Travail encadré de recherche, méthode de Lindeberg et vitesses de convergence.

Victor Bellissant

June 4, 2021

1 Introduction

Dans ce travail encadré de recherche j'ai établi une extension du T.C.L. à des tableaux triangulaires de variables aléatoires indépendantes qui vérifient le critère de Lindeberg. Ce résultat montre que le critère de Lindeberg est suffisant pour obtenir cette convergence.

J'ai ensuite montré des égalités entre différentes écritures de la distance de Wasserstein et j'ai étudié la vitesse de convergence dans le T.C.L. sous différentes conditions et par différentes méthodes.

2 Extension du T.C.L. par le critère de Lindeberg :

Soit $(X_{k,n})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes formant un tableau triangulaire tq :

$\mathbb{E}(X_{k,n}) = 0$ et $\mathbb{E}(X_{k,n}^2) < \infty \;\; \forall k \in [1, ..., n], \forall n \in \mathbb{N}^*$

vérifiant :

1: $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_{k,n}^2) = 1$

2: $\forall \epsilon > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| > \epsilon) = 0$ Le critère de Lindeberg.

Alors on peut montrer que : $\sum_{k=1}^{n} X_{k,n}$ converge en loi vers une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Preuve :

Soit $(Y_{k,n})$ une suite de variables aléatoires tel que $\forall k \in [1, ..., n]$, $n \in \mathbb{N}^*$:
$(Y_{k,n})$ suit une loi $\mathcal{N}(0, \mathbb{E}(X_{k,n}^2))$

Je pose :

1: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k,n}$ et $T_1 = \sum_{k=1}^{n} Y_{k,n}$

2: $\mathbb{E}(X_{k,n}) = \mathbb{E}(Y_{k,n})$ et $\mathbb{E}(X_{k,n}^2) = \mathbb{E}(Y_{k,n}^2)$ $\forall k \in [|1, n|]$

3: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tq : $||f'||_\infty, ||f''||_\infty$ et $||f'''||_\infty$ soient bornées.
On dispose de la formule suivante :

$$\mathrm{E(f(S}_n) - f(T_1)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(f(S_{k-1} + X_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i,n}) - f(S_{k-1} + Y_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i,n})) \quad (2.1)$$

Soit : $Z_{k,n} = S_{k-1} + \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i,n}$

Alors :

$\mathrm{f(S}_{k-1} + X_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i,n})$
$= f(Z_{k,n}) + X_{k,n} f'(Z_{k,n}) + \int_0^1 (1-t) X_{k,n}''(f''(Z_{k,n} + tX_{k,n}) - f''(Z_{k,n}) + f''(Z_{k,n}))dt$
$= f(Z_{k,n}) + X_{k,n} f'(Z_{k,n}) + \frac{1}{2} X_{k,n}^2 f''(Z_{k,n}) + R_k$
$R_k = \int_0^1 (1-t) X_{k,n}^2 (f''(Z_{k,n} + tX_{k,n}) - f''(Z_{k,n}))dt$

et $\mathrm{f(S}_{k-1} + Y_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i,n})$
$= f(Z_{k,n}) + Y_{k,n} f'(Z_{k,n}) + \int_0^1 (1-t) Y_{k,n}^2 (f''(Z_{k,n} + tY_{k,n}) - f''(Z_{k,n}) + f''(Z_{k,n}))dt$
$= f(Z_{k,n}) + Y_{k,n} f'(Z_{k,n}) + \frac{1}{2} Y_{k,n}^2 f''(Z_{k,n}) + R'_k$
$R'_k = \int_0^1 (1-t) Y_{k,n}^2 (f''(Z_{k,n} + tY_{k,n}) - f''(Z_{k,n}))dt$

A partir des hypothèses sur les moments des variables $X_{k,n}$ et $Y_{k,n}$ il est facile d'estimer la formule (2.1) $\forall k \in [|1,n|]$:

$(Y_{k,n})$, $Z_{k,n}$ et $(X_{k,n})$, $Z_{k,n}$ étant deux à deux indépendantes et $(Y_{k,n})$, $(X_{k,n})$ étant centrés:

$\mathbb{E}(X_{k,n}f'(Z_{k,n})) = \mathbb{E}(X_{k,n})\mathbb{E}(f'(Z_{k,n})) = 0$

$\mathbb{E}(Y_{k,n}f'(Z_{k,n})) = \mathbb{E}(Y_{k,n})\mathbb{E}(f'(Z_{k,n})) = 0$

Pour les moments d'ordre 2 :

$\frac{1}{2}(\mathbb{E}(X_{k,n}^2 f''(Z_{k,n}) - \mathbb{E}(Y_{k,n}^2 f''(Z_{k,n}))) = 0$ Par l'hypothèse 2.

Il reste à majorer les restes :

A) Majoration de R_k :

—$\mathrm{E}(\mathrm{R}_k)| = \mathbb{E}(\int_0^1 (1-t)X_{k,n}^2(f''(Z_{k,n}+tX_{k,n}) - f''(Z_{k,n}))dt)$

$|f''(Z_{k,n}+tX_{k,n}) - f''(Z_{k,n})| \leq min(2||f''||_\infty, t|X_{k,n}|||f'''||_\infty)$

Alors en posant C=$sup(||f'||_\infty, ||f''||_\infty, ||f'''||_\infty)$, comme $t \in [0,1]$:

$|\mathbb{E}(R_k)| \leq 2C\int_0^1 (1-t)\mathbb{E}(X_{k,n}^2 min(1, |X_{k,n}|))$

De plus $\forall \epsilon \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\mathrm{X}_{k,n}^2 min(1,|X_{k,n}|)) \\
&\quad = \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \geq 1) + \mathbb{E}(|X_{k,n}|^3 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon) + \mathbb{E}(|X_{k,n}|^3 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in [\epsilon, 1[) \\
&\qquad < \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \geq 1) + \epsilon\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon) + \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n} \in [\epsilon, 1[)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Alors :

$$|\ \mathbb{E}(R_k)| \leq C(\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \geq 1) + \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in [\epsilon, 1[)) + C\epsilon\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon) \tag{2.3}$$

En passant à la somme :

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=1}^n |\mathbb{E}(R_k)| \\
&\quad \leq C\sum_{k=1}^n (\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \geq 1) + \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in [\epsilon, 1[)) + C\epsilon \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Grace au critère de Lindeberg :

$C \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \geq 1) + \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in [\epsilon, 1[)) = 0$

Alors pour n assez grand, $\forall \epsilon > 0$:

$\sum_{k=1}^{n} |\mathbb{E}(R_k)| \leq C\epsilon \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon) \leq C\epsilon$

B) Majoration de R'_k :

$| \mathbb{E}(R'_k)| = \mathbb{E}(\int_0^1 (1-t) Y_{k,n}^2 (f''(Z_{k,n} + tY_{k,n}) - f''(Z_{k,n}))dt)$
$\leq \mathbb{E}(\int_0^1 (1-t) Y_{k,n}^2 min(2||f''||_\infty, t|Y_{k,n}|||f'''||_\infty))$
$\leq 2C(\int_0^1 (1-t)\mathbb{E}(Y_{k,n}^2 min(1, |Y_{k,n}|))$

$\forall \epsilon \in]0, 1[$ et pour $K > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(| Y_{k,n}|^3) \leq K(\mathbb{E}(Y_{k,n}^2))^{3/2} = K(\mathbb{E}(X_{k,n}^2))^{3/2} \\
\leq K[\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon) + \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in]\epsilon, 1[)^{3/2}] \\
\leq K2^{1/2}(\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon))^{3/2} + K2^{1/2}(\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in]\epsilon, 1[))^{3/2} \\
\leq K2^{1/2}(\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon)^{1/2} \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon)) \\
+ K2^{1/2}(\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in]\epsilon, 1[))^{3/2} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(| Y_{k,n}|^3) \leq K2^{1/2} \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon)^{1/2} \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon)) \\
+ K2^{1/2} \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in]\epsilon, 1[))^{3/2} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Grâce au critère de Lindeberg :

$K2^{1/2} \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| \in]\epsilon, 1[))^{3/2} = 0$

Alors pour n assez grand, $\forall\epsilon > 0$:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|\,Y_{k,n}|^3) \leq K2^{1/2} \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon)^{1/2} \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon))$$
$$\leq K2^{1/2}\epsilon \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_{k,n}^2 \mathbf{1}|X_{k,n}| < \epsilon) \leq K2^{1/2}\epsilon \quad (2.7)$$

On obtient finalement : $\sum_{k=1}^{n} |\mathbb{E}(R'_k)| \leq CK\epsilon 2^{1/2}$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(S_n) - f(T_1)) &\leq \mathbb{E}(|f(S_n) - f(T_1)|) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|f(S_{k-1} + X_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i,n}) - f(S_{k-1} + Y_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n} Y_{i,n})|) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\mathbb{E}(R_k) - \mathbb{E}(R'_k)| \\
&\leq C\epsilon(1 + K2^{1/2}) \quad \forall\epsilon > 0 \quad (2.8)
\end{aligned}$$

D'ou la convergence en loi de $\sum_{k=1}^{n} X_{k,n}$ vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Ce résultat montre que le critère de Lindeberg est suffisant pour obtenir la convergence du T.C.L. pour des tableaux triangulaires. Il s'agit d'un résultat important car beaucoup de méthodes statistiques reposent sur ce résultat et sont trés utilisées en Science des données ou en Finance.

3 Quelques résultats concernant la distance $\mathbf{W}_1$

L'objectif de cette section est d'établir une équivalence pour l'écriture de la distance de Wasserstein dans L^1.

Soient μ et ν deux lois de probabilité définies sur $\mathbb{R}$ et F_μ , F_ν leurs fonctions de répartitions respectives.

Une définition :

La distance de Wasserstein 1 : $W_1(\mu,\nu) = \inf(\mathbb{E}|X-Y|) \quad (X \rightsquigarrow \mu, Y \rightsquigarrow \nu)$

Une autre ecriture : $W_1(\mu,\nu) = \underset{f\in 1-lip}{Sup}\,[\int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu]$

Je vais donc montrer que :

$\mathrm{W}_1(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)|dt = \int_0^1 |F_\mu^{-1}(u) - F_\nu^{-1}(u)|du \qquad u \to \mathcal{U}[0,1]$
$= \underset{f\in 1-lip}{Sup}\,[\int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu]$

Partie 1 : $\int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)|dt = \int_0^1 |F_\mu^{-1}(u) - F_\nu^{-1}(u)|du$ (3.1)

Comme $|F_\mu(t) - F_\nu(t)| = max(0, F_\mu(t) - F_\nu(t)) + max(0, F_\nu(t) - F_\mu(t))$

Montrons que : $max(0, F_\mu(t) - F_\nu(t)) = \int_0^1 \mathbf{1}_{F_\mu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\nu(t)<u}du$

en effet si $F_\mu(t) \leq F_\nu(t)$ alors $max(0, F_\mu(t) - F_\nu(t)) = 0$
et $\int_0^1 \mathbf{1}_{F_\mu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\nu(t)<u}du = 0$ car $\mathbf{1}_{F_\mu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\nu(t)<u} = 0$

si $F_\mu(t) \geq F_\nu(t)$ alors en remarquant que les fonctions de répartitions sont continues à gauche et ont une limite a droite et que ces fonctions sont à valeur dans [0,1] on obtient :

$F_\mu(t) - F_\nu(t) = \int_0^1 \mathbf{1}_{F_\mu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\nu(t)<u}du$
D'ou : $max(0, F_\mu(t) - F_\nu(t)) = \int_0^1 \mathbf{1}_{F_\mu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\nu(t)<u}du$
Par le même raisonnement : $max(0, F_\nu(t) - F_\mu(t)) = \int_0^1 \mathbf{1}_{F_\nu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\mu(t)<u}du$

$F_\mu(t)$ et $F_\nu(t)$ étant des bijections de $\mathbb{R}$ sur [0,1], leurs inverses généralisées sont encore continues et on peut écrire :

$\mathbf{1}_{F_\mu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\nu(t)<u} = \mathbf{1}_{F_\mu^{-1}(u)\leq t}\mathbf{1}_{F_\nu^{-1}(u)>t}$
$\int_0^1 \mathbf{1}_{F_\mu(t)\geq u}\mathbf{1}_{F_\nu(t)<u}du = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{F_\mu^{-1}(u)\leq t}\mathbf{1}_{F_\nu^{-1}(u)>t}dt$

Donc :

$max(0, F_\mu(t) - F_\nu(t)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{F_\mu^{-1}(u) \leq t} \mathbf{1}_{F_\nu^{-1}(u) > t} dt$

$max(0, F_\nu(t) - F_\mu(t)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{F_\nu^{-1}(u) \leq t} \mathbf{1}_{F_\mu^{-1}(u) > t} dt$

Comme ces intégrales sont définies positives, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$\int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} (\int_0^1 \mathbf{1}_{F_\mu(t) \geq u} \mathbf{1}_{F_\nu(t) < u} du) dt + \int_{\mathbb{R}} (\int_0^1 \mathbf{1}_{F_\nu(t) \geq u} \mathbf{1}_{F_\mu(t) < u} du) dt$
$= \int_0^1 (\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{F_\mu^{-1}(u) \leq t} \mathbf{1}_{F_\nu^{-1}(u) > t} dt) du + \int_0^1 (\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{F_\nu^{-1}(u) \leq t} \mathbf{1}_{F_\mu^{-1}(u) > t} dt) du$
$= \int_0^1 |F_\mu^{-1}(u) - F_\nu^{-1}(u)| du$

Ce qui montre que :

$\int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| dt = \int_0^1 |F_\mu^{-1}(u) - F_\nu^{-1}(u)| du \qquad (3.1)$

Partie 2 : $\int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| dt = \underset{f \in 1-lip}{Sup} [\int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu]$ (3.2)

Via l'article 22 de Merlevède (2007) :

En utilisant le dualité L^1/L^∞ et le fait que $f \in 1 - Lip$

$\int_{\mathbb{R}} f d\mu - f d\nu = \int_{\mathbb{R}} f'(t)(F_\mu - F_\nu) dt$

Alors :

$\underset{f \in 1-lip}{Sup} \int_{\mathbb{R}} |f d\mu - f d\nu| = \underset{f \in 1-lip}{Sup} ||f'||_\infty \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t) dt| = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| dt \qquad (3.2)$

Partie 3 : $\underset{f \in 1-lip}{Sup} \int_{\mathbb{R}} |f d\mu - f d\nu| = \inf(\mathbb{E}|X - Y|) \quad (3.3)$

Par définition :

$W_1(\mu, \nu) = \inf(\mathbb{E}|X - Y|) \leq \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| dt = \underset{f \in 1-lip}{Sup} \int_{\mathbb{R}} |f d\mu - f d\nu|$

f étant $1 - Lip$: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$=> \underset{f \in 1-lip}{Sup} \int_{\mathbb{R}} |f d\mu - f d\nu| \leq \inf(\mathbb{E}|X - Y|)$

Alors : $W_1(\mu, \nu) = \underset{f \in 1-lip}{Sup} \int_{\mathbb{R}} |f d\mu - f d\nu| \qquad (3.3)$

D'où : $W_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| dt = \int_0^1 |F_\mu^{-1}(u) - F_\nu^{-1}(u)| du = \underset{f \in 1-lip}{Sup} [\int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu]$

4 Etude de la vitesse de convergence

Dans cette section je vais étudier la vitesse de convergence d'une suite de variables aléatoires I.I.D. vers la loi normale à travers trois résultats.

Partie 1 : Moments d'ordre 4 et lemme de Rio.

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant des moments finis d'ordre 4 et (Y_k) une suite de variable aléatoire i.i.d. vérifiant :

1: $\forall k \in [|1,n|] \quad X_k$ et Y_k sont centrées et $\sum_{k=1}^n Y_k = G_{n,\sigma^2} \quad G_{n,\sigma^2} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

2: $\forall k \in [|1,n|] \quad \mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(Y_k^2)$

3: $\forall k \in [|1,n|] \quad \mathbb{E}(X_k^3) = M_1 < +\infty \quad \mathbb{E}(X_k^4) = M_2 < +\infty$

4: $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ avec $S_n \perp\!\!\!\perp \mathrm{T}_n$

5: $\forall f \in 1 - lip \quad \Delta_k = f_k(S_{k-1} + X_k) - f_k(S_{k-1} + Y_k) \quad , S_0 = 0$

6: $f_k(x) = E(f(x + y + T_n - T_k))$ et K une constante positive.

Alors on peut montrer une vitesse de convergence dans le T.C.L. de l'ordre de $K\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$:

Par l'indépendance de X_k et Y_k :

$\mathbb{E}(f(S_n + Y) - f(T_n + Y)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta_k) = W_1(S_n, Y) \qquad (4.1)$

Pour avoir une idée de la vitesse de convergence on estime le terme Δ_k par développement de Taylor :

$$f_k(S_{k-1} + X_k) = f_k(S_{k-1}) + X_k f_k'(S_{k-1}) + \frac{1}{2}X_k^2 f_k''(S_{k-1}) + \frac{1}{6}X_k^3 f_k'''(S_{k-1}) + R_k$$

$$f_k(S_{k-1} + Y_k) = f_k(S_{k-1}) + Y_k f_k'(S_{k-1}) + \frac{1}{2}Y_k^2 f_k''(S_{k-1}) + \frac{1}{6}Y_k^3 f_k'''(S_{k-1}) + R_k'$$

$$\mathrm{E}(\Delta_k) = \mathbb{E}(f_k(S_{k-1} + X_k) - f_k(S_{k-1} + Y_k))$$
$$= f_k'(S_{k-1})\mathbb{E}(X_k - Y_k) + f_k''(S_{k-1})\frac{1}{2}\mathbb{E}(X_k^2 - Y_k^2) + f_k'''(S_{k-1})\frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k^3 - Y_k^3) + \mathbb{E}(R_k + R_k') \quad (4.2)$$

f'$_k(S_{k-1})\mathbb{E}(X_k - Y_k) = 0$ par 1

$f_k''(S_{k-1})\frac{1}{2}\mathbb{E}(X_k^2 - Y_k^2) = 0$ par 2

$f_k'''(S_{k-1})\frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k^3 - Y_k^3) = f_k'''(S_{k-1})\frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k^3)$ Car Y_k est Gaussienne.

$f_k'''(S_{k-1})\frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k^3) \leq \frac{M_1}{6}||f_k'''(S_{k-1})||_\infty$ par 3

Je vais donc estimer les termes $||f_k'''(S_{k-1})||_\infty$ et $\mathbb{E}(R_k + R_k')$.

Je dispose du Lemme 2.1 d'un article de Rio et Dedecker.

Lemme 4.1. *Soit f une fonction 1-Lip, Y une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et B une variable aléatoire réelle indépendante de Y. Alors :*
$|\frac{d^i}{dx^i}\mathbb{E}f(x+tY+B)| \leq t^{1-i}||\Phi^{(i-1)}||_1$

En appliquant ce Lemme à $||f_k'''(S_{k-1})||_\infty$ et $\mathbb{E}(R_k + R_k')$:

On obtient $\quad ||f_k'''(S_{k-1})||_\infty \leq \frac{1}{(n-k+1)}$

En sommant sur k : $\sum_{k=1}^n f_k'''(S_{k-1})\frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k^3) \leq \frac{M_1}{6}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+1)} \approx \frac{M1}{6}log(n)$

$\mathbb{E}(R_k + R_k') \leq \frac{1}{12}||f_k''''(S_{k-1})||_\infty|\mathbb{E}(X_k^4) - \mathbb{E}(Y_k^4)|$

$||f_k''''(S_{k-1})||_\infty \leq t^{-3}||\Phi^3||_1 \quad$ avec $||\Phi^3||_1 \leq \frac{8}{5}$

En sommant sur k : $\sum_{k=1}^n f_k''''(S_{k-1})\frac{1}{12}|E(X_k^4 - Y_k^4)| << \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} \approx o(1)$

Finalement en regroupant ces résultats on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta_k) = W_1(S_n, G_{n\sigma^2}) \leq \frac{M1}{6}log(n) + o(1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta_k) = W_1(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, G_{n\sigma^2}) \leq \frac{M1}{6}\frac{log(n)}{\sqrt{n}}$$

Sous ces conditions j'obtiens bien une vitesse de convergence de l'ordre de $K\frac{log(n)}{\sqrt{n}}$.

Partie 2 : Théorème pour moment d'ordre 3.

Théorème 4.1. *Soit* $(X_k)_{k\geq 1}$ *une suite de variable aléatoire i.i.d. centrée* $\in L^3(\mathbb{R})$
Soit $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_0^2)$ *alors* $\exists C > 0$ *tq* $\forall n \geq 1$: $W_1(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, G_{n,\sigma^2}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$

Preuve :

On se place dans les mêmes conditions que pour la partie 1 sauf que les variables (X_k) ne possèdent que des moments d'ordre 3. Via un développement de Taylor à l'ordre 3 on obtient :

$\mathrm{E}(\Delta_k) = \mathbb{E}(f_k(S_{k-1} + X_k) - f_k(S_{k-1} + Y_k))$
$= f_k'(S_{k-1})\mathbb{E}(X_k - Y_k) + f_k''(S_{k-1})\frac{1}{2}\mathbb{E}(X_k^2 - Y_k^2) + f_k'''(S_{k-1})\frac{1}{6}\mathbb{E}(X_k^3 - Y_k^3) \quad (4.3)$

Les variables (X_k) et (Y_k) ayant leurs deux premiers moments identiques, pour avoir une idée de la vitesse de convergence de (X_k) vers (G_{n,σ^2}) il faut estimer la distance entre $f_k'''(S_{k-1})$ et $f_k'''(T_{k-1})$ $\forall k \in [|1, n|]$:

Pour connaitre cette distance par développement je pars du résultat suivant :

E($f'''_{n-k}(S_{k-1}) - f'''_{n-k}(T_{k-1})) = \mathbb{E}(f'''(S_{k-1} + \sum_{l=k}^{n} Y_l) - f'''(T_{k-1} + \sum_{l=k}^{n} Y_l))$
$= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(f'''(S_{i-2} + X_{i-1} + \sum_{u=i}^{k-1} Y_u + \sum_{l=k}^{n} Y_l) - f'''(S_{i-2} + Y_{i-1} + \sum_{u=i}^{k-1} Y_u + \sum_{l=k}^{n} Y_l))$
$= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(f'''_{n-i}(S_{i-2} + X_{i-1}) - f'''_{n-i}(S_{i-2} + Y_{i-1}))$ (4.4)

Développement de $f'''_{n-i}(S_{i-2} + X_{i-1})$ et de $f'''_{n-i}(S_{i-2} + Y_{i-1})$:

$f'''_{n-i}(S_{i-2} + X_{i-1}) - f'''_{n-i}(S_{i-2}) = X_{i-1} f^{(4)}_{n-i}(S_{i-2}) + \frac{1}{2} X_{i-1}^2 f^{(5)}_{n-i}(S_{i-2})$
$+ \frac{X_{i-1}^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 f^{(6)}_{n-i}(S_{i-2} + (X_{i-1})s) ds$

$f'''_{n-i}(S_{i-2} + Y_{i-1}) - f'''_{n-i}(S_{i-2}) = Y_{i-1} f^{(4)}_{n-i}(S_{i-2}) + \frac{1}{2} X_{i-1}^2 f^{(5)}_{n-i}(S_{i-2})$
$+ \frac{Y_{i-1}^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 f^{(6)}_{n-i}(S_{i-2} + (Y_{i-1})s) ds$

Via le changement de variable $t = a + (b-a)s \quad a = S_{i-2}$

En faisant la différence et en passant à l'espérance $\forall k \in [|1, n|]$:

(4.4) $= \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbb{E}(X_{i-1}^3)}{2} \int_0^1 (1-s)^2 f^{(6)}_{n-i}(S_{i-2} + (X_{i-1})s) ds$ car Y_{i-1} est gaussienne.

(4.4)$\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbb{E}(|X_0|^3)}{2} ||f^{(6)}_{n-i}||_\infty \int_0^1 (1-s)^2 ds$ car les X_{i-1} sont i.i.d.

Pour obtenir une estimation de $||f^{(6)}_{n-i}||_\infty$ on dispose du Lemme 2.1 de l'article de Rio et Dedecker, Lemme 4.1 de cet article:

$||\Phi^{(5)}||_1 = C_1 \quad C_1 > 0$

Via le lemme 4.1 : $||f^{(6)}_{n-i}||_\infty \leq t^{-5} C_1$ avec $t = (n-i+1)^{1/2}$

D'oû : (4.4) $\leq \frac{\mathbb{E}(|X_0|^3)}{6} \sum_{i=1}^{k} \frac{C_1}{(n-i+1)^{5/2}}$

En sommant sur k :

$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(f'''_{n-k}(S_{k-1}) - f'''_{n-k}(T_{k-1})) << \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n-i+1)^{5/2}} = C$

Avec C une constante positive.

Finalement on obtient $W_1(S_n, G_{n,\sigma^2}) \leq C$ et $W_1(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, G_{n,\sigma^2}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$

Ce qui établit la preuve du Théorème.

Partie 3 : Une autre méthode.

Dans cette partie, les variables admettent un moment d'ordre 3, sont toujours I.I.D. et centrés, par une méthode de troncature je montre que la vitesse de convergence est encore de l'ordre de $\frac{C}{\sqrt{n}}$.

Je découpe les variables X_k comme suit :

$\tilde{X}_k = X_{k\mathbf{1}_{|X_k| \leq \sqrt{n-k+1}}} - \mathbb{E}(X_{k\mathbf{1}_{|X_k| \leq \sqrt{n-k+1}}})$

Je pose :

1 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \tilde{S_n} = \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k \quad T_n = \sum_{k=1}^n Y_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

2 $W_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| dt$

3 $G_{n,\sigma^2} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \mathbb{E}(|X_0|^3) = C_0$

Par l'inégalitée de Cauchy-Schwartz :

$W_1(S_n, G_{n,\sigma^2}) \leq W_1(S_n, \tilde{S_n}) + W_1(\tilde{S_n}, G_{n,\sigma^2})$

Pour obtenir une vitesse de convergence, il va falloir estimer les termes $W_1(S_n, \tilde{S_n})$ et $W_1(\tilde{S_n}, G_{n,\sigma^2})$:

A) Majoration de $W_1(S_n, \tilde{S_n})$:

$W_1(S_n, \tilde{S_n}) \leq \mathbb{E}(|\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k|) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k - \tilde{X}_k|)$

$\forall k \in [|1, n|]$: $|X_k - \tilde{X}_k| \leq |X_k - X_{k\mathbf{1}_{|X_k| \leq \sqrt{n-k+1}}} + \mathbb{E}(X_{k\mathbf{1}_{|X_k| \leq \sqrt{n-k+1}}})|$

Or les X_k sont centrées : $\mathbb{E}(X_{k\mathbf{1}_{|X_k| > \sqrt{n-k+1}}}) = -\mathbb{E}(X_{k\mathbf{1}_{|X_k| \leq \sqrt{n-k+1}}})$

Ce qui donne : $\mathbb{E}(|X_k - \tilde{X}_k|) \leq 2|\mathbb{E}(X_{k\mathbf{1}_{|X_k| > \sqrt{n-k+1}}})|$

Les X_k étant équidistribués :

$\mathbb{E}(|X_k - \tilde{X}_k|) \leq 2\mathbb{E}(|X_0|_{\mathbf{1}_{X_0^2 > n-k+1}})$

En passant à la somme :

$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_k - \tilde{X}_k|) \leq 2\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|X_0|_{\mathbf{1}_{X_0^2 > n-k+1}}) \leq 2\mathbb{E}(|X_0| \sum_{k=1}^n {}_{1_{X_0^2 > k}}) \leq 2\mathbb{E}(|X_0|^3)$

On obtient $W_1(S_n, \tilde{S_n}) \leq 2C_0$

B) Majoration de $W_1(\tilde{S_n}, G_{n,\sigma^2})$:

Soit $f \in 1-lip$ et $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$

Alors : $W_1(\tilde{S_n}, G_{n,\sigma^2}) \leq \mathbb{E}(|f(\tilde{S_n}) - f(T_n)|) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\Delta_k)$

Avec $\Delta_k = f_k(\tilde{S_{k-1}} + \tilde{X_k}) - f_k(\tilde{S_{k-1}} + Y_k)$

Je développe Δ_k à l'ordre 4 :

$$\mathrm{E}(\Delta_k) \leq ||f_k'(\tilde{S_{k-1}})||_\infty |\mathbb{E}(\tilde{X_k} - Y_k)| + \frac{1}{2}||f_k''(\tilde{S_{k-1}})||_\infty |\mathbb{E}(\tilde{X_k^2} - Y_k^2)|$$
$$+ \frac{1}{6}|\mathbb{E}(f_k'''(\tilde{S_{k-1}})(\tilde{X_k^3} - Y_k^3))| + \frac{1}{24}||f_k''''(\tilde{S_{k-1}})||_\infty |(\mathbb{E}(\tilde{X_k^4}) + \mathbb{E}(Y_k^4))|$$

A partir des hypothèses sur les deux premiers moments et du Lemme 4.1 de cet article on peut estimer les termes du développement.

Estimation de $\frac{1}{2}||f_k''(\tilde{S_{k-1}})||_\infty |\mathbb{E}(\tilde{X_k^2} - Y_k^2)|$:

Sous l'espérance on a le résultat suivant :

$\tilde{X_k^2} - Y_k^2 = \tilde{X_k^2} - X_k^2 = (\tilde{X_k} - X_k)(\tilde{X_k} + X_k)$

Alors :

$$|\mathbb{E}(\tilde{X_k^2} - Y_k^2)|$$
$$= |\mathbb{E}((X_{k\mathbf{1}_{|X_k|>\sqrt{n-k+1}}} - \mathbb{E}(X_{k1_{|X_k|>\sqrt{n-k+1}}})(X_{k\mathbf{1}_{|X_k|\leq\sqrt{n-k+1}}} + \mathbb{E}(X_{k\mathbf{1}_{|X_k|\leq\sqrt{n-k+1}}}) + X_k))|$$
$$\leq 4\mathbb{E}(|X_0|^2_{\mathbf{1}_{|X_0|>\sqrt{n-k+1}}}) + 4\mathbb{E}(|X_0|^2_{\mathbf{1}_{|X_0|>\sqrt{n-k+1}}} + \mathbb{E}(|X_0|^2_{\mathbf{1}_{|X_0|>\sqrt{n-k+1}}})$$
$$\leq 9\mathbb{E}(|X_0|^2_{\mathbf{1}_{|X_0|>\sqrt{n-k+1}}})$$

Je somme sur k et j'applique le Lemme 4.1 à $||f_k''(\tilde{S}_{k-1})||_\infty$:

$$\frac{1}{2}||f_k''(\tilde{S}_{k-1})||_\infty |\mathbb{E}(\tilde{X_k^2} - Y_k^2)|$$
$$\leq 5\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+1)^{1/2}}\mathbb{E}(X^2_{0\mathbf{1}_{|X_0|>\sqrt{n-k+1}}}) = 5\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbb{E}(X^2_{0\mathbf{1}_{|X_0|>\sqrt{k}}})$$
$$= 5\mathbb{E}(X_0^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{1}\sqrt{k} < |X_0|)$$

J'obtient : $\frac{1}{2}||f_k''(\tilde{S_{k-1}})||_\infty |\mathbb{E}(\tilde{X_k^2} - Y_k^2)| \leq 5C_0$

Estimation de $\frac{1}{6}|\mathbb{E}(f_k'''(\tilde{S_{k-1}})(\tilde{X_k^3} - Y_k^3))|$

Par indépendance de $\tilde{X_k^3}$ et $\tilde{S_{k-1}}$: $|\mathbb{E}(f_k'''(\tilde{S_{k-1}})(\tilde{X_k^3} - Y_k^3))| = \mathbb{E}(f_k'''(\tilde{S_{k-1}}))\mathbb{E}(\tilde{X_k^3})$

$\mathbb{E}(\tilde{X_k^3}) = K\mathbb{E}(|X_0|^3) = C_1$

En appliquant le Lemme 4.1 et en sommant sur k :

$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}|\mathbb{E}(f_k'''(\tilde{S_{k-1}})(\tilde{X_k^3}-Y_k^3))| << C_1\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = C_2$

Estimation de $\frac{1}{24}||f_k''''(\tilde{S_{k-1}})||_\infty|(\mathbb{E}(\tilde{X_k^4})+\mathbb{E}(Y_k^4))|$:

$\frac{1}{24}||f_k''''(\tilde{S_{k-1}})||_\infty\sum_{k=1}^{n}|(\mathbb{E}(\tilde{X_k^4})+\mathbb{E}(Y_k^4))| << \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(|X_0|^4_{\mathbf{1}|X_0|\leq\sqrt{n-k+1}})\frac{1}{(n-k+1)^{3/2}}$
$<< \mathbb{E}(|X_0|^4\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{|X_0|\leq\sqrt{n-k+1}}\frac{1}{(n-k+1)^{3/2}}) << \mathbb{E}(|X_0|^4\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{X_0^2\leq n-k+1}\frac{1}{(n-k+1)^{3/2}})$
$<< \mathbb{E}(|X_0|^4\sum_{k\geq X_0^2}\frac{1}{k^{3/2}}) << K_1\mathbb{E}(|X_0|^3) = K_1C_0 = C_3$

Finalement, on sommant $W_1(S_n,\tilde{S_n})$ et $W_1(\tilde{S_n},G_{n,\sigma^2})$ on obtient :

$W_1(S_n,G_{n,\sigma^2}) \leq 7C_0+C_2+C_3$

$W_1(\frac{S_n}{\sqrt{n}},G_{n,\sigma^2}) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$ Avec C une constante définie comme la somme des constantes obtenue lors des majorations. D'où une vitesse de convergence de l'ordre de $\frac{C}{\sqrt{n}}$.

Remarque : Les moments d'ordre 3 et 4 pour les lois des probabilités les plus répandues étant plus petits que 6, les constantes intervenant dans les vitesses de convergences sont petites et l'écart à la loi Normale est faible pour un nombre n raisonnable.

References

[1] Dedecker, J. and Rio, E. (2008). On mean central limit theorems for stationary sequences. *Annales Institut Henri Poincaré*. Vol. 44, No. 4, 693–726.

[2] Merlevede, F. and Dedecker, J. (2007). The empirical distribution function for dependent variables: asymptotic and nonasymptotic results in $\mathrm{L}^p. ESAIM Probability and Statistics 102-114.$

[3] Bellissant, V. (2020). Projet de Licence sur la convergence des espérances conditionnelles.