UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DISCIPLINA: CÁLCULO NUMÉRICO
TURMA: 01
DOCENTE: MATHEUS DA SILVA MENEZES
DISCENTES: VICTOR BENOISTON JALES DE OLIVEIRA – 2016020720
ARTHUR WILLIAM PEREIRA CAVALCANTI - 2019021915

Atividade prática – Cálculo Numérico (Primeira Unidade)

ABRIL – 2021

MOSSORÓ – RN

SUMÁRIO

Sumário

1. METODOLOGIA:

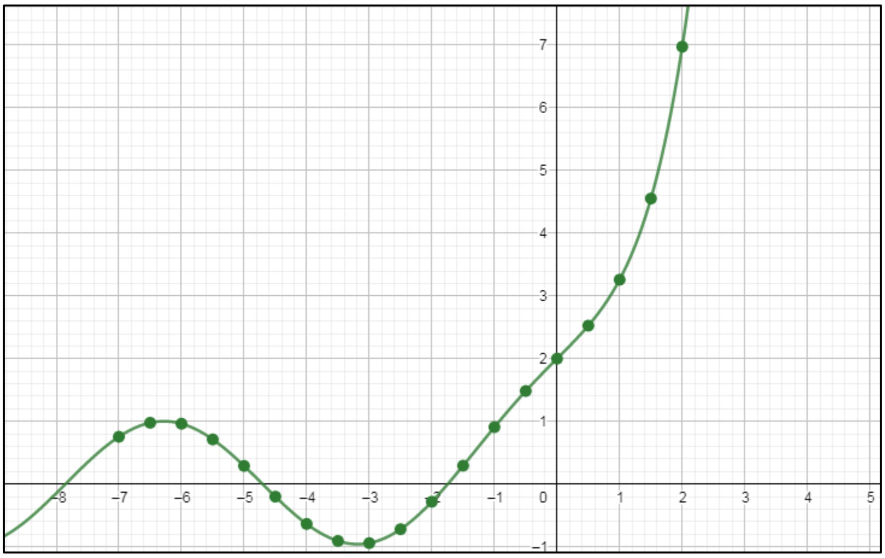
A metodologia utilizada para o desenvolvimento desse trabalho foi baseada em utilizar conceitos vistos em sala de aula, e/ou, em vídeos disponibilizados. Esse documento, constitui a parte teórica (escrita), em forma de relatório, onde descreveremos os problemas, analisaremos cada um separadamente, e após alcançar os resultados, os compararemos. Também será entregue uma aplicação computacional, que nesse caso, escolhemos a linguagem python, em sua versão 3.8, utilizando o editor de código *Pycharm* em sua versão 2020.1.5, onde fizemos uso de bibliotecas externas, como: *matplotlib, numpy*, entre outras.

Para cada problema, foi estudado sua(s) raiz(es), em um determinado intervalo dado, I. Após fazer uso de gráficos, tabelamento, e teoremas do cálculo numéricos, verificamos se há, realmente pelo menos uma raiz nesse intervalo, após checar isso, verificamos também se ela é única. Após essa abordagem inicial, utilizamos de cinco distintos métodos numéricos para o refinamento dessa raiz, com a precisão dada em todas as questões. O objetivo então, foi achar, se existente, a raiz, e usar os métodos de refinação para a obtenção de uma raiz suficientemente precisa (usando a precisão dada).

Vale salientar que em todo o trabalho, utilizaremos as seguintes nomenclaturas para os problemas 3.1, 3.2, e 3.3: “Questão 01”, “Questão 02”, e “Questão 03” respectivamente. Os métodos de refinamento utilizados foram: bissecção, falsa posição, ponto fixo, Newton e Secante. A disposição da resolução foi feita em duas partes, primeira parte, onde nos referiremos como “Parte 1”, onde é feito o isolamento da(s) raiz(es), e averiguado se é única. Já na segunda parte, onde nos referiremos como “Parte 2”, será feito o refinamento com os cinco métodos distintos. Finalmente, na terceira parte, faremos o comparativo das raízes encontradas, por método.

2. **Parte 1**: ISOLAMENTO DAS RAÍZES

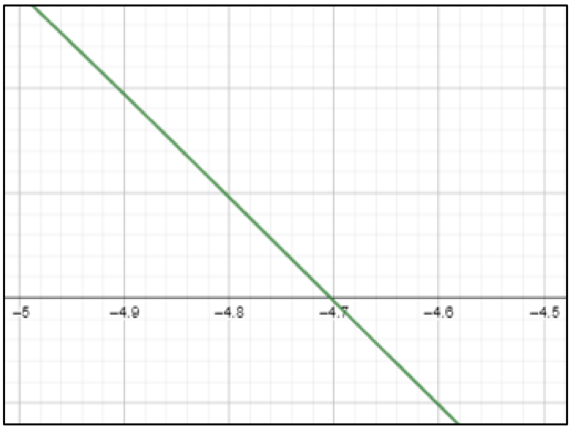
2.1. Questão 01)

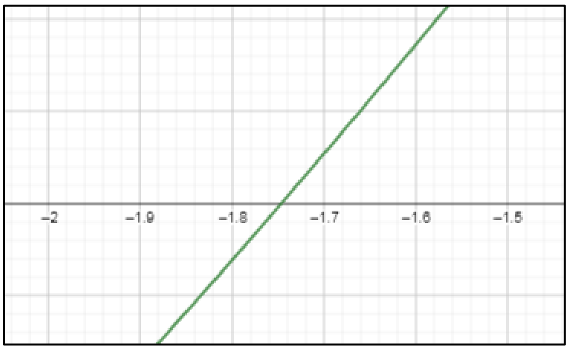
- Construindo o gráfico:
- 

    - Embora não demonstre todos os pontos do intervalo dado, é o suficiente para fazermos a análise. (O mesmo é mostrado completo na aplicação)
- Análise de tabela:

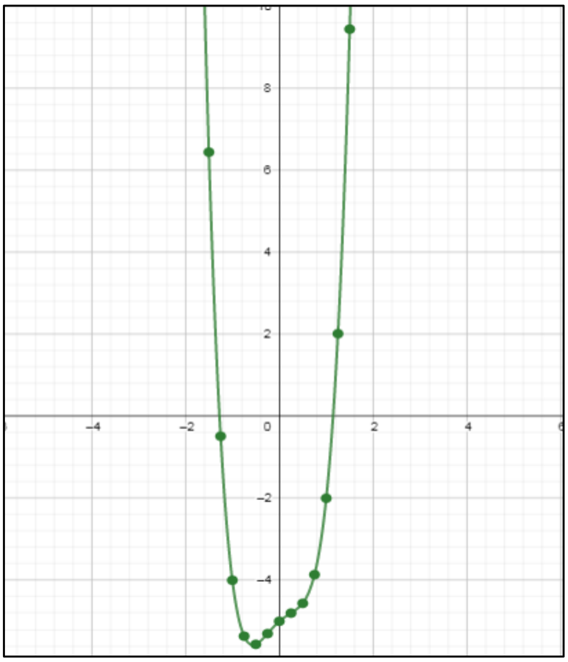
x	f(x)		
-7	0.7548141363089	0.5	2.5263038325905
-6.5	0.978091064921	1	3.2585841343272
-6	0.962649038827	1.5	4.5524262720058
-5.5	0.7127565457297	2	6.9729092623835
-5	0.2904001324623	2.5	11.3813503451565
-4.5	-0.1996868028925	3	19.0955444265872
-4	-0.6353279819749	3.5	32.1789952714015
-3.5	-0.9062593038685	4	53.9445064122806
-3	-0.9402054282326	4.5	89.806335501091
-2.5	-0.719058616923	5	148.6968212880398
-2	-0.2808115533105		
-1.5	0.2938673618161		
-1	0.9081817470396		
-0.5	1.484113221603		
0	2		

- Tomando como base o teorema de Bolzano, existe **pelo menos uma** raiz nos intervalos: [-5; -4.5] e [-2; -1.5]
    - Para provarmos que esta é a única raiz, podemos utilizar o gráfico e observar que não há mudança de sinais em sua derivada (assim, provando o corolário do teorema de Bolzano)

- No caso do [-5; -4.5], se mantendo decrescente;
  - 

- E no caso do [-2; -1.5], se mantendo crescente;
  - 

2.2. Questão 02)

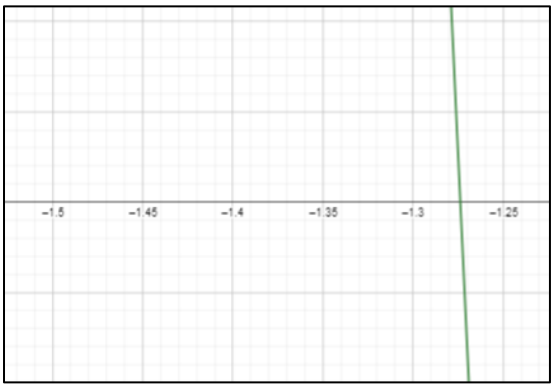
- Construindo o gráfico;
- 

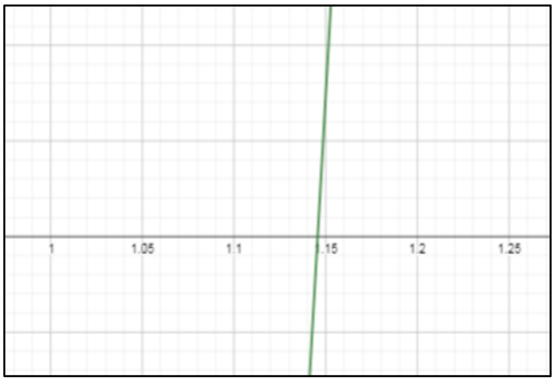
  - Embora não demonstre todos os pontos do intervalo dado, é o suficiente para fazermos a análise. (O mesmo é mostrado completo na aplicação)

- Análise de tabela:

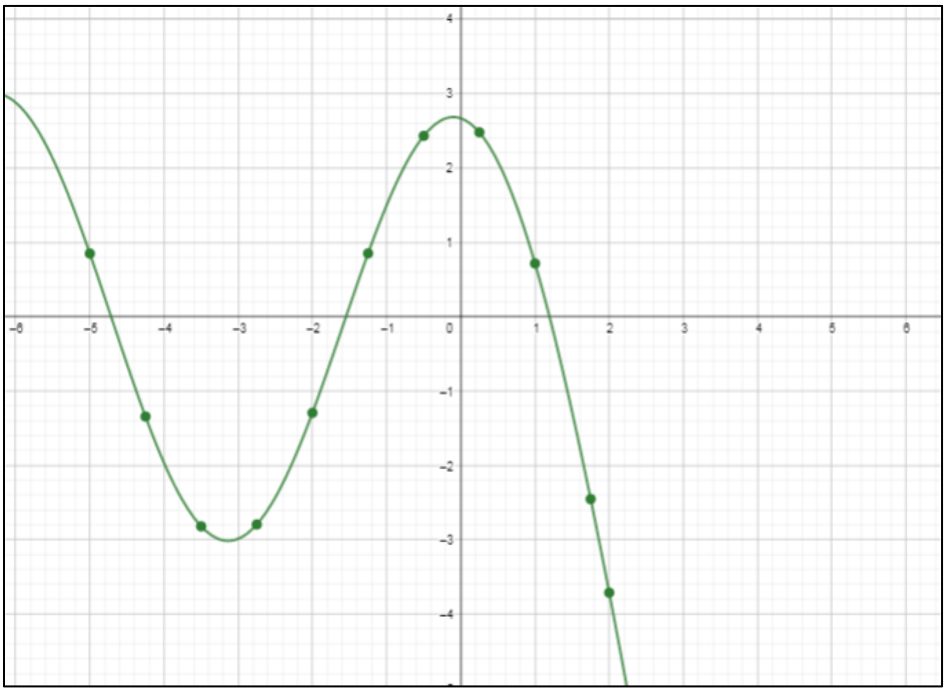
x	f(x)
-2	37
-1.75	18.32421875
-1.5	6.4375
-1.25	-0.48828125
-1	-4
-0.75	-5.36328125
-0.5	-5.5625
-0.25	-5.30078125
0	-5
0.25	-4.80078125
0.5	-4.5625
0.75	-3.86328125
1	-2
1.25	2.01171875
1.5	9.4375
1.75	21.82421875
2	41

- Tomando como base o teorema de Bolzano, existe **pelo menos uma** raiz nos intervalos: [-1.5; -1.25] e [1; 1.25]
  - Para provarmos que esta é a única raiz, podemos utilizar o gráfico e observar que não há mudança de sinais em sua derivada (assim, provando o corolário do teorema de Bolzano):
  - No caso do [-1.5; -1.25], se mantendo decrescente;



- E no caso do [1; 1.25], se mantendo crescente;
  - 

2.3. Questão 03)

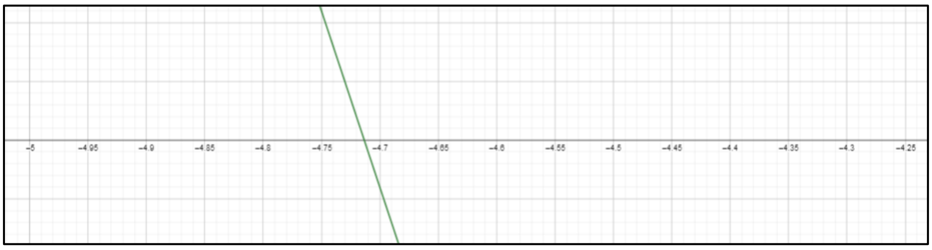
- Construindo o gráfico;
  - 

    - Embora não demonstre todos os pontos do intervalo dado, é o suficiente para fazermos a análise. (O mesmo é mostrado completo na aplicação)

- Análise de tabela;

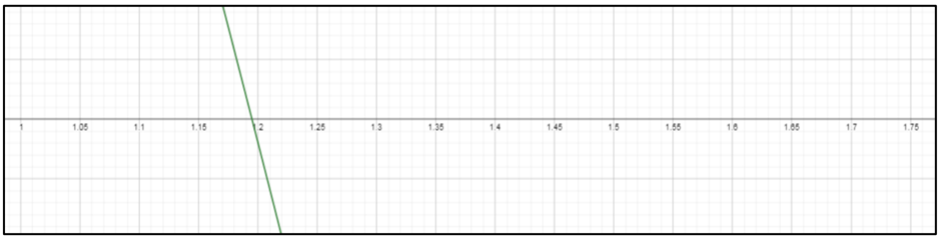
x	f(x)
-5	0.8487405740567
-4.25	-1.3430172143777
-3.5	-2.8194358563465
-2.75	-2.7942164229663
-2	-1.2935522707203
-1.25	0.8504654882324
-0.5	2.4305707991002
0.25	2.4787287929027
1	0.7148129747847
1.75	-2.4529390589504
2	-3.711459209285

  - Tomando como base o teorema de Bolzano, existe **pelo menos uma** raiz nos intervalos: [-5; -4.25], [-2; -1.25] e, [1; 1.75]
  - Para provarmos que esta é a única raiz, podemos utilizar o gráfico e observar que não há mudança de sinais em sua derivada (assim, provando o corolário do teorema de Bolzano):
  - No caso do [-5; -4.25], se mantendo decrescente;



  - No caso do [-2; -1.25], se mantendo crescente;

  - E, no caso do [1; 1.75], se mantendo decrescente;



3. **Parte 2:** REFINAMENTO DAS RAÍZES POR MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1. Questão 1)

3.1.1. Bissecção;

- No intervalo [-5; -4.5], obtivemos:

a	b	x_barra	f(x_barra)
-5	-4,5	-4,75	0,046253848
-4,75	-4,5	-4,625	-0,077474139
-4,75	-4,625	-4,6875	-0,015676729
-4,75	-4,6875	-4,71875	0,015287306
-4,71875	-4,6875	-4,703125	-0,000196949
-4,71875	-4,703125	-4,7109375	0,00754486
-4,7109375	-4,703125	-4,70703125	0,003673845
-4,70703125	-4,703125	-4,705078125	0,001738417
-4,705078125	-4,703125	-4,704101563	0,000770726
-4,704101563	-4,703125	-4,703613281	0,000286886
-4,703613281	-4,703125	-4,703369141	4,49679E-05
-4,703369141	-4,703125	-4,70324707	-7,59907E-05
-4,703369141	-4,70324707	-4,703308105	-1,55114E-05
-4,703369141	-4,703308105	-4,703338623	1,47282E-05
-4,703338623	-4,703308105	-4,703323364	-3,91596E-07
-4,703338623	-4,703323364	-4,703330994	7,16832E-06
-4,703330994	-4,703323364	-4,703327179	3,38836E-06
-4,703327179	-4,703323364	-4,703325272	1,49838E-06
-4,703325272	-4,703323364	-4,703324318	5,53394E-07
-4,703324318	-4,703323364	-4,703323841	8,08993E-08

-
  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -4,70332. Necessitando, 19 iterações.
- No intervalo [-2; -1.5], obtivemos:

a	b	x_barra	f(x_barra)
-1,5	-2	-1,75	-0,004472112
-1,5	-1,75	-1,625	0,14273454
-1,625	-1,75	-1,6875	0,068542459
-1,6875	-1,75	-1,71875	0,031875648
-1,71875	-1,75	-1,734375	0,013660342
-1,734375	-1,75	-1,7421875	0,004583565
-1,7421875	-1,75	-1,74609375	5,3065E-05
-1,74609375	-1,75	-1,748046875	-0,002210192
-1,74609375	-1,748046875	-1,747070313	-0,00107873
-1,74609375	-1,747070313	-1,746582031	-0,000512874
-1,74609375	-1,746582031	-1,746337891	-0,000229915
-1,74609375	-1,746337891	-1,74621582	-8,84276E-05
-1,74609375	-1,74621582	-1,746154785	-1,76819E-05
-1,74609375	-1,746154785	-1,746124268	1,76914E-05
-1,746124268	-1,746154785	-1,746139526	4,68377E-09

-
  - Com uma raiz aproximada de -1,74613, e necessitando 14 iterações

3.1.2. Falsa posição;

- No intervalo [-5; -4.5], obtivemos:

a	f(a)	b	f(b)	x_barra	f(x_barra)
-5	0,290400132	-4,5	-0,199686803	-4,703725899	0,000398479
-4,703725899	0,000398479	-4,5	-0,199686803	-4,703320169	-3,55726E-06
-4,703725899	0,000398479	-4,703320169	-3,55726E-06	-4,703323759	-1,29905E-11

  - Com uma raiz aproximada de -4,70332, e necessitando 2 iterações.
- No intervalo [-2; -1.5], obtivemos:

a	f(a)	b	f(b)	x_barra	f(x_barra)
-1,5	0,293867362	-2	-0,280811553	-1,75567961	-0,011042034
-1,5	0,293867362	-1,75567961	-0,011042034	-1,74642039	-0,000325535
-1,5	0,293867362	-1,74642039	-0,000325535	-1,746147718	-9,48997E-06
-1,5	0,293867362	-1,746147718	-9,48997E-06	-1,746139769	-2,76559E-07
-1,5	0,293867362	-1,746139769	-2,76559E-07	-1,746139537	-8,05949E-09

  - Com uma raiz aproximada de -1,74614, e necessitando 4 iterações.

3.1.3. Ponto-fixo;

- No ponto fixo, necessitaríamos isolar o x de todas as maneiras possíveis, e checar as seguintes condições de convergência, para essas possíveis funções de Iteração:
  - i. $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em I;
  - ii. $|\phi'(x)| \leq M \leq I$;
  - iii. $X_o \in I$.
- Na questão 01, os dois intervalos com raízes isoladas, foram: I_1 = [-5; -4.5] e I_2 = [-2; -4.5]
- As Possíveis equações de iteração, são:
  - X= ln (-cos(x));
  - X = arccos($-e^x$)
- Nenhuma vai convergir. Na primeira, a primeira condição (i.) não será satisfeita. Na segunda, a segunda (ii.) não será satisfeita.
- Portanto, esse método de refinamento não é aplicável para essa função, nesse intervalo I. (Se tentarmos rodar o código, apresentará erro de matemática, ao se deparar com ln de número negativo.

3.1.4. Newton;

- No intervalo [-5; -4.5], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-4,75	0,046253848
-4,703309177	-1,44498E-05
-4,703323759	1,92881E-12

  - Com uma raiz aproximada de -4,70332, e necessitando 2 iterações.
- No intervalo [-2; -1.5], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-1,75	-0,004472112
-1,746137271	2,6184E-06
-1,74613953	8,90149E-13

  - Com uma raiz aproximada de -1,74613, e necessitando 2 iterações.

3.1.5. Secante;

- No intervalo [-5; -4.5], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-5	0,2904001
-4,5	-0,1996868
-4,703725911	0,000398491
-4,703320169	-3,55737E-06
-4,703323759	-1,29905E-11

  - Com uma raiz aproximada de -4,70332, e necessitando 2 iterações.

- No intervalo [-2; -1.5], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-2	0,2904001
-1,5	-0,1996868
-1,703725911	0,049465682
-1,663279028	0,097165607
-1,745670057	0,000544211
-1,746134117	6,27493E-06
-1,74613953	4,43164E-10

  - Com uma raiz aproximada de -1,74613, e necessitando 6 iterações.

3.2. Questão 2)

3.2.1. Bissecção;

- No intervalo [-1.5; -1.25], obtivemos:

a	b	x_barra	f(x_barra)
-1,5	-1,25	-1,375	2,457763672
-1,375	-1,25	-1,3125	0,867477417
-1,3125	-1,25	-1,28125	0,161715508
-1,28125	-1,25	-1,265625	-0,170078099
-1,28125	-1,265625	-1,2734375	-0,005901862
-1,28125	-1,2734375	-1,27734375	0,077473947
-1,27734375	-1,2734375	-1,275390625	0,035678166
-1,275390625	-1,2734375	-1,274414063	0,014861226
-1,274414063	-1,2734375	-1,273925781	0,004472956
-1,273925781	-1,2734375	-1,273681641	-0,000716134
-1,273925781	-1,273681641	-1,273803711	0,00187799
-1,273803711	-1,273681641	-1,273742676	0,000580823
-1,273742676	-1,273681641	-1,273712158	-6,76818E-05

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1.27371. Necessitando, 12 iterações.

- No intervalo [1; 1.25], obtivemos:

a	b	x_barra	f(x_barra)
1,25	1	1,125	-0,335205078
1,25	1,125	1,1875	0,742965698
1,1875	1,125	1,15625	0,181353569
1,15625	1,125	1,140625	-0,082399189
1,15625	1,140625	1,1484375	0,048089217
1,1484375	1,140625	1,14453125	-0,017499517
1,1484375	1,14453125	1,146484375	0,01520841
1,146484375	1,14453125	1,145507813	-0,001167125
1,146484375	1,145507813	1,145996094	0,007015245
1,145996094	1,145507813	1,145751953	0,002922711
1,145751953	1,145507813	1,145629883	0,000877456
1,145629883	1,145507813	1,145568848	-0,000144919
1,145629883	1,145568848	1,145599365	0,000366248
1,145599365	1,145568848	1,145584106	0,000110659
1,145584106	1,145568848	1,145576477	-1,7131E-05

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1.14557. Necessitando, 14 iterações.

3.2.2. Falsa posição;

- No intervalo [-1.5; -1.25], obtivemos:

a	f(a)	b	f(b)	x_barra	f(x_barra)
-1,5	6,4375	-1,25	-0,48828125	-1,267625494	-0,128363952
-1,5	6,4375	-1,267625494	-0,128363952	-1,272168462	-0,032803077
-1,5	6,4375	-1,272168462	-0,032803077	-1,27332352	-0,00832174
-1,5	6,4375	-1,27332352	-0,00832174	-1,273616165	-0,002107207
-1,5	6,4375	-1,273616165	-0,002107207	-1,273690244	-0,00053333
-1,5	6,4375	-1,273690244	-0,00053333	-1,273708992	-0,000134969
-1,5	6,4375	-1,273708992	-0,000134969	-1,273713736	-3,41552E-05

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1,27371. Necessitando, 6 iterações.

- No intervalo [1; 1.25], obtivemos:

a	f(a)	b	f(b)	x_barra	f(x_barra)
1	-2	1,25	2,01171875	1,124634859	-0,340984528
1	-2	1,124634859	-0,340984528	1,150251593	0,078784822
1,150251593	0,078784822	1,124634859	-0,340984528	1,145443691	-0,002240836
1,150251593	0,078784822	1,145443691	-0,002240836	1,145576658	-1,41011E-05

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1,14557. Necessitando, 6 iterações.

3.2.3. Ponto fixo;

- No ponto fixo, necessitaríamos isolar o x de todas as maneiras possíveis, e checar as seguintes condições de convergência, para essas possíveis funções de Iteração:
  - i. $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em I;
  - ii. $|\phi'(x)| \leq M \leq I$;
  - iii. $X_o \in I$.
- Na questão 02, os dois intervalos com raízes isoladas, foram: $I_1 = [-1.5; -1.25]$ e $I_2 = [1; 1.25]$
- As Possíveis equações de iteração, são:

- $X = \sqrt{3x^4 + x - 5}$;
- X = $-3x^4+x^2 + 5$;
- $X = \sqrt{\frac{x^2-x+5}{3}}$;

○ Embora a segunda chegue a convergir, ao rodarmos o programa, o novo x, é dado fora do intervalo;

○ Já as outras duas, não convergem, na primeira (i.) condução, da continuidade;

○ Portanto, esse método de refinamento não é aplicável para essa função, nesse intervalo I. (Se tentarmos rodar o código, nos retornará um x absurdo, fora do intervalo, ou, erro de matemática ao tentar calcular raízes de números negativos.)

3.2.4. Newton;

○ No intervalo [-1.5; -1.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-1,375	2,457763672
-1,285448691	0,25323547
-1,273894751	0,00381324
-1,273715386	9,07498E-07

- Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1,27371. Necessitando, 3 iterações.

○ No intervalo [1; 1.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
1,125	-0,335205078
1,146167366	0,009887888
1,145577969	7,86434E-06

- Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1,14557. Necessitando, 2 iterações.

3.2.5. Secante;

○ No intervalo [-1.5; -1.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-1,5	7,9375
-1,25	0,7617
-1,223462889	-0,998541808
-1,238516738	-0,713674595
-1,276230976	0,053634715
-1,273594761	-0,002561916
-1,273714941	-8,53887E-06

- Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1,27371. Necessitando, 6 iterações.

○ No intervalo [1; 1.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
1	-2
1,25	2,01171875
1,124634859	-0,340984528
1,142804415	-0,046274392
1,145657337	0,001337384
1,1455772	-5,01849E-06

- Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1,14557. Necessitando, 5 iterações.

3.3. Questão 3)

3.3.1. Bissecção;

- No intervalo [-5; -4.25], obtivemos:

a	b	x_barra	f(x_barra)
-5	-4,25	-4,625	-0,265101266
-5	-4,625	-4,8125	0,297122471
-4,8125	-4,625	-4,71875	0,016107487
-4,71875	-4,625	-4,671875	-0,124626932
-4,71875	-4,671875	-4,6953125	-0,054272955
-4,71875	-4,6953125	-4,70703125	-0,019083631
-4,71875	-4,70703125	-4,712890625	-0,001487995
-4,71875	-4,712890625	-4,715820313	0,007309803
-4,715820313	-4,712890625	-4,714355469	0,002910914
-4,714355469	-4,712890625	-4,713623047	0,000711461
-4,713623047	-4,712890625	-4,713256836	-0,000388266
-4,713623047	-4,713256836	-4,713439941	0,000161598
-4,713439941	-4,713256836	-4,713348389	-0,000113334
-4,713439941	-4,713348389	-4,713394165	2,41316E-05
-4,713394165	-4,713348389	-4,713371277	-4,46014E-05
-4,713394165	-4,713371277	-4,713382721	-1,02349E-05
-4,713394165	-4,713382721	$\boxed{-4,713388443}$	6,94831E-06

- Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -4.71339. Necessitando, 16 iterações.

- No intervalo [-2; -1.25], obtivemos:

a	b	x_barra	f(x_barra)
-1,25	-2	-1,625	-0,22816863
-1,25	-1,625	-1,4375	0,319532227
-1,4375	-1,625	-1,53125	0,04651967
-1,53125	-1,625	-1,578125	-0,090773044
-1,53125	-1,578125	-1,5546875	-0,022094073
-1,53125	-1,5546875	-1,54296875	0,012223423
-1,54296875	-1,5546875	-1,548828125	-0,004932978
-1,54296875	-1,548828125	-1,545898438	0,003645848
-1,545898438	-1,548828125	-1,547363281	-0,000643414
-1,545898438	-1,547363281	-1,546630859	0,001501255
-1,546630859	-1,547363281	-1,54699707	0,00042893
-1,54699707	-1,547363281	-1,547180176	-0,000107239
-1,54699707	-1,547180176	-1,547088623	0,000160846
-1,547088623	-1,547180176	-1,547134399	2,68036E-05
-1,547134399	-1,547180176	-1,547157288	-4,02177E-05
-1,547134399	-1,547157288	$\boxed{-1,547145844}$	-6,70704E-06

- Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1.54714. Necessitando, 15 iterações.

- No intervalo [1; 1.75], obtivemos:

a	b	x_barra	f(x_barra)
1	1,75	1,375	-0,734715784
1	1,375	1,1875	0,02898097
1,1875	1,375	1,28125	-0,343827047
1,1875	1,28125	1,234375	-0,155076609
1,1875	1,234375	1,2109375	-0,062450354
1,1875	1,2109375	1,19921875	-0,016583967
1,1875	1,19921875	1,193359375	0,006236353
1,193359375	1,19921875	1,196289063	-0,005164365
1,193359375	1,196289063	1,194824219	0,000538357
1,194824219	1,196289063	1,195556641	-0,002312414
1,194824219	1,195556641	1,19519043	-0,000886881
1,194824219	1,19519043	1,195007324	-0,000174225
1,194824219	1,195007324	1,194915771	0,000182075
1,194915771	1,195007324	1,194961548	3,92729E-06

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1.19496. Necessitando, 13 iterações.

3.3.2. Falsa posição;

- No intervalo [-5; -4.25], obtivemos:

a	f(a)	b	f(b)	x_barra	f(x_barra)
-5	0,848740574	-4,25	-1,343017214	-4,709568533	-0,01146422
-5	0,848740574	-4,709568533	-0,01146422	-4,713439204	0,000159384
-4,713439204	0,000159384	-4,709568533	-0,01146422	-4,713386129	2,25123E-10

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -4,71338. Necessitando, 2 iterações.
- No intervalo [-2; -1.25], obtivemos:

a	f(a)	b	f(b)	x_barra	f(x_barra)
-1,25	0,850465488	-2	-1,293552271	-1,547501788	-0,001049
-1,25	0,850465488	-1,547501788	-0,001048995	-1,54713529	2,41953E-05
-1,54713529	2,41953E-05	-1,547501788	-0,001048995	-1,547143553	2,09488E-10

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1,54714. Necessitando, 2 iterações.
- No intervalo [1; 1.75], obtivemos:

a	f(a)	b	f(b)	x_barra	f(x_barra)
1	0,714812975	1,75	-2,452939059	1,169239803	0,099373162
1,169239803	0,099373162	1,75	-2,452939059	1,191851448	0,012096993
1,191851448	0,012096993	1,75	-2,452939059	1,194590523	0,00144771
1,194590523	0,00144771	1,75	-2,452939059	1,194918129	0,000172899
1,194918129	0,000172899	1,75	-2,452939059	1,194957252	2,06442E-05

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1,19496. Necessitando, 4 iterações.

3.3.3. Ponto-fixo;

- No ponto fixo, necessitaríamos isolar o x de todas as maneiras possíveis, e checar as seguintes condições de convergência, para essas possíveis funções de Iteração:
  - i. $\phi(x)$ e $\phi'(x)$ são contínuas em I;
  - ii. $|\phi'(x)| \leq M \leq I$;
  - iii. $X_o \in I$.

- Na questão 03, os três intervalos com raízes isoladas, foram: I_1 = [-5; -4.25], I_2 = [-2; -1.25], e I_3 = [1; 1.75]
- As Possíveis equações de iteração, são:
  - X= ln (9 cos(x))
- Não vai convergir, de acordo com a condição (i.)
- Portanto, esse método de refinamento não é aplicável para essa função, nesse intervalo I. (Se tentarmos rodar o código, apresentará erro de matemática, ao se deparar com ln de número negativo.)

3.3.4. Newton;

- No intervalo [-5; -4.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-4,625	-0,265101266
-4,713673268	0,000862274
-4,713385938	-5,73126E-07

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -4,71338. Necessitando, 2 iterações.
- No intervalo [-2; -1.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-1,625	-0,22816863
-1,548271519	-0,00330301
-1,547161493	-5,25323E-05
-1,547143838	-8,35103E-07

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1,54714. Necessitando, 3 iterações.
- No intervalo [1; 1.75], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
1,375	-0,734715784
1,1577655	0,143223605
1,203946233	-0,035050891
1,192891771	0,008054259
1,195444943	-0,001877582
1,194850463	0,000436227
1,19498862	-0,00010143
1,194956498	2,35797E-05
1,194963966	-5,4819E-06

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1,19496. Necessitando, 8 iterações.

3.3.5. Secante;

- No intervalo [-5; -4.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-5	0,848740574
-4,25	-1,343017214
-4,709568533	-0,01146422
-4,713525262	0,000417814
-4,713386129	6,12975E-10

- Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -4,71338. Necessitando, 4 iterações.

- No intervalo [-2; -1.25], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
-2	-1,293552271
-1,25	0,850465488
-1,547501788	-0,001048995
-1,54713529	2,41953E-05
-1,547143553	2,09487E-10

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de -1,54714. Necessitando, 4 iterações.

- No intervalo [1; 1.75], obtivemos:

x_barra	f(x_barra)
1	0,714812975
1,75	-2,452939059
1,169239803	0,099373162
1,191851448	0,012096993
1,194985556	-8,95059E-05
1,194962537	7,89198E-08

  - Podemos observar, que o valor da raiz aproximada encontrada, foi de 1,19496. Necessitando, 5 iterações.

4. **Parte 3**: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS;

4.1. Questão 01)

Questão 01				
Método	**Intervalo**	**Tempo gasto (s)**	**Raiz Aproximada**	**Iterações**
Bisseccao	[-5; -4.5]	0.000999275207519531	-4,70332	19
Bisseccao	[-2; -1.5]	0.00100016593933310547	-1,74164	14
Falsa posição	[-5; -4.5]	0.000999275207519531	-4,70332	2
Falsa posição	[-2; -1.5]	0.000999275207519531	-1,74614	4
Newton	[-5; -4.5]	0.000999275207519531	-4,70332	2
Newton	[-2; -1.5]	0.000999275207519531	-1,74613	2
Secante	[-5; -4.5]	0.00100016593933310547	-4,70332	4
Secante	[-2; -1.5]	0.00100016593933310547	-1,74613	6

Chegamos a conclusão de que, após comparação, para o primeiro intervalo, há um empate, tanto o método da falsa posição, quanto o de Newton, precisaram de duas iterações para achar a raiz aproximada. Mesmo cenário se repete no segundo intervalo, porém com quatro iterações necessárias. No segundo intervalo, há um leve ganho de tempo, no método da falsa posição, mas está na casa dos milissegundos, na prática não há diferença observável.

4.2. Questão 02)

Questão 02				
Método	**Intervalo**	**Tempo gasto (s)**	**Raiz Aproximada**	**Iterações**
Bisseccao	[-1.5; -1.25]	0.000999275207519531	-1,27371	12
Bisseccao	[1; 1.25]	0.00100016593933310547	1,14558	14
Falsa posição	[-1.5; -1.25]	0.000999275207519531	-1,27371	6
Falsa posição	[1; 1.25]	0.000999275207519531	1,14558	3
Newton	[-1.5; -1.25]	0.00100016593933310547	-1,27371	3
Newton	[1; 1.25]	0.000999275207519531	1,14557	2
Secante	[-1.5; -1.25]	0.00100016593933310547	-1,27371	6
Secante	[1; 1.25]	0.000999275207519531	1,14557	5

É observável que, após comparação, tanto para o primeiro, quanto para o segundo intervalo, o método numérico mais eficaz, é o de Newton, precisando de 3 e 2 iterações, respectivamente.

4.3. Questão 03)

Questão 03				
Método	Intervalo	Tempo gasto (s)	Raiz Aproximada	Iterações
Bisseccao	[-5;-4.25]	0.0009999275207519531	-4,71339	16
Bisseccao	[-2;-1.25]	0.0009999275207519531	-1,54715	15
Bisseccao	[1; 1.75]	0.0010001659393310547	1,19496	13
Falsa posição	[-5;-4.25]	0.0010004043579101562	-4,71339	2
Falsa posição	[-2;-1.25]	0.0010001659393310547	-1,54714	2
Falsa posição	[1; 1.75]	0.0010001659393310547	1,19496	4
Newton	[-5;-4.25]	0.0009999275207519531	-4,71338	2
Newton	[-2;-1.25]	0.0010001659393310547	-1,54714	3
Newton	[1; 1.75]	0.0009999275207519531	1,19496	8
Secante	[-5;-4.25]	0.0009999275207519531	-4,71338	4
Secante	[-2;-1.25]	0.0010004043579101562	-1,54714	4
Secante	[1; 1.75]	0.0009999275207519531	1,19496	5

Finalmente, podemos concluir que, após comparação, para todos os três intervalos, o método numérico que se mostrou mais efetivo foi o da falsa posição, com 2, 2 e 4 iterações, para seus respectivos intervalos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MATEMÁTICA universitária. YouTube, 2021. Disponível em: < https://www.youtube.com/channel/UCr32abak2c78wTVOufPNGGw>. Acesso de 01 de abril de 2021, à 15 de abril de 2021.

DOCUMENTAÇÃO Numpy. Numpy documentation, 2008-2020. Disponível em: < https://numpy.org/doc/>. Acesso em 01 de Abril de 2021.

DOCUMENTAÇÃO matplotlib. Matplotlib documentation, 2020. Disponível em: < https://matplotlib.org/3.3.3/contents.html>. Acesso em: 01 de Abril de 2021.

CALCULADORA de gráficos. Graphic calculator. Geogebra, 2021. Disponível em: < https://www.geogebra.org/graphing?lang=pt>. Acesso em: 01 de Abril de 2021.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Observando a terceira parte, onde é feita a comparação dos métodos numéricos para o refinamento da raiz, podemos perceber que não há uma unanimidade quanto a qual o método mais eficaz para a obtenção da raiz. É visível que houve uma variação quanto a qual método é mais eficaz nas questões decorridas, por isso a importância de estudar todos. Podemos também dar uma ênfase no método do ponto fixo, que não foi útil em nenhum desses três cenários dados, entretanto, o mesmo é de importância tremenda em determinados casos. Em todos os ramos de estudo, é sempre importante ter a maior quantidade de ferramentas possíveis para resolver determinados problemas.

É de boa prática observar a importância dos conteúdos aplicados nesse trabalho, com os métodos numéricos é possível achar raízes aproximadas de funções que normalmente não teriam solução, na realidade, vale salientar que as raízes aproximadas são, análogo ao seu nome, apenas aproximações com determinada precisão. Esses métodos numéricos são de extrema importância para diversas áreas, podemos dar ênfase para a área da física, onde as equações que descrevem a natureza ao nosso redor não são trivialmente simples, ou impossíveis de se resolver analiticamente. Daí a importância de se ter um método computacional capaz de resolver esses, até então, problemas. Os métodos numéricos estão limitados, pelo menos hoje, à capacidade máxima das máquinas.

Todo os arquivos referentes a esse trabalho estarão disponíveis em um repositório no github, onde constarão todos os arquivos .py, de cada questão e seus respectivos intervalos (e cada método aplicado a cada intervalo), assim como o vídeo apresentação.