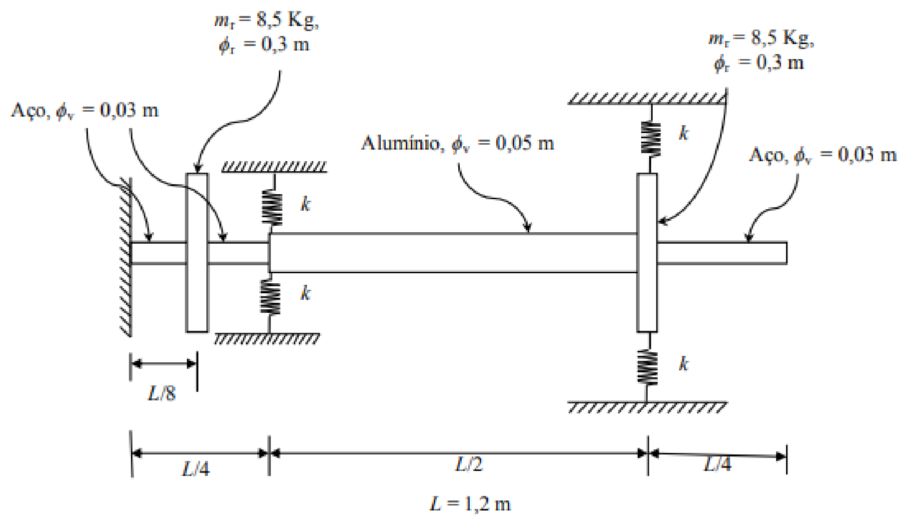
- Aluno: Victor Afonso Bauler

Enunciado - Trabalho 1

Seja abaixo um eixo engastado-livre de aço (ρ = 7700 Kg e E = 2,1E11 Pa) e alumínio (ρ = 2700 Kg e E = 7,1E10 Pa) de diferentes diâmetros e que inclui duas engrenagens (considere a inércia de translação e rotação) e duas suspensões cada uma composta de duas molas de rigidez k = 10 kN/m.



Questões

1. 1) Utilize o Método de Rayleigh-Ritz (MRR) para representar o movimento de flexão do eixo com funções base na forma dos modos de uma viga engastada-livre de seção uniforme dados por

$$d_j(x) = \text{sen}(\eta_j x) - \text{senh}(\eta_j x) + D_j \left[\cos(\eta_j x) - \cosh(\eta_j x)\right],$$

onde

$$D_j = \frac{\cos(\eta_j L) + \cosh(\eta_j L)}{\text{sen}(\eta_j L) - \text{senh}(\eta_j L)},$$

e η_j são as soluções da equação transcendental

$$\cos(\eta L)\cosh(\eta L) = -1$$

mas que podem ser aproximadas por

$$\eta_j \approx \begin{cases} 1,875/L, & j = 1 \\ \dfrac{(j-1/2)\pi}{L}, & j > 1 \end{cases}$$

Na sequência, faça:

a) Determine as quatro primeiras frequências naturais e formas modais utilizando 8 funções base;

b) Análise a convergência dos valores obtidos para as quatro primeiras frequências naturais para um número de funções base de n = 4, 8, 12, 16. Mostre os resultados através de um gráfico das frequências naturais em função do número de funções base. Comente os resultados.

2. Utilizando o Método de Elementos Finitos (FEM) faça:

   a) Compare os valores obtidos para as quatro primeiras frequências naturais para um número de elementos igual a 8, 16 e 64. Comente os resultados.

   b) Compare as frequências naturais e formas modais dos primeiros quatro modos obtidas via MRR (16 funções base) e FEM (64 elementos).

Resolução

Método de Rayleigh-Ritz (MRR)

Para a solução do problema com o Método de Rayleigh-Ritz (MRR), serão adotados os seguintes passos:

1. Obtenção da matriz de rigidez e da matriz de massa, a partir das equações de energia, usando as funções de base previamente definidas;
2. Solução da equação do movimento via método modal;
3. Substituição dos coeficientes obtidos na equação do movimento, para obtenção da solução aproximada.

1. Obtenção das matrizes de rigidez e massa (MRR)

O Método de Rayleigh-Ritz aproxima a solução de $v(x,t)$ através de uma expansão na forma:

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{N} d_j(x) q_j(t)$$

Em que:

- $d_j(x)$ são as funções de base, previamente definidas;
- $q_j(t)$ são os coeficientes a serem determinados.

Dessa forma o MRR (Método de Rayleigh-Ritz) transforma um problema contínuo em um problema discreto com N graus de liberdade.

O número finito de GL (graus de liberdade) permite a utilização das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j$$

Em que:

- T é a energia cinética;
- D é a energia dissipada;
- U é a energia potencial;
- Q_j é a força externa aplicada no grau de liberdade j;

- q_j são as coordenadas generalizadas.

Ou pode-se utilizar diretamente as definições de energias na forma matricial:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[M]\{\dot{q}\}$$

$$U = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\}$$

$$\delta W = \{Q\}^T\{\delta q\}$$

Em que:

- $[M]$ é a matriz de massa;
- $[K]$ é a matriz de rigidez;
- $\{Q\}$ é o vetor de forças externas;
- δW é o trabalho virtual.

Energia cinética

Como foi deduzido durante a disciplina, a energia cinética para uma viga em flexão é dada por:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx$$

Além disso, a viga em questão possuí duas engrenagens, as quais possuem massa m_r e momento polar de inércia J, localizadas em $\frac{L}{8}$ e $\frac{3L}{4}$. Dessa forma, segundo Petyt (2010), a energia cinética total é dada por:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}m_r\left(\frac{\partial v(\frac{L}{8},t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}m_r\left(\frac{\partial v(\frac{3L}{4},t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{\partial^2 v(\frac{L}{8},t}{\partial x \partial t}\right. \\ + \frac{1}{2}J\left(\frac{\partial^2 v(\frac{3L}{4},t)}{\partial x \partial t}\right)^2$$

Energia potencial

Também foram feitas as deduções em aula de que a energia potencial é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

A viga em questão possuí 4 molas, sendo elas conectadas em suspensão, de 2 a 2 (em $\frac{L}{4}$ e $\frac{3L}{4}$), com rigidez k. Dessa forma a energia potencial total é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L EI_z\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}2k\left(v(\frac{L}{4},t)\right)^2 + \frac{1}{2}2k\left(v(\frac{3L}{4},t)\right)^2$$

Trabalho Virtual

O trabalho virtual é dado por:

$$\delta W = \int_0^L F_y \delta v \, dx$$

Nesse caso, como não há forças externas, o trabalho virtual é nulo.

Matrizes de rigidez e massa

Substituindo a expansão de $v(x,t)$ nas equações de energia para obtenção das matrizes de rigidez e massa, tem-se:

$$M_{jk} = \int_0^L \rho A \, d_j(x) d_k(x) \, dx + m_r d_j(x = \frac{L}{8}) d_k(x = \frac{L}{8}) + m_r d_j(x = \frac{3L}{4}) d_k(x = \frac{3L}{4})$$
$$+ J d_j'(x = \frac{L}{8}) d_k'(x = \frac{L}{8}) + J d_j'(x = \frac{3L}{4}) d_k'(x = \frac{3L}{4})$$

$$K_{jk} = \int_0^L EI_z \, d_j''(x) d_k''(x) \, dx + 2k \, d_j(x = \frac{L}{4}) d_k(x = \frac{L}{4}) + 2k \, d_j(x = \frac{3L}{4}) d_k(x = \frac{3L}{4})$$

$$Q_j = \int_0^L F_y d_j(x) \, dx = 0$$

2. Solução da equação do movimento via método modal (MRR)

Com as matrizes de rigidez e massa obtidas, é possível resolver a equação do movimento:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\}$$

Como não há forças externas temos que:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

No caso de solução via método modal, o problema de Autovalor fica:

$$([K] - \omega^2 [M])\{a\} = \{0\}$$

Tal que:

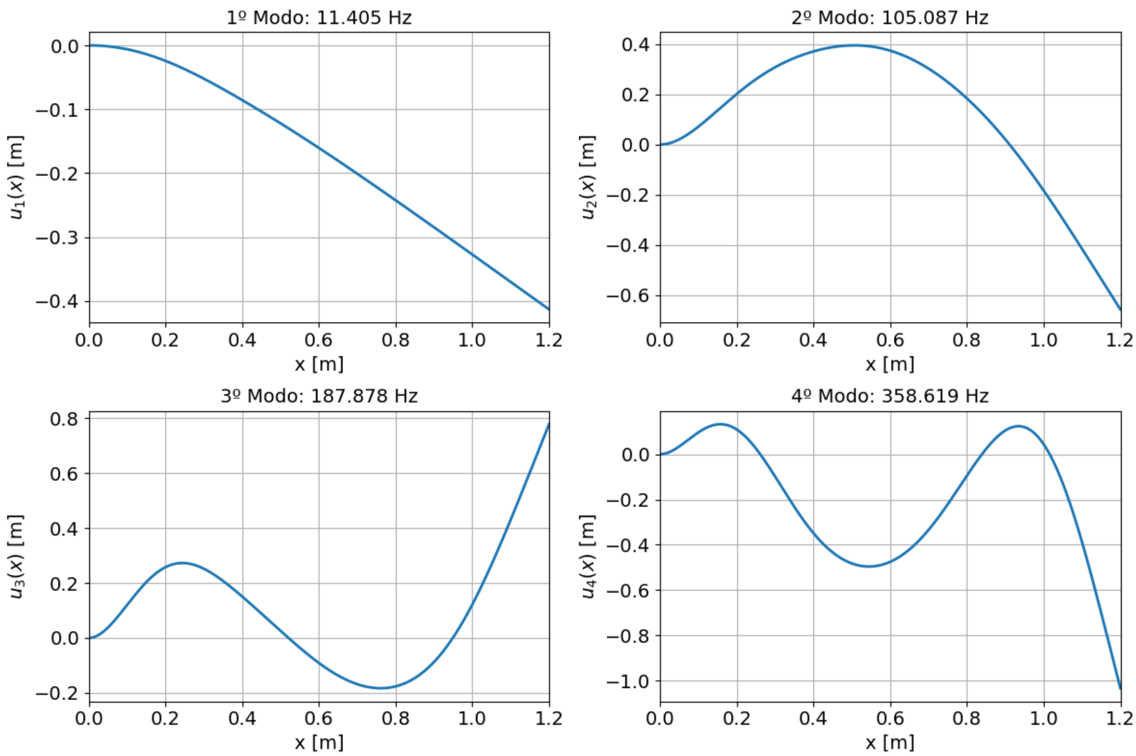
- w_n^2 são os autovalores;
- a_n são os autovetores.

E as autofunções em termos de $v(x,t)$ são dadas por:

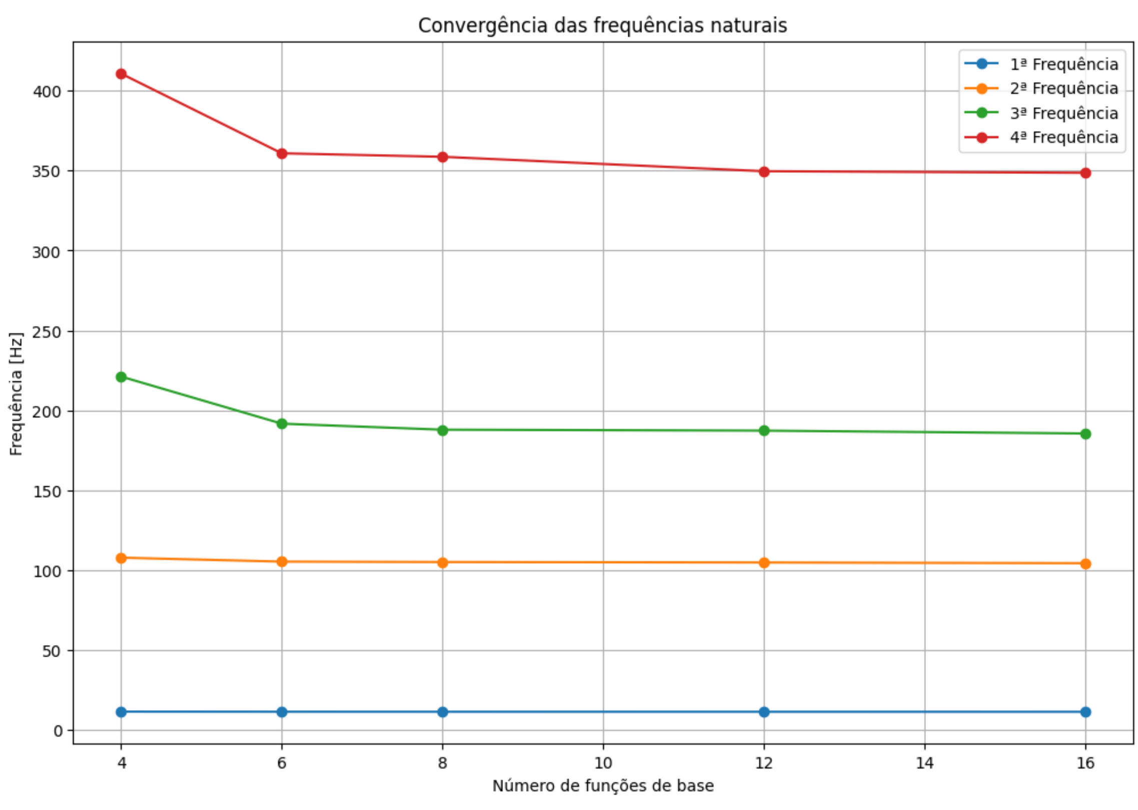
$$u_n(x) = \{d(x)\}^T \{a_n\}$$

Obtenção dos modos de vibração e análise de convergência

A seguir serão apresentadas as formas modais e frequências naturais obtidas utilizando 8 funções de base.



Em seguida é apresentado o gráfico de convergência das frequências naturais, nota-se que para as duas primeiras frequências naturais 4 funções de base já encontram uma boa aproximação (considerando o resultado para 16 funções de base como referência), porém para as terceira e quarta frequências essa quantidade já não representa uma boa aproximação.



Método de Elementos Finitos (FEM)

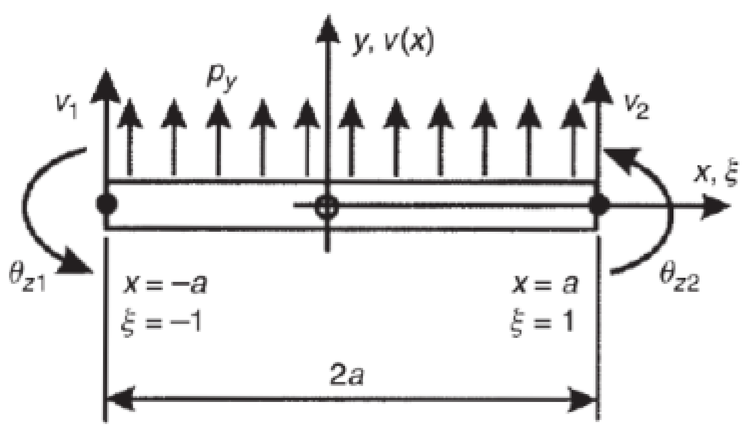
Para a solução do problema com o Método dos Elementos Finitos (FEM), serão adotados os seguintes passos:

1. Divide-se a estrutura em elementos, formando uma malha, que representa o problema em estudo em um sistema discreto;
2. Desse conjunto de elementos define-se um conjunto de pontos - chamados de nós - ao longo das bordas dos elementos, onde serão avaliados os parâmetros físicos;
3. Toma-se um conjunto de funções, chamadas de funções de forma, que atendem aos princípios do MRR, sendo que cada função fornece um valor unitário

para um determinado GL e zero para os demais; 4. Realiza-se a análise do problema tomando-se as funções de forma dentro dos elementos, similarmente ao que era feito no MRR para o sistema completo.

Funções de forma para elemento de viga em flexão

Elemento de viga em flexão



Fonte: Fahy and Gardonio (2007)

Como foi deduzido durante a disciplina, um elemento de viga com 2 nós e 4 GL pode ser representado por 4 funções de forma, as quais serão representadas por um polinômio de terceiro grau, que terá valor unitário em cada GL e zero nos demais.
As funções de forma para o elemento de viga em flexão são agrupadas em um vetor $\eta(\xi)$:

$$\{\eta(\xi)\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3) \\ \frac{a}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\ \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3) \\ \frac{a}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix}$$

Matrizes de rigidez e massa para elemento de viga em flexão

A partir do vetor de funções de forma, é possível obter as matrizes de rigidez e massa para o elemento de viga em flexão.
A matriz de rigidez é obtida a partir da seguinte integral:

$$K_e = \int_{-1}^{1} \frac{EI_z}{a^3} \, (\eta^{''}(\xi))(\eta^{''}(\xi))^T \, d\xi$$

A matriz de massa é obtida a partir da seguinte integral:

$$M_e = \int_{-1}^{1} \rho A a \, (\eta(\xi))(\eta(\xi))^T \, d\xi$$

As contribuições das molas e das engrenagens são adicionadas no GL correspondente.

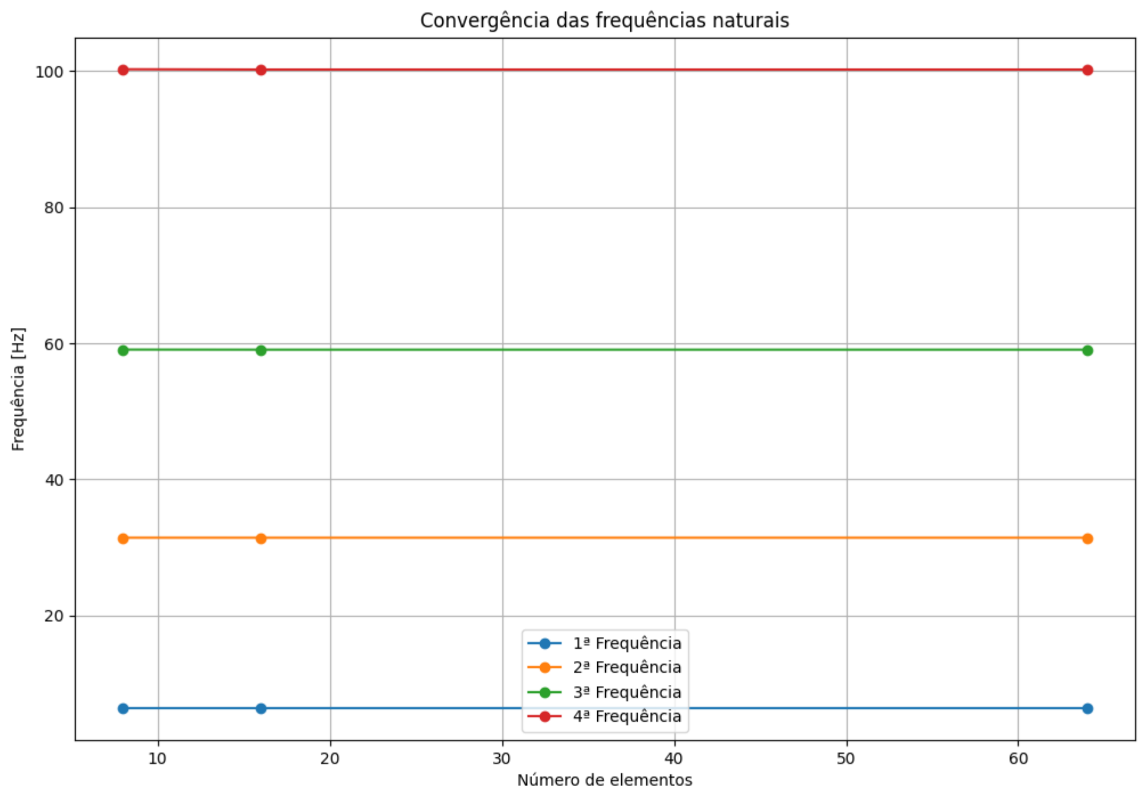
Obtenção das matrizes globais

A partir das matrizes de rigidez e massa para o elemento de viga em flexão, é possível obter as matrizes globais de rigidez e massa.
Para isso, é necessário definir a matriz de conectividade, que relaciona os GL de cada elemento com os GL globais.
A matriz de conectividade para o problema em estudo é dada por:

GL do Elemento (e)	Posição nas Matrizes Globais (Linha e Coluna)
$v_{1,e}$	$2e-1$
$\theta_{z1,e}$	$2e$
$v_{2,e}$	$2e+1$
$\theta_{z2,e}$	$2e+2$

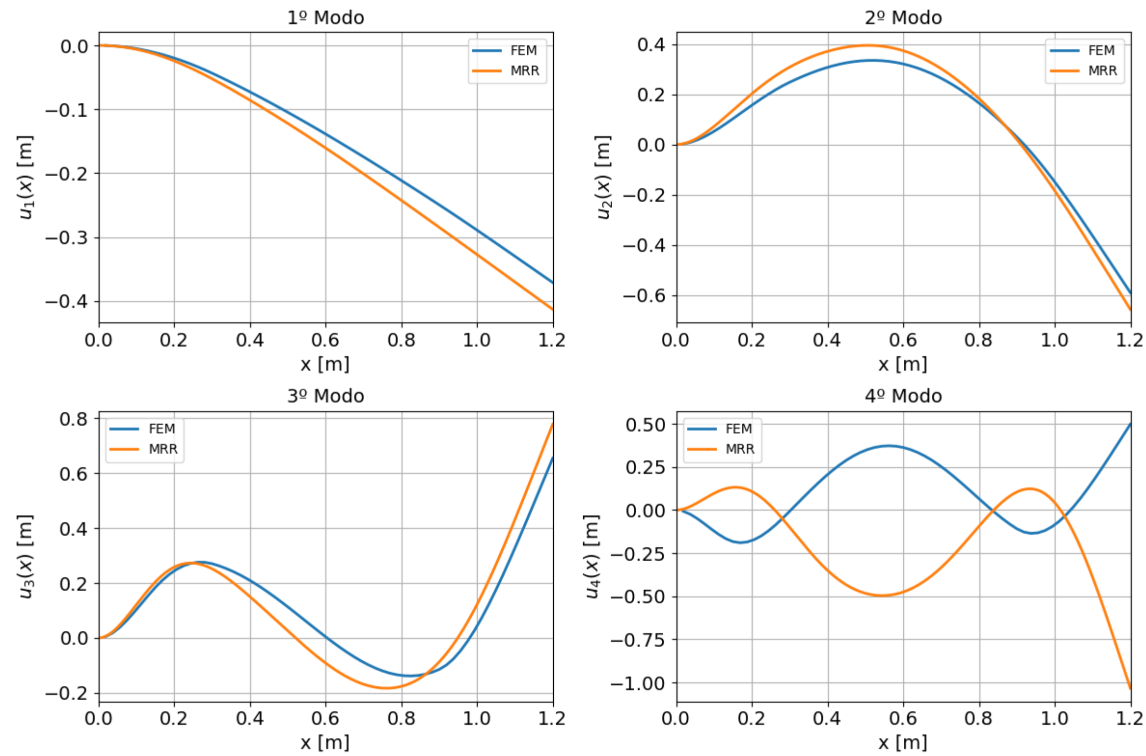
A partir da matriz de conectividade é possível executar o Processo de Montagem, que consiste em somar as contribuições de cada elemento para as matrizes globais.
A partir das matrizes globais será possível resolver o problema de Autovalor, da mesma forma já relatada para o MRR.

Obtenção dos modos de vibração e análise de convergência



Nota-se que para o FEM a convergência é mais rápida, sendo possível utilizar um número menor de elementos e já obter um bom resultado.

No entanto, houve uma divergência das frequências obtidas pelo MRR, o autor buscou identificar a causa dessa divergência, revisando os códigos de implementação, mas não foi possível identificar o problema, uma possível explicação seria um problema na resolução das integrais simbolicas para obtenção das matrizes de massa e rigidez no MRR, pois as funções de base são bem complexas e o processo teve um alto custo computacional.



Já ao comparar as formas modais obtidas pelo MRR e FEM, notou-se uma boa concordância entre os 3 primeiros modos.

Conclusão

Neste trabalha, foram implementados dois métodos numéricos para determinar as frequências naturais e modos de vibração de uma viga engastada: o Método de Rayleigh-Ritz (MRR) e o Método de Elementos Finitos (FEM). Ambas as implementações foram bem-sucedidas, demonstrando suas capacidades individuais.

No entanto, foi observada uma divergência entre as frequências naturais obtidas pelo MRR e pelo FEM. Uma possível razão para essa discrepância pode ser atribuída à implementação das integrais simbólicas para obter as matrizes de massa e rigidez. Essas divergências sugerem a necessidade de uma análise mais aprofundada das metodologias empregadas, a fim de compreender melhor o impacto dessas integrais simbólicas nos resultados.

Além disso, o FEM mostrou-se consideravelmente mais eficaz do que o MRR em termos de custo computacional. Enquanto o FEM exigiu apenas 3 segundos para executar a malha com 64 elementos, o MRR levou cerca de 30 minutos para obter as matrizes com 16 funções de base. Essa diferença de tempo destaca a vantagem do FEM em termos de eficiência computacional.

Outra vantagem do FEM sobre o MRR é a sua capacidade de obter automaticamente as funções de forma, eliminando a necessidade de conhecimento prévio sobre quais funções de base utilizar. Isso confere ao FEM uma maior flexibilidade e aplicabilidade em estruturas complexas, como vigas engastadas.

Em resumo, ambos os métodos, MRR e FEM, foram capazes de fornecer resultados satisfatórios para o estudo da viga engastada. No entanto, a divergência nas frequências naturais destaca a importância de uma análise mais detalhada das integrais simbólicas utilizadas. Além disso, o FEM demonstrou ser mais eficiente em termos de custo computacional e mais flexível em relação à seleção das funções de forma, tornando-o uma escolha mais viável para a análise de vigas engastadas e outras estruturas complexas.

Implementação no Python

Importando bibliotecas necessárias

- Será feito para ambas implementações do MRR e do FEM (Finite Element Method)

Serão utilizadas as bibliotecas:

- numpy: para operações matriciais;
- matplotlib: para plotar os gráficos;
- sympy: para realizar as integrais simbólicas;

In [47]:
```
import numpy as np
import sympy as sp
from scipy import linalg
import matplotlib.pyplot as plt

from IPython.display import display
```

Definindo funções de base

O primeiro passo para uma integração simbolica é criar os simbolos que serão utilizados, o que é feito com `sp.symbols()`.
Em seguida são definidos η_j, D_j e d_j (O mesmo também é feito para η_k, D_k e d_k).

In [48]:
```
x, j, k = sp.symbols('x j k')
L = 1.2

eta_j = sp.Piecewise((1.875/L, sp.Eq(j, 1)), ((j-1/2)*sp.pi/L, j > 1)).evalf(4)
eta_k = sp.Piecewise((1.875/L, sp.Eq(k, 1)), ((k-1/2)*sp.pi/L, k > 1)).evalf(4)

D_j = (sp.cos(eta_j*L)+sp.cosh(eta_j*L))/(sp.sin(eta_j*L)-sp.sinh(eta_j*L))
D_k = (sp.cos(eta_k*L)+sp.cosh(eta_k*L))/(sp.sin(eta_k*L)-sp.sinh(eta_k*L))

d_j = sp.sin(eta_j*x) - sp.sinh(eta_j*x) + D_j*(sp.cos(eta_j*x) - sp.cosh(eta_j*x))
d_k = sp.sin(eta_k*x) - sp.sinh(eta_k*x) + D_k*(sp.cos(eta_k*x) - sp.cosh(eta_k*x))
```

Obtenção das matris de rigidez e massa

Para obtenção das matrizes de massa e rigidez, é primeiro definido simbolicamente a área da seção transversal da viga, o momento de inércia da seção transversal da viga, o módulo de elasticidade da viga e a densidade da viga (também de forma simbolica variando com x).

In [49]:
```
A = sp.Piecewise((sp.pi* (0.03)**2 / 4, (x>=0) & (x<L/4)), (sp.pi* (0.05)**2 / 4,
rho = sp.Piecewise((7700, (x>=0) & (x<L/4)), (2700,  (x>=L/4) & (x<3*L/4)), (7700,
E = sp.Piecewise((2.1e11, (x>=0) & (x<L/4)), (7.1e10,  (x>=L/4) & (x<3*L/4)), (2.1e
I_z = sp.Piecewise(((sp.pi/4)*(0.03/2)**4, (x>=0) & (x<L/4)), ((sp.pi/4)*(0.05/2)**
```

Em seguida é definido simbolicamente como os termos Mjk e Kjk deverão ser calculados, e também são definidos o número de funções de base desejados `nfunc`, e os parâmetros referente as engrenagens e as molas de suspensão.

In [50]:
```
nfunc = 16
m_r = 8.5
J = 0.25 * m_r * 0.15**2

rotacional_eng = J*d_j.diff(x, 1).subs(x, L/8)*d_k.diff(x, 1).subs(x, L/8) + J*d_j.
translacional_eng = m_r*d_j.subs(x, L/8)*d_k.subs(x, L/8) + m_r*d_j.subs(x, 3*L/4)*
M_jk = sp.Integral(rho*A*d_j*d_k, (x, 0, L)) + translacional_eng + rotacional_eng

k_mola = 10e3
molas = 2 * k_mola * (d_j.subs(x, L/4) * d_k.subs(x, L/4)) + 2 * k_mola * (d_j.subs
K_jk = sp.Integral(E*I_z*sp.diff(d_j, x, 2)*sp.diff(d_k, x, 2), (x, 0, L)) +  molas
```

A seguir serão calculados os termos Mjk e Kjk e associados a cada linha j e coluna k.
O método `.subs()` é utilizado para substituir os valores de j e k nas funções de base.
O método `.doit()` é utilizado para que o SymPy realize a integração simbolica.
O método `.evalf()` é utilizado para que o SymPy realize os cálculos numéricos finais, como substituir o valor de π (após a integração simbólica).
Em seguida as matrizes `M` e `K` obtidas são convertidas para `numpy.array` e são salvas no formato `.npy` para que possam ser utilizadas posteriormente (evitando precisar recalcular as matrizes a cada execução do código).

- Importante: Esse código pode levar algo em torno de 30 ~ 40 minutos para ser executado, pois estão sendo realizadas as integrações simbolicas.

In [222…
```
M = sp.Matrix.zeros(nfunc, nfunc)
K = sp.Matrix.zeros(nfunc, nfunc)
for i in range(nfunc):
    for k_ in range(i+1):

        M[i, k_] = M_jk.subs({j: i+1, k: k_+1}).doit().evalf()
        K[i, k_] = K_jk.subs({j: i+1, k: k_+1}).doit().evalf()


M_array = np.array(M)
K_array = np.array(K)

# # Save the NumPy array to a file
np.save('mass_matrix_mrr.npy', M_array)
np.save('stiffness_matrix_mrr.npy', K_array)
```

Aqui são carregadas as matrizes de massa e rigidez obtidas anteriormente, e como a matriz é transposta, ou seja, $M^T = M$, os cálculos anteriores tinham sido realizados apenas para a matriz triangular inferior, e aqui é feito a simetrização da matriz.

In [51]:

```
M = np.load('mass_matrix_mrr.npy', allow_pickle=True)
K = np.load('stiffness_matrix_mrr.npy', allow_pickle=True)


for k in range(nfunc):
    for i in range(k+1):

        M[i, k] = M[k, i]
        K[i, k] = K[k, i]

M= sp.Matrix(M)
K= sp.Matrix(K)
```

Em seguida serão mostradas as matrizes obtidas, utilizando o método `evalf(n)` especificando o número de digitos `n` que serão mostrados por cada elemento da matriz.

In [235…

```
M.evalf(5)
```

Out[235]:

$$\begin{bmatrix} 39.854 & 3.1166 & -16.367 & 20.577 & -8.899 & -4.6948 & 19.269 & - \\ 3.1166 & 9.8416 & -1.345 & 5.077 & 7.7326 & -3.0462 & 8.1066 & 0 \\ -16.367 & -1.345 & 24.611 & -2.9401 & 11.689 & 18.495 & -8.7125 & 1 \\ 20.577 & 5.077 & -2.9401 & 33.087 & 6.2651 & 12.293 & 22.464 & - \\ -8.899 & 7.7326 & 11.689 & 6.2651 & 37.436 & 7.0133 & 15.571 & 2 \\ -4.6948 & -3.0462 & 18.495 & 12.293 & 7.0133 & 45.074 & 3.7478 & 1 \\ 19.269 & 8.1066 & -8.7125 & 22.464 & 15.571 & 3.7478 & 45.025 & 1 \\ -21.495 & 0.76765 & 12.264 & -11.879 & 21.745 & 10.578 & 10.076 & 5 \\ 11.848 & -9.9332 & -3.218 & 8.1619 & -23.243 & 30.862 & 11.425 & 8 \\ 2.1154 & 6.449 & -21.73 & -12.646 & 12.317 & -31.537 & 34.022 & 4 \\ -19.727 & -13.856 & 2.3685 & -28.575 & -21.37 & 11.834 & -13.207 & 3 \\ 20.117 & -9.395 & -25.151 & -4.1343 & -38.592 & -5.5696 & 8.1216 & - \\ -61.077 & 5.2422 & -18.414 & -35.457 & 6.6683 & -64.215 & 5.4764 & 3 \\ -146.9 & -20.003 & -343.04 & 19.284 & -50.129 & 24.914 & -229.81 & - \\ 2641.5 & -1401.3 & -21.663 & -728.66 & -733.32 & 689.19 & 1463.6 & 7 \\ -2.0145 \cdot 10^{6} & 6.0105 & 11.852 & -67600.0 & -50671.0 & 33768.0 & -16925.0 & -3 \end{bmatrix}$$

In [236…

```
K.evalf(5)
```

Out[236]:

$$
\begin{bmatrix}
2.304 \cdot 10^{5} & -2.853 \cdot 10^{5} & -3.7896 \cdot 10^{5} & 3.3744 \cdot 10^{5} & 7.0653 \cdot 10^{5} & 1.26 \\
-2.853 \cdot 10^{5} & 4.7655 \cdot 10^{6} & -1.0509 \cdot 10^{6} & -4.7413 \cdot 10^{6} & 1.2232 \cdot 10^{6} & -3.3 \\
-3.7896 \cdot 10^{5} & -1.0509 \cdot 10^{6} & 3.6042 \cdot 10^{7} & -1.1261 \cdot 10^{6} & -3.6602 \cdot 10^{7} & 2.74 \\
3.3744 \cdot 10^{5} & -4.7413 \cdot 10^{6} & -1.1261 \cdot 10^{6} & 1.2024 \cdot 10^{8} & 5.0994 \cdot 10^{5} & -1.0 \\
7.0653 \cdot 10^{5} & 1.2232 \cdot 10^{6} & -3.6602 \cdot 10^{7} & 5.0994 \cdot 10^{5} & 3.3276 \cdot 10^{8} & 1.86 \\
1.264 \cdot 10^{6} & -3.3899 \cdot 10^{6} & 2.7409 \cdot 10^{6} & -1.0336 \cdot 10^{8} & 1.8673 \cdot 10^{6} & 8.05 \\
7.1582 \cdot 10^{5} & 1.71 \cdot 10^{6} & -1.0042 \cdot 10^{7} & 2.1866 \cdot 10^{6} & -1.7973 \cdot 10^{8} & 1.76 \\
-7.0463 \cdot 10^{5} & 5.1181 \cdot 10^{6} & -4.6725 \cdot 10^{5} & 2.1287 \cdot 10^{7} & 4.1415 \cdot 10^{5} & -3.6 \\
-1.3604 \cdot 10^{6} & -2.5901 \cdot 10^{6} & 5.0294 \cdot 10^{7} & -3.0165 \cdot 10^{6} & 3.8355 \cdot 10^{7} & -9.5 \\
-2.1568 \cdot 10^{6} & 5.9663 \cdot 10^{6} & -5.6015 \cdot 10^{6} & 1.1785 \cdot 10^{8} & -3.4232 \cdot 10^{6} & -6.2 \\
-1.037 \cdot 10^{6} & -1.9985 \cdot 10^{6} & 1.8176 \cdot 10^{7} & -3.249 \cdot 10^{6} & 1.2867 \cdot 10^{8} & -2.8 \\
1.0735 \cdot 10^{6} & -3.2591 \cdot 10^{7} & 1.2379 \cdot 10^{6} & -3.1591 \cdot 10^{7} & 1.1459 \cdot 10^{7} & 2.24 \\
7.4335 \cdot 10^{8} & 4.5958 \cdot 10^{6} & -6.6948 \cdot 10^{8} & 5.0348 \cdot 10^{6} & -1.6179 \cdot 10^{9} & 2.17 \\
6.5483 \cdot 10^{8} & -9.5116 \cdot 10^{6} & 7.8726 \cdot 10^{6} & 2.0154 \cdot 10^{10} & 5.1481 \cdot 10^{6} & 9.89 \\
4.5555 \cdot 10^{10} & 3.2237 \cdot 10^{6} & 6.9117 \cdot 10^{10} & -8.47 \cdot 10^{11} & 7.2797 \cdot 10^{11} & 3.34 \\
-8.0065 \cdot 10^{11} & 7.2875 \cdot 10^{6} & -2.2609 \cdot 10^{6} & -3.5834 \cdot 10^{12} & -6.6411 \cdot 10^{5} & -1.76
\end{bmatrix}
$$

Solução da equação do movimento via método modal

Em seguida é definido o número de funções de forma desejados em cada comparação (4, 6, 8, 10, 16).
E são calculadas as frequencias naturais e os modos de vibração para cada número de funções de forma desejado.

In [52]:

```
M_array = np.array(M).astype(np.float64)
K_array = np.array(K).astype(np.float64)

n_funcoes = [4, 6, 8, 10, 12]

M_dict = {i: M_array[:i, :i] for i in n_funcoes}
K_dict = {i: K_array[:i, :i] for i in n_funcoes}
fn_dict = {}
a_dict = {}

for i in n_funcoes:
    # Autovalores e autovetores
    omega, a = linalg.eig(K_dict[i],M_dict[i])

    # Frequências naturais
    fn, ind = np.unique((np.sqrt(omega) / (2 * np.pi)).real, return_index=True)

    fn_dict[i] = fn

    # Ordenando os autovetores
    a = a[:, ind]

    # Normalização dos autovetores
```

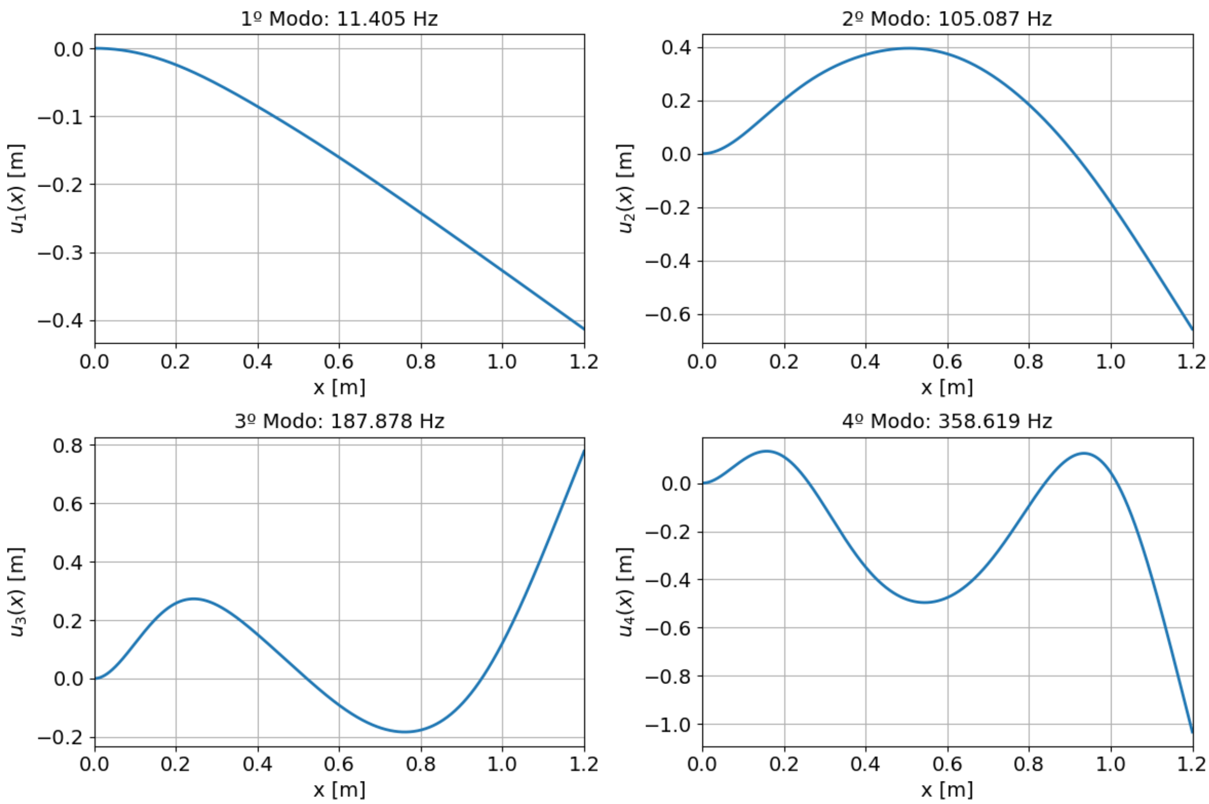
```
    D = np.sqrt(np.diag(np.dot(a.T, np.dot(M_dict[i], a))))
    a = np.dot(a, np.diag(1/D))
    a_dict[i] = a
```

Abaixo são calculadas as autofunções para os quatro primeiros modos

In [53]:
```
u_x = sp.Matrix.zeros(4, 1)
nfun = 8

for i in range(4):
    aux = 0
    for k_ in range(nfun):
        aux += a_dict[nfun][k_, i] * d_j.subs({j: k_+1}).evalf()
    u_x[i, 0] = aux
```

Em seguida é plotado o gráfico de cada um dos 4 modos de vibração, assim como a frequência natural associada, considerando a utilização de 8 funções de base com o método de Rayleigh-Ritz.

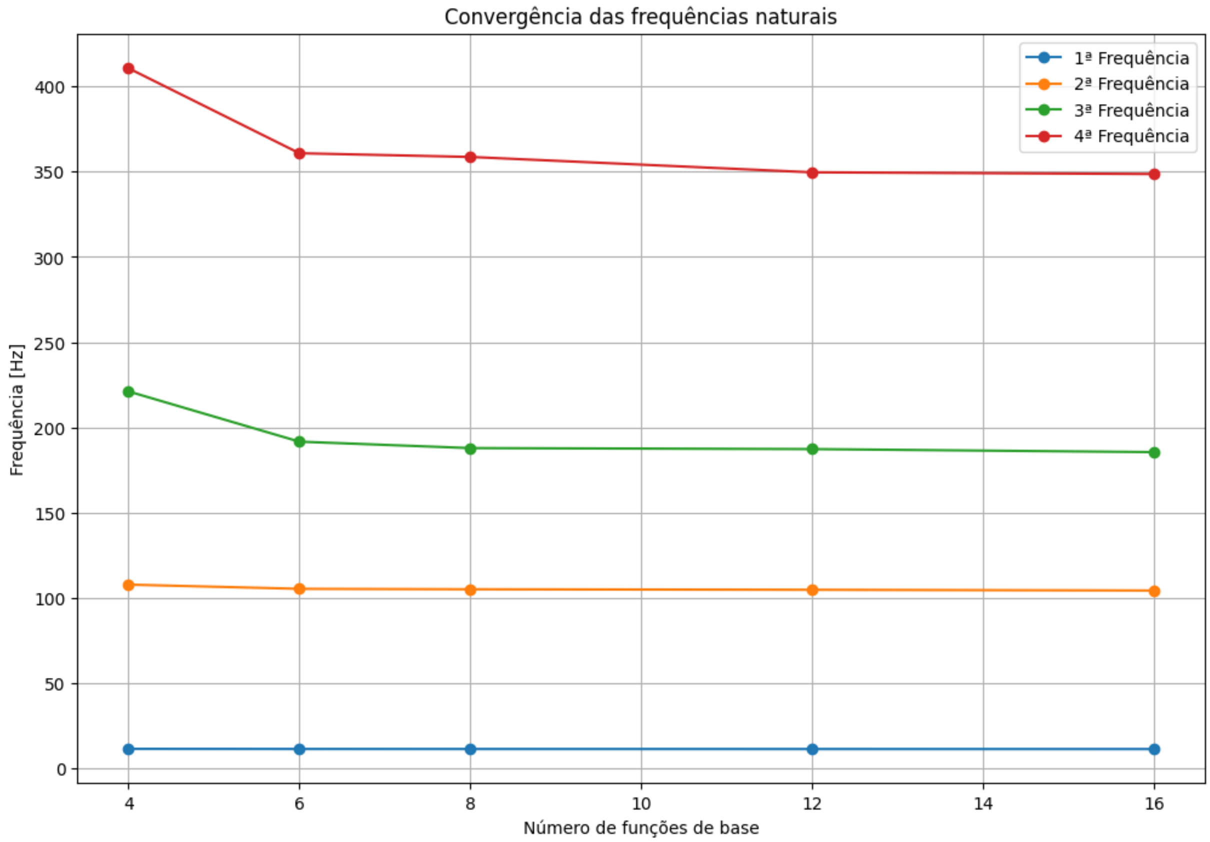
In [54]:
```
N=4
# Define the x-axis values

# Set the size and position of the figure
plt.figure(figsize=(12,8))
x_plot = np.linspace(0, L, 1000)

# Loop over each vibration mode
for k_ in range(1, N+1):

    # Create a subplot for the current mode
    plt.subplot(2, 2, k_)

    # Plot the vibration mode
    plt.plot(x_plot,sp.lambdify(x, u_x[k_-1], 'numpy')(x_plot).real, linewidth=2, m

    # Add labels and titles
    plt.grid(True)
    plt.title(f"{k_}º Modo: {np.real(fn_dict[nfun][k_-1]):.3f} Hz", fontsize=14)
    plt.xlabel("x [m]", fontsize=14)
    plt.ylabel(fr"${{u}}_{k_}(x)$ [m]", fontsize=14)
    plt.xlim(0, L)

    # Set the tick labels
    plt.yticks(fontsize=14)

    # Set the tick label interpreter to latex
    plt.tick_params(labelsize=14)


# Add spacing between subplots
plt.tight_layout()

# Show the plot
plt.show()
```



Plot da convergência de f_n em função do número de funções de base `nfunc` utilizadas.

In [256…

```
primeira_freq = []
segunda_freq = []
terceira_freq = []
quarta_freq = []

for i in n_funcoes:
    primeira_freq.append(np.real(fn_dict[i][0]))
    segunda_freq.append(np.real(fn_dict[i][1]))
    terceira_freq.append(np.real(fn_dict[i][2]))
    quarta_freq.append(np.real(fn_dict[i][3]))

plt.figure(figsize=(12,8))
plt.plot([4,6,8,12,16], primeira_freq, label='1ª Frequência', marker='o')
plt.plot([4,6,8,12,16], segunda_freq, label='2ª Frequência', marker='o')
plt.plot([4,6,8,12,16], terceira_freq, label='3ª Frequência', marker='o')
plt.plot([4,6,8,12,16], quarta_freq, label='4ª Frequência', marker='o')
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel('Número de funções de base')
plt.ylabel('Frequência [Hz]')
plt.title("Convergência das frequências naturais")
plt.show()
```



Método de Elementos Finitos (FEM)

Primeiramente é definido de forma simbólica o ξ e o a (tamanho do elemento), permitindo escrever o vetor $\eta(\xi)$ de funções de forma do elemento.

In [55]:
```
xi, a = sp.symbols('\\xi a')

eta = sp.Matrix([1/4*(2-3*xi+xi**3),
 a/4*(1-xi-xi**2+xi**3),
 1/4*(2+3*xi-xi**3),
 a/4*(-1-xi+xi**2+xi**3)])

num_elems = [8, 16, 64]
num_nos = [num_elem + 1 for num_elem in num_elems]
num_gls = [2 * nos for nos in num_nos]
tamanho_elem = [L / elem for elem in num_elems]
posicao_nos = [np.linspace(0, L, nos) for nos in num_nos]
```

Em seguida é implementado a obtenção da matriz de rigidez do elemento, e a matriz de massa do elemento, utilizando o método `subs()` para substituir os valores de ξ e a nas funções de forma.

In [56]:
```
nos_molas = [L/4, 3*L/4]
nos_eng = [L/8, 3*L/4]

# Viga engastada
gls_restritos = [0, 1]
```

```python
Matrizes_massa = []
Matrizes_rigidez = []

# Primeiro loop para calcular as matrizes de massa e rigidez variando o número de e
for enum, num_elem in enumerate(num_elems):

    # Calcula as integrais de massa e rigidez para um elemento (tendo o tamanho do
    eta_num_elem = eta.subs(a, tamanho_elem[enum])
    integral_massa  =  sp.integrate(eta_num_elem*eta_num_elem.T, (xi, -1, 1))
    integral_rigidez = sp.integrate(eta_num_elem.diff(xi, 2)*eta_num_elem.diff(xi,

    # Define os graus de liberdade das engrenagens e das molas
    gl_engs = [int(np.argmin(np.abs(posicao_nos[enum] - no_eng))) * 2 for no_eng in
    gl_inercia = [gl + 1 for gl in gl_engs]
    gl_molas = [int(np.argmin(np.abs(posicao_nos[enum] - no_mola))) * 2 for no_mola

    # Inicializa as matrizes globais de massa e rigidez
    M_global = sp.Matrix.zeros(num_gls[enum], num_gls[enum])
    K_global = sp.Matrix.zeros(num_gls[enum], num_gls[enum])

    # Faz um loop em cada elemento
    for elem in range(num_elem):
        # Define os nós do elemento
        nos_elem = np.linspace(0, L, num_elem+1)[elem:elem+2]
        # Inicializa as matrizes do elemento
        M_e = sp.Matrix.zeros(4, 4)
        K_e = sp.Matrix.zeros(4, 4)

        # Substitui as posicoes dos nós no elemento e calcula Rho, A, E e I_z
        rhoA_e = (rho * A).subs(x, nos_elem[0]) * tamanho_elem[enum]
        EIz_e = (E * I_z).subs(x, nos_elem[0]) / tamanho_elem[enum] ** 3

        # Calcula as matrizes de massa e rigidez do elemento
        M_e  = (rhoA_e * integral_massa).evalf()
        K_e = (EIz_e * integral_rigidez).evalf()

        # Adiciona as matrizes do elemento nas matrizes globais
        M_global[2*elem:2*elem+4, 2*elem:2*elem+4] += M_e
        K_global[2*elem:2*elem+4, 2*elem:2*elem+4] += K_e

    M_global = np.array(M_global).astype(np.float64)
    K_global = np.array(K_global).astype(np.float64)

    # Adiciona as molas e inércias das engrenagens
    M_global[gl_engs, gl_engs] += m_r
    M_global[gl_inercia, gl_inercia] += J
    K_global[gl_molas, gl_molas] += 2*k_mola

    # Remove os graus de liberdade restritos
    M_global = np.delete(M_global, gls_restritos, axis=0)
    M_global = np.delete(M_global, gls_restritos, axis=1)
    K_global = np.delete(K_global, gls_restritos, axis=0)
    K_global = np.delete(K_global, gls_restritos, axis=1)
```

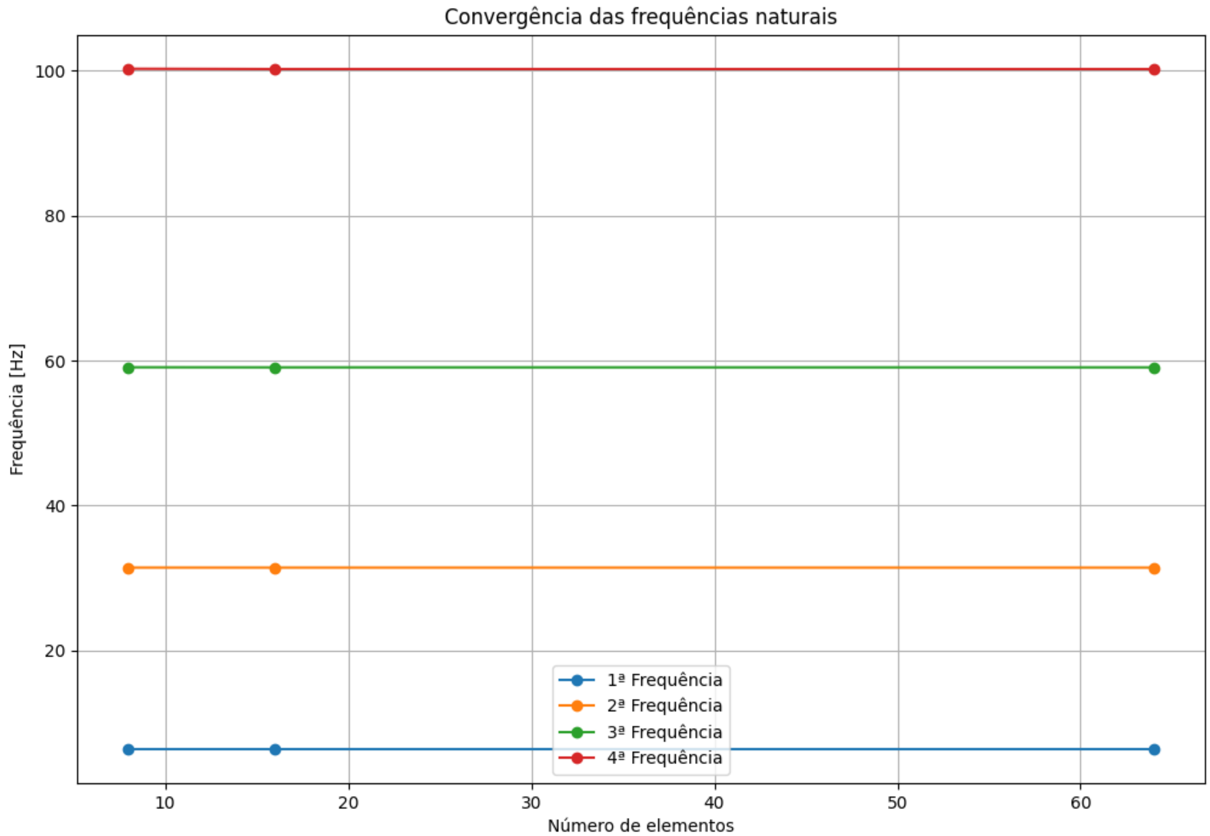
```
    Matrizes_massa.append(M_global)
    Matrizes_rigidez.append(K_global)
```

A partir das matrizes globais é resolvido o problema de Autovalor, como feito anteriormente no MRR.

In [57]:
```
fem_fn = []
fem_a = []

for enum in range(len(num_elems)):
    # Autovalores e autovetores
    omega, a = linalg.eig(Matrizes_rigidez[enum],Matrizes_massa[enum])

    # Frequências naturais
    fn, ind = np.unique((np.sqrt(omega) / (2 * np.pi)).real, return_index=True)
    # Ordenando os autovetores
    a = a[:, ind]

    # Normalização dos autovetores
    D = np.sqrt(np.diag(np.dot(a.T, np.dot(Matrizes_massa[enum], a))))
    a = np.dot(a, np.diag(1/D))

    fem_fn.append(fn)
    fem_a.append(a)
```

Em sequência é plotado a convergência de f_n em função do número de elementos utilizados.

In [58]:
```
primeira_freq = [fn[0] for fn in fem_fn]
segunda_freq = [fn[1] for fn in fem_fn]
terceira_freq = [fn[2] for fn in fem_fn]
quarta_freq = [fn[3] for fn in fem_fn]


plt.figure(figsize=(12,8))
plt.plot(num_elems, primeira_freq, label='1ª Frequência', marker='o')
plt.plot(num_elems, segunda_freq, label='2ª Frequência', marker='o')
plt.plot(num_elems, terceira_freq, label='3ª Frequência', marker='o')
plt.plot(num_elems, quarta_freq, label='4ª Frequência', marker='o')
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel('Número de elementos')
plt.ylabel('Frequência [Hz]')
plt.title("Convergência das frequências naturais")
plt.show()
```



A seguir serão plotados os 4 primeiros modos de vibração, comparando com os resultados obtidos pelo MRR.

In [60]:
```
N=4
# Define the x-axis values

# Set the size and position of the figure
plt.figure(figsize=(12,8))
x_plot = np.arange(0, L+tamanho_elem[-1], tamanho_elem[-1])[1:]
x_plot_mrr = np.linspace(0, L, 1000)

# Loop over each vibration mode
for k_ in range(1, N+1):

    # Create a subplot for the current mode
    plt.subplot(2, 2, k_)

    # Plot the vibration mode
    plt.plot(x_plot,fem_a[-1][0:-1:2, :][:, k_-1], linewidth=2, markersize=8, marke
    plt.plot(x_plot_mrr,sp.lambdify(x, u_x[k_-1], 'numpy')(x_plot_mrr).real, linewi

    # Add labels and titles
    plt.grid(True)
    plt.title(f"{k_}º Modo", fontsize=14)
    plt.xlabel("x [m]", fontsize=14)
    plt.ylabel(fr"${{u}}_{k_}(x)$ [m]", fontsize=14)
    plt.xlim(0, L)
    plt.legend()
```

```
    # Set the tick labels
    plt.yticks(fontsize=14)

    # Set the tick label interpreter to latex
    plt.tick_params(labelsize=14)


# Add spacing between subplots
plt.tight_layout()

# Show the plot
plt.show()
```