Université Gustave Eiffel

Estimation de la valeur du call asiatique par la méthode de Monte-Carlo

Victor Bellissant

RAZAFIMANDIMBY Henimpitahiana

9 mai 2021

1 Introduction

Les options Asiatiques demandent de connaitre la moyenne des cours de l'actif sous-jacent, c'est pourquoi il est judicieux d'utiliser une méthode de Monte-Carlo pour estimer leurs valeurs. Nous nous interrésserons dans ce projet au prix d'un call asiatique d'echéance T et de prix d'exercice K.

D'après l'énoncé nous disposons les formules suivantes :

— le payoff du call pour la moyenne arithmétique

$$C_T = (\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K)_+$$

— le payoff du call pour la moyenne géométrique

$$C'_T = (\exp(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt) - K)_+$$

la valeur du call asiatique à la date T.

L'objectif de ce projet est de proposer une estimation du prix du call asiatique à l'instant $t = 0$ V_0 par la méthode de Monte-Carlo, dans un premier temps à partir de la formule faisant intervenir la moyenne arithmétique puis en utilisant la formule faisant intervenir la moyenne géométrique.

Voici le plan du projet :

1. Quelques rappels à propos du modèle de Black-Scholes.
2. Mise en évidence des formules de prix via le modèle de Black-Scholes et les formules d'Itô.
3. Justification du fait que le prix par moyenne géométrique est inférieur au prix par moyenne arithmétique.

2 Le modèle Black-Scholes et les options asiatiques

Le modèle Black-Scholes permet de modéliser le cours d'un actif risqué sur un intervalle de temps $[0, T]$. A partir de ce modèle, le prix d'un actif risqué S_t vérifie :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad \text{avec } \mu, \sigma \in \mathbb{R} \quad \text{et } B_t \text{ un MBS}$$

MBS : Mouvement Brownien standart

Cette équation différentielle stochastique à pour solution :

$$S_t = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

Avec r : le taux d'intérêt , σ : la volatilité et $B_t \to \mathcal{N}(0, t)$

Un théorème du cours nous montre que sous la probabilité risque neutre, le processus $W_t = (B_t + \theta t)$ est encore un mouvement brownien standard et que le prix V_0 est égale à l'espérance sous cette probabilité de la valeur actualisée du payoff, de plus V_0 est une martingale pour $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

Sous la probabilité risque neutre, la formule du prix de l'actif à l'instant t devient :

$$S_t = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$$

Les prix du Call à la date 0 sous la probabilité risque-neutre sont :

— pour une moyenne arithmétique :

$$V_0 = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K)_+]$$

— pour une moyenne géométrique :

$$V_0' = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\exp(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt) - K)_+]$$

Partie 1 : Le prix par moyenne arithmétique :

La Payoff : $C_T = (\frac{1}{T}\int_0^T (S_t)dt - K)_+$

Connaissant (S_t) à chaques instant t, on propose, pour calculer cette intégrale de passer par le schéma des rectangles à gauche.

Pour ce faire, on découpe l'intervalle $[0, T]$ en N sous intervalle de taille identique, il s'agira du nombre de mise jour du cours de l'actif sous-jacent.

Posons : $h = \frac{T}{N}$ et $t_k = kh$

Alors : $\frac{1}{T}\int_0^T (S_t)dt \sim \frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}(S_{t_k})$ pour N assez grand.

On obtient donc une nouvelle formule du prix de la valeur du call à l'instant $t = 0$:

$$V_0 = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1} S_{t_k} - K)_+]$$

$$V_0 = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1} S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{t_k}) - K)_+]$$

Partie 2 : Le prix par moyenne géométrique

Le Payoff : $C'_T = (\exp(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt) - K)_+$

Il faut donc estimer $\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt$

A partir de la formule d'Itô on peut calculer $\ln(S_t)$:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s}dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{S_s^2}d < S, S >_s$$

Comme $S_t = rS_t dt + \sigma S_t W_t$

On obtient :

$$\begin{aligned}\ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s}(rS_s ds + \sigma S_s dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds \\ &= \ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\end{aligned}$$

Connaissant $\ln(S_t)$ à chaque instant t, on peut utiliser la formule des rectangles à gauche comme vu précédemment.

Alors : $\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt \sim \frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\ln(S_{t_k})$ Pour N assez grand.

On obtient donc une nouvelle formule de la valeur du call à l'instant $t = 0$:

$$V_0' = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\exp(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\ln(S_{t_k})) - K)_+]$$

$$V_0' = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\exp(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{t_k}) - K)_+]$$

3 La méthode de Monte-Carlo dans le calcul du prix du call :

Nous avons établi une estimation de la valeur du call asiatique à l'instant $t = 0$:

$$V_0 = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1} S_0 \exp(r - \frac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{t_k} - K)_+]$$

$$V_0' = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\exp(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{t_k}) - K)_+]$$

Il s'agit d'une estimation de l'intégrale via la formule des rectangle, cette estimation converge vers la valeur exacte lorsque h tends vers 0.

La partie σW_t étant aléatoire, pour obtenir une bonne estimation du prix du call il va falloir simuler plusieurs fois cette partie et calculer une moyenne de toute les estimations réalisées.

V_0 étant une espérance, l'emploi d'une telle méthode est adapté car par la loi forte des grands nombre, en faisant un grand nombre de simulation, la moyenne de celles-ci va converger presque surement vers la valeur exacte.

Ce qu'on propose de faire :

Utiliser le fait que sous la probabilité risque neutre le processus W_t est gaussien car c'est un mouvement brownien standard. Il faut donc simuler ce processus un grand nombre de fois.

Pour ce faire on simule un mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$, les valeurs prise par celui-ci suivent la même fréquence de mise a jour que celle des prix de l'actif, c'est à dire que si l'intervalle $[0, T]$ est découpé en N partie égales alors le mouvement brownien est calculé en ces N instants. Il s'agit la d'une seule simulation, en utilisant une boucle on va simuler un grands nombre de fois le mouvement brownien, disont M fois puis on calcul la moyenne de ces simulations. Le processus W_t étant Brownien, il est très facile de le simuler car les processus $(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$ et $(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$ sont indépendants et suivent une loi $\mathcal{N}(0, h)$.

On pose :

$\forall i \in [|1, M|]$:

$$V_0^{(i)} = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}(S_{t_k})^{(i)} - K)_+]$$

$$V_0'^{(i)} = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\exp(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\ln(S_{t_k})^{(i)}) - K)_+]$$

$$\text{avec } (S_{t_k})^{(i)} = S_0\exp((r - \tfrac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{tk}^{(i)})$$

$$\text{et } \ln(S_{t_k})^{(i)} = \ln(S_0) + (r - \tfrac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{t_k}^{(i)}$$

$$V_0^{(i)} = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}S_0\exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{t_k}^{(i)}) - K)_+]$$

$$V_0'^{(i)} = \mathbb{E}^*[\exp(-rT)(\exp(\frac{h}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_k + \sigma W_{t_k}^{(i)}) - K)_+]$$

Alors : $\lim\limits_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}V_0^{(i)} = V_0$ et $\lim\limits_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}V_0'^{(i)} = V_0'$ p.s.

4 Application de l'inégalité de Jensen

Dans cette partie nous montrons pourquoi la valeur du call par moyenne géométrique est inférieure à la valeur du call par moyenne arithmétique :

$$(\exp(\tfrac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt) - K)_+ \leq (\tfrac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K)_+$$

L'inégalité de Jensen dans le cas continu

Soit g une fonction continue de $[0,1]$ dans $]a,b[$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ et ϕ une fonction convexe de $]a,b[$ dans $\mathbb{N}$. Alors :

$$\phi(\int_0^1 g(x)dx) \leq \int_0^1 \phi(g(x))dx$$

A partir de cette inégalité :

la fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$ et le logarithme étant continue sur $]0,T[$:

$$\exp(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt) \leq \frac{1}{T}\int_0^T \exp(\ln(S_t))dt = \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$$

Donc :

$$(\exp(\tfrac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt) - K)_+ \leq (\tfrac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K)_+$$

Le graphique regroupant les valeurs de V_0 et V_0' en fonction du nombre de simulations par Monte-carlo est en annexe de ce document, on y voit bien que la valeur calculée par moyenne géométrique est toujours inférieure à la valeur calculée par moyenne arithmétique.

Un deuxième graphique illustre la vitesse de convergence de la méthode de Monte-Carlo, il s'agit du calcul de l'erreur pour un nombre croissant de simulations avec comme valeur de référence la moyenne des valeurs obtenue pour le plus grand nombre de simulations. A chacuns de ces nombre de simulations on a réalisé le calcul 50 fois puis calculer la moyenne de ces 50 valeurs obtenue afin d'avoir une définition de l'erreur cohérente. Les algorithmes sont disponible à votre demande, ils ont été écrit en R.

Références :

[1] Julie Cossé et Mélissa Bakir, Sujet 3 : Options Asiatique dans le modèle de Black-Sholes.

[2] D.Lamberton, échange par Email.

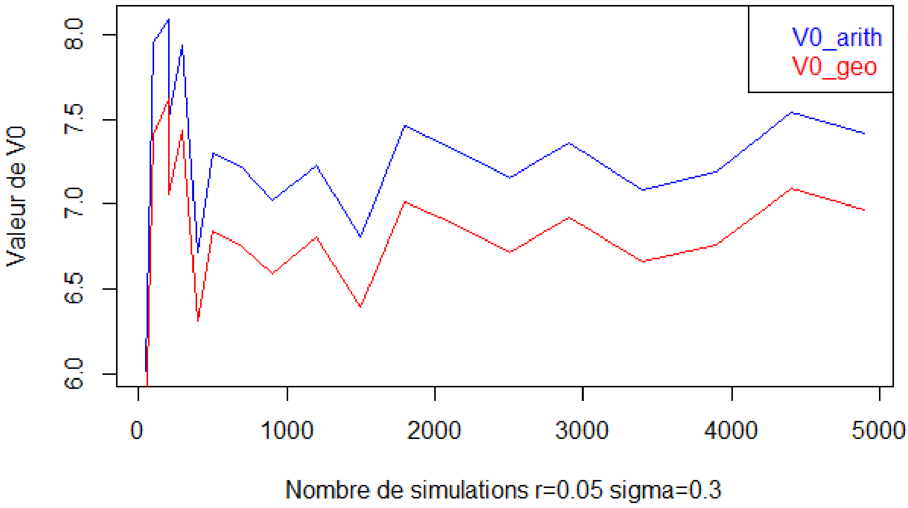

FIGURE 1 – Prix du call asiatique pour un nombre croissant de simulations par Monte-Carlo

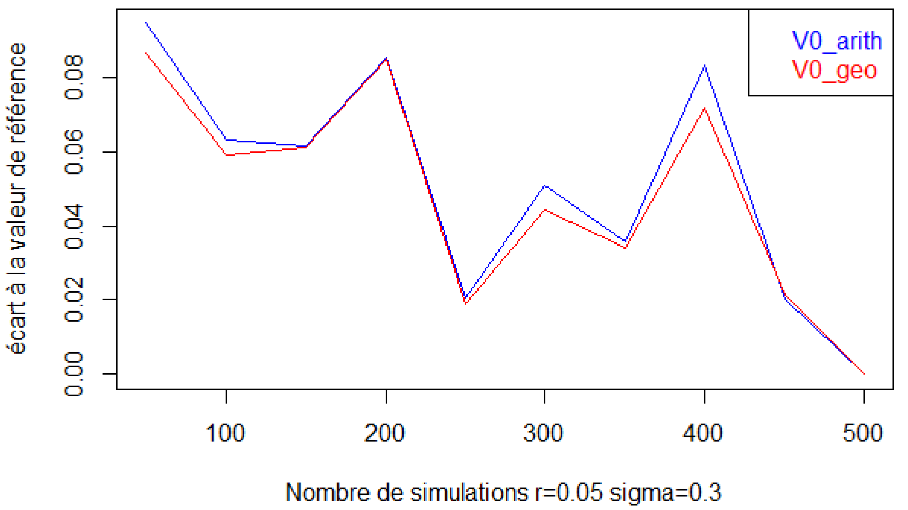

FIGURE 2 – écart des prix relativement à la valeur obtenue pour 500 simulations