



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DISCIPLINA: CÁLCULO NUMÉRICO
TURMA: 01
DOCENTE: MATHEUS DA SILVA MENEZES
DISCENTE: VICTOR BENOISTON JALES DE OLIVEIRA – 2016020720
ARTHUR WILLIAM PEREIRA CAVALCANTI – 2019021915
SAMUEL MARTINS BARBOSA - 2016020272

Trabalho referente à segunda unidade

MOSSORÓ – RN

MAIO – 2021

Metodologia

Em todo o trabalho, será feito uso da linguagem *python* para resolução dos problemas. A nomenclatura “Questão 01” e “Questão 02” será utilizada para melhor compreensão. O projeto será dividido em:

- Parte escrita;
 - Explicação teórica do sistema desenvolvido;
- Algoritmo;
 - Algoritmo para cada questão;
- Vídeo explicativo.

Questão 01

Na primeira questão, é requisitado a resolução de um sistema dado, por meio de todos os métodos vistos em sala de aula. Os mesmos, se resumem a:

- Métodos diretos
 - Eliminação de Gauss;
 - Fatoração LU;
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi;
 - Gauss-Seidel.

Observação: resíduo de métodos diretos é igual a 0.

Em toda a questão (todos os métodos aplicados) será tratado o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & -3 & 4 \\ -6 & 4 & -8 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -16 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Como destacado anteriormente, a eliminação de Gauss, ou eliminação Gaussiana, é um método direto, ou seja, antes de se ter o resultado, é possível se calcular o número de passos (iterações) que ocorrerão até a obtenção dos valores finais. Na eliminação Gaussiana, se abstrai a matriz aumentada $[A|B]$ do problema, onde se é possível separar as incógnitas (valores de x_1, x_1, \dots, x_n), e valores independentes. Após a abstração, faremos uso da eliminação em si, onde adotaremos um pivô por iteração, em seguida, será feita uma série de cálculos (multiplicações por valores reais), e será encontrada uma matriz equivalente, nesse caso, uma matriz triangular superior. Para uma matriz $(n \times n)$, teremos um processo com $(n-1)$ etapas. Note que, a eliminação Gaussiana não nos provê o resultado final, e sim, a matriz triangular superior. Após a obtenção da matriz, embora seja um cálculo manual trivial, será feita uma resolução computacional proveniente de algoritmo dado em explicação em sala (retro substituição).

Após a aplicação do método por meio de algoritmo desenvolvido, temos o seguinte resultado:

```
Teremos a seguinte matriz aumentada equivalente:  
[[3, 2, 0, 1, 3], [0, 2, -3, 1, -3], [0, 0, 4, -2, 2], [0, 0, 0, -10, 10]]  
Os valores finais de x serão:  
X1 = 2.0  
X2 = -1.0  
X3 = 0.0  
X4 = -1.0
```

Fatoração LU

Assim como na eliminação Gaussiana é também um método direto, além disso, a fatoração LU não nos proverá o resultado final do sistema, e sim, a matriz triangular superior. Analogamente, após a obtenção da matriz, faremos uso da mesma técnica de substituição para obtenção de valores. Esse método consiste em fatorar a matriz A dos coeficientes na forma $A=LU$, onde a matriz A é decomposta em L e u , L remete à *lower*, e u , se refere a *upper*. Em multiplicação de matrizes, para que seja possível se realizar, é necessário que o número de colunas da primeira, seja igual ao número de linhas da segunda, onde o resultado será uma matriz com o mesmo número de linhas da primeira, e o mesmo número de colunas que a segunda. Diferente da eliminação Gaussiana, no lugar de trabalharmos com uma matriz aumentada $[A|B]$, utilizamos apenas $[A]$.

Nesse método, teremos que resolver dois sistemas, tanto $L.y = b$, quanto $u.x = y$. Achando o y , aplicamos no primeiro, e chegamos ao resultado final.

Teorema: Se o determinante de todos os menores principais da matriz A forem não-nulos, então a fatoração $A = Lu$ é única.

Após a aplicação do método por meio de algoritmo desenvolvido, chegamos aos seguintes resultados:

```
A matriz L é dada por: [[1, 0, 0, 0], [3, 1, 0, 0], [-2, 4, 1, 0], [1, -5, -3, 1]]  
A matriz u é dada por: [[3, 2, 0, 1], [0, 2, -3, 1], [0, 0, 4, -2], [0, 0, 0, -10]]  
O resultado de y é:  
[3, -3, 2, 10]  
Portanto, o resultado final é:  
X0 = 2.0  
X1 = -1.0  
X2 = 0.0  
X3 = -1.0
```

Gauss-Jacobi

O método de Gauss-Jacobi pertence aos métodos iterativos estacionários, onde se gera uma sequência de $x^{(k)}$ vetores a partir de uma solução inicial $x^{(0)}$ que deve convergir para a solução do sistema. Nesse método, temos $A.x=b$, onde A será dividido em $A=(I+D+S)$, e a partir daí, será gerado o x^{k+1} . Temos como fórmula geral: $X^{k+1}=M.x^k+C$.

Condições de convergência:

A convergência é garantida se qualquer das condições for satisfeita:

- a) Se o raio espectral $\rho(M) < 1$;
- b) Se a matriz A for diagonalmente dominante
 - a. Critério das linhas;
 - b. Critério das colunas.

No caso onde nenhuma das condições é satisfeita, pode ser ou não que convirja, dependerá da proximidade da solução.

Critérios de parada:

- a) $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} < \varepsilon$;
- b) $\|Ax^{(k)} - b\|_{\infty} < \varepsilon$;
- c) Limite de iterações. B

Em nosso caso de estudo, a matriz não é diagonalmente dominante.

Ao aplicarmos o método, desenvolvendo o algoritmo, tivemos o seguinte resultado:

```
O valor de dr da primeira iteração, foi de:
1.7397260273972601
Ainda não é menor que 10^-5
-----
O critério de parada dr da segunda iteração, foi de:
0.4153132250580046
Ainda não é menor que 10^-5
-----
O critério de parada dr da terceira iteração, foi de:
0.9655347187024835
Ainda não é menor que 10^-5
```

Como é possível notar, o valor de dr, que é o nosso critério de parada (que nesse caso, nos foi dado uma precisão de 10^{-5} , começa a crescer na terceira iteração, sendo assim, podemos observar que não vai convergir. Nesse caso, foi utilizado o critério a).

Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é uma modificação do método de Gauss-Jacobi, onde será utilizada a componente mais atualizada disponível. Ela busca aprimorar o método de Gauss-Jacobi. Continuando na analogia, esse método vai isolar o x_1 na primeira equação, x_2 na segunda, x_n na enésima. A primeira iteração, é igual, porém a partir da segunda, o novo valor de x_2 será com o valor atualizado. A ideia principal, é utilizar os valores não atualizados quando os mesmos não estiverem disponíveis. As condições de convergência são as mesmas, porém, com um critério adicional:

$$\text{Sejam } \beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\text{e } \beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \dots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \dots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

Seja $\beta = \max\{\beta_j\}$. Se $\beta < 1$, o método converge.

Utilizaremos o mesmo critério de parada,

$$\text{a) } \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty}}{\|x^{(k)}\|_{\infty}} < \varepsilon;$$

Ao partirmos para a convergência, nos deparamos com os seguintes valores de β :

$\{1, 2, 1.75, 3,031\}$, onde temos o máximo de 3,031, ou seja, não é menor do que 1.

Portanto, não podemos garantir que haverá convergência

Como não garantimos a convergência, pois não atendia aos critérios, após aplicarmos os valores no algoritmo desenvolvido, chegamos aos seguintes resultados:

```
O valor de dr da primeira iteração, foi de:
1.4164201183431955
Ainda não é menor que 10^-5
-----
O valor de dr da segunda iteração, foi de:
0.6900441828226473
Ainda não é menor que 10^-5
-----
O valor de dr da terceira iteração, foi de:
0.18157130455167653
Ainda não é menor que 10^-5
-----
O valor de dr da quarta iteração, foi de:
0.10718621233812356
Ainda não é menor que 10^-5
-----
O valor de dr da quinta iteração, foi de:
0.10597139108470319
Ainda não é menor que 10^-5
-----
O valor de dr da sexta iteração, foi de:
0.1100208593364319
Ainda não é menor que 10^-5
-----
```

Podemos perceber que a partir da sexta iteração, o valor discriminante dr começa a crescer, sendo que já sofria um ajuste insuficientemente pequeno da quarta para a quinta iteração. Portanto, concluímos que não irá convergir.

Questão 02

Teorema: Dado um conjunto (x_i, y_i) , com $1 \leq i \leq n + 1$ pares distintos em um intervalo $[a, b]$. Então, existe um único polinômio de grau n , $P_n(x)$, tal que $P_n(x_i) = y_i$.

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Na segunda questão, nos deparamos com os seguintes passos requisitados:

- Encontrar os polinômios interpoladores;
 - Segundo grau;
 - Terceiro grau;
 - Quarto grau;
- Interpolação de segundo grau através de todos os métodos numéricos vistos na segunda unidade para prever o que acontece no dia 7;
- Estimar em que momento o peso médio da amostra atinge 10g.

Dados fornecidos:

dia	0	6	10	13	17
Peso médio amostra (g)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10

Podemos abstrair o seguinte:

x	y
0	6.67
6	17.33
10	42.67
13	37.33
17	30.10

Polinômios

Utilizando o método quadrático, ou de sistema, obtivemos os seguintes resultados,

```
Teremos o seguinte polinomio de grau 4:  
F(x) = 0.013X^4 - 0.515X^3 + 6.058X^2 - 18.932X + 6.667  
-----  
Teremos o seguinte polinomio de grau 3:  
F(x) = -0.124X^3 + 2.444X^2 - 8.413X + 6.667  
-----  
Teremos o seguinte polinomio de grau 2:  
F(x) = -0.958X^2 + 0.456X + 6.667
```

Na segunda parte, é pedido para que façamos o uso de métodos numéricos para estimar o que acontece no dia 7, e também em que momento o peso médio da amostra atinge 10g. Em todos os métodos, será utilizado interpolação de segundo grau.

Quadrática

Na interpolação polinomial quadrática, ou de sistema, teremos o seguinte cenário:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Obtivemos o seguinte resultado:

```
O polinomio resultante será: P2(x)=0.45569x²-0.958x+6.667
No dia 07, a amostra atinge: 22.29g
Utilizando interpolação inversa, vimos que a amostra chegará a marca de 10g em: x= 3.95
```

Lagrange

No método de Lagrange, vamos ter como polinômio final:

$$P_2(x) = L_0 \cdot f(x_0) + L_1 \cdot f(x_1) + L_2 \cdot f(x_2)$$

Para achar os valores de L_n , temos:

$$L_0 = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)};$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)};$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)}.$$

Após aplicarmos os valores no algoritmo desenvolvido, temos o seguinte resultado:

```
Por meio do método de Lagrange, temos:
No dia 07, a amostra atinge: 22.30g
```

Newton

O método de Newton, ou diferenças divididas, é análogo ao método de Lagrange, ele não dá o polinômio em sua forma reduzida, tem o seguinte comportamento:

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + d_n(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (\dots) \cdot (x - x_{n-1})$$

Onde d_i , $0 \leq i \leq n$, é o operador diferença derivada de ordem i .

No nosso caso, teremos o seguinte:

$$P_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

Após aplicarmos os valores no algoritmo desenvolvido, temos:

```
Por meio do método de Newton, temos:
No dia 07, a amostra atinge: 22.30g
```

Podemos perceber que os resultados convergem para o mesmo valor.

Poderíamos utilizar interpolação inversa nesse tabelamento?

Interpolação inversa

Na interpolação comum, temos um valor de x , e através do mesmo, achamos um valor de y correspondente. Na interpolação inversa, teremos um valor de y , e acharemos um valor de x , ou seja, o inverso.

Estratégias:

- 1) Usar a interpolação comum e obter $P_n(x)$. Depois, igualar ao valor de y desejado, e obter as raízes.
- 2) Inverter o tabelamento e calcular $P_n(x)$, onde passaria a ser $P_n(y)$.

Observação: A função deve ser contínua no intervalo tabelado e os dados devem ser monotonicamente crescentes, ou decrescentes **no intervalo**.

Ou seja, não só é possível, como foi utilizado para achar o valor de x com o valor de y dado, referente à segunda parte da questão, onde nos é pedido para achar o dia em que a amostra chegará as 10g.