\omega_1 = \omega_1 + 0 + 0)$	Efecto Kerr (o electro-óptico cuadrático)

1.3.1 Efectos de segundo orden (generación de segundo armónico)

Cuando en la polarización aparece un término cuadrático:

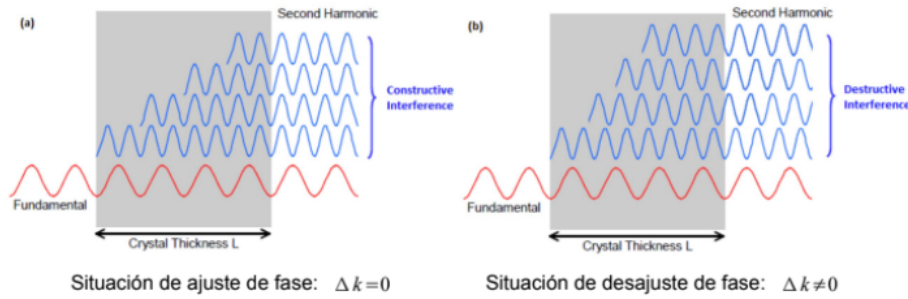
$$P^{(2)} \equiv \chi^{(2)} E^2 \quad (9)$$

Se produce automáticamente una componente a frecuencia 2ω respecto a la frecuencia de la luz incidente ω . Matemáticamente esto se convierte en un sistema de ecuaciones

acoplado para la amplitud de ambas componentes. Para resolverlas se utiliza la aproximación de **SHG without depletion**, que consiste en considerar que la amplitud del fundamental no varía durante la propagación, puesto que el proceso de generación de segundo armónico es muy débil y lenta (aproximación envolvente lentamente variable). Comentar que además de por si generar señales poco intensas, la propia intensidad del armónico es muy susceptible al llamado ajuste de fase.

$$I_{2\omega} \sim \text{sinc}\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) \rightarrow \Delta k = 2k(\omega) - k(2\omega) \quad (10)$$

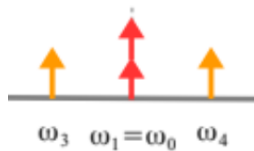
Sin estar en estas condiciones la intensidad y eficiencia del proceso caerán notablemente. Esto está relacionado con el proceso de interferencia entre la señal de segundo armónico que se va generando a lo largo de la propagación del fundamental por el material. Un dibujo muy claro e ilustrativo es el siguiente:



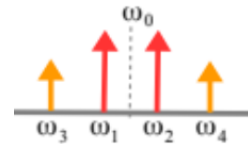
1.3.2 Efectos de tercer orden: Mezcla de cuatro ondas $\chi^{(3)}(\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2)$

La susceptibilidad de tercer orden es la primera que no precisa de asimetría para existir, por lo que existen varios materiales que presentan efectos no lineales de orden 3 pero no de orden 2. Aún así, la magnitud de los efectos en general es menor, puesto que hay que recordar que no dejan de ser perturbativos. La mezcla de cuatro ondas (FWM) es un efecto muy presente en fibras ópticas. Permite que tres ondas ópticas interactúen para generar una cuarta mediante transferencia energética entre frecuencias. El ajuste de fase viene dado por la siguiente condición:

$$(\omega_1 - \omega_0) = -(\omega_2 - \omega_0) \quad \text{y} \quad (\omega_3 - \omega_0) = -(\omega_4 - \omega_0) \quad (11)$$



(a) FWM degenerado



(b) FWM no degenerado

Figure 4: Esquema ilustrativo para la condición de ajuste de fase en procesos de mezcla de cuatro ondas no degenerado (todas distintas) y degenerado (dos iguales).

Notar que se dice mezcla de cuatro ondas porque cuatro frecuencias quedan vinculadas por la interacción no lineal, no porque necesariamente tengamos cuatro láseres

1.3.3 Efectos de tercer orden: Efecto Kerr óptico $\chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)$

Cuando asumes que tienes un medio simétrico y te olvidas de las respuestas no lineales de segundo orden, así como ignoras la generación de tercer armónico y FMW, que son efectos sensibles a la fase, te topas con que el índice de refracción toma el siguiente aspecto:

$$n^2(\vec{r}, \omega) = 1 + 4\pi \left(\chi^{(1)}(\omega) + \chi^{(3)}(\omega) |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right) \quad (12)$$

$$n(\vec{r}, t) = n_0 + n_2 I(\vec{r}, t) \quad (13)$$

Es decir, la respuesta óptica puede entenderse como una representación lineal y otra no lineal que depende justamente de la intensidad de campo eléctrico incidente. Fijarse que la dependencia en \vec{r} lo convierte en un fenómeno local. **El medio ahora tiene una respuesta inhomogénea y dependiente del tiempo.**

Una consecuencia de esto es el fenómeno de **autofocalización**. Si hay un gradiente en el índice de refracción del material sabemos que los rayos tienden a ir a zonas de mayor índice. En un haz real, la intensidad es máxima en el centro y disminuye en los bordes. Esto provoca a que el índice crezca en el centro del haz y el medio actúe como una lente convergente autoinducida que enfoca el haz a medida que se propaga. Hablando de fibras, este efecto mantiene la energía confinada en el núcleo. Es sobretodo relevante en fibras multimodo, dado que en fibras monomodo el guiado está ya definido por la estructura del índice transversal del núcleo. Destacar que hay un límite para la focalización en zonas muy pequeñas del haz, puesto que cuando se supera un cierto umbral el propio medio se va a ionizar, generando un gradiente del índice en la dirección opuesta al del haz, haciendo que no pueda focalizarse más aún.

El último proceso del que hablaré sea la **Automodulación de fase (SPM)**. El hecho de tener un pulso propagándose en un medio Kerr va a afectar a las frecuencias del mismo:

$$\phi = \phi(t) = n(t)k_0 z - \omega_0 t \quad (14)$$

Y por definición:

$$\omega(t) = -\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \omega_0 - k_0 z n_2 \frac{\partial I}{\partial t} \quad (15)$$

Dos conclusiones importantes: Van a aparecer nuevas frecuencias, y además lo harán de manera desordenada. Si nuevas frecuencias se generan alrededor de la portadora se traduce en un ensanchamiento espectral del pulso.

Otro efecto a tener en cuenta en pulsos muy cortos es el **Self-steepening** [3], el cual es una corrección al efecto Kerr que aparece al tener en cuenta que la respuesta del material no es instantánea con respecto a la envolvente del pulso. A diferencia del SPM que induce un chirp en nuestro pulso, este induce una asimetría. El pico delantero y trasero del pulso se propagan con velocidades ligeramente distintas, produciendo una distorsión asimétrica. Tiene un comportamiento similar al que tendría la dispersión cromática de tercer orden en el desarrollo en serie de $k(\omega)$ del principio de la sección, pero este está ligado al comportamiento no lineal de orden 3 y no del término lineal derivado de dicha expresión.

1.4 Mapa completo de efectos en la fibra

A modo de recapitulación pondré en una tabla final todos los fenómenos que hemos visto que se dan a lo largo de la guía de onda por una fibra. Tanto el Raman estimulado como

el Brillouin no los he explicado dado que no serán demasiado relevantes para lo que este trabajo concierne. Simplemente los menciono aquí para no dejarme nada por el camino.

Fenómeno	Tipo	Consecuencia en el pulso
Pérdidas (α)	Lineal	Atenuación progresiva de la amplitud y reducción de la energía del pulso.
Dispersión cromática (GVD, k_2)	Lineal	Ensanchamiento temporal; aparición de chirp lineal dependiente del signo de k_2 .
Dispersión de orden superior (TOD, k_3 , k_4 . . .)	Lineal	Distorsión asimétrica, desplazamiento del máximo del pulso y formación de colas.
Kerr: Self-Phase Modulation (SPM)	No lineal	Chirp instantáneo proporcional a la intensidad; fuerte ensanchamiento espectral.
Kerr: Cross-Phase Modulation (XPM)	No lineal	Modulación de fase causada por otro pulso o canal; distorsión coherente y mezcla espectral.
Kerr: Four-Wave Mixing (FWM)	No lineal	Generación de nuevas frecuencias; transferencia de energía entre canales.
Self-steepening	No lineal	Asimetría temporal del pulso; formación de una pendiente abrupta (efecto “shock”).
Raman estimulado	No lineal	Corrimiento de frecuencia hacia el rojo (self-frequency shift) y redistribución de energía.
Brillouin estimulado	No lineal	Retrodispersión del pulso y limitación de potencia por interacción óptico-acústica.

Table 1: Fenómenos lineales y no lineales en la propagación de pulsos en fibra óptica y su efecto principal sobre el pulso.

2 Análisis ondulatorio. NLSE

2.1 Explicación término a término

En este capítulo me dedicaré a derivar la Ecuación de Schrödinger no lineal a partir de las ecuaciones de Maxwell como punto de partida. No me centraré tanto en los cálculos hasta llegar a ella, sino en las aproximaciones y términos que irán apareciendo entre medias. Hay mucha bibliografía que derivan esta ecuación desde cero y de manera más rigurosa [4]. No es tan importante la obtención sino la física y resolución de la ecuación en las próximas secciones, por lo que no creo conveniente llenar de fórmulas y cálculos el documento cuando puede encontrarse hecho en muchos sitios.

2.1.1 Ecuación de ondas

En un medio dieléctrico no conductor, las ecuaciones de Maxwell sin fuentes libres son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (17)$$

Donde el desplazamiento eléctrico es

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (18)$$

y la polarización total se descompone como

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}. \quad (19)$$

Siendo las polarizaciones:

$$\mathbf{P}_L(\omega) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(t). \quad (21)$$

Usando $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ y aplicando $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ damos con la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (22)$$

2.1.2 Representación del campo: Separación modal

En fibras monomodo podemos expresar nuestro campo tal que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} \mathcal{E}(x, y) E(z, t) + \text{c.c.} \quad (23)$$

$\mathcal{E}(x, y)$ es el perfil transversal del modo normalizado y $\hat{\mathbf{e}}$ su polarización.

La envolvente compleja se introduce como:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \left[A(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + \text{c.c.} \right]. \quad (24)$$

Tras esto, se proyecta el modo transversal en la ecuación de ondas, obteniendo así una ecuación unidimensional para la envolvente $A(z, t)$.

2.1.3 Aproximación de envolvente lentamente variable (SVEA)

Matemáticamente la hipótesis se aplica imponiendo que

$$\left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \ll \beta_0 |A|, \quad \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| \ll \omega_0 |A|. \quad (25)$$

Es decir, que $A(z, t)$ varía lentamente frente a las rápidas oscilaciones de la exponencial que la acompaña. esto nos permite ignorar los términos en derivadas segundas y quedarnos solo con los lineales.

Recordar nuevamente la expansión de la dispersión lineal:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (26)$$

Comentar que es común pasar al marco temporal del grupo mediante el cambio:

$$T = t - \beta_1 z \quad (27)$$

En la práctica basta con retener unos pocos β_k .

2.1.4 Contribución no lineal Kerr (γ)

Vamos a aproximar la polarización no lineal con un término $\chi^{(3)}|E|^2 E$, de manera que más tarde podemos introducir términos Raman si así lo deseásemos. La proyección modal de esta produce un término efectivo de la forma

$$\gamma |A|^2 A, \quad (28)$$

donde el coeficiente no lineal de la fibra es

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}}, \quad (29)$$

y el área efectiva del modo viene dada por

$$A_{\text{eff}} = \frac{(\iint |\mathcal{E}|^2 dx dy)^2}{\iint |\mathcal{E}|^4 dx dy}. \quad (30)$$

Para entender un poco que es este área basta con entender que el efecto Kerr no depende únicamente de la potencia total, sino de la distribución del campo en el núcleo. En otras palabras: El área efectiva de un modo es un área equivalente que describe cuán concentrado está el campo en la fibra. Cuanto menor es, más fuerte es la no linealidad Kerr y γ aumenta.

Si queremos tener en cuenta el efecto de Self-steepening, equivaldría a incluir un término con dependencia temporal del término cúbico exacto:

$$\gamma |A|^2 A \rightarrow \gamma \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} \right) |A|^2 A. \quad (31)$$

2.1.5 Contribución por pérdidas

La atenuación progresiva de la amplitud se puede describir simplemente con un término extra

$$\sim \frac{\alpha}{2} A \quad (32)$$

2.1.6 Respuesta Raman retardada

El efecto Raman se modela como una fracción f_R de respuesta retardada. La no linealidad total se escribe como

$$\gamma \left[(1 - f_R) |A|^2 A + f_R A \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(T') |A(T - T')|^2 dT' \right], \quad (33)$$

donde $h_R(T)$ es la respuesta impulsiva Raman del material.

2.2 NLSE generalizada

Una vez reunamos todos los términos damos con La Ecuación de Schrödinger no lineal para la propagación de un pulso por una fibra óptica.

$$\left[\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} A + i \sum_{k \geq 2} \frac{\beta_k}{k!} \frac{\partial^k A}{\partial T^k} = i \gamma \left(1 + i \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial T} \right) \left(A |A|^2 + f_R A \int_0^\infty h_R(\tau) |A(T - \tau)|^2 d\tau \right) \right] \quad (34)$$

Esta es la ecuación más general posible para la evolución espacial de un pulso óptico en una fibra monomodo incluyendo dispersión a cualquier orden, pérdidas, kerr y respuesta Raman.

A partir de ahora me dedicaré a resolver esta ecuación pero en casos muy particulares. En función de que términos dejes o no la ecuación es integrable y tiene solución analítica. El próximo capítulo lo dedicaré a estos casos que no precisan de una resolución numérica. Al final, si que será necesario recurrir a métodos numéricos para poder resolverla en su formulación algo más general sin despreciar tantos términos.

Para terminar con esta sección voy a recapitular las aproximaciones e hipótesis que hemos llevado a cabo para dar con esta ecuación, simplemente para recapitular las ideas así como lo hicimos en la física tras las fibras ópticas en la sección anterior.

2.2.1 Hipótesis empleadas

Suposición	Descripción
Monomodo	La fibra sólo admite un modo relevante y el acoplamiento a modos radiales o de revestimiento se desprecia.
Aproximación SVEA	La envolvente $A(z, t)$ varía lentamente en z y t frente a las oscilaciones rápidas $\exp(i(\beta_0 z - \omega_0 t))$; esto permite descartar $\partial^2 A / \partial z^2$ y términos de orden similar.
Aproximación Kerr dominante	La polarización no lineal se aproxima por un término $\chi^{(3)} E ^2 E$ (más tarde se puede añadir la respuesta retardada tipo Raman).
Banda angosta	La expansión en potencias de $(\omega - \omega_0)$ converge y basta con retener unos pocos términos β_k .
Pérdidas y dispersión pequeñas	Los parámetros α , β_k , γ son tales que la descripción de envolvente es válida en la escala de interés.

Table 2: Suposiciones habituales empleadas para derivar la ecuación de Schrödinger no lineal en fibras ópticas.

3 Casos particulares con solución analítica

En general la ecuación que se tiene en cuenta a la mhora de buscar soluciones no numéricas es una simplificación de la obtenida:

$$\boxed{i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma|A|^2A = 0} \quad (35)$$

Para esta sección usaré de referencia [1].

3.1 Caso 1: Propagación sin dispersión y sin no linealidad

El caso más sencillo a estudiar es aquel en el cual no hay dispersión cromática ni efectos Kerr.

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = 0 \rightarrow A(z, t) = f(t) = A(0, t) \quad (36)$$

Si se incluye la dispersión de primer orden (velocidad de grupo):

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (37)$$

Se reduce a un problema de transporte lineal. Usamos el método de las características. Definimos la nueva variable constante sobre características, $T = t - z/v_g$. La derivada total a lo largo de esta es:

$$\frac{d}{dz}A(z, t(z)) = \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{dt}{dz} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (38)$$

Esto implica que A es constante sobre cada característica. Podemos expresar la solución de la forma

$$\boxed{A(z, t) = A_0(t - z/v_g)} \quad (39)$$

Es decir, el pulso no se deforma, solo se traslada en el eje temporal con velocidad v_g .

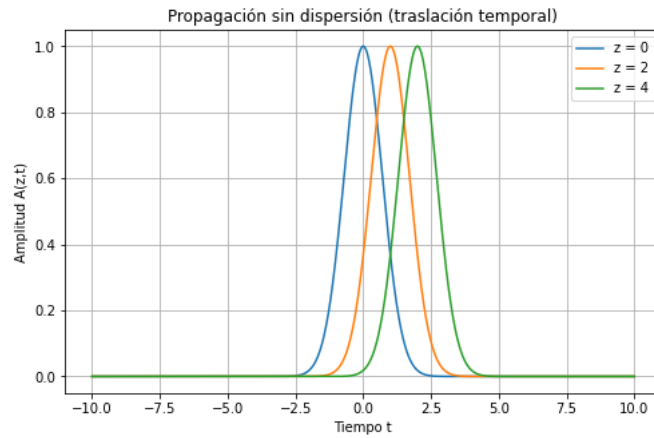


Figure 5: Intensidad $|A(z, t)|^2$ para distintos z . Puede apreciarse como el pulso conserva forma y pico y únicamente se desplaza. He usado un pulso de entrada gaussiano $A_0(T) \equiv e^{-T^2}$, y elegido $v_g = 1$.

3.2 Caso 2: Efecto dispersión segundo orden

Esta vez vamos un orden más allá pero seguimos sin incluir no linealidad.

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (40)$$

La resolveré mediante la convención de Fourier del libro.

$$\bar{A}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) e^{i\omega t} dt \quad (41)$$

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (42)$$

Aplicándola damos con una ecuación diferencial ordinaria como siempre:

$$i\frac{\partial \bar{A}(z, \omega)}{\partial z} + \frac{1}{2}\beta_2\omega^2 \bar{A}(z, \omega) = 0 \rightarrow \bar{A}(z, \omega) = \bar{A}(0, \omega) e^{-\frac{i\beta_2\omega^2}{2}z} \quad (43)$$

Volviendo al dominio temporal con la inversa:

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(0, \omega) e^{-\frac{i\beta_2\omega^2}{2}z} e^{-i\omega t} d\omega \quad (44)$$

3.2.1 Ejemplo: Haz Gaussiano

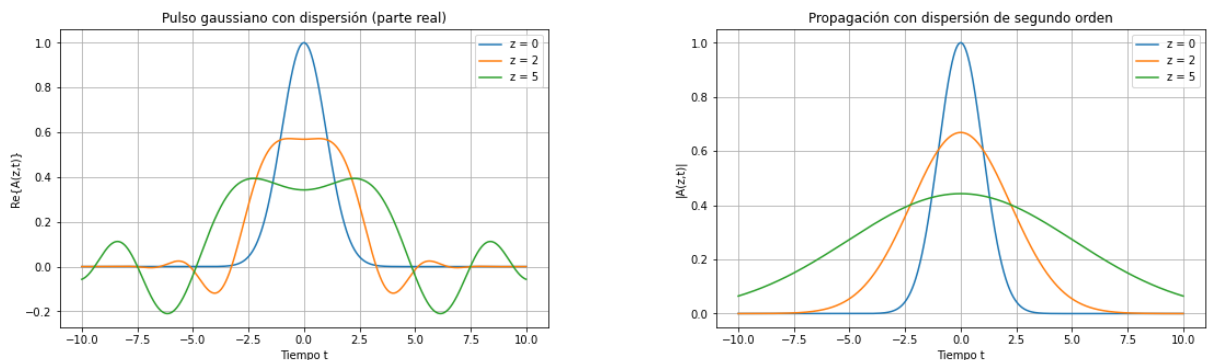
Propongamos un pulso de entrada en $z = 0$ gaussiano sin fase:

$$A(0, t) = A_0 e^{-t^2/2t_0^2} \rightarrow \bar{A}(0, \omega) = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2t_0^2} e^{i\omega t} dt = A_0 \sqrt{2\pi} t_0 e^{-t_0^2\omega^2/2} \quad (45)$$

De manera que nuestra envolvente puede calcularse simplemente con:

$$A(z, t) = \frac{A_0 t_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t_0^2\omega^2} e^{-\frac{i\beta_2\omega^2}{2}z} e^{-i\omega t} d\omega = A_0 \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2 + i\beta_2 z}} \exp\left[-\frac{t^2}{2(t_0^2 + i\beta_2 z)}\right] \quad (46)$$

Donde únicamente he usado la integral Gaussiana estándar: $\int e^{-ax^2-bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}$



(a) Evolución de la parte real de $A(z, t)$

(b) Evolución de la intensidad $|A(z, t)|^2$

Figure 6: Podemos observar que, tal como se adelantó en la sección de teoría, la distribución de intensidad del pulso va a seguir siendo gaussiana a pesar del término dispersivo de ensanchamiento. Lo que si podemos observar en la parte real de A es la aparición de oscilaciones laterales a medida que se propaga el pulso, consecuencia del chirp producido por dispersión. Para la representación he dado valor 1 a todos los parámetros de la ecuación.

3.3 Caso 3: No linealidad solamente

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (47)$$

El truco va a ser multiplicar por A^* y restar la ecuación complejo conjugada:

$$\left(i A^* \frac{\partial A}{\partial z} + \gamma |A|^4 \right) - \left(-i A \frac{\partial A^*}{\partial z} + \gamma |A|^4 \right) \rightarrow i \left(A^* \frac{\partial A}{\partial z} + A \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) = 0 \quad (48)$$

Pero $A^* \partial_z A + A \partial_z A^* = \partial_z (A A^*) = \partial_z |A|^2 = 0$.

Se deduce que la intensidad no depende de z :

$$|A(z, t)|^2 = |A(0, t)|^2 \quad (49)$$

Es conveniente expresar $A(z, t) = \sqrt{I(t)} e^{i\theta(z, t)}$, de forma que la derivada parcial respecta de z tome el siguiente aspecto:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \sqrt{I(t)} i \frac{\partial \theta}{\partial z} e^{i\theta(z, t)}. \quad (50)$$

Volviendo a insertar esto en la ecuación inicial:

$$i \left(\sqrt{I(t)} i \frac{\partial \theta}{\partial z} e^{i\theta(z, t)} \right) + \gamma I(t) \left(\sqrt{I(t)} e^{i\theta(z, t)} \right) = 0 \quad (51)$$

Simplificando todos los factores comunes tomamos con una ecuación muy sencilla.

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma I \rightarrow \theta(z, t) = \varphi_0(t) + \gamma I(t) z = \varphi_0(t) + \gamma |A_0(t)|^2 z \quad (52)$$

Insertándolo en nuestra solución:

$$A(z, t) = A_0(t) e^{i\gamma |A_0(t)|^2 z} \quad (53)$$

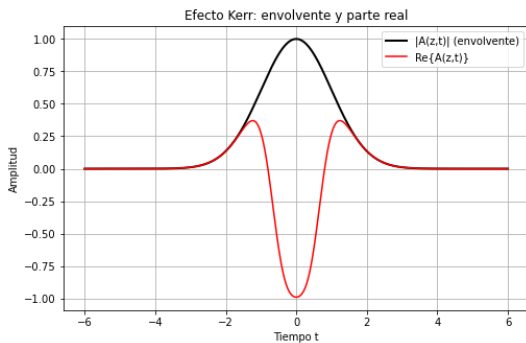
Definiendo la frecuencia instantánea como

$$\omega(t) = -\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} = -\gamma z \partial_t |A_0(t)|^2, \quad (54)$$

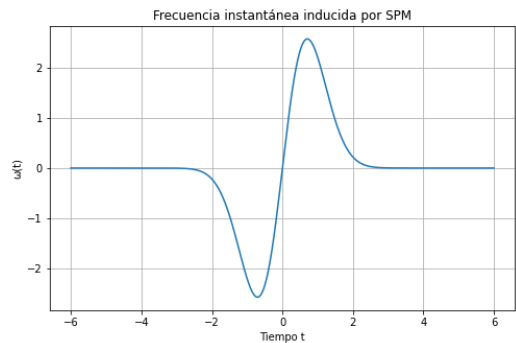
encontramos naturalmente el fenómeno de Automodulación de fase (SPM), directamente proporcional a la intensidad del pulso y distancia de propagación.

3.3.1 Ejemplo: Haz Gaussiano

Vamos a aplicar las fórmulas a $A_0(t) = A_p e^{-t^2/T_0^2}$. Las gráficas que obtengo son las siguientes:



(a) Evolución de la parte real de $A(z, t)$



(b) Frecuencia instantánea $\omega(t)$ inducida

Figure 7: Podemos ver en la primera gráfica como la envolvente no cambia con z , pero la parte real de $A(z, t)$ presenta oscilaciones. En la segunda podemos ver la generación de nuevas frecuencias inducidas por efectos no lineales.

3.4 Caso 4: Soliton fundamental

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma|A|^2A = 0 \quad (55)$$

3.4.1 Forma normalizada de la NLSE

Procederé análogamente a [1], introduciendo la escala de normalización:

$$T = \frac{t}{t_0}, \quad Z = \frac{z}{L_D}, \quad L_D = \frac{t_0^2}{|\beta_2|}, \quad A(z, t) = \sqrt{P_0}Q(Z, T) \quad (56)$$

Usando la regla de la cadena podemos hallar las derivadas.

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \sqrt{P_0}\frac{\partial Q}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial z} = \sqrt{P_0}\frac{Q_Z}{L_D} \quad (57)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sqrt{P_0}\frac{\partial Q}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \sqrt{P_0}\frac{Q_T}{t_0} \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \sqrt{P_0}\frac{Q_{TT}}{t_0} \quad (59)$$

Podemos insertar estos resultados en (55):

$$iQ_Z - \frac{\beta_2 L_D}{2t_0^2}Q_{TT} + \gamma P_0 L_D |Q|^2 Q = 0 \quad (60)$$

Para el caso de dispersión anómala $\beta_2 < 0$: $\frac{\beta_2 L_D}{t_0^2} = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = -1$. Además, voy a definir el parámetro N:

$$N^2 = \gamma P_0 L_D = \frac{\gamma P_0 t_0^2}{|\beta_2|} \quad (61)$$

Que corresponde al número de solitones. Conviene también reexpresar $Q(Z, T) = q(Z, T)/N$:

$$Q_Z = q_Z/N \quad (62)$$

$$Q_{TT} = q_{TT}/N \quad (63)$$

$$|Q|^2 Q = |q|^2 q/N^3 \quad (64)$$

Con esto logramos finalmente la NLSE canónica o normalizada (sin parámetros).

$$iq_Z + \frac{1}{2}q_{TT} + |q|^2 q = 0 \quad (65)$$

3.4.2 Resolución paso a paso

Se parte de buscar soluciones estacionarias de un perfil fijo en T y acumulación de fase en Z :

$$q(Z, T) = S(T) e^{i\lambda Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (66)$$

Con esto $q_Z = i\lambda S e^{i\lambda Z}$ y $q_{TT} = S''(T)e^{i\lambda Z}$:

$$i(i\lambda S e^{i\lambda Z}) + \frac{1}{2}(S'' e^{i\lambda Z}) + |S e^{i\lambda Z}|^2 (S e^{i\lambda Z}) = 0 \quad (67)$$

Los factores exponenciales se nos van:

$$\frac{1}{2}S'' - \lambda S + S^3 = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}S'' - \lambda S + S^3\right)S' = 0 \quad (68)$$

He multiplicado la expresión con S' para poder expresar todo como una derivada total. Dándonos cuenta de que $\frac{1}{2}S''S' = \frac{1}{4}\frac{d}{dT}(S')^2$, $-\lambda SS' = -\lambda\frac{1}{2}\frac{d}{dT}S^2$, $S^3S' = \frac{1}{4}\frac{d}{dT}S^4$:

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{1}{4}(S')^2 - \frac{\lambda}{2}S^2 + \frac{1}{4}S^4 \right) = 0 \quad (69)$$

Todo lo de dentro del paréntesis en una constante.

$$(S')^2 - 2\lambda S^2 + S^4 = C \quad (70)$$

Imponemos que cuando $T \rightarrow \infty$, $S(T) = S'(T) \rightarrow 0$ como condiciones de contorno. El lado izquierdo de la ecuación tiende todo a 0. Por ende, $C = 0$.

$$(S')^2 = S^2(2\lambda - S^2) \rightarrow \frac{dS}{S\sqrt{2\lambda - S^2}} = -dT \quad (71)$$

Para evitar hacer la integral y funciones trigonométricas explícitas, voy a usar el ansatz [1]: $S(T) = A \operatorname{sech}(BT)$.

$$S' = -AB \operatorname{sech}(BT) \tanh(BT) = -BS \tanh(BT) \quad (72)$$

$$S^2(2\lambda - S^2) = S^2(2\lambda - A^2 \operatorname{sech}^2(BT)) \quad (73)$$

Nos queda la siguiente igualdad:

$$B^2 \tanh^2(BT) = B^2(1 - \operatorname{sech}^2(BT)) = 2\lambda - A^2 \operatorname{sech}^2(BT) \quad (74)$$

Para que sea válida para todo T debemos igualar los coeficientes independientes y los que acompañan al sech : $A^2 = B^2 = 2\lambda$.

$$S(T) = \sqrt{2\lambda} \operatorname{sech}(\sqrt{2\lambda}T) \quad (75)$$

Volviendo a nuestra variable original.

$$\sqrt{2\lambda} \operatorname{sech}(\sqrt{2\lambda}T) e^{i\lambda Z} \quad (76)$$

Para obtener el estado normalizado elegimos $\lambda = 1/2$.

$$q(Z, T) = \operatorname{sech}(T) e^{iZ/2} \quad (77)$$

Esta solución corresponde al caso en que el parámetro del solitón $N = 1$. De esta forma, la transformación $q = NQ$ hace que la envolvente Q física tenga la amplitud adecuada para que la solución con $\lambda = 1/2$ sea la fundamental.

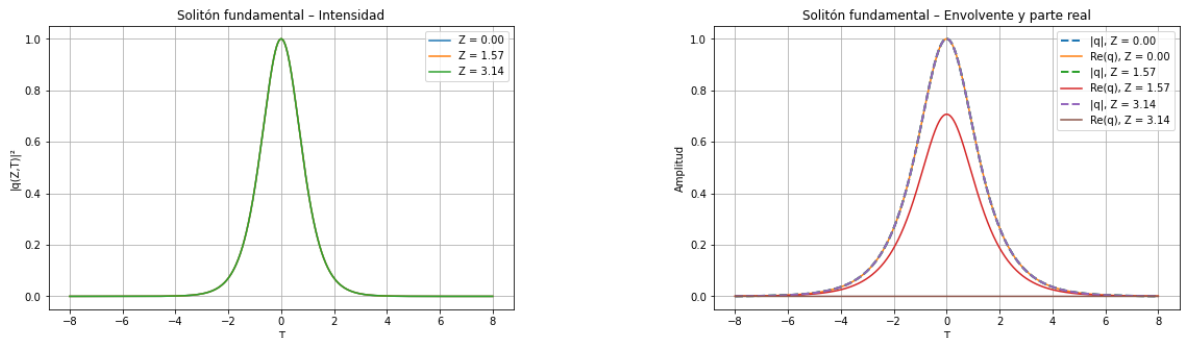


Figure 8: Representación del solitón fundamental de la NLSE. La segunda gráfica muestra la parte real del campo $q(Z, T)$ para $Z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, junto con su envolvente $|q|$, que permanece invariante y corresponde a un perfil $\operatorname{sech}(T)$. La primera gráfica presenta la intensidad $|q|^2 = \operatorname{sech}^2(T)$, también invariante en la propagación, lo que evidencia la conservación de la forma característica del solitón fundamental. Estas figuras ilustran que la única evolución con Z es una rotación global de fase sin modificación del perfil temporal.

3.5 Caso 5: Solitones de orden superior

Este último caso lo pongo únicamente para poder comparar dinámicas de las soluciones con distinto N , ya que solo he estudiado analíticamente el caso $N = 1$. No voy a meterme en los cálculos de esta sección. Pueden encontrarse en [1]. La solución general viene caracterizada por distintos parámetros:

$$\kappa \equiv \text{frecuencia} \quad (78)$$

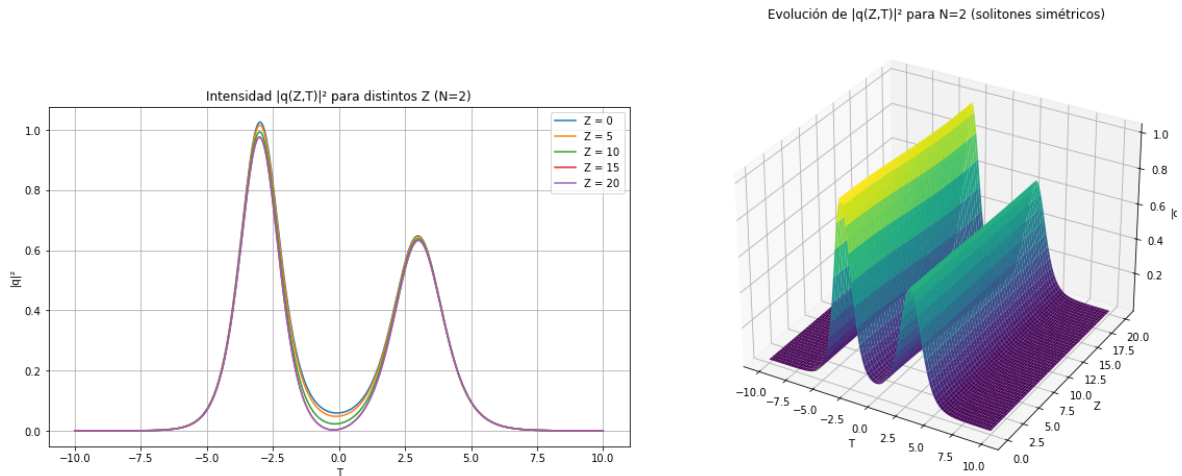
$$\eta \equiv \text{anchura pulso} \quad (79)$$

$$T_0 \equiv \text{posición temporal} \quad (80)$$

$$\sigma \equiv \text{fase} \quad (81)$$

La solución general es dada en la forma de N solitones independientes. De esta forma, Veremos como ahora la forma de los solitones de orden alto cambiarán durante la propagación, retomando su forma original tras una cierta distancia.

$$q(Z, T) = \sum_{j=1}^N \eta_j \operatorname{sech}[\eta_j(T + \kappa_j Z - T_{0j})] \exp \left[-i\kappa_j + i\frac{1}{2}(\eta_j^2 - \kappa_j^2)Z - i\sigma_j \right] \quad (82)$$



Muestro la evolución de la intensidad $|q(Z, T)|^2$ para $N = 2$ solitones independientes. He hecho dos representaciones: una superficie 3D y varias curvas 2D de para distintos valores de Z . Los parámetros elegidos son: $\eta_1 = 1.0$, $\eta_2 = 0.8$, $T_{01} = -3$, $T_{02} = 3$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

Se observa que, aunque cada solitón individual mantiene su forma y amplitud, la altura de los picos varía con Z debido a los términos cruzados $q_1 q_2^*$ en la intensidad total, que producen interferencia constructiva y destructiva conforme Z crece. En la gráfica 2D se aprecia cómo los picos varían poco en altura para distintos valores de Z , mientras que la gráfica 3D muestra la evolución completa de esta interferencia a lo largo de la distancia de propagación.

En el caso de que $\kappa_j \neq 0$, los centros de los solitones se desplazarían linealmente con Z , provocando además un movimiento relativo de los picos a lo largo del eje temporal T . Si las fases $\sigma_j \neq 0$, la interferencia entre los solitones se modificaría, pudiendo aumentar o disminuir localmente la intensidad máxima debido a efectos de interferencia constructiva o destructiva en diferentes posiciones temporales.

4 Resolución numérica

4.1 Método Split-Step Fourier (SSFM) con esquema de Strang para la NLSE

La ecuación que se resuelve numéricamente es la Ecuación de Schrödinger No Lineal (NLSE) empleada en la propagación de pulsos en fibras ópticas:

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma|A|^2 A + \frac{\alpha}{2}A = 0 \quad (83)$$

Esta ecuación incorpora simultáneamente dispersión, no linealidad óptica y pérdidas. Para resolverla se utiliza el método **Split-Step Fourier o SSFM** [7], que consiste en dividir la ecuación en dos operadores que sí pueden resolverse de forma exacta por separado. Esta separación se escribe como:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \hat{L}A + \hat{N}A \quad (84)$$

Donde el operador lineal y no lineal son:

$$\hat{L} = i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{2} \quad (85)$$

$$\hat{N} = -i\gamma|A|^2 \quad (86)$$

El operador lineal contiene la dispersión y la atenuación (pérdidas) y el no lineal contiene el efecto Kerr. La gran ventaja es que cada uno de estos operadores tiene solución exacta con SSFM independientemente.

1) **Solución exacta de la parte lineal.** Aplicando transformada de Fourier al término de dispersión, la derivada temporal se convierte en:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right\}(w) = -(w^2)\tilde{A}(w), \quad (87)$$

de modo que el avance en Fourier para un incremento Δz es:

$$\tilde{A}(z + \Delta z, w) = \tilde{A}(z, w) \exp\left[\left(i\frac{\beta_2}{2}w^2 - \frac{\alpha}{2}\right)\Delta z\right]. \quad (88)$$

Esto significa que la evolución lineal consiste en transformar el campo con FFT, multiplicar por el factor exponencial, y volver al dominio temporal con IFFT.

2) **Solución exacta de la parte no lineal.** Para la ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -i\gamma|A|^2 A, \quad (89)$$

la solución exacta es simplemente:

$$A(z + \Delta z, t) = A(z, t) \exp(i\gamma|A|^2\Delta z). \quad (90)$$

Este paso consiste únicamente en una multiplicación punto a punto en el dominio temporal.

Esquema de Strang

Dado que los operadores \hat{L} y \hat{N} no conmutan, no es posible realizar la evolución completa como una única exponencial. El método de Strang propone una aproximación simétrica de segundo orden:

$$e^{\Delta z(\hat{L}+\hat{N})} \approx e^{\frac{\Delta z}{2}\hat{L}} e^{\Delta z\hat{N}} e^{\frac{\Delta z}{2}\hat{L}} \quad (91)$$

Este esquema tiene error global de orden $O(\Delta z^2)$. Lo que haremos en la práctica es simplemente esto:

1. **Medio paso lineal:** FFT del campo, multiplicación por

$$\exp \left[\left(i \frac{\beta_2}{2} w^2 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\Delta z}{2} \right] \quad (92)$$

y posterior IFFT.

2. **Paso completo no lineal:** Multiplicación punto a punto del campo en el dominio temporal:

$$A \leftarrow A \exp \left(i \gamma |A|^2 \Delta z \right) \quad (93)$$

3. **Medio paso lineal:** Repetir el mismo procedimiento FFT \rightarrow multiplicación \rightarrow IFFT.

Mallado numérico

Para aplicar el método con FFT se discretiza el tiempo t en N_t puntos equiespaciados. De este modo:

$$t_n = t_{\min} + n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N_t - 1. \quad (94)$$

A partir de Δt definiré automáticamente las frecuencias discretas:

$$w_k = 2\pi \text{fftfreq}(N_t, \Delta t) \quad (95)$$

La elección del mallado debe cumplir ciertas características que tampoco me voy a poner a discutir mucho:

- La ventana temporal debe ser varias veces mayor que el ancho del pulso para evitar aliasing.
- La resolución Δt debe ser suficientemente pequeña para muestrear bien las oscilaciones del pulso.
- El paso de propagación Δz debe ser pequeño respecto a las longitudes características:

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}. \quad (96)$$

Resumen del procedimiento que he explicado

1. Definir malla temporal (t), frecuencias (w) y el campo inicial $A(t, 0)$.
2. Construir el operador lineal de medio paso:

$$L_{\text{half}}(w) = \exp \left[\left(i \frac{\beta_2}{2} w^2 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\Delta z}{2} \right] \quad (97)$$

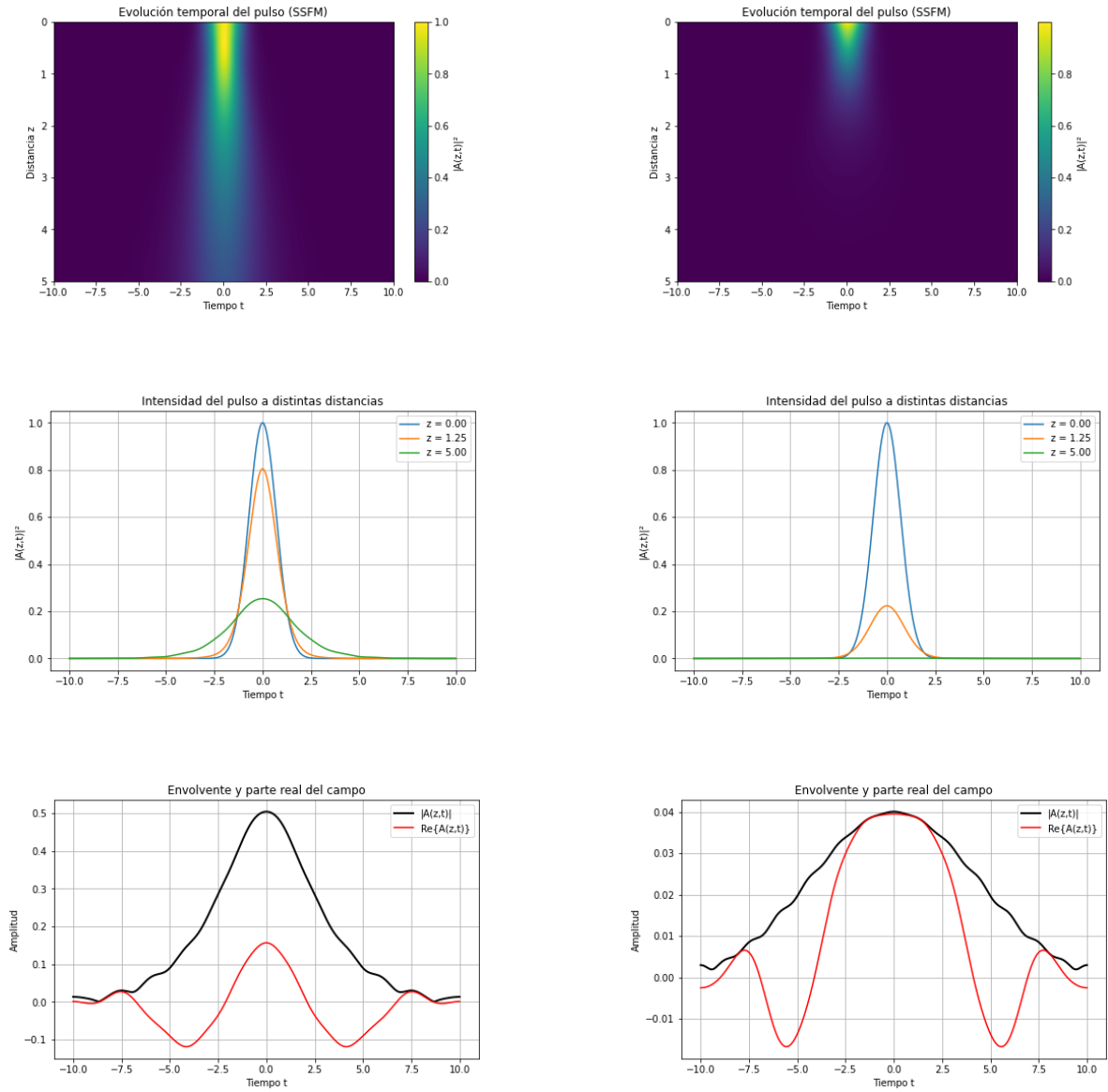
3. Para cada paso en z :

- (a) Transformar con FFT: $\tilde{A} = \text{FFT}(A)$.
- (b) Multiplicar por L_{half} .
- (c) IFFT para volver al tiempo.
- (d) Multiplicar por la fase no lineal.
- (e) Repetir el proceso FFT \rightarrow multiplicación \rightarrow IFFT del medio paso lineal.

4. Guardar el resultado y calcular espectros cuando sea necesario.

4.2 Gráficas generadas

A la izquierda mostraré las gráficas para el coeficiente de atenuación $\alpha = 0.25$, y a la derecha para $\alpha = 1$. El resto de parámetros son los mismos.



La envolvente $|A(z,t)|$ representa la magnitud del campo óptico y varía suavemente en el tiempo. La parte real del campo, en cambio, oscila debido a la fase compleja adquirida durante la propagación, principalmente por efectos de dispersión y Kerr.

5 Anexo

5.1 Código en Python

A continuación el código que he empleado en la resolución:

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Dec 23 12:27:32 2025

@author: victi
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# DECLARO LOS PARÁMETROS :3
beta2 = 1.0          # dispersión de segundo orden
gamma = 1            # coeficiente Kerr
alpha = 1.0          # pérdidas
A0 = 1.0             # amplitud inicial
T0 = 1.0             # ancho temporal del pulso

# MALLADO TEMPORAL
Nt = 2048             # número de puntos temporales
Tmax = 20.0
dt = Tmax / Nt
t = np.linspace(-Tmax/2, Tmax/2, Nt) # el vectorcillo

# Frecuencias angulares (FFT)
w = 2 * np.pi * np.fft.fftfreq(Nt, dt)

# MALLADO EN z (igual que en t,  vaya)
zmax = 5.0
Nz = 500
dz = zmax / Nz
z = np.linspace(0, zmax, Nz)

# CAMPO INICIAL (pulso gaussiano)
A = A0 * np.exp(-t**2 / (2*T0**2))
```

```

# Declaro el operador L (medio paso)
L_half = np.exp((1j * beta2 * w**2 / 2 - alpha / 2) * dz / 2)

# Abrimos A para ir guardandolo
A_z = np.zeros((Nz, Nt), dtype=complex)
A_z[0, :] = A

# Bucle ya del SSFM
for n in range(1, Nz):

    # Hago Fourier-- Multiplico-- Inversa
    A_w = np.fft.fft(A)
    A_w *= L_half
    A = np.fft.ifft(A_w)

    # Ya en tiempos, multiplico por N
    A *= np.exp(1j * gamma * np.abs(A)**2 * dz)

    # Vuelvo a frecuencias, multiplico, e inversa
    A_w = np.fft.fft(A)
    A_w *= L_half
    A = np.fft.ifft(A_w)

    # Guardar campo
    A_z[n, :] = A

# GRÁFICAS

# 1) INTENSIDAD

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.imshow(
    np.abs(A_z)**2,
    extent=[t[0], t[-1], z[-1], z[0]],
    aspect='auto'
)
plt.colorbar(label='|A(z,t)|2')
plt.xlabel('Tiempo t')
plt.ylabel('Distancia z')
plt.title('Evolución temporal del pulso (SSFM)')
plt.show()

# 2) PULSO EN DISTINTAS z

```

```

plt.figure(figsize=(8,5))
for zi in [0, int(Nz/4), Nz-1]:
    plt.plot(t, np.abs(A_z[zi])**2, label=f'z = {z[zi]:.2f}')

plt.xlabel('Tiempo t')
plt.ylabel('|A(z,t)|2')
plt.title('Intensidad del pulso a distintas distancias')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

3) ENVOLVENTE Y PARTE REAL (última z)

```

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(t, np.abs(A_z[-1]), 'k', linewidth=2, label='|A(z,t)|')
plt.plot(t, np.real(A_z[-1]), 'r', label='Re{A(z,t)}')
plt.xlabel('Tiempo t')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.title('Envolvente y parte real del campo')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```


References

- [1] *The Nonlinear Schrödinger Equation*. John Wiley Sons, Ltd, 2011.
- [2] Departamento de Óptica. Apuntes de fotónica. Apuntes de clase.
- [3] F DeMartini, CH Townes, TK Gustafson, and PL Kelley. Self-steepening of light pulses. *Physical Review*, 164(2):312, 1967.
- [4] Domenico Felice. A study of a nonlinear schrödinger equation for optical fibers. *arXiv preprint arXiv:1612.00358*, 2016.
- [5] Dr. Alejandro García Juárez. Introducción a la optoelectrónica. Ingeniería en Tecnología Electrónica y Maestría en Electrónica.
- [6] Harish Abdillah Mardi, Nasaruddin Nasaruddin, Muhammad Ikhwan, Nurmaulidar Nurmaulidar, and Marwan Ramli. Retracted: Soliton dynamics in optical fiber based on nonlinear schrödinger equation. *Heliyon*, 9(3), 2023.
- [7] Oleg V Sinkin, Ronald Holzlöhner, John Zweck, and Curtis R Menyuk. Optimization of the split-step fourier method in modeling optical-fiber communications systems. *Journal of lightwave technology*, 21(1):61, 2003.