The derivative as a function

La derivada no es mas que la razon de cambio en un punto, no es mas que la aplicación del concepto de limite cuando la diferencia entre dos puntos tiende a cero, donde su pendiente viene a ser la función. Pero si aplicamos este concepto a cada punto de la función entonces la derivada se vuelve una función.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Entonces si queremos hallar la derivada (como función) de una función aplicamos la formula, ¿facil no? pero tal vez viste varias formulas que te ayudan a derivar facilmente una función, pues todas esas formulas partes de esta definición y pueden ser comprobadas facilmente pero talvez te tome un tiempo.

$$\frac{\partial}{\partial x} x^n = \mathrm{nx}^{n-1}$$

The chain rule

Este concepto es simple, intuitivo y poderoso:

$$\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{\partial}{\partial u} y * \frac{\partial}{\partial x} u; \text{ asumiendo que } y \text{ es una fución compuesta por } y(u) \text{ y } u(x)$$

El concepto es simple pero nos ayuda a resolver funciones compuestas y mas adelante tendra aplicaciones aun mas utiles. ¿talvez te preguntes es intuitivo, logico pero porque puedo hacer esto? o tal vez son las preguntas que me hago yo obsesivamente por entender todo, de cualquier manera aqui va la comprobación:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; esta es la pendiende de una recta, en cualquier funcion (continua) al hacer el suficiente zoom obtenemos una recta entonces lo siguiente lo podemos aplicar en cualquier funcion

$\Delta y \approx \frac{\partial}{\partial u} y * \Delta u$; estamos remplazando la pendiente por el concepto de derivada en la funcion $y(u)$

$\Delta u \approx \frac{\partial}{\partial x} u * \Delta x$; aplicamos lo mismo a la funcion $u(x)$

Solo falta recordar que Δx y Δu no son mas que variaciones (numeros) por lo que pueden ser tratados como tales :

$$\Delta y \approx \frac{\partial}{\partial u} y * \frac{\partial}{\partial x} u * \Delta x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y = \frac{\partial}{\partial u} y * \frac{\partial}{\partial x} u$$

Listo, facil no? talvez te preguntes porque $'' \approx ''$ se cambio por$'' = ''$, o porque al inicio no usamos $'' = ''$ en vez de $'' \approx ''$.
Solo recuerda que :

$\frac{\Delta y}{\Delta u} \approx \frac{\partial}{\partial u} y$; son aproximados y no iguales porque solo serian iguales si aplicamos el concepto de limite cuando Δu tiende a cero.

$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{\partial}{\partial u} y$; es decir la variación de u tiende hacia cero.