Derivada direccional

Al hablar sobre funciones de una variable la interpretación de la derivada es ¿Qué tan rapido cambia f(x) cuando me muevo?. Pero cuando estamos en un espacio tridimensional en una coordenada (x,y) puedo moverme a la derecha, arriba, en diagonal, infinitas direcciones. La derivada parcial simplemente me ayuda a saber con presición a donde me quiero mover, me ayuda a establecerme en el plano y saber a donde me estoy moviendo. Las derivadas parciales no son utiles porque solo me dicen donde me muevo respecto al eje x o y.

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} f\right)_{u,P} = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h * u) - f(P)}{h}$$

Esa es la definición de la derivada direccional, ¿Que significa?, u es el vector unitario que apunta hacia la direccion que yo desee, h es cuanto me muevo, y el vector P viene a ser el vector entre el origen y el punto P=(x,y). Entonces ¿Que significa P+h*u? simple, es P moviendose sobre el vector h*u, pero como h tiende a cero entonces es P con la dirección del vector u. El resto de la ecuacion es simple de interpretar.

Como resumen la derivada direccional no es mas que la razon de cambio de f en la dirección u (cualquier dirección sobre el punto (x,y) de la superficie. La derivada direccional es el verdadero analogo real de la derivada de una variable pero en varias dimensiones.

Imagina que tienes un punto P, y ahora quieres moverte un poco en algún vector v = (vx,vy) pues simplemente realizas una multiplicacion escalar componente por componente, lo que nos lleva a la definición de producto punto. Pues esta es otra manera de ver la derivada direccional por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} f\right)_{u,P} = \frac{\partial}{\partial x} f * v_x + \frac{\partial}{\partial y} f * v_y = \nabla f \,.\, v$$

donde v es el vector unitario a donde nos queremos mover, y el gradiente son los pequeñas distancias que estamos recorriendo. Ahora, viene lo chevere. Queremos hallar la dirección de maximo crecimiento, puesto esto se logra haciendo que el coseno sea el maximo valor posible (1) y remplazando la norma del vector unitario (1). Concluyendo que la la maxima dirección (como escalar) de crecimiento es la norma del vector gradiente.

$$\nabla f \,.\, u = \|\nabla f\| * \|u\| * \cos(\theta)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} f\right)_{\max} = \nabla f \,.\, u = \|\nabla f\|$$

$$u = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

Ademas, en la ultima ecuación podemos definir que: "El vector unitario del gradiente es la dirección de maximo crecimiento (como vector)"