Université de Versailles Saint-Quentin en Yvelines
Département de Mathématiques de Versailles
Année académique 2019 - 2020

TITRE
Théorème Limite central

Auteurs
Victor BELLISSANT
Abdoul MBALLO
Mamadou SAVANE

Sous la direction
Professeur Emmanuel RIO

Table des matières

1 Introduction

Le théorème central limite (aussi appelé théorème limite central, théorème de la limite centrale ou théorème de la limite centrée) établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes tend dans certains cas vers une variable aléatoire gaussienne.

La grande force de ce théorème est sa généralité : il y a vraiment très peu d'hypothèses sur la suite (X_n). Quelle que soit la loi de probabilité d'un événement aléatoire, si on le répète infiniment souvent, de façon indépendante, sa moyenne finit par se comporter comme une loi normale. C'est ce théorème qui permet d'affirmer que la loi normale est la loi des phénomènes naturels. Si on observe par exemple la taille des individus dans une population, celle-ci va suivre une répartition qui va ressembler à celle de la loi normale voir

1.1 Théorème Limite Central

Théoréme 1 :(*Théorème limite central*)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2, on pose :

$$\mathbb{E}(X_1) = m, \mathbb{V}(X_1) = \sigma^2$$

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

$$Y_n = \frac{S_n - m\sigma}{\sigma\sqrt{n}}$$

Alors la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ (loi normale centrée réduite). De plus , $F_{X_n}(t)$ étant continue :

$$F_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$$

Soit Y la variable aléatoire de la somme des (X_i) réduite alors :

$$F_{Y_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_Y(t) \qquad \text{(continue) et :}$$

$$\mathbb{P}(a \leqslant Y_n \leqslant b) \longrightarrow F_Y(b) - F_Y(a)$$

$$i.e \qquad \mathbb{P}(a \leqslant Y_n \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(a \leqslant Y \leqslant b) = \int_a^b f_Y(y)\, dy$$

où $f_Y(y)$ est la densité de la variable Y suivant la loi normale centre réduite donné par : $f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$
Pour une variable aléatoire X on note $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ sa fonction caractéristique.
Démonstration du théorème :

$$\begin{aligned} \phi_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{it(\frac{X_1+.....+X_n}{\sqrt{n}})}) \qquad avec \qquad m = 0 \\ &= \mathbb{E}(e^{it(\frac{X_1}{\sqrt{n}})}.........e^{it(\frac{X_n}{\sqrt{n}})}) \\ &= \mathbb{E}(e^{it(\frac{X_1}{\sqrt{n}})})^n \\ &= \phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n \end{aligned}$$

or on sait que $\forall X_i$ v.a : $\mathbb{E}(\mid X_i^p \mid) < \infty$ donc $\phi_{X_i} \in C^P$ et les X_i admettent un moment d'ordre 2 ,alors $\phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\begin{aligned}\phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n &= 1 + it\mathbb{E}(X_1) - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}(X_1^2) + o(t^2) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2)\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et que $\frac{t}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a donc $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 1 - \frac{t^2}{2n}\sigma^2 + o(\frac{1}{n})$$

$$\begin{aligned}\phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n &= (1 - \frac{t^2}{2n}\sigma^2 + o(\frac{1}{n}))^n \\ &= e^{n\ln(1-\frac{t^2}{2n}\sigma^2+o(\frac{1}{n}))} \\ &= e^{n(-\frac{t^2}{2n}\sigma^2+o(\frac{1}{n}))} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2+o(1)}\end{aligned}$$

or $\sigma^2 = 1$ donc :

$$\phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{-t^2}{2}} = \phi_Y(t) \text{ avec } Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \text{ (par le théorème de Lévy)}$$

1.2 Théorème de Lévy

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée f on a :

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(X))$$

On note $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ la fonction caractéristique de la variable aléatoire X.

Théorème 2 :(*Lévy*) Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires. Alors on a équivalence entre :

1. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X
2. La suite de fonctions $(\phi_{X_n})_{n\geq 1}$ converge simplement vers ϕ_X

Démonstration du théorème :

— On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X :
On a $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi :\mapsto e^{ix}$ étant continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, elle y est bornée et donc $\forall t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(\varphi(tX_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\varphi(tX))$ pour tout φ bornée de $\mathbb{R}$ *i.e.* $\varphi(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(X)$ *La convergence simple des fonctions caractéristiques.*

— Réciproquement on suppose que la suite (ϕ_{X_n})*converge simplement vers* ϕ_X :

Montrons que pour toute fonction g de classe C^2 à support compact $\mathbb{E}(g(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(g(X))$. Ceci implique, en effet, la convergence en loi.

Comme g, g' et g" sont continues a support compact, elles sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Leurs transformées de Fourier sont donc définie et continue bornées. De plus $\hat{g''}(t) = -t^2\hat{g}(t)$ et donc $\hat{g}(t) = -\hat{g''}(t)/t^2$ ce qui montre que $\hat{g}(t) = O(\frac{1}{t^2})$ en l'infini. Puisque $\hat{g}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, ceci montre que $\hat{g}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Par la formule de l'inversion de Fourier $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x) e^{itx}\, dx \qquad \forall t \in \mathbb{R} \text{ ainsi}$$

$$\mathbb{E}(g(X_n) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x) \phi_{X_n}(x)\, dx \qquad \text{avec } \hat{g}(x) \in o(\tfrac{1}{t^2}) \text{ et } \phi_{X_n} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ alors}$$

$$\mathbb{E}(g(X_n) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(x) \phi_{X}(x)\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(g(X))$$

en appliquant les théorèmes de Fubini et de convergence dominée de Lebesgue.

Par conséquent la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X en loi.

2 Convergence des Espérances conditionnelles

Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2, par Chafai et Zitt on pose :

$$S_n = \xi_1 + ... + \xi_n \qquad \text{et} \qquad Z_n = \tfrac{S_n}{\sqrt{n}}$$

Soit Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Il s'agit de montrer que $\mathbb{E}(Z_n | Z_n > t)$ converge vers la quantité $\mathbb{E}(Y|Y > t)$ quand n tend vers l'infini.

Définition 1 : Si A est un évènement de probabilité non nulle et Z une variable aléatoire intégrable, alors

$$\mathbb{E}(Z|A) = \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_A)/\mathbb{P}(A).$$

(l'espérance conditionnelle de Z sachant A est donc l'intégrale de Z pour la probabilité conditionnelle à A).

La définition :

$$\mathbb{E}(Z|Z > t) = \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{Z>t})/\mathbb{P}(Z > t).$$

est utile pour montrer cette convergence. L'idée est d'exprimer $\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{Z>t})$ à l'aide de la fonction de répartition de Z.

Point de départ : $\qquad Z\mathbf{1}_{Z>t} = t\mathbf{1}_{Z>t} + (Z-t)\mathbf{1}_{Z>t}$

Preuve 1 :

Soit $X = \max(0, Z-t)$ alors

$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\max(0, Z-t) > x)\, dx$ or $\max(0, Z-t) > x = \max(t, Z) > x$ car Z est positive $\forall x \in \mathbb{R}_+$ alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\max(0, Z-t) > x)\, dx &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\max(t, Z) > x)\, dx \\ &= \mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{Z>t}) \qquad (\textit{comme dans Chafai et Zitt}) \\ &= \int_t^{+\infty} 1 - F_Z(x)\, dx\end{aligned}$$

Preuve 2 :

pour $t \geq Z$

$$(Z-t)\mathbf{1}_{Z>t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{t<x}\mathbf{1}_{x<Z}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{t<x}\mathbf{1}_{x<t}\, dx = 0$$

pour $t \leq Z$ $\qquad (Z-t)\mathbf{1}_{Z>t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{t<x}\mathbf{1}_{x<Z}\, dx\,;$ $\qquad$ donc $(Z-t)\mathbf{1}_{Z>t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{t<x}\mathbf{1}_{x<Z}\, dx$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((Z-t)\mathbf{1}_{Z>t}) &= \int_\Omega (\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{t<x}\mathbf{1}_{x<Z}\, dx) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\int_\Omega \mathbf{1}_{t<x}\mathbf{1}_{x<Z}\, dx) \qquad (fubini\ \ tonelli) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (1-F_Z(x))\mathbf{1}_{x>t}\, dx \\
&= \int_{t}^{+\infty} (1-F_Z(x))\, dx \qquad (2.11)\ \ de\ \ Agnew
\end{aligned}
$$

Montrons que $\mid F_{Z_n} - F_Y \mid$ est dans $\in L^1(\mathbb{R})$:

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z telle que $\mathbb{E}(Z^2) = 1$

pour $x \leq 0$: $\qquad 0 \leq F(x) \leq x^{-2}$

pour $x \geq 0$: $\qquad 1 - x^{-2} \leq F(x) \leq 1$

On pose : $\qquad h(x) = 1 \quad \forall \mid x \mid \leq 1 \qquad\qquad h(x) = x^{-2} \quad \forall \mid x \mid \geq 1$

puisque $F_{Z_n}(x)$ et $F_Y(x)$ vérifie les inégalités ci-dessus on a donc :

$$
\mid F_{Z_n}(x) - F_Y(x) \mid \leq min(1, x^{-2}) \quad \textit{(1)}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
\mid \mathbb{E}(Z_n\mathbf{1}_{Z_n>t}) - \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{Y>t)} \mid &= \mid \int_t^{+\infty} (F_{Z_n}(x) - F_Y(x))\, dx + t(F_{Z_n}(t) - F_Y(t)) \mid \\
&\leq \int_t^{+\infty} \mid (F_{Z_n}(x) - F_Y(x))\, dx \mid + \mid t(F_{Z_n}(t) - F_Y(t)) \mid
\end{aligned}
$$

Maintenant, par le TLC, $\mid F_{Z_n} - F_Y \mid$ converge vers 0 simplement sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]t, +\infty[$.
De plus, par (1), cette suite de fonctions est dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc par le théorème de Convergence Dominée :

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_t^{+\infty} \mid (F_{Z_n}(x) - F_Y(x))\, dx = \int_t^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \mid (F_{Z_n}(x) - F_Y(x))\, dx \mid \ = 0\ (2)
$$

Noter que (2) est aussi valide pour $t = -\infty$, *ce qui montre le résultat d'Agnew dans le cas* L^1.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid F_{Z_n}(x) - F_Y(x)\, dx \mid = 0$ Agnew (1954)

De plus $\lim_n \mid F_{Z_n}(x) - F_Y(x) \mid = 0$, et donc

$\lim_n \mathbb{E}(Z_n \mathbf{1}_{Z_n>t}) = \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{Y>t})$

A partir de la formule des espérances conditionnelle :

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t) = \mathbb{P}(Z > t)$ par convergence simple

En quotientant des deux cotés de l'égalité on obtient :

$$\lim_n \mathbb{E}(Z_n | Z_n > t) = \mathbb{E}(Z|Z > t)$$

3 Convergence des fonctions de répartition, des quantiles et des super-quantiles

Definition. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. On note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n et F_X celle de X. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers X si, en tout point x où F est continue, on a :

$$F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$$

Proposition 1 : Si F et G sont les fonctions de répartition de variables intégrables , alors

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \mid F(x) - G(x) \mid \, dx = \int_0^1 \mid F^{-1}(u) - G^{-1}(u) \mid \, du \qquad (3)$$

Preuve : D'abord

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} \mid F(x) - G(x) \mid \, dx = \int_{\mathbb{R}} \max(0, F(x) - G(x))\, dx + \int_{\mathbb{R}} \max(0, G(x) - F(x))\, dx \quad (4)$$

$$\textstyle\max(0, F(x) - G(x)) = \int_0^1 \mathbf{1}_{u\leq F(x)} \mathbf{1}_{G(x)<u}\, du \ \ ?$$

<u>*on remarque que :*</u> le membre de gauche est nul lorsque $F(x) \leq G(x)$ car $F(x) - G(x) \leq 0$ et donc $\max(0, F(x) - G(x)) = 0$

<u>*pour le membre de droite :*</u> lorsque $F(x) \leq G(x)$ alors $\mathbf{1}_{u\leq F(x)} \mathbf{1}_{G(x)<u} = 0$, et donc

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{u\leq F(x)} \mathbf{1}_{G(x)<u}\, du = 0.$$

Si au contraire $F(x) \geq G(x)$, alors

$$\max(0, F(x) - G(x)) = \int_0^1 \mathbf{1}_{u\leq F(x)} \mathbf{1}_{G(x)<u}\, du$$

ce qui établit la formule.

on remarque que :

$$\mathbf{1}_{u\le F(x)}\mathbf{1}_{G(x)\ <u}=\mathbf{1}_{F^{-1}(u)\le x}\mathbf{1}_{x<G^{-1}(u)}$$

$$\textstyle\int_0^1 \mathbf{1}_{u\le F(x)}\mathbf{1}_{G(x)<u}\,du=\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{F^{-1}(u)\le x}\mathbf{1}_{x<G^{-1}(u)}\,du$$

puis par (4) et comme les fonctions sont positives en appliquant Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\max(0,F(x)-G(x))\,dx&=\int_{\mathbb{R}}(\int_0^1 \mathbf{1}_{u\le F(x)}\mathbf{1}_{G(x)<u}\,du)\,dx\\&=\int_0^1(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{F^{-1}(u)\le x}\mathbf{1}_{x<G^{-1}(u)}\,dx)\,du\\&=\int_0^1\max(0,F^{-1}(u)-G^{-1}(u))\,du\ \ (5)\end{aligned}$$

pour le second membre de (4)

$$\max(0,G(x)-F(x))=\textstyle\int_0^1 \mathbf{1}_{u\le G(x)}\mathbf{1}_{F(x)\le u}\,du$$

pour $G(x)\le F(x)$ $\qquad \max(0,G(x)-F(x))=0$ $\qquad$ *et* $\qquad \mathbf{1}_{u\le G(x)}\mathbf{1}_{F(x)\le u}=0$ alors

$$\max(0,G(x)-F(x))=\textstyle\int_0^1 \mathbf{1}_{u\le G(x)}\mathbf{1}_{F(x)\le u}\,du$$

les inverses généralisées étant continues on a :

$$\mathbf{1}_{u\le G(x)}\mathbf{1}_{F(x)\le u}=\mathbf{1}_{G^{-1}(u)<x}\mathbf{1}_{x\le F^{-1}(u)}$$

$$\textstyle\int_0^1 \mathbf{1}_{u\le G(x)}\mathbf{1}_{F(x)\le u}\,du=\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{G^{-1}(u)\le x}\mathbf{1}_{x\le F^{-1}(u)}\,du$$

puis par (4) et comme les fonctions sont positives en appliquant Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\max(0,G(x)-F(x))\,dx&=\int_{\mathbb{R}}(\int_0^1 \mathbf{1}_{u<G(x)}\mathbf{1}_{F(x)\le u}\,du)\,dx\\&=\int_0^1(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{G^{-1}(u)\le x}\mathbf{1}_{x\le F^{-1}(u)}\,dx)\,du\\&=\int_0^1\max(0,G^{-1}(u)-F^{-1}(u))\,du\ \ (6)\end{aligned}$$

Somme de (5) *et* (6)

$$\textstyle\int_0^1\max(0,F^{-1}(u)-G^{-1}(u))\,du+\int_0^1\max(0,G^{-1}(u)-F^{-1}(u))\,du=\int_0^1\mid F^{-1}(u)-G^{-1}(u)\mid\ du$$

ce qui montre que :

$$\int_{\mathbb{R}} \mid F(x) - G(x) \mid \, dx = \int_0^1 \mid F^{-1}(u) - G^{-1}(u) \mid \, du. \tag{3}$$

Maintenant,

$$\int_0^p F_{Z_n}^{-1}(u)\, du - \int_0^p F_Y^{-1}(u)\, du = \int_0^p (F_{Z_n}^{-1}(u)\, du - F_Y^{-1}(u)\, du)$$

et donc

$$\Big| \int_0^p F_{Z_n}^{-1}(u)\, du - \int_0^p F_Y^{-1}(u)\, du \Big| \leq\leq \int_0^p |F_{Z_n}^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)|\, du \leq \int_0^1 |F_{Z_n}^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u)|\, du,$$

Par conséquent, en appliquant (3) et ensuite le résultat d'Agnew, le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

donc $\forall p \in]0;1[$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^p \mid F_{Z_n}^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \mid \, du = 0$$

ce qui montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{p} \int_0^p F_{Z_n}^{-1}(u)\, du = \tfrac{1}{p} \int_0^p F_Y^{-1}(u)\, du$$

montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_{Z_n}^{-1}(u)\, du = \frac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_Y^{-1}(u)\, du$

$\forall p \in]0,1[\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p} \int_0^p F_{Z_n}^{-1}(u)\, du = \frac{1}{p} \int_0^p F_Y^{-1}(u)\, du \qquad \textit{par } (3)$

$$\begin{aligned} \mid \int_{1-p}^1 F_{Z_n}^{-1}(u)\, du - \int_{1-p}^1 F_Y^{-1}(u)\, du \mid &= \mid \int_{1-p}^1 (F_{Z_n}^{-1}(u)\, du - F_Y^{-1}(u)\, du) \mid \\ &\leq \int_{1-p}^1 \mid F_{Z_n}^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \mid \, du \\ &\leq \int_0^1 \mid F_{Z_n}^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \mid \, du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mid F_{Z_n}(x) - F_Y(x) \mid \, dx \end{aligned}$$

Le majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini, d'après la proposition 1.

alors à partir de (4), $\forall p \in]0,1[$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1-p}^1 \mid F_{Z_n}^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u) \mid \, du = 0$$

il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1-p}^1 F_{Z_n}^{-1}(u)\, du = \int_{1-p}^1 F_Y^{-1}(u)\, du$$

puis en divisant par p :

$$\lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_{Z_n}^{-1}(u)\, du = \tfrac{1}{p} \int_{1-p}^1 F_Y^{-1}(u)\, du$$

Remarquons que, si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, alors

$$\int_0^1 \mid F_{Z_n}^{-1}(u)\,du - F_Y^{-1}(u)\,du \mid = \mathbb{E}(\mid F_{Z_n}^{-1}(U) - F_Y^{-1}(U) \mid).$$

or les variables aléatoires $F_{Z_n}^{-1}(U)$ et $F_Y^{-1}(U)$ ont pour lois respectives la loi de Z_n et celle de Y. Donc cette quantité est aussi l'écart dans L^1 entre deux variables aléatoires ayant pour lois respectives la loi de Z_n et celle de Y.

4 Conclusion

Nous avons donc démontré quelques résultats comme la convergence des espérances conditionnelles, des fonctions quantiles et leurs inverses généralisées. Ces résultats sont importants car ils permettent de mettre en place des stratégies de couverture de risque dans tous les domaines nécessitant de prévoir des évènements.