



VNiVERSiDAD
D SALAMANCA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

La ecuación de Lippmann-Schwinger en regularización dimensional

Presentado por:
V́ctor Bartoloḿ Redondo

Tutor:
David Rodŕguez Entem

Año: 2024/25

Resumen

Palabras clave: Cromodinámica cuántica (QCD), interacción fuerte, régimen de bajas energías, Teoría de Campo Efectiva (EFT), interacción NN, simetría quiral, Teoría de Campo Efectiva Quiral (χ EFT), Ecuación de Lippmann-Schwinger (LSE), regularización dimensional (DR), Teoría de Ondas Distorsionadas (DWT), Potencial de intercambio de un pion (OPE).¹

La *cromodinámica cuántica* (QCD) es la teoría fundamental de la *interacción fuerte*, y es la encargada de mantener unidos a los quarks dentro de los nucleones, y a los propios nucleones entre sí en el núcleo atómico. La libertad asintótica es una propiedad de dicha interacción: Esta propiedad implica que la fuerza entre los quarks se debilita a medida que la distancia entre ellos disminuye, comportándose casi como partículas libres a distancias muy cortas.

En el *régimen de bajas energías* no es posible un tratamiento perturbativo de la teoría como lo es a energías grandes. De la necesidad de estudiar los fenómenos en torno a estas escalas es donde son útiles las *Teorías de Campo Efectivas* (EFT).

La *interacción NN* se trata de una interacción residual de la interacción fuerte. Son los nucleones partículas sin color que se ven afectadas por la fuerza nuclear, situación análoga al caso de las fuerzas de Van der Waals actuando sobre átomos que son neutros.

La *quiralidad* es una propiedad intrínseca a los fermiones sin masa. Pueden ser clasificados como dextrógiros si su espín está alineado a su movimiento, o levógiro en el caso contrario. La *simetría quiral* se manifiesta en el límite de masas nulas para los quarks ligeros u y d . Esta puede sufrir una ruptura espontánea, surgiendo así los llamados *bosones de Nambu-Goldstone* de masa pequeña, que no son otros que los piones (π^+ , π^- , π^0). Buscando respetar esta simetría surgen las *Teorías de Campo Efectivas Quirales* (χ EFT) para describir las interacciones entre nucleones (protones y neutrones) y piones estableciendo escalas de masas hadrónicas.

Los problemas relacionados con la interacción NN precisan de herramientas no perturbativas para ser descritas. La *Ecuación de Lippmann-Schwinger* es una formulación integral análoga a la *Ecuación de Schrödinger* para resolver problemas de dispersión.

La *Regularización* son todos aquellos métodos que nos permiten aislar divergencias de ciertas integrales. El tratamiento de integrales en una dimensión d arbitraria para posteriormente tomar el límite a la dimensión original se denomina *regularización dimensional*, y puede entenderse así como una *continuación analítica* de la dimensión.

Usando técnicas como la DR y *Teoría de Ondas Distorsionadas* (DWT) hallaremos la solución a la LSE para nuestro problema en particular: Analizar la *interacción NN* en onda 1S_0 utilizando como interacción de largo alcance el *potencial de intercambio de un pion regular* (OPE) y como corto alcance *términos de contacto* singulares [15].

¹Estas palabras son claves para la comprensión del trabajo.

Abstract

Keywords: Quantum Chromodynamics (QCD), strong interaction, low-energy regime, Effective Field Theory (EFT), NN interaction, chiral symmetry, Chiral Effective Field Theory (χ EFT), Lippmann-Schwinger Equation (LSE), dimensional regularization (DR), Distorted Wave Theory (DWT), One-Pion Exchange Potential (OPE).²

Quantum Chromodynamics (QCD) is the fundamental theory of the *strong interaction*, responsible for keeping quarks bound inside nucleons, and nucleons bound together within the atomic nucleus. Asymptotic freedom is a property of this interaction: This property implies that the force between quarks becomes weaker as the distance between them decreases, behaving almost like free particles at very short distances.

In the *low-energy regime*, a perturbative treatment of the theory is not possible as it is at high energies. From the need to study phenomena at these scales arise the usefulness of *Effective Field Theories* (EFT).

The NN interaction is a residual interaction of the strong force. Nucleons are colorless particles affected by the nuclear force, a situation analogous to Van der Waals forces acting on atoms that are electrically neutral.

Chirality is an intrinsic property of massless fermions. They can be classified as right-handed if their spin is aligned with their motion, or left-handed in the opposite case. *Chiral symmetry* manifests in the limit of zero masses for the light quarks u and d . This symmetry can undergo spontaneous breaking, giving rise to the so-called *Nambu-Goldstone bosons* of small mass, which are none other than the pions (π^+ , π^- , π^0). In order to respect this symmetry, *Chiral Effective Field Theories* (χ EFT) arise to describe the interactions between nucleons (protons and neutrons) and pions, establishing hadronic mass scales.

Problems related to the *NN interaction* require non-perturbative tools to be described.

The Lippmann-Schwinger Equation is an integral formulation analogous to *The Schrödinger equation* for solving scattering problems.

Regularization refers to all those methods that allow us to isolate divergences in certain integrals. The treatment of integrals in an arbitrary dimension d , later taking the limit to the original dimension, is called *dimensional regularization*, and can thus be understood as an *analytic continuation* of the dimension.

Using techniques such as DR and *Distorted Wave Theory* (DWT) we will find the solution to the LSE for our particular problem: Analyzing the *NN interaction* in the 1S_0 wave using as the long-range interaction the *regular one-pion exchange potential* (OPE) and as short-range the *singular contact terms* [15].

²These keywords are essential for understanding the work.

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Teorías de campo efectivas (EFT)	6
1.2. Teorías efectivas quirales (χ EFT)	7
1.3. Ecuación de Lippmann-Schwinger (LSE)	8
1.4. Regularización dimensional (DR)	9
1.4.1. Integral sobre la normal euclidea	10
1.4.2. Integral angular	12
2. Renormalización de la interacción NN (1S_0) por intercambio de un pion en presencia de interacciones de contacto	15
3. Resolución numérica	26
4. Resultados	30
5. Conclusiones	33

Capítulo 1

Introducción

El objeto de este trabajo es el de analizar el problema de interacción NN en onda 1S_0 utilizando como interacción de largo alcance el potencial de intercambio de un pion (regular) y como corto alcance términos de contacto (singulares) que contienen hasta dos derivadas, reproduciendo los cálculos del paper original [15].

Usando técnicas como la regularización dimensional (DR) y teoría de ondas distorsionadas (DWT) hallaremos solución a la ecuación de Lippmann-Schwinger (LSE). Para reproducir los datos experimentales del defasaje se fijarán los valores de los coeficientes del potencial de cortas distancias adecuadamente, que en un principio serán datos desconocidos.

Una vez obtenida la amplitud de probabilidad del scattering tras fijar las constantes, nos centraremos en hallar los valores de los parámetros de baja energía que describen la física del proceso a dichas escalas. Más adelante se presentará con detalle la llamada expansión de rango efectivo, entendiéndose el porqué de la obtención de estos parámetros.

Antes de profundizar en los cálculos conviene introducir los preliminares físicos, indagando en el porqué de los modelos, la razón tras la teoría y el poder detrás del método. No empezaré sin antes resumir muy brevemente la evolución histórica de la teoría nuclear para la interacción NN [12].

Fue Yukawa en 1935 quién postuló la existencia de un mesón pseudoescalar que mediaba la interacción fuerte entre nucleones mediante el intercambio de los mismos [23]. Estos eran los piones, bosones mediadores de espín cero.

Allá por 1950, la teoría de intercambio de un pion era adecuada para explicar los datos experimentales de los procesos de scattering NN , en particular para las propiedades del deuterón. Por el contrario, el modelo era insuficiente para tratar con procesos de intercambio múltipiónico, conduciéndolo al fracaso.

En los 1960, el descubrimiento de mesones más pesados solventó la situación, teniendo en cuenta las posibles resonancias (ρ , σ ,...) del pion y formulando una propuesta de intercambio de un bosón más refinada (OBE) [1]. Su punto débil fue el propio mesón σ , puesto que está asociado a la resonancia del intercambio de dos bosones, y cuya evidencia empírica sigue siendo algo pendiente.

Una década más tarde, por los años 1970_s, se desarrollaron varios métodos que explicaban este doble intercambio. Ejemplos de estos son los potenciales de Stony Brook [9] o Paris para teorías de dispersión, o el modelo de Partovi-Lomon [16] entre otras teorías de campos.

Finalmente en los años 1980_s se desarrolló la teoría fundamental para la fuerza fuerte: La cromodinámica cuántica (QCD). Con la llegada del modelo quark todas las teorías sobre mesones fueron relegados a meros modelos. Estas volvieron a cobrar protagonismo con la llegada de las teorías de campo efectivas (EFT), dado que a bajas energías los grados de libertad efectivos vuelven a ser los piones (idea original de Yukawa).

Dedicaré los próximos apartados y secciones a introducir ciertas ideas y teorías esenciales para un profundo entendimiento del trabajo, más allá del procedimiento matemático y seguimiento de los cálculos.

Partiendo desde este punto lo propio sería dedicar su espacio correspondiente a las ya mencionadas teorías efectivas: Desde su propósito y motivación hasta el desarrollo de las teorías efectivas quirales para el estudio del problema NN .

Tras esto, y ante la necesidad de herramientas no perturbativas para describir los problemas de dispersión asociados al sistema NN , será el momento idóneo para presentar La Ecuación de Lippmann-Schwinger (LSE) que da nombre a este trabajo de fin de grado, como formulación integral alternativa a la resolución de La Ecuación de Schrödinger.

A lo largo del trabajo toparemos inevitablemente con divergencias presentes en determinadas integrales. Para aislar estas divergencias se recurre a la regularización. Hay varios métodos posibles y diversos, pero nosotros emplearemos uno solo: La regularización dimensional. Por ende, el último apartado dedicado a introducir este trabajo explicará el funcionamiento de este método. A su vez, se planteará y resolverá una primera integral general bajo este procedimiento. Este resultado es importante, ya que la mayoría de integrales que veremos podrán ser resueltas en base a ella.

Una vez todo esté claro y explicado, pasaré directamente a la resolución del problema principal: La renormalización de la interacción NN (1S_0) por intercambio de un pion en presencia de términos de contacto. Los cálculos se presentan explícitamente, paso a paso y en orden de aparición de las futuras integrales.

Terminaré presentando los resultados tras la resolución numérica, explicando como fue llevada a cabo la discretización de las funciones integrales. Luego, cerraré presentando las conclusiones, haciendo especial hincapié en aquellas más relevantes, así como un resumen general de lo que ha sido y se ha centrado el TFG, de manera que la teoría quede asentada del todo al refrescarla tras la práctica.

1.1. Teorías de campo efectivas (EFT)

La cromodinámica cuántica (QCD) [14] es la teoría fundamental de la interacción fuerte. Para un rango de energías altas, es posible tratar la teoría perturbativamente. Esto es algo que no es posible para bajas energías (escala propia de procesos hadrónicos que nos conciernen) debido a la pérdida de libertad asintótica y los grandes acoplamientos entre quarks y gluones. Esta propiedad implica que la fuerza entre los quarks se debilita a medida que la distancia entre ellos disminuye, comportándose casi como partículas libres a distancias muy cortas.

Como método alternativo a la falta de una teoría resoluble, se desarrollaron las llamadas *teorías de campo efectivas* (EFT). Podemos resumir en una cita su propósito [13]: *La premisa básica de las teorías efectivas es que la dinámica a bajas energías (o grandes distancias) no depende de los detalles de la dinámica a altas energías (o distancias cortas).*

En consecuencia, la física de bajas energías puede describirse mediante un lagrangiano efectivo que contiene solo unos pocos grados de libertad, ignorando los grados de libertad adicionales presentes a energías más altas. Esto no significa que no exista una conexión entre ambas escalas de energía, sino que es una relación implícita. La herramienta que permite hacer una separación entre ambas físicas es la llamada renormalización [18].

Lo interesante de estas teorías es que son independientes del modelo empleado, puesto que la idea principal es describir la física a largas distancias evitando suponer nada acerca de la física a distancias cortas. Esto las diferencia de los modelos fenomenológicos, donde explícitamente ya las incluyen en su modelo.

En base a ello, un tratamiento más realista para tratar con los procesos de scattering se basa en la idea de no considerar las partículas involucradas como simples ondas planas, y corregir su interacción con términos de contacto que permitan describir la distorsión que sufren durante el mismo. El método que parte de una función de onda asintótica en lugar de una onda plana se conoce como teoría de onda distorsionada (DWT) [2]. La idea es construir un potencial efectivo:

$$V = V_I + V_{II}$$

De tal forma que no es permitido separar las escalas de larga y corta distancia. Se verá más adelante, como en nuestro caso este potencial de corto alcance es convenientemente expresado como un polinomio de potencias en momentos, cuyos coeficientes de acoplamiento deben ser determinados ajustando los resultados a los datos experimentales.

Un truncamiento de segundo orden es lo que se conoce como aproximación de Born (DW-BA) [19], la cual proporciona una de las aproximaciones más útiles en física nuclear. En cuanto a nuestro potencial de largo alcance, se trata del respectivo al intercambio de un pion (OPE), o en su más famosa forma, un potencial de Yukawa.

Para ilustrar todavía más el funcionamiento de dichas teorías, me ayudaré de la expansión de rango efectivo de Bethe [3]. Será empleada más adelante para el cálculo de los parámetros de baja energía, dónde también será explicada con mayor cuidado.

$$f(k) = k \cot \delta(k) = -1/a + \frac{1}{2}r_0k^2 + \dots$$

Este desarrollo del defasaje es válido para $ka \ll 1$, siendo a el alcance finito del potencial $U(r)$. A lo que se quiere llegar es que la descripción del sistema para longitudes de onda λ grandes, no depende sino de unos parámetros que vendrán dados por el potencial, pero no por $U(r)$ explícitamente.

Resumiendo: Si bien nuestro potencial debe de simular perfectamente la teoría a grandes distancias, nos será posible modelizar con una serie de parámetros (dependientes del modelo) la interacción a distancias cortas, sin que la física detrás de esta se vea afectada en su elección.

1.2. Teorías efectivas quirales (χ EFT)

Definimos *quiralidad* como una propiedad fundamental en física de partículas fermiónicas sin masa que trata sobre el comportamiento de las componentes de espín bajo transformaciones de simetría (especialmente en teorías relativistas como el Modelo Estándar). Se distinguen fermiones izquierdos (left-handed) y derechos (right-handed) en función de si la dirección de espín es antiparalela o paralela al movimiento respectivamente. A partir de esta propiedad puede construirse *la simetría quiral* [10] de un lagrangiano. Únicamente en el límite de quarks sin masa ($m_u = m_d = 0$) tenemos que es exacta. Sin entrar un mucho detalle, comentar que la posible *ruptura espontánea* de la simetría se traduce en la existencia de bosones de masas pequeñas conocidos como *bosones de Nambu-Goldstone* [4], que en el contexto de χ EFT no son otros que los piones de la teoría original de Yukawa .

Buscando respetar esta simetría surgen las *teorías de campo efectivas quirales* [12] para describir las interacciones entre nucleones y piones estableciendo escalas de masas hadrónicas. Fue Weinberg el primero en proponer el uso de las EFT al ámbito de la fuerza nuclear [22]. Inicialmente se buscó determinar los potenciales NN en base a los principios de χ EFT para posteriormente resolver con ellos *la ecuación de Lippmann-Schwinger* (LSE) y obtener así las amplitudes de scattering.

la escala *débil* viene dada por la masa del pión $Q \sim m_\pi$, y la escala *dura* suele referirse a $\Lambda_\chi \sim 1$ GeV (*chiral symmetry breaking scale*), que es la energía umbral para la que QCD deja de ser resoluble de forma perturbativa [12]. De acuerdo a Weinberg [21] el planteamiento para describir con el lagrangiano más general posible la física hadrónica se basa en la consideración de los grados de libertad propios y simetrías presentes para bajas energías, de forma que todos los términos de interacción (que son infinitos) entre los grados de libertad sean consecuentes con dichas simetrías [17]. Estas interacciones infinitas pueden ser ordenadas en base al cociente de Q/Λ_χ , contribución similar a una escala de potencias.

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}^{(0)} + \mathcal{L}_{eff}^{(1)} + \mathcal{L}_{eff}^{(2)} + \dots$$

Siendo $\mathcal{L}_{eff}^{(n)}$ proporcional a $(Q/\Lambda_\chi)^n$. Aclarar que el orden $n \in \mathbb{N}$ recibe el nombre de *regla de conteo* o *power counting* [5]. Pese al éxito de la teoría para los casos particulares de interacción $\pi\pi$ y $N\pi$, se descubrió que hacían falta herramientas no perturbativa para describir correctamente el problema NN . En base a ello, el siguiente apartado viene dedicado a la ecuación que da nombre a este trabajo: La ecuación de Lippmann-Schwinger.

1.3. Ecuación de Lippmann-Schwinger (LSE)

Se trata de una formulación integral empleada para resolver problemas de dispersión en mecánica cuántica. Su solución es análoga a la que encontraríamos si resolviésemos la ecuación de Schrödinger en su lugar. Existe mucha bibliografía que deduce con los siguientes pasos la ecuación (e.g. [8]).

Supongamos un sistema descrito por:

$$H = H_0 + V,$$

siendo H_0 un hamiltoniano de autoestado $|\phi\rangle$ y autovalor E :

$$H_0 |\phi\rangle = E |\phi\rangle.$$

Si ahora buscamos contruir un estado con esta misma energía:

$$(H_0 + V) |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle,$$

una solución posible será

$$|\varphi\rangle = |\phi\rangle + [E - H_0]^{-1} V |\varphi\rangle.$$

Mediante un desplazamiento infinitesimal de la energía solucionamos que el operador, al tener autovalor nulo, no es invertible.

$$|\varphi^\pm\rangle = |\phi\rangle + [E - H_0 \pm i\epsilon]^{-1} V |\varphi^\pm\rangle.$$

Esta expresión es la conocida como ecuación de Lippmann-Schwinger, dada en su formulación más simple. Aplicando V a ambos lados de la igualdad tenemos que

$$V |\varphi^\pm\rangle = V |\phi\rangle + V [E - H_0 \pm i\epsilon]^{-1} V |\varphi^\pm\rangle,$$

Y definiendo ahora el operador transición como $T |\phi\rangle = V |\varphi^+\rangle$:

$$T |\phi\rangle = V |\phi\rangle + VGT |\phi\rangle.$$

Donde G es el propagador o función de Green. Finalmente hemos llegado a la ecuación que nos interesa.

$$T = V + VGT.$$

Denotaremos $T(k, k'; k)$ al elemento de matriz $\langle \phi_k | T | \phi_{k'} \rangle = \langle \phi_k | V | \varphi^+ \rangle$. Está directamente relacionado con el factor de forma, que a la vez se relaciona con la sección eficaz del scattering.

Podemos encontrar fácilmente su vinculación con la matriz de scattering. La siguiente relación se da por conocida:

$$|\varphi_k^+\rangle - |\varphi_k^-\rangle = -2\pi i \delta(E_k - H) V |\phi_k\rangle.$$

La matriz S toma el siguiente aspecto:

$$\langle \phi_{k'} | S | \phi_k \rangle = \langle \varphi_{k'}^- | \varphi_k^+ \rangle = \langle \phi_{k'} | \phi_k \rangle - 2\pi i \delta(E_{k'} - E_k) \langle \phi_{k'} | \varphi_k^+ \rangle = \langle \phi_{k'} | 1 - 2\pi i \delta(E_{k'} - E_k) T | \phi_k \rangle.$$

Finalmente,

$$S = 1 - 2\pi i \delta(E_{k'} - E_k) T.$$

Esta matriz cumple la condición de unitariedad ($SS^\dagger = 1$). Con esta propiedad se deduce el *teorema óptico* de la matriz T , lo que nos permitirá más adelante relacionar el módulo con la parte imaginaria.

1.4. Regularización dimensional (DR)

Regularización son todos aquellos métodos que nos permiten aislar divergencias presentes en determinadas integrales. Debemos de modificar el comportamiento de la teoría para momentos grandes, de forma que se encuentre bien definida en las escalas que nos interesan. La regularización consiste en obtener un resultado finito de una integral mediante etapas intermedias, para posteriormente renormalizar (absorber las divergencias en una redefinición de las magnitudes físicas o mediante la adición de contratérminos al lagrangiano).

Existen diversos métodos: Pauli-Villars, cut-off, reticular... Nosotros nos centaremos en la denominada *regularización dimensional* [11]. Consiste en tratar las integrales en un espacio d -dimensional para más tarde tomar el límite de d tendiendo a nuestra dimension original, comúnmente $d \rightarrow 4$. Las ventajas de este método sobre el resto mencionado es su eficiencia computacional y su compatibilidad con un mayor número de simetrías.

$$\int_0^\infty \frac{d^4 p}{(p^2 + m^2)^n} \rightarrow \int_0^\infty \frac{d^d p}{(p^2 + m^2)^n}.$$

Integrales que divergen para un d entero, podrán dar resultados finitos para un d no entero. En otras palabras; la regularización dimensional consiste en realizar una especie de *continuación analítica en la dimensión*.

$$\int d^d q \frac{q^v}{(q^2 + s)^n} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dq \frac{q^{d-1+v}}{(q^2 + s)^n} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{2} s^{\frac{v+d}{2}-n} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2})\Gamma(n-\frac{v+d}{2})}{\Gamma(n)}. \quad (1.1)$$

Esta expresión (1.1) será la base para resolver todas las integrales que nos iremos encontrando a medida que se avance en los cálculos del problema principal. Puede encontrarse su resolución completa en las secciones dedicadas a (1.4.1) y (1.4.2) justo debajo.

Fijarse que en caso de que $n - \frac{v+d}{2}$ se trate de un número negativo no entero, nuestra expresión convergerá al estar definida la función $\Gamma(x)$. Si este número además de negativo es entero, nuestro resultado diverge, así como la integral original.

En estos casos, podemos ver como la divergencia se manifiesta como un polo de orden 1 al aplicar el siguiente desarrollo:

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right\}.$$

Donde $\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma$, siendo $\gamma = \psi_1(1) = 0,577$ la constante de Euler-Mascheroni. En caso de trabajar con $v = 0$ y $d = 4 + \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\Gamma(n - d/2) = \Gamma(n - 2 + \epsilon/2) = \frac{(-1)^{2-n}}{(2-n)!} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \psi(3-n) + O(\epsilon) \right\}.$$

Donde ψ es la derivada logarítmica de la función gamma o función digamma.

A continuación resolveré las integrales generales que llevan a (1.1), base de todo el resto de integrales que han ido dando lugar en este trabajo.

1.4.1. Integral sobre la normal euclidea

$$\int_0^\infty \frac{l^v}{(l^2 + s)^n} dl. \quad (1.2)$$

Hagamos el siguiente cambio de variable:

$$l^2 = xs, \quad 2l dl = s dx.$$

$$dl = \frac{s dx}{2l} = \frac{dx}{2} \sqrt{\frac{s}{x}}.$$

La integral toma el siguiente aspecto:

$$\int_0^\infty \frac{(sx)^{\frac{v}{2}}}{(sx+s)^n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{x}} dx = \frac{1}{2} s^{\frac{v+1}{2}-n} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{v-1}{2}}}{(x+1)^n}.$$

Trabajaré con la función compleja $f(z)$:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{v-1}{2} \log(z)}}{(z+1)^n}.$$

La función presenta un polo de orden n en $z = -1$. Se escoge un recinto de integración que nos permita echar mano del teorema de los residuos.

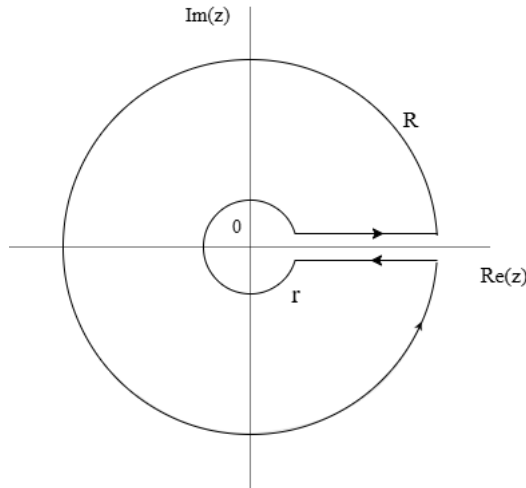


Figura 1.1: Recinto de integración.

$$\int_{C_+} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}_{z_k} f(z) = I_{1+} + I_{2-} + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz$$

El resultado de la integral que nos interesa, se recuperará una vez hagamos el límite de $R \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$ de I_1 , además de tomar la parte real.

$$I_{1+} + I_{2-} = \int_{0+r}^R \frac{e^{\frac{v-1}{2}(\log|z|+i0)}}{(z+1)^n} dz + \int_R^{0+r} \frac{e^{\frac{v-1}{2}(\log|z|+i2\pi)}}{(z+1)^n} dz = (1 - e^{i2\pi \frac{v-1}{2}}) \int_{0+r}^R \frac{e^{\frac{v-1}{2}(\log|z|+i0)}}{(z+1)^n} dz.$$

Teniendo en cuenta que $e^{i\pi} = -1$, llegamos a que $I_{1+} + I_{2-} = (1 + e^{i\pi v}) I_{1+}$.

Recurriendo a los debidos lemas de integración, podemos ver que la contribución de las integrales de las circunferencias es cero.

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} [\lim_{r \rightarrow 0} I_1] = \frac{1}{(1 + e^{i\pi v})} 2\pi i \text{Res}_{-1} f(z).$$

La expresión general para el cálculo de un polo de orden m es:

$$Res_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}.$$

Necesitamos la derivada $(n-1)$ ésima de $g(z) = (z-z_0)^m f(z) = z^{\frac{v-1}{2}}$. Denotando $\alpha = \frac{v-1}{2}$:

$$\frac{dz^\alpha}{dz} = \alpha z^{\alpha-1}; \quad \frac{d^2 z^\alpha}{dz^2} = \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2} \dots \rightarrow \frac{d^k z^\alpha}{dz^k} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))z^{\alpha-k}$$

En términos de la función $\Gamma(x) = (x-1)! \rightarrow \frac{d^k z^\alpha}{dz^k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)z^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$.

Sustituyendo en nuestro caso por $k = n-1$ y teniendo en cuenta que $\log(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$:

$$Res_{-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\Gamma(\alpha+1)e^{(\alpha-n+1)\log(z)}}{\Gamma(\alpha-n+2)} = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{v+3}{2}-n)} e^{i\pi(\frac{v+1}{2}-n)}.$$

Utilizando este resultado:

$$I = \operatorname{Re} \left(2\pi i \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{v+3}{2}-n)} \frac{e^{i\pi(\frac{v+1}{2}-n)}}{(1+e^{i\pi v})} \right).$$

Podemos simplificar el resultado teniendo en cuenta que $e^{i\pi/2} = i$ y $e^{i\pi n} = (-1)^n$, ya que $n \in \mathbb{Z}$.

$$2\pi i^2 \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{v+3}{2}-n)} \frac{e^{i\frac{v\pi}{2}(-1)^n}}{(1+e^{i\pi v})} = 2\pi \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{v+3}{2}-n)} \frac{e^{i\frac{v\pi}{2}(-1)^{n+1}}}{(1+e^{i\pi v})} = 2\pi(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{v+3}{2}-n)} \frac{\cos(\pi v/2) + i \sin(\pi v/2)}{(1+\cos(\pi v)) + i \sin(\pi v)}.$$

Desarrollemos los términos de senos y cosenos:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\pi v/2) + i \sin(\pi v/2)}{(1+\cos(\pi v)) + i \sin(\pi v)} &= \frac{\cos(\pi v/2) + i \sin(\pi v/2)}{(1+\cos(\pi v)) + i \sin(\pi v)} \frac{(1+\cos(\pi v)) - i \sin(\pi v)}{(1+\cos(\pi v)) + i \sin(\pi v)} \\ &= \frac{\cos(\pi v/2) + \cos(\pi v/2) \cos(\pi v) + \sin(\pi v/2) \sin(\pi v)}{(1+\cos(\pi v))^2 + \sin(\pi v)^2} \\ &+ \frac{i(\sin(\pi v/2)(1+\cos(\pi v)) - \sin(\pi v/2) \cos(\pi v/2))}{(1+\cos(\pi v))^2 + \sin(\pi v)^2}. \end{aligned}$$

Tomando únicamente la parte real, y reconociendo el coseno del ángulo diferencia: $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, llegamos a que:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\frac{v\pi}{2}}}{1+e^{i\pi v}} \right) = \frac{2 \cos(\pi v/2)}{1+\cos(\pi v)^2 + \sin(\pi v)^2 + 2 \cos(\pi v)} = \frac{\cos(\pi v/2)}{1+\cos(\pi v)}.$$

Utilizando la siguiente propiedad de la función gamma: $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$, e identificando $a = n - \frac{v+1}{2}$ podemos desarrollar el denominador. Dado que n es entero:

$$\sin(\pi(n - \frac{v}{2}) - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\pi n - \pi \frac{v}{2}) = (-1)^{n+1} \cos(\pi \frac{v}{2}).$$

Los π se cancelan, y el $(-)$ está elevado siempre a una potencia par sin importar el valor de n .

$$I = (-1)^{2n+2} 2 \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})\Gamma(n - \frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)} \frac{\cos(\pi v/2) \cos(\pi v/2)}{1+\cos(\pi v)} = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})\Gamma(n - \frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)} \frac{2 \cos(\pi v/2) \cos(\pi v/2)}{1+\cos(\pi v)}.$$

Nótese que: $\cos(2\theta) = 2 \cos(\theta)^2 - 1$ Por tanto, $\frac{\cos(\theta)^2}{1+\cos(2\theta)} = 1/2$.

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{v-1}{2}}}{(x+1)^n} = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})\Gamma(n - \frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)}.$$

El valor final es:

$$\int_0^\infty \frac{l^v}{(l^2+s)^n} dl = \frac{1}{2} s^{\frac{v+1}{2}-n} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{v-1}{2}}}{(x+1)^n} = \frac{1}{2} s^{\frac{v+1}{2}-n} \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})\Gamma(n - \frac{v+1}{2})}{\Gamma(n)}. \quad (1.3)$$

1.4.2. Integral angular

Partamos de la generalización de las coordenadas esféricas para n dimensiones.

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\varphi_1), \\ x_2 &= r \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2), \\ x_3 &= r \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_3), \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= r \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \dots \sin(\varphi_{n-2}) \cos(\varphi_{n-1}), \\ x_n &= r \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \dots \sin(\varphi_{n-2}) \sin(\varphi_{n-1}). \end{aligned}$$

El objetivo será hallar una relación entre el determinante del Jacobiano para dimensión n , $|J_n|$, y el de dimensión $n-1$, $|J_{n-1}|$. Es importante fijarse que en el caso de dimensión $n-1$, la coordenada x_{n-1} es distinta respecto a la del caso mostrado anteriormente.

$$x_{n-1} = r \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \dots \sin(\varphi_{n-3}) \sin(\varphi_{n-2}).$$

Esto será importante más adelante, cuando se necesite relacionar el determinante de dos matrices con el del J_{n-1} . Introduciendo la siguiente notación: $\cos(\varphi_i) = c_i$ y $\sin(\varphi_i) = s_i$:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad J_{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{n-2}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_{n-2}}{\partial \varphi_{n-2}} \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \varphi_{n-2}} \end{pmatrix}.$$

Desarrollaremos $|J_n|$ por su última columna. $|J_n| = \sum_{i=n, n-1} a_{in} (-1)^{i+n} \det B_{in}$. Donde B_{in} es el elemento de matriz tras eliminar la fila i -ésima y columna n -ésima. El sumatorio solo tendrá dos términos, debido a que el resto de coeficientes son nulos.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ -rs_1 \dots s_{n-1} \\ rs_1 \dots c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ a_{n-1, n} \\ a_{n, n} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, las matrices reducidas son las siguientes:

$$B_{n, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \varphi_{n-2}} \end{pmatrix}, \quad B_{n-1, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_{n-2}} \end{pmatrix}.$$

La expresión del determinante es

$$\begin{aligned} |J_n| &= rs_1 \dots s_{n-2} c_{n-1} |B_{n, n}| + (-1)(-rs_1 \dots s_{n-2} s_{n-1} |B_{n-1, n}|) \\ &= rs_1 \dots s_{n-2} (|B_{n, n}| c_{n-1} + |B_{n-1, n}| s_{n-1}). \end{aligned}$$

Como ya se adelanto al comienzo de la sección, es hora de relacionar el determinante de las matrices B con el de J_{n-1} . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}(x_{n-1})_{d=n} &= r s_1 s_2 \dots s_{n-2} c_{n-1} = (x_{n-1})_{d=n-1} * c_{n-1}, \\ (x_n)_{d=n} &= r s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_{n-1} = (x_{n-1})_{d=n} * t_{n-1} = (x_{n-1})_{d=n-1} * s_{n-1},\end{aligned}$$

y que entonces, la relación entre las derivadas parciales de los elementos de matriz se relacionan como

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial \varphi_j}\right)_{d=n} = r s_1 s_2 \dots c_j s_{n-1} = \left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \varphi_j}\right)_{d=n} * t_{n-1} = \left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \varphi_j}\right)_{d=n-1} * s_{n-1},$$

conseguiamos dar con las expresiones resultantes:

$$\begin{aligned}|B_{n,n}| &= c_{n-1} |J_{n-1}|, \\ |B_{n-1,n}| &= s_{n-1} |J_{n-1}|.\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados en la ecuación anterior, la relación del jacobiano para $d = n$ con el de $d = n - 1$ es:

$$|J_n| = |J_{n-1}| (c_{n-1}^2 + s_{n-1}^2) r \prod_{i=1}^{n-2} s_i = |J_{n-1}| r \prod_{i=1}^{n-2} s_i. \quad (1.4)$$

Si calculamos el Jacobiano en dos dimensiones (coordenadas polares); $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, el resultado será $J = |r \cos^2(\theta) - (-r \sin^2(\theta))| = r$. Trabajando en coordenadas esféricas con tres dimensiones; $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$, el Jacobiano toma la forma $J = r^2 \sin(\theta)$.

Propongamos la expresión

$$|J_n| = r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} s_i^{n-1-i}. \quad (1.5)$$

Tanto para dimensión dos como para dimensión tres (los casos anteriores), recuperamos el resultado de verdad. Para $n = 1$, nos devuelve $J = 1$, como se espera. Si lo suponemos correcto para una dimensión k , veamos que ocurre cuando trabajamos en dimensión $k + 1$ y sustituimos en (7):

$$|J_{k+1}| = |J_k| r \prod_{i=1}^{n-1} s_i = r r^{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} s_i \prod_{i=1}^{k-2} s_i^{k-1-i} = r^k \prod_{i=1}^{k-1} s_i^{k-i}.$$

Recuperamos el resultado propuesto.

Ahora el objetivo será hallar la integral en ángulos de un diferencial de volumen en n dimensiones:

$$dV = r^{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} s_i^{n-1-i} dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1}.$$

Integrando el diferencial del volumen en todo nuestro espacio hallaremos el volumen que buscamos.

$$V = \int_0^R r^{n-1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \int_0^\pi \prod_{i=1}^{n-2} \sin(\varphi_i)^{n-1-i} d\varphi_i.$$

La integral en $d\varphi_{n-1}$ aportará un factor 2π . Para resolver las integrales de los senos, dividiremos el intervalo, obteniendo dos veces la integral desde 0 a $\frac{\pi}{2}$. Además, como las variables de integración son independientes, el producto de los senos se convierte en el producto de

integrales. Volveré a la notación habitual para que no haya confusión a la hora de resolverlas.

$$\int_0^\pi \sin(\varphi_i)^{n-1-i} d\varphi_i = 2 \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi_i)^{n-1-i} d\varphi_i.$$

Mediante el siguiente cambio de variable: $t = \sin^2(\varphi_i) \rightarrow d\varphi_i = \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$ Recuperaremos la expresión de la función beta:

$$I_i = \int_0^1 t^{\frac{n-i}{2}-1} (1-t)^{-1/2} dt = B\left(\frac{n-i}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n-i}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-i}{2} + \frac{1}{2})}.$$

A la hora de contribuir en la integral, tendremos un factor $\pi^{\frac{n-2}{2}}$ debido a las $\Gamma(1/2)$. En cuanto al productorio, los términos en el numerador se irán cancelando con los del denominador en el siguiente valor de i , que se mueve desde 1 hasta $(n-2)$. Sobrevive solamente una $\Gamma(n/2)$ que sale en el denominador cuando $i = 1$ y una $\Gamma(1) = 1$ del numerador cuando $i = n-2$. La integral angular es por tanto:

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (1.6)$$

Podemos terminar de calcular el volumen de una esfera de radio R en dimensión n , simplemente resolviendo el término radial adicional. Gracias a esto, podemos comprobar que recuperamos los resultados conocidos para dimensión dos y tres, y garantizar que nuestro resultado es correcto.

$$V = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^R r^{n-1} dr = \frac{R^n 2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{R^n \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.$$

Si $n = 2$, tenemos que $V = \pi R^2$, evidentemente se trata del área de un círculo. Si $n = 3$, entonces $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, siendo este el volumen conocido de una esfera tridimensional.

Capítulo 2

Renormalización de la interacción NN (1S_0) por intercambio de un pion en presencia de interacciones de contacto

A continuación los potenciales empleados en el paper original son

$$V_\pi(p, p') = \frac{-2m\alpha_\pi}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{p^2 + p'^2 - 2pp'x + m_\pi^2} = \frac{m\alpha_\pi}{\pi} \frac{1}{pp'} \log \frac{p_-^2 + m_\pi^2}{p_+^2 + m_\pi^2}, \quad (2.1)$$

$$V_s(p, p') = g_0 + g_1(p^2 + p'^2). \quad (2.2)$$

siendo $p_\pm = p \pm p'$ y $\alpha_\pi = \frac{g_A^2 m_\pi^2}{16\pi f_\pi^2}$. Aquí $g_A = 1,25$ se trata de la constante de acoplamiento axial, $m_\pi = 138$ MeV la masa del pion y $f_\pi = 93$ MeV su constante de decaimiento débil.

Las constantes del potencial de intercambio de un pion se suponen conocidas, dadas por otros experimentos. Supondremos así α_π como un parámetro conocido, y $m = 469,46$ MeV se trata de la masa reducida del sistema NN en cuestión.

Por otro lado, las constantes de corto alcance no están determinadas en un comienzo. Resaltar que V_π no viene expresado de la forma habitual para el potencial de Yukawa en el espacio de momentos, dado que se ha redefinido el potencial una vez ha sido ya integrada la contribución angular. Esto hace más sencillo realizar la integral en todo el espacio, pues simplemente se precisa del término radial.

La ecuación de Lippmann-Schwinger para la matriz de scattering total viene dada por:

$$T(E; p, p') = V(p, p') + \int_{-\infty}^{\infty} dq q^2 \frac{V(p, q)T(E; q, p')}{2mE - q^2 + i\epsilon}. \quad (2.3)$$

Siendo $V = V_\pi + V_s$. Aclarar que en la mayoría de los cálculos se emplea la notación $T(p, p'; k) \equiv T(p, p')$.

La normalización de la amplitud de probabilidad es tal que para $p = p' = \sqrt{2mE} = k$ (on-shell), se relaciona con el defasaje $\delta(k)$ mediante:

$$T(k, k; k) = -\frac{2}{\pi} \frac{e^{2i\delta(k)} - 1}{2ik}. \quad (2.4)$$

Se llamará T_π a la matriz de scattering para V_π en solitario. Esta cumple la misma LSE que en el caso total pero sin la presencia del potencial a cortas distancias. T_s describe el

scattering entre ondas distorsionadas.

$$T_\pi = V_\pi + V_\pi G_0 T_\pi, \quad (2.5)$$

$$T_s = V_s + V_s G_\pi T_s = V_s + V_s G_0 T_s + V_s G_0 T_\pi G_0 T_s. \quad (2.6)$$

Se trabajará en notación de operador para esta primera parte del desarrollo. G_0 se refiere a la función de Green libre para un nucleón, representado por

$$\langle q' | G_0(E + i\epsilon) | q \rangle = \frac{1}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \delta(q - q').$$

Puesto que la proyección angular han sido previamente tenidas en cuenta al proyectar en onda 1S_0 .

Lo primero será proponer una solución para T que satisfaga su ecuación correspondiente.

$$T = T_\pi + (I + T_\pi G_0) T_s (I + G_0 T_\pi) = T_\pi + T_s + T_\pi G_0 T_s + T_s G_0 T_\pi + T_\pi G_0 T_s G_0 T_\pi.$$

Insertándolo en (2.3):

$$\begin{aligned} T &= V + V G_0 T = (V_\pi + V_s) + (V_\pi + V_s) G_0 (T_\pi + (I + T_\pi G_0) T_s (I + G_0 T_\pi)) \\ &= (V_\pi + V_s) + (V_\pi + V_s) G_0 (T_\pi + T_s + T_\pi G_0 T_s + T_s G_0 T_\pi + T_\pi G_0 T_s G_0 T_\pi) \\ &= V_\pi + V_s + V_\pi G_0 T_\pi + V_\pi G_0 T_s + V_\pi G_0 T_\pi G_0 T_s + V_\pi G_0 T_s G_0 T_\pi + V_\pi G_0 T_\pi G_0 T_s G_0 T_\pi \\ &\quad + V_s G_0 T_\pi + V_s G_0 T_s + V_s G_0 T_\pi G_0 T_s + V_s G_0 T_s G_0 T_\pi + V_s G_0 T_\pi G_0 T_s G_0 T_\pi. \end{aligned}$$

Sacando factor común a los distintos factores $G_0 T_i$:

$$\begin{aligned} T &= (V_\pi + V_\pi G_0 T_\pi) + (V_s + V_s G_0 T_s + V_s G_0 T_\pi G_0 T_s) + (V_\pi + V_\pi G_0 T_\pi) G_0 T_s \\ &\quad + (V_s + V_s G_0 T_s + V_s G_0 T_\pi G_0 T_s) G_0 T_\pi + (V_\pi + V_\pi G_0 T_\pi) G_0 T_s G_0 T_\pi \\ &= T_\pi + T_s + T_\pi G_0 T_s + T_s G_0 T_\pi + T_\pi G_0 T_s G_0 T_\pi. \end{aligned}$$

Comprobamos que se trata de una solución posible al cumplirse (2.5) y (2.6) simultáneamente.

Partiendo de la definición de T_s .

$$T_s(p, p') = V_s(p, p') + \int_0^\infty dq q^2 \frac{V_s(p, q) T_s(q, p')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} + \int_0^\infty dq dq' \frac{q^2 q'^2 V_s(p, q) T_\pi(q, q') T_s(q', p')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)},$$

es posible reducirlo a una expresión del tipo:

$$T_s(p, p') = \alpha + \beta(p^2 + p'^2) + \gamma p^2 p'^2.$$

Veámoslo con detalle, pero antes, tanto para la solución de los coeficientes α, β, γ , como para el resto de los cálculos, conviene introducir en este momento tres integrales importantes.

$$I_n = \int_0^\infty dq \frac{q^{n+2}}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)}, \quad J_n = \int_0^\infty \frac{dq dq' q^a q'^b T_\pi(q, q')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)}, \quad L_n = \int_0^\infty \frac{dq q^{n+2} T_\pi(q, k)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)}.$$

Insertando T_s en la ecuación de Lippman-Schwinger:

$$\begin{aligned}
T_s(p, p') &= g_0 + g_1 p^2 + g_1 p'^2 + g_0 \int_0^\infty \frac{dq q^2 (\alpha + \beta p'^2 + \beta q^2 + \gamma p'^2 q^2)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \\
&+ g_1 p^2 \int_0^\infty \frac{dq q^2 (\alpha + \beta p'^2 + \beta q^2 + \gamma p'^2 q^2)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} + g_1 \int_0^\infty \frac{dq q^4 (\alpha + \beta p'^2 + \beta q^2 + \gamma p'^2 q^2)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \\
&+ g_0 \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 T_\pi(q, q') (\alpha + \beta q'^2 + \beta p'^2 + \gamma q'^2 p'^2)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \\
&+ g_1 p^2 \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 T_\pi(q, q') (\alpha + \beta q'^2 + \beta p'^2 + \gamma q'^2 p'^2)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \\
&+ g_1 \int_0^\infty \frac{dq dq' q^4 q'^2 T_\pi(q, q') (\alpha + \beta q'^2 + \beta p'^2 + \gamma q'^2 p'^2)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)},
\end{aligned}$$

podemos reconocer las expresiones de las integrales I_n y J_n recientemente presentadas.

$$\begin{aligned}
T_s &= (g_0 + \alpha g_0 K_0 + \beta g_0 K_2 + g_1 \alpha K_2 + g_1 \beta K_4) + p^2 p'^2 (g_1 \beta K_0 + g_1 \gamma K_2) \\
&+ p^2 (g_1 + g_1 \alpha K_0 + g_1 \beta K_2) + p'^2 (g_1 + g_0 \beta K_0 + g_0 \gamma K_2 + g_1 \beta K_2 + g_1 \gamma K_4).
\end{aligned}$$

Se ha utilizado que $K_n = I_n + J_n$. Igualando dicha expresión a la propuesta nos encontramos con un sistema de tres ecuaciones para tres incógnitas:

$$\begin{aligned}
g_0 + \alpha g_0 K_0 + \beta g_0 K_2 + g_1 \alpha K_2 + g_1 \beta K_4 &= \alpha. \\
g_1 \beta K_0 + g_1 \gamma K_2 &= \gamma. \\
g_1 + g_0 \beta K_0 + g_0 \gamma K_2 + g_1 \beta K_2 + g_1 \gamma K_4 &= g_1 + g_1 \alpha K_0 + g_1 \beta K_2 = \beta.
\end{aligned}$$

La solución al sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{g_0 + g_1^2 K_4}{\Delta}, \\
\beta &= \frac{g_1 - g_1^2 K_2}{\Delta}, \\
\gamma &= \frac{g_1^2 K_0}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Siendo el denominador

$$\Delta = 1 - g_0 K_0 - 2g_1 K_2 + g_1^2 K_2^2 - g_1^2 K_0 K_4.$$

Empezaré por resolver la primera de las integrales.

$$I_n = \int_0^\infty dq \frac{q^{n+2}}{k^2 - q^2 + i\epsilon} = - \int_0^\infty dq \frac{q^{n+2}}{q^2 + (-(k^2 + i\epsilon))}. \quad (2.7)$$

Nos interesarán las potencias pares ($n = 0, 2, 4, \dots$), por lo que reescribiré la integral de la siguiente forma:

$$I_{2n} = - \int_0^\infty dq \frac{q^{2n+2}}{q^2 + (-(k^2 + i\epsilon))},$$

donde ahora n puede ser cualquier número entero. Aplicando el resultado (1.3):

$$I_{2n} = (-1) \frac{(-k^2 - i\epsilon)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \frac{\Gamma(\frac{2n+3}{2}) \Gamma(-(\frac{2n-1}{2}))}{\Gamma(1)} = (-1)^{n+1} k^{2n} \frac{\pi}{\sin(\pi(n + \frac{3}{2}))} \frac{(-k^2 - i\epsilon)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Nos encontramos con la raíz cuadrada de un número negativo, la cual tendrá por resultado $\pm ik$, dando dos posibilidades. Nuestra función presenta singularidades cuando el denominador se hace cero. Por definición $q^2 \geq 0$, y $0 < \epsilon \ll 1$, por lo que solo se anulará cuando contemos con la raíz negativa. El corte de ramificación será un corte izquierdo. Es decir, $(-k^2 - i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = -ik$ por acercarse por debajo del corte.

Dándonos cuenta de que $\sin(\pi(n + \frac{3}{2})) = (-1)^{n+1}$:

$$I_{2n} = (-1)^{n+1} k^{2n} (-1)^{n+1} \frac{(-1)i\pi k}{2} = -ik^{2n} \frac{k\pi}{2}.$$

Por conveniencia, se vuelve a renombrar como originalmente.

$$I_n = -i \frac{k^{n+1}\pi}{2}. \quad (2.8)$$

Sin olvidar que n solo puede ser par. Este resultado será necesario a la hora de encontrar reglas de recurrencia para las otras dos integrales, las cuales se presentarán a su debido tiempo.

Nos interesará conocer T para el caso particular on-shell.

$$\begin{aligned} T(k, k) &= T_\pi(k, k) + T_s(k, k) + T_\pi(k, q)G_0(q)T_s(q, k) + T_s(k, q)G_0(q)T_\pi(q, k) \\ &+ T_\pi(k, q)G_0(q)T_s(q, q')G_0(q')T_\pi(q', k). \end{aligned}$$

Desarrollaré los últimos términos individualmente. Las integrales L_n son fácilmente identificables, y podemos expresar el resultado en función de estas.

$$\begin{aligned} T_\pi(k, q)G_0(q)T_s(q, k) &= \int_0^\infty dq q^2 \frac{T_\pi(k, q)(\alpha + \beta(q^2 + k^2) + \gamma k^2 q^2)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \\ &= \alpha L_0 + \beta k^2 L_0 + \beta L_2 + \gamma k^2 L_2, \\ T_s(k, q)G_0(q)T_\pi(q, k) &= \int_0^\infty dq q^2 \frac{(\alpha + \beta(k^2 + q^2) + \gamma q^2 k^2)T_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \\ &= \alpha L_0 + \beta k^2 L_0 + \beta L_2 + \gamma k^2 L_2, \\ T_\pi(k, q)G_0(q)T_s(q, q')G_0(q')T_\pi(q', k) &= \int_0^\infty dq dq' q^2 q'^2 \frac{T_\pi(k, q)(\alpha + \beta(q^2 + q'^2) + \gamma q^2 q'^2)T_\pi(k, q')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \\ &= \alpha L_0^2 + 2\beta L_0 L_2 + \gamma L_2^2. \end{aligned}$$

Juntando todo y reescribiendo T :

$$T(k) = T_\pi(k) + T_s(k) + 2\{(\alpha + \beta k^2)L_0 + (\beta + \gamma k^2)L_2\} + \alpha L_0^2 + 2\beta L_0 L_2 + \gamma L_2^2.$$

A partir de este momento adoptaré la notación $T_\pi(k, k; k) \equiv T_\pi(k)$.

Lo próximo que haré sera escribir de la expresión para el potencial de Yukawa en el espacio de momentos.

$$V_\pi(p, p') = -g'^2 \frac{1}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m_\pi^2}.$$

La integral en el espacio total viene definida por:

$$\begin{aligned} \int d^3r &= 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty r^2 dr, \end{aligned}$$

con la clara sustitución de $x = \cos \theta$.

Si ahora realizamos la integral a todo el espacio del potencial, y redefinimos V_π como la propia contribución de la integral angular. (Notar que $\vec{p} \cdot \vec{p}' = pp' \cos \theta$)

$$V_\pi = \frac{-2m\alpha_\pi}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\vec{p}^2 + \vec{p}'^2 - 2pp'x + m_\pi^2}.$$

Quedará por conocer

$$\int_0^\infty dp p^2 V_\pi(p, p').$$

Para ello vamos a realizar la siguiente integral en regularización dimensional:

$$\int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m_\pi^2}.$$

Estamos trabajando en todo el espacio, por ende, la integral no puede depender finalmente de p' . Haré una traslación de forma que llamamos $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$.

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{d^3 q}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_3 \int_0^\infty \frac{dq \cdot q^2}{q^2 + m_\pi^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\pi^{3/2} m_\pi \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{-1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}) 2\Gamma(1)}.$$

Bajo el mismo procedimiento:

$$I_\pi = \frac{-2m\alpha_\pi}{\pi} \int dp p^2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{(\vec{p} - \vec{p}')^2 + m_\pi^2} = \frac{-2m\alpha_\pi}{\pi} \cdot \frac{m_\pi \Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{-1}{2})}{2} \int_{-1}^1 dx.$$

Sustituyendo $\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}/2$ y $\Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$,

$$\boxed{\int_0^\infty dq q^2 V_\pi(q, q') = 2m\alpha_\pi m_\pi.} \quad (2.9)$$

Tal como se adelantó, es independiente de p' y depende solo de m_π .

Análogamente, podemos calcular la integral

$$\int_0^\infty dq q^4 V_\pi(q, p').$$

A la hora de realizar la traslación anterior tendremos dos términos adicionales debido al cuadrado del numerador.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dq q^4 V_\pi(q, p') &= -\frac{2m\alpha_\pi}{\pi} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty dq \frac{q^2 (\vec{q} + \vec{p}')^2}{\vec{q}^2 + m_\pi^2} \\ &= -\frac{2m\alpha_\pi}{\pi} \int_{-1}^1 dx \left(\int_0^\infty dq \frac{q^4}{q^2 + m_\pi^2} + p'^2 \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m_\pi^2} + 2 \int_0^\infty dq \frac{q^2 \vec{q} \cdot \vec{p}'}{q^2 + m_\pi^2} \right) \\ &= -\frac{2m\alpha_\pi}{\pi} 2 \left(\frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(\frac{-3}{2}) m_\pi^3}{2} + \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(\frac{-1}{2}) p'^2 m_\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{2m\alpha_\pi}{\pi} (\pi m_\pi^3 - \pi m_\pi p'^2) \\ &= 2m\alpha_\pi m_\pi (p'^2 - m_\pi^2). \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^\infty dq q^4 V_\pi(q, q') = 2m\alpha_\pi m_\pi (q'^2 - m_\pi^2).} \quad (2.10)$$

Destacar que la tercera integral es nula. Basta con ver, por ejemplo, el caso en que \vec{p}' tenga dirección \hat{z} . En este caso tendremos un integrando impar integrado en todo el espacio, dando una contribución nula de la integral.

Para recopilar resultados podemos definir:

$$I_\pi^n(q'^2) = \int dq q^{2+2n} V_\pi(q, q').$$

Donde (2.9) corresponde al caso $n = 0$ y (2.10) al de $n = 1$. (Notar que $I_\pi^1 = I_\pi^0(q'^2 - m_\pi^2)$).

Podemos ir más allá, y relacionar la integral L_2 con L_0 aprovechando este último resultado. Representando ahora $G_0(p) = \int_0^\infty dp \frac{p^2}{k^2 - p^2 + i\epsilon}$:

$$L_2 = \int_0^\infty \frac{dq q^4 V_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} + \int_0^\infty \frac{dq q^4 V_\pi(k, p)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \int_0^\infty \frac{dp p^2 T_\pi(p, q)}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)},$$

y aplicando la igualdad $\frac{q^4}{(k^2 - q^2)} = \frac{k^2 q^2}{(k^2 - q^2)} - q^2$, reescribimos las dos contribuciones como:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dq q^4 V_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} &= \int_0^\infty k^2 \frac{dq q^2 V_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} - \int_0^\infty dq q^2 V_\pi(k, q), \\ \int_0^\infty \frac{dq q^4 V_\pi(k, p)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \int_0^\infty \frac{dp p^2 T_\pi(p, q)}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)} &= \int_0^\infty k^2 \frac{dq q^2 V_\pi(k, p)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} \frac{dp p^2 T_\pi(p, q)}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)} \\ &\quad - \int_0^\infty dq q^2 V_\pi(k, p) \int_0^\infty \frac{dp p^2 T_\pi(p, q)}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)}. \end{aligned}$$

la expresión que resulta es

$$\begin{aligned} L_2(k) &= k^2 \int_0^\infty \frac{dq q^2 (V_\pi(k, q) + V_\pi(k, p) G_0(p) T_\pi(p, q))}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} - \int_0^\infty dq q^2 V_\pi(k, q) \\ &\quad - \int_0^\infty dq q^2 V_\pi(k, p) \int_0^\infty \frac{dp p^2 T_\pi(p, q)}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)}. \end{aligned}$$

Escribiendo $k^2 = 2mE$ e identificando (2.9).

$$L_2(k) = (2mE - 2m\alpha_\pi m_\pi) L_0(k) - 2m\alpha_\pi m_\pi. \quad (2.11)$$

Se puede hacer un desarrollo análogo para las integrales

$$J_n = \int_0^\infty \frac{dq dq' q^a q'^b T_\pi(q, q')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)},$$

donde (a, b) se corresponde a $(4, 4)$, $(4, 2)$, $(2, 2)$ para $n = 0, 2, 4$ respectivamente.

$$J_2 = \int_0^\infty \frac{dq dq' q^4 q'^2 V_\pi(q, q')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} + \int_0^\infty \frac{dq dq' q^4 q'^2 V_\pi(q, p)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)} T_\pi(p, q').$$

Expresando nuevamente $\frac{q^4}{(k^2 - q^2)} = \frac{k^2 q^2}{(k^2 - q^2)} - q^2$ obtenemos un total de cuatro términos. Fijándonos en la primera integral:

$$\int_0^\infty \frac{dq dq' q^4 q'^2 V_\pi(q, q')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} = \int_0^\infty k^2 \frac{dq dq' q^2 q'^2 V_\pi(q, q')}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} - \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 V_\pi(q, q')}{(k^2 - q'^2 + i\epsilon)}.$$

y análogamente para la segunda:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dq dq' q^4 q'^2 V_\pi(q, p)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)} T_\pi(p, q') = \\ & \int_0^\infty k^2 \frac{dq dq' q^2 q'^2 V_\pi(q, p)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)} T_\pi(p, q') \\ & - \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 V_\pi(q, p)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)} T_\pi(p, q'). \end{aligned}$$

$G_0(p)$, recordemos, actúa como $\int_0^\infty \frac{dp p^2}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)}$. Al sacar factor común daremos con:

$$\begin{aligned} J_2 &= k^2 \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 (V_\pi + V_\pi G_0 T_\pi)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} - \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 V_\pi}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \\ &- \int_0^\infty dq q^2 V_\pi \int_0^\infty \frac{dp dq' p^2 q'^2 T_\pi}{(k^2 - p^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} \\ &= \left(k^2 - \int_0^\infty dq q^2 V_\pi \right) \cdot J_0 - \int_0^\infty dq q^2 V_\pi \cdot I_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo (2.9) y teniendo en cuenta que $k^2 = 2mE$ llegamos a la expresión final. El desarrollo es análogo con J_4 y J_2 , permitiendo relacionar dichas integrales con J_0 , la cual presenta una divergencia de tipo logarítmica y puede ser resuelta numéricamente mediante una substracción.

$$\boxed{\frac{J_n(E)}{2m} = (E - m_\pi \alpha_\pi) J_{n-2}(E) + i \frac{\pi}{2} m_\pi \alpha_\pi k^{n-1}.} \quad (2.12)$$

Aplicando dicho resultado damos con:

$$\begin{aligned} T(k) &= T_\pi(k) + T_s(k) + 2\alpha L_0 + 2\beta k^2 L_0 + 2\beta(k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi) L_0 - 2\beta m\alpha_\pi m_\pi \\ &+ 2\gamma k^2 (k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi) L_0 - 2\gamma k^2 2m\alpha_\pi m_\pi + \alpha L_0^2 + 2\beta L_0^2 (k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi) \\ &- 2\beta L_0 2m\alpha_\pi m_\pi + \gamma(k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi) L_0^2 + \gamma(2m\alpha_\pi m_\pi)^2 - 2\gamma L_0 (k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi) 2m\alpha_\pi m_\pi. \end{aligned}$$

Sacando factor común a $2L_0$ y L_0^2 :

$$\begin{aligned} T(k) &= T_\pi(k) + (\alpha + \beta(k^2 + k^2) + \gamma k^2 k^2 + \gamma(2m\alpha_\pi m_\pi)^2 - 2\gamma k^2 2m\alpha_\pi m_\pi - 2\beta 2m\alpha_\pi m_\pi) \\ &+ 2L_0(\alpha + \beta(k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi + k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi) + \gamma(k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi)(k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi)) \\ &+ L_0^2(\alpha + \beta(k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi + k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi) + \gamma(k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi)^2), \end{aligned}$$

y definiendo $\hat{k}^2 = k^2 - 2m\alpha_\pi m_\pi$:

$$\begin{aligned} T(k) &= T_\pi(k) + (\alpha + \beta(\hat{k}^2 + \hat{k}^2) + \gamma \hat{k}^2 \hat{k}^2) + 2L_0(\alpha + \beta(\hat{k}^2 + \hat{k}^2) + \gamma \hat{k}^2 \hat{k}^2) \\ &+ L_0^2(\alpha + \beta(\hat{k}^2 + \hat{k}^2) + \gamma \hat{k}^2 \hat{k}^2). \end{aligned}$$

Podemos reconocer $T_s(E; \hat{k}, \hat{k})$ en cada factor.

$$T(k) = T_\pi(k) + T_s(E; \hat{k}, \hat{k}) + T_s(E; \hat{k}, \hat{k}) \cdot 2L_0 + T_s(E; \hat{k}, \hat{k}) \cdot L_0^2 = T_\pi(k) + (1 + L_0(k))^2 T_s(E; \hat{k}, \hat{k}).$$

La expresión final para la matriz de scattering completa:

$$\boxed{T(k) = T_\pi(k) + (1 + L_0(k))^2 T_s(E; \hat{k}, \hat{k}) = T_\pi(k) + \frac{(1 + L_0(k))^2}{V_s^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) + i\pi k/2 - (\bar{J}_0(E) - J_0(0))}.} \quad (2.13)$$

Donde se ha utilizado:

$$\begin{aligned} T_s(\hat{k}) &= (1 - V_s(\hat{k})G_0(q) - V_s(\hat{k})G_0(q)T_\pi(q, q')G_0(q'))^{-1}V_s(\hat{k}) \\ &= (V_s(\hat{k})^{-1} - G_0(q) - G_0(q)T_\pi(q, q')G_0(q'))^{-1} = (V_s(\hat{k})^{-1} - I_0 - J_0)^{-1}. \end{aligned}$$

La integral J_0 es logarítmicamente divergente, y solo precisa de una substracción: $\bar{J}_0(E) = J_0(E) - J_0(0)$ es finita y puede ser resuelta numéricamente.

De la ecuación (2.4) podemos obtener la relación entre T y la matriz de scattering. Trabajando on-shell $S(k)$ no es más que el defasaje, y verifica que su modulo es 1.

$$S = 1 - i\pi kT.$$

Notar que no corresponde exactamente a la expresión mostrada al comienzo del trabajo en la introducción teórica. La definición de T depende de convenciones, y puede verse escrita de diferentes maneras.

De la condición de unitariedad

$$SS^\dagger = 1,$$

podemos derivar el teorema óptico que satisface T_π :

$$(1 - ik\pi T)(1 + ik\pi T^\dagger) = 1 = 1 - i\pi kT^\dagger + i\pi kT + (k\pi)^2 TT^\dagger \rightarrow 2ImT = -\pi kTT^\dagger.$$

Y volviendo a nuestra notación habitual, el teorema óptico of-shell es:

$$\frac{T(p_1, p_2) - T^*(p_1, p_2)}{i} = 2ImT_\pi(E; p_1, p_2) = -\pi kT_\pi(p_1, k)T_\pi^*(k, p_2). \quad (2.14)$$

Recordemos nuestra expresión para L_0 :

$$L_0(k) = \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)},$$

que reescribiéndola en función del valor principal de Cauchy:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)} = \mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi(k, q)}{k^2 - q^2} - i\pi k/2T_\pi(k).$$

Denotando $p_1 = k$:

$$2ImT_\pi(E; k, p_2) = -\pi kT_\pi(k, k)T_\pi^*(k, p_2),$$

y ahora $p_2 = k$;

$$2ImT_\pi(E; p_1, k) = -\pi kT_\pi(k, p_1)T_\pi^*(k, k).$$

Como T es una matriz simétrica, podemos integrar e igualar ambas expresiones obtenidas.

$$T_\pi(k)\mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi^*(k, q)}{(k^2 - q^2)} = T_\pi^*(k)\mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2)}.$$

Llegamos al caso en que un número complejo es igual a su conjugado. Es decir, se trata de un número real.

$$l'_0(k) = T_\pi^*(k)\mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2)}.$$

Multiplicando por $T_\pi(k)$ a ambos lados de la igualdad:

$$T_\pi(k)l'_0 = |T_\pi(k)|^2 \mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2)} \rightarrow \mathcal{P} \int_0^\infty dq \frac{q^2 T_\pi(k, q)}{(k^2 - q^2)} = T_\pi(k)l_0, \quad (2.15)$$

damos con que

$$L_0(k) = (l_0(k) - i\pi k/2)T(k). \quad (2.16)$$

Nos será necesario particularizar el teorema óptico al caso on-shell. Esto nos servirá para llegar a una relación entre la parte real e imaginaria de $T_\pi(k, k; k)$. Generalizando para $p_1 = p_2 = k$:

$$2ImT_\pi(k) = -\pi k |T_\pi(k)|^2 \rightarrow ImT_\pi(k) = -\pi k |T_\pi(k)|^2 / 2.$$

El cociente por tanto de la parte real e imaginaria puede reescribirse:

$$\frac{-\pi k ReT_\pi(k)}{ImT_\pi(k)} = \frac{2ReT_\pi(k)}{|T_\pi(k)|^2} = 2Re \frac{T_\pi(k)}{T_\pi(k) \cdot T_\pi^*(k)} = 2ReT_\pi(k)^{-1}. \quad (2.17)$$

Es también posible deducir que

$$Im\bar{J}_0(k) = -\{(\pi k/2)^2 - l_0(l_0 + 2ReT_\pi^{-1}(k))\}ImT_\pi(k), \quad (2.18)$$

siendo l_0 un número real.

Reescribamos nuestra ecuación (2.13) de forma que la unitariedad se vea manifestada a simple vista usando (2.18) y (2.16).

$$\begin{aligned} T(k) &= T_\pi(k) + \frac{(1 + L_0(k))^2}{V_s^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) + i\pi k/2 - (J_0(\bar{E}) - J_0(0))} \\ &= \frac{T_\pi(k)(V_s^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) + i\pi k/2 - ReJ_0(k) - iImT_\pi(k)\{l_0^2 + 2l_0ReT_\pi(k) - (\pi k/2)^2\})}{V_s^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) + i\pi k/2 - ReJ_0(k) - iImT_\pi(k)\{l_0^2 + 2l_0ReT_\pi(k) - (\pi k/2)^2\}} \\ &\quad + \frac{T_\pi(k)\{\frac{1}{T_\pi(k)} + 2l_0 - i\pi k + T_\pi(l_0^2 - (\pi k/2)^2 - i\pi k l_0)\}}{V_s^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) + i\pi k/2 - ReJ_0(k) - iImT_\pi(k)\{l_0^2 + 2l_0ReT_\pi(k) - (\pi k/2)^2\}}. \end{aligned}$$

Por definición la matriz T_π es unitaria, por lo que si conseguimos expresar $T^{-1} = T_\pi^{-1} + \mathbb{R}$, siendo \mathbb{R} un número real garantizamos que T también lo sea.

Por comodidad obviaré la notación de momento on-shell, aunque los cálculos son referidos a dicho caso en específico.

Hemos conseguido una expresión del tipo $T = \frac{T_\pi \alpha}{\beta}$:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_\pi} + \frac{\beta}{T_\pi \alpha} - \frac{1}{T_\pi} = \frac{1}{T_\pi} - \frac{\alpha - \beta}{T_\pi \alpha}.$$

Siendo

$$\begin{aligned} \alpha &= V_s^{-1} + i\pi k/2 - ReJ_0 - iImT_\pi(l_0^2 + 2l_0ReT_\pi - (\pi k/2)^2) + \frac{1}{T_\pi} \\ &\quad + 2l_0 - i\pi k + T_\pi(l_0^2 - (\pi k/2)^2 - i\pi k l_0), \\ \beta &= V_s^{-1} + i\pi k/2 - ReJ_0 - iImT_\pi(l_0^2 + 2l_0ReT_\pi - (\pi k/2)^2). \end{aligned}$$

Gracias al teorema óptico, podemos conocer la parte imaginaria de T_π^{-1} :

$$\frac{1}{T_\pi} = \frac{ReT_\pi - iImT_\pi}{|T_\pi|^2} = ReT_\pi^{-1} + i\pi k/2.$$

Además, nos convendrá expresar el siguiente término de una manera alternativa.

$$\begin{aligned} T_\pi(l_0^2 - (\pi k/2)^2 - i\pi k l_0) &= T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2) - 2l_0 T_\pi(\text{Re}T_\pi^{-1} + i\pi k/2) \\ &= T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2) - 2l_0. \end{aligned}$$

Varios términos cancelarán en el numerador y denominador.

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \text{Re}T_\pi^{-1} - i\pi k/2 + T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2), \\ \alpha &= V_s^{-1} - \text{Re}J_0 + \text{Re}T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2). \end{aligned}$$

Reagrupando todo:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_\pi} - \frac{\text{Re}T_\pi^{-1} - i\pi k/2 + T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2)}{T_\pi(V_s^{-1} - \text{Re}J_0 + \text{Re}T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2))}.$$

Si ahora multiplicamos arriba y abajo por T_π^* , y reconocemos T_π acompañando a ambos términos del numerador.

$$\text{Re}T_\pi^{-1} - i\pi k/2 = \frac{T_\pi^*}{|T_\pi|^2}.$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{1}{T_\pi} - \frac{\frac{T_\pi^*}{|T_\pi|^2}(\frac{T_\pi}{|T_\pi|^2} + T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2))}{V_s^{-1} - \text{Re}J_0 + \text{Re}T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2)} \\ &= \frac{1}{T_\pi} - \frac{\frac{1}{|T_\pi|^2} - (\pi k/2)^2 + l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi^{-1}}{V_s^{-1} - \text{Re}J_0 + \text{Re}T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2)} \\ &= \frac{1}{T_\pi} - \frac{(\text{Re}T_\pi)^2 + l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi^{-1}}{V_s^{-1} - \text{Re}J_0 + \text{Re}T_\pi(l_0^2 + 2l_0 \text{Re}T_\pi - (\pi k/2)^2)}. \end{aligned}$$

Llamando a la cantidad real $g(k) = V_s^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) - \text{Re}J_0(k) + \frac{\text{Im}\bar{J}_0(k)}{\tan \delta_\pi(k)}$ y reconociendo $\tan \delta_\pi(k) = -\frac{\pi k}{2\text{Re}T_\pi^{-1}}$ mediante las relaciones (2.17), (2.18):

$$\boxed{\frac{1}{T(k)} = \frac{1}{T_\pi(k)} - \frac{(l_0(k) + \text{Re}T_\pi^{-1}(k))^2}{\text{Re}T_\pi^{-1}(k) + g(k)}}. \quad (2.19)$$

Hasta este momento, la regularización dimensional nos ha llevado a una reducción drástica de las integrales UV. Nuestro único problema ahora es $J_0(0)$, la cual debería ser absorbida redefiniendo las constantes del potencial V_s , siempre que dichos cambios sean consistentes con los principios de simetría.

Para nuestro caso particular este no es posible dado que no trabajamos a orden mayor a dos. Fijándonos en la ecuación (2.19) y la expresión de $g(k)$ parece natural definir un potencial de contacto normalizado:

$$(V_s^R)^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) = V_s^{-1}(\hat{k}, \hat{k}) - J_0(0),$$

conduciendo a una serie infinita de potencias de \hat{k}^2 . La LSE se basa en la resolución no perturbativa de la amplitud de probabilidad, por lo que en principio también debería incluirse contra-términos infinitos en la amplitud desnuda para que la suma de ambos sea finita [15].

A cada orden de \hat{k}^2 el coeficiente de la serie de contra-términos divergentes está totalmente definido, pero deja su parte finita como una constante arbitraria. Esto deriva a que la función $g(k)$ es una función completamente desconocida por la aparición de divergencias.

La solución que se toma es la siguiente: Para momentos pequeños los operadores con más derivadas tienen menos influencia, por lo que para evitar la pérdida predictiva del modelo basado en coeficientes libres se imponen relaciones entre los de órdenes superiores de la serie de contra-términos a los de la expansión del potencial, de manera que podamos recuperar el comportamiento del modelo a bajas energías sin que afecten demasiado.

Se las relaciona de manera que la amplitud pueda escribirse siguiendo la ecuación (2.19) y satisfaga la unitariedad clásica. En la práctica es equivalente a considerar $J_0(0)$ como un parámetro renormalizado y desconocido. Denotaré como $J_0^R(0)$ a la cantidad ya renormalizada y finita para diferenciarla de la integral divergente.

Tratando el parámetro divergente como una constante renormalizada nos deja ahora con tres parámetros indeterminados a fijar con los datos experimentales: g_0 , g_1 y $J_0^R(0)$.

Capítulo 3

Resolución numérica

Empecemos con la resolución de $T_\pi(p, k; k)$ y el defasaje on-shell obtenido para distintas energías. Recordemos que en caso de tener $p = k$, la matriz de scattering y transferencia se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$S_\pi(k, k; k) = 1 - i\pi k T_\pi(k, k; k) = e^{2i\delta_\pi(k)}. \quad (3.1)$$

Para la resolución numérica se usarán puntos p_j y pesos w_j obtenidos con la subrutina GAUSS_L y la inversión de matriz usando la subrutina ZGESV de LAPACK. Se mostrará el tratamiento teórico previo a la declaración de matrices.

$$T_\pi(p', p; k) = V_\pi(p', p) + \int dq \frac{q^2 V_\pi(p', q)}{k^2 - q^2 + i\epsilon} T_\pi(q, p; k).$$

Separando en parte principal de Cauchy y término independiente a la integral:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x - x_0 + i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{f(x)}{x - x_0} - i\pi f(x) \delta(x - x_0),$$

resulta en:

$$T_\pi(p', p; k) = V_\pi(p', p) - i\frac{\pi k}{2} V_\pi(p', k) T_\pi(k, p; k) + \mathcal{P} \int dq \frac{q^2 V_\pi(p', q)}{k^2 - q^2} T_\pi(q, p; k).$$

Aprovechando que la siguiente integral tiene un valor nulo para $k^2 > 0$:

$$\mathcal{P} \int \frac{dq}{k^2 - q^2} = 0.$$

Y generalizando para el primer caso de interés donde $p = k$.

$$T_\pi(p', k; k) = V_\pi(p', k) - i\frac{\pi k}{2} V_\pi(p', k) T_\pi(k, p; k) + \mathcal{P} \int dq \frac{q^2 V_\pi(p', q) T_\pi(q, k, k) - k^2 V_\pi(p', k) T_\pi(k, p; k)}{k^2 - q^2}.$$

Podemos calcular estas integrales numéricamente y transformarlas en un sumatorio.

$$\int f(p) dp \rightarrow \sum_{j=1}^N f(p_j) w_j.$$

Finalmente,

$$T_\pi(p', k; k) = V_\pi(p', k) + \sum_{j=1}^N \frac{w_j p_j^2 V_\pi(p', p_j)}{k^2 - p_j^2} T_\pi(p_j, k; k) - \left(i\frac{\pi k}{2} + \sum_{j=1}^N \frac{w_j k^2}{k^2 - p_j^2} \right) V_\pi(p', k) T_\pi(k, k; k).$$

Definiendo los vectores:

$$\begin{aligned} T_\pi(i) &= T_\pi(p_i, k; k), T_\pi(N+1) = T_\pi(k, k; k), \\ V_\pi(i) &= V_\pi(p_i, k), V_\pi(N+1) = V_\pi(k, k), \end{aligned}$$

convertimos nuestro problema inicial en un problema de autovalores.

$$\sum_{j=1}^{N+1} a_{ij} T_{\pi_j} = V_{\pi_i}.$$

Aquí los elementos de matriz a_{ij} son:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{p_j^2 V(p_i, p_j)}{k^2 - p_j^2} w_j. \\ a_{iN+1} &= \left(i \frac{\pi k}{2} + \bar{w} \right) V(p_i, k). \\ a_{N+1j} &= -\frac{p_j^2 V(k, p_j)}{k^2 - p_j^2} w_j. \\ a_{N+1N+1} &= 1 + \left(i \frac{\pi k}{2} + \bar{w} \right) V(k, k). \\ \bar{w} &= \sum_{j=1}^N \frac{k^2}{k^2 - p_j^2} w_j. \end{aligned}$$

También será necesario calcular la matriz off-shell. El método es el mismo, con la salvedad de la expresión final de las matrices a tratar.

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} T_{\pi_{i,j}} = b_{ij},$$

siendo A Y B dos matrices $N \times N$:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{p_j^2 V(p_i, p_j)}{k^2 - p_j^2} w_j. \\ b_{ij} &= V(p_i, p_j) - \left(\frac{i\pi k}{2} + \bar{w} \right) V(p_i, k) T_\pi(p_j, k; k). \end{aligned}$$

Notar que el cálculo de la matriz half-on shell es necesario para la full-off shell.

Una vez conocida nuestra matriz de scattering T_π al completo, la siguiente labor es la resolución numérica de las funciones $L_0(k)$ y $J_0(k)$. Para esta primera seguiré el mismo procedimiento que para T_π , aprovechando que la integral

$$\mathcal{P} \int dq \frac{k^2 T_\pi(k, k; k)}{k^2 - q^2} = 0 \quad (3.2)$$

es nula.

Diferenciando nuevamente parte principal y término independiente:

$$L_0(k) = \sum_{j=1}^N w_j \frac{p_j^2 T_\pi(k, p_j; k) - k^2 T_\pi(k, k; k)}{k^2 - p_j^2} - \frac{i\pi k}{2} T_\pi(k, k; k).$$

Puede verse como en caso de tener $k = p_j$ el numerador se anula también y el polo desaparece. El siguiente paso es discretizar $J_0(k)$. El procedimiento es más laborioso pero parte de la misma idea.

$$\begin{aligned}
J_0(k) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 T_\pi(q, q'; k)}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)(k^2 - q'^2 + i\epsilon)} - \int_0^\infty dq dq' T_\pi(q, q'; 0) \\
&= \int_0^\infty \frac{dq q^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \left(\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq' q'^2 T_\pi(q, q'; k)}{k^2 - q'^2} - \frac{i\pi k}{2} T_\pi(q, k; k) \right) - \int_0^\infty dq dq' T_\pi(q, q'; 0) \\
&= \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq q^2}{k^2 - q^2} \left(\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq' q'^2 T_\pi(q, q'; k)}{k^2 - q'^2} - \frac{i\pi k}{2} T_\pi(q, k; k) \right) - \frac{i\pi k}{2} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq' q'^2 T_\pi(k, q'; k)}{k^2 - q'^2} \\
&\quad - \left(\frac{i\pi k}{2} \right)^2 T_\pi(k, k; k) - \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq dq' (k^2 - q^2)(k^2 - q'^2) T_\pi(q, q'; 0)}{(k^2 - q^2)(k^2 - q'^2)} \\
&= \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq dq' q^2 q'^2 T_\pi(q, q'; k)}{(k^2 - q^2)(k^2 - q'^2)} - i\pi k L_0(k) + \frac{\pi^2 k^2}{4} T_\pi(k, k; k) \\
&\quad - \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq dq' (k^2 - q^2)(k^2 - q'^2) T_\pi(q, q'; 0)}{(k^2 - q^2)(k^2 - q'^2)}.
\end{aligned}$$

Para poder resolver numéricamente el primer término volveré a usar el resultado (3.2). Nuestra integral presentará divergencias en los casos en que $q = k$, $q' = k$ y $q = q' = k$. Añadiendo los siguientes términos:

$$\mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq dq'}{(k^2 - q^2)(k^2 - q'^2)} (k^4 T_\pi(k, k; k) - k^2 q^2 T_\pi(q, k, k) - k^2 q'^2 T_\pi(q', k, k)),$$

logramos evitar los polos al hacer el numerador también cero. La expresión resultante es:

$$\begin{aligned}
J_0(k) &= \sum_{j=0}^N \sum_{z=0}^N \frac{w(j)w(z)}{(k^2 - p_j^2)(k^2 - p_z^2)} ((p_j^2 p_z^2 T_\pi(p_j, p_z, k) + k^4 T_\pi(k, k, k)) \\
&\quad - (k^2 (p_j^2 T_\pi(p_j, k, k) + p_z^2 T_\pi(p_z, k, k)) - ((k^2 - p_j^2)(k^2 - p_z^2) T_\pi(p_j, p_z, 0))) \\
&\quad - i\pi k L_0(k) + \frac{\pi^2 k^2}{4} T_\pi(k, k, k).
\end{aligned}$$

Ya tendremos todo listo para calcular la matriz on-shell $T(k, k; k)$ con la fórmula (2.13), y con ella el defasaje total que nos interesa. Si echamos un vistazo a la expresión de nuestro potencial (2.1) veremos como para momentos pequeños el argumento de nuestro logaritmo tiende a 1. Haciendo un desarrollo en serie, es fácil ver que la expresión a considerar para cuando el momento $p_j \rightarrow 0$ es cercano a cero es:

$$\begin{aligned}
V_\pi(p_i, p_j \rightarrow 0) &= \frac{m\alpha_\pi}{\pi} \frac{1}{p_i p_j} \log \frac{p_i^2 + p_j^2 - 2p_i p_j + m_\pi^2}{p_i^2 + p_j^2 + 2p_i p_j + m_\pi^2} \\
&\approx \frac{m\alpha_\pi}{\pi} \frac{1}{p_i p_j} \frac{-4p_i p_j}{p_i^2 + m_\pi^2}.
\end{aligned}$$

Donde he utilizado que $\log\left(\frac{x-\epsilon}{x+\epsilon}\right) \approx \frac{-2\epsilon}{x}$, siendo $x = p_i^2 + m_\pi^2$ y $\epsilon = 2p_i p_j \rightarrow 0$.

$$V_\pi(p_i, p_j) \approx -\frac{4m_\pi \alpha_\pi}{\pi(m_\pi^2 + p_i^2)}.$$

Aún podemos ir más allá y describir el scattering a baja energía en términos de parámetros. Nuestra matriz $T_\pi(p, p'; k)$ no admite un desarrollo en serie en torno al cero debido a que presenta un corte derecho. La función que si admite un desarrollo es:

$$f(k) = k \cot \delta(k) = -1/a + \frac{1}{2}r_0 k^2 + vk^4 \dots \quad (3.3)$$

Esta expresión ya fue presentada anteriormente, y es conocida como *expansión de rango efectivo* [17]. Considerada para la dispersión elástica de dos partículas no relativistas sin espín por un potencial central, cuyo alcance es finito. La condición es que $k < 1/d_{car}$, siendo este el alcance finito mencionado. Desarrollada por Bethe [3] en los años cincuenta, siendo a la longitud de scattering y r_0 el denominado rango efectivo.

Para los cálculos de dichos parámetros nos apoyaremos del teorema de los residuos. El truco será resolver numéricamente la integral que se propone, usando un contorno cerrado que incluya al cero, donde tendremos polos de orden n que podemos relacionar con el valor de la derivada $(n-1)$ ésima en dicho punto, e ir recogiendo los valores de los parámetros según aumentemos el orden. Recordemos como calcular un polo en un número complejo z_0 .

$$Res_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}.$$

Y además considerando $f(k) = f_0 + f_1 k^2 + f_2 k^4 + \dots$

$$\oint \frac{f(k)}{k^{2n+1}} dk = 2\pi i f_n = I(n). \quad (3.4)$$

Recordemos también la expresión que hemos obtenido para la $\tan(\delta_\pi)$, que nos permite expresar $f(k)$ como:

$$f(k) = -\frac{2}{\pi} T_\pi^{-1}(k, k) + ik.$$

Haciendo un simple cambio de variable $k = k_0 e^{i\phi}$ podemos resolver esta integral con puntos que vayan entre 0 y 2π , cuyos pesos también obtendremos con la subrutina GAUSS_AB. Es importante que nuestra variable auxiliar $k_0^2 < \frac{-m_\pi^2}{4}$.

Que la matriz T sea unitaria se traduce en la presencia de un corte derecho sobre el eje real positivo (*right-hand cut*) a partir de un cierto valor umbral. Esto abre la posibilidad de que se den estados intermedios en el scattering.

Por otro lado, nuestro potencial de intercambio de un pion trae consigo la existencia de otro corte, pero esta vez izquierdo (*left-hand cut*) sobre el eje real negativo. El límite de este viene determinado por [6]:

$$0 < \omega_L < -\frac{m_\pi^2}{4}.$$

Podremos hallar los parámetros de bajas energías como sigue:

$$a = -\frac{-2\pi i}{I(0)},$$

$$r_0 = \frac{I(0)}{i\pi}.$$

Y así sucesivamente para órdenes más altos de k acompañados de los coeficientes v_i .

Capítulo 4

Resultados

Tal como comenté, para hallar la solución de la matriz de transferencia total es necesario conocer por separado la propia del potencial de intercambio de un pion en ausencia de potencial V_s de corto alcance. A continuación se muestra la gráfica obtenida para δ_π junto con los parámetros de baja energía a_π y r_π .

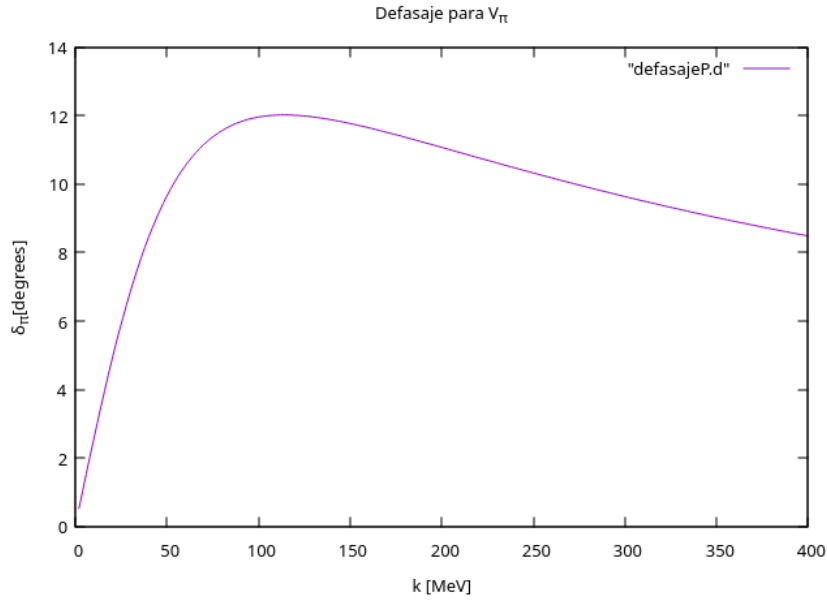


Figura 4.1: Defasaje para V_π en función de k .

$$a_\pi = -0,8783 \text{ fm.} \quad (4.1)$$

$$r_\pi = 12,3766 \text{ fm.} \quad (4.2)$$

Cuyos valores vienen convenientemente expresados en fermis para la posterior comparación con valores de otros trabajos, con la única manipulación de multiplicar por $\hbar c = 197,326 \text{ MeV fm}$.

Siguiendo la estructura del trabajo original [15], se obtiene la siguiente representación para $l_0(k)$ y $\text{Re}\bar{J}_0(k)$.

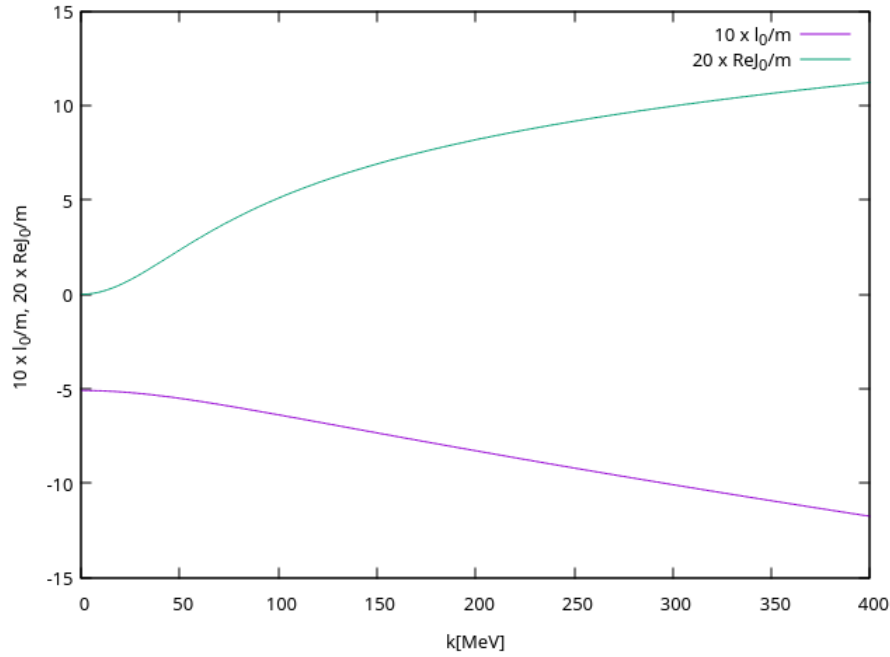


Figura 4.2: Representación de $10 \times l_0(k)/m$ y $20 \times \bar{J}_0(k)/m$. Los factores multiplicativos hacen adimensionales y de la misma escala de valores ambos resultados.

Por la misma razón, daré el defasaje tanto en escala normal como en logarítmica aplicada en el eje x de energías.

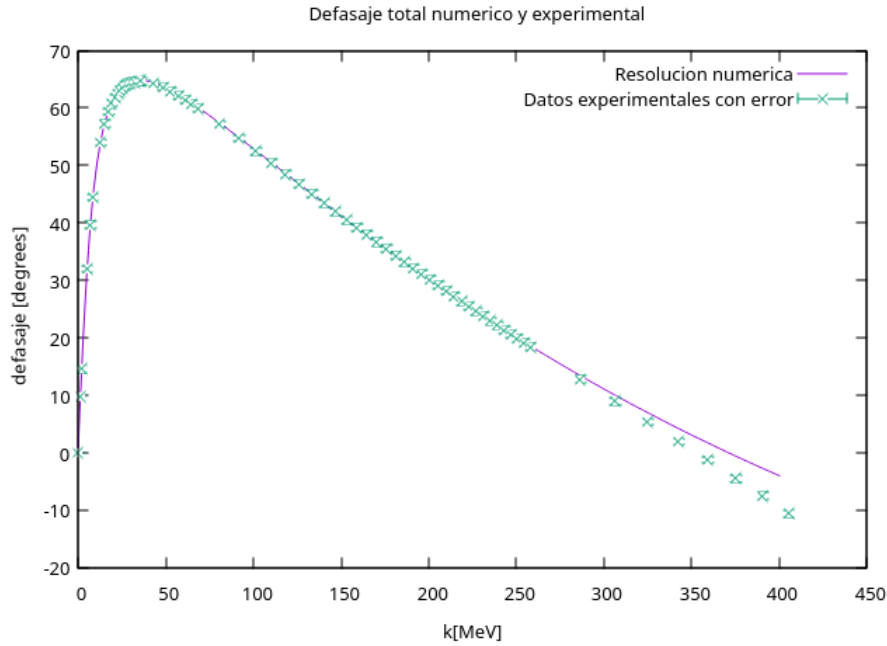


Figura 4.3: Defasaje total para $V = V_\pi + V_s$. Para ajustar los datos al defasaje de Nijmegen se han fijado los siguientes valores: $g_0 m = -0,276$, $g_1 m^3 = 0,347$ y $\frac{J_0^R(0)}{m} = -3,21$.

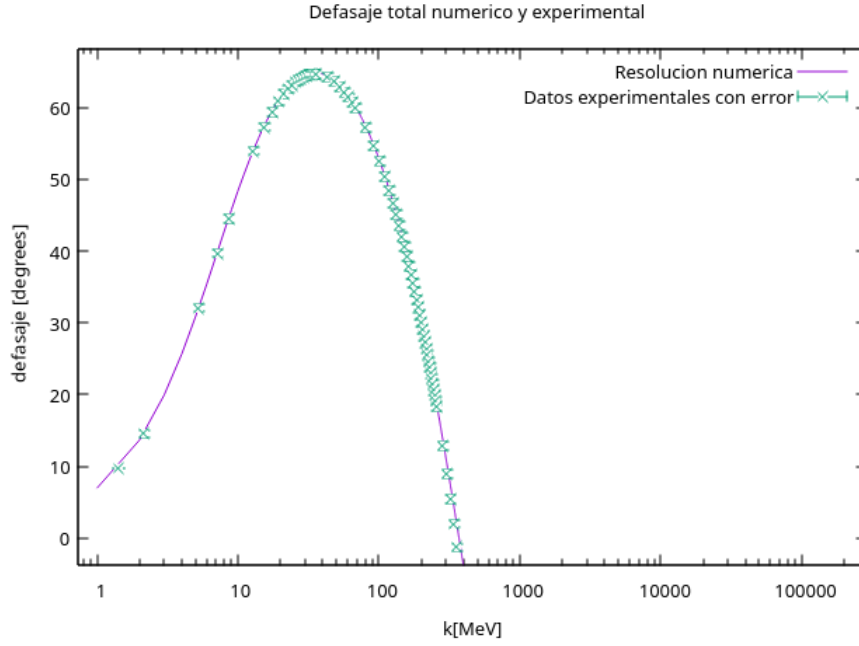


Figura 4.4: Mismo defasaje con el eje x en escala logarítmica.

Antes de pasar con los parámetros de corto alcance daré una última gráfica para δ para distintos valores de g_0 , g_1 y $J_0^R(0)$.

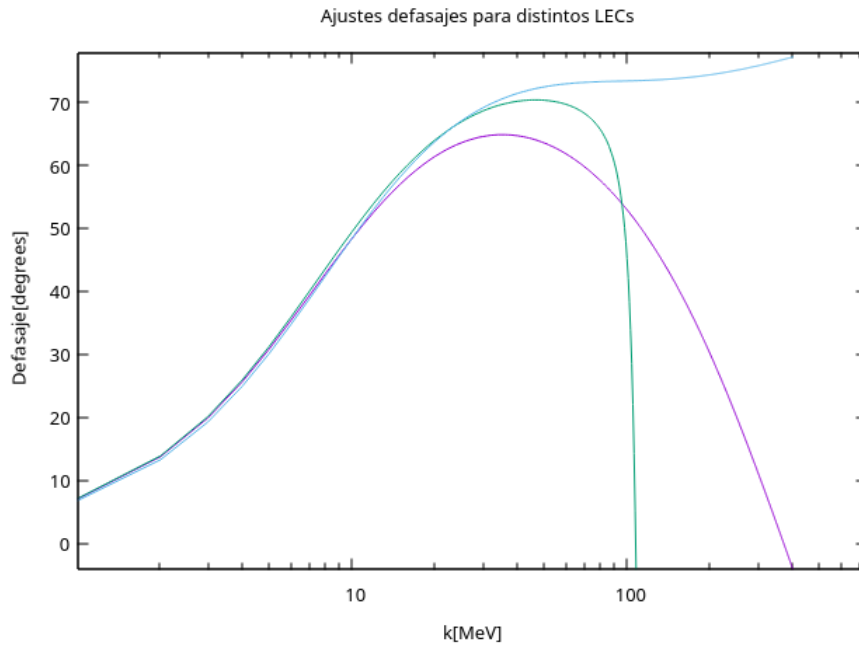


Figura 4.5: En morado tenemos el ejemplo anterior para g_0 , g_1 , $J_0^R(0) \neq 0$, en azul el caso en que g_1 , $J_0^R(0) = 0$, y en verde el último caso particular con tan solo $J_0^R(0) = 0$.

Los valores obtenidos para a y r_0 son:

$$a = -23,9975 \text{ fm.} \quad (4.3)$$

$$r_0 = 2,6736 \text{ fm.} \quad (4.4)$$

Capítulo 5

Conclusiones

Para fijar el valor de las constantes de corto alcance: g_0 , g_1 y $J_0^R(0)$, el autor del trabajo original [15] llevó a cabo un ajuste - χ^2 para reproducir lo más fielmente posible el desfase por medio del método de Nijmegen [20]. Los parámetros que mejor se ajustan son:

$$\begin{aligned} g_0 m &= -0,276 \\ g_1 m^3 &= 0,347 \\ \frac{J_0^R(0)}{m} &= -3,21 \end{aligned}$$

Puedes verse en la figura [4.3] como nuestros datos se ajustan perfectamente a la gráfica hasta un cierto valor $k_{max} \approx 260$ MeV para el momento en CM del nucleón. Si se incluyen momentos más grandes el valor de χ^2/dof aumentaría hasta casi hasta el doble [15].

También se percató de que la correlación entre los coeficientes es muy baja. Es decir, verdaderamente solo hay un parámetro independiente. En caso de hacer $g_1 = 0$, podemos absorber la divergencia ultravioleta (UV) en g_0 y jugar con el último parámetro para conseguir un ajuste adecuado.

En la gráfica [4.5] se muestran diferentes casos. Puede comprobarse como dichos métodos consiguen un ajuste bueno hasta momentos bastantes más pequeños que k_{max} .

Recordando la expansión de rango efectivo para bajas energías:

$$T^{-1}(k) = \frac{-\pi}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0^2 k^2 + \dots - ik \right)$$

Hemos obtenido los siguientes valores de los parámetros de baja energía tras la resolución numérica:

$$\begin{aligned} a_\pi &= -0,8783 fm \\ r_\pi &= 12,3766 fm \\ a &= -23,9975 fm \\ r_0 &= 2,6736 fm \end{aligned}$$

Destacar que estos resultados son muy sensibles al valor que se han fijado los parámetros de corto alcance.

Al haber utilizado el teorema de los residuos hemos garantizado que al menos la derivada de orden n que aparece en la ecuación (3.4) evaluada en cero es muy precisa. Esta precisión no puede garantizarse con una resolución alternativa como la derivada numérica.

El paper original [15] termina por dar los siguientes valores: $a = -23,65$ fm, $r_0 = 2,63$ fm, $a_\pi = -0,88$ fm y $r_\pi = 12,38$ fm. A pesar de no ser exactamente iguales se acercan mucho. Evidentemente, al tratarse este trabajo de reproducir sus mismos cálculos, la discrepancia en los valores viene únicamente del método con que cada quién haya calculado la derivada de $f(k)$. A su vez, el trabajo bajo el cual se ha hecho el ajuste [20] da por resultados: $a = -23,7$ fm y $r_0 = 2,73$ fm.

Por último, quisiera comparar con los valores dados en [7]. En este trabajo más reciente los parámetros son calculados de manera análoga con el teorema de los residuos. Los resultados en este caso han sido: $a = -23,7588$ fm y $r_0 = 2,6728$. Que son ligeramente distintos únicamente por una pequeña discrepancia entre los valores de g_0 , g_1 y $J_0^R(0)$ utilizados en [15] y [7].

Me gustaría terminar este trabajo resumiendo un poco todo lo que se ha visto hasta ahora, y así dejar bien concluida la razón, motivación y física tras todo el cálculo.

Se ha comenzado por introducir al lector brevemente a la historia de la interacción nuclear fuerte, desde el descubrimiento del pion por parte de Yukawa en 1935 hasta el desarrollo de la cromodinámica cuántica y la posterior necesidad de las teorías efectivas (EFT) para explicar la física a bajas energías. En dichas escalas de energía, no hay resolución perturbativa de la teoría fundamental, y los piones vuelven a ser los grados de libertad propios de las interacciones.

Vimos como el lagrangiano podría ser escrito ignorando los grados de libertad presentes a energías más altas sin que esto significase que no hay una correlación entre la física de altas y bajas energías. Un ejemplo de esto es la termodinámica: Uno puede estudiar las propiedades macroscópicas de su sistema sin tener información de la estructura microscópica.

Sobre esta idea hemos tratado nuestro problema separando dos escalas bien diferenciadas en nuestro potencial. El primer término correspondiente al intercambio de un pion, y el segundo términos de contacto expresados en potencias de k^2 hasta segundo orden. Esto recibe el nombre de Teoría de Ondas Distorsionadas (DWT).

Como ejemplo ilustrativo me ayudé de la Expansión de Rango Efectivo de Bethe, y llegamos a la conclusión de que *las teorías efectivas parten de la premisa de que la dinámica a bajas energías (distancias grandes) no depende de los detalles de la dinámica a altas energías (distancias cortas)*.

Fue Weinberg el primero en adaptar estas teorías en la física nuclear. Un último ingrediente era necesario para la formulación de una teoría consistente: La simetría quiral. esta da nombre a las teorías efectivas quirales (χ EFT) de las cuales se basan las interacciones NN . Fueron un éxito para el estudio de $\pi\pi$ junto con $N\pi$, pero para describir correctamente el problema NN hacía falta una herramienta no perturbativa para su resolución. Ahí entra en juego la ecuación de Lippmann-Schwinger (LSE).

Tanto el uso de técnicas de DR como DWT han sido empleadas para solucionar la LSE del sistema NN en onda 1S_0 . Para un potencial de contacto de hasta orden k^2 hemos dado con una muy buena aproximación de los datos experimentales para momentos inferiores a 260 MeV con tan solo la inclusión de un parámetro adicional $J_0^R(0)$.

Este parámetro adicional venía de la imposibilidad de absorber la divergencia en $J_0(0)$ redefiniendo los coeficientes de nuestro potencial a cortas distancias, al llegar este a orden menor o igual a dos.

Convenientemente se redefinió el potencial de contacto normalizado $(V_s^R)^{-1}(\hat{k}, \hat{k})$, conduciendo a una serie infinita de potencias de \hat{k}^2 , y la necesidad de infinitos contra-términos para la resolución no perturbativa de la amplitud de probabilidad.

A cada orden de \hat{k}^2 , la parte divergente de dichos contra-términos está determinada, pero no así la parte finita constante.

Se optó por la solución de no considerar los coeficientes libres e independientes, e imponer relaciones entre aquellos de órdenes superiores de la serie de contra-términos a los de la expansión del potencial, de forma que evitemos perder la predictividad de nuestro modelo a bajas energías (escala donde la influencia de dichos órdenes altos es pequeña).

En otras palabras: Hemos considerado J_0 como un parámetro renormalizado e independiente; una constante más que fijar para reproducir los datos experimentales del defasaje experimental. De esta manera, la amplitud puede expresarse tal como la expresión deducida en (2.19), satisfaciendo la unitariedad clásica.

Para la resolución numérica hemos tenido que tener en cuenta los cortes de rama izquierdo y derecho que presenta la matriz $T(k, k)$ por el hecho de ser unitaria y de haber usado el potencial de intercambio de un pion (OPE) para describir la física a largas distancias. La discretización de las funciones $L_0(k)$ y $J_0(k)$ se ha seguido con detalle en la sección correspondiente

Una vez obtenida la amplitud de probabilidad con el ajuste de parámetros de corto alcance para reproducir el defasaje hasta una energía de $k_{max} \approx 260$ MeV, se hallaron los parámetros de baja energía con apoyo del teorema de los residuos.

Finalmente, se lograron los resultados esperados tras la reproducción del paper original [15], llegando a los mismos resultados y representaciones que pueden encontrarse en el trabajo.

Conclusions

To fix the value of the short-range constants: g_0 , g_1 and $J_0^R(0)$, the author of the original work [15] carried out a χ^2 fit to reproduce as faithfully as possible the phase shift using the Nijmegen method [20]. The best-fit parameters are:

$$\begin{aligned} g_0 m &= -0,276 \\ g_1 m^3 &= 0,347 \\ \frac{J_0^R(0)}{m} &= -3,21 \end{aligned}$$

It can be seen in figure [4.3] how our data fits perfectly to the curve up to a certain value $k_{max} \approx 260$ MeV for the nucleon CM momentum. If larger momenta were included, the value of χ^2/dof would almost double [15].

It was also noted that the correlation between the coefficients is very low. That is, there is really only one independent parameter. If $g_1 = 0$, we can absorb the ultraviolet (UV) divergence into g_0 and tune the last parameter to achieve an adequate fit.

In figure [4.5] different cases are shown. It can be seen how these methods achieve a good fit up to much smaller momenta than k_{max} .

Recalling the effective range expansion at low energies:

$$T^{-1}(k) = \frac{-\pi}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0^2 k^2 + \dots - ik \right)$$

We obtained the following values for the low-energy parameters after the numerical solution:

$$\begin{aligned} a_\pi &= -0,8783 fm \\ r_\pi &= 12,3766 fm \\ a &= -23,9975 fm \\ r_0 &= 2,6736 fm \end{aligned}$$

Note that these results are very sensitive to the values chosen for the short-range parameters.

By using the residue theorem we have ensured that at least the n th-order derivative appearing in equation (3.4) evaluated at zero is very precise. This precision cannot be guaranteed with an alternative method such as numerical differentiation.

The original paper [15] ultimately gives the following values: $a = -23,65$ fm, $r_0 = 2,63$ fm, $a_\pi = -0,88$ fm and $r_\pi = 12,38$ fm. Although not exactly identical, they are very

close. Clearly, since this work aims to reproduce the same calculations, the discrepancy in the values comes solely from the method each author used to calculate the derivative of $f(k)$. In turn, the work on which the fit was based [20] gives results: $a = -23,7$ fm and $r_0 = 2,73$ fm.

Finally, I would like to compare with the values given in [7]. In this more recent work, the parameters are calculated analogously using the residue theorem. The results in this case were: $a = -23,7588$ fm and $r_0 = 2,6728$. These are only slightly different due solely to a small discrepancy between the values of g_0 , g_1 and $J_0^R(0)$ used in [15] and [7].

I would like to end this work by summarizing a bit of everything that has been discussed so far, to clearly conclude the reason, motivation, and physics behind all the calculation.

We began by briefly introducing the reader to the history of the strong nuclear interaction, from Yukawa's discovery of the pion in 1935 to the development of quantum chromodynamics and the subsequent need for effective field theories (EFT) to explain physics at low energies. At these energy scales, there is no perturbative resolution of the fundamental theory, and pions once again become the relevant degrees of freedom of the interactions.

We saw how the Lagrangian could be written ignoring the degrees of freedom present at higher energies without this meaning there is no correlation between the physics at high and low energies. An example of this is thermodynamics: One can study the macroscopic properties of a system without having information about its microscopic structure.

Based on this idea, we treated our problem by separating two well-differentiated scales in our potential. The first term corresponds to one-pion exchange, and the second to contact terms expressed in powers of k^2 up to second order. This is known as the Distorted Wave Theory (DWT).

As an illustrative example I used Bethe's Effective Range Expansion, and we concluded that *effective theories are based on the premise that the dynamics at low energies (large distances) do not depend on the details of the dynamics at high energies (short distances)*.

It was Weinberg who first adapted these theories to nuclear physics. One last ingredient was necessary for the formulation of a consistent theory: chiral symmetry. This gives its name to chiral effective field theories (χ EFT) on which the NN interactions are based. They were successful for the study of $\pi\pi$ as well as $N\pi$, but to correctly describe the NN problem, a non-perturbative tool was needed for its solution. This is where the Lippmann-Schwinger equation (LSE) comes into play.

Both DR and DWT techniques have been used to solve the LSE of the NN system in the 1S_0 wave. For a contact potential up to order k^2 we achieved a very good approximation to experimental data for momenta below 260 MeV with only the inclusion of one additional parameter $J_0^R(0)$.

This additional parameter arose from the impossibility of absorbing the divergence in $J_0(0)$ by redefining the coefficients of our potential at short distances, once it reaches order less than or equal to two.

The normalized contact potential $(V_s^R)^{-1}(\hat{k}, \hat{k})$ was conveniently redefined, leading to an infinite series of powers of \hat{k}^2 , and the need for infinitely many counter-terms for the non-perturbative solution of the scattering amplitude.

At each order in \hat{k}^2 , the divergent part of these counter-terms is determined, but not the constant finite part.

The solution chosen was not to consider the coefficients as free and independent, but to impose relations between those of higher orders in the counter-term series and those in the expansion of the potential, so as not to lose the predictability of our model at low energies (where the influence of these higher orders is small).

In other words: We have treated J_0 as a renormalized and independent parameter; one more constant to be fixed to reproduce the experimental phase shift data. In this way, the amplitude can be expressed as in the form deduced in (2.19), satisfying classical unitarity.

For the numerical solution we had to take into account the left and right branch cuts present in the $T(k, k)$ matrix due to it being unitary and having used the one-pion exchange (OPE) potential to describe the physics at long distances. The discretization of the functions $L_0(k)$ and $J_0(k)$ was carried out in detail in the corresponding section.

Once the scattering amplitude was obtained with the short-range parameters adjusted to reproduce the phase shift up to an energy of $k_{max} \approx 260$ MeV, the low-energy parameters were found with the help of the residue theorem.

Finally, the expected results were achieved after reproducing the original paper [15], arriving at the same results and representations as can be found in that work.

Bibliografía

- [1] J. S. Ball, A. Scotti, and D. Y. Wong. One-boson-exchange model of NN and $n\bar{N}$ interaction. *Phys. Rev.*, 142:1000–1012, Feb 1966.
- [2] Thomas Barford and Michael C Birse. Renormalization group approach to two-body scattering in the presence of long-range forces. *Physical Review C*, 67(6):064006, 2003.
- [3] HA Bethe. Theory of the effective range in nuclear scattering. *Physical Review*, 76(1):38, 1949.
- [4] Tomáš Brauner. Spontaneous symmetry breaking and nambu–goldstone bosons in quantum many-body systems. *Symmetry*, 2(2):609–657, 2010.
- [5] Gerhard Buchalla, Oscar Catà, and Claudius Krause. On the power counting in effective field theories. *Physics Letters B*, 731:80–86, 2014.
- [6] María Flores Ceballos. Convergencia del método n/d exacto. Master’s thesis, Salamanca: Universidad de Salamanca, 2023.
- [7] David R. Entem, Juan Nieves, and Jose Antonio Oller. Contact potentials in presence of a regular finite-range interaction using dimensional regularization and the n/d method, 2025.
- [8] Harald Friedrich. *Scattering theory*, volume 872. Springer, 2013.
- [9] AD Jackson, DO Riska, and B Verwest. Meson exchange model for the nucleon-nucleon interaction. *Nuclear Physics A*, 249(3):397–444, 1975.
- [10] Volker Koch. Aspects of chiral symmetry. *International Journal of Modern Physics E*, 6(02):203–249, 1997.
- [11] George Leibbrandt. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Reviews of Modern Physics*, 47(4):849, 1975.
- [12] R. Machleidt and D.R. Entem. Chiral effective field theory and nuclear forces. *Physics Reports*, 503(1):1–75, 2011.
- [13] Aneesh V. Manohar. Effective field theories. In H. Latal and W. Schweiger, editors, *Perturbative and Nonperturbative Aspects of Quantum Field Theory*, pages 311–362, Berlin, Heidelberg, 1997. Springer Berlin Heidelberg.
- [14] William Marciano and Heinz Pagels. Quantum chromodynamics. *Physics Reports*, 36(3):137–276, 1978.
- [15] J Nieves. Renormalization of the $1s_0$ one-pion-exchange nn interaction in presence of derivative contact interactions. *Physics Letters B*, 568(1-2):109–117, 2003.

-
- [16] M. Hossein Partovi and Earle L. Lomon. Field-theoretical nucleon-nucleon potential. *Phys. Rev. D*, 2:1999–2032, Nov 1970.
 - [17] Manuel Silverno Pavón Valderrama et al. *La interaccion nucleon-nucleon en teorías efectivas*. PhD thesis, Granada: Universidad de Granada, 2006.
 - [18] Manfred Salmhofer. *Renormalization: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2007.
 - [19] G.R. Satchler. Symmetry properties of the distorted wave theory of direct nuclear reactions. *Nuclear Physics*, 18:110–121, 1960.
 - [20] VGJ Stoks, RAM Klomp, MCM Rentmeester, and JJ De Swart. Partial-wave analysis of all nucleon-nucleon scattering data below 350 mev. *Physical Review C*, 48(2):792, 1993.
 - [21] Steven Weinberg. Phenomenological lagrangians. *Physica, A;(Netherlands)*, 96, 1979.
 - [22] Steven Weinberg. Nuclear forces from chiral lagrangians. *Physics Letters,(Section) B;(Netherlands)*, 251(2), 1990.
 - [23] Hideki Yukawa. On the interaction of elementary particles. i. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 17:48–57, 1935.