

## ▼ AG3 - Actividad Guiada 3

**Nombre:** Victor Callejas Fuentes

**Asignatura:** O3MIAR - Algoritmos de Optimización

**Link:** <https://colab.research.google.com/drive/1NdL0zAOg8-TBH0XVcvk1WgfhWi3AXv-l?usp=sharing>

**Github:** [https://github.com/VictorCallejas/O3miar/blob/main/Algoritmos\\_AG3\\_VictorCallejasFuentes.ipynb](https://github.com/VictorCallejas/O3miar/blob/main/Algoritmos_AG3_VictorCallejasFuentes.ipynb)

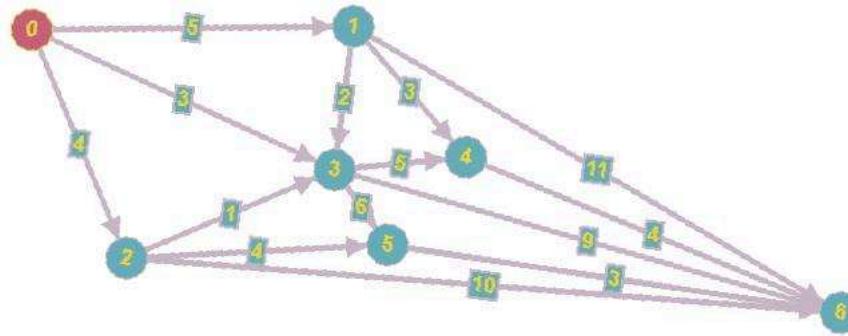
```
import math
```

## ▼ Programación Dinámica. Viaje por el río

- **Definición:** Es posible dividir el problema en subproblemas más pequeños, guardando las soluciones para ser utilizadas más adelante.
- **Características** que permiten identificar problemas aplicables:
  - Es posible almacenar soluciones de los subproblemas para ser utilizados más adelante
  - Debe verificar el principio de optimalidad de Bellman: "en una secuencia optima de decisiones, toda sub-secuencia también es óptima" (\*)
  - La necesidad de guardar la información acerca de las soluciones parciales unido a la recursividad provoca la necesidad de preocuparnos por la complejidad espacial (cuantos recursos de espacio usaremos)

### Problema

En un río hay **n** embarcaderos y debemos desplazarnos río abajo desde un embarcadero a otro. Cada embarcadero tiene precios diferentes para ir de un embarcadero a otro situado más abajo. Para ir del embarcadero *i* al *j*, puede ocurrir que sea más barato hacer un trasbordo por un embarcadero intermedio *k*. El problema consiste en determinar la combinación más barata.



\*Consideramos una tabla TARIFAS(*i,j*) para almacenar todos los precios que nos ofrecen los embarcaderos.

\*Si no es posible ir desde *i* a *j* daremos un valor alto para garantizar que ese trayecto no se va a elegir en la ruta óptima(modelado habitual para restricciones)

```
#Viaje por el río - Programación dinámica
#####
TARIFAS = [
[0,5,4,3,float("inf"),999,999], #desde nodo 0
[999,0,999,2,3,999,11], #desde nodo 1
[999,999, 0,1,999,4,10], #desde nodo 2
[999,999,999, 0,5,6,9],
[999,999, 999,999,0,999,4],
[999,999, 999,999,999,0,3],
[999,999,999,999,999,999,0]
]
```

```
#999 se puede sustituir por float("inf") del modulo math
TARIFAS
```

```
[[0, 5, 4, 3, inf, 999, 999],
 [999, 0, 999, 2, 3, 999, 11],
 [999, 999, 0, 1, 999, 4, 10],
 [999, 999, 999, 0, 5, 6, 9],
 [999, 999, 999, 999, 0, 999, 4],
 [999, 999, 999, 999, 999, 0, 3],
 [999, 999, 999, 999, 999, 0]]
```

```
#Calculo de la matriz de PRECIOS y RUTAS
# PRECIOS - contiene la matriz del mejor precio para ir de un nodo a otro
# RUTAS - contiene los nodos intermedios para ir de un nodo a otro
#####
def Precios(TARIFAS):
#####
    #Total de Nodos
    N = len(TARIFAS[0])

    #Inicialización de la tabla de precios
    PRECIOS = [ [9999]*N for i in [9999]*N]  #n x n
    RUTA = [ [""]*N for i in [""]*N]

    #Se recorren todos los nodos con dos bucles(origen - destino)
    # para ir construyendo la matriz de PRECIOS
    for i in range(N-1):
        for j in range(i+1, N):
            MIN = TARIFAS[i][j]
            RUTA[i][j] = i

            for k in range(i, j):
                if PRECIOS[i][k] + TARIFAS[k][j] < MIN:
                    MIN = min(MIN, PRECIOS[i][k] + TARIFAS[k][j])
                    RUTA[i][j] = k
            PRECIOS[i][j] = MIN

    return PRECIOS,RUTA
```

```
PRECIOS,RUTA = Precios(TARIFAS)
#print(PRECIOS[0][6])

print("PRECIOS")
for i in range(len(TARIFAS)):
    print(PRECIOS[i])

print("\nRUTA")
for i in range(len(TARIFAS)):
    print(RUTA[i])

PRECIOS
[9999, 5, 4, 3, 8, 8, 11]
[9999, 9999, 999, 2, 3, 8, 7]
[9999, 9999, 9999, 1, 6, 4, 7]
[9999, 9999, 9999, 9999, 5, 6, 9]
[9999, 9999, 9999, 9999, 9999, 999, 4]
[9999, 9999, 9999, 9999, 9999, 9999, 3]
[9999, 9999, 9999, 9999, 9999, 9999]

RUTA
[', 0, 0, 0, 1, 2, 5]
[', ', 1, 1, 1, 3, 4]
[', ', ', 2, 3, 2, 5]
[', ', ', ', 3, 3, 3]
[', ', ', ', ', 4, 4]
[', ', ', ', ', ', 5]
[', ', ', ', ', ', ]
```

```
#Calculo de la ruta usando la matriz RUTA
def calcular_ruta(RUTA, desde, hasta):
    if desde == RUTA[desde][hasta]:
        #if desde == hasta:
        #print("Ir a :" + str(desde))
        return desde
    else:
        return str(calcular_ruta(RUTA, desde, RUTA[desde][hasta])) + ',' + str(RUTA[desde][hasta])
```

```
print("\nLa ruta es:")
calcular_ruta(RUTA, 0,6)
```

```
La ruta es:
'0,2,5'
```

## Análisis de complejidad - Programación Dinámica

**Complejidad temporal:**  $O(n^3)$

- Tenemos tres bucles anidados que recorren los n nodos
- El bucle exterior recorre i desde 0 hasta n-1
- El segundo bucle recorre j desde i+1 hasta n
- El bucle interior recorre k desde i hasta j

**Complejidad espacial:**  $O(n^2)$

- Almacenamos dos matrices de tamaño  $n \times n$ : PRECIOS y RUTA

La programación dinámica nos permite resolver este problema de forma eficiente guardando las soluciones de los subproblemas. Sin esta técnica, un enfoque de fuerza bruta tendría complejidad exponencial  $O(2^n)$ .

## ▼ Problema de Asignacion de tarea

```
#Asignacion de tareas - Ramificación y Poda
#####
#   T A R E A
#   A
#   G
#   E
#   N
#   T
#   E

COSTES=[[11,12,18,40],
        [14,15,13,22],
        [11,17,19,23],
        [17,14,20,28]]
```

```
#Calculo del valor de una solucion parcial
def valor(S,COSTES):
    VALOR = 0
    for i in range(len(S)):
        VALOR += COSTES[S[i]][i]
    return VALOR
```

```
valor((3,2, ),COSTES)
```

```
34
```

```
#Coste inferior para soluciones parciales
# (1,3,) Se asigna la tarea 1 al agente 0 y la tarea 3 al agente 1

def CI(S,COSTES):
    VALOR = 0
    #Valores establecidos
    for i in range(len(S)):
        VALOR += COSTES[i][S[i]]

    #Estimacion
    for i in range( len(S), len(COSTES) ):
        VALOR += min( [ COSTES[j][i] for j in range(len(S), len(COSTES)) ] )
    return VALOR

def CS(S,COSTES):
    VALOR = 0
    #Valores establecidos
    for i in range(len(S)):
```

```

    VALOR += COSTES[i][S[i]]

    #Estimacion
    for i in range( len(S), len(COSTES) ):
        VALOR += max( [ COSTES[j][i] for j in range(len(S), len(COSTES)) ] )
    return VALOR

CI((0,1),COSTES)

```

68

```

#Genera tantos hijos como posibilidades haya para la siguiente elemento de la tupla
#(0,) -> (0,1), (0,2), (0,3)
def crear_hijos(NODO, N):
    HIJOS = []
    for i in range(N):
        if i not in NODO:
            HIJOS.append({ 's': NODO +(i,) })
    return HIJOS

```

crear\_hijos((0,) , 4)

[{'s': (0, 1)}, {'s': (0, 2)}, {'s': (0, 3)}]

```

def ramificacion_y_poda(COSTES):
    #Construccion iterativa de soluciones(arbol). En cada etapa asignamos un agente(ramas).
    #Nodos del grafo { s:(1,2),CI:3,CS:5 }
    #print(COSTES)
    DIMENSION = len(COSTES)
    MEJOR_SOLUCION=tuple( i for i in range(len(COSTES)) )
    CotaSup = valor(MEJOR_SOLUCION,COSTES)
    #print("Cota Superior:", CotaSup)

    NODOS=[]
    NODOS.append({ 's':(), 'ci':CI((),COSTES) } )

    iteracion = 0

    while( len(NODOS) > 0):
        iteracion +=1

        nodo_prometedor = [ min(NODOS, key=lambda x:x['ci']) ][0]['s']
        #print("Nodo prometedor:", nodo_prometedor)

        #Ramificacion
        #Se generan los hijos
        HIJOS =[ { 's':x['s'], 'ci':CI(x['s'], COSTES) } for x in crear_hijos(nodo_prometedor, DIMENSION) ]

        #Revisamos la cota superior y nos quedamos con la mejor solucion si llegamos a una solucion final
        NODO_FINAL = [x for x in HIJOS if len(x['s']) == DIMENSION ]
        if len(NODO_FINAL ) >0:
            #print("\n*****Soluciones:", [x for x in HIJOS if len(x['s']) == DIMENSION ] )
            if NODO_FINAL[0]['ci'] < CotaSup:
                CotaSup = NODO_FINAL[0]['ci']
                MEJOR_SOLUCION = NODO_FINAL

        #Poda
        HIJOS = [x for x in HIJOS if x['ci'] < CotaSup ]

        #Añadimos los hijos
        NODOS.extend(HIJOS)

        #Eliminamos el nodo ramificado
        NODOS = [ x for x in NODOS if x['s'] != nodo_prometedor ]

    print("La solucion final es:" ,MEJOR_SOLUCION , " en " , iteracion , " iteraciones" , " para dimension: " ,DIMENSION )


```

ramificacion\_y\_poda(COSTES)

La solucion final es: [{'s': (1, 2, 0, 3), 'ci': 64}] en 10 iteraciones para dimension: 4

## Análisis de complejidad - Ramificación y Poda

**Complejidad temporal:**  $O(n! * n)$  en el peor caso

- En el peor caso debemos explorar todos los nodos del árbol de decisión
- El árbol tiene  $n!$  hojas (todas las permutaciones posibles)
- Sin embargo, la poda reduce significativamente el espacio de búsqueda

**Complejidad espacial:**  $O(n^2)$

- Almacenamos la lista de nodos activos
- En la práctica, la poda mantiene este número reducido

**Ventajas de la técnica:**

- La cota inferior ( $CI$ ) nos permite descartar ramas no prometedoras
- La cota superior nos da una referencia de la mejor solución encontrada
- La poda elimina nodos cuya  $CI$  supera la mejor solución conocida

## ✓ Ampliación: Experimentación con Ramificación y Poda

Vamos a analizar el comportamiento del algoritmo con diferentes tamaños de problema y extraer conclusiones.

```
import time
import random

def generar_costes_aleatorios(n, min_val=5, max_val=50):
    """Genera una matriz de costes aleatorios de dimensión n x n"""
    return [[random.randint(min_val, max_val) for _ in range(n)] for _ in range(n)]

#Experimentación con diferentes dimensiones
dimensiones = [4, 5, 6, 7, 8]
resultados = []

print("Dimension | Iteraciones | Tiempo (s) | Solucion")
print("-" * 55)

for dim in dimensiones:
    COSTES_TEST = generar_costes_aleatorios(dim)

    inicio = time.time()

    #Versión modificada para contar iteraciones
    DIMENSION = len(COSTES_TEST)
    MEJOR_SOLUCION = tuple(i for i in range(DIMENSION))
    CotaSup = valor(MEJOR_SOLUCION, COSTES_TEST)

    NODOS = []
    NODOS.append({'s': (), 'ci': CI((), COSTES_TEST)})

    iteracion = 0

    while len(NODOS) > 0:
        iteracion += 1
        nodo_prometedor = [min(NODOS, key=lambda x: x['ci'])][0]['s']

        HIJOS = [{ 's': x['s'], 'ci': CI(x['s'], COSTES_TEST)} for x in crear_hijos(nodo_prometedor, DIMENSION)]

        NODO_FINAL = [x for x in HIJOS if len(x['s']) == DIMENSION]
        if len(NODO_FINAL) > 0:
            if NODO_FINAL[0]['ci'] < CotaSup:
                CotaSup = NODO_FINAL[0]['ci']
                MEJOR_SOLUCION = NODO_FINAL

        HIJOS = [x for x in HIJOS if x['ci'] < CotaSup]
        NODOS.extend(HIJOS)
        NODOS = [x for x in NODOS if x['s'] != nodo_prometedor]

    tiempo = time.time() - inicio
    resultados.append((dim, iteracion, tiempo))
    print(f" {dim} | {iteracion:4d} | {tiempo:.4f} | {MEJOR_SOLUCION}")

print("\n" + "=" * 55)

Dimension | Iteraciones | Tiempo (s) | Solucion
-----
```

4	10	0.0002	[{'s': (1, 2, 0, 3), 'ci': 42}]
5	18	0.0003	[{'s': (2, 3, 0, 1, 4), 'ci': 114}]
6	28	0.0005	[{'s': (4, 0, 3, 2, 1, 5), 'ci': 105}]
7	83	0.0021	[{'s': (1, 6, 2, 4, 5, 0, 3), 'ci': 97}]
8	925	0.1552	[{'s': (7, 4, 5, 1, 0, 6, 2, 3), 'ci': 94}]

```
=====
```

## Conclusiones de la experimentación

### Observaciones:

1. El numero de iteraciones crece de forma factorial con la dimension del problema
2. La poda reduce significativamente el espacio de busqueda respecto a fuerza bruta
3. El tiempo de ejecucion depende de la calidad de las cotas utilizadas

### Mejoras posibles:

- Utilizar heurísticas mejores para calcular la cota inferior
- Implementar una estrategia de selección de nodos más sofisticada
- Paralelizar la exploración de ramas independientes

### Comparativa con fuerza bruta:

- Para n=8, fuerza bruta exploraría  $8! = 40320$  permutaciones
- Ramificación y poda explora muchas menos gracias a la eliminación de ramas no prometedoras

## ▼ Descenso del gradiente

```
import math                      #Funciones matemáticas
import matplotlib.pyplot as plt   #Generación de gráficos (otra opción seaborn)
import numpy as np                #Tratamiento matriz N-dimensionales y otras (fundamental!)
#Import scipy as sc

import random
```

Vamos a buscar el mínimo de la función paraboloide :

$$f(x) = x^2 + y^2$$

Obviamente se encuentra en  $(x,y)=(0,0)$  pero probaremos como llegamos a él a través del descenso del gradiente.

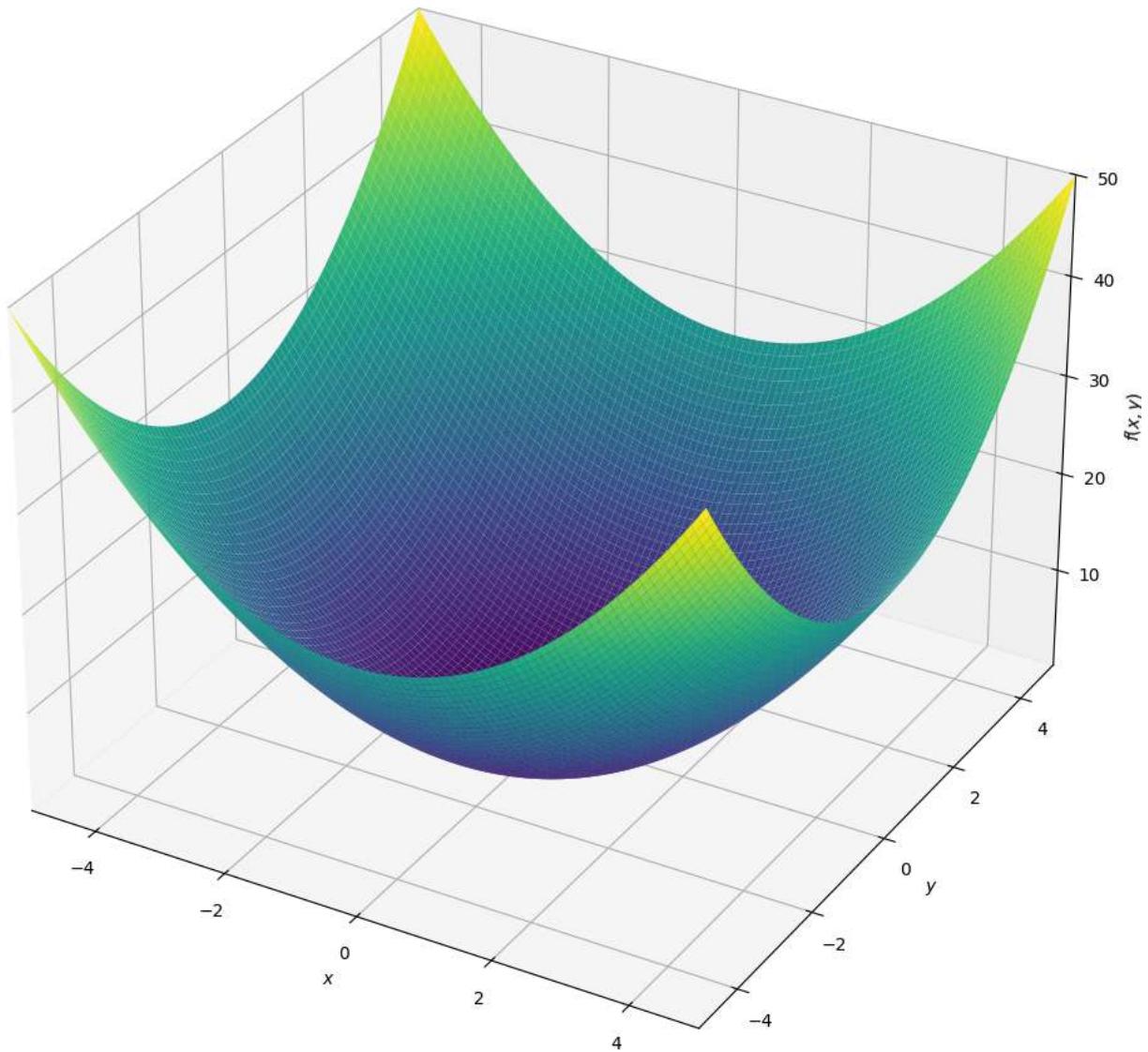
```
#Definimos la función
#Paraboloid
f = lambda X: X[0]**2 + X[1]**2    #Función
df = lambda X: [2*X[0], 2*X[1]]      #Gradiente

df([1,2])
```

```
[2, 4]
```

```
from sympy import symbols
from sympy.plotting import plot
from sympy.plotting import plot3d
x,y = symbols('x y')
plot3d(x**2 + y**2,
       (x,-5,5),(y,-5,5),
       title='x**2 + y**2',
       size=(10,10))
```

$$x^{**2} + y^{**2}$$



```
<sympy.plotting.backends.matplotlibbackend.matplotlib.MatplotlibBackend at 0x7df5b4668ef0>
```

```
#Prepara los datos para dibujar mapa de niveles de Z
resolucion = 100
rango=5.5

X=np.linspace(-rango,rango,resolucion)
Y=np.linspace(-rango,rango,resolucion)
Z=np.zeros((resolucion,resolucion))
for ix,x in enumerate(X):
    for iy,y in enumerate(Y):
        Z[iy,ix] = f([x,y])

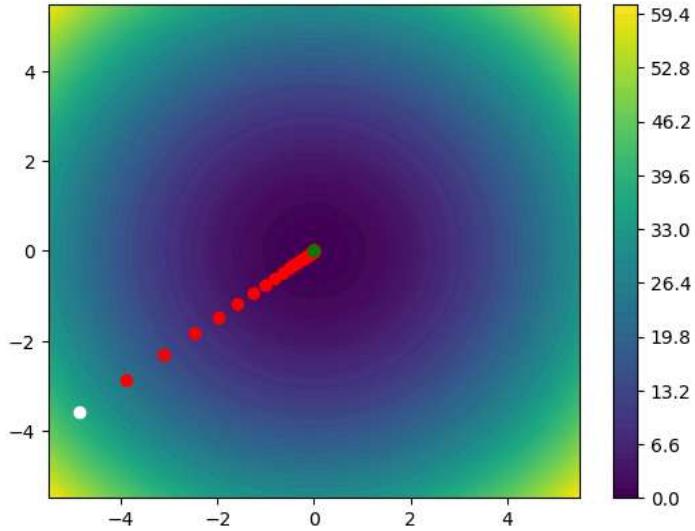
#Pinta el mapa de niveles de Z
plt.contourf(X,Y,Z,resolucion)
plt.colorbar()

#Generamos un punto aleatorio inicial y pintamos de blanco
P=[random.uniform(-5,5 ),random.uniform(-5,5 ) ]
plt.plot(P[0],P[1], "o",c="white")

#Tasa de aprendizaje. Fija. Sería más efectivo reducirlo a medida que nos acercamos.
TA=.1
```

```
#Iteraciones:50
for _ in range(50):
    grad = df(P)
    #print(P,grad)
    P[0],P[1] = P[0] - TA*grad[0] , P[1] - TA*grad[1]
    plt.plot(P[0],P[1],"o",c="red")

#Dibujamos el punto final y pintamos de verde
plt.plot(P[0],P[1],"o",c="green")
plt.show()
print("Solucion:" , P , f(P))
```



Solucion: [-6.93761898327071e-05, -5.1175363308027214e-05] 7.4319735254123895e-09

## Análisis de complejidad - Descenso del Gradiente

**Complejidad temporal:**  $O(k * n)$

- $k$  = numero de iteraciones
- $n$  = dimension del vector de entrada (en este caso  $n=2$ )
- En cada iteracion calculamos el gradiente y actualizamos la posicion

**Complejidad espacial:**  $O(n)$

- Solo almacenamos el punto actual y el gradiente

**Observaciones:**

- El algoritmo es muy eficiente por iteracion
- El numero de iteraciones necesarias depende de la tasa de aprendizaje y la forma de la funcion
- Converge a minimos locales, no necesariamente al minimo global

## ▼ Entrega Opcional: Descenso del Gradiente - Función compleja

Vamos a optimizar la funcion:

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 3\right) \cdot \cos(2x + 1 - e^y)$$

Esta funcion tiene multiples minimos y maximos locales, lo que hace interesante su optimizacion.

```
# Definimos la funcion
# f(x,y) = sin(1/2 * x^2 - 1/4 * y^2 + 3) * cos(2*x + 1 - e^y)

f_extra = lambda X: math.sin(0.5 * X[0]**2 - 0.25 * X[1]**2 + 3) * math.cos(2*X[0] + 1 - math.exp(X[1]))

# Gradiente calculado analiticamente
# df/dx = x*cos(x^2/2 - y^2/4 + 3)*cos(2x + 1 - e^y) - 2*sin(x^2/2 - y^2/4 + 3)*sin(2x + 1 - e^y)
# df/dy = -y/2*cos(x^2/2 - y^2/4 + 3)*cos(2x + 1 - e^y) + e^y*sin(x^2/2 - y^2/4 + 3)*sin(2x + 1 - e^y)
```

```
def df_extra(X):
    x, y = X[0], X[1]

    u = 0.5 * x**2 - 0.25 * y**2 + 3
    v = 2*x + 1 - math.exp(y)

    sin_u = math.sin(u)
    cos_u = math.cos(u)
    sin_v = math.sin(v)
    cos_v = math.cos(v)

    # Derivada parcial respecto a x
    df_dx = x * cos_u * cos_v - 2 * sin_u * sin_v

    # Derivada parcial respecto a y
    df_dy = -0.5 * y * cos_u * cos_v + math.exp(y) * sin_u * sin_v

    return [df_dx, df_dy]

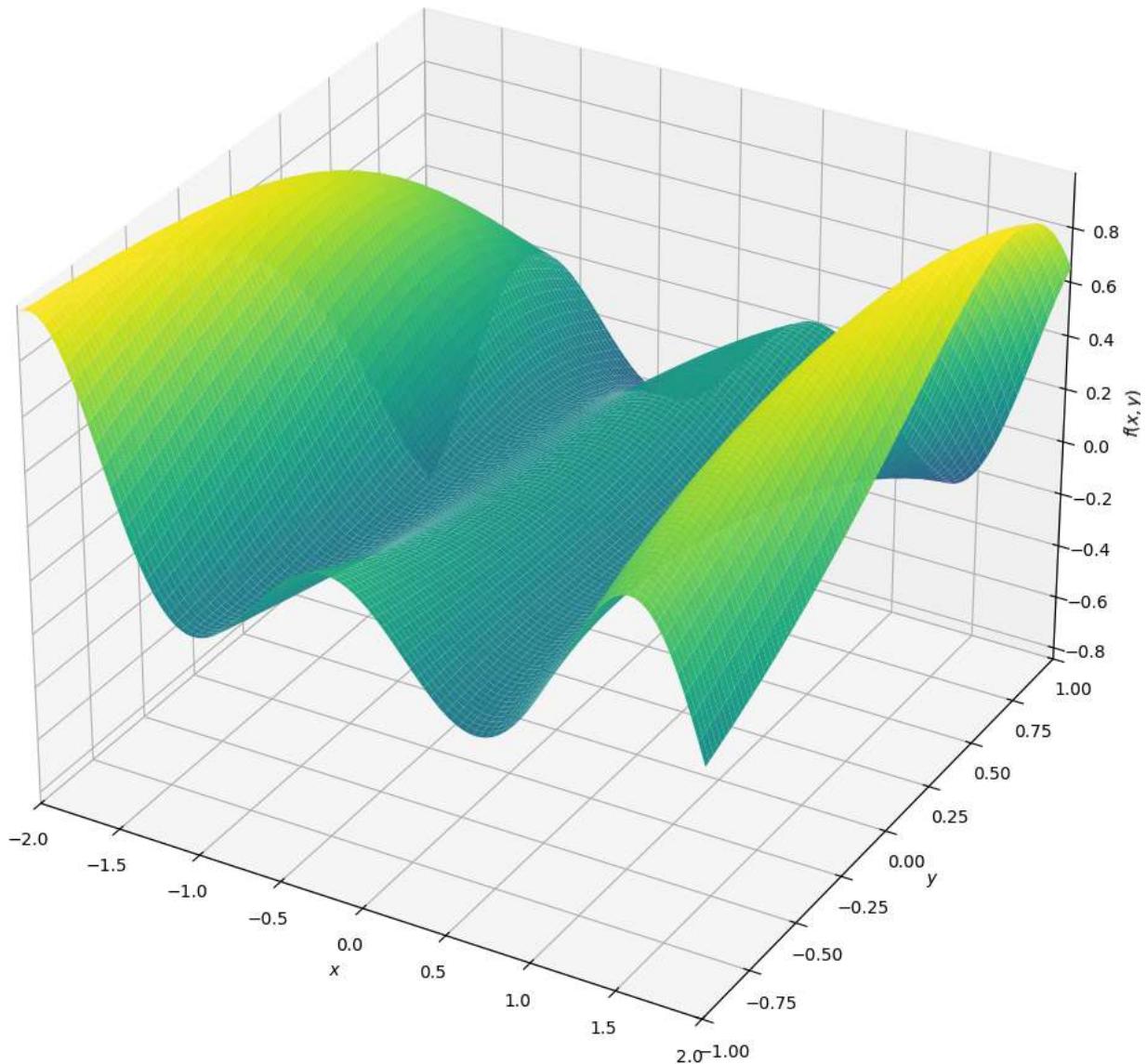
print("Gradiente en (0,0):", df_extra([0, 0]))
```

```
Gradiente en (0,0): [-0.0, 0.0]
```

```
# Visualizacion de la funcion
from sympy import symbols, sin, cos, exp
from sympy.plotting import plot3d

x, y = symbols('x y')
plot3d(sin(0.5*x**2 - 0.25*y**2 + 3) * cos(2*x + 1 - exp(y)),
       (x, -2, 2), (y, -1, 1),
       title='f(x,y) = sin(x^2/2 - y^2/4 + 3) * cos(2x + 1 - e^y)',
       size=(10, 10))
```

$$f(x,y) = \sin(x^2/2 - y^2/4 + 3) * \cos(2x + 1 - e^y)$$



```
<sympy.plotting.backends.matplotlibbackend.matplotlib.MatplotlibBackend at 0x7df594f6ec90>
```

```
# Descenso del gradiente para la funcion extra

# Preparamos la visualizacion
resolucion = 100
rango_x = 2
rango_y = 1

X = np.linspace(-rango_x, rango_x, resolucion)
Y = np.linspace(-rango_y, rango_y, resolucion)
Z = np.zeros((resolucion, resolucion))

for ix, xv in enumerate(X):
    for iy, yv in enumerate(Y):
        Z[iy, ix] = f_extra([xv, yv])

# Pintamos el mapa de niveles
plt.figure(figsize=(10, 8))
plt.contourf(X, Y, Z, resolucion, cmap='viridis')
plt.colorbar()

# Punto inicial aleatorio
P = [random.uniform(-1.5, 1.5), random.uniform(-0.5, 0.5)]
```

```

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="white", markersize=10, label="Inicio")

# Tasa de aprendizaje adaptativa
TA = 0.05

# Guardamos la trayectoria
trayectoria_x = [P[0]]
trayectoria_y = [P[1]]

# Iteraciones
for i in range(100):
    grad = df_extra(P)

    # Actualizamos la posicion
    P[0] = P[0] - TA * grad[0]
    P[1] = P[1] - TA * grad[1]

    # Limitamos los valores para evitar overflow
    P[0] = max(-rango_x, min(rango_x, P[0]))
    P[1] = max(-rango_y, min(rango_y, P[1]))

    trayectoria_x.append(P[0])
    trayectoria_y.append(P[1])

plt.plot(P[0], P[1], "o", c="red", markersize=3)

# Punto final
plt.plot(P[0], P[1], "o", c="lime", markersize=10, label="Final")
plt.legend()
plt.title("Descenso del Gradiente - Funcion compleja")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.show()

print("Punto inicial:", (trayectoria_x[0], trayectoria_y[0]))
print("Punto final:", P)
print("Valor de f en el punto final:", f_extra(P))

```

